Évaluation du provisionnement en assurance non vie (IARD)

Maximilien Dialufuma V.

Objectifs

Cette présentation a pour objectifs de :

- analyser le provisionnement pour sinistres à payer (ou provisions techniques);
- apprendre les méthodes statistiques pour le provisionnement;
- fournir quelques récommandations dans un marché concurrentiel (libéralisation du secteur de l'assurance en R.D.Congo).

C'est quoi les provisions techniques?

- D'après G.Simonet [5] "Les provisions techniques sont les provisions destinées à permettre le règlement intégral des engagements pris envers les assurés et bénéficiaires de contrats.
- Elles sont liées à la technique même de l'assurance, et imposées par la règlementation[1]."

[1] www.arca.cd

Pourquoi les provisions techniques?

- À cause de l'inversion du cycle que comprend le marché des assurances,...
- un contrôle rigoureux de la solvabilité des compagnies afin de protéger les assurés, les actionnaires et/ou l' État;
- Elles permettent le reglèment complet des engagements pris par l'assureur envers ses assurés.

Qui peut faire les provisions techniques et comment ?

- Un actuaire ou un statisticien spécialisé en assurance;
- Prévoir, avec le maximum de précision, le montant nécessaire de cette réserve ou provision;
- Méthodes statistiques rigoureuses.

Développement d'un sinistre

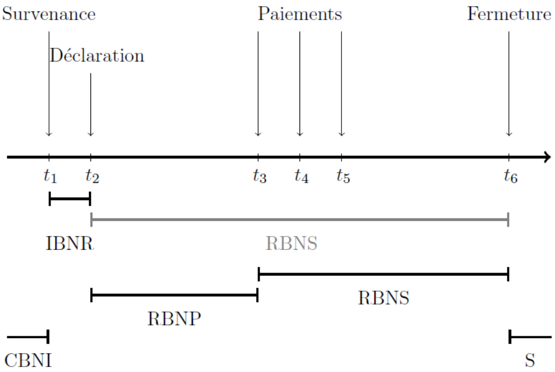


Figure: Évolution d'un sinistre

Développement d'un sinistre

- Le sinistre survient à la date de survenance t_1
- et est déclaré à l'assureur à la date de déclaration t_2.
- Il y a une quasi correspondance pour les dates t_1 et t_2 en IARD.
- Pour d'autres situations (dommages corporels, responsabilité civile), une période de temps plus ou moins longue peut séparer ces deux moments.
- Les paiement s'effectuent au temps $t_3, \ t_4 \ et \ t_5$ avant la fermeture du dossier (t_6).

Réglement des sinistres pour différent produits d'assurances

Années	n	$n+1$	$n+2$	$n+3$	$n+4$
Habitation (multirisque)	55%	90%	94%	95%	96%
Automobile (total)	55%	79%	84%	99%	90%
Automobile (corporel)	13%	38%	50%	65%	72%
Resp. civile	10%	25%	35%	40%	45%

Table: Réglement des sinistres pour différent produits d'assurances

- Les experts font des prédictions du montant total du sinistre réalisées entre la date de déclaration et la date de fermeture du dossier.

Approche du provisionnement

- Dans la littérature actuarielle, il existe deux approches pour évaluer les privisions techniques :
  - Approches Collectives [1, 2, 3]
  - Appproches individuelles [4]
- Les approches collectives sont les plus utilisées en pratiques. On peut citer quelques modèles utilisés pour évaluer les réserves :
  - modèle *Chain-Ladder*
  - modèle de *Mack* (version stochastique de Chain-Ladder)
  - modèle par *GLM (Modèles linéaires généralisés (Poisson))*

Modèle Chain-Ladder (Travailler en triangle)

- Ce modèle est construit à partir d'une base de données résumées par
- période (typiquement une année) de survenance et par période de développement en un tableau nommé *triangle de développement*;
- Ce tableau permet d'évaluer le montant total de la réserve.

Modèle Chain-Ladder (Hypothèses)

- Le modèle repose sur l'hypothèse de stabilité du délai s'écoulant entre la survenance d'un sinistre et le réglement;
- la modélisation exclut :
  - les effets de l'inflation ;
  - les changements de structure du portefeuille;
  - les changements des contrats d'assurance;
  - les changements dans la gestion des sinistres.

Modèle Chain-Ladder (Notations et définitions)

Classiquement, on note

- i : (en ligne) l'année de survenance;
- j : (en colonne) l'année de développement;
- Y_{ij}: les incréments de paiements, pour l'année de développement j, pour les sinistres survenus l'année i;
- C_{ij}: les paiements cumulés, avec

$$C_{ij} = Y_{i,0} + Y_{i,1} + \ldots + Y_{i,j} \text{ pour l'année de survenance } i;$$

- P_i: la prime acquise pour l'année i.

mdialufuma@gmail.com/maximilien.dialufuma.1@ulaval.ca

Modèle Chain-Ladder (Triangle de développement)

- Le triangle de développement est donnée par

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & \cdots & C_{1(J-1)} & C_{1J} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & \cdots & C_{2(J-1)} & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & \\ C_{i1} & C_{i2} & \cdots & C_{i(J-i+1)} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & & & \\ C_{I1} & & & & & \end{bmatrix}.$$

Figure: Triangle de développement

- Les triangles sont définis pour i et j allant de 0 à J plutôt que de 1 à J : il faut alors adapter les formules et les résultats.

Modèle Chain-Ladder (Algorithme du modèle)

L'algorithme du modèle repose sur les deux hypothèses suivantes :

(i) Les montants cumulatifs pour différentes années de survenance sont indépendants ; et

(ii) $\exists$ des facteurs de développement λ_j tels que

$$C_{ij} = \lambda_j C_{ij} \text{ avec } j = 1, \ldots, J-1 \text{ et } j = 1, \ldots, J$$

Modèle Chain-Ladder (Estimation)

On estime les facteurs de développement et le cout total pour chacune des années de survenance pour obtenir une estimation pour la réserve.

$$\hat{\lambda}_k = \frac{\sum_{i=1}^{J_k} C_{i(k+1)}}{\sum_{i=1}^{J_k} C_{ik}}, \text{ pour } k = 1, \ldots, J-1 \text{ (Facteurs de dév.)}$$

$$\hat{C}_{iJ} = \left(\hat{\lambda}_{J-i+1} \times \ldots \times \hat{\lambda}_{J-1}\right) C_{i(J-i+1)} \text{ (Montant ultime)}$$

$$\hat{R}_i = \hat{C}_{iJ} - C_{i(J-i+1)} \text{ (Réserve)}$$

$$\hat{R} = \sum_i \hat{R}_i \text{ (Réserve totale)}$$

Modèle Chain-Ladder (Application)

Considérons le tableau suivant qui représente les paiements cumulés réalisés par un assureur pour le portefeuille d'assurance automobile.

	1	2	3	4	5	6	7	8
2010	200	2800	4200	9500	10000	12000	13000	13500
2011	1900	7700	15800	21000	23000	24000	24500	
2012	300	7200	17000	22000	24000	24400		
2013	850	3200	9300	11600	12000			
2014	360	4900	10300	15200				
2015	500	3500	12000					
2016	560	5200						
2017	270							

Figure: Différents paiements réalisés par un assureur

Modèle Chain-Ladder (Application)

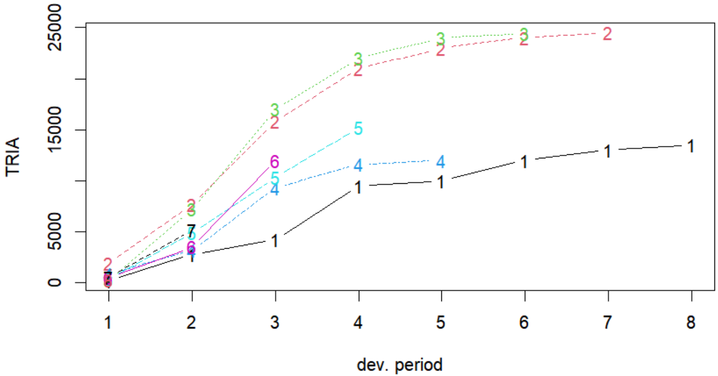
On réecrit le tableau sous la forme triangulaire cumulatif C_{ij}

	[,1]	[,2]	[,3]	[,4]	[,5]	[,6]	[,7]	[,8]
[1,]	200	2800	4200	9500	10000	12000	13000	13500
[2,]	1900	7700	15800	21000	23000	24000	24500	NA
[3,]	300	7200	17000	22000	24000	24400	NA	NA
[4,]	850	3200	9300	11600	12000	NA	NA	NA
[5,]	360	4900	10300	15200	NA	NA	NA	NA
[6,]	500	3500	12000	NA	NA	NA	NA	NA
[7,]	560	5200	NA	NA	NA	NA	NA	NA
[8,]	270	NA	NA	NA	NA	NA	NA	NA

Figure: Paiements cumulés

Modèle Chain-Ladder (Application)

Représentation graphique des paiements cumulés pour l'années de survenance i et pour l'année de développement j.



Modèle Chain-Ladder (Application)

On peut transformer la forme triangulaire cumulatif en triangle incrémental Y_{ij}

	[,1]	[,2]	[,3]	[,4]	[,5]	[,6]	[,7]	[,8]
[1,]	200	2600	1400	5300	500	2000	1000	500
[2,]	1900	5800	8100	5200	2000	1000	500	NA
[3,]	300	6900	9800	5000	2000	400	NA	NA
[4,]	850	2350	6100	2300	400	NA	NA	NA
[5,]	360	4540	5400	4900	NA	NA	NA	NA
[6,]	500	3000	8500	NA	NA	NA	NA	NA
[7,]	560	4640	NA	NA	NA	NA	NA	NA
[8,]	270	NA	NA	NA	NA	NA	NA	NA

Figure: Incréments de paiements

Modèle Chain-Ladder (Application)

- On estime les facteurs de développement pour remplir le triangle cumulatif.

```
[1] 7.387580 2.341297 1.401060 1.076443 1.059649 1.041667 1.038462 1.000000
```

Figure: Facteurs de développement

- Ainsi on a le triangle cumulatif rempli

origin \ dev	1	2	3	4	5	6	7	8
1	200	2800.000	4200.00	9500.000	10000.000	12000.000	13000.000	13500.000
2	1900	7700.000	15800.00	21000.000	23000.000	24000.000	24500.000	25442.308
3	300	7200.000	17000.00	22000.000	24000.000	24400.000	25416.667	26394.231
4	850	3200.000	9300.00	11600.000	12000.000	12715.789	13245.614	13755.061
5	360	4900.000	10300.00	15200.000	16361.934	17337.910	18060.322	18754.950
6	500	3500.000	12000.00	16812.721	18097.937	19177.463	19976.524	20744.851
7	560	5200.000	12174.74	17057.548	18361.479	19456.725	20267.422	21046.938
8	270	1994.647	4670.06	6543.035	7043.204	7463.325	7774.297	8073.309

Figure: Triangle plein

Modèle Chain-Ladder (Application)

Le montant ultime $\hat{C}_{iJ}$ par année de survenance :

```
[1] 13500.000 25442.308 26394.231 13755.061 18754.950 20744.851 21046.938  8073.309
```

La réserve par année de survenance $\hat{R}_i$:

```
[1]      0.0000    942.3077   1994.2308   1755.0607   3554.9502   8744.8515 15846.9380   7803.3087
```

La réserve totale $\hat{R}$:

$$\hat{R} = \sum_i \hat{R}_i = 40641.65$$

Modèle de Mack

- Le modèle de Mack est la version stochastique du modèle de Chain-Ladder.
- Il permet d'estimer les erreurs des valeurs prédites des réserves.
- C'est un modèle stochastique non paramétrique, car aucune hypothèse n'est faite pour la distribution de coûts C_{ij}.

Modèle de Mack

Le Modèle de mack est basé sur les hypothèses suivantes :

(1) $(C_{ij})_{j=1,\ldots,J}$ et $(C_{i'j})_{j=1,\ldots,J}$ sont indépendants pour $i \neq i'$

(2) $\mathbb{E}\left[C_{ij} \mid C_{i1}, \ldots, C_{i(j-1)}\right] = \lambda_{j-1} C_{i(j-1)}$, pour $j = 2, \ldots, J$

Sous ces deux hypothèses, les estimateurs du modèle de Mack sont les mêmes que ceux de Chain-Ladder.

Modèle de Mack

- Pour mesurer la qualité de la prédiction du montant de réserve, on utilise l'erreur quadratique moyenne de prédiction (**MSEP**).
- Pour chaque année de survenance i, le **MSEP** est donné par :

$$\mathbf{MSEP}_{C_{iJ}|\mathcal{A}_{\mathcal{J}}}\left(\hat{C}_{ij}\right) = Var\left[C_{iJ} \mid \mathcal{A}_{\mathcal{J}}\right] + \left(\hat{C}_{ij} - \mathbb{E}\left[C_{iJ} \mid \mathcal{A}_{\mathcal{J}}\right]\right)^2$$

- Le premier terme désigne l'erreur stochastique et le second terme l'erreur d'estimation qu'il faudra tous les estimer, $\mathcal{A}_{\mathcal{J}} = C_{i(J-i+1)}$ correspond à la quantité d'information disponible à J i.e le triangle supérieur.

Modèle de Mack

- Après calcul, l'estimation du **MSEP** donne:

$$Var\left[C_{iJ} \mid \mathcal{A}_{\mathcal{J}}\right] = \left(\mathbb{E}\left[C_{iJ} \mid \mathcal{A}_{\mathcal{J}}\right]\right)^2 \sum_{j=J-i+1}^{J-1} \frac{\sigma_j^2/\lambda_j^2}{\mathbb{E}\left[C_{iJ} \mid \mathcal{A}_{\mathcal{J}}\right]} \tag{1}$$

et

$$C_{i(J-i+1)}^2 \left(\prod_{j=J-i+1}^{J-1} \left(\lambda_j^2 + \frac{\sigma_j^2}{\sum_{i=1}^{J-j} C_{ij}} \right) - \prod_{j=J-i+1}^{J-1} \lambda_j^2 \right) \tag{2}$$

- D'où **MSEP** $= (1) + (2)$.

Modèle de Mack

- La variance σ_j^2 et les facteurs de développement λ_j sont remplacés par leurs estimations :

$$\hat{\sigma}_j^2 = \frac{1}{J-j-1} \sum_{i=1}^{J-j} C_{ij} \left(\frac{C_{i(j+1)}}{C_{ij}} - \hat{\lambda}_j \right)^2$$

et

$$\hat{\lambda}_k = \frac{\sum_{i=1}^{J_k} C_{i(k+1)}}{\sum_{i=1}^{J_k} C_{ik}}, \text{ pour } k = 1, \ldots, J-1$$

Modèle de Mack (Application)

Avec le même exemple on a la sortie suivante.

```
  Latest Dev.To.Date  Ultimate       IBNR   Mack.S.E  CV(IBNR)
1  13500  1.00000000 13500.000     0.0000     0.0000       NaN
2  24500  0.96296296 25442.308   942.3077   518.5941 0.5503448
3  24400  0.92444444 26394.231  1994.2308  1290.5148 0.6471241
4  12000  0.87240618 13755.061  1755.0607  1668.4581 0.9506555
5  15200  0.81045270 18754.950  3554.9502  2094.9629 0.5893086
6  12000  0.57845678 20744.851  8744.8515  5027.8114 0.5749453
7   5200  0.24706682 21046.938 15846.9380  7432.9320 0.4690453
8    270  0.03344354  8073.309  7803.3087 11314.1513 1.4499172

$Totals
                 Totals
Latest:    1.070700e+05
Dev:       7.248582e-01
Ultimate:  1.477116e+05
IBNR:      4.064165e+04
Mack S.E.: 1.601587e+04
CV(IBNR):  3.940754e-01
```

Figure: Sortie du Modèle de Mack

Modèle de Mack (Resumé de la provision)

- La réserve totale est :

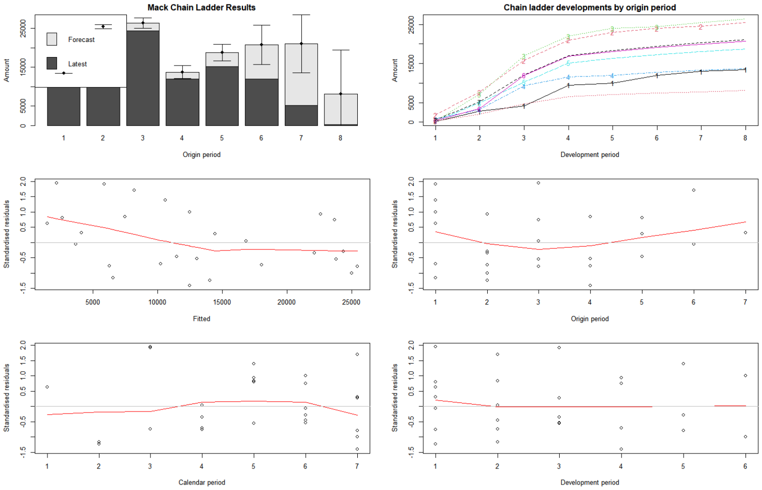
$$IBNR \equiv \hat{R} = 0+942.3077+1994.2308+1755.0607+3554.9502+$$

$$8744.8515+15846.9380+7803.3087 = 40641.65$$

- Vérification de l'écart-type qui mesure l'erreur associée à la prédiction du montant des réserves (réserve totale).

$$\hat{\sigma}_j \equiv Mack.S.E = 1.601587e + 04$$

Modèle de Mack (Resumé de la provision)



Concurrence

La concurrence dans le secteur de l'assurance pousse les assureurs à :

- avoir des réserves suffisantes et fiables.
- offrir une meilleure préstation aux assurés;
- renforcer la gestion des sinistres et les provisonnements;
- assurer une bonne gestion de la solvabilité selon la législation de l'**ARCA**[2];
- utiliser des nouvelles méthodes statistiques rigoureuses afin d'assurer leurs engagements de manière inconditionnelle.

[2] www.arca.cd

[1] Michel Denuit and Arthur Charpentier. *Mathematiques de l'Assurance Non-Vie. Tome II: Tarification et Provisionnement*. 2005.

[2] Thomas Mack. A simple parametric model for rating automobile insurance or estimating ibnr claims reserves. *ASTIN Bulletin: The Journal of the IAA*, 21(1):93–109, 1991.

[3] Thomas Mack. The standard error of chain ladder reserve estimates: Recursive calculation and inclusion of a tail factor. *ASTIN Bulletin: The Journal of the IAA*, 29(2):361–366, 1999.

[4] Michael Merz. *Stochastic claims reserving methods in insurance*. John Wiley & Sons, 2008.

[5] G. Simonet. *Comptabilité des entreprises d'assurance.* L'Argus de l'Assurance, 1998.