Chapitre 03 : SUITES ET SERIES DE FONCTIONS.

Dans tout ce qui suit, on note par $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et on designe par $|\cdot|$ le module (resp la valeur absolue) suivant que $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ (resp $\mathbb{K} = \mathbb{R}$). Dans ce chapitre, on se contentera d'etudier des fonctions à valeur dans $\mathbb{K}$.

3-1) Convergence simple et convergence Uniforme des suites de fonctions.

Dans la suite E designe un ensemble quelconque non vide

Définit° 3-1-1

Soit $\mathcal{F}$ l'ensemble des fonctions définis sur E à valeur dans $\mathbb{K}$

Une suite de fonction $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de E dans $\mathbb{K}$ est une application

$$n \in \mathbb{N} \longmapsto f_n \in \mathcal{F}$$

Définition 3-1-2)

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonct° de E dans $\mathbb{K}$, on dit qu'elle converge simplement sur E, si pour chaque $x \in E$ fixé, la suite numérique $(f_n(x))_n$ admet une limite $l \in \mathbb{K}$ quand $n \to +\infty$

La fonction $f.\ x \in E \longmapsto f(x) = l_x \in \mathbb{K}$ est appelée la limite simple de la suite de fonction $(f_n)_n$ et on dira que $(f_n)_n$ converge simplement sur E vers la fonction f

La définition ci-après est équivalente à cette dernière

Définition 3-1-3 Soit (f_n) une suite de fonction de E dans $\mathbb{K}$. On dit que (f_n) converge simplement vers une fonction f de E dans $\mathbb{K}$ si pour $\forall\ \varepsilon > 0$ et tout $x \in E$, il existe un entier $N_\varepsilon^x > 0$ tel que

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon \quad \text{pour } \forall\ n \geq N_\varepsilon^x$$

Exemple 3-1-1

A) On considère $E = \mathbb{R}$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et (f_n) la suite de fonction définie

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 + x^2 \sin\left(\frac{1}{nx}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

On se propose d'étudier la convergence simple de la suite de fonction $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$. Pour cela il faut remarquer que

→ 1) si $x = 0$ alors la suite numérique $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est égale à une constante égale à 1 D'où $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = 1$

→ 2) si $x \neq 0$ alors $f_n(x) = 1 + x^2 \sin\left(\frac{1}{nx}\right)$ pour $\forall\ n \in \mathbb{N}^*$

On conclut que $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = 1$

Ainsi la suite de fonction (f_n) converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers la fonction

$$f : x \in \mathbb{R} \longmapsto f(x) = 1$$

B) On considère $E = \mathbb{R}_+$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et la suite de fonction $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par

$$f_n(x) = \frac{1}{n+x}$$

Pour chaque $x \in \mathbb{R}_+$ fixé, on a $\lim_{n \to +\infty} f(n) = 0$ on conclut alors que la ~~suite~~ suite de fonction $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$ vers la fonction constante nulle.

D'une autre manière il est facile de voir que pour $\forall \varepsilon > 0$ et tout $x \in \mathbb{R}_+$ $|f_n(x)| \leq \varepsilon$ pour $\forall n \geq N_\varepsilon^x = \max\left(0, E\left(\frac{1}{\varepsilon} - x\right) + 1\right)$

c) On considère $E = [0,1]$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et la suite de fonction $(f_n)_n$ définie par $f_n(x) = x^n$

Pour $x \in [0,1[$ on a $\lim_{n \to +\infty} f_n(x) = \lim_{n \to +\infty} x^n = 0$ et pour $x = 1$ $\lim_{n \to +\infty} f_n(x) = \lim_{n \to +\infty} x^n = 1$. On conclut que la fonction $(f_n)_n$ converge simplement sur $[0,1]$ vers la fonction

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0,1[\\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

Remarque

On peut remarquer que la fonction f n'est pas continue sur $[0,1]$ bien que pour $\forall n$ fixé la fonction f est continue
On montre que la propriété de continuité n'est pas nécessairement conservée par passage d'une limite simple

Remarque 3-1-1) Dans la définition 3-1-3) l'entier N_ε^x dépend en général de ε et de x. Si on impose à N_ε^x de dépendre uniquement de ε on obtient alors un mode de convergence plus restrictif appelé Convergence uniforme

Définit° 3-1-4) Soit (f_n) une suite de fonction de E ds $\mathbb{K}$

On dit que (f_n) converge uniformément sur E vers une fonct° f de E ds $\mathbb{R}$ si pour $\forall\ \varepsilon > 0$, il existe un entier $N_\varepsilon > 0$ tel que pour $\forall\ n \geq N_\varepsilon$ on ait :

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon \text{ pour } \forall\ x \in E$$

Proposition 3.1.1 Soit (f_n) une suite de fonct° de E dans $\mathbb{K}$, et soit f une fonction de E dans $\mathbb{K}$. Pour que la suite (f_n) converge ~~il faut et il suffit~~ uniformément sur E → f il faut et il suffit que la suite $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $M_n = \sup\limits_{x \in E} |f_n(x) - f(x)|$

converge vers zéro

Preuve. (TPE).

Corollaire 3-1.1] Soit (f_n) une suite de fonction de E dans $\mathbb{K}$ et soit f une fonction de E dans $\mathbb{K}$.

1) Pour que (f_n) converge uniformément sur E vers f il suffit qu'il existe une suite $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de réels positifs convergente vers zéro et telle que $|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon_n$ pour $\forall\ x \in E$ et tout $n \in \mathbb{N}$

2) Pour que (f_n) ne converge pas uniformément sur E vers f il suffit qu'il existe une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de E telle que la suite $(f_n(x_n) - f(x_n))_n$ ne converge pas vers zéro.

Exemple 3-1-2) On considère la suite de fonct° $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 + x^2 \sin\left(\dfrac{1}{nx}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Comme on l'a déjà vu dans l'exemple 3-1-1, la suite (f_n) converge simplement sur $\mathbb{R}$ ~~vers~~ vers la fonct° $f : x \in \mathbb{R} \longmapsto f(x) = 1$

Maintenant on se propose d'étudier la convergence uniforme sur $\mathbb{R}$ de la suite de fonction (f_n)

Pour cela en posant $x_n = n$ pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$ on a

$$|f_n(x_n) - f(x_n)| = \left|1 + x_n^2 \sin\left(\frac{1}{nx_n}\right) - 1\right| = \left|x_n^2 \sin\left(\frac{1}{nx_n}\right)\right| \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1$$

$$= \left|x_n^2 \sin\left(\frac{1}{nx_n}\right)\right| = \left|n^2 \sin\left(\frac{1}{n^2}\right)\right| \xrightarrow[n \to +\infty]{} 2$$

Donc d'après le corollaire 3-1-1 la suite (f_n) ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}$ vers f.

Toutefois la suite $(f_n)_n$ converge uniformément sur toute bornée I de $\mathbb{R}$. En effet pour $\forall x \in I \setminus \{0\}$

$$f_n(x) - f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{nx}\right) & \text{si } x \in I \setminus \{0\} \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

et donc $|f_n(x) - f(x)| = \left|x^2 \sin\left(\frac{1}{nx}\right)\right|$

$$\leq |x^2| \left|\frac{1}{nx}\right| = \frac{1}{n}|x| \quad \text{pour } \forall x \in I$$

Comme I est borné alors il existe un nbre positif tel que $|x| \leq M$ pour $\forall x$ dans I. Il en découle que $|f_n(x) - f(x)| \leq \frac{M}{n}$ pour $\forall x \in I$

Puisque la suite $\left(\frac{M}{n}\right)$ converge vers zéro on en tire grâce au corollaire 3-1-1 que la suite (f_n) converge uniformément sur I vers f

<u>Définition 3-1-5</u> Soit $(f_n)_n$ une suite de fonction de E dans $\mathbb{K}$.

On dit que (f_n) est uniformément de Cauchy si la propriété suivante est satisfaite

Pour tout $\varepsilon > 0$ il $\exists$ un entier $N_\varepsilon > 0$ tel que pour $\forall (p,q) \in \mathbb{N}^2$ vérifiant $q > p \geq N_\varepsilon$ on ait

$$|f_q(x) - f_p(x)| \leq \varepsilon \text{ pour } \forall x \in E$$

Théorème 3-1-1) (Critère de Cauchy pour la convergence uniforme)

Pour qu'une suite de fonct (f_n) de E dans $\mathbb{K}$ soit uniformement convergente il faut et il suffit qu'elle soit uniformement de Cauchy

Preuve.

On suppose que la suite de fonction (f_n) soit uniformement convergente sur E vers une fonction f (de E dans $\mathbb{K}$)

Pour cela Montrons alors que (f_n) est uniformement de Cauchy

Pour cela on se donne un nombre $\varepsilon > 0$.

Soit N_ε un entier positif tel que pour $\forall$ $|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon/2$

pour $\forall x \in E$ et tout $n \geq N_\varepsilon$

Soit $(p,q) \in \mathbb{N}^2$ tel que $q > p \geq N_\varepsilon$ On a :

$$\forall x \in E, \; |f_q(x) - f_p(x)| = |f_q(x) - f(x) + f(x) - f_p(x)|$$

$$\leq |f_q(x) - f(x)| + |f(x) - f_p(x)|$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Ceci montre que la suite de fonction (f_n) est uniformement de Cauchy sur E

Reciproquement on suppose que la suite de fonction (f_n) soit uniformement de Cauchy sur E et soit $\varepsilon > 0$ il $\exists$ alors $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que $|f_q(x) - f_p(x)| \leq \varepsilon$ pour $\forall x \in E$ et tout $(q,p) \in \mathbb{N}^2$ verifiant $q > p \geq N_\varepsilon$. Pour tout $x \in E$ <u>fixé</u> la suite $(f_n(x))$ est de Cauchy dans $\mathbb{K}$ et donc elle converge. Posons

Posons pour chaque $x \in E$

$f(x) = \lim_{n \to +\infty} f_n(x)$ En faisant tendre q vers l'infini

on obtient $|f(x) - f_p(x)| \leq \varepsilon$ pour $\forall x \in E$ et tout $p \geq N$.

On vient ainsi de montrer que la fonct° (f_n) converge uniformement vers la fonct° f.

Théorème 3.12 (Convergence uniforme et double passage à la limite)

Soit (f_n) une suite de fonction d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{K}$ convergeante uniformement sur I vers une fonction f et soit x_0 un point adherent à I On suppose que pour chaque n la limite $l_n = \lim_{x \to x_0} f_n(x)$ existe ~~et~~ alors la suite (l_n) admet une limite $l \in \mathbb{K}$ et $f(x)$ tend vers l quand $x \to x_0$

En d'autres termes on a :

$$\lim_{n \to +\infty} \left(\lim_{x \to x_0} f_n(x) \right) = \lim_{x \to x_0} \left(\lim_{n \to +\infty} f_n(x) \right)$$

$\boxed{\text{Preuve}}$ Soit $\varepsilon > 0$

Comme $(f_n)_n$ est uniformement convergente sur I vers f alors elle est uniformement de Cauchy sur I. Alors il $\exists$ un entier $N_\varepsilon > 0$ tel que $|f_q(x) - f_p(x)| \leq \frac{\varepsilon}{3}$ pour tout $x \in I$ et tout $(p;q) \in \mathbb{N}^2$ satisfaisant $q > p \geq N_\varepsilon$. En passant à la limite quand x tend vers x_0 on obtient $|l_q - l_p| \leq \frac{\varepsilon}{3}$ pour tout $q > p \geq N_\varepsilon$.

Ceci prouve que la suite $(l_n)_n$ est de Cauchy donc elle est ~~donc~~ convergente.

Posons $\ell := \lim_{n \to +\infty} \ell_n$ Alors $\exists M_\varepsilon$ entel que $|\ell_n - \ell| \leq \frac{\varepsilon}{3}$ pour tout $n \geq M_\varepsilon$

En posant $N := \max(N_\varepsilon, M_\varepsilon)$ et puisque $\lim_{x \to x_0} f_N(x) = \ell_N$

On en tire l'existence d'un réel $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in I$ verifiant $|x - x_0| \leq \delta$ on ait $|f_N(x) - \ell_N| \leq \frac{\varepsilon}{3}$ Ainsi pour tout $x \in I \cap]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$ on a:

$$|f(x) - \ell| \leq |f(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - \ell_N| + |\ell_N - \ell| \leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

Ceci montre que $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$ En d'autres thermes

$$\lim_{x \to x_0} \left(\lim_{n \to +\infty} f(x) \right) = \lim_{n \to +\infty} \left(\lim_{x \to x_0} f(x) \right).$$

Théorème 3.1.3. (Convergence Uniforme et Continuité)

Soit (f_n) une suite de fonction d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{K}$, convergeant uniformement sur I vers une fonction f et soit $x_0 \in I$. alors si, pour chaque entier n la fonction f est continue en x_0 alors f est continue en x_0 et on a:

$$\lim_{x \to x_0} \left(\lim_{n \to +\infty} f_n(x) \right) = \lim_{n \to +\infty} \left(\lim_{x \to x_0} f_n(x) \right).$$

Preuve. TPE

Remarque 3-1-3 Dans la pratique on utilise souvent la contraposée du théorème 3-1-8) pour montrer qu'une suite de fonct (f_n) d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{K}$ ne converge pas uniformement vers une fonct° f (de I dans $\mathbb{K}$)

Exple 3-1-3

Considerons la suite de fonct $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de fonction de $I=[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$f_n(x)=x^n$$

La suite de fonct $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement sur I vers la fonct f définie par :

$$f(x)=\begin{cases}0 & \text{si } x\in[0,1[\\ 1 & \text{si } x=1\end{cases}$$ (cf exemple 3-1-1)

Étant donné que chaque entier n la fonct f_n est continue en $1=x_0$ et que la fonct f n'est pas continue en 1 (~~car lim~~ car $\lim_{x\to 1^-} f(x)=0\neq f(1)=1$) on en deduit ~~que~~ grâce à la théorème 3-1-3 que la suite de fonct $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ne converge pas uniformement sur $I=[0,1]$ vers la fonction f.

Corollaire 3-1-2) Soit (f_n) une suite de fonct d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{K}$, convergeant ~~uniformément~~ uniformement sur I vers une fonct f si, pour chaque entier n, la fonction f_n est continue sur I alors f est continue sur I

Théorème 3-1-4) (Dérivabilité de la limite simple d'une suite de fonction)

Soit (f_n) une suite de fonction d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ ~~de~~ dans $\mathbb{K}$. On suppose que les propriétés suivantes sont vérifiées.

1) - La suite de fonct converge simplement sur I vers une fonct f

2) - Pour chaque entier n la fonct f_n est dérivable sur I

3) - La suite de fonct (f_n') converge uniformement sur I. Alors f est dérivable sur I et $f'(x)=\lim_{n\to+\infty} f_n'(x)$ pour $\forall x\in I$

En d'autres termes on a :

$$\frac{d}{dx}\left[\lim_{n\to+\infty} f_n(x)\right] = \lim_{n\to+\infty}\left[\frac{d}{dx} f_n(x)\right]$$

Théorème 3-1-5 Soit (f_n) une suite de fonct° ~~d'un intervalle~~ intégrables d'un intervalle compact $[a,b]$ de $\mathbb{R}$ $(a<b)$ dans $\mathbb{K}$ convergeant uniformément sur $[a,b]$ vers une fonct° f. Alors f est intégrable sur $[a,b]$ et :

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to+\infty}\int_a^b f_n(x)\,dx$$

En d'autres termes on a : $\int_a^b \left(\lim_{n\to+\infty} f_n(x)\right)dx = \lim_{n\to+\infty}\int_a^b f_n(x)\,dx.$

~~Remarque~~

Preuve

1) Montrons que f est intégrable (au sens de Riemann) sur $[a,b]$

Rappel Soit f une fonction d'un intervalle compact $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$

On dit que f est intégrable (au sens de Riemann) si pour tt $\varepsilon>0$, ils existent des fonct° en escalier g^ε et h^ε sur $[a,b]$ telle que $g^\varepsilon(x)\leq f(x)\leq h^\varepsilon(x)$, $x\in[a,b]$ et $\int_a^b (h^\varepsilon(x)-g^\varepsilon(x))\,dx\leq\varepsilon$

On se donne un nombre $\varepsilon>0$. Comme (f_n) est uniformément convergente ~~vers~~ sur $[a,b]$ vers f

il $\exists N_\varepsilon\in\mathbb{N}$ tel que $|f_N(x)-f(x)|\leq \varepsilon/4(b-a)$ pour $\forall x\in[a,b]$

Puisque f_N est intégrable (au sens de Riemann) sur $[a,b]$, ils existent deux fonctions g_N^ε et h_N^ε en escalier sur $[a,b]$ telles que $g_N^\varepsilon(x)\leq f_N(x)\leq h_N^\varepsilon(x)$ pour $\forall x\in[a,b]$ et $\int_a^b (h_N^\varepsilon(x)-g_N^\varepsilon(x))\,dx\leq\frac{\varepsilon}{2}$

Posons g^ε et h^ε les fonctions en escaliers sur $[a,b]$ définies par :

Pour $\forall x \in [a,b]$

$$g^\varepsilon(x) = g_N^\varepsilon(x) - \frac{\varepsilon}{4(b-a)} \quad \text{et} \quad h^\varepsilon(x) = h_N^\varepsilon(x) + \frac{\varepsilon}{4(b-a)}$$

Alors il est évident de vérifier que $g^\varepsilon(x) \leq f(x) \leq h^\varepsilon(x)$ pour $\forall$ $x \in [a,b]$ et que :

$$\int_a^b \left(h^\varepsilon(x) - g^\varepsilon(x)\right) dx = \frac{\varepsilon}{2} + \int_a^b \left(h_N^\varepsilon(x) - g_N^\varepsilon(x)\right) dx \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Ceci montre que la fonction f est intégrable sur $[a,b]$

Montrons maintenant que $\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n \to +\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx$

2) Montrons maintenant que la suite de fonction (f_n) converge

Soit $\varepsilon > 0$ Grâce au fait que la suite de fonction (f_n) converge uniformément sur $[a,b]$ vers f il existe un entier $N_\varepsilon > 0$ tel que

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{(b-a)} \text{ pour } \forall\, n \geq N_\varepsilon \text{ et tout } x \in [a,b]$$

On a alors pour $\forall\, n \geq N_\varepsilon$,

$$\left|\int_a^b f_n(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx\right| = \left|\int_a^b (f_n(x) - f(x))\,dx\right|$$

$$\leq \int_a^b |f_n(x) - f(x)|\,dx$$

$$\leq \int_a^b \frac{\varepsilon}{b-a}\,dx = \varepsilon$$

Ceci prouve que $\boxed{\lim_{n \to +\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx}$

<u>Exemple</u> 2-1-4)

On considère la suite (f_n) de fonct. de $[0, \pi/2]$ dans $\mathbb{R}$, définie par

$$f_n(x) = n \sin(x) (\cos x)^n$$

Pour $\forall x \in [0, \pi/2]$ $\lim_{n \to +\infty} f_n(x) = 0$ Donc f_n converge sur $[0, \pi/2]$ vers la fonction nulle

11

$\cancel{n \sin(x)\, e^{n \ln \cos x}}$

On a : pour tt $n \in \mathbb{N}^*$ $\int_0^{\pi/2} f_n(x)\,dx = n\int_0^{\pi/2} \sin x\,(\cos x)^n\,dx$

posons $u = \cos x$ on aura : $\int_0^{\pi/2} f_n(x)\,dx = n\int_1^0 u^n(-du) = \cancel{n\int_1^0 u^n}$

$$= n\int_0^1 u^n\,du$$

$$= \frac{n}{n+1}\left[u^{n+1}\right]_0^1$$

$$\int_0^{\pi/2} f_n(x)\,dx = \frac{n}{n+1}$$

Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \int_0^{\pi/2} f_n(x)\,dx = 1 \neq \int_0^{\pi/2} f(x)\,dx$

On a monter que la suite de fonct (f_n) ne converge pas uniformement sur $[0,\pi/2]$ vers la fonct nulle.