Sommes de Riemann

Exercice 1. Calculer la limite de la suite suivante quand $n \to \infty$:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+n}$$

Posons $x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+n}$, donc

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n(\frac{k}{n}+1)} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\frac{k}{n}+1}$$

avec $f(t) = \frac{1}{1+t}$ sur $[0,1]$, on reconnaît la somme de Riemann et la subdivision régulière est

$$\sigma_n^k = \frac{k}{n}, \quad k \in \{1, \dots, n\}.$$

Comme f est continue sur $[0,1]$, donc elle est intégrable au sens de Riemann sur $[0,1]$.
La limite est donc

$$\lim_{n \to +\infty} x_n = \int_0^1 f(t)\, dt = \int_0^1 \frac{1}{1+t}\, dt = [\ln(1+t)]_0^1 = \ln 2$$

Exercice 2. Calculer la limite de la suite suivante quand $n \to \infty$:

$$\frac{1}{n^2}\left(\sqrt{1(n-1)} + \sqrt{2(n-2)} + \cdots + \sqrt{(n-1)1}\right)$$

Posons

$$c_n = \frac{1}{n^2}\left(\sqrt{1(n-1)} + \sqrt{2(n-2)} + \cdots + \sqrt{(n-1)1}\right)$$

En factorisant, on remarque que

$$c_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \sqrt{\frac{k}{n}(1-\frac{k}{n})}$$

Ainsi, $f(t) = \sqrt{t(1-t)}$ sur $[0,1]$, on reconnaît la somme de Riemann et la subdivision régulière est

$$\sigma_n^k = \frac{k}{n}, \quad k \in \{1, \dots, n\}.$$

Comme f est continue sur $[0,1]$, elle est intégrable au sens de Riemann sur $[0,1]$.
La limite est donc

$$\lim_{n \to +\infty} c_n = \int_0^1 f(t)\, dt = \int_0^n \sqrt{t(1-t)}$$

Rappel :

$$t(1-t) = t - t^2 = \frac{1}{4} - (t - \frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}(1 - (2t-1)^2)$$

En effectuant un changement de variable, $2t - 1 = \sin y$, on obtient :

$$c_n = \frac{1}{8}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos(2y)+1)dy = \frac{\pi}{8}$$

Exercice 3. Calculer la limite de la suite suivante quand $n \to \infty$:

$$n\sqrt{(1+\frac{1}{n})(1+\frac{2}{n})\cdots(1+\frac{n}{n})}$$

Indication:
On applique ln et après on reconnaît la fonction f

Exercice 4. Calculer la limite de la suite suivante quand $n \to \infty$:

$$\frac{\pi}{n}\left(\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)+\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)+\cdots+\sin\left(\frac{(n-1)\pi}{n}\right)\right)$$

Soit

$$d_n = \frac{\pi}{n}\left(\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)+\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)+\cdots+\sin\left(\frac{(n-1)\pi}{n}\right)\right)$$

donc,

$$d_n = \frac{\pi}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\sin(\frac{k}{n}\pi)$$

Avec, $f(t) = \sin(t)$ sur $[0, \pi]$, on reconnaît la somme de Riemann et la subdivision régulière est $\sigma_n^k = \frac{k}{n}$, $k \in \{1, \dots, n\}$. Comme f est continue sur $[0, \pi]$, donc elle est intégrable au sens de Riemann sur $[0, \pi]$.
La limite est donc

$$\lim_{n\to+\infty} d_n = \int_0^{\pi} f(t)\,dt = \int_0^{\pi} \sin(t)\,dt = [-\cos(t)]_0^{\pi} = 2$$

Exercice 5. ,Calculer la limite de la suite suivante quand $n \to \infty$:

$$\frac{\sum_{k=1}^{n} k^{a-1}}{n^a}, \quad a \geq 1$$

Posons

$$e_n = \frac{\sum_{k=1}^{n} k^{a-1}}{n^a}, \quad a \geq 1$$

Alors

$$e_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{k^{a-1}}{n^a} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^{a-1}}{n^{a-1}} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^{a-1}$$

avec $f(t) = t^{a-1}$ sur $[0, 1]$, on reconnaît la somme de Riemann et la subdivision régulière est $\sigma_n^k = \frac{k}{n}$, $k \in \{1, \dots, n\}$.
Comme f est continue sur $[0, 1]$, elle est intégrable au sens de Riemann sur $[0, 1]$.
La limite est donc

$$\lim_{n\to+\infty} e_n = \int_0^1 f(t)\,dt = \int_0^1 t^{a-1}\,dt = \frac{1}{a}$$

Exercice 6. Calculer la limite de la suite suivante quand $n \to \infty$:

$$\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2+\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)}$$

Indication:
Il faut donner une équivalence de sin

Exercice 7. Calculer la limite de la suite suivante quand $n \to \infty$:

$$\frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n}k^2\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$$

Posons

$$f_n = \frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n}k^2\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$$

Alors

$$f_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{n^2}\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) = \frac{1}{\pi^3}\frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k\pi}{n}\right)^2\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$$

Avec $f(t) = t^2\sin(t)$ sur $[0, \pi]$, on reconnaît la somme de Riemann, et la subdivision régulière est

$$\sigma_n^k = \frac{k}{n}, \quad k \in \{1, \ldots, n\}.$$

Comme f est continue sur $[0, \pi]$, elle est donc intégrable au sens de Riemann sur $[0, \pi]$.
Finalement, nous avons

$$\lim_{n\to+\infty} f_n = \frac{1}{\pi^3}\int_0^{\pi} f(t)\,dt = \frac{1}{\pi^3}\int_0^{\pi} t^2\sin(t)\,dt = \frac{\pi^2+4}{\pi^3}.$$

Exercice 8. Calculer la limite de la suite suivante quand $n \to \infty$:

$$\sqrt[n]{\left(1+\left(\frac{1}{n}\right)^2\right)\left(1+\left(\frac{2}{n}\right)^2\right)\cdots\left(1+\left(\frac{n}{n}\right)^2\right)}$$

On pose

$$g_n = \sqrt[n]{\left(1+\left(\frac{1}{n}\right)^2\right)\left(1+\left(\frac{2}{n}\right)^2\right)\cdots\left(1+\left(\frac{n}{n}\right)^2\right)}$$

Indication:
On pose

$$G_n = \ln(g_n) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)$$

Avec $f(t) = \ln(1+t)$ sur $[0,1]$, on reconnaît la somme de Riemann et la subdivision régulière est

$$\sigma_n^k = \frac{k}{n}, \quad k \in \{1, \dots, n\}.$$

Comme f est continue sur $[0,1]$, donc elle est intégrable au sens de Riemann sur $[0,1]$, et

$$\int_0^1 \ln(1+t)\,dt = 2\ln(2) - 1.$$

Or grâce à la continuité de la fonction ln, on a :

$$\lim_{n\to+\infty} g_n = e^{2\ln(2)-1} = \frac{4}{e}.$$

Exercice 9. Calculer la limite de la suite suivante quand $n \to \infty$:

$$\left(\frac{n+1}{\sqrt{n}} \cdot \frac{n+2}{\sqrt{2n}} \cdots \frac{2n}{\sqrt{n^2}}\right)^{\frac{1}{\ln(n)}}$$

Indication:
On applique $\ln(x_n)$

Exercice 10. Calculer la limite de la suite suivante quand $n \to \infty$:

$$\sum_{k=1}^{n} \tan^2\left(\frac{1}{\sqrt{n+k}}\right)$$

La limite de cette suite est ...

Exercice 11. Calculer la limite de la suite suivante quand $n \to \infty$:

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}(n-k)\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t)\,dt,$$

où f est une fonction continue sur $[0,1]$

La limite de cette suite est ...

Exercice 12. Calculer la limite de la suite suivante quand $n \to \infty$:

$$\sum_{n=1}^{n} \sin\left(\frac{k}{n}\right) \sin\left(\frac{k}{n^2}\right)$$

(utiliser un encadrement de $\sin(x)$)

La limite de cette suite est ...

Exercice 13. Calculer la limite de la suite suivante quand $n \to \infty$:

$$\ln\left(1+\frac{\pi}{n}\right)\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2+\cos\left(\frac{3k\pi}{n}\right)}$$

Indication:
On donne une équivalence de $\ln\left(1+\frac{\pi}{n}\right)$.
Puis sur l'intégrale, après avoir reconnu la fonction associée,
on effectue un changement de variable: $u = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$

Exercice 14. Calculer la limite de la suite suivante quand $n \to \infty$:

$$\frac{\sqrt{n!}}{n^n}$$

Pareil,
On pose $V_n = \ln(u_n)$, avec $u_n = \frac{\sqrt{n!}}{n^n}$ et par la continuité de ln, on arrive à trouver le résultat voulu.

Exercice 15. Calculer la limite de la suite suivante quand $n \to \infty$:

$$\frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{kn}$$

Indication: On factorise par $\frac{1}{n}$,
Puis on reconnaît la fonction $f(t) = \frac{1}{1+t}$ sur l'intervalle $[0, k-1]$. Et enfin, on obtient le résultat voulu.

Exercice 16. Calculer la limite de la suite suivante :

$$u_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k^2+n^2}$$

Soit $u_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k^2+n^2} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\left(\frac{k}{n}\right)^2+1}$. En posant $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, nous venons d'écrire la somme de Riemann correspondant à $\int_0^1 f(x)\,dx$. Cette intégrale se calcule facilement :

$$\int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = [\arctan(t)]_0^1 = \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4}.$$

La somme de Riemann u_n, convergeant vers $\int_0^1 f(x)\,dx$, nous venons de montrer que u_n converge vers $\frac{\pi}{4}$.

Exercice 17. Calculer la limite de la suite suivante :

$$v_n = \prod_{k=1}^{n} \left(1+\frac{k^2}{n^2}\right)^{\frac{1}{n}}$$

Soit $v_n = \prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k^2}{n^2}\right)^{\frac{1}{n}}$. Notons

$$w_n = \ln(v_n) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{k^2}{n^2}\right).$$

En posant $g(x) = \ln(1+x^2)$, nous reconnaissons la somme de Riemann correspondant à $\int_0^1 g(x)\,dx$.
Calculons cette intégrale :

$$I = \int_0^1 g(x)\,dx = \int_0^1 \ln(1+x^2)\,dx.$$

Utilisons l'intégration par parties :

$$\begin{aligned} I &= \left[x\ln(1+x^2)\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{2x}{1+x^2} x\,dx \\ &= \ln(1+1^2) - 2\int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2}\,dx \\ &= \ln(2) - 2\left(\int_0^1 1 - \frac{1}{1+x^2}\,dx\right) \\ &= \ln(2) - 2\left([x]_0^1 - \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}\right) \\ &= \ln(2) - 2\left(1 - \frac{\pi}{4}\right) \\ &= \ln(2) - 2 + \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Nous venons de prouver que $w_n = \ln(v_n)$ converge vers $I = \ln(2) - 2 + \frac{\pi}{2}$, et puisque la fonction exp est continue, alors $v_n = \exp(w_n)$ converge vers

$$\exp\left(\ln(2) - 2 + \frac{\pi}{2}\right) = 2\exp\left(\frac{\pi}{2} - 2\right).$$

Conclusion : (v_n) a pour limite $2\exp\left(\frac{\pi}{2} - 2\right)$.

Exercice 18. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Exprimer A^2 en fonction de A.

   On a $A^2 = A + 2I$.

2. En déduire l'inverse de A.

   On a $A(A-I)/2 = I$ qui donne $A^{-1} = (A-I)/2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \frac{1}{2}$.