TD8 :Chaînes de Markov

Contents

Exercice 1

Soit X_n une chaîne de Markov homogène de matrice de transition

$$G = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

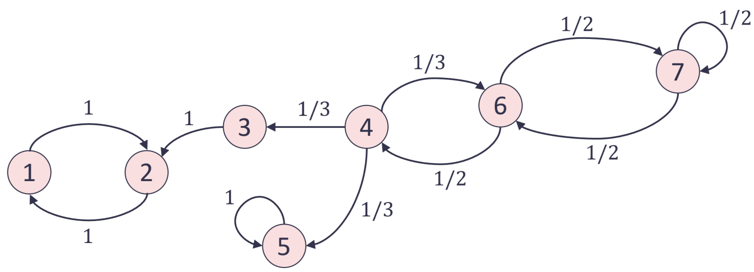
Tracer le diagramme sagittal correspondant, et partitionner l'espace d'états en classes transitoires et récurrentes.

Solution

En regardant les dimensions de la matrice de transition (7×7), on peut voir que la chaîne de Markov en question a 7 états $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.

Pour rappel, si la probabilité de transition entre l'état i et l'état j est 0 ($G_{i,j} = 0$), alors sur le diagramme de transition il n'y a pas de flèche sortante de l'état i et entrante dans l'état j.

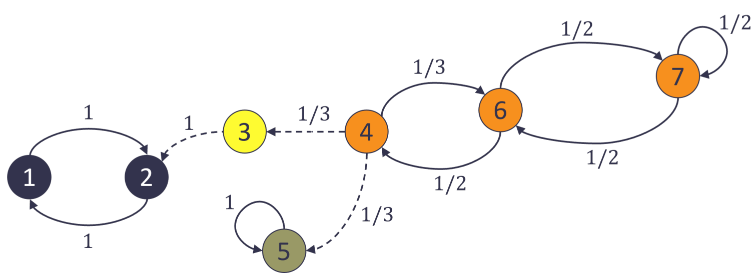
Traçons le diagramme :



Maintenant partitionnons l'espace d'états en classes d'équivalence.

Pour rappel, l'état i *communique* avec l'état j (noté $i \leftrightarrow j$) si $i \to j$ et $j \to i$.

Sur le diagramme ci-dessous les classes d'équivalence sont indiquées avec les couleurs.



Ainsi, on peut distinguer 4 classes :

- $\{1, 2\}$
- $\{3\}$
- $\{4, 6, 7\}$
- $\{5\}$

Classifions ces classes.

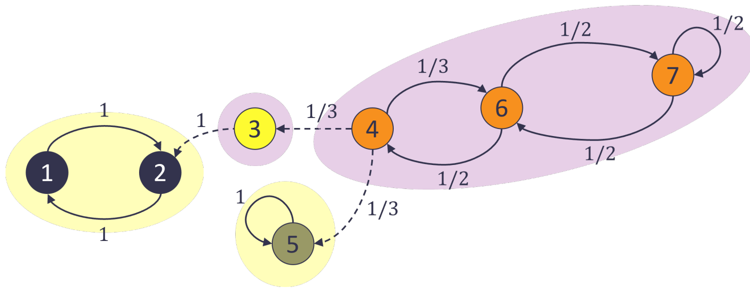
Rappel :

- une classe, en rentrant dans laquelle, on reste dans cette classe sans possibilité d'en sortir, est une classe *récurrente*
- une classe, telle qu'il est possible d'en sortir mais une fois sorti, il n'est plus possible d'y retourner, est une classe *transitoire*

On peut voir que:

- $\{1, 2\}$: il est impossible de sortir de cette classe $\Rightarrow$ *récurrente*
- $\{3\}$: il est possible de sortir de cette classe (arrivant à la classe $\{1, 2\}$) mais pas possible d'y retourner $\Rightarrow$ *transitoire*
- $\{4, 6, 7\}$: il est possible de sortir de cette classe (arrivant soit à la classe $\{3\}$, soit $\{5\}$) mais pas possible d'y retourner $\Rightarrow$ *transitoire*
- $\{5\}$: il est impossible de sortir de cette classe $\Rightarrow$ *récurrente*

Sur le diagramme ci-dessous les classes récurrentes sont entourées par le jaune et les classes récurrentes par le rose.



Exercice 2 (DS 2015)

Lors d'un appel à un moteur de recherche, celui-ci doit trier les différents sites référencés. Le principe *PageRank* utilisé par Google utilise la modélisation par les chaînes de Markov. Nous évoquons ici cette modélisation.

Dans un premier temps à l'aide d'une méthode de fouilles de données, le moteur de recherche récupère un nombre fini de sites internet correspondant à la recherche effectuée. La procédure *PageRank* consiste alors à attribuer à ces sites un rang qui correspond à leur importance de référencement.

Supposons qu'il y ait N sites notés $\{1, ..., N\}$ sélectionnés à la première étape. Soit X_k le k-ème site internet visité par un utilisateur fictif. Le site contient des liens vers les autres sites. Soit K_i le nombre total de liens vers d'autres sites contenus sur la page i. Nous noterons

$$p_{i,j} = \begin{cases} \dfrac{1}{K_i} \text{ si le site } i \text{ contient un lien vers le site } j \\ 0 \text{ si le site } i \text{ ne contient pas de lien vers le site } j \end{cases}$$

On ne prend pas en compte l'auto-référencement ici.

On suppose que l'utilisateur clique de façon aléatoire sur les liens, et qu'ainsi $P(X_{k+1} = j \mid X_k = i) = p_{i,j}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, que le site j ait déjà été visité ou non. Ce problème peut donc être modélisé par une chaîne de Markov homogène. Soit G la matrice de transition.

$$G = \begin{pmatrix} ? & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ ? & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ ? & 1 & 0 & 0 & 0 \\ ? & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ ? & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}$$

La chaîne associée est ergodique.

1. Compléter le premier vecteur colonne de la matrice de transition.
2. Que vaut N ici ? Que vaut $p_{2,3}$?
3. Quel site internet a le plus de liens directs ?
4. Parmi les lois suivantes, laquelle est une loi stable pour cette chaîne de Markov ?

- $\pi^{(1)} = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.2 & 0.2 & 0.2 & 0.2 \end{pmatrix}$
- $\pi^{(2)} = \begin{pmatrix} 0.09 & 0.34 & 0.29 & 0.09 & 0.19 \end{pmatrix}$
- $\pi^{(3)} = \begin{pmatrix} 0.15 & 0.64 & 0.27 & 0.54 & 0.19 \end{pmatrix}$
- $\pi^{(4)} = \begin{pmatrix} -0.09 & 0.48 & 0.29 & 0.54 & -0.14 \end{pmatrix}$
- Aucune

Indication : on pourra procéder par élimination.

5. Quel site internet doit être proposé en premier par le moteur de recherche selon vous ? Commentez.

Solution

1. Compléter le premier vecteur colonne de la matrice de transition Notons que la somme de chaque ligne doit être égale à 1.

Alors :

- $G_{11} = 1 - (\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + 0) = 1 - 1 = 0$
- $G_{21} = 1 - (0 + \frac{1}{2} + 0 + \frac{1}{2}) = 1 - 1 = 0$
- $G_{31} = 1 - (1 + 0 + 0 + 0) = 1 - 1 = 0$
- $G_{11} = 1 - (\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + 0 + \frac{1}{4}) = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$
- $G_{11} = 1 - (0 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + 0) = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$

La matrice de transition complète est donc donnée par :

$$G = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ \mathbf{0} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \mathbf{0} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{\frac{1}{4}} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ \mathbf{\frac{1}{3}} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}$$

2. Que vaut N ici ? Que vaut $p_{2,3}$? N correspond au nombre d'états de la chaîne de Markov. A partir de la matrice de transition (dimensions de la matrice de transition étant 5×5), on déduit que $N = \mathbf{5}$.

$p_{2,3}$ correspond à la probabilité de transition de l'état 2 à l'état 3, i.e. $p_{2,3} = \mathbb{P}(X_{k+1} = 3 \mid X_k = 2)$ pour $k \in \mathbb{N}$. On peut déduire sa valeur à partir de la matrice de transition :

$$p_{2,3} = \mathbb{P}(X_{k+1} = 3 \mid X_k = 2) = G_{2,3} = \mathbf{\frac{1}{2}}$$

3. Quel site internet a le plus de liens directs ? Afin de répondre à cette question, on peut examiner les liens entrants pour chaque état, autrement dit, le nombre d'éléments non nulle par colonne de la matrice de transition.

$$G = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

On remarque que les états ont le nombre suivant des liens entrants :

1	2	3	4	5
2	3	**4**	2	2

On cherche le max. Il correspond à l'état 3.

La réponse est donc le site internet **3**.

4. Parmi les lois suivantes, laquelle est une loi stable pour cette chaîne de Markov ? Procédons par l'élimination. Notons aussi que selon l'enoncé la matrice de transition est ergodique, donc si une loi stationnaire existe, elle est unique et est une loi limite de la chaîne de Markov.

Pour rappel, une loi de probabilité stationnaire doit satisfaire les conditions suivantes :

- $\forall i \in E,\ \pi_i \geq 0$
- $\sum_{i \in E} \pi_i = 1$
- $\pi G = \pi$

Ainsi, on peut voir tout de suite que :

1. Le vecteur ligne $\pi^{(4)} = \begin{pmatrix} -0.09 & 0.48 & 0.29 & 0.54 & -0.14 \end{pmatrix}$ comprend les valeurs négatives, donc il n'est pas une loi de probabilité
2. La somme des éléments du vecteur ligne $\pi^{(3)} = \begin{pmatrix} 0.15 & 0.64 & 0.27 & 0.54 & 0.19 \end{pmatrix}$ est supérieur à 1 : $\sum_{i \in E} \pi_i^{(3)} = 0.15 + 0.64 + 0.27 + 0.54 + 0.19 = 1.79 > 1$. Donc, le vecteur $\pi^{(3)}$ n'est pas une loi

Vérifions la somme des éléments pour les deux vecteurs qui restent :

- $\sum_{i \in E} \pi_i^{(1)} = 0.2 + 0.2 + 0.2 + 0.2 + 0.2 = 1$
- $\sum_{i \in E} \pi_i^{(2)} = 0.09 + 0.34 + 0.29 + 0.09 + 0.19 = 1$

Pour ces deux vecteurs lignes vérifions la condition $\pi G = \pi$:

D'abord, on traitera le vecteur $\pi^{(1)}$:

$$\pi^{(1)} G = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.2 & 0.2 & 0.2 & 0.2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{60} & \frac{19}{60} & \frac{17}{60} & \frac{2}{15} & \frac{3}{20} \end{pmatrix} \neq \pi^{(1)}$$

- $0.2 \times 0 + 0.2 \times 0 + 0.2 \times 0 + 0.2 \times \frac{1}{4} + 0.2 \times \frac{1}{3} = \frac{1}{20} + \frac{1}{15} = \frac{3}{60} + \frac{4}{60} = \frac{7}{60} \approx 0.1166667$
- $0.2 \times \frac{1}{3} + 0.2 \times 0 + 0.2 \times 1 + 0.2 \times \frac{1}{4} + 0.2 \times 0 = \frac{1}{15} + \frac{1}{5} + \frac{1}{20} = \frac{4}{60} + \frac{12}{60} + \frac{3}{60} = \frac{19}{60} \approx 0.3166667$
- $0.2 \times \frac{1}{3} + 0.2 \times 0.5 + 0.2 \times 0 + 0.2 \times \frac{1}{4} + 0.2 \times \frac{1}{3} = \frac{1}{15} + \frac{1}{10} + \frac{1}{20} + \frac{1}{15} = \frac{4}{60} + \frac{6}{60} + \frac{3}{60} + \frac{4}{60} = \frac{17}{60} \approx 0.2833333$
- $0.2 \times \frac{1}{3} + 0.2 \times 0 + 0.2 \times 0 + 0.2 \times 0 + 0.2 \times \frac{1}{3} = \frac{1}{15} + \frac{1}{15} = \frac{2}{15} \approx 0.1333333$
- $0.2 \times 0 + 0.2 \times 0.5 + 0.2 \times 0 + 0.2 \times \frac{1}{4} + 0.2 \times 0 = \frac{1}{10} + \frac{1}{20} = \frac{3}{20} = 0.15$

Donc $\pi^{(1)}$ n'est pas une loi stationnaire.

Traiterons maintenant le vecteur $\pi^{(2)}$:

$$\pi^{(2)} G = \begin{pmatrix} 0.09 & 0.34 & 0.29 & 0.09 & 0.19 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.09 & 0.34 & 0.29 & 0.09 & 0.19 \end{pmatrix} = \pi^{(2)}$$

- $0.09 \times 0 + 0.34 \times 0 + 0.29 \times 0 + 0.09 \times \frac{1}{4} + 0.19 \times \frac{1}{3} =\approx 0.08583333 \approx 0.09$
- $0.09 \times \frac{1}{3} + 0.34 \times 0 + 0.29 \times 1 + 0.09 \times \frac{1}{4} + 0.19 \times 0 = 0.3425 \approx 0.34$
- $0.09 \times \frac{1}{3} + 0.34 \times 0.5 + 0.29 \times 0 + 0.09 \times \frac{1}{4} + 0.19 \times \frac{1}{3} =\approx 0.2858333 \approx 0.29$
- $0.09 \times \frac{1}{3} + 0.34 \times 0 + 0.29 \times 0 + 0.09 \times 0 + 0.19 \times \frac{1}{3} =\approx 0.09333333 \approx 0.09$
- $0.09 \times 0 + 0.34 \times 0.5 + 0.29 \times 0 + 0.09 \times \frac{1}{4} + 0.19 \times 0 = \frac{1}{10} + \frac{1}{20} = 0.1925 \approx 0.19$

Donc, le vecteur $\pi^{(2)}$ est une loi stationnaire.

Testons dans le `R` :

```
# candidats
pi1 <- c(0.2, 0.2, 0.2, 0.2, 0.2); pi1
```

```
## [1] 0.2 0.2 0.2 0.2 0.2
```

```r
pi2 <- c(0.09, 0.34, 0.29, 0.09, 0.19); pi2
```

```
## [1] 0.09 0.34 0.29 0.09 0.19
```

```r
# matrice de transition
G <- matrix(c(0, 1/3, 1/3, 1/3, 0,
              0, 0, 0.5, 0, 0.5,
              0, 1, 0, 0, 0,
              0.25, 0.25, 0.25, 0, 0.25,
              1/3, 0, 1/3, 1/3, 0),
            nrow = 5, ncol = 5, byrow = TRUE); G
```

```
##           [,1]      [,2]      [,3]      [,4] [,5]
## [1,] 0.0000000 0.3333333 0.3333333 0.3333333 0.00
## [2,] 0.0000000 0.0000000 0.5000000 0.0000000 0.50
## [3,] 0.0000000 1.0000000 0.0000000 0.0000000 0.00
## [4,] 0.2500000 0.2500000 0.2500000 0.0000000 0.25
## [5,] 0.3333333 0.0000000 0.3333333 0.3333333 0.00
```

```r
# pi1
# multiplication
res1 <- pi1 %*% G ; res1
```

```
##           [,1]      [,2]      [,3]      [,4] [,5]
## [1,] 0.1166667 0.3166667 0.2833333 0.1333333 0.15
```

```r
# valeurs arrondies
res1 <- round(res1, 2) ; res1
```

```
##      [,1] [,2] [,3] [,4] [,5]
## [1,] 0.12 0.32 0.28 0.13 0.15
```

```r
# test
all(res1 == pi1)
```

```
## [1] FALSE
```

```r
# pi2
# multiplication
res2 <- pi2 %*% G ; res2
```

```
##            [,1]   [,2]      [,3]       [,4]   [,5]
## [1,] 0.08583333 0.3425 0.2858333 0.09333333 0.1925
```

```r
# valeurs arrondies
res2 <- round(res2, 2) ; res2
```

```
##      [,1] [,2] [,3] [,4] [,5]
## [1,] 0.09 0.34 0.29 0.09 0.19
```

```r
# test
all(res2 == pi2)
```

```
## [1] TRUE
```

5. Quel site internet doit être proposé en premier par le moteur de recherche selon vous ? Commentez. L'idée est que le site de référence n'est pas celui qui a le plus de liens directs mais celui vers lequel on a la plus forte probabilité de tomber dans nos recherches.

Pour le trouver, on examine la loi stationnaire et on choisit l'état avec la probabilité maximale.

$$\begin{pmatrix} 0.09 & \mathbf{0.34} & 0.29 & 0.09 & 0.19 \end{pmatrix}$$

Donc, avec le principe PageRank, il faut proposer le site numéro 2.

Exercice 3 : Modèle élémentaire de gestion de stock

La demande de consommation d'un bien entre les instants n et $n+1$ est représentée par une variable aléatoire positive Y_{n+1}. Le niveau du stock du bien est égal à X_n à l'instant n. La gestion du stock se fait de la façon suivante :

- si $X_n - Y_{n+1} \geq m$, alors le stock n'est pas réapprovisionné, et $X_{n+1} = X_n - Y_{n+1}$.
- si $X_n - Y_{n+1} < m$, alors le stock est réapprovisionné et porté au niveau M : $X_{n+1} = M$.

On suppose que X_0 est de loi quelconque sur $\{m, ..., M\}$, et que les $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et X_0 sont indépendantes.

Pour l'application numérique, on pose que les $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suivent une loi uniforme sur $\{0, 1, 2\}$, et que $M = 3$ et $m = 1$.

1. Montrer que X_n est une chaîne de Markov homogène et calculer la matrice de transition G.
2. Trouver une (la) probabilité invariante ν. Quelle est la probabilité en régime stationnaire d'être en rupture de stock ?

Solution

1. Montrer que X_n est une chaîne de Markov homogène et calculer la matrice de transition G. Une chaîne de Markov est *homogène* si les probabilités de transition sont indépendantes de l'instant n, i.e. $\mathbb{P}(X_n = j | X_{n-l} = i) = \mathbb{P}(X_l = j | X_0 = i)$.

Selon l'enoncé, on pose que les $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suivent une loi uniforme sur $\{0, 1, 2\}$, et que $M = 3$ et $m = 1$. Donc, l'espace d'états de $X = (X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donné par : $E = \{m, ..., M\} = \{1, 2, 3\}$. Il s'agit d'une chaîne de Markov à 3 états.

Les valeurs de X_{n+1} dépendent de Y_{n+1}. La probabilité de chaque valeur de Y_{n+1} est 1/3, car Y_{n+1} suit une loi uniforme discrète.

Calculons $X_n - Y_{n+1}$ pour $n = 0$ afin de déterminer les transitions. On peut construire un tableau suivant :

X_n Y_{n+1}	0	1	2
1	$1-0=1$	$1-1=0$	$1-2=-1$
2	$2-0=2$	$2-1=1$	$2-2=0$
3	$3-0=3$	$3-1=2$	$3-2=1$

Maintenant vérifions les conditions :

- si $X_n - Y_{n+1} \geq m$, alors $X_{n+1} = X_n - Y_{n+1}$,
- si $X_n - Y_{n+1} < m$, alors : $X_{n+1} = M$

où $m = 1$ et $M = 3$.

X_n Y_{n+1}	0	1	2
1	$1-0=1\geq \mathbf{1}$	$1-1=0< \mathbf{1}$	$1-2=-1< \mathbf{1}$
2	$2-0=2\geq \mathbf{1}$	$2-1=1\geq \mathbf{1}$	$2-2=0< \mathbf{1}$
3	$3-0=3\geq \mathbf{1}$	$3-1=2\geq \mathbf{1}$	$3-2=1\geq \mathbf{1}$

Alors, remplaçons les expressions par l'état X_{n+1} :

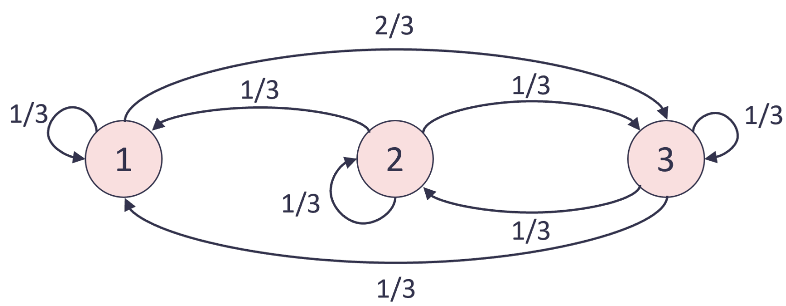
X_n \ Y_{n+1}	0	1	2
1	$1-0=1\geq 1 \Rightarrow \mathbf{X_{n+1}=1}$	$1-1=0<1 \Rightarrow \mathbf{X_{n+1}=3}$	$1-2=-1<1 \Rightarrow \mathbf{X_{n+1}=3}$
2	$2-0=2\geq 1 \Rightarrow \mathbf{X_{n+1}=2}$	$2-1=1\geq 1 \Rightarrow \mathbf{X_{n+1}=1}$	$2-2=0<1 \Rightarrow \mathbf{X_{n+1}=3}$
3	$3-0=3\geq 1 \Rightarrow \mathbf{X_{n+1}=3}$	$3-1=2\geq 1 \Rightarrow \mathbf{X_{n+1}=2}$	$3-2=1\geq 1 \Rightarrow \mathbf{X_{n+1}=1}$

Maintenant, en sachant X_n et X_{n+1}, on peut visualiser ses transitions sous forme d'un diagramme de transition.

Selon la table ci-dessus, si $X_n = 1$, alors à l'étape $n+1$ on peut se retrouver :

- soit dans l'état 1, i.e. $X_{n+1} = 1$ avec la probabilité 1/3
- soit dans l'état 3, i.e. $X_{n+1} = 3$ avec la probabilité 2/3

En poursuivant le même raisonnement pour d'autres X_n, on obtient un diagramme suivant :



La matrice de transition est donc donnée par :

$$G = \begin{array}{c|c} & \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} & \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \end{array}$$

2. Trouver une (la) probabilité invariante ν. Quelle est la probabilité en régime stationnaire d'être en rupture de stock ?

Trouver une (la) probabilité invariante ν. Une probabilité invariante $\nu = \begin{pmatrix}\nu_m & ... & \nu_M\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\nu_1 & \nu_2 & \nu_3\end{pmatrix}$ doit satisfaire des conditions suivantes :

1. $\forall i \in \{m, ..., M\},\ \nu_i \geq 0$
2. $\sum\limits_{i\in\{m,...,M\}} \nu_i = 1$
3. $\nu G = \nu$

Pour rappel, trouver des probabilités invariantes correspond à trouver des vecteurs propres droits normalisés de la matrice de transition G pour la valeur propre $\lambda = 1$, ce qui est équivalent de trouver des vecteurs propres de la matrice de transition transposée G^T.

$$G^T = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Alors :

$$G^T - \lambda I = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

Trouvons la solution du système d'équations suivant :

$$\begin{cases} -\frac{2}{3}\nu_1 + \frac{1}{3}\nu_2 + \frac{1}{3}\nu_3 = 0 \\ 0\nu_1 + (-\frac{2}{3}\nu_2) + \frac{1}{3}\nu_3 = 0 \\ \frac{2}{3}\nu_1 + \frac{1}{3}\nu_2 + (-\frac{2}{3}\nu_3 = 0 \\ \nu_1 + \nu_2 + \nu_3 = 1 \end{cases}$$

Multiplions les trois premières équations par 3 :

$$\begin{cases} -2\nu_1 + \nu_2 + \nu_3 = 0 \\ -2\nu_2 + \nu_3 = 0 \\ 2\nu_1 + \nu_2 - 2\nu_3 = 0 \\ \nu_1 + \nu_2 + \nu_3 = 1 \end{cases}$$

A partir de l'éq. 2, présentons ν_3 en fonction de ν_2 :

$$\begin{cases} -2\nu_1 + \nu_2 + \nu_3 = 0 \\ \nu_3 = 2\nu_2 \\ 2\nu_1 + \nu_2 - 2\nu_3 = 0 \\ \nu_1 + \nu_2 + \nu_3 = 1 \end{cases}$$

Dans l'éq. 4, trouvons l'expression pour $\nu_2 + \nu_3$:

$$\begin{cases} -2\nu_1 + \nu_2 + \nu_3 = 0 \\ \nu_3 = 2\nu_2 \\ 2\nu_1 + \nu_2 - 2\nu_3 = 0 \\ \nu_2 + \nu_3 = 1 - \nu_1 \end{cases}$$

Faisons une substitution dans l'éq. 1 :

$$\begin{cases} -2\nu_1 + (1 - \nu_1) = 0 \\ \nu_3 = 2\nu_2 \\ 2\nu_1 + \nu_2 - 2\nu_3 = 0 \\ \nu_2 + \nu_3 = 1 - \nu_1 \end{cases}$$

Trouvons ν_1 :

$$\begin{cases} -3\nu_1 = -1 \\ \nu_3 = 2\nu_2 \\ 2\nu_1 + \nu_2 - 2\nu_3 = 0 \\ \nu_2 + \nu_3 = 1 - \nu_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \nu_1 = \dfrac{1}{3} \\ \nu_3 = 2\nu_2 \\ 2\nu_1 + \nu_2 - 2\nu_3 = 0 \\ \nu_2 + \nu_3 = 1 - \nu_1 \end{cases}$$

Faisons une substitution de ν_3 afin de trouver ν_2 :

$$\begin{cases} \nu_1 = \dfrac{1}{3} \\ \nu_3 = 2\nu_2 \\ 2 \cdot \frac{1}{3} + \nu_2 - 2 \cdot (2\nu_2) = 0 \\ \nu_2 + 2\nu_2 = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \end{cases}$$

Alors :

$$\begin{cases} \nu_1 = \dfrac{1}{3} \\ \nu_3 = 2\nu_2 \\ 3\nu_2 = \frac{2}{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \nu_1 = \dfrac{1}{3} \\ \nu_3 = 2\nu_2 \\ \nu_2 = \dfrac{2}{9} \end{cases}$$

Trouvons ν_3 :

$$\begin{cases} \nu_1 = \dfrac{1}{3} \\ \nu_3 = 2 \cdot \frac{2}{9} = \dfrac{4}{9} \\ \nu_2 = \dfrac{2}{9} \end{cases}$$

Donc, $\nu = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{3} & \dfrac{2}{9} & \dfrac{4}{9} \end{pmatrix}$

Quelle est la probabilité en régime stationnaire d'être en rupture de stock ? La rupture de stock correspond à la situation suivante :

1. le niveau du stock est bas, c'est-à-dire à l'état $X_n = 1$
2. la demande de consommation est au plus haut niveau $Y_{n+1} = 2$

Ces deux évènements doivent se produire simultanément. Selon l'énonce, ils sont indépendants.

La probabilité de la rupture de stock est dons donnée par le produit des probabilités de chacun de ces évènements :

1. en régime stationnaire, il s'agit de $\nu_1 = \frac{1}{3}$
2. étant donné que Y_n suit une loi uniforme sur $0, 1, 2$, $\mathbb{P}(Y_{n+1} = 2) = \frac{1}{3}$

Alors :

$$\mathbb{P}(\text{rupture du stock}) = \mathbb{P}(X_n = 1 \ \cap \ Y_{n+1} = 2) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$$

Annexe

Voici un texte généré aléatoirement à partir d'une méthode basée sur des chaînes de Markov :

Pardonnez-moi si j'ai l'expérience. Eux seuls peuvent forcer le fonctionnaire élu à l'obéissance passive, à toutes ces injures, et qui sait si nous les rompions tous. Tressez-les et tordez-les ensemble, c'était parfait... Conservez la tradition de tous les diables ! Hommes, femmes, pages, écuyers et valets, défiez-vous des phonographes ! Encadrée comme elle l'est aujourd'hui l'amitié me prête des défauts. (source : http://enneagon.org/phrases)

Un exemple d'article créé aléatoirement et publié peut être trouvé ici : (http://membres-lig.imag.fr/labbe/Publi/IkeAntkareSub.