Lois conditionnelles - Cas continu

Contents

Exercice 1

On considère un couple de variables aléatoires (X, Y) de densité

$$f_{XY}(x, y) = \frac{1}{x} e^{-x} \mathbf{1}_{0<y<x}$$

1. Déterminer la loi marginale de X puis la loi conditionnelle de Y sachant $X = x$.
2. Les v.a. X et Y sont-elles indépendantes ?
3. Quelle est la loi de $U = e^{-X}$? En déeduire une méthode de simulation du couple (X, Y).

Solution

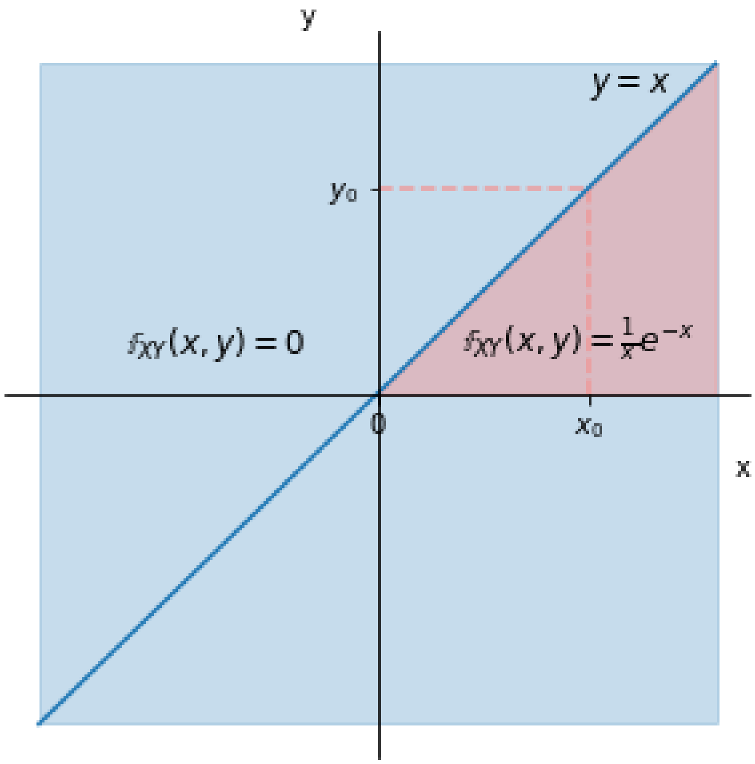
1. Déterminer la loi marginale de X puis la loi conditionnelle de Y sachant $X = x$. Considérons la densité jointe :

$$f_{XY}(x, y) = \frac{1}{x} e^{-x} \mathbf{1}_{0<y<x}$$

On remarque que la densité jointe contient la fonction indicatrice $\mathbf{1}_{0<y<x}$. Ainsi on peut réécrire la fonction de répartition jointe comme suit :

$$f_{XY}(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{x} e^{-x} & 0 < y < x \\ 0 & sinon \end{cases}$$

On peut visualiser la région où $f_{XY}(x, y) \neq 0$ de la façon suivante :



La loi marginale de X peut être trouver comme suit :

$$f_X(x) = \int_{\mathbb{R}} f_{XY}(x,y)dy = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{x}e^{-x}\mathbf{1}_{0<y<x}dy$$

On peut considérer que la partie $0 < y < x$ car sinon $f_{XY} = 0$:

$$f_X(x) = \int_0^x \frac{1}{x}e^{-x}dy = \frac{1}{x}e^{-x}y\Big|_0^x = \frac{1}{x}e^{-x}x - \frac{1}{x}e^{-x} \times 0 = e^{-x}$$

Donc :

$$f_X(x) = \begin{cases} e^{-x} & x > 0 \\ 0 & sinon \end{cases}$$

Autrement dit, pour $x > 0$, $X \sim \mathcal{E}(1)$.

Trouvons maintenant la loi conditionnelle de Y sachant $X = x$.

Considérons $x > 0$:

$$f_{Y|X=x}(y) = \frac{f_{XY}(x,y)}{f_X(x)} = \frac{\frac{1}{x}e^{-x}\mathbf{1}_{0<y<x}}{e^{-x}} = \frac{1}{x}\mathbf{1}_{0<y<x}$$

Alors, $Y|X = x$ suit la loi uniforme $\mathcal{U}([0, x])$.

2. Les v.a. X et Y sont-elles indépendantes ? Si X et Y sont indépendantes, alors $\forall x$: $f_{Y|X=x}(y) = f_Y(y)$, i.e. $f_{Y|X=x}(y)$ ne dépenderait pas de x. Dans la question (1), nous avons trouvé que $f_{Y|X=x}(y) = \frac{1}{x}\mathbf{1}_{0<y<x}$, autrement dit $f_{Y|X=x}(y)$ dépend de x. Donc, X et Y **ne sont pas indépendantes**.

3. Quelle est la loi de $U = e^{-X}$? En déeduire une méthode de simulation du couple (X, Y).
Soit $U = e^{-X}$. Trouvons $F_U(u)$:

$$F_U(u) = \mathbb{P}[U \leq u] = \mathbb{P}\left[e^{-X} \leq u\right] = \mathbb{P}\left[-X \leq \ln(u)\right] = \begin{cases} \mathbb{P}\left[X \geq -\ln(u)\right] & u > 0 \\ 0 & sinon \end{cases}$$

Considérons le cas $u > 0$:

$$F_U(u) = \mathbb{P}\left[X \geq -\ln(u)\right] = 1 - \underbrace{\mathbb{P}\left[X \leq -\ln(u)\right]}_{F_X(-\ln(u))} = 1 - F_X(-\ln(u))$$

Trouvons $F_X(x)$. Selon la q.1 : $f_X(x) = \begin{cases} e^{-x} & x > 0 \\ 0 & sinon \end{cases}$.

Donc, pour $x > 0$:

$$F_X(x) = \int_0^x f_X(t)dt = \int_0^x e^{-t}dt = -e^{-t}\Big|_0^x = -e^{-x} - (-e^{-0}) = -e^{-x} + 1$$

C'est-à-dire :

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-x} & x > 0 \\ 0 & sinon \end{cases}$$

Remplaçons $F_X(x)$ dans la formule de $F_U(u)$:

$$F_U(u) = 1 - F_X(-\ln(u)) = 1 - (1 - e^{-(-\ln u))}) = e^{\ln(u)}$$

Remarquons que $F_X(x) \neq 0$ pour $x > 0$. Ainsi, $-\ln(u) > 0$ pour $u > 0$. On peut en déduire que $0 < u < 1$. Dans ce cas-là, $F_U(u) = e^{\ln(u)} = u$.

Si $u \geq 1$, alors $F_U(u) = 1$.

Rassemblons tout :

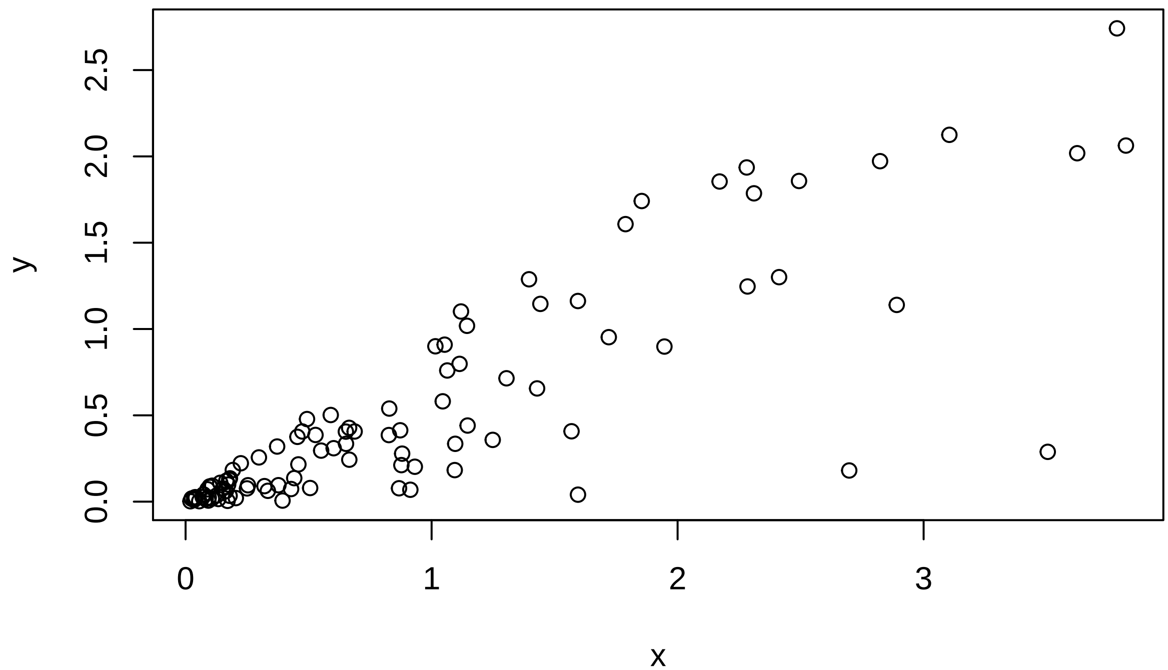
$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & u \leq 0 \\ u & 0 < u < 1 \\ 1 & u \geq 1 \end{cases}$$

Autrement dit, $U \sim \mathcal{U}([0, 1])$.

On pourrait simuler (X, Y) de la façon suivante :

1. Générer u à partir de la loi uniforme sur $[0, 1]$
2. Construire x comme $-\ln(u)$
3. Construire y à partir de la loi uniforme sur $[0, x]$
4. Renvoyer (x, y)

```r
# générer 100 va à partir de la loi uniforme sur [0,1]
u <- runif(n=100, min=0, max=1)
# construire x = -ln(u)
x <- -log(u)
# construire y
y <- runif(n=100, min=0, max=x)
# visualiser
plot(x,y)
```



Exercice 2 (DS 2017)

Un système électronique utilise N composants, avec $N \geq 1$. Chacun de ces composants a une durée de vie T_i avec T_i de loi exponentielle de paramètre λ. Rappelons qu'alors nous avons :

$$\mathbb{P}(T_i \geq t) = e^{-\lambda t}$$

Les durées de vie de chaque composant sont supposées indépendantes. Si l'un des composants tombe en panne, le système s'arrête. Notons X la durée de vie du système.

1. Exprimer $X|\{N = n\}$ en fonction de $T_1, ..., T_n$. Déterminer pour t donné la probabilité $P(X > t|N = n)$. En déduire la loi de $X|\{N = n\}$.
2. La variable aléatoire réelle N vérifie $\mathbb{P}(N = n) = \frac{1}{2^n}$ pour tout $n \geq 1$. Donner $\mathbb{P}(X > t)$.

Indication : On rappelle que pour tout $0 < a < 1$, on a $\sum_{k=1}^{\infty} a^k = \frac{1}{1-a} - 1$.

3. Déduire de la question précédente la fonction de répartition de X, puis la densité de X.

Solution

1. Exprimer $X|\{N = n\}$ en fonction de $T_1, ..., T_n$. Déterminer pour t donné la probabilité $P(X > t|N = n)$. En déduire la loi de $X|\{N = n\}$. Soit $N = n$. Soit T_i une durée de vie du composant $i, i = 1, ..., N$. Lorsque si l'un des composants tombe en panne, le système s'arrête, on peut définir la durée de vie du système sachant $N = n$ comme le minimum des durées de vie de ses composants, i.e. $X|\{N = n\} = \min(T_1, ..., T_n)$. Alors, la loi de X peut être définie comme :

$$\mathbb{P}(X > t|N = n) = \mathbb{P}(\min(T_1, ..., T_n) > t) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} T_i > t\right)$$

Remarquons que selon l'énoncé, les durées de vie T_i de chaque composant i sont supposées indépendantes. Alors :

$$\mathbb{P}(X > t|N = n) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} T_i > t\right) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(T_i > t) = \prod_{i=1}^{n} e^{-\lambda t} = e^{-\lambda n t}$$

Donc $X|\{N = n\} \sim \mathcal{E}(\lambda n)$

2. La variable aléatoire réelle N vérifie $\mathbb{P}(N = n) = \frac{1}{2^n}$ pour tout $n \geq 1$. Donner $\mathbb{P}(X > t)$. On peut se servir de la formule des probabilités totales.

$$\mathbb{P}(X > t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X > t, N = n) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X > t|N = n)\mathbb{P}(N = n) =$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-\lambda n t} \times \frac{1}{2^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{e^{-\lambda t}}{2}\right)^n$$

Afin de pouvoir appliquer la formule donnée dans l'indication, pour $\lambda > 0$, il faut vérifier que :

$$0 < \frac{e^{-\lambda t}}{2} < 1$$

Ceci est vrai pour $t > 0$.

En appliquant la formule $\sum_{k=1}^{\infty} a^k = \frac{1}{1-a} - 1$ à notre cas ($a = \frac{e^{-\lambda t}}{2}$, $k = n$), on obtient :

$$\mathbb{P}(X > t) = \begin{cases} \frac{1}{1-\frac{e^{-\lambda t}}{2}} - 1 & t > 0 \\ 0 & sinon \end{cases} = \begin{cases} \frac{1-1+\frac{e^{-\lambda t}}{2}}{1-\frac{e^{-\lambda t}}{2}} & t > 0 \\ 0 & sinon \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} \frac{\frac{e^{-\lambda t}}{2}}{\frac{2-e^{-\lambda t}}{2}} & t > 0 \\ 0 & sinon \end{cases} = \begin{cases} \frac{e^{-\lambda t}}{2-e^{-\lambda t}} & t > 0 \\ 0 & sinon \end{cases}$$

3. Déduire de la question précédente la fonction de répartition de X, puis la densité de X. Pour $t > 0$, la fonction de répartition est :

$$F_X(t) = \mathbb{P}(X \leq t) = 1 - \mathbb{P}(X > t) = 1 - \frac{e^{-\lambda t}}{2 - e^{-\lambda t}}$$

La fonction de densité peut être obtenue par la dérivation de $F_X(t)$:

$$f_X(t) = F'_X(t) = \left(1 - \frac{e^{-\lambda t}}{2 - e^{-\lambda t}}\right)' = 0 - \left(\frac{e^{-\lambda t}}{2 - e^{-\lambda t}}\right)' =$$

$$= [(uv)' = u'v + v'u] = -\left((-\lambda)e^{-\lambda t} \times \frac{1}{2 - e^{-\lambda t}} + e^{-\lambda t} \times \frac{-1(-(-\lambda)e^{-\lambda t})}{(2 - e^{-\lambda t})^2}\right) =$$

$$= -\left(\frac{-\lambda e^{-\lambda t}}{2-e^{-\lambda t}} - \frac{\lambda e^{-2\lambda t}}{(2-e^{-\lambda t})^2}\right) = -\left(\frac{-\lambda e^{-\lambda t}(2-e^{-\lambda t}) - \lambda e^{-2\lambda t}}{(2-e^{-\lambda t})^2}\right) =$$

$$= -\frac{-2\lambda e^{-\lambda t} + \lambda e^{-2\lambda t} - \lambda e^{-2\lambda t}}{(2-e^{-\lambda t})^2} = -\frac{-2\lambda e^{-\lambda t}}{(2-e^{-\lambda t})^2} = \frac{2\lambda e^{-\lambda t}}{(2-e^{-\lambda t})^2}$$

Annexe :

Le chocolat rend intelligent ! La corrélation entre le nombre de prix Nobel et la consommation en chocolat de différents pays est non négligeable... Mais ceci ne permet pas en réalité de conclure. "Corrélation n'est pas causalité !" : ce n'est pas parce que deux variables sont dépendantes qu'il faut chercher un lien de cause à effet.

Chocolate consumption and Nobel laureates

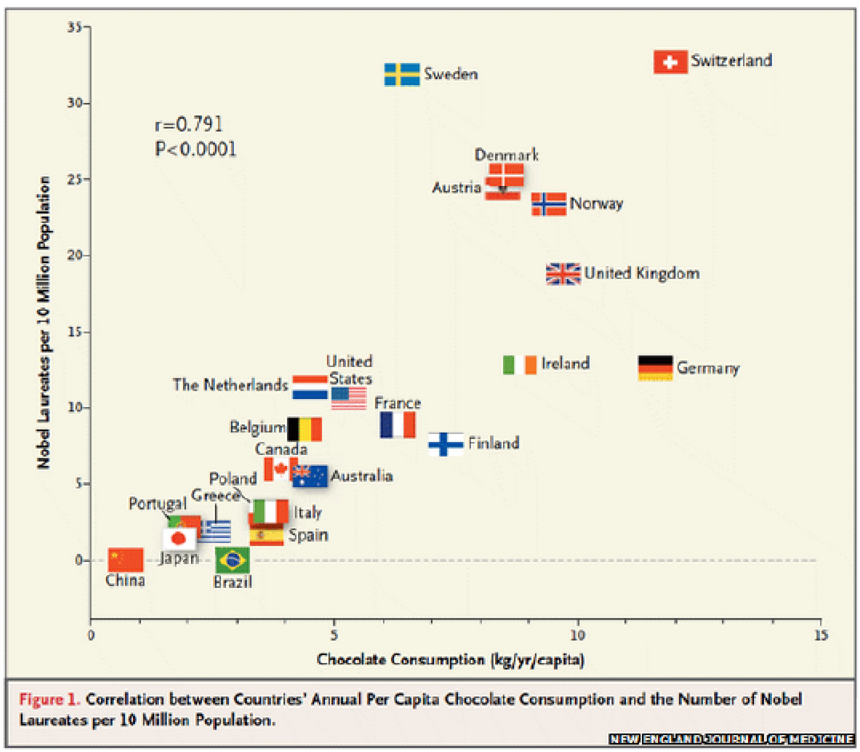


Figure 1. Correlation between Countries' Annual Per Capita Chocolate Consumption and the Number of Nobel Laureates per 10 Million Population.