Analyse combinatoire

Exercice 1 :

On appelle **main** tout ensemble de 13 cartes prises dans un jeu de 52 cartes.

1. Combien y a-t-il de mains différentes ?
2. Combien y a-t-il de mains contenant :
   a) au moins 1 pique ?
   b) au plus 1 pique ?
   c) exactement 1 as et contenant au plus 2 piques ?

Solution

1.Nombre de mains différentes Notons ce qui est donné :

$n = 52$ - le nombre total de cartes

$k = 13$ - le nombre de cartes formant une main

Afin de définir le nombre de mains différentes, l'ordre de cartes dans la main n'est pas important :

$2\heartsuit, 5\spadesuit, 6\clubsuit, J\clubsuit, Q\diamondsuit = Q\diamondsuit, J\clubsuit, 6\clubsuit, 5\spadesuit, 2\heartsuit.$

Chaque carte parmi 52 définie par sa valeur et sa couleur est unique : une main ne peut pas avoir deux exactement mêmes cartes (même valeur et même couleur).

Il s'agit donc **des combinaisons sans répétition**.

Le nombre de combinasons est donc donné par :

$$C_n^k = C_{52}^{13} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{52}{13} = \frac{52!}{13! \times (52-13)!} = \frac{52!}{13! \times 39!}$$

2.a. Nombre de mains contenant au moins 1 pique Les *couleurs* de cartes : $C = \{\heartsuit, \clubsuit, \diamondsuit, \spadesuit\}$, i.e. 4 options.

Le nombre de cartes de la même couleur : $52/4 = 13$.

Option 1 :

Lorsqu'il s'agit de **au moins** 1 pique, nous pouvons procéder de la façon suivante :

1. considérer un événement contraire : *une main sans pique* et calculer son nombre
2. soustraire ce nombre du nombre total de combinaisons (voir Q1)

Le nombre de cartes de couleurs différentes de pique : $13 \times 3 = 39$. Nous choisissons donc 13 cartes d'une main parmi ces 39 cartes (combinaisons sans répétition) :

$$C_n^k = C_{39}^{13} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{39}{13} = \frac{39!}{13! \times (39-13)!} = \frac{39!}{13! \times 26!}$$

Le nombre de main sans pique est alors donné par :

$$C_{52}^{13} - C_{39}^{13} = \binom{52}{13} - \binom{39}{13} = \frac{52!}{13! \times 39!} - \frac{39!}{13! \times 26!}$$

Option 2 :

Le nombre de cartes de couleurs différentes de pique : $13 \times 3 = 39$.

"Au moins 1 pique" est équivalent à l'ensemble de situations suivantes :

- 1 pique + 12 cartes de couleurs autres que pique : $\binom{13}{1} \times \binom{39}{12}$
- 2 piques + 11 cartes de couleurs autres que pique : $\binom{13}{2} \times \binom{39}{11}$
- 3 piques + 10 cartes de couleurs autres que pique : $\binom{13}{3} \times \binom{39}{10}$
- ...
- 13 piques + 0 cartes de couleurs autres que pique : $\binom{13}{13} \times \binom{39}{0}$

Le nombre de combinaisons final est alors défini par la somme des cas ci-dessus.

2.b. Nombre de mains contenant au plus 1 pique Le nombre de cartes de couleurs différentes de pique : $13 \times 3 = 39$.

Les cas possibles :

- 0 pique + 13 cartes de couleurs autres que pique : $\binom{13}{0} \times \binom{39}{13} = \binom{39}{13}$
- 1 pique + 12 cartes de couleurs autres que pique : $\binom{13}{1} \times \binom{39}{12} = 13 \times \binom{39}{12}$

Le nombre total est donc défini comme la somme :

$\binom{13}{0} \times \binom{39}{13} + \binom{13}{1} \times \binom{39}{12} = \binom{39}{13} + 13\binom{39}{12}$

2.c. Nombre de mains contenant exactement 1 as et contenant au plus 2 piques Choisir une main contenat qu'un as c'est choisir une carte parmi un ensemble de 4 as, i.e. $A = \{A\heartsuit, A\clubsuit, A\diamondsuit, A\spadesuit\}$, et 12 cartes de valeur autre que as, c'est-à-dire parmi 48.

Le nombre de possibilités de choisi un as parmi 4 est : $\binom{4}{1}$. Le nombre de possibilités de choisir 12 cartes parmi 48 est : $\binom{48}{12}$. En tout, il y a : $\binom{4}{1} \times \binom{48}{12}$ combinaisons.

Maintenant, prenons en compte la 2ème condition "au plus 2 piques".

Attention ! l'as choisi peut être l'as de pique, ce qui va influencer le nombre total de piques dans la main.

Le nombre de cartes d'une couleur donnée sans as est $13 - 1 = 12$.

Le nombre de cartes de couleurs autres que pique et sans as est $(52 - 13) - 3 = 36$.

Les cas possible sont :

- 1 $A\spadesuit$ + 1 autre carte de pique + 11 cartes de couleurs autre que pique et pas d'as :

$$\binom{1}{1} \times \binom{12}{1} \times \binom{36}{11}$$

- 1 $A\spadesuit$ + 12 cartes de couleurs autre que pique et pas d'as :

$$\binom{1}{1} \times \binom{36}{12}$$

- 1 as de couleur autre que pique + 2 cartes de piques pas l'as + 10 cartes de couleurs autre que pique et pas d'as :

$$\binom{3}{1} \times \binom{12}{2} \times \binom{36}{10}$$

- 1 as de couleur autre que pique + 1 cartes de piques pas l'as + 11 cartes de couleurs autre que pique et pas d'as :

$$\binom{3}{1} \times \binom{12}{1} \times \binom{36}{11}$$

- 1 as de couleur autre que pique + 0 cartes de piques pas l'as + 12 cartes de couleurs autre que pique et pas d'as :

$$\binom{3}{1} \times \binom{12}{0} \times \binom{36}{12}$$

Le nombre total est donc donné par la somme des cas ci-dessus, i.e. :

$$12\binom{36}{11} + \binom{36}{12} + 3\binom{12}{2} \times \binom{36}{10} + 3 \times 12 \times \binom{36}{11} + 3\binom{36}{12} = 4\binom{36}{12} + 48\binom{36}{11} + 3 \times \frac{12!}{2!(12-2)!} \times \binom{36}{10} =$$

$$= 4\binom{36}{12} + 48\binom{36}{11} + 3 \times 66 \times \binom{36}{10} = 4\binom{36}{12} + 48\binom{36}{11} + 198\binom{36}{10} =$$

$$= \frac{4 \times 36!}{12!(36-12)!} + \frac{48 \times 36!}{11!(36-11)!} + \frac{198 \times 36!}{10!(36-10)!} =$$

$$= \frac{4 \times 36!}{12! \times 24!} + \frac{48 \times 36!}{11! \times 25!} + \frac{198 \times 36!}{10! \times 26!} =$$

$$\frac{4 \times 36 \times 35 \times 34 \times 33 \times 32 \times 31 \times 30 \times 29 \times 28 \times 27 \times 26 \times 25}{12 \times 11 \times 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} + \frac{48 \times 36!}{11! \times 25!} + \frac{198 \times 36!}{10! \times 26!} =$$

$$= 34 \times 31 \times 3 \times 29 \times 28 \times 3 \times 26 \times 25 + \frac{48 \times 36!}{11! \times 25!} + \frac{198 \times 36!}{10! \times 26!} =$$

$$= 5,006,710,800 + \frac{48 \times 36 \times 35 \times 34 \times 33 \times 32 \times 31 \times 30 \times 29 \times 28 \times 27 \times 26}{11 \times 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} + \frac{198 \times 36!}{10! \times 26!} =$$

$$= 5,006,710,800 + 6 \times 34 \times 32 \times 31 \times 29 \times 7 \times 27 \times 26 + \frac{198 \times 36!}{10! \times 26!} = 5,006,710,800 + 28,838,654,208 + \frac{198 \times 36!}{10! \times 26!} =$$

$$= 5,006,710,800 + 28,838,654,208 + \frac{198 \times 36 \times 35 \times 34 \times 33 \times 32 \times 31 \times 30 \times 29 \times 28 \times 27}{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} =$$

$$= 5,006,710,800 + 28,838,654,208 + 11 \times 34 \times 33 \times 2 \times 31 \times 3 \times 29 \times 28 \times 27 =$$

$$= 5,006,710,800 + 28,838,654,208 + 50,328,997,488 = 84,174,362,496$$

```r
c1 <- 4*factorial(36)/(factorial(12)*factorial(36-12))
print(c1)
```

```
## [1] 5006710800
```

```r
#print(34*31*3*29*28*3*26*25)
c2 <- 48*factorial(36)/(factorial(11)*factorial(36-11))
print(c2)
```

```
## [1] 28838654208
```

```r
#print(6*34*32*31*29*7*27*26)
c3 <- 198*factorial(36)/(factorial(10)*factorial(36-10))
print(c3)
```

```
## [1] 5.0329e+10
```

```r
#print(11*34*33*2*31*3*29*28*27)
c <- c1 + c2 + c3
print(c)
```

```
## [1] 84174362496
```

Ce qui est équivalent à considérer les cas suivants :

- 1 as parmi 4 + 0 cartes de pique pas l'as + 12 cartes de couleurs autre que pique et pas d'as :

$$\binom{4}{1} \times \binom{12}{0} \times \binom{36}{12} = 4\binom{36}{12}$$

- 1 as parmi 4 + 1 carte de pique pas l'as + 11 cartes de couleurs autre que pique et pas d'as :

$$\binom{4}{1} \times \binom{12}{1} \times \binom{36}{11} = 4 \times 12 \times \binom{36}{11} = 48\binom{36}{11}$$

- 1 as de couleur autre que pique + 2 cartes de piques pas l'as + 10 cartes de couleurs autre que pique et pas d'as :

$$\binom{3}{1} \times \binom{12}{2} \times \binom{36}{10} = 3 \times \frac{12!}{2!(12-2)!} \times \binom{36}{10} = 3 \times \frac{12 \times 11}{2 \times 1} \times \binom{36}{10} = 3 \times 66 \times \binom{36}{10} = 198\binom{36}{10}$$