INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES LYON

Introduction aux Probabilités

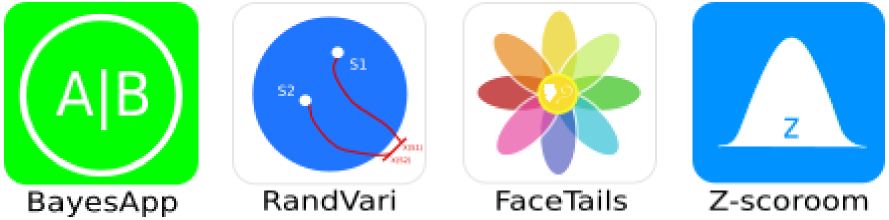
2022/2023

Plan

Chaînes de Markov

Motivation

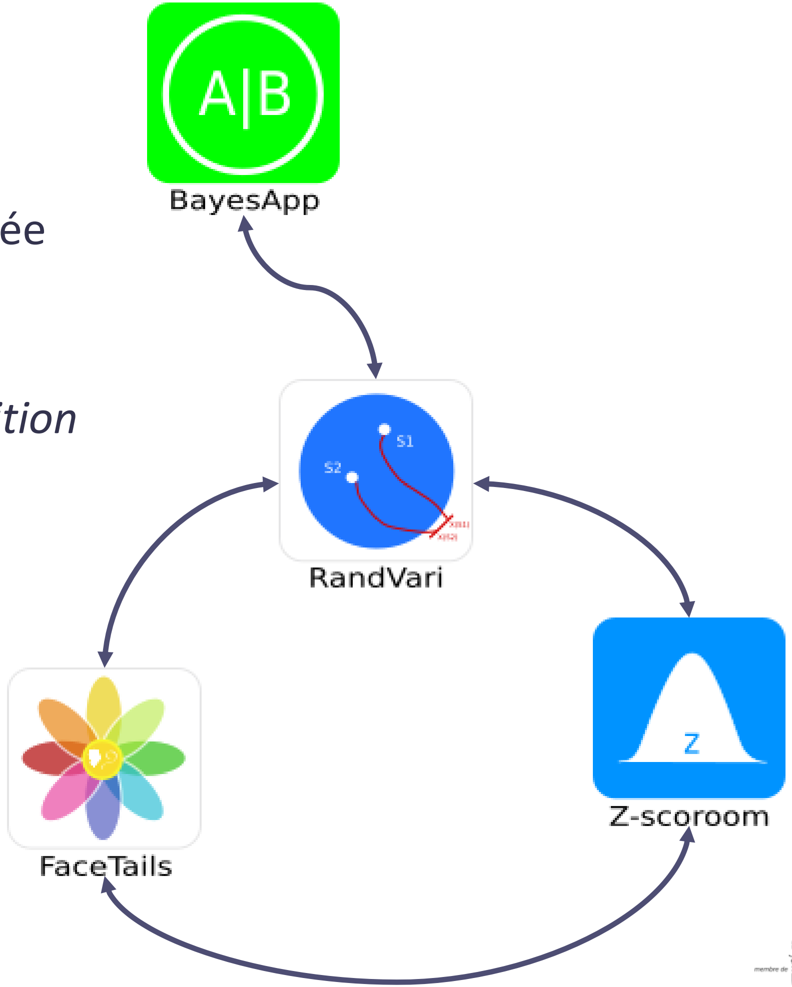
Sur un téléphone mobile "*markovien*" de la version beta, 4 applications sont installées :



Motivation

Il existe des connexions entre les applications: depuis une application, une autre peut être lancée (e.g. partage d'une photo via un messanger).

Ces connexions peuvent être présentées sous la forme suivante (**diagramme de transition**, *transition diagram*) :

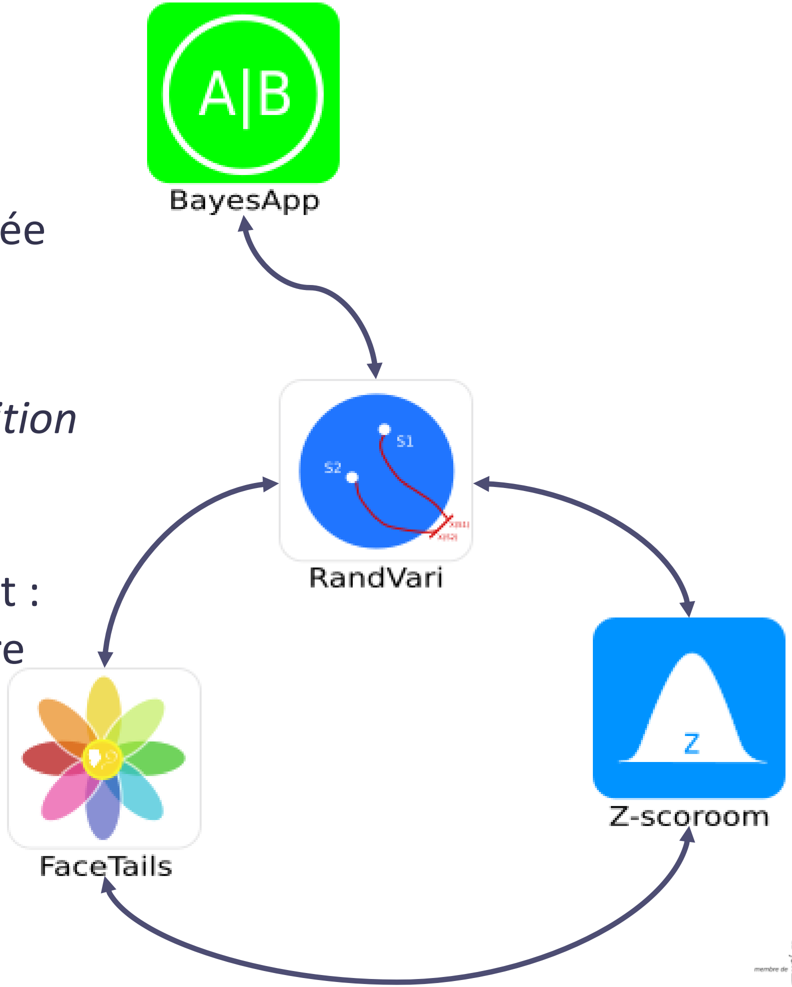


Motivation

Il existe des connexions entre les applications: depuis une application, une autre peut être lancée (e.g. partage d'une photo via un messanger).

Ces connexions peuvent être présentées sous la forme suivante (**diagramme de transition**, *transition diagram*) :

Pas toutes les applications sont liées directement : *BayesApp* est liée avec *RandVari* et cette dernière est liée avec toutes les applications.



Motivation

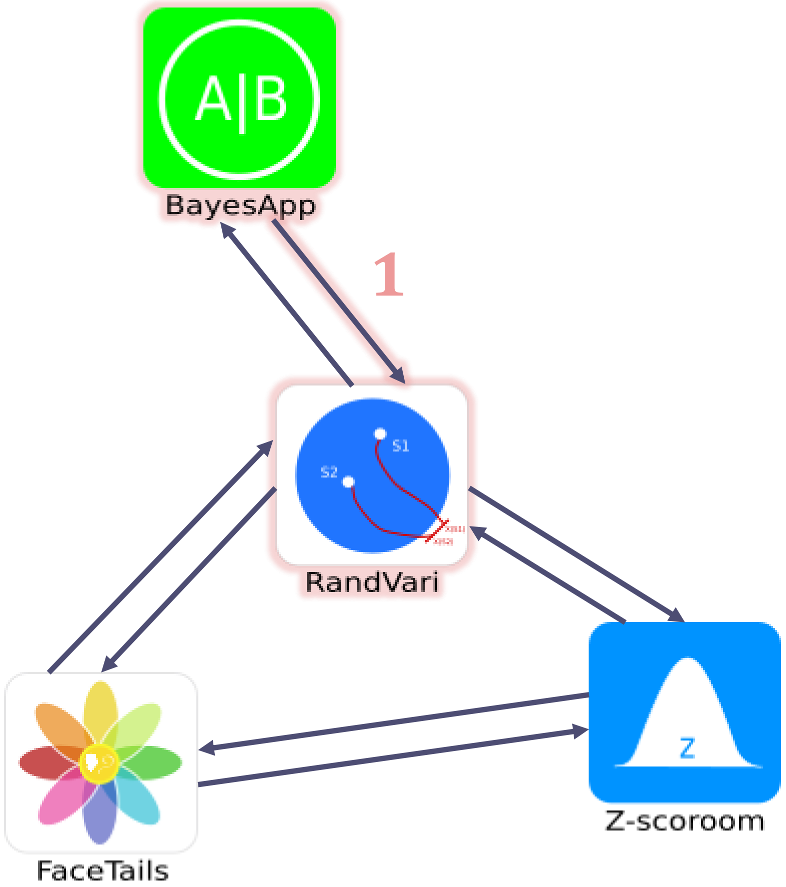
On suppose que l'utilisation des applications est soumise aux contraintes suivantes :

1. Le lancement d'une application à partir d'une autre ne peut se faire que dans le sens de connexion existante

2. L'historique des lancements n'est pas gardée. Une fois qu'une application est lancée, une autre peut être lancée à partir de cette dernière d'une manière aléatoire. On est au courant que de l'application en cours, pas les précédentes.

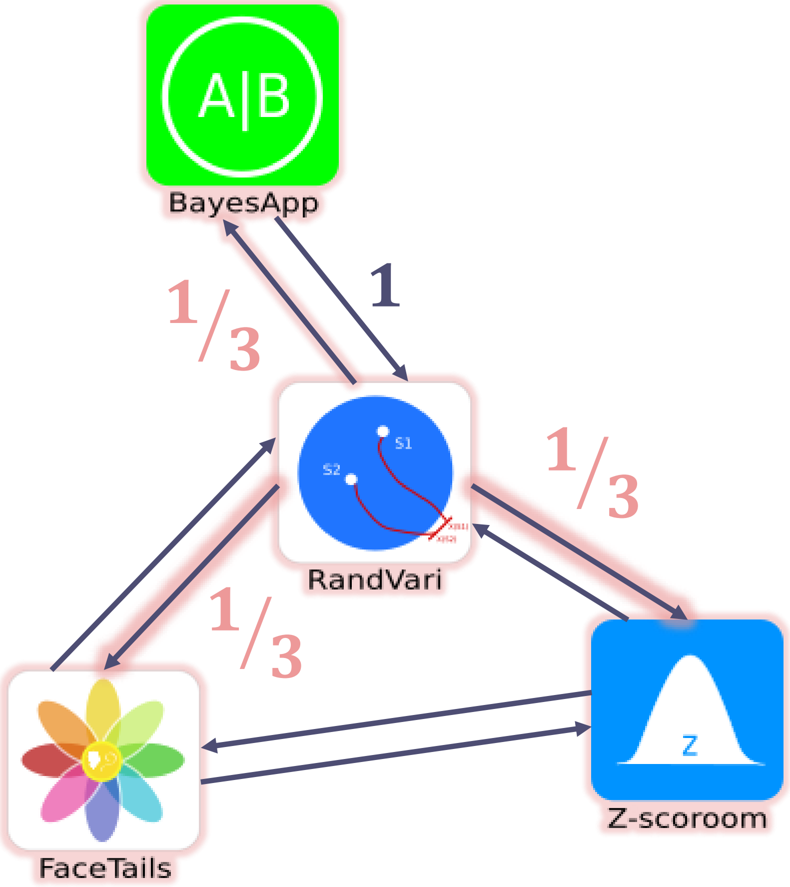
Motivation

Si on commence par *BayesApp*, la seule application qui peut être lancée est *RandVari*



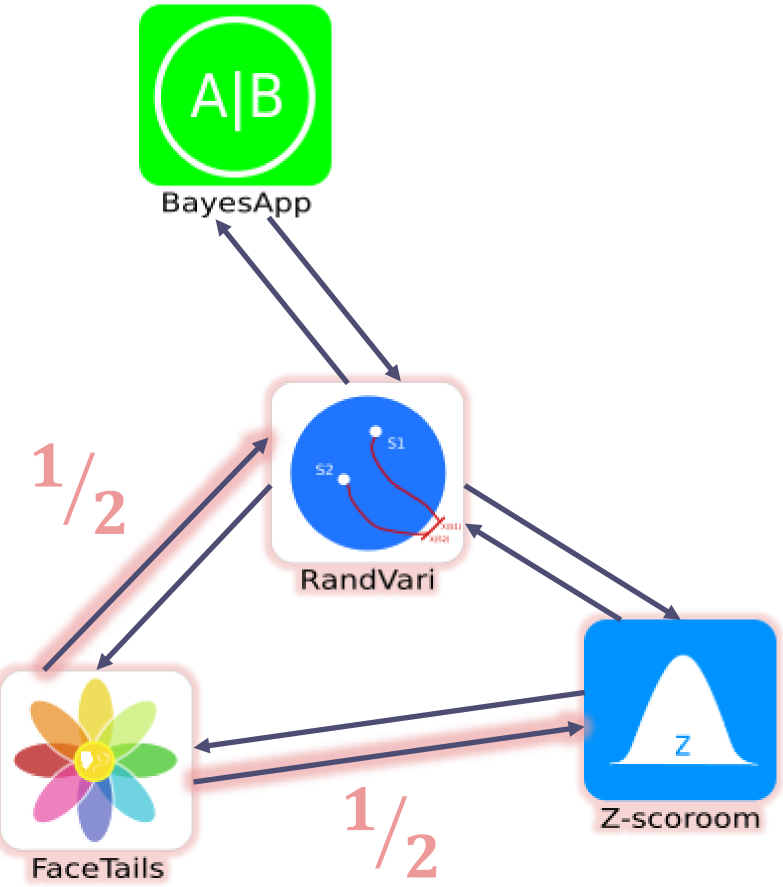
Motivation

Une fois *RandVari* est lancée, le choix se fait d'une manière aléatoire parmi 3 applications car il existe des connexions avec toutes les autres applications.



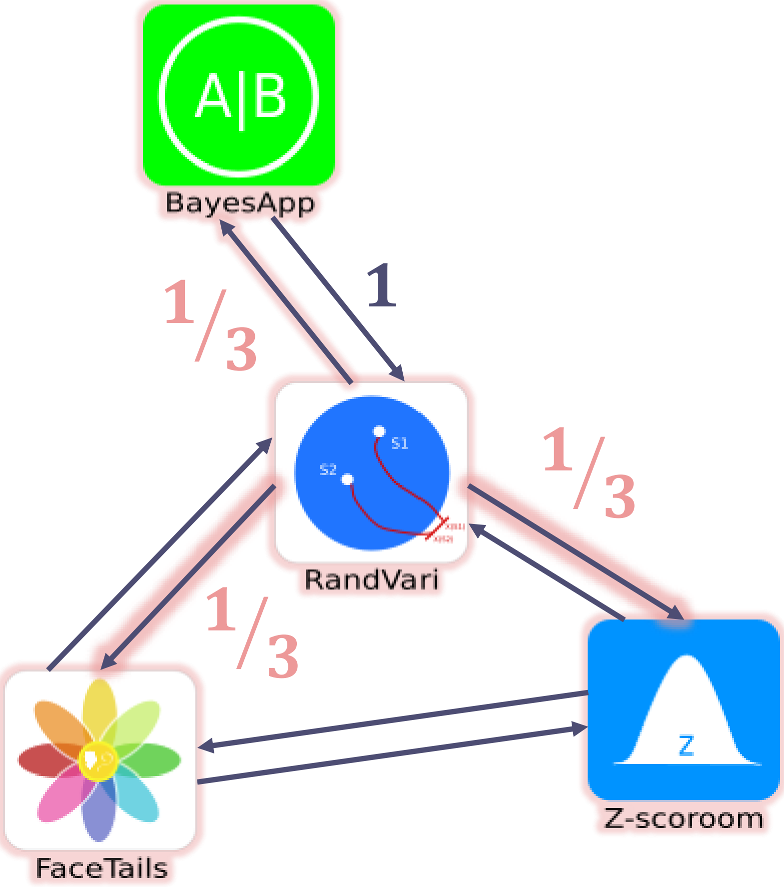
Motivation

En arrivant à *FaceTails*, le choix est entre *RandVari* et *Z-scoroom*.



Motivation

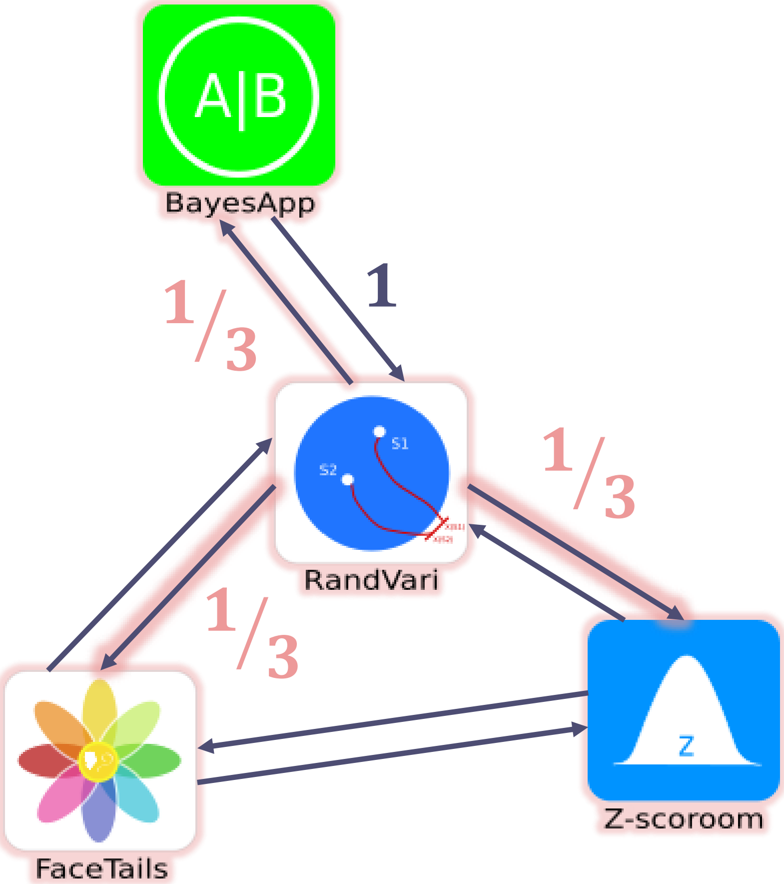
Ainsi à chaque étape, le système "décide" de sa prochaine étape d'une manière aléatoire en fonction de son état en cours. Il est donc possible de prédire quelle application va être lancée après.



Motivation

Ainsi à chaque étape, le système "décide" de sa prochaine étape d'une manière aléatoire en fonction de son état en cours. Il est donc possible de prédire quelle application va être lancée après.

Quelle application va être la plus utilisée ?



Définitions de base

Loi initiale

Classification des états

Probabilité stationnaire (invariante)

Chaîne de Markov discrète

Une **chaîne de Markov** (*Markov chain*) est un modèle stochastique qui décrit une séquence d'évènements où la probabilité de l'évènement suivant ne dépend que de l'évènement en cours (présent).

Chaîne de Markov discrète

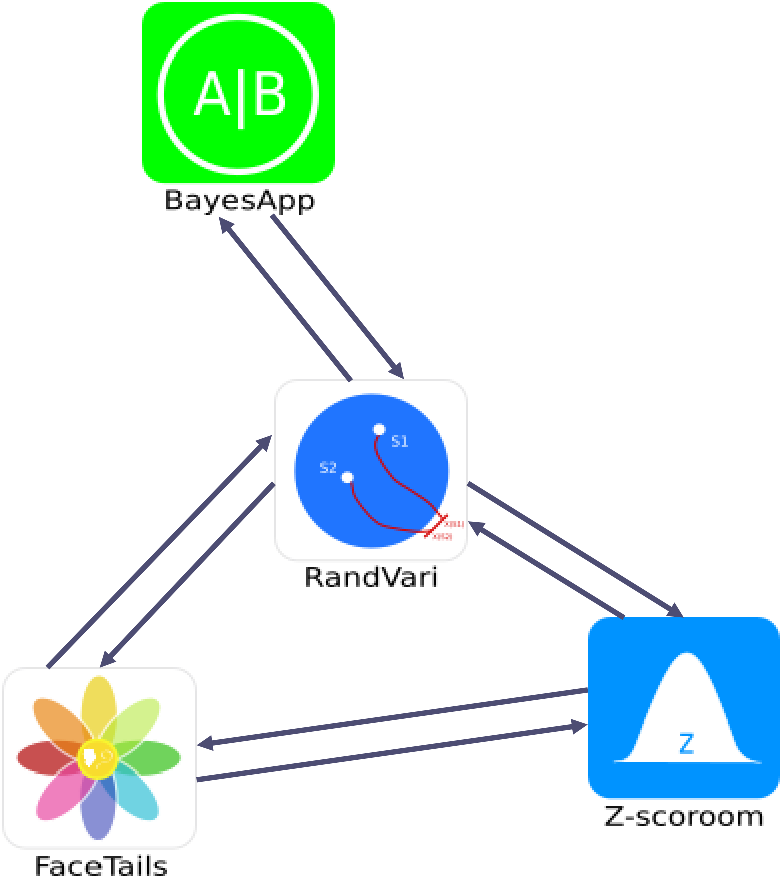
Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, $E = \{1,2, \dots, N\}$ un ensemble fini appelé l'**espace d'états**, $\mathcal{E}$ l'ensemble des parties de E.
Une **chaîne de Markov discrète** (*discrete Markov chain*) est une séquences $(X_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de v.a.r. à valeurs dans l'espace de l'états $(E, \mathcal{E})$ telle qu'elle vérifie $\forall\, n \in \mathbb{N},\ \forall (e_0, \dots, e_n, e_{n+1}) \in E^{n+2}$ la *propriété de Markov* (*Markov property*) :

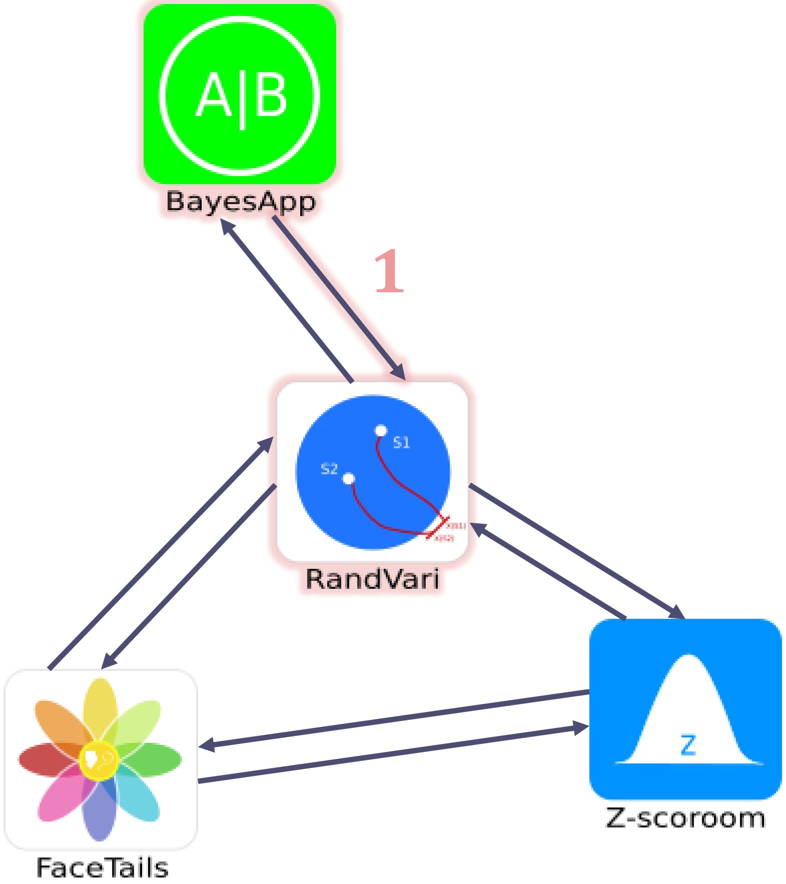
$$\mathbb{P}(X_{n+1} = e_{n+1} | X_n = e_n, \dots, X_0 = e_0) = \mathbb{P}(X_{n+1} = e_{n+1} | X_n = e_n)$$

Les termes de *perte de mémoire* et *sans mémoire* (*memorylessness*) sont parfois utilisés pour faire références à la propriété de Markov.

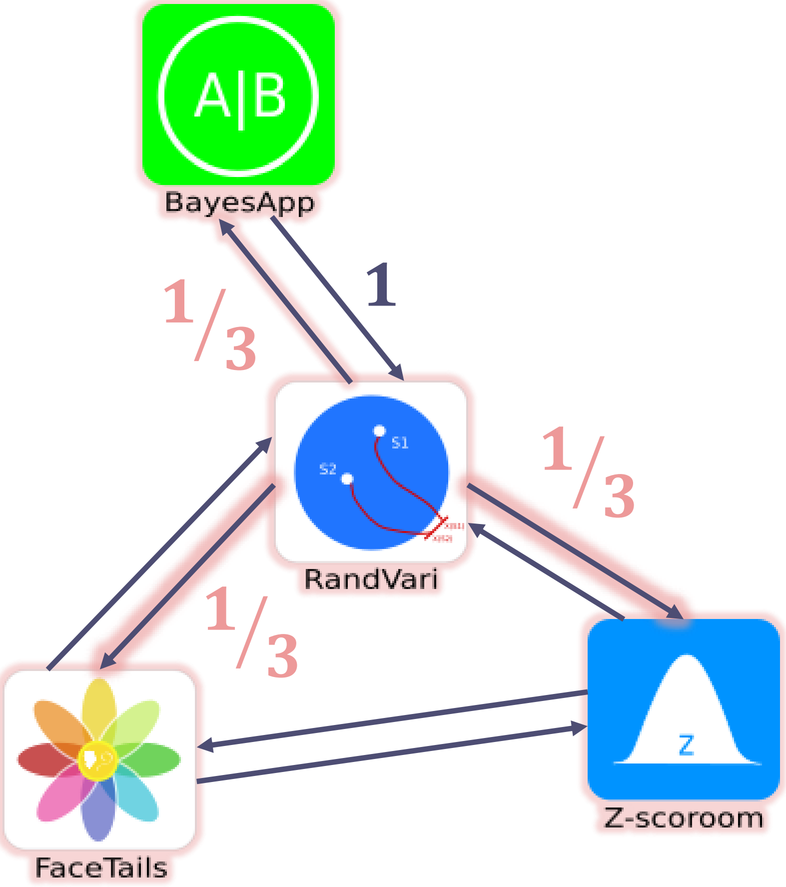
La valeur X_k, $\forall\, k \in \mathbb{N}$ est *l'état de la chaîne de Markov à l'instant (étape)* k. Le passage d'un état à l'autre est appelé une **transition** (*transition*).

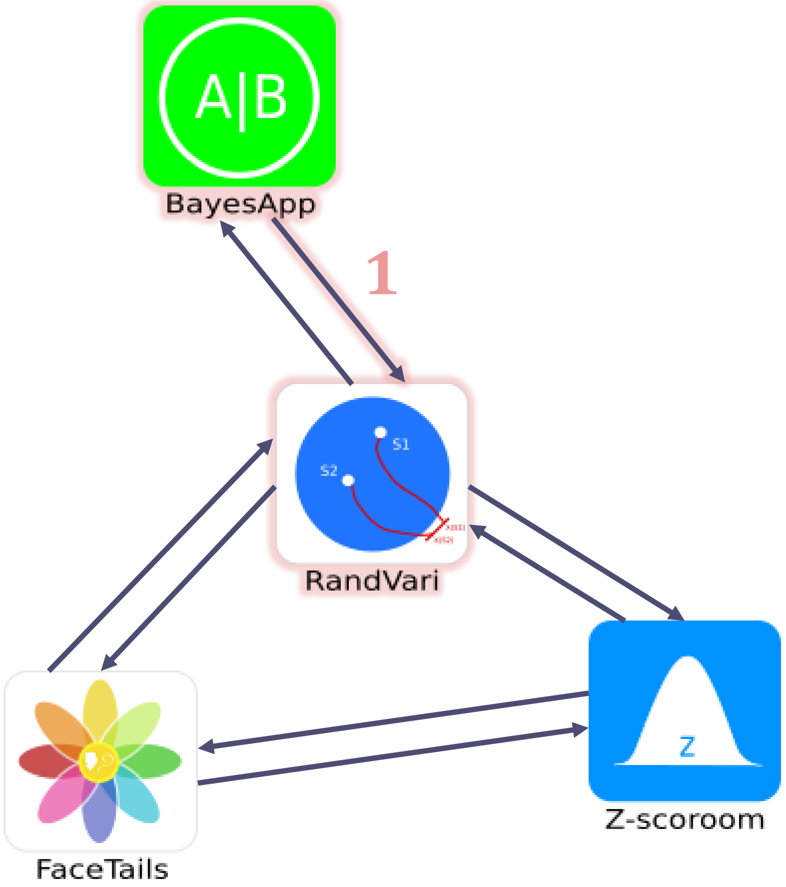
Transition


A|B
BayesApp
S1
S2
RandVari
FaceTails
Z
Z-scoroom

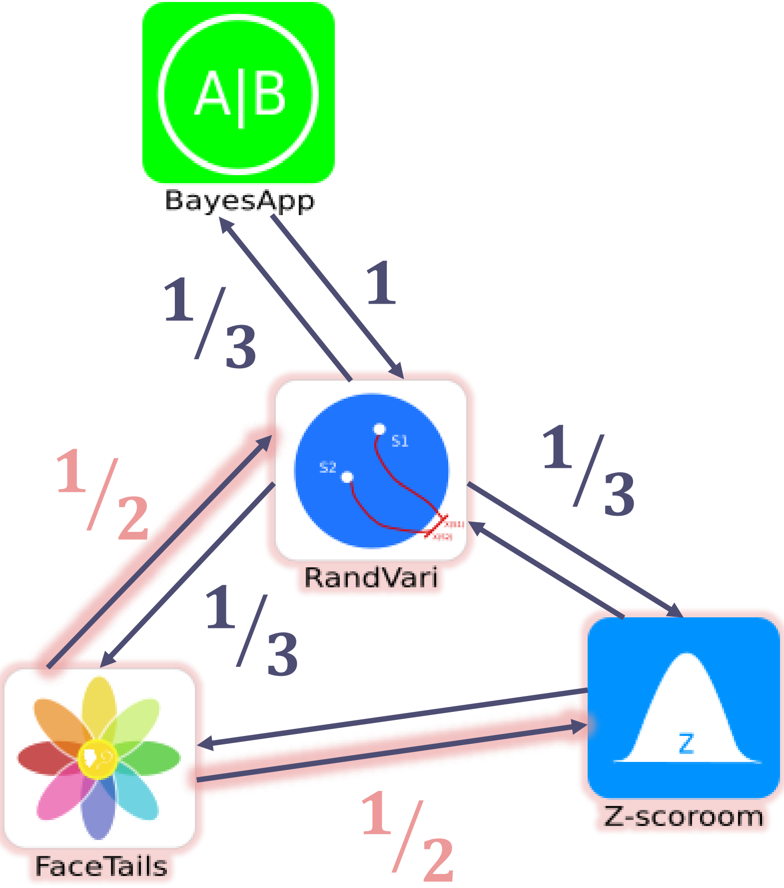

A|B
BayesApp
1
S1
S2
RandVari
FaceTails
Z
Z-scoroom

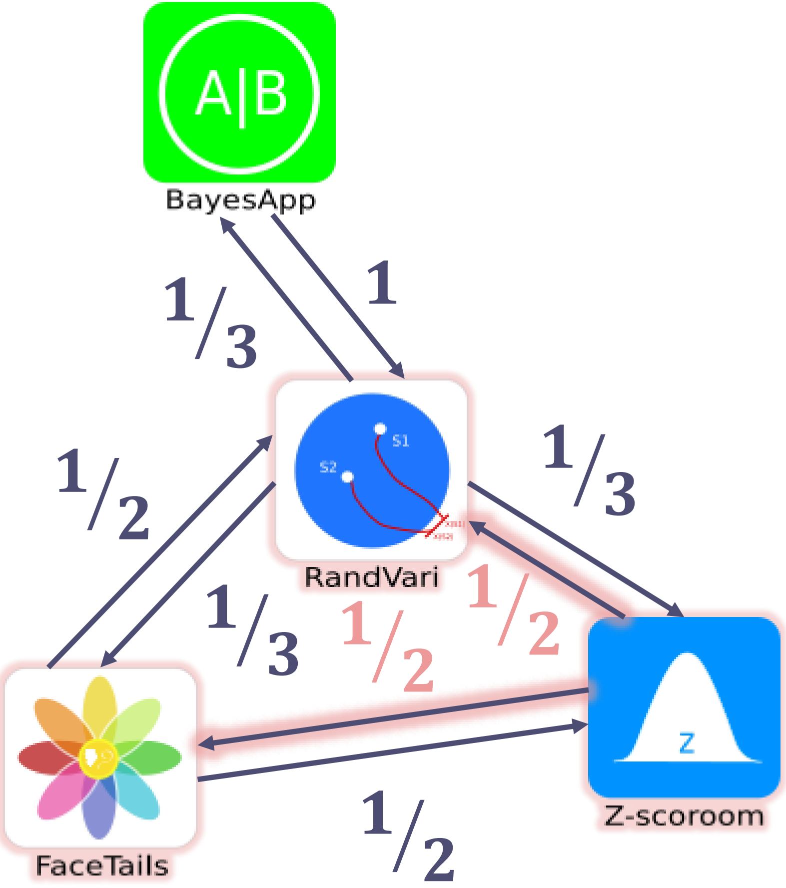
Transition


A|B
BayesApp
1
1/3
S1
S2
RandVari
1/3
1/3
Z
Z-scoroom
FaceTails


A|B
BayesApp
1
S1
S2
RandVari
Z
Z-scoroom
FaceTails

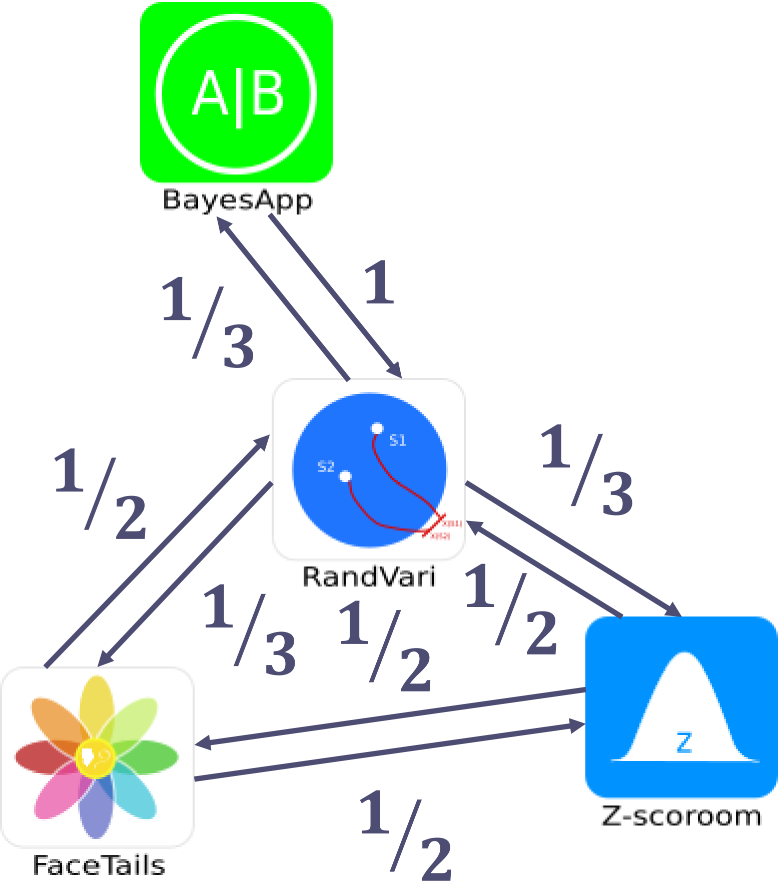
Transition


A|B
BayesApp
1/3
1
S1
S2
RandVari
1/2
1/3
1/3
Z
Z-scoroom
FaceTails
1/2


A|B
BayesApp
1/3
1
S1
S2
RandVari
1/3
1/2
1/3
1/2
1/2
Z
Z-scoroom
FaceTails
1/2

Transition

diagramme de transitions ou **diagramme sagittal** (*transition diagram*) liste tous les états possibles de la chaîne de Markov aussi que les probabilités de transition entre ces états (strictement positive)



Transition

Soit $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une chaîne de Markov sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ à valeurs dans $(E, \mathcal{E})$. Pour $(m,n) \in \mathbb{N}^2, n > m$, on appelle la **probabilité de transition** (*transition probability*) ou **probabilité de passage** de l'état e_m à l'état e_n en $n-m$ étapes, la probabilité conditionnelle :

$$p_{m,n} = \mathbb{P}(X_n = e_n | X_m = e_m)$$

$p_{m,n}^{(k)}$ pour désigner la probabilité de transition entre l'état m et n en k étapes.

Le nombre d'étapes $(n-m)$ est aussi appelé *l'intervalle de temps de* m *à* n.

Souvent les évènements sont numérotés : $E = \{1,2,\dots,n\}$. On peut réécrire la définition comme suit : soit $(i,j) \in E^2$, alors la probabilité de transition de i à j en $n-m$ étapes est :

$$p_{i,j} = \mathbb{P}(X_n = j | X_m = i)$$

Chaîne de Markov homogène

Une chaîne de Markov $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est dite **homogène** (*time-homogeneous*), si pour $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall (i,j) \in E^2$ les probabilités de transition sont indépendantes de l'instant n, i.e. :

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = j | X_n = i) = \mathbb{P}(X_n = j | X_{n-1} = i)$$

Ou dans le cas plus général, $\forall l \in \mathbb{N}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $l < n, \forall (i,j) \in E^2$:

$$\mathbb{P}(X_n = j | X_{n-l} = i) = \mathbb{P}(X_l = j | X_0 = i)$$

Chaîne de Markov stationnaire

Une chaîne de Markov $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est dite **stationnaire** (*stationary*), si pour $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall k \in \mathbb{N}$:

$$\mathbb{P}(X_0 = e_0, X_1 = e_1, \dots, X_k = e_k) = \mathbb{P}(X_n = e_0, X_{n+1} = e_1, \dots, X_{n+k} = e_k)$$

Remarque : toute chaîne de Markov stationnaire est homogène

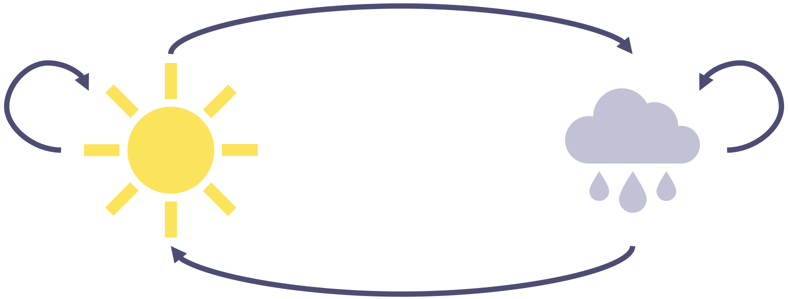
Exemple

A Sunville, il fait soit beau, soit il pleut.
Nous savons que :

- dans 75% de cas, un jour ensoleillé est suivi par un autre jour ensoleillé
- dans 60% de cas, un jour pluvieux est suivi par un autre jour pluvieux

S'il fait beau aujourd'hui, quelle est la probabilité qu'il fera beau dans 2 jours ?

Exemple

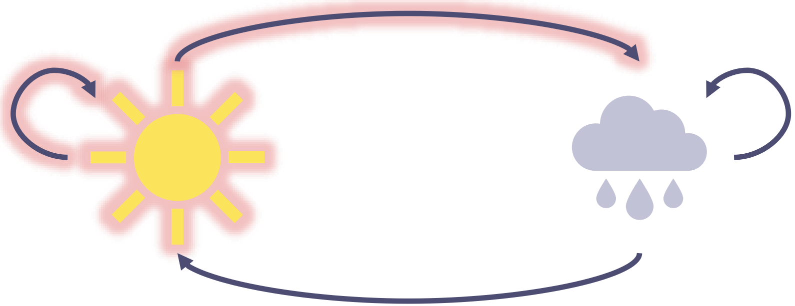


A Sunville, il fait soit beau, soit il pleut.
Nous savons que :

- dans 75% de cas, un jour ensoleillé est suivi par un autre jour ensoleillé
- dans 60% de cas, un jour pluvieux est suivi par un autre jour pluvieux

S'il fait beau aujourd'hui, quelle est la probabilité qu'il fera beau dans 2 jours ?

Exemple

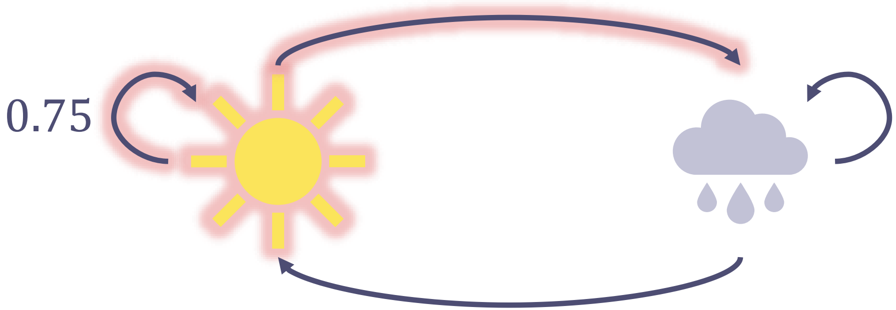


A Sunville, il fait soit beau, soit il pleut.
Nous savons que :

- dans 75% de cas, un jour ensoleillé est suivi par un autre jour ensoleillé
- dans 60% de cas, un jour pluvieux est suivi par un autre jour pluvieux

S'il fait beau aujourd'hui, quelle est la probabilité qu'il fera beau dans 2 jours ?

Exemple

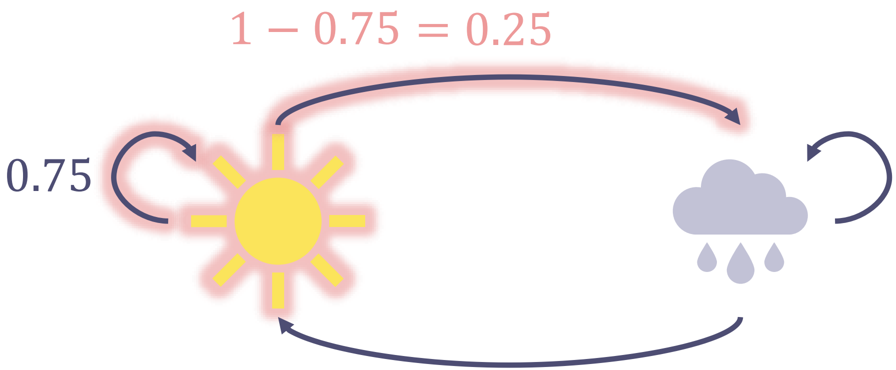


A Sunville, il fait soit beau, soit il pleut.
Nous savons que :

- dans 75% de cas, un jour ensoleillé est suivi par un autre jour ensoleillé
- dans 60% de cas, un jour pluvieux est suivi par un autre jour pluvieux

S'il fait beau aujourd'hui, quelle est la probabilité qu'il fera beau dans 2 jours ?

Exemple

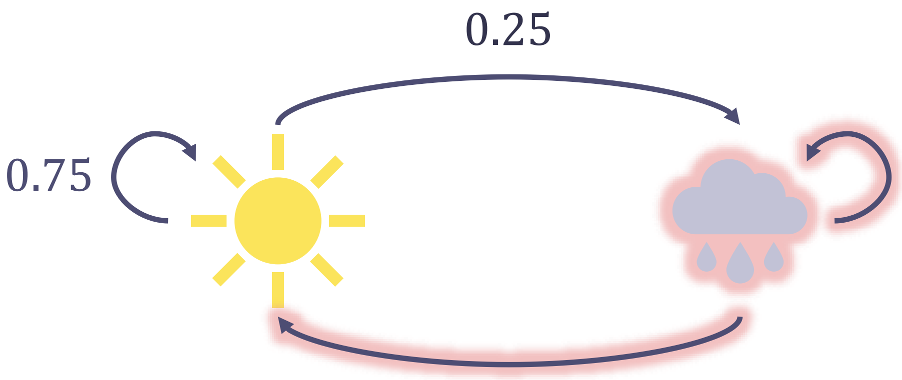


A Sunville, il fait soit beau, soit il pleut.
Nous savons que :

- dans 75% de cas, un jour ensoleillé est suivi par un autre jour ensoleillé
- dans 60% de cas, un jour pluvieux est suivi par un autre jour pluvieux

S'il fait beau aujourd'hui, quelle est la probabilité qu'il fera beau dans 2 jours ?

Exemple

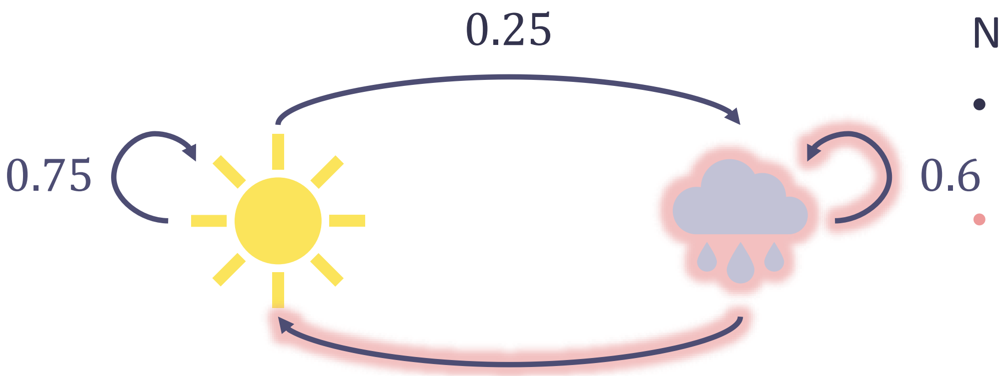


A Sunville, il fait soit beau, soit il pleut.
Nous savons que :

- dans 75% de cas, un jour ensoleillé est suivi par un autre jour ensoleillé
- dans 60% de cas, un jour pluvieux est suivi par un autre jour pluvieux

S'il fait beau aujourd'hui, quelle est la probabilité qu'il fera beau dans 2 jours ?

Exemple

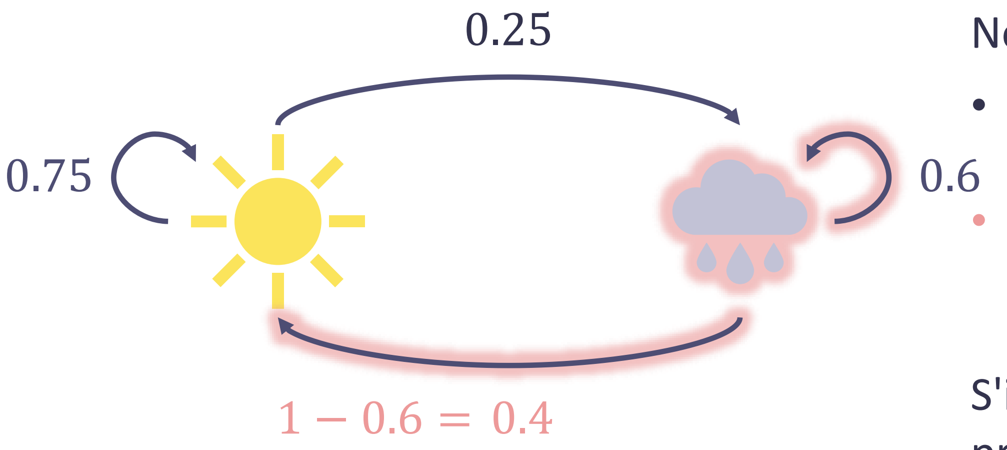


A Sunville, il fait soit beau, soit il pleut.
Nous savons que :

- dans 75% de cas, un jour ensoleillé est suivi par un autre jour ensoleillé
- dans 60% de cas, un jour pluvieux est suivi par un autre jour pluvieux

S'il fait beau aujourd'hui, quelle est la probabilité qu'il fera beau dans 2 jours ?

Exemple

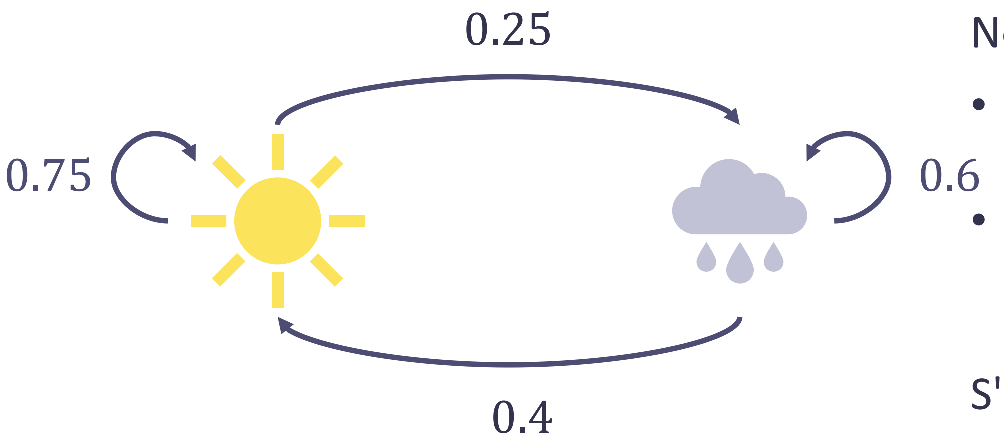


A Sunville, il fait soit beau, soit il pleut.
Nous savons que :

- dans 75% de cas, un jour ensoleillé est suivi par un autre jour ensoleillé
- dans 60% de cas, un jour pluvieux est suivi par un autre jour pluvieux

S'il fait beau aujourd'hui, quelle est la probabilité qu'il fera beau dans 2 jours ?

Exemple

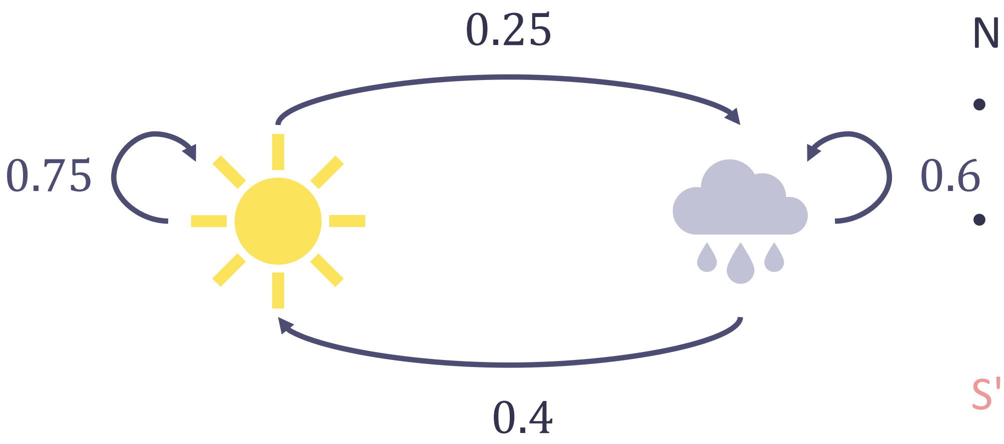


A Sunville, il fait soit beau, soit il pleut.
Nous savons que :

- dans 75% de cas, un jour ensoleillé est suivi par un autre jour ensoleillé
- dans 60% de cas, un jour pluvieux est suivi par un autre jour pluvieux

S'il fait beau aujourd'hui, quelle est la probabilité qu'il fera beau dans 2 jours ?

Exemple

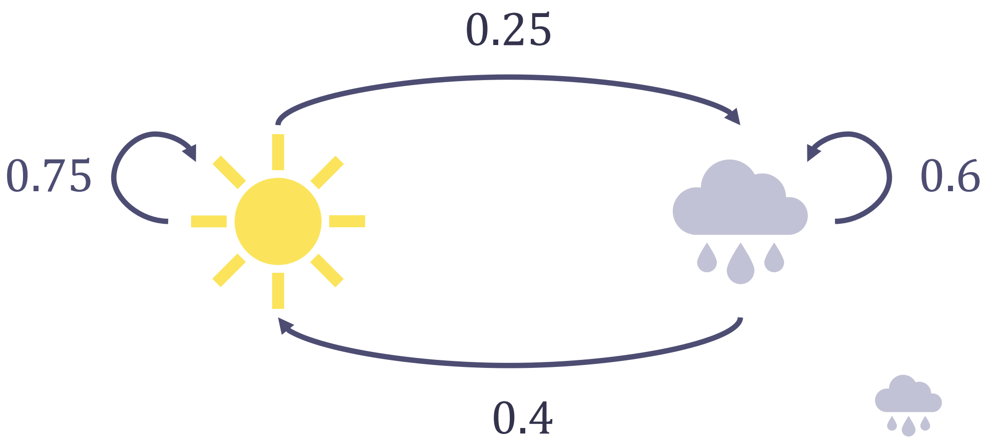


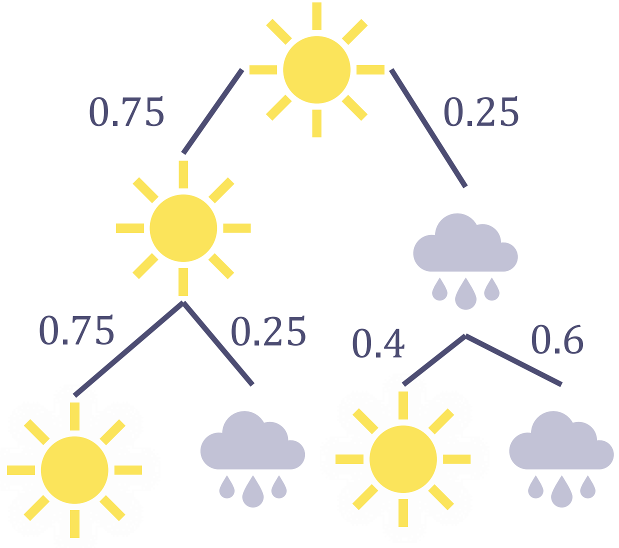
A Sunville, il fait soit beau, soit il pleut.
Nous savons que :

- dans 75% de cas, un jour ensoleillé est suivi par un autre jour ensoleillé
- dans 60% de cas, un jour pluvieux est suivi par un autre jour pluvieux

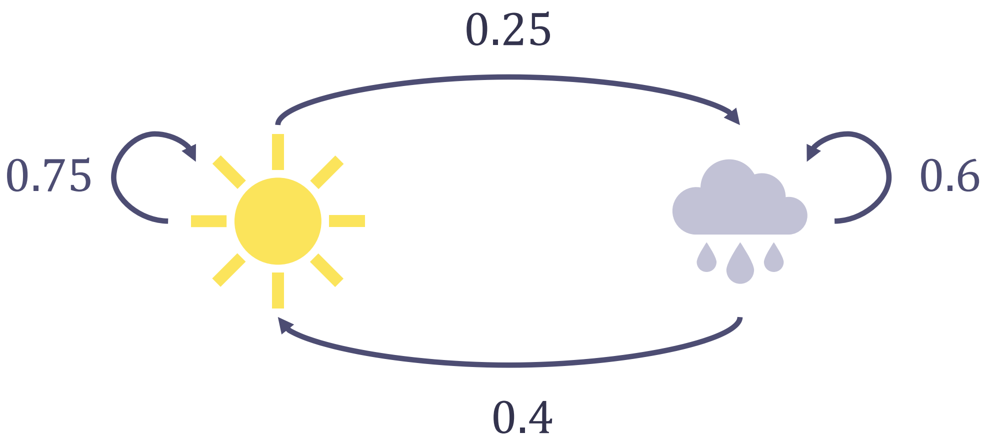
S'il fait beau aujourd'hui, quelle est la probabilité qu'il fera beau dans 2 jours ?

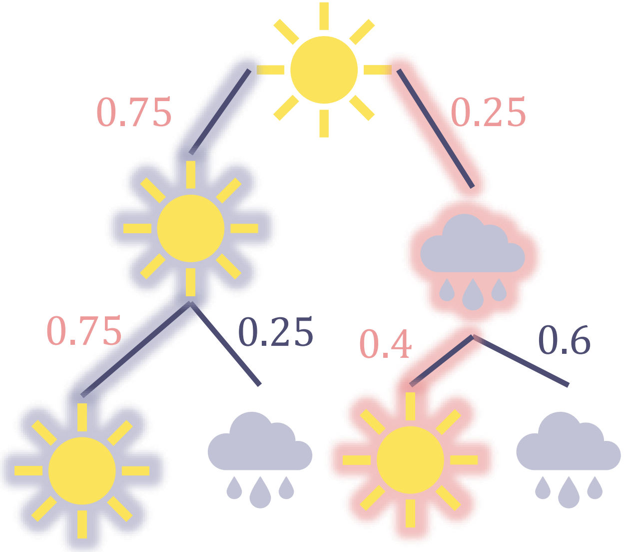
Exemple





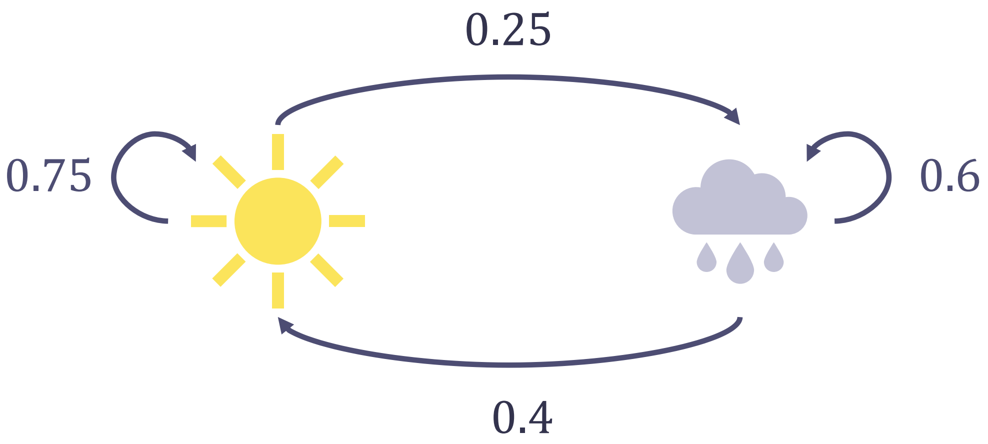
Exemple

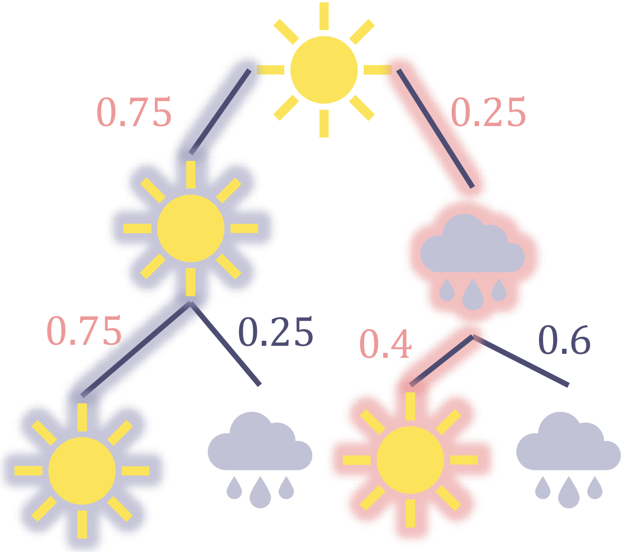




2 chemins ramenant au jour ensoleillé dans 2 jours

Exemple

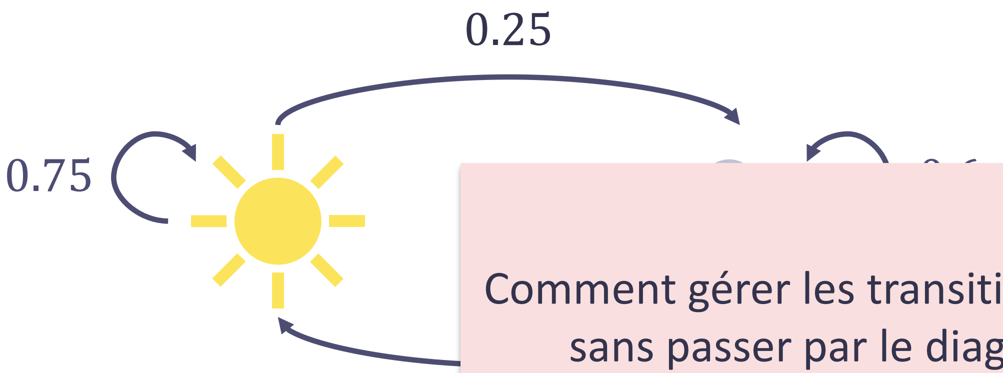


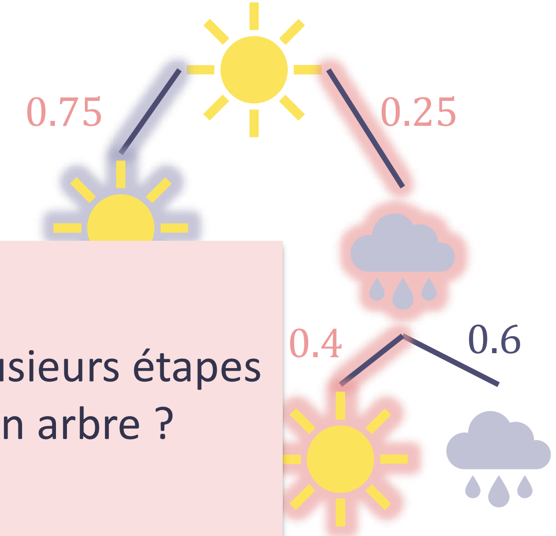


$$\mathbb{P}(X_2 = soleil \mid X_0 = soleil) =$$
$$= 0.75 \times 0.75 + 0.25 \times 0.4 =$$
$$= 0.5625 + 0.1 = 0.6625$$

2 chemins ramenant au jour ensoleillé dans 2 jours

Exemple





Comment gérer les transition en plusieurs étapes sans passer par le diagramme en arbre ?

$$\mathbb{P}(X_2 = soleil \mid X_0 = soleil) =$$
$$= 0.75 \times 0.75 + 0.25 \times 0.4 =$$
$$= 0.5625 + 0.1 = 0.6625$$

2 chemins ramenant au jour ensoleillé dans 2 jours

Matrice de transition

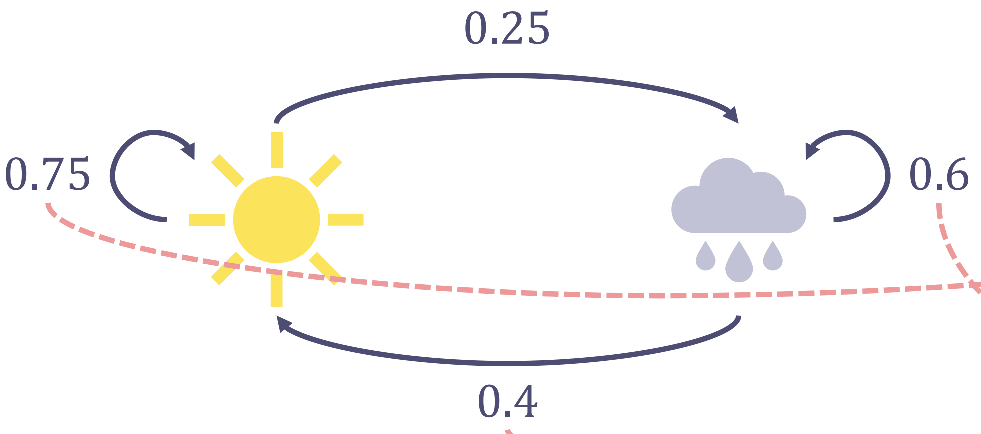
On appelle **matrice de transition** (*transition matrix*) d'une chaîne de Markov homogène $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ la matrice $G = \left(p_{i,j}\right)_{i,j\in E} \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$où $p_{i,j}$ est la probabilité de transition entre l'état i à l'état j, i.e. :

$$p_{i,j} = \mathbb{P}(X_1 = j | X_0 = i)$$

G est une matrice stochastique (*right stochastic matrix*) vérifiant :

1. une matrice carrée
2. chaque élément représente une probabilité $\forall (i,j) \in E^2, \quad p_{ij} \geq 0$
3. la somme des éléments de chaque ligne vaut 1 : $\forall i \in E, \quad \sum_{j\in E} p_{ij} = 1$

Matrice de transition



$$\begin{pmatrix} 0.75 & 0.25 \\ 0.4 & 0.6 \end{pmatrix}$$

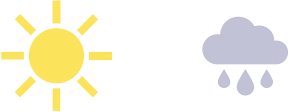
Matrice de transition

$$
\begin{array}{cc}
 & \overbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad}^{\text{« futur »}} \\
\text{« présent »} \left\{ \vphantom{\begin{pmatrix} 0.75 \\ 0.4 \end{pmatrix}} \right. & \begin{pmatrix} 0.75 & 0.25 \\ 0.4 & 0.6 \end{pmatrix}
\end{array}
$$

Matrice de transition

S'il fait beau aujourd'hui, quelle est la probabilité qu'il fera beau dans 2 jours ?

Aujourd'hui il fait beau :

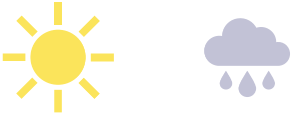


$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Matrice de transition

S'il fait beau aujourd'hui, quelle est la probabilité qu'il fera beau dans 2 jours ?

Aujourd'hui il fait beau :



$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$S_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$$
$$S_1 = ?$$

Matrice de transition

Aujourd'hui il fait beau :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0.75 & 0.25 \\ 0.4 & 0.6 \end{pmatrix}$$

S'il fait beau aujourd'hui, quelle est la probabilité qu'il fera beau dans 2 jours ?

$$S_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$S_1 = S_0 G = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.75 & 0.25 \\ 0.4 & 0.6 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \times 0.75 + 0 \times 0.4 & 1 \times 0.25 + 0 \times 0.6 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0.75 & 0.25 \end{pmatrix}$$

Matrice de transition

S'il fait beau aujourd'hui, quelle est la probabilité qu'il fera beau dans 2 jours ?

Aujourd’hui il fait beau :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$$

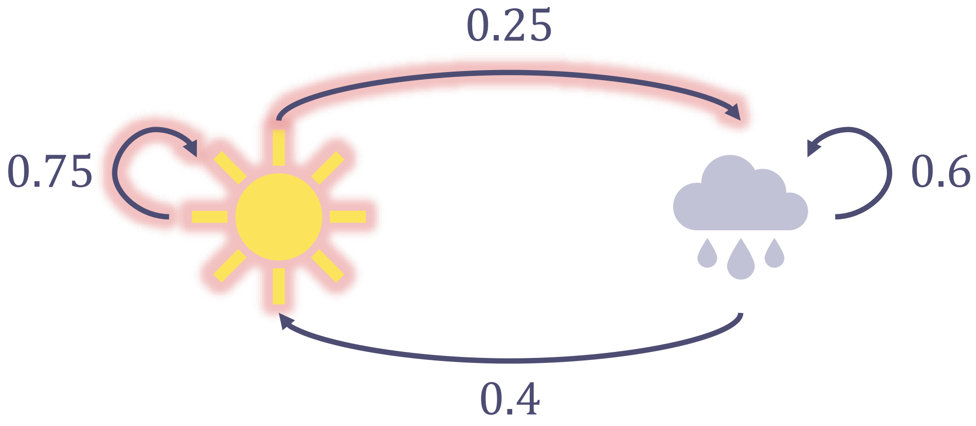
$$\begin{pmatrix} 0.75 & 0.25 \\ 0.4 & 0.6 \end{pmatrix}$$

$$S_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$S_1 = S_0 G = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.75 & 0.25 \\ 0.4 & 0.6 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \times 0.75 + 0 \times 0.4 & 1 \times 0.25 + 0 \times 0.6 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0.75 & 0.25 \end{pmatrix}$$



Matrice de transition

S'il fait beau aujourd'hui, quelle est la probabilité qu'il fera beau dans 2 jours ?

Aujourd’hui il fait beau :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0.75 & 0.25 \\ 0.4 & 0.6 \end{pmatrix}$$

$$S_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$S_1 = S_0 G = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.75 & 0.25 \\ 0.4 & 0.6 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \times 0.75 + 0 \times 0.4 & 1 \times 0.25 + 0 \times 0.6 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0.75 & 0.25 \end{pmatrix}$$

$$S_2 = ?$$

Matrice de transition

S'il fait beau aujourd'hui, quelle est la probabilité qu'il fera beau dans 2 jours ?

Aujourd'hui il fait beau :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0.75 & 0.25 \\ 0.4 & 0.6 \end{pmatrix}$$

$$S_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$S_1 = S_0 G = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.75 & 0.25 \\ 0.4 & 0.6 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \times 0.75 + 0 \times 0.4 & 1 \times 0.25 + 0 \times 0.6 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0.75 & 0.25 \end{pmatrix}$$

$$S_2 = S_1 G = \begin{pmatrix} 0.75 & 0.25 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.75 & 0.25 \\ 0.4 & 0.6 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0.75 \times 0.75 + 0.25 \times 0.4 & 0.75 \times 0.25 + 0.25 \times 0.6 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0.5625 + 0.1 & 0.1875 + 0.15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.6625 & 0.3375 \end{pmatrix}$$

Matrice de transition

S'il fait beau aujourd'hui, quelle est la probabilité qu'il fera beau dans 2 jours ?

Aujourd'hui il fait beau :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0.75 & 0.25 \\ 0.4 & 0.6 \end{pmatrix}$$

$$S_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$S_1 = S_0 G = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.75 & 0.25 \\ 0.4 & 0.6 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \times 0.75 + 0 \times 0.4 & 1 \times 0.25 + 0 \times 0.6 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0.75 & 0.25 \end{pmatrix}$$

$$S_2 = S_1 G = \begin{pmatrix} 0.75 & 0.25 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.75 & 0.25 \\ 0.4 & 0.6 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0.75 \times 0.75 + 0.25 \times 0.4 & 0.75 \times 0.25 + 0.25 \times 0.6 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0.5625 + 0.1 & 0.1875 + 0.15 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \mathbf{0.6625} & 0.3375 \end{pmatrix}$$

Définitions de base

Loi initiale

Classification des états

Probabilité stationnaire (invariante)

Loi initiale d'une chaîne de Markov

Comment obtenir les distributions de X_1, X_2, etc. sachant la distribution de X_0 et la matrice de transition ?

Loi initiale d'une chaîne de Markov

Comment obtenir les distributions de X_1, X_2, etc. sachant la distribution de X_0 et la matrice de transition ?

loi initiale $\sim$ les probabilités de chaque état d'être l'état initial

Loi initiale d'une chaîne de Markov

Soit $X = (X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une chaîne de Markov homogène de matrice de transition G. On désigne par Π la fonction de masse de la v.a.r. discrète X_0, appelée **distribution initiale** ou **loi initiale** (*initial distribution*) :

$$\Pi : \begin{cases} E \to [0,1] \\ k \to \pi_k = \mathbb{P}(X_0 = k) \end{cases}$$

Ainsi, on définit un vecteur ligne $\pi = (\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_N)$. $\forall n \in \mathbb{N}$, la fonction de masse de la v.a.r. discrète X_n est une application :

$$\Pi^{(n)}: \begin{cases} E \to [0,1] \\ k \to \pi_k^{(n)} = \mathbb{P}(X_n = k) \end{cases}$$

La distribution de X_n est donc donnée par un vecteur ligne $\pi^{(n)} = \left(\pi_1^{(n)}, \pi_2^{(n)}, \dots, \pi_N^{(n)}\right)$ obtenu comme suit :

$$\begin{cases} \pi^{(n)} = \pi G^n \\ \pi^{(0)} = \pi \end{cases}$$

Loi initiale d'une chaîne de Markov

Soit $X = (X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une chaîne de Markov homogène de matrice de transition G. Pour $n \in \mathbb{N}$, on désigne par $G^n = \underbrace{G \cdot G \cdot \ldots \cdot G}_{n \text{ fois}}$ la puissance n de la matrice G. La probabilité de transition en n étapes de l'état i à l'état j est donc donnée par :

$$\mathbb{P}(X_n = j | X_0 = i) = G_{i,j}^n$$

où $G_{i,j}^n$ est l'élément d'indice (i, j) de la matrice G^n.

Equation de Chapman-Kolmogorov

Soit $X = (X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une chaîne de Markov homogène d'espace d'états E.
$\forall i, j \in E, \forall n, m \in \mathbb{N}$, le suivant est vrai :

$$\mathbb{P}(X_{m+n} = j | X_0 = i) = \sum_{k\in E} \mathbb{P}(X_m = j \,| X_0 = k) \times \mathbb{P}(X_n = k \,| X_0 = i)$$

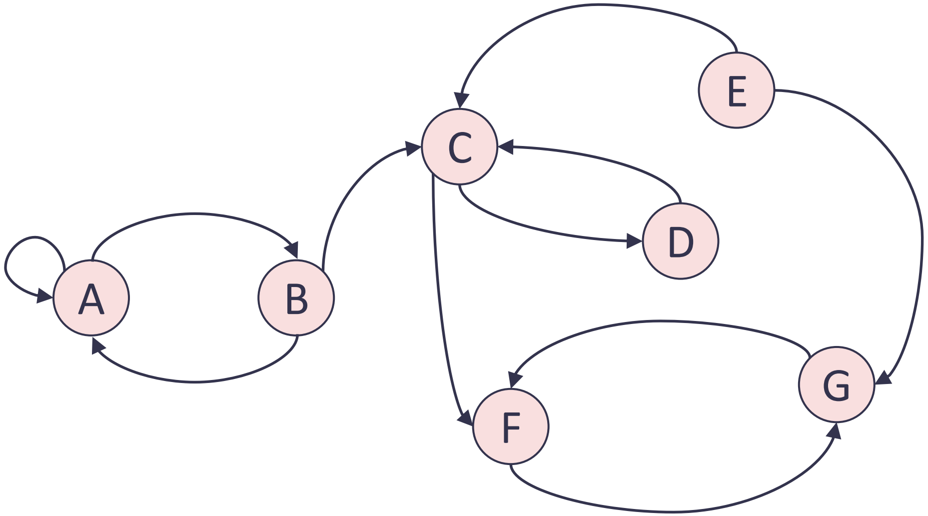
Définitions de base

Loi initiale

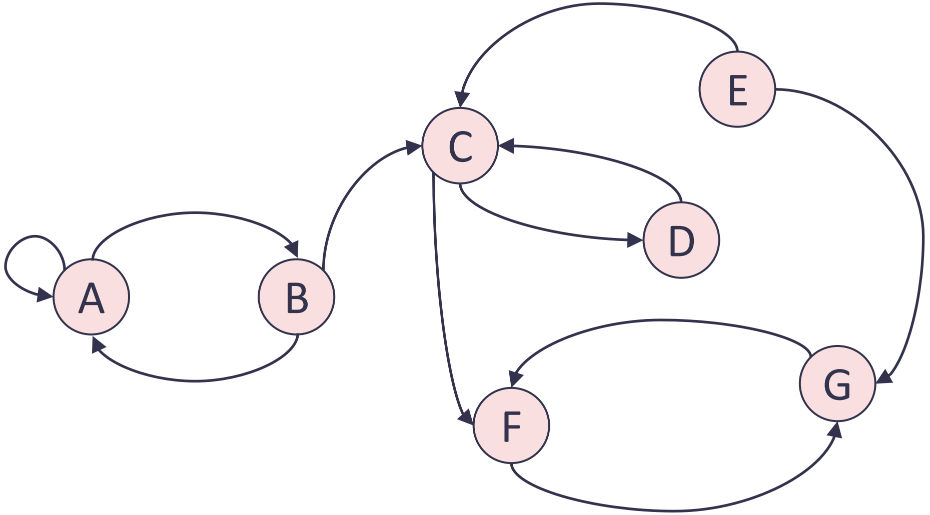
Classification des états

Probabilité stationnaire (invariante)

Classifications des états

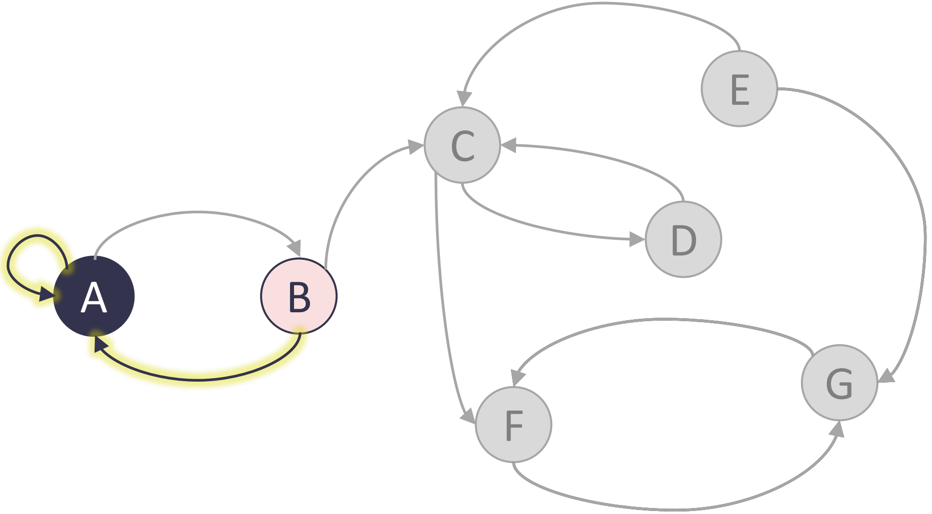


Classifications des états



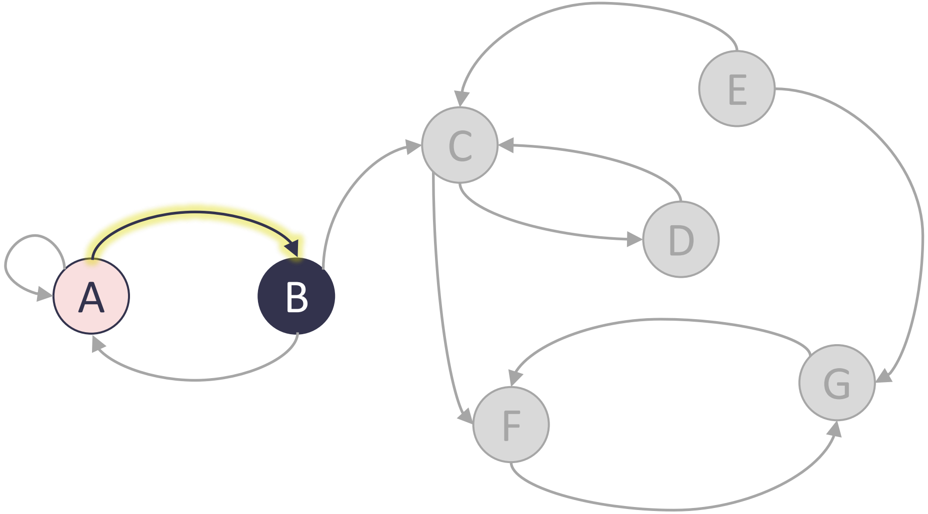
D'où peut-on « venir » dans chaque état en 1 seule transaction ?

Accessibilité des états



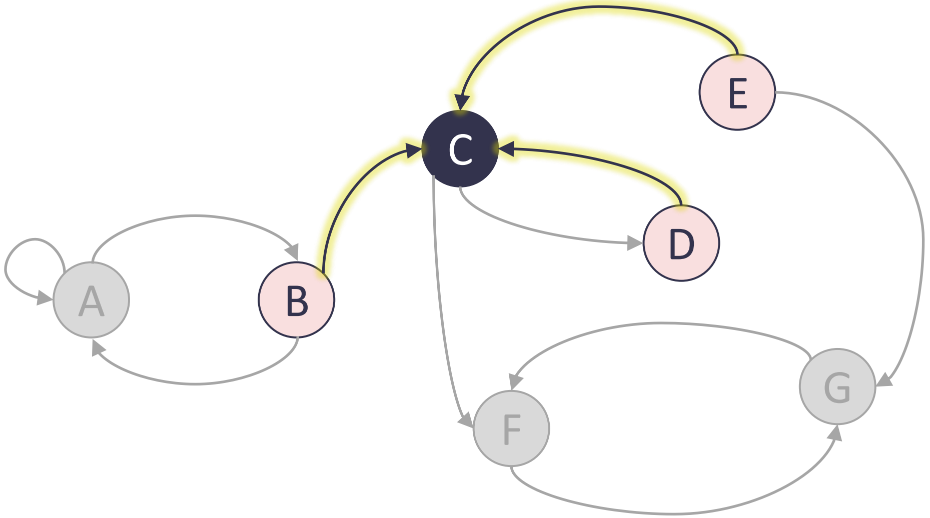
Vers	A partir de	
A	A	B

Accessibilité des états



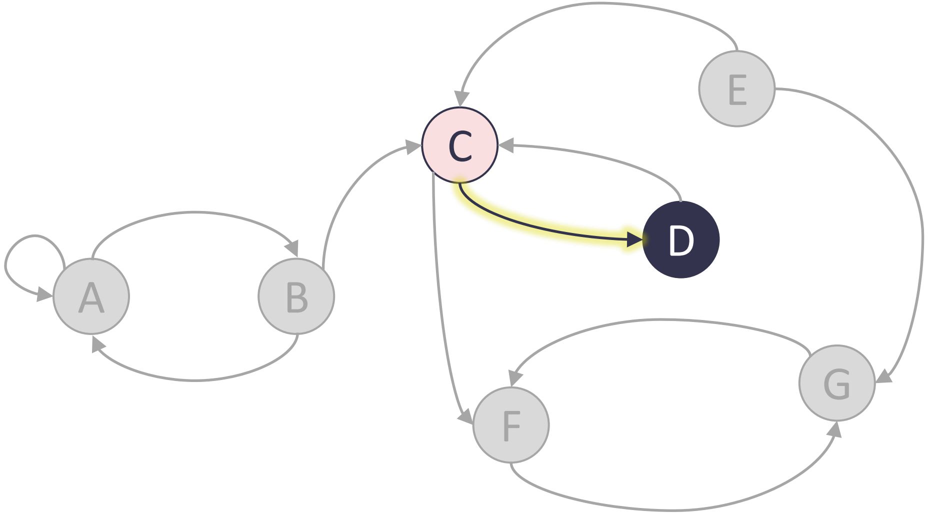
Vers	A partir de	
A	A	B
B	A	

Accessibilité des états



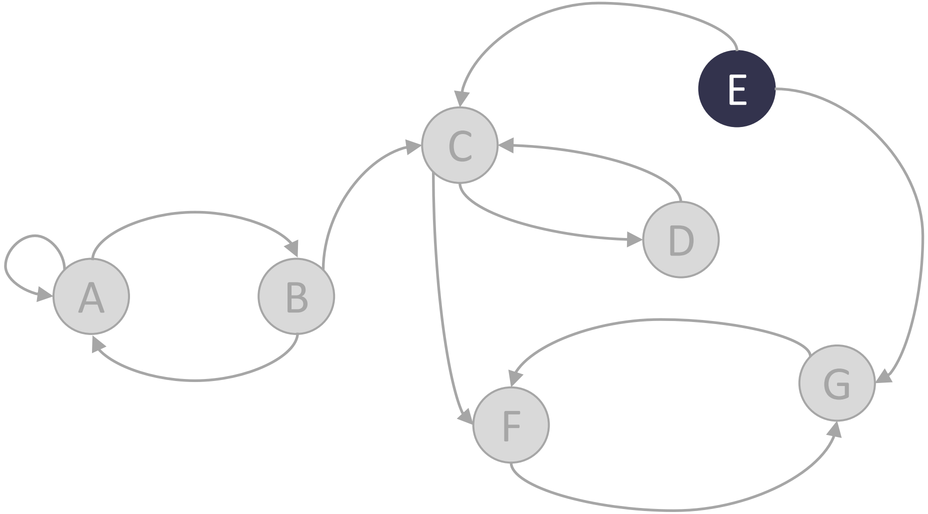
Vers	A partir de		
A	A	B	
B	A		
C	B	D	E

Accessibilité des états



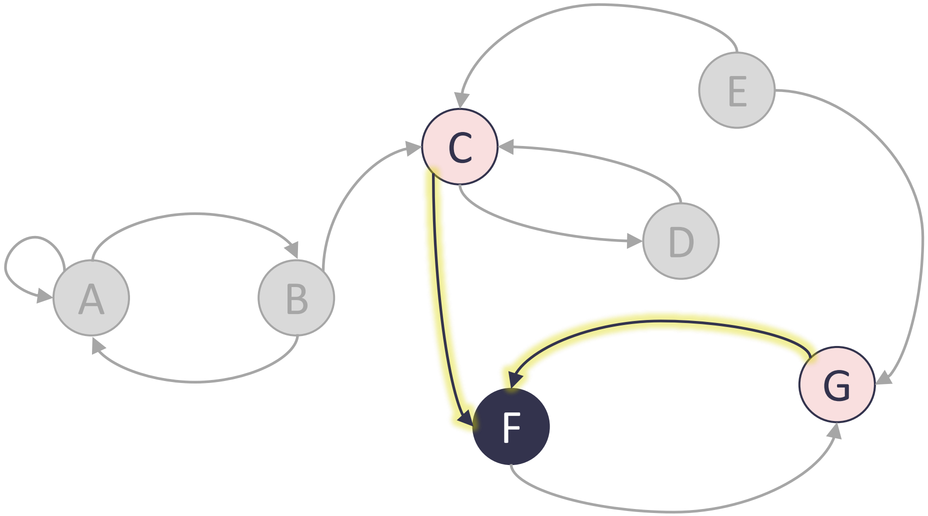
Vers	A partir de		
A	A	B	
B	A		
C	B	D	E
D	C		

Accessibilité des états



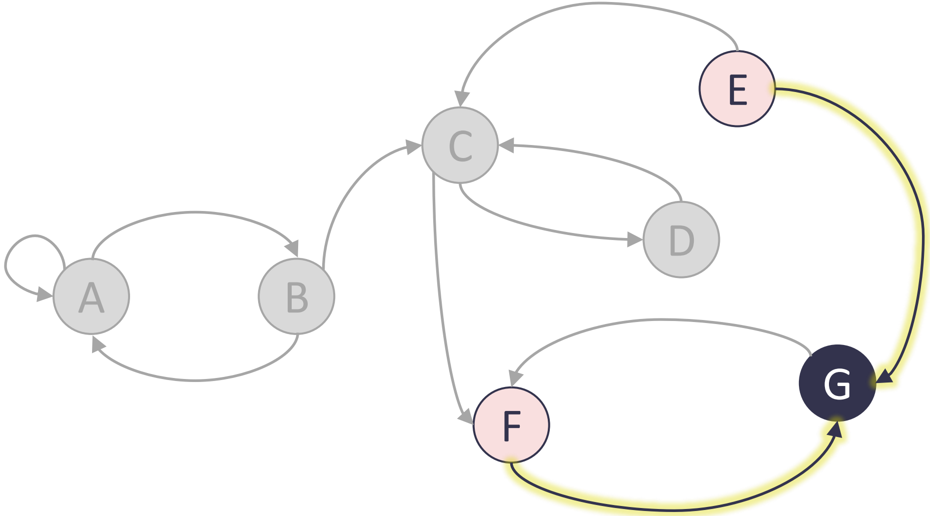
Vers	A partir de		
A	A	B	
B	A		
C	B	D	E
D	C		
E		$-$	

Accessibilité des états



Vers	A partir de		
A	A	B	
B	A		
C	B	D	E
D	C		
E		$-$	
F	C	G	

Accessibilité des états



Vers	A partir de		
A	A	B	
B	A		
C	B	D	E
D	C		
E		$-$	
F	C	G	
G	F	E	

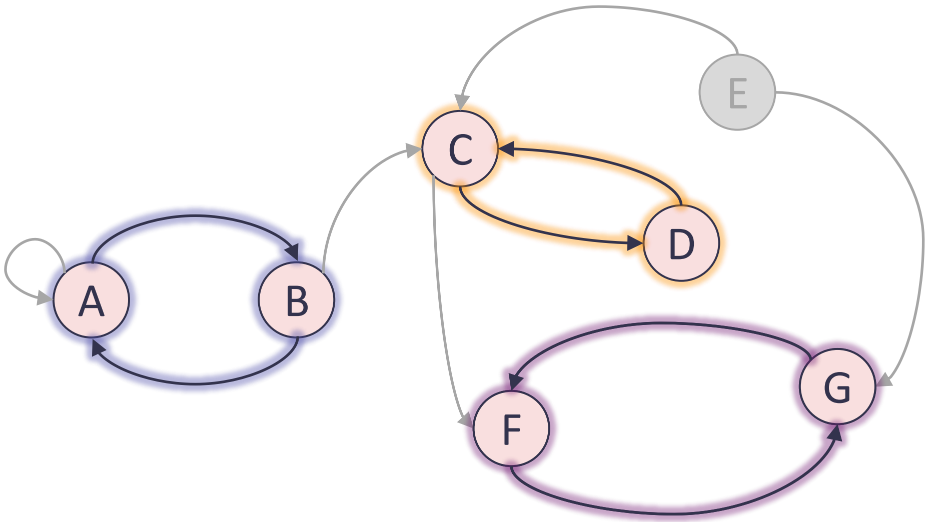
Accessibilité des états

Soit $X = (X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une chaîne de Markov homogène sur E. On dit que l'état $j \in E$ est **accessible** à partir de l'état $i \in E$ (*accessible from*), noté $i \to j$, si la probabilité de transition est positive pour un certain $n \in \mathbb{N}$, i.e.

$$\exists n \in \mathbb{N}:\ G_{ij}^{(n)} > 0$$

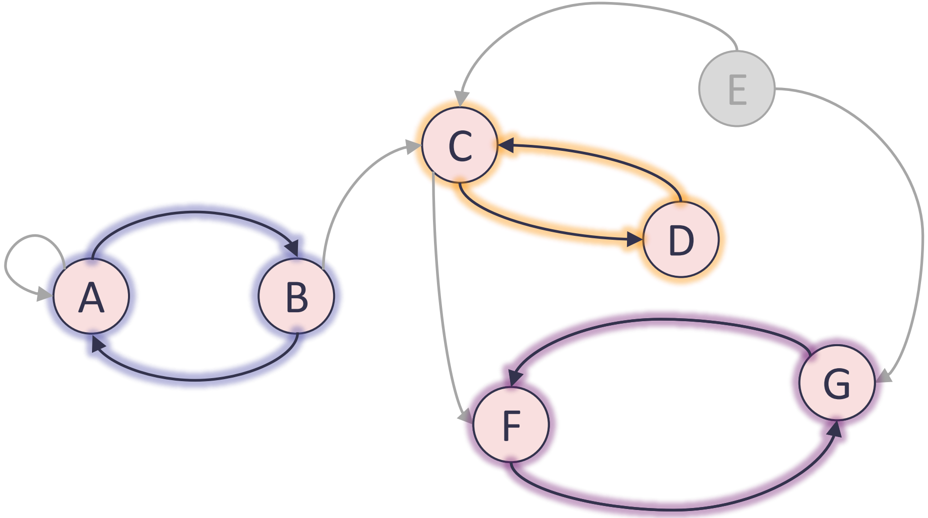
On considère que chaque état est accessible à partir de lui-même.

Accessibilité des états



$A \rightarrow B$ et $B \rightarrow A$
$C \rightarrow D$ et $D \rightarrow C$
$F \rightarrow G$ et $G \rightarrow F$

Accessibilité des états



$A \rightarrow B$ et $B \rightarrow A$
$C \rightarrow D$ et $D \rightarrow C$
$F \rightarrow G$ et $G \rightarrow F$

$A \leftrightarrow B$
$C \leftrightarrow D$
$F \leftrightarrow G$

Equivalence

On dit que l'état i et l'état j **communiquent** (*communicate*), noté $i \leftrightarrow j$, si chacun d'eux est accessible à partir de l'autre : $i \rightarrow j$ et $j \rightarrow i$.

Equivalence

On dit que l'état i et l'état j **communiquent** (*communicate*), noté $i \leftrightarrow j$, si chacun d'eux est accessible à partir de l'autre : $i \rightarrow j$ et $j \rightarrow i$.

La relation de communication $i \leftrightarrow j$ est une relation d'**équivalence** (*equivalence*) :

- *réflexive* : $i \leftrightarrow i$
- *symétrique* : si $i \leftrightarrow j$, alors $j \leftrightarrow i$
- *transitivité* : si $i \leftrightarrow j$ et $j \leftrightarrow k$, alors $i \leftrightarrow k$

Classes d'équivalence

Les partitions des états de la chaîne de Markov, appelées les **classes d'équivalence** (*communicating classes*) sont construites de la façon suivante :

deux états i et j appartiennent à la même classe si et seulement si $i \leftrightarrow j$, et deux états appartenant à deux classes différentes ne communiquent pas.

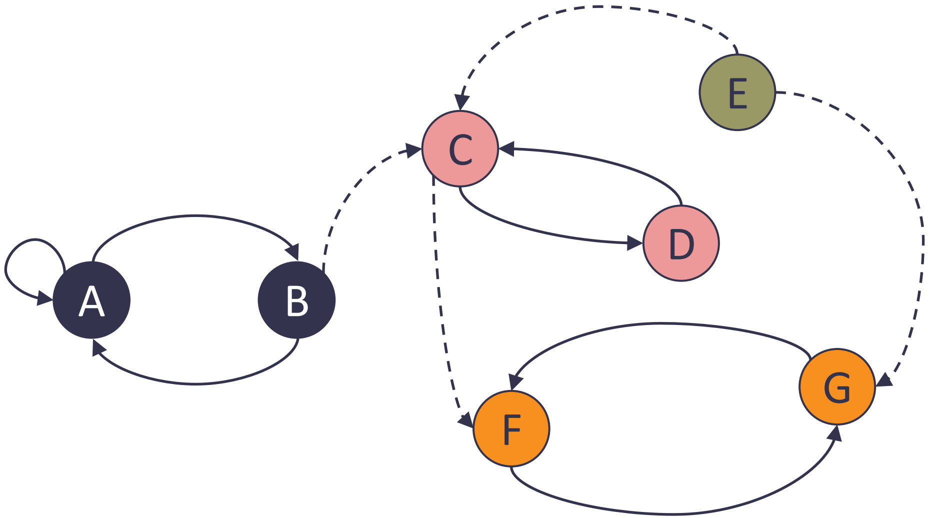
Classes d’équivalence

Les partitions des états de la chaîne de Markov, appelées les **classes d’équivalence** (*communicating classes*) sont construites de la façon suivante :

deux états i et j appartiennent à la même classe si et seulement si $i \leftrightarrow j$, et deux états appartenant à deux classes différentes ne communiquent pas.

La relation d'accessibilité (être accessible) s'étend aux classes d'équivalence

Classes d’équivalence



Classes :

$\{A, B\}$
$\{C, D\}$
$\{E\}$
$\{F, G\}$

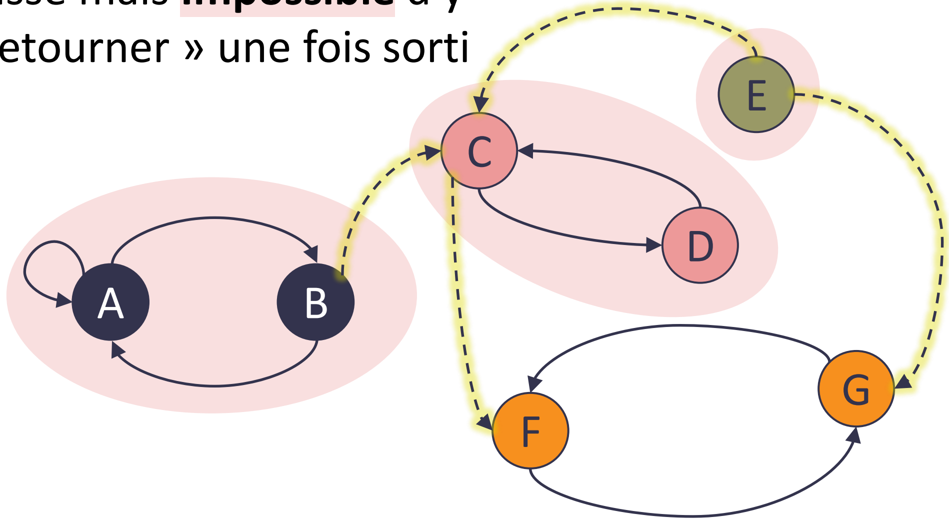
Chaîne de Markov irréductible

Une chaîne de Markov est dite **irréductible** (*irreducible*), si pour elle existe qu'une seule classe (tous les états communiquent entre eux), c'est-à-dire tous les états communiquent :

$$\forall (i,j) \in E^2, \exists n \in \mathbb{N} : \ G_{ij}^n > 0$$

Classification des classes

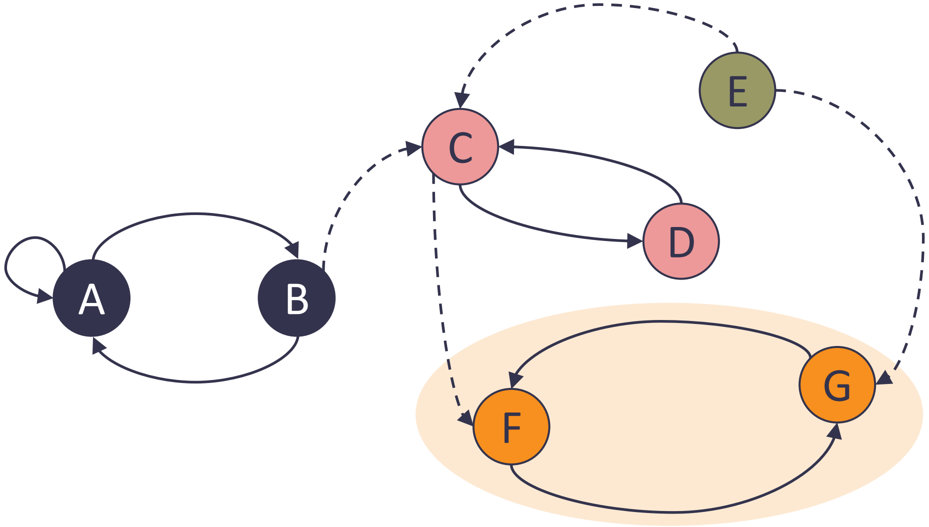
Possible de « sortir » de la classe mais **Impossible** d'y « retourner » une fois sorti



Classes :

$\{A, B\}$
$\{C, D\}$
$\{E\}$
$\{F, G\}$

Classification des classes



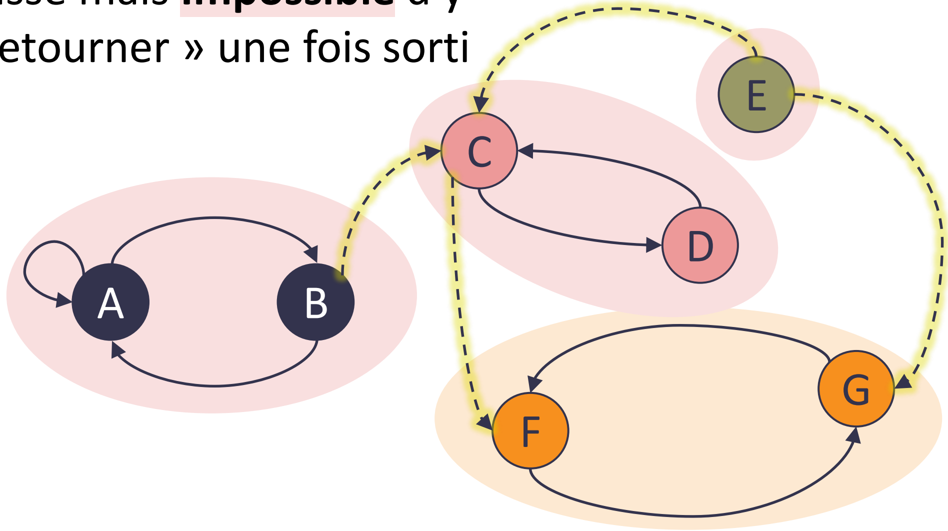
Classes :

$\{A, B\}$
$\{C, D\}$
$\{E\}$
$\{F, G\}$

Impossible de
« sortir » de la classe

Classification des classes

Possible de « sortir » de la classe mais **Impossible** d'y « retourner » une fois sorti



Impossible de « sortir » de la classe

Classes :

$\{A, B\}$
$\{C, D\}$
$\{E\}$
$\{F, G\}$

Classification des classes

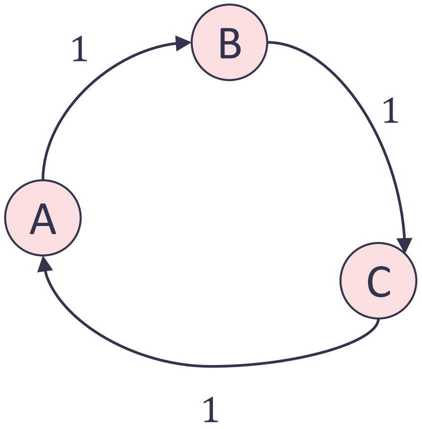
Une classe est dite **récurrente** ou **finale** (*recurrent state*) si elle ne conduit à aucune d'autre, autrement dit, il est impossible de la quitter. Les états d'une classe récurrente sont appelés *récurrents*.

Un état i est dit **absorbant** (*absorbing state*), s'il est impossible de le quitter (une classe récurrente composée d'un seul état), i.e. :

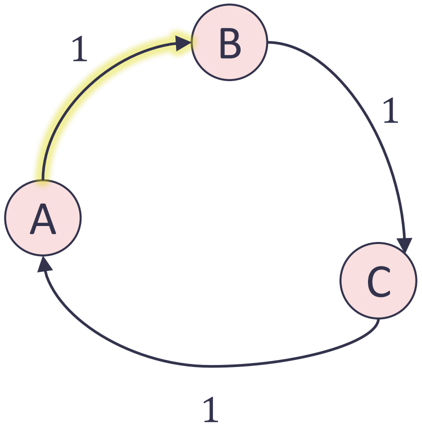
$$\forall k \neq i, \qquad G_{ik} = 0, \qquad G_{ii} = 1$$

Une classe est dite **transitoire** ou **transiente** (*transient*), si la probabilité d'y retourner est inférieur à 1. Les états d'une classe transitoire sont appelés *transitoires*.

Période



Période



$n = 1 : A \to B$

$n = 2 : B \to C$

$n = 3 : C \to A$

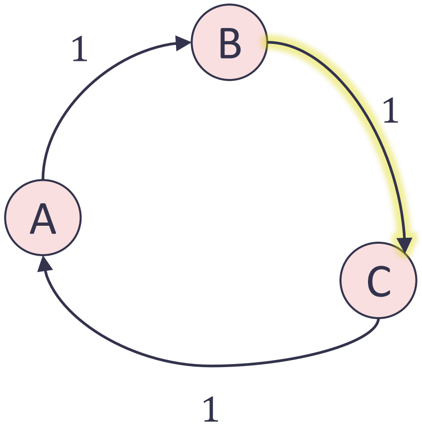
$n = 4 : A \to B$

$n = 5 : B \to C$

$n = 6 : C \to A$

…

Période



$n = 1: A \rightarrow B$

$n = 2: B \rightarrow C$

$n = 3: C \rightarrow A$

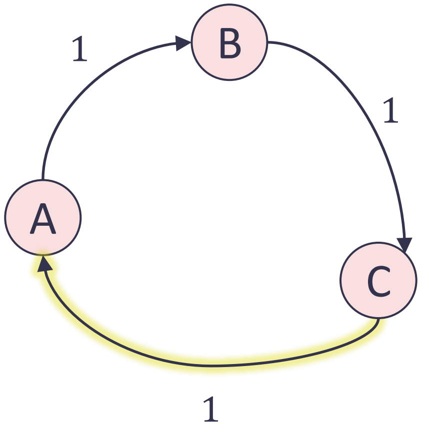
$n = 4: A \rightarrow B$

$n = 5: B \rightarrow C$

$n = 6: C \rightarrow A$

…

Période



$n = 1: A \rightarrow B$

$n = 2: B \rightarrow C$

$n = 3: C \rightarrow A$

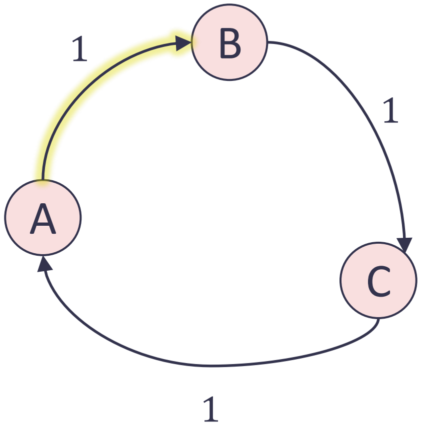
$n = 4: A \rightarrow B$

$n = 5: B \rightarrow C$

$n = 6: C \rightarrow A$

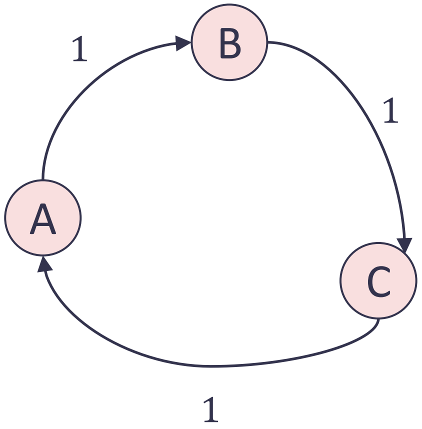
$\ldots$

Période



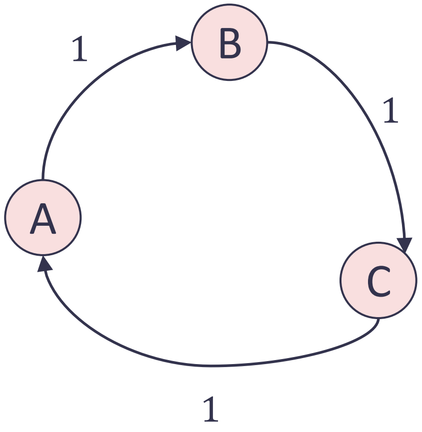
$n = 1 : A \to B$
$n = 2 : B \to C$
$n = 3 : C \to A$
$n = 4 : A \to B$
$n = 5 : B \to C$
$n = 6 : C \to A$
…

Période



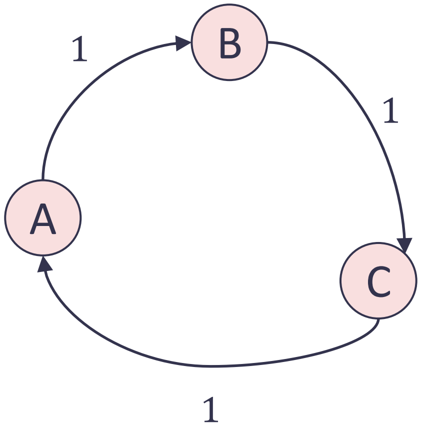
$$n = 1: A \to B$$
$$n = 2: B \to C$$
$$n = 3: C \to A$$
$$n = 4: A \to B$$
$$n = 5: B \to C$$
$$n = 6: C \to A$$
$$\dots$$

Période



$$n = 1: A \to B$$
$$n = 2: B \to C$$
$$n = 3: C \to A$$
$$n = 4: A \to B$$
$$n = 5: B \to C$$
$$n = 6: C \to A$$
$$\dots$$

Période



$n = 1\!: A \rightarrow B$

$n = 2\!: B \rightarrow C$

$n = 3\!: C \rightarrow A$

$n = 4\!: A \rightarrow B$

$n = 5\!: B \rightarrow C$

$n = 6\!: C \rightarrow A$

…

A est de la période 3

Période

La **période** d'un état i (*period*), notée $d(i)$, est un entier tel que :

$$d(i) = PGCD(\{n \in \mathbb{N} \,|G_{ii}^{n} > 0\})$$

Si :

- $d(i) > 1$, l'état i est appelé **périodique** (*periodic state*)
- $d(i) = 1$, l'état i est appelé **apériodique** (*aperiodic state*)

Les états d'une même classe ont la même période :

$$i \leftrightarrow j \Rightarrow d(i) = d(j)$$

On peut parler de la période d'une classe d'états. Si la période vaut 1, la classe est dite **apériodique**, sinon **périodique**.

Chaîne de Markov apériodique

Une chaîne de Markov est dite **apériodique** (*aperiodic*) si tous les états ont la période 1:

$$\forall i \in E, \qquad PGDC(\{n \in \mathbb{N} | G_{ii}^{n} > 0\}) = 1$$

Chaîne de Markov apériodique

Une chaîne de Markov est dite **apériodique** (*aperiodic*) si tous les états ont la période 1:

$$\forall i \in E, \qquad PGDC(\{n \in \mathbb{N} | G_{ii}^n > 0\}) = 1$$

1. S'il existe une auto-transition dans la chaîne ($G_{ii} > 0$), alors la chaîne de Markov est *apériodique*.
2. Supposons qu'il est possible d'aller de l'état i à l'état j en $l \in \mathbb{N}$ étapes, i.e. $G_{ij}^l > 0$. Supposons également qu'il existe $m \in \mathbb{N}$, $m \neq l$, $G_{ii}^m > 0$. Si $PGDC(l, m) = 1$, alors l'état i est *apériodique*.
3. La chaîne de Markov est *apériodique* si et seulement si $\exists n \in \mathbb{N}$, $n > 0$ tel que tous les élements de la matrice de transition G^n sont strictement positifs, i.e. :

$$\forall (i,j) \in E^2, \qquad G_{ij}^n > 0$$

Chaîne de Markov ergodique

Une chaîne de Markov est dite **ergodique** (*ergodic*) si elle est irréductible et apériodique.

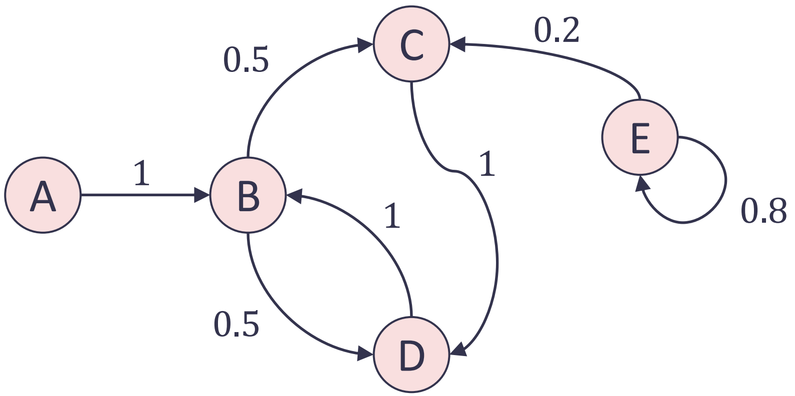
Définitions de base

Loi initiale

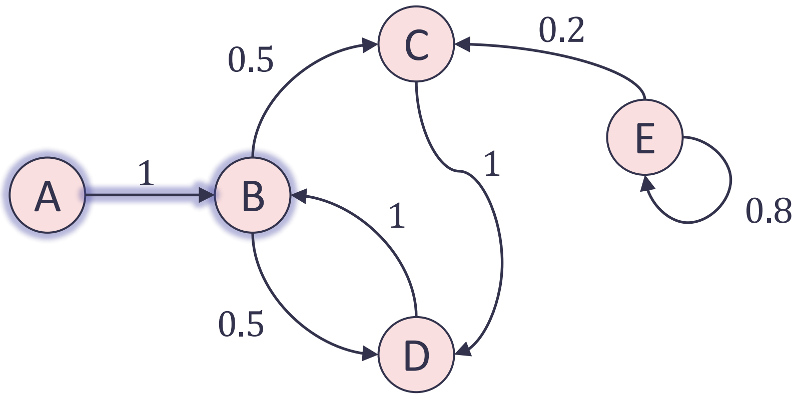
Classification des états

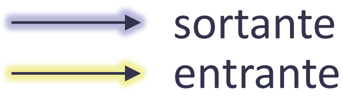
Probabilité stationnaire (invariante)

Probabilité stationnaire

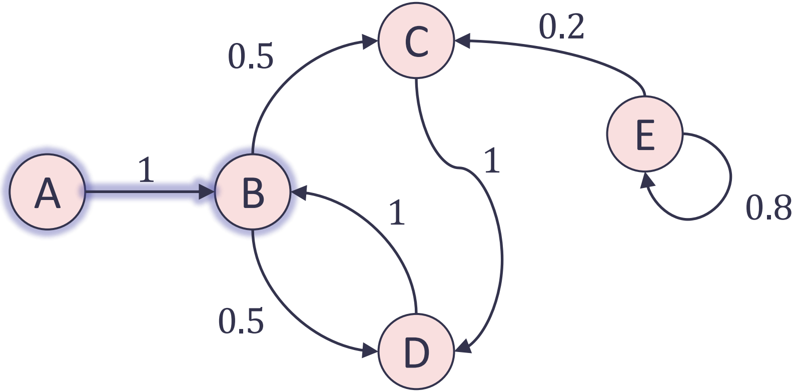


Probabilité stationnaire



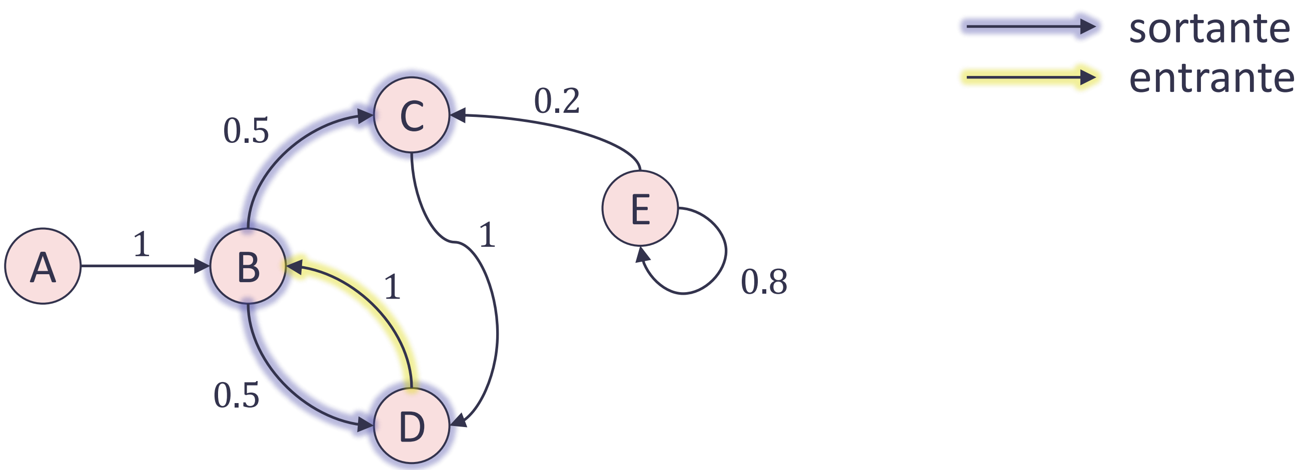


Probabilité stationnaire

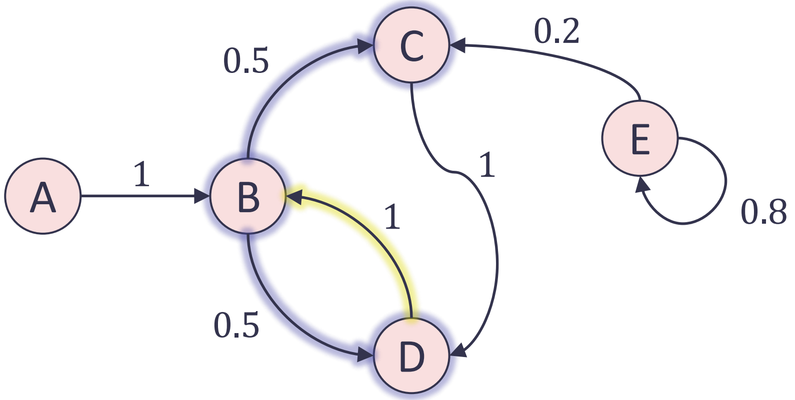


Une fois sorti de A, plus de possibilité d'y retourner (aucune flèche entre dans A)

Probabilité stationnaire

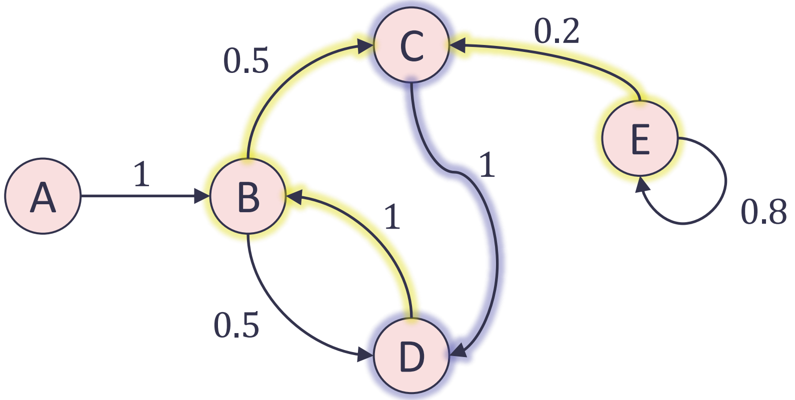


Probabilité stationnaire

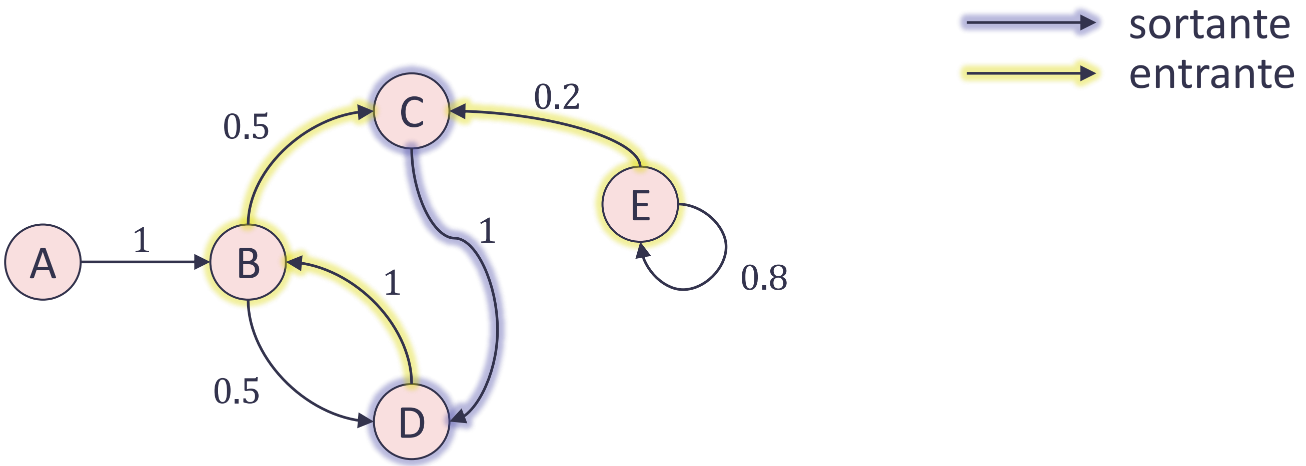


Possibilité de retourner dans B depuis D

Probabilité stationnaire

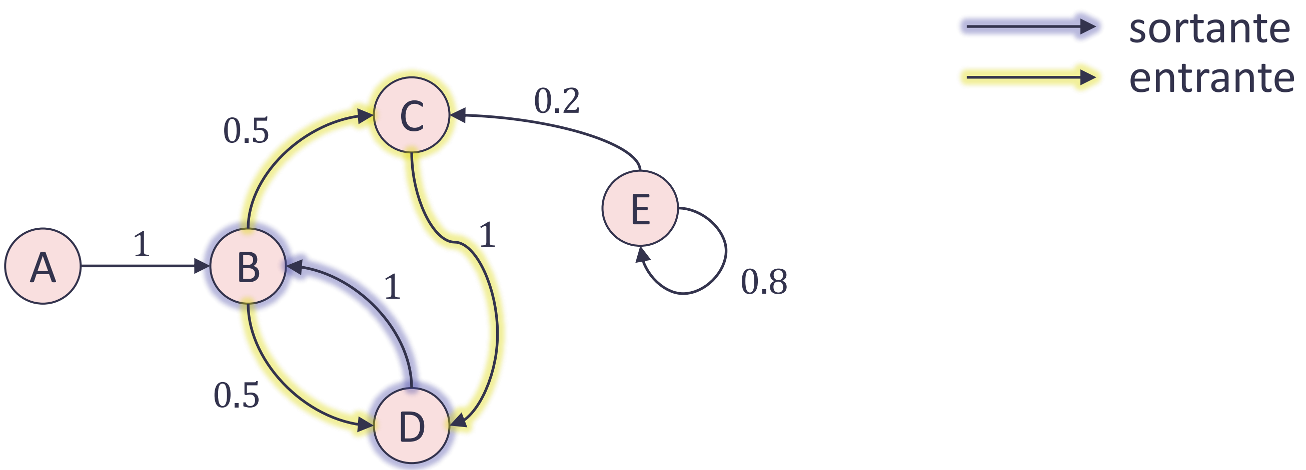


Probabilité stationnaire

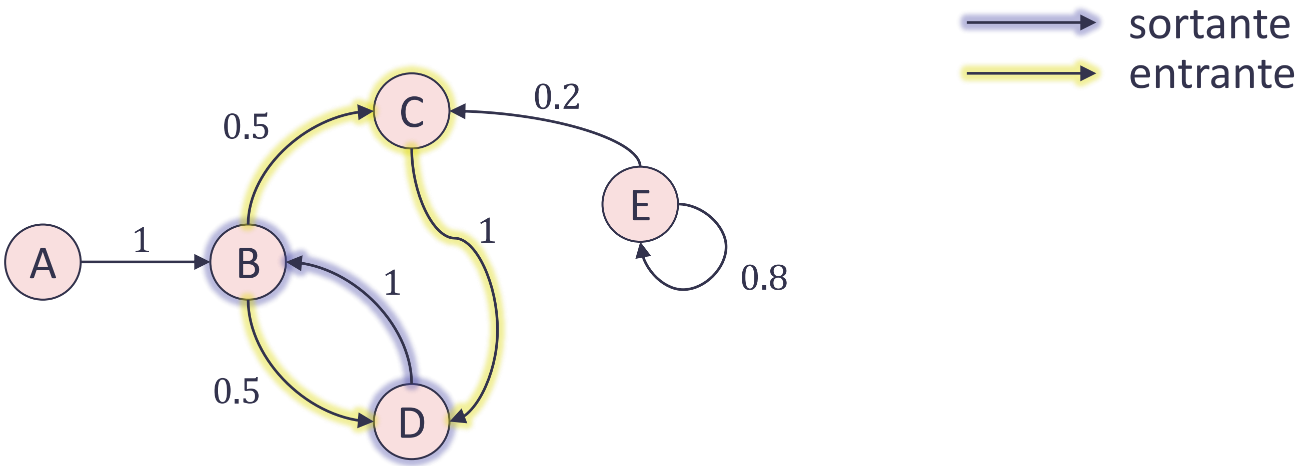


Possibilité de retourner dans C depuis D en passant par B ou depuis E

Probabilité stationnaire

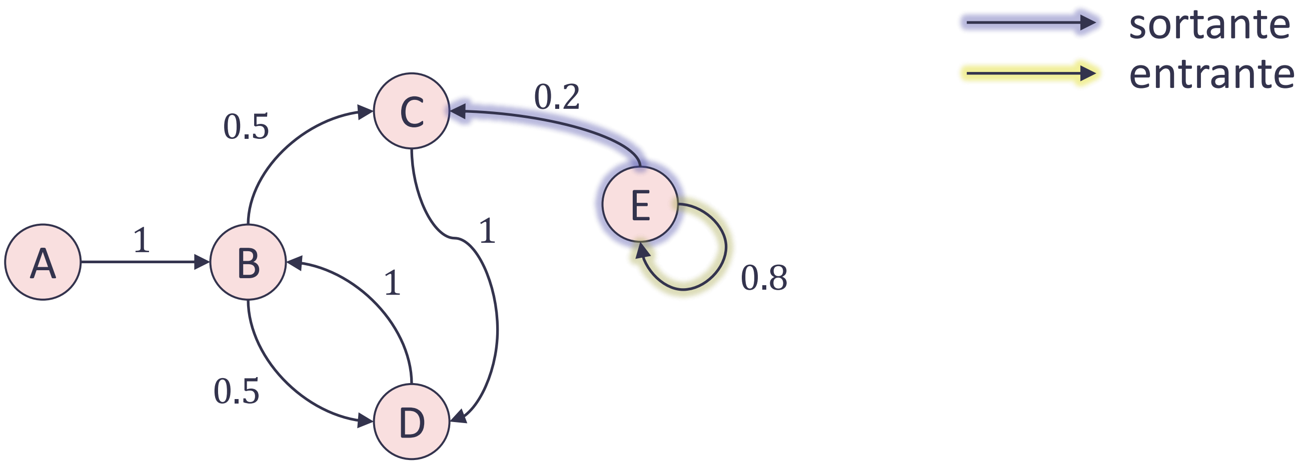


Probabilité stationnaire

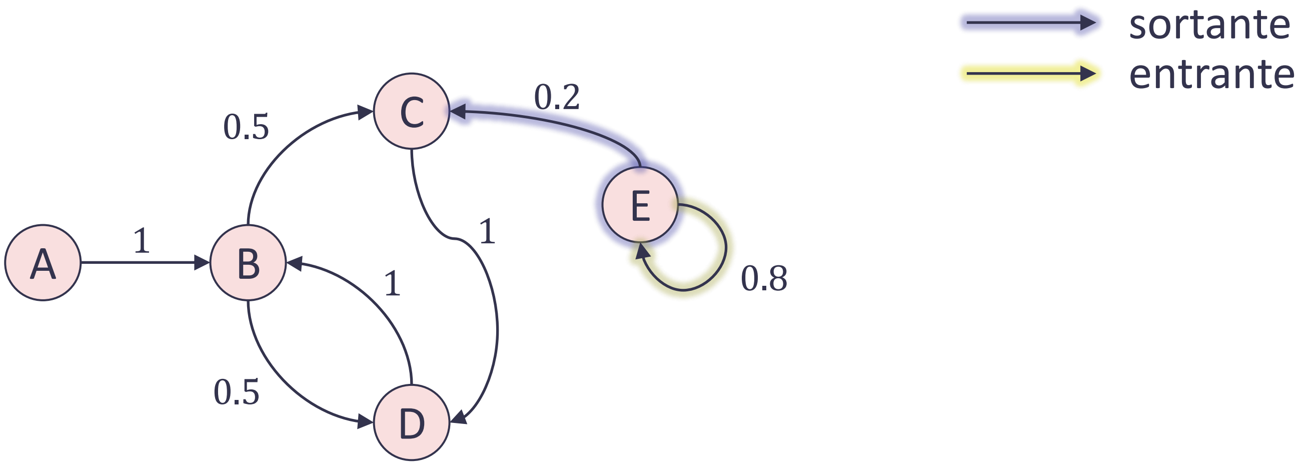


Possibilité de retourner dans D depuis B directement ou depuis C en passant par B

Probabilité stationnaire

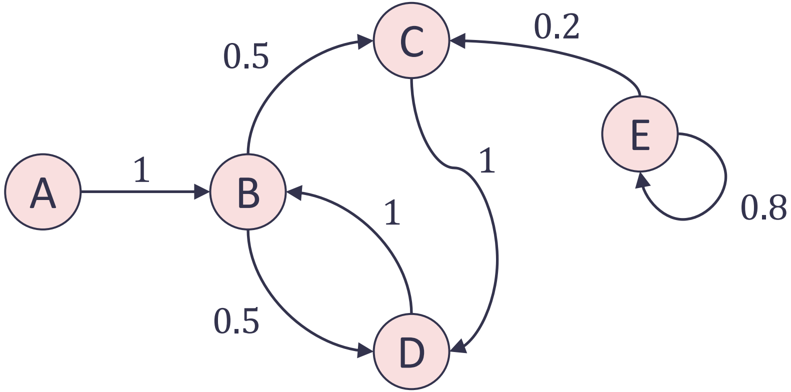


Probabilité stationnaire



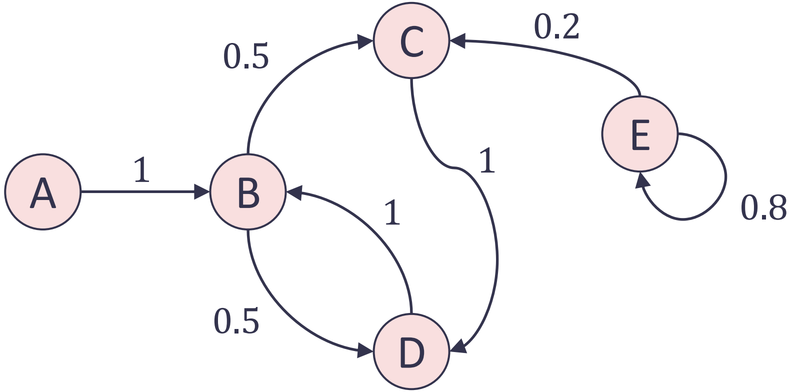
Chance de rester dans E est de 0.8.
Une fois sorti de E, il n'est plus possible d'y retourner

Probabilité stationnaire



$$\begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \\ D \\ E \end{array}
\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} A & B & C & D & E \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.2 & 0 & 0.8 \end{pmatrix} \end{array}$$

Probabilité stationnaire



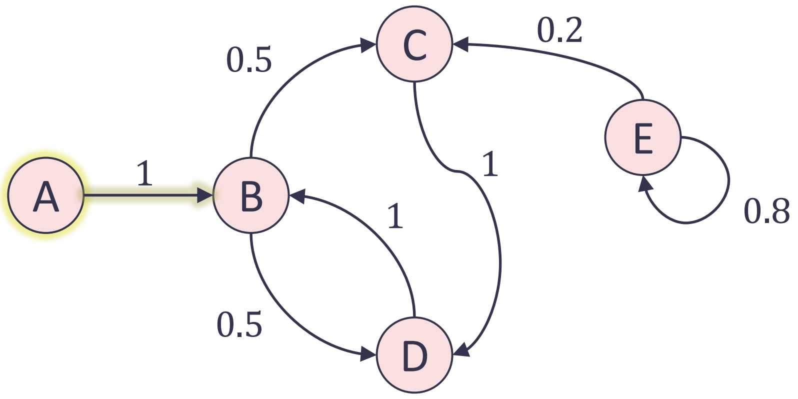
$$\begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \\ D \\ E \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} & \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D} & \boldsymbol{E} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.2 & 0 & 0.8 \end{pmatrix} \end{array}$$

Existe-il un vecteur ligne des probabilités initiales : $\pi = (\pi_A, \pi_B, \pi_C, \pi_D, \pi_E)$ telles que après une étape (transition) ces probabilités restent les mêmes :

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = i) = \mathbb{P}(X_n = i), \qquad \forall i \in \{A, B, C, D, E\}?$$

Comment à partir de la matrice de transition G prédire les probabilités que la chaîne de Markov sera dans ces états à l'étape suivante ?

Probabilité stationnaire

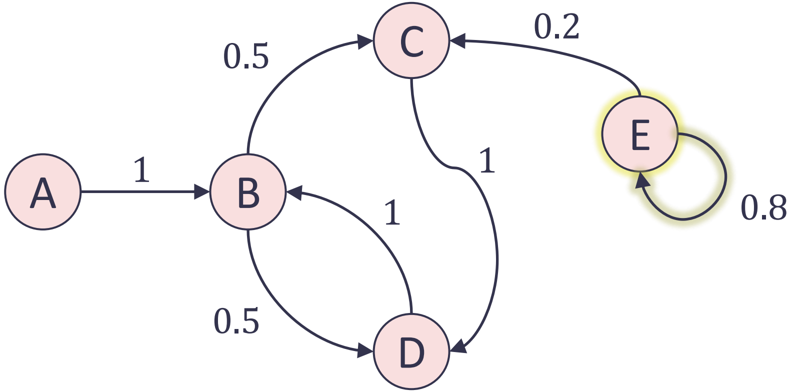


Comment est-ce qu'on peut arriver à A ?

Pas d'entrée à A. On est obligé de sortir de A (avec la probabilité de 1)

$$\pi_A^{(n+1)} = 0$$

Probabilité stationnaire

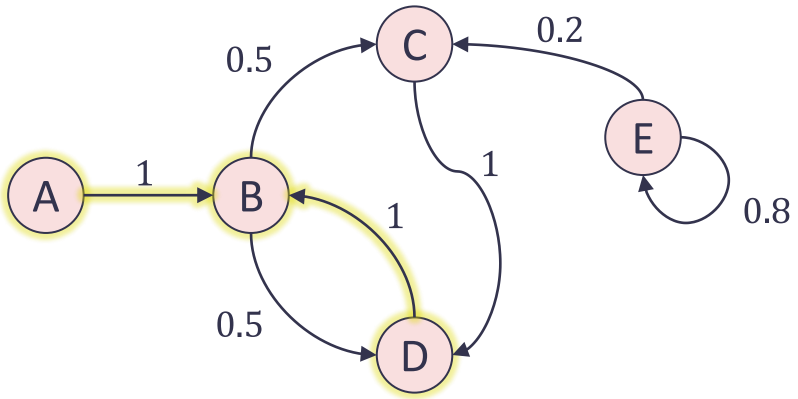


Comment est-ce qu'on peut arriver à E ?

La seul possibilité de se retrouver dans E à la prochaine étape est d'être dans E à l'étape actuelle

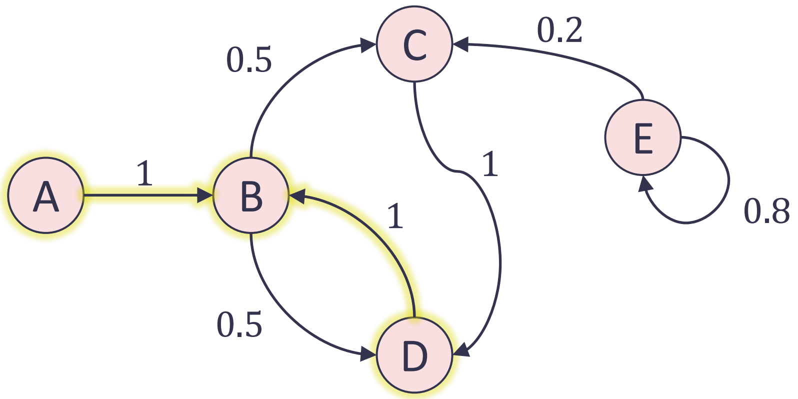
$$\pi_E^{(n)} \times 0.8 = \pi_E^{(n+1)}$$
$$\Rightarrow \pi_E = 0$$

Probabilité stationnaire



Comment est-ce qu'on peut arriver à B ?

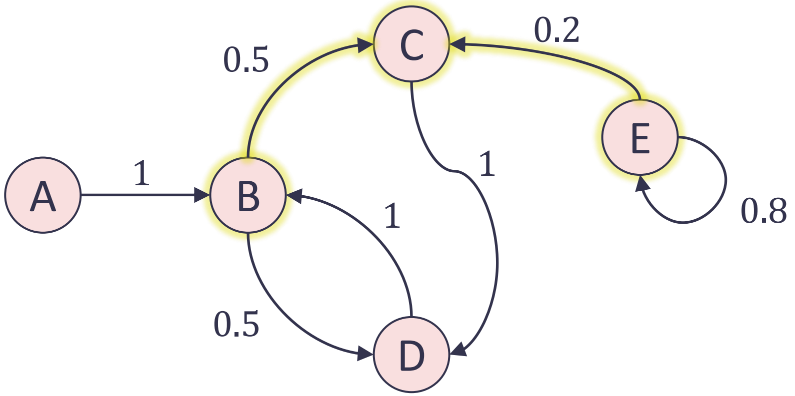
Probabilité stationnaire



Comment est-ce qu'on peut arriver à B ?

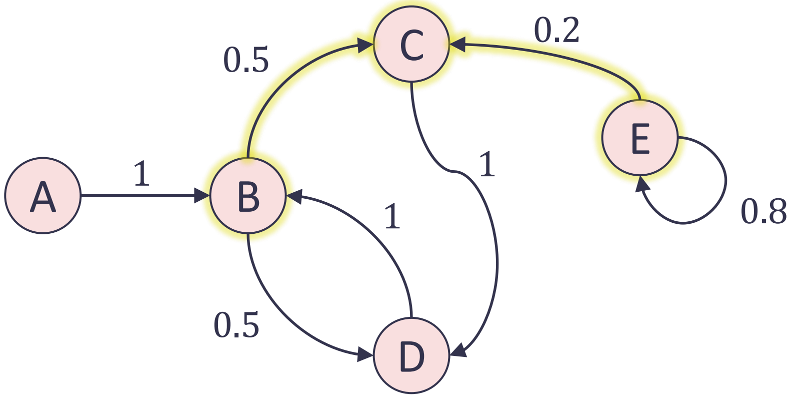
$$\pi_B = \pi_A \times 1 + \pi_D \times 1 = 0 \times 1 + \pi_D = \pi_D$$

Probabilité stationnaire



Comment est-ce qu'on peut arriver à C ?

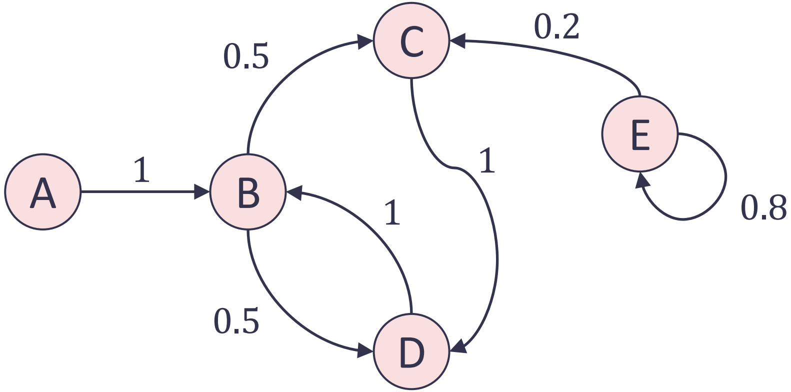
Probabilité stationnaire



Comment est-ce qu'on peut arriver à C ?

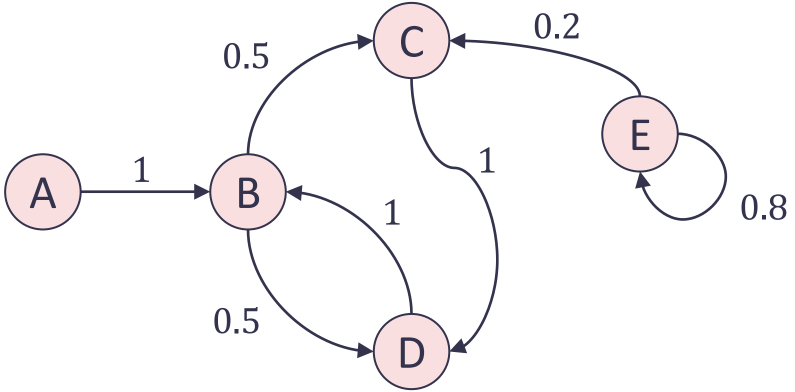
$$\pi_C = \pi_B \times 0.5 + \pi_E \times 0.2$$
$$= \pi_B \times 0.5 + 0 \times 0.2 = 0.5 \times \pi_B$$

Probabilité stationnaire



$$\begin{cases} \pi_A = 0 \\ \pi_B = \pi_D \\ \pi_C = \pi_B \times 0.5 \\ \pi_E = 0 \\ \pi_A + \pi_B + \pi_C + \pi_D + \pi_E = 1 \end{cases}$$

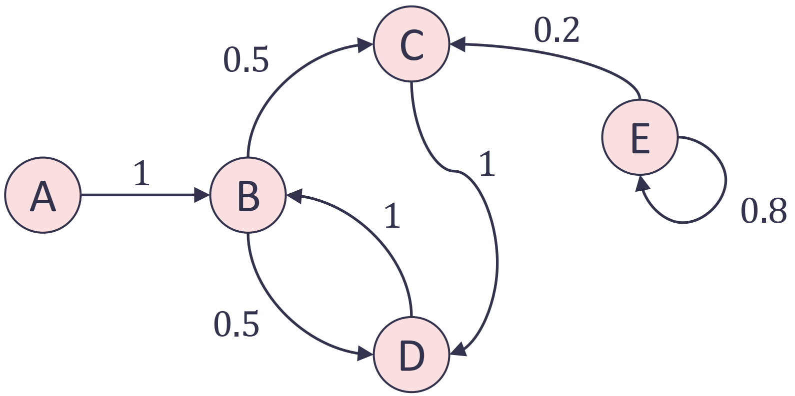
Probabilité stationnaire



$$\begin{cases} \pi_A = 0 \\ \pi_B = \pi_D \\ \pi_C = \pi_B \times 0.5 \\ \pi_E = 0 \\ \pi_A + \pi_B + \pi_C + \pi_D + \pi_E = 1 \end{cases}$$

$$\pi_A + \pi_B + \pi_C + \pi_D + \pi_E = 0 + \pi_B + 0.5\pi_B + \pi_B + 0 = 2.5\pi_B = 1$$

Probabilité stationnaire

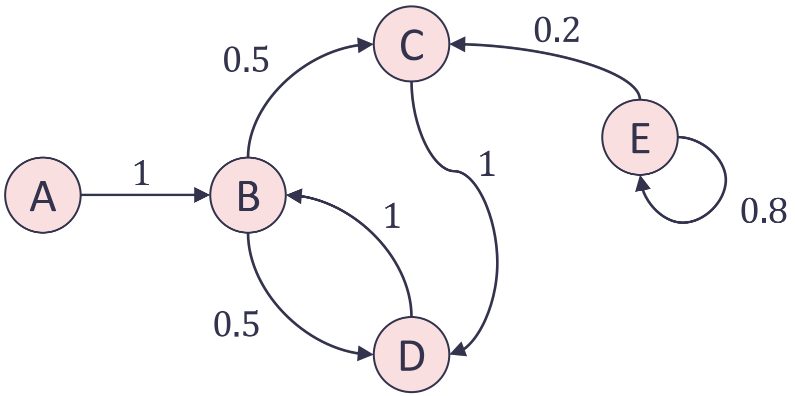


$$\begin{cases} \pi_A = 0 \\ \pi_B = \pi_D \\ \pi_C = \pi_B \times 0.5 \\ \pi_E = 0 \\ \pi_A + \pi_B + \pi_C + \pi_D + \pi_E = 1 \end{cases}$$

$$\pi_A + \pi_B + \pi_C + \pi_D + \pi_E = 0 + \pi_B + 0.5\pi_B + \pi_B + 0 = 2.5\pi_B = 1$$

$$\pi_B = \frac{1}{2.5} = \frac{2}{5} = 0.4$$

Probabilité stationnaire

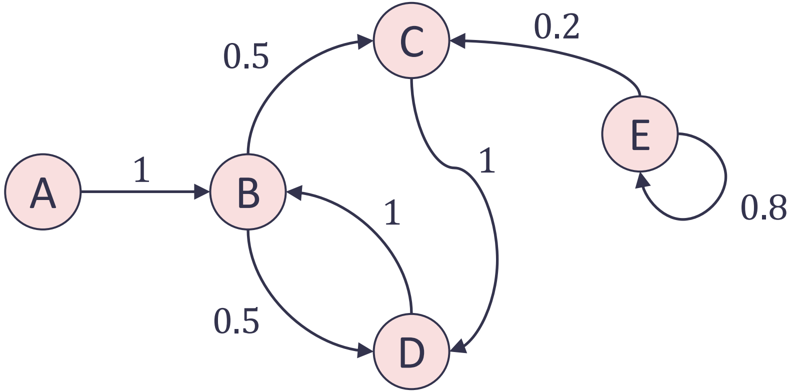


$$\begin{cases} \pi_A = 0 \\ \pi_B = \pi_D = \mathbf{0.4} \\ \pi_C = \pi_B \times 0.5 = \mathbf{0.2} \\ \pi_E = 0 \\ \pi_A + \pi_B + \pi_C + \pi_D + \pi_E = 1 \end{cases}$$

$$\pi_A + \pi_B + \pi_C + \pi_D + \pi_E = 0 + \pi_B + 0.5\pi_B + \pi_B + 0 = 2.5\pi_B = 1$$

$$\pi_B = \frac{1}{2.5} = \frac{2}{5} = 0.4$$

Probabilité stationnaire



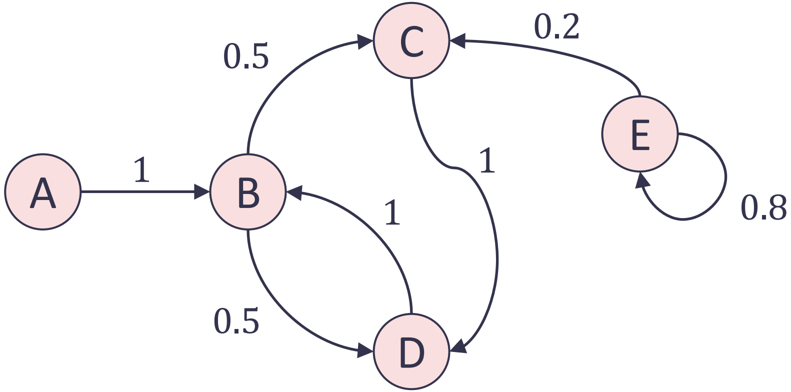
$$\boxed{\pi = (0 \quad 0.4 \quad 0.2 \quad 0.4 \quad 0\,)}$$

$$\begin{cases} \pi_A = 0 \\ \pi_B = \pi_D = \mathbf{0.4} \\ \pi_C = \pi_B \times 0.5 = \mathbf{0.2} \\ \pi_E = 0 \\ \pi_A + \pi_B + \pi_C + \pi_D + \pi_E = 1 \end{cases}$$

$$\pi_A + \pi_B + \pi_C + \pi_D + \pi_E = 0 + \pi_B + 0.5\pi_B + \pi_B + 0 = 2.5\pi_B = 1$$

$$\pi_B = \frac{1}{2.5} = \frac{2}{5} = 0.4$$

Probabilité stationnaire

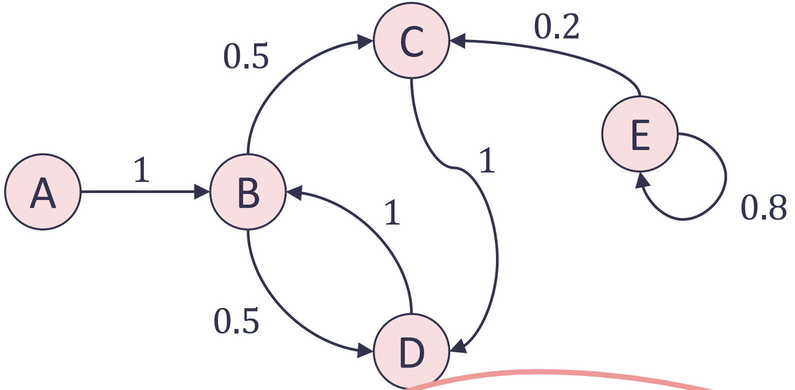


$$\boxed{\pi = \begin{pmatrix}0 & 0.4 & 0.2 & 0.4 & 0\end{pmatrix}}$$

Vérification :

$$\begin{pmatrix}0 & 0.4 & 0.2 & 0.4 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0.5 & 0.5 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0.2 & 0 & 0.8\end{pmatrix} \overset{?}{=} \begin{pmatrix}0 & 0.4 & 0.2 & 0.4 & 0\end{pmatrix}$$

Probabilité stationnaire

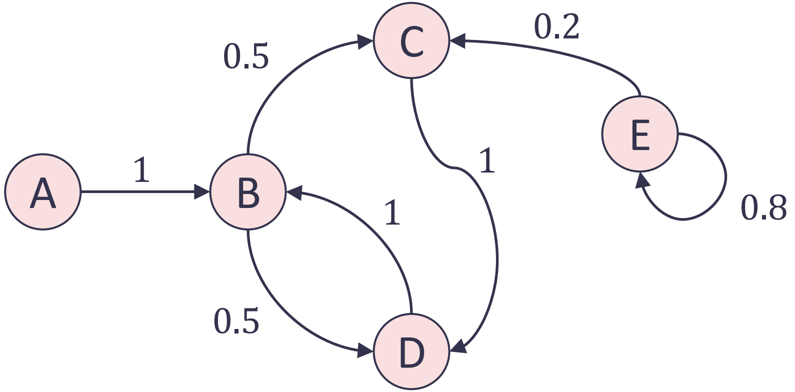


$$\boxed{\pi = \begin{pmatrix} 0 & 0.4 & 0.2 & 0.4 & 0 \end{pmatrix}}$$

Vérification :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0.4 & 0.2 & 0.4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.2 & 0 & 0.8 \end{pmatrix}$$

Probabilité stationnaire



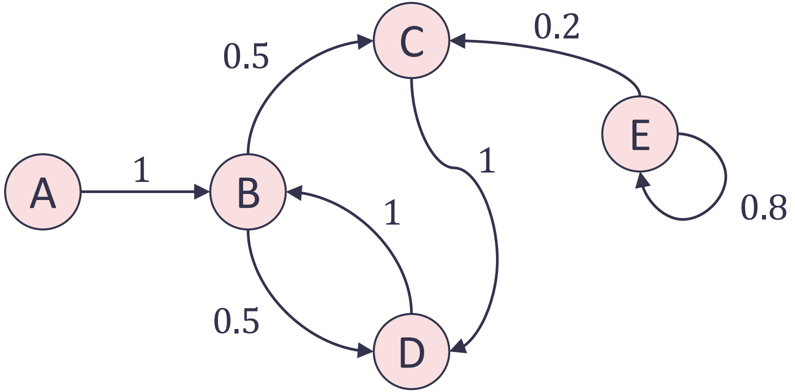
$$\boxed{\pi = (0 \quad 0.4 \quad 0.2 \quad 0.4 \quad 0)}$$

Vérification :

$$(0 \quad 0.4 \quad 0.2 \quad 0.4 \quad 0)\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.2 & 0 & 0.8 \end{pmatrix} =$$

$$= (0 \times 0 + 0.4 \times 0 + 0.2 \times 0 + 0.4 \times 0 + 0 \times 0 \quad ? \quad ? \quad ? \quad ?)$$

Probabilité stationnaire



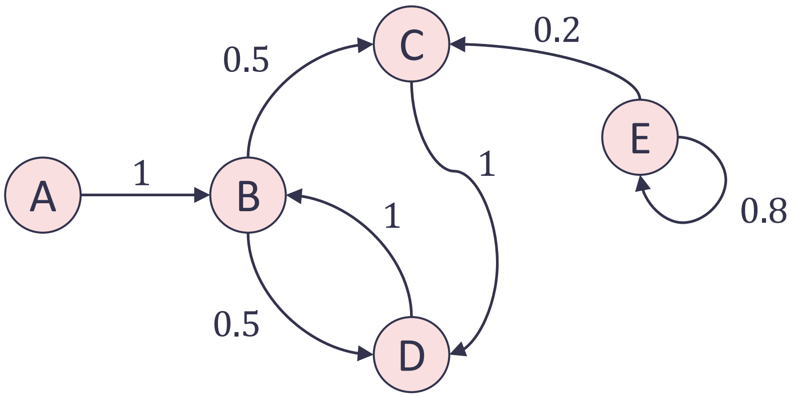
$$\pi = (0 \quad 0.4 \quad 0.2 \quad 0.4 \quad 0\,)$$

Vérification :

$$(0 \quad 0.4 \quad 0.2 \quad 0.4 \quad 0\,)\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.2 & 0 & 0.8 \end{pmatrix} =$$

$$= (0 \quad 0 \times 1 + 0.4 \times 0 + 0.2 \times 0 + 0.4 \times 1 + 0 \times 0 \quad ? \quad ? \quad ?\,)$$

Probabilité stationnaire



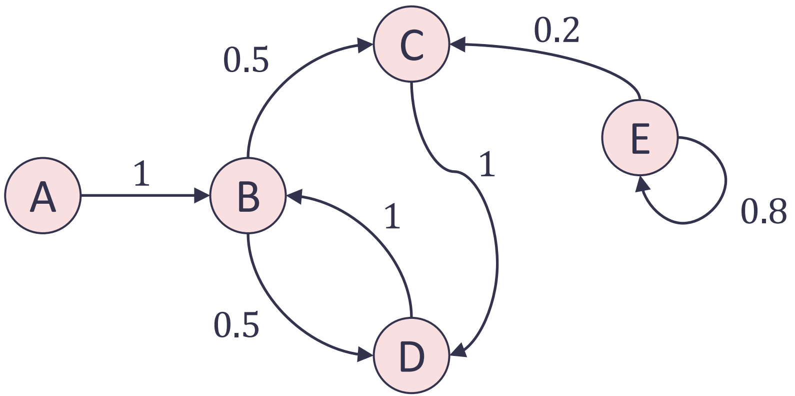
$$\boxed{\pi = (0 \quad 0.4 \quad 0.2 \quad 0.4 \quad 0\,)}$$

Vérification :

$$(0 \quad 0.4 \quad 0.2 \quad 0.4 \quad 0\,)\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.2 & 0 & 0.8 \end{pmatrix} =$$

$$= (0 \quad 0.4 \quad 0 \times 0 + 0.4 \times 0.5 + 0.2 \times 0 + 0.4 \times 0 + 0 \times 0 \quad ? \quad ?\,)$$

Probabilité stationnaire



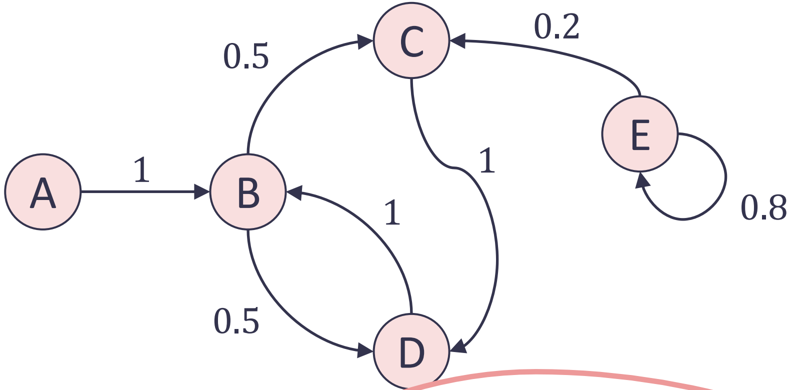
$$\boxed{\pi = (0 \quad 0.4 \quad 0.2 \quad 0.4 \quad 0\,)}$$

Vérification :

$$(0 \quad 0.4 \quad 0.2 \quad 0.4 \quad 0\,)\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.2 & 0 & 0.8 \end{pmatrix} =$$

$$= (0 \quad 0.4 \quad 0.2 \quad 0 \times 0 + 0.4 \times 0.5 + 0.2 \times 1 + 0.4 \times 0 + 0 \times 0 \quad ?\,)$$

Probabilité stationnaire



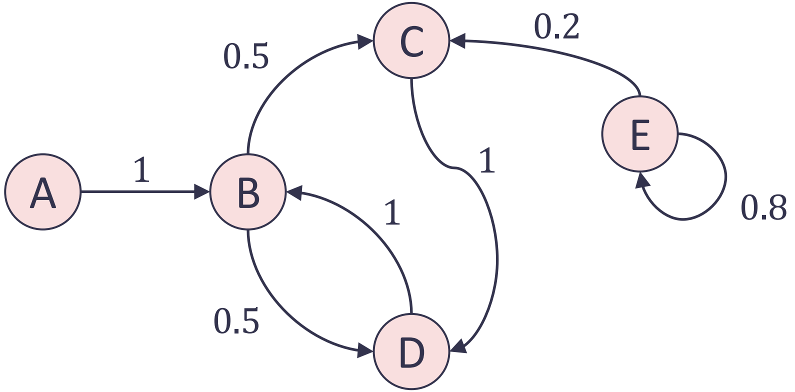
$$\pi = \begin{pmatrix} 0 & 0.4 & 0.2 & 0.4 & 0 \end{pmatrix}$$

Vérification :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0.4 & 0.2 & 0.4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.2 & 0 & 0.8 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0.4 & 0.2 & 0.4 & 0 \times 0 + 0.4 \times 0 + 0.2 \times 0 + 0.4 \times 0 + 0 \times 0.8 \end{pmatrix}$$

Probabilité stationnaire

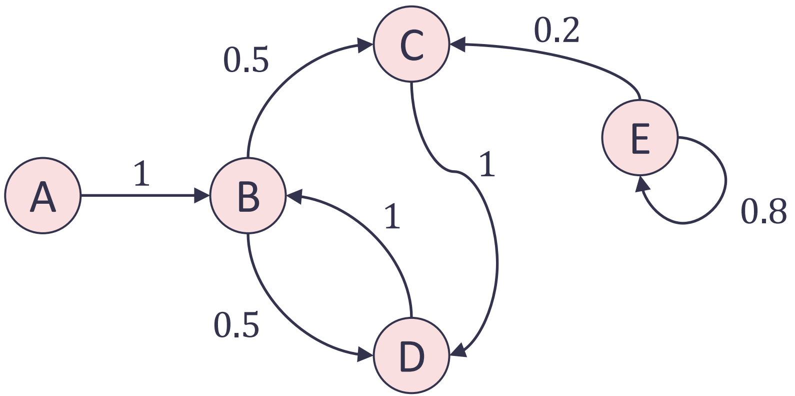


$$\pi = \begin{pmatrix} 0 & 0.4 & 0.2 & 0.4 & 0 \end{pmatrix}$$

Vérification :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0.4 & 0.2 & 0.4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.2 & 0 & 0.8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0.4 & 0.2 & 0.4 & 0 \end{pmatrix}$$

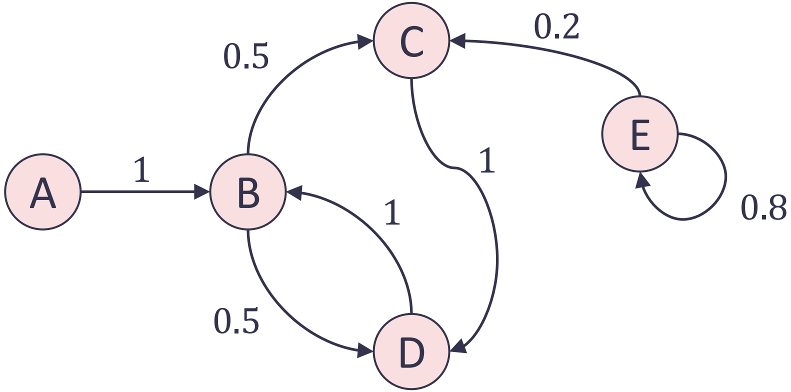
Probabilité stationnaire



Comment résoudre l'équation ?

$$\pi G = \pi$$

Probabilité stationnaire



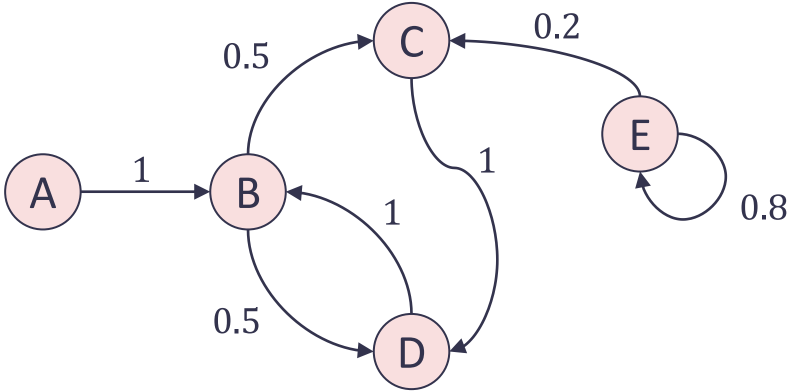
Comment résoudre l'équation ?

$$\pi G = \pi$$

Ressemble à la recherche de vecteurs propres pour $\lambda = 1$:

$$Ax = \lambda x$$

Probabilité stationnaire



Comment résoudre l'équation ?

$$\pi G = \pi$$

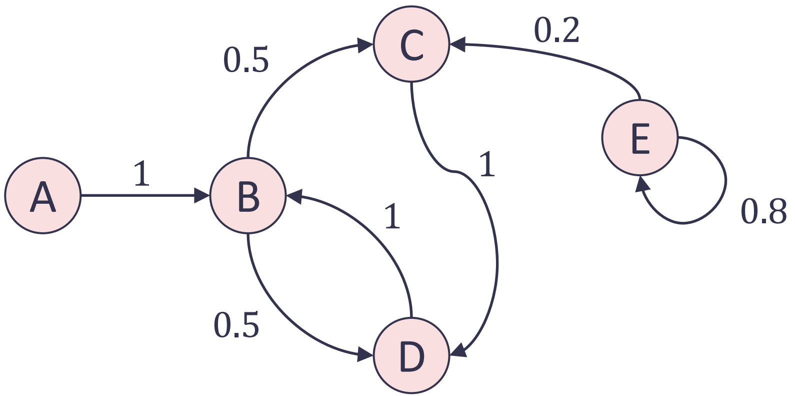
Ressemble à la recherche de vecteurs propres pour $\lambda = 1$:

$$Ax = \lambda x$$

Soit e vecteur propre gauche de $\lambda = 1$ (prendre G^T pour le trouver), alors :

$$\pi = \frac{e}{\sum_i e_i}$$

Probabilité stationnaire



Comment résoudre l'équation ?

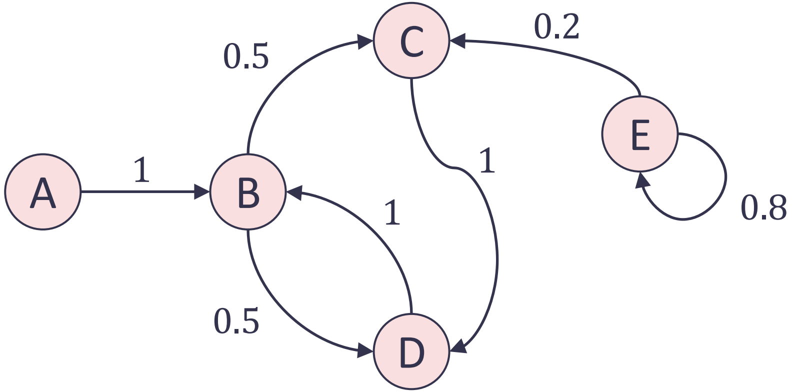
$$\pi G = \pi$$

Ressemble à la recherche de vecteurs propres pour $\lambda = 1$:

$$\pi(G - 1 \cdot I) = 0$$

$$G - I = \begin{pmatrix} 0-1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0-1 & 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0-1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0.2 & 0 & 0.8-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0.2 & 0 & -0.2 \end{pmatrix}$$

Probabilité stationnaire



Comment résoudre l'équation ?

$$\pi G = \pi$$

Ressemble à la recherche de vecteurs propres pour $\lambda = 1$:

$$\begin{pmatrix} \pi_A & \pi_B & \pi_C & \pi_D & \pi_E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0.2 & 0 & -0.2 \end{pmatrix} = 0$$

Probabilité stationnaire

$$
\begin{pmatrix} \pi_A & \pi_B & \pi_C & \pi_D & \pi_E \end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
-1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -1 & 0.5 & 0.5 & 0 \\
0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\
0 & 0 & 0.2 & 0 & -0.2
\end{pmatrix} = 0
$$

$$
\begin{cases}
\pi_A \times (-1) + \pi_B \times 0 + \pi_C \times 0 + \pi_D \times 0 + \pi_E \times 0 = 0 \\
\pi_A \times 1 + \pi_B \times (-1) + \pi_C \times 0 + \pi_D \times 1 + \pi_E \times 0 = 0 \\
\pi_A \times 0 + \pi_B \times 0.5 + \pi_C \times (-1) + \pi_D \times 0 + \pi_E \times 0.2 = 0 \\
\pi_A \times 0 + \pi_B \times 0.5 + \pi_C \times 1 + \pi_D \times (-1) + \pi_E \times 0 = 0 \\
\pi_A \times 0 + \pi_B \times 0 + \pi_C \times 0 + \pi_D \times 0 + \pi_E \times (-0.2) = 0 \\
\pi_A + \pi_B + \pi_C + \pi_D + \pi_E = 1
\end{cases}
$$

Probabilité stationnaire

$$\begin{pmatrix}\pi_A & \pi_B & \pi_C & \pi_D & \pi_E\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0.5 & 0.5 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0.2 & 0 & -0.2\end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{cases}\pi_A \times (-1) + \pi_B \times 0 + \pi_C \times 0 + \pi_D \times 0 + \pi_E \times 0 = 0\\ \pi_A \times 1 + \pi_B \times (-1) + \pi_C \times 0 + \pi_D \times 1 + \pi_E \times 0 = 0\\ \pi_A \times 0 + \pi_B \times 0.5 + \pi_C \times (-1) + \pi_D \times 0 + \pi_E \times 0.2 = 0\\ \pi_A \times 0 + \pi_B \times 0.5 + \pi_C \times 1 + \pi_D \times (-1) + \pi_E \times 0 = 0\\ \pi_A \times 0 + \pi_B \times 0 + \pi_C \times 0 + \pi_D \times 0 + \pi_E \times (-0.2) = 0\\ \pi_A + \pi_B + \pi_C + \pi_D + \pi_E = 1\end{cases}$$

$$\begin{cases}-\pi_A = 0\\ \pi_A - \pi_B + \pi_D = 0\\ \pi_B \times 0.5 - \pi_C + \pi_E \times 0.2 = 0\\ \pi_B \times 0.5 + \pi_C - \pi_D = 0\\ \pi_E \times (-0.2) = 0\\ \pi_A + \pi_B + \pi_C + \pi_D + \pi_E = 1\end{cases}$$

Probabilité stationnaire

$$\begin{cases} -\pi_A = 0 \\ \pi_A - \pi_B + \pi_D = 0 \\ \pi_B \times 0.5 - \pi_C + \pi_E \times 0.2 = 0 \\ \pi_B \times 0.5 + \pi_C - \pi_D = 0 \\ \pi_E \times (-0.2) = 0 \\ \pi_A + \pi_B + \pi_C + \pi_D + \pi_E = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \pi_A = 0 \\ 0 - \pi_B + \pi_D = 0 \\ \pi_B \times 0.5 - \pi_C + 0 \times 0.2 = 0 \\ \pi_B \times 0.5 + \pi_C - \pi_D = 0 \\ \pi_E = 0 \\ 0 + \pi_B + \pi_C + \pi_D + 0 = 1 \end{cases}$$

Probabilité stationnaire

$$\begin{cases} -\pi_A = 0 \\ \pi_A - \pi_B + \pi_D = 0 \\ \pi_B \times 0.5 - \pi_C + \pi_E \times 0.2 = 0 \\ \pi_B \times 0.5 + \pi_C - \pi_D = 0 \\ \pi_E \times (-0.2) = 0 \\ \pi_A + \pi_B + \pi_C + \pi_D + \pi_E = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \pi_A = 0 \\ 0 - \pi_B + \pi_D = 0 \\ \pi_B \times 0.5 - \pi_C + 0 \times 0.2 = 0 \\ \pi_B \times 0.5 + \pi_C - \pi_D = 0 \\ \pi_E = 0 \\ 0 + \pi_B + \pi_C + \pi_D + 0 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \pi_A = 0 \\ \pi_B = \pi_D \\ \pi_C = \pi_B \times 0.5 \\ \pi_B \times 0.5 + \pi_C - \pi_B = 0 \\ \pi_E = 0 \\ 0 + \pi_B + \pi_C + \pi_B + 0 = 1 \end{cases}$$

Probabilité stationnaire

$$\begin{cases} \pi_A = 0 \\ \pi_B = \pi_D \\ \pi_C = \pi_B \times 0.5 \\ \pi_B \times 0.5 + \pi_B \times 0.5 - \pi_B = 0 \\ \pi_E = 0 \\ 0 + \pi_B + \pi_B \times 0.5 + \pi_B + 0 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \pi_A = 0 \\ \pi_B = \pi_D \\ \pi_C = \pi_B \times 0.5 \\ \pi_E = 0 \\ 2.5\pi_B = 1 \end{cases}$$

Probabilité stationnaire

$$\begin{cases} \pi_A = 0 \\ \pi_B = \pi_D \\ \pi_C = \pi_B \times 0.5 \\ \pi_B \times 0.5 + \pi_B \times 0.5 - \pi_B = 0 \\ \pi_E = 0 \\ 0 + \pi_B + \pi_B \times 0.5 + \pi_B + 0 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \pi_A = 0 \\ \pi_B = \pi_D \\ \pi_C = \pi_B \times 0.5 \\ \pi_E = 0 \\ 2.5\pi_B = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \pi_A = 0 \\ \pi_B = \pi_D \\ \pi_C = \pi_B \times 0.5 \\ \pi_E = 0 \\ \pi_B = \dfrac{1}{2.5} = 0.4 \end{cases}$$

Probabilité stationnaire

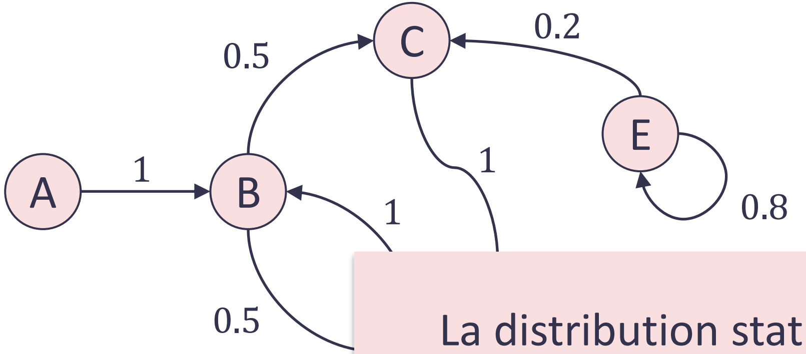
$$\begin{cases} \pi_A = 0 \\ \pi_B = \pi_D \\ \pi_C = \pi_B \times 0.5 \\ \pi_B \times 0.5 + \pi_B \times 0.5 - \pi_B = 0 \\ \pi_E = 0 \\ 0 + \pi_B + \pi_B \times 0.5 + \pi_B + 0 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \pi_A = 0 \\ \pi_B = \pi_D \\ \pi_C = \pi_B \times 0.5 \\ \pi_E = 0 \\ 2.5\pi_B = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \pi_A = 0 \\ \pi_B = \pi_D \\ \pi_C = \pi_B \times 0.5 \\ \pi_E = 0 \\ \pi_B = \dfrac{1}{2.5} = 0.4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \pi_A = 0 \\ \pi_B = \pi_D = 0.4 \\ \pi_C = \pi_B \times 0.5 = 0.2 \\ \pi_E = 0 \end{cases}$$

Probabilité stationnaire



$$\boxed{\pi = \begin{pmatrix} 0 & 0.4 & 0.2 & 0.4 & 0 \end{pmatrix}}$$

La distribution stationnaire ~ une fraction de temps passé en chaque état de cette chaîne de Markov, asymptotiquement

$$\begin{pmatrix} 0 & 0.4 & 0.2 & 0.4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.2 & 0 & 0.8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0.4 & 0.2 & 0.4 & 0 \end{pmatrix}$$

Probabilité stationnaire

Soit $X = (X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une chaîne de Markov homogène sur un espace d'états E, de matrice de transition G, et de condition initiale X_0 ayant pour fonction de masse Π. La loi de la v.a.r. discrète X_n s'obtient à partir du vecteur π et de matrice de transition G par la relation de récurrence.

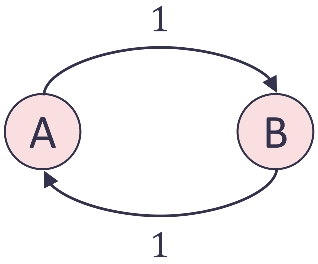
Loi de probabilité invariante (stationnaire) (*stationary distribution, steady state distribution, invariant distribution*) de $X = (X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une fonction de masse $\Xi : \ k \in E \to \xi_k \in [0,1]$ où le vecteur $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_N)$ est une solution du système linéaire :

$$\xi = \xi G$$

Probabilité stationnaire

Est-ce qu'il existe une seule distribution stationnaire ?

Probabilité stationnaire

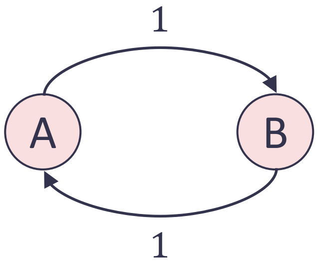


$$G = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

dépendance de l'état X_0 :

$$X_n = \begin{cases} X_0 \text{ si } n \text{ est pair} \\ X_1 \text{ si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

Probabilité stationnaire

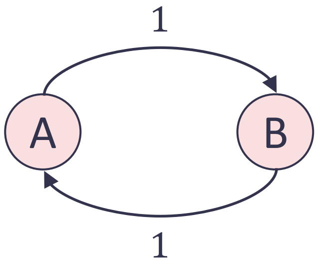


$$G = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

dépendance de l’état X_0 :

$$X_n = \begin{cases} X_0 \text{ si } n \text{ est pair} \\ X_1 \text{ si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

Probabilité stationnaire



$$G = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

dépendance de l'état X_0 :

$$X_n = \begin{cases} X_0 \text{ si } n \text{ est pair} \\ X_1 \text{ si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

Les probabilités stationnaires :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Distribution limite

On appelle **distribution limite** (*limiting distribution*) d'une chaîne de Markov $X = (X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur un espace d'états E, de matrice de transition G, une distribution donnée par un vecteur ligne $\pi = (\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_N)$ telle que :

$$\forall\, i, j \in E : \quad \pi_j = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n = j | X_0 = i) = \lim_{n\to\infty} G_{ij}^n$$

et :

$$\sum_{j\in E} \pi_j = 1$$

Distribution limite

Théorème :
Soit $X = (X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une chaîne de Markov homogène, ergodique (irréductible et àpériodique) sur un espace d'états E, de matrice de transition G.
Alors :
1. Il existe une distirbution stationnaire unique $\pi = (\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_N)$ qui est une solution de l'ensemble d'équations :

$$\begin{cases} \pi \, G = \pi \\ \displaystyle\sum_{j=1}^{N} \pi_j = 1 \end{cases}$$

2. Cette distribution stationnaire est une distribution limite de cette chaîne de Markov, i.e. $\forall (i,j) \in E$:

$$\pi_j = \lim_{n \to \infty} \mathbb{P}(X_n = j | X_0 = i) = \lim_{n \to \infty} G_{ij}^n$$