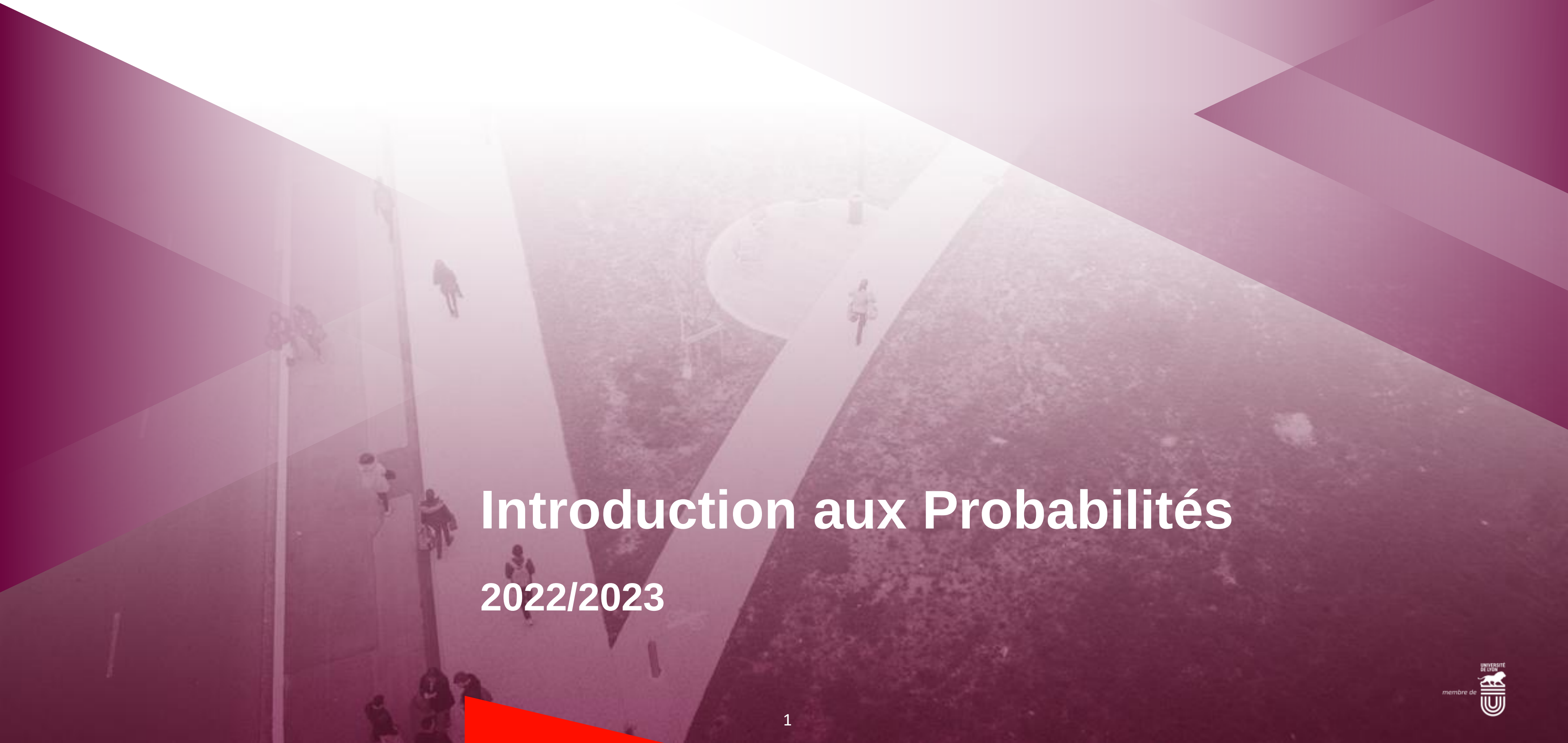
INSA
INSTITUT NATIONAL
DES SCIENCES
APPLIQUÉES
LYON



Introduction aux Probabilités

2022/2023

Plan

Couple de variables aléatoires

Cas discret

Cas continue

Moments

Fonction caractéristique et fonction génératrice

Couple de v.a. discrètes : exemple

600 personnes (clients d’un magasin des produits pour les animaux de compagnie) d’âge différent ont été interrogées sur leur préférence des chats ou des chiens :

	🐈	🐕	
<18 ans	80	125	
18-30 ans	110	90	
>30 ans	95	100	
			600

$$\left\{\begin{array}{l} 80+125+110 \\ +90+95+100 \\ =600 \end{array}\right.$$

Qu’est-ce qu’on peut dire sur la probabilité de préférer les chats et avoir un certain âge ?

Couple de v.a. discrètes : exemple

600 personnes (clients d’un magasin des produits pour les animaux de compagnie) d’âge différent ont été interrogées sur leur préférence des chats ou des chiens :

	🐈	🐕	
<18 ans	80	125	205
18-30 ans	110	90	200
>30 ans	95	100	195
	285	315	600

$$\left\{ 80 + 125 = 205 \right.$$

$$\overbrace{80 + 110 + 95 = 285}$$

Couple de v.a. discrètes : exemple

600 personnes (clients d'un magasin des produits pour les animaux de compagnie) d'âge différent ont été interrogées sur leur préférence des chats ou des chiens :

	🐈	🐕	
<18 ans	80	125	205
18-30 ans	110	90	200
>30 ans	95	100	195
	285	315	600

600

600

Couple de v.a. discrètes : exemple

600 personnes (clients d’un magasin des produits pour les animaux de compagnie) d’âge différent ont été interrogées sur leur préférence des chats ou des chiens :

	🐈	🐕	
<18 ans	80	125	205
18-30 ans	110	90	200
>30 ans	95	100	195
	285	315	600

600

600

Les valeurs du tableau ne sont pas des probabilités $0 \leq \mathbb{P} \leq 1$

Couple de v.a. discrètes : exemple

600 personnes (clients d'un magasin des produits pour les animaux de compagnie) d'âge différent ont été interrogées sur leur préférence des chats ou des chiens :

	🐈	🐕	
<18 ans	$\frac{80}{600} = 0.13$	$\frac{125}{600} = 0.21$	$\frac{205}{600} = 0.34$
18-30 ans	$\frac{110}{600} = 0.18$	$\frac{90}{600} = 0.15$	$\frac{200}{600} = 0.33$
>30 ans	$\frac{95}{600} = 0.16$	$\frac{100}{600} = 0.17$	$\frac{195}{600} = 0.33$
	$\frac{285}{600} = 0.47$	$\frac{315}{600} = 0.53$	$\frac{600}{600} = 1$

Couple de v.a. discrètes : exemple

600 personnes (clients d’un magasin des produits pour les animaux de compagnie) d’âge différent ont été interrogées sur leur préférence des chats ou des chiens :

	🐈	🐕	
<18 ans	0.13	0.21	0.34
18-30 ans	0.18	0.15	0.33
>30 ans	0.16	0.17	0.33
	0.47	0.53	1

Couple de v.a. discrètes : exemple

600 personnes (clients d’un magasin des produits pour les animaux de compagnie) d’âge différent ont été interrogées sur leur préférence des chats ou des chiens :

	🐈	🐕	
<18 ans	0.13	0.21	0.34
18-30 ans	0.18	0.15	0.33
>30 ans	0.16	0.17	0.33
	0.47	0.53	1

$$\left.\begin{matrix}0.34\\0.33\\0.33\end{matrix}\right\}1$$

$$\underbrace{0.47 \quad 0.53}_{1}$$

Loi de probabilité à 2 v.a.r.

600 personnes (clients d’un magasin des produits pour les animaux de compagnie) d’âge différent ont été interrogées sur leur préférence des chats ou des chiens :

	🐈	🐕	
<18 ans	0.13	0.21	0.34
18-30 ans	0.18	0.15	0.33
>30 ans	0.16	0.17	0.33
	0.47	0.53	1

$$\begin{cases} 0.13 \geq 0 \\ 0.21 \geq 0 \\ 0.18 \geq 0 \\ 0.15 \geq 0 \\ 0.16 \geq 0 \\ 0.17 \geq 0 \end{cases}$$

$$0.13 + 0.21 + 0.18 + 0.15 + 0.16 + 0.17 = \mathbf{1}$$

Loi de probabilité à 2 v.a.r.

Loi de probabilité à 2 v.a.r.
(*Joint probability distribution*)

	🐈	🐕	
<18 ans	0.13	0.21	0.34
18-30 ans	0.18	0.15	0.33
>30 ans	0.16	0.17	0.33
	0.47	0.53	1

$$\begin{cases} 0.13 \geq 0 \\ 0.21 \geq 0 \\ 0.18 \geq 0 \\ 0.15 \geq 0 \\ 0.16 \geq 0 \\ 0.17 \geq 0 \end{cases}$$

$$0.13 + 0.21 + 0.18 + 0.15 + 0.16 + 0.17 = \mathbf{1}$$

Fonction de masse du coupe de v.a.r.

La fonction de masse du couple de v.a.r. (X, Y) (*joint probability mass function*) est définie comme :

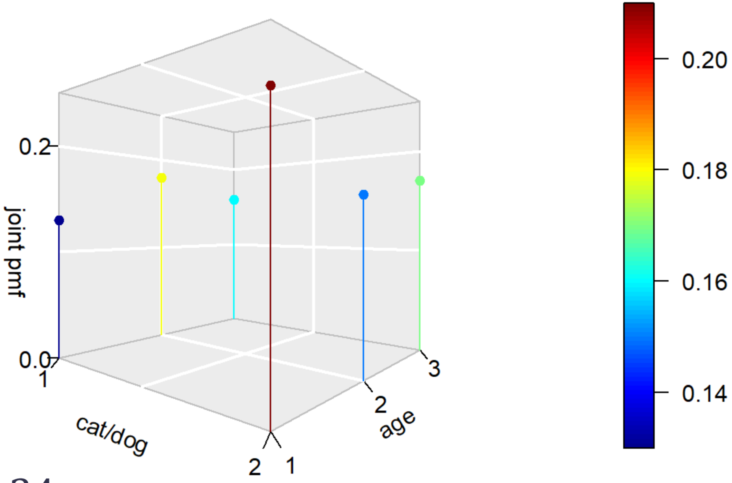
$$\mathbb{P}_{XY}(x, y) = \mathbb{P}(X = x, Y = y) = \mathbb{P}(X = x \text{ et } Y = y) = \mathbb{P}(X = x \ \cap \ Y = y)$$

où :

- $\sum_{(x_i, y_j)} \mathbb{P}_{XY}(x_i, y_j) = 1$
- $\forall (x_i, y_j) \colon \mathbb{P}_{XY}(x_i, y_j) \geq 0$

>30 ans	0.16	0.17	0.33
	0.47	0.53	1

Fonction de masse du coupe de v.a.r.



	🐈	🐕	
<18 ans	0.13	0.21	0.34
18-30 ans	0.18	0.15	0.33
>30 ans	0.16	0.17	0.33
	0.47	0.53	1

Fonction de répartition du couple de v.a.r.

La fonction de répartition (*joint cumulative distribution function*) du couple de v.a.r. (X, Y) est une application $F_{XY} \ : \ \mathbb{R}^2 \ \rightarrow \ \mathbb{R}$ telle que :

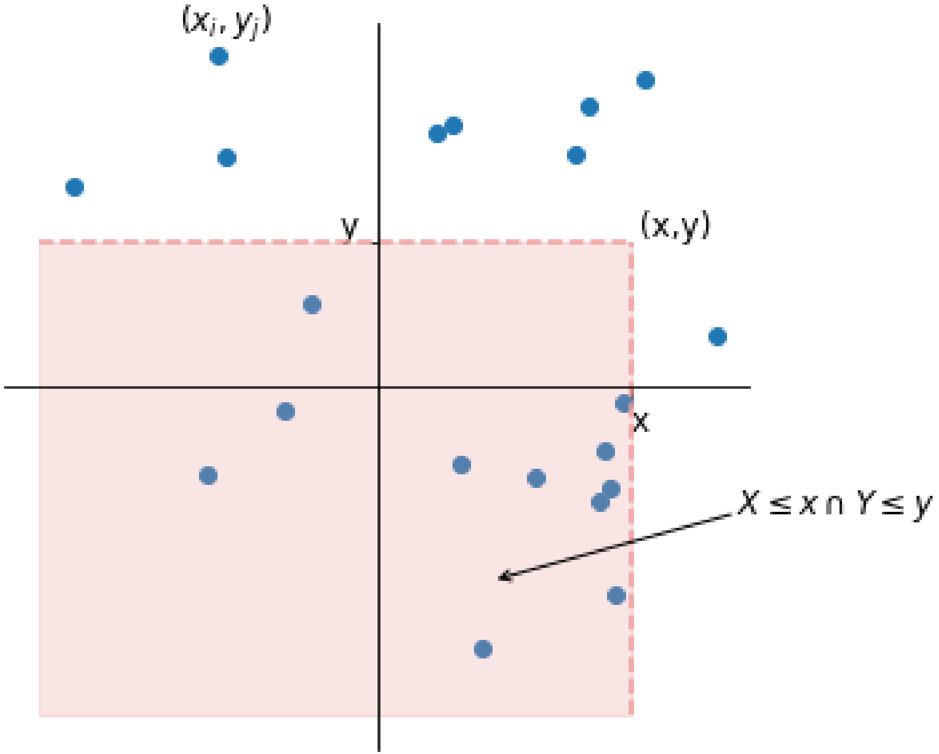
$$F_{XY}(x, y) \ = \ \mathbb{P}(X \leq \ x, Y \leq y), \forall \ (x_i, y_j) \ \in \mathbb{R}_{XY}$$

où $0 \leq F_{XY}(x, y) \leq 1$.

- $\lim\limits_{\substack{x \to -\infty \\ y \to -\infty}} F_{XY}(x, y) = 0$
- $\lim\limits_{\substack{x \to +\infty \\ y \to +\infty}} F_{XY}(x, y) = 1$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} F_{XY}(x, y) = \lim\limits_{y \to -\infty} F_{XY}(x, y) = 0$

Fonction de répartition du couple de v.a.r.

$F_{XY}(x, y)$ correspond à la probabilité que (X, Y) appartienne à la region bornée par x et y:



Loi marginale

Quelle est la probabilité qu'une personne appartienne à une tranche d’âge sans tenir compte de ses préférences de chats ou chiens ?

	🐈	🐕	
<18 ans	0.13	0.21	$0.13 + 0.21 = 0.34$
18-30 ans	0.18	0.15	$0.18 + 0.15 = 0.33$
>30 ans	0.16	0.17	$0.16 + 0.17 = 0.33$
	0.47	0.53	1

Loi marginale

Quelle est la probabilité qu'une personne appartienne à une tranche d'âge sans tenir compte de ses préférences de chats ou chiens ?

Loi marginale (*marginal probability distribution*)

	🐈	🐕	
<18 ans	0.13	0.21	0.34
18-30 ans	0.18	0.15	0.33
>30 ans	0.16	0.17	0.33
	0.47	0.53	1

Loi marginale

Quelle est la probabilité qu'une personne aiment des chats ou chiens sans tenir compte de son âge ?

	🐈	🐕	
<18 ans	0.13	0.21	0.34
18-30 ans	0.18	0.15	0.33
>30 ans	0.16	0.17	0.33
	0.47	0.53	1

Loi marginale (*marginal probability distribution*)

Loi marginale

On appelle **la loi marginale** (*margin probability* ou *simple probability*) du couple (X, Y) de v.a.r. discrètes :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}_X:\ \mathbb{P}_X(x) = \sum_{y_j \in \mathbb{R}_Y} \mathbb{P}_{XY}(x_i, y_j)$$

$$\forall\, y \in \mathbb{R}_Y:\ \mathbb{P}_Y(y) = \sum_{x_i \in \mathbb{R}_X} \mathbb{P}_{XY}(x_i, y_j)$$

Loi marginale

Soit (X, Y) un couple de v.a.r. de fonction de répartition $F_{XY}(x, y)$.

On appelle **fonctions de répartition marginales** (*marginal CDFs*) de X et Y les fonctions définis comme suit :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}_X\colon\ F_X(x) = F_{XY}(x, \infty) = \lim_{y \to \infty} F_{XY}(x, y)$$

$$\forall\, y \in \mathbb{R}_Y\colon\ F_Y(y) = F_{XY}(\infty, y) = \lim_{x \to \infty} F_{XY}(x, y)$$

Loi marginale

Soit (X, Y) un couple de v.a.r. Soit $x_1 \leq x_2, y_1 \leq y_2$, où $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{R}$.

Alors:

$$\mathbb{P}(x_1 < X \leq x_2, y_1 < Y \leq y_2)$$
$$= F_{XY}(x_2, y_2) - F_{XY}(x_1, y_2) - F_{XY}(x_2, y_1) + F_{XY}(x_1, y_1)$$

Couple de v.a.r. : quelques exemples

Quelle est la probabilité qu’une personne interrogée préfère les chiens ?

	🐈	🐕	
<18 ans	0.13	0.21	0.34
18-30 ans	0.18	0.15	0.33
>30 ans	0.16	0.17	0.33
	0.47	0.53	1

$$\mathbb{P}(\heartsuit chien) = 0.53$$

Couple de v.a.r. : quelques exemples

Quelle est la probabilité qu’une personne interrogée préfère les chats ET soit de la tranche d’âge 18-30 ?

	🐈	🐕	
<18 ans	0.13	0.21	0.34
18-30 ans	0.18	0.15	0.33
>30 ans	0.16	0.17	0.33
	0.47	0.53	1

$$\mathbb{P}(\heartsuit chat \cap 18\text{–}30\ ans) = 0.18$$

Couple de v.a.r. : quelques exemples

Quelle est la probabilité qu’une personne interrogée préfère les chats OU soit de la tranche d’âge 18-30 ?

	🐈	🐕	
<18 ans	0.13	0.21	0.34
18-30 ans	0.18	0.15	0.33
>30 ans	0.16	0.17	0.33
	0.47	0.53	1

$$\mathbb{P}(\text{♥}\,\mathit{chat} \cup 18{-}30\ \mathit{ans}) = 0.13 + 0.18 + 0.16 + 0.15 = 0.62$$

Couple de v.a.r. : quelques exemples

Quelle est la probabilité qu'une personne interrogée préfère les chats OU soit de la tranche d'âge 18-30 ?

$$\boxed{\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)}$$

	🐈	🐕	
<18 ans	0.13	0.21	0.34
18-30 ans	0.18	0.15	0.33
>30 ans	0.16	0.17	0.33
	0.47	0.53	1

$$\mathbb{P}(\heartsuit chat \cup 18\text{--}30\ ans) = \mathbb{P}(\heartsuit chat) + \mathbb{P}(18\text{--}30\ ans) - \mathbb{P}(\heartsuit chat \cap 18\text{--}30\ ans)$$

Couple de v.a.r. : quelques exemples

Quelle est la probabilité qu’une personne interrogée préfère les chats OU soit de la tranche d’âge 18-30 ?

$$\boxed{\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)}$$

	🐈	🐕	
<18 ans	0.13	0.21	0.34
18-30 ans	0.18	0.15	0.33
>30 ans	0.16	0.17	0.33
	0.47	0.53	1

$$\mathbb{P}(\heartsuit chat \cup 18{-}30\ ans) = \mathbb{P}(\heartsuit chat) + \mathbb{P}(18{-}30\ ans) - \mathbb{P}(\heartsuit chat \cap 18{-}30\ ans) =$$

$$= 0.47 + 0.33 - 0.18 = 0.8 - 0.18 = 0.62$$

Loi conditionnelle

Albert de 21 ans va adopter un animal de compagnie. Quelle est la probabilité qu’il préfère les chiens ?

	🐈	🐕	
<18 ans	0.13	0.21	0.34
18-30 ans	0.18	0.15	0.33
>30 ans	0.16	0.17	0.33
	0.47	0.53	1

$$\mathbb{P}(\heartsuit\, chien | 18{-}30\ ans) = ?$$

Loi conditionnelle

Albert de 21 ans va adopter un animal de compagnie. Quelle est la probabilité qu'il préfère les chiens ?

$$\boxed{\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}}$$

	🐈	🐕	
<18 ans	0.13	0.21	0.34
18-30 ans	0.18	0.15	0.33
>30 ans	0.16	0.17	0.33
	0.47	0.53	1

$$\mathbb{P}(\heartsuit chien|18\text{–}30\ ans) = ?$$

Loi conditionnelle

Albert de 21 ans va adopter un animal de compagnie. Quelle est la probabilité qu'il préfère les chiens ?

$$\boxed{\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}}$$

<18 ans	0.13	0.21	0.34
18-30 ans	0.18	0.15	0.33
>30 ans	0.16	0.17	0.33
	0.47	0.53	1

$$\mathbb{P}(\heartsuit chien|18\text{–}30\ ans) = \frac{0.15}{0.33} \approx 0.45$$

Loi conditionnelle

préférence des chats / chiens sachant la tranche d'âge :

	🐈	🐕	
<18 ans	0.13	0.21	0.34
18-30 ans	0.18	0.15	0.33
>30 ans	0.16	0.17	0.33
$\mathbb{P}(animal \mid 18\text{–}30\ ans)$	0.55	0.45	1
TOTAL :	0.47	0.53	1

Loi conditionnelle
(*conditional probability distribution*)

Loi conditionnelle

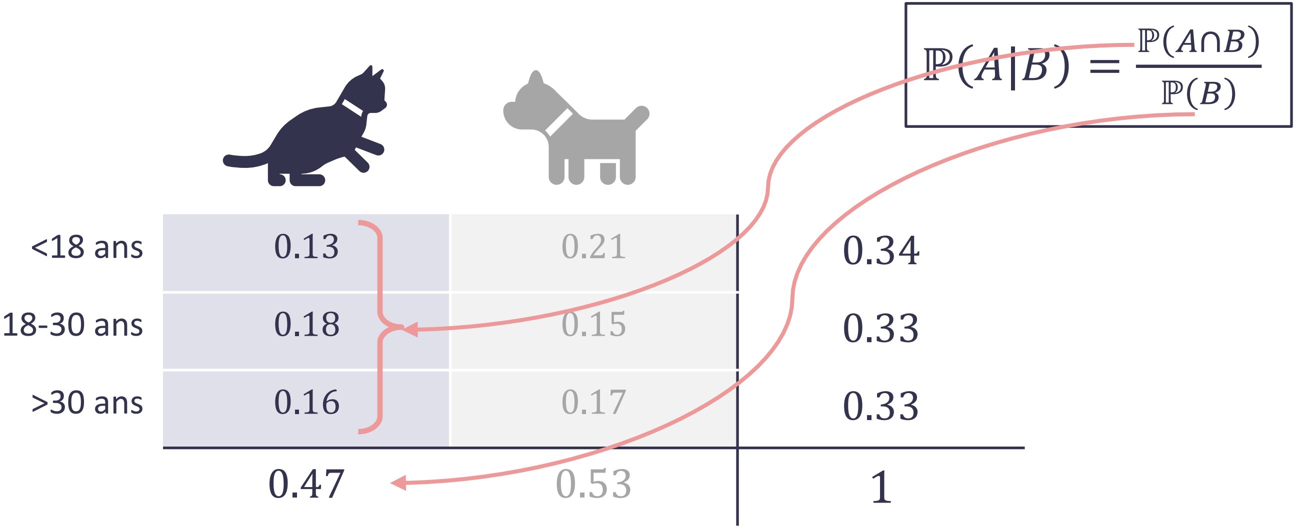
Quelle est la probabilité qu’une personne ait un certain âge sachant qu’elle préfère les chats ?

	🐈	🐕	
<18 ans	0.13	0.21	0.34
18-30 ans	0.18	0.15	0.33
>30 ans	0.16	0.17	0.33
	0.47	0.53	1

$$\mathbb{P}(age|\, chat) = ?$$

Loi conditionnelle

Quelle est la probabilité qu’une personne ait un certain âge sachant qu’elle préfère les chats ?



$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$$

	🐈	🐕	
<18 ans	0.13	0.21	0.34
18-30 ans	0.18	0.15	0.33
>30 ans	0.16	0.17	0.33
	0.47	0.53	1

$$\mathbb{P}(age|\, chat) = ?$$

Loi conditionnelle

Quelle est la probabilité qu'une personne ait un certain âge sa
chats ?

Loi conditionnelle
(*conditional probability distribution*)

	🐈	🐕	$\mathbb{P}(age \mid chat)$	
<18 ans	0.13	0.21	$\frac{0.13}{0.47} = 0.28$	0.34
18-30 ans	0.18	0.15	$\frac{0.18}{0.47} = 0.38$	0.33
>30 ans	0.16	0.17	$\frac{0.16}{0.47} = 0.34$	0.33
	0.47	0.53	1	1

$$\mathbb{P}(age \mid chat) = ?$$

Loi conditionnelle

Soit (X, Y) un couple de v.a.r. discrètes.

On appelle **fonction de masse conditionnelle** (*conditional PMF of* X *given* $Y = y_j$) de X sachant $Y = y_j$, l'application p telle que :

$$\forall\, x_i \in \mathbb{R}_X, \qquad p\colon\, x_i \to \mathbb{P}_{X|Y}(x_i, y_j) = \mathbb{P}(X = x_i \mid Y = y_j)$$

$$= \frac{\mathbb{P}\left(X = x_i, Y = y_j\right)}{\mathbb{P}\left(Y = y_j\right)} = \frac{\mathbb{P}_{XY}(x_i, y_j)}{\mathbb{P}_Y\left(y_j\right)}$$

La loi conditionnelle de X sachant $Y = A$ est donc la loi définie par cette fonction de masse.

Loi conditionnelle

Soit (X, Y) un couple de v.a.r. discrètes.

On appelle **fonction de répartition conditionnelle** (*conditional CDF* of X given $Y = y_j$) de X sachant $Y = y_j$ l'application $F_X^{[Y=y_j]}$ de $\mathbb{R}$ dans $[0,1]$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par :

$$F_X^{[Y=y_j]}(x) = F_{X|Y=y_j}(x) = \mathbb{P}(X \leq x|Y = y_j) = \frac{\mathbb{P}(X \leq x, Y = y_j)}{\mathbb{P}(Y = y_j)}$$

Remarque : il est possible de définir d'une manière plus générale la loi conditionnelle de X sachant n'importe quel évènement A :

$$\forall\, x_i \in \mathbb{R}_X, \qquad \mathbb{P}_{X|A}(x_i) = \mathbb{P}(X = x_i|A) = \frac{\mathbb{P}(X = x_i\ ET\ A)}{\mathbb{P}(A)}$$

La fonction de répartition de X sachant A est donc donnée par :

$$F_{X|A}(x) = \mathbb{P}(X \leq x|A)$$

Indépendence

Est-ce que la préférence des chats ou des chiens et l’âge d’une personne sont indépendants ?

	🐈	🐕	$\mathbb{P}(age\vert\ chat)$	
<18 ans	0.13	0.21	0.28	0.34
18-30 ans	0.18	0.15	0.38	0.33
>30 ans	0.16	0.17	0.34	0.33
	0.47	0.53	1	1

Indépendance

Est-ce que la préférence des chats ou des chiens et l’âge d’une personne sont indépendants ?

$$\boxed{\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A) \ \Leftarrow A \text{ et } B \ ind\acute{e}pendants}$$

	🐈	🐕	$\mathbb{P}(age\vert\ chat)$	
<18 ans	0.13	0.21	0.28	0.34
18-30 ans	0.18	0.15	0.38	0.33
>30 ans	0.16	0.17	0.34	0.33
	0.47	0.53	1	1

OPTION 1

Indépendence

Est-ce que la préférence des chats ou des chiens et l'âge d'une personne sont indépendants ?

$$\boxed{\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A) \ \Leftarrow A \text{ et } B \ ind\acute{e}pendants}$$

	🐈	🐕	$\mathbb{P}(age\|\ chat)$	
<18 ans	0.13	0.21	0.28	0.34
18-30 ans	0.18	0.15	0.38	0.33
>30 ans	0.16	0.17	0.34	0.33
	0.47	0.53	1	1

$$\mathbb{P}(18\text{–}30\ ans \mid chat) = 0.38$$
$$\mathbb{P}(18\text{–}30\ ans) = 0.33$$
$$0.38 \neq 0.33$$

OPTION 1

Indépendence

Est-ce que la préférence des chats ou des chiens et l'âge d'une personne sont indépendants ?

$$\boxed{\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A) \;\Leftarrow A \text{ et } B \; \textit{indépendants}}$$

	🐈	🐕	$\mathbb{P}(age \mid chat)$	
<18 ans	0.13	0.21	0.28	0.34
18-30 ans	0.18	0.15	0.38	0.33
>30 ans	0.16	0.17	0.34	0.33
	0.47	0.53	1	1

$$\mathbb{P}(18\text{–}30 \; ans \mid chat) = 0.38$$
$$\mathbb{P}(18\text{–}30 \; ans) = 0.33$$
$$0.38 \neq 0.33$$

➡ PAS indépendants

OPTION 1

Indépendence

Est-ce que la préférence des chats ou des chiens et l'âge d'une personne sont indépendants ?

$$\boxed{\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A) \ \Leftarrow A \text{ et } B \textit{ indépendants}}$$

	🐈	🐕	$\mathbb{P}(age\|\ chat)$	$\mathbb{P}(age\|\ chien)$	
<18 ans	0.13	0.21	0.28	0.4	0.34
18-30 ans	0.18	0.15	0.38	0.28	0.33
>30 ans	0.16	0.17	0.34	0.32	0.33
	0.47	0.53	1	1	1

OPTION 1

Indépendance

Est-ce que la préférence des chats ou des chiens et l'âge d'une personne sont indépendants ?

$$\boxed{\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A) \; \Leftarrow A \text{ et } B \; \textit{indépendants}}$$

	🐱	🐶	$\mathbb{P}(age\|\ chat)$	$\mathbb{P}(age\|\ chien)$	
<18 ans	0.13	0.21	0.28	0.4	0.34
18-30 ans	0.18	0.15	0.38	0.28	0.33
>30 ans	0.16	0.17	0.34	0.32	0.33
	0.47	0.53	1	1	1

Les valeurs des probabilités conditionnelles et les probabilités marginales ne sont pas les mêmes ➡ PAS indépendants

OPTION 1

Indépendence

Est-ce que la préférence des chats ou des chiens et l’âge d’une personne sont indépendants ?

$$\boxed{\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B) \Leftrightarrow A \text{ et } B \ indépendants}$$

	🐈	🐕	$\mathbb{P}(age \vert\ chat)$	$\mathbb{P}(age \vert\ chien)$	
<18 ans	0.13	0.21	0.28	0.4	0.34
18-30 ans	0.18	0.15	0.38	0.28	0.33
>30 ans	0.16	0.17	0.34	0.32	0.33
	0.47	0.53	1	1	1

OPTION 2

Indépendence

Est-ce que la préférence des chats ou des chiens et l'âge d'une personne sont indépendants ?

$$\boxed{\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B) \Leftrightarrow A \text{ et } B \; indépendants}$$

	🐈	🐕	$\mathbb{P}(age\vert\, chat)$	$\mathbb{P}(age\vert\, chien)$	
<18 ans	0.13	0.21	0.28	0.4	0.34
18-30 ans	0.18	0.15	0.38	0.28	0.33
>30 ans	0.16	0.17	0.34	0.32	0.33
	0.47	0.53	1	1	1

$$\mathbb{P}(18{-}30\ ans \cap chat) = 0.18$$
$$\mathbb{P}(18{-}30\ ans) \times \mathbb{P}(chat) = 0.33 \times 0.47 = 0.16$$
$$0.18 \neq 0.16$$

➡ PAS indépendants

OPTION 2

Indépendence

X et Y sont **indépendantes** (*independent*) si :

$$\forall\, x \in\ \mathbb{R}_X, \forall\, y \in\ \mathbb{R}_Y, \mathbb{P}(X \leq x, Y \leq y)\ = \mathbb{P}(X \leq x) \times \mathbb{P}(Y \leq y)$$

Ce qui est équivalent à :

$$\forall\, x \in\ \mathbb{R}_X, \forall\, y \in\ \mathbb{R}_Y, F_{XY}(x, y)\ = F_X(x) \times F_Y(y)$$

Indépendence

Doit X et Y deux v.a.r. discrètes. X et Y sont **indépendantes** ssi :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}_X, \forall\, y \in \mathbb{R}_Y, \mathbb{P}_{XY}(x, y) = \mathbb{P}(X = x, Y = y) = \mathbb{P}(X = x) \times \mathbb{P}(Y = y)$$

Si X et Y sont indépendantes, alors :

$$\mathbb{P}_{X|Y}\left(x_i, y_j\right) = \mathbb{P}(X = x_i \mid Y = y_j) = \frac{\mathbb{P}_{XY}\left(x_i, y_j\right)}{\mathbb{P}_Y\left(y_j\right)} = \frac{\mathbb{P}_X(x_i) \times \mathbb{P}_Y\left(y_j\right)}{\mathbb{P}_Y\left(y_j\right)} = \mathbb{P}_X(x_i)$$

Cas discret

Cas continue

Moments

Fonction caractéristique et fonction génératrice

Fonction de densité de probabilité jointe

Soit X et Y deux v.a.r. continues. Les variables aléatoires X et Y sont appelées **absolument continues** (*jointly continuous r.v.*) s'il existe une fonction $f_{XY} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ non-négative telle que pour tout ensemble $A \in \mathbb{R}^2$ on a :

$$\forall A \in \mathbb{R}^2, \mathbb{P}\big((X,Y) \in A\big) = \iint_{(x,y) \in A} f_{XY}(x,y)dxdy$$

La fonction $f_{XY}(x,y)$ est appelée **la fonction de densité de probabilité jointe** ou **loi jointe** (*joint probability density function* ou *joint PDF*) de v.a.r. X et Y.

Les propriétés de $f_{XY}(x,y)$:

1. $f_{XY}(x,y) \geq 0$ (*non-négativité*)
2. $\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x,y)dxdy = 1$

Fonction de densité de probabilité jointe

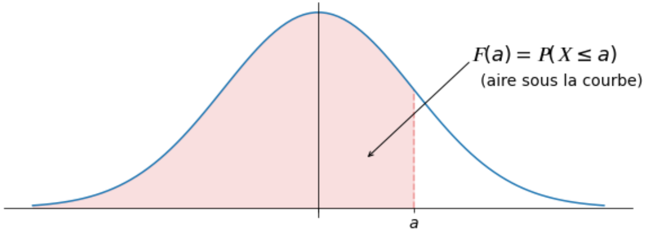
Lien entre la fonction de densité et la fonction de répartition du couple de v.a.r. absolument continues X et Y :

$$f_{XY}(x,y) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} F_{XY}(x,y)$$

Remarque : comme dans le cas univarié, la fonction de densité jointe $f_{XY}(x,y)$ peut avoir des valeurs supérieures à 1, car il s'agit de la densité et **pas** de la probabilité.

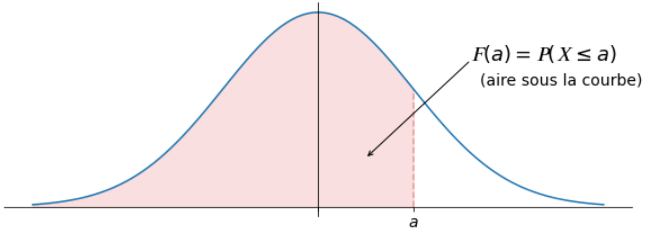
Fonction de densité de probabilité jointe

Cas univarié : probabilité est reflétée par l'aire sous la courbe

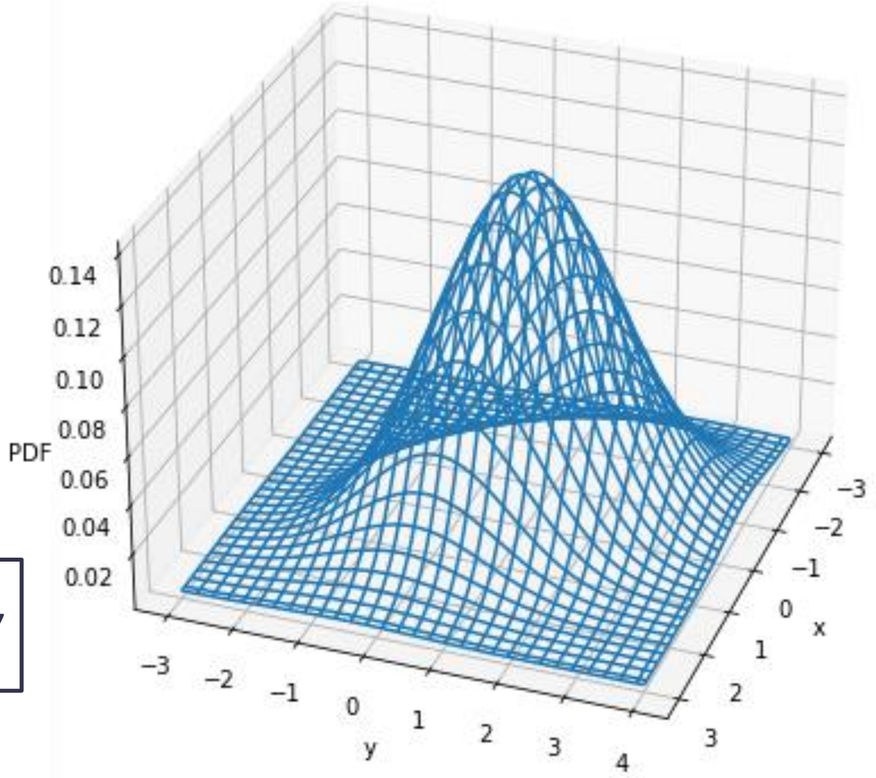


Fonction de densité de probabilité jointe

Cas univarié : probabilité est reflétée par l'aire sous la courbe



Cas bivarié : probabilité est reflétée par le **volume** sous la courbe



$$\forall A \in \mathbb{R}^2, \mathbb{P}\big((X,Y) \in A\big) = \iint_{(x,y)\in A} f_{XY}(x,y)dxdy$$

Fonction de densité de probabilité jointe

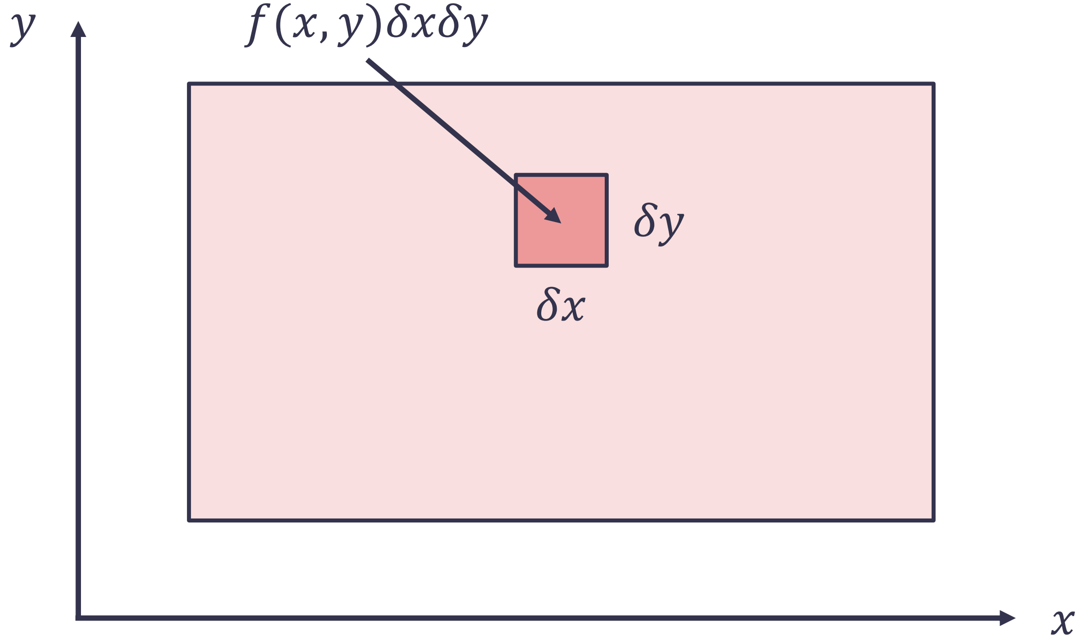
Cas univarié : pour un petit $\Delta > 0$:

$$f_X(x) = \lim_{\Delta \to 0} \frac{\mathbb{P}(x < X \leq x + \Delta)}{\Delta}$$

Fonction de densité de probabilité jointe

Cas bivarié : pour un petit rectangle de hauteur $\delta y > 0$ et largeur $\delta x > 0$ autour de (x, y):

$$\mathbb{P}(x < X \leq x + \delta x, y < Y \leq y + \delta y,) \approx f_{XY}(x, y)\delta x \delta y$$



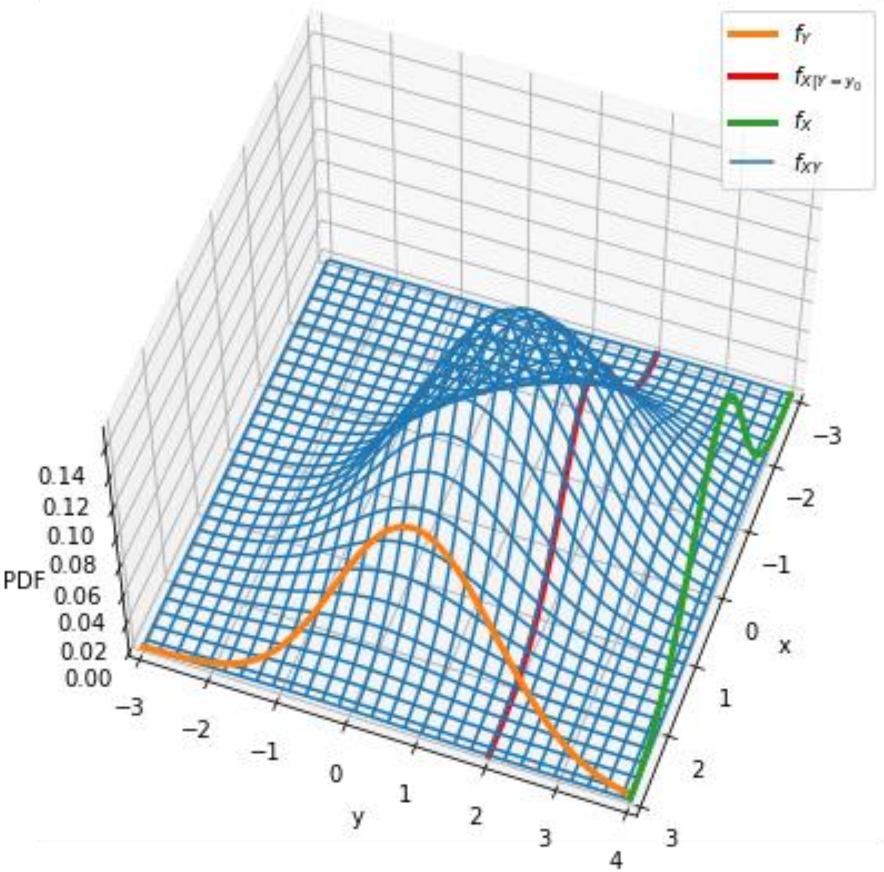
Fonction de densité marginale

Soit (X, Y) un couple de v.a.r. absolument continue de densité $f_{XY}(x, y)$. Les **lois marginales** de v.a.r. X et Y sont données par les **densités marginales** (*marginal density*) suivantes :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}_X, \qquad f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x, y)dy$$

$$\forall\, y \in \mathbb{R}_Y, \qquad f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x, y)dx$$

Fonction de densité marginale



Fonction de densité marginale

La **fonction de répartition jointe** (*joint cumulative distribution function* ou *joint CDF*) du couple des v.a.r. absolument continues :

$$F_{XY}(x,y) = \mathbb{P}(X \leq x, Y \leq y)$$

Dans le cas continue, il est possible d'utiliser la représentation intégrale :

$$F_{XY}(x,y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f_{XY}(t_1,t_2) dt_2 dt_1$$

D'où les **fonctions de répartition marginales** de X et Y :

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(t_1,t_2) dt_2 \, dt_1 \; \forall \, x \in \mathbb{R}_X$$

$$F_Y(y) = \int_{-\infty}^{y} \int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(t_1,t_2) dt_1 \, dt_2 \; \forall \, y \in \mathbb{R}_Y$$

Fonction de densité marginale

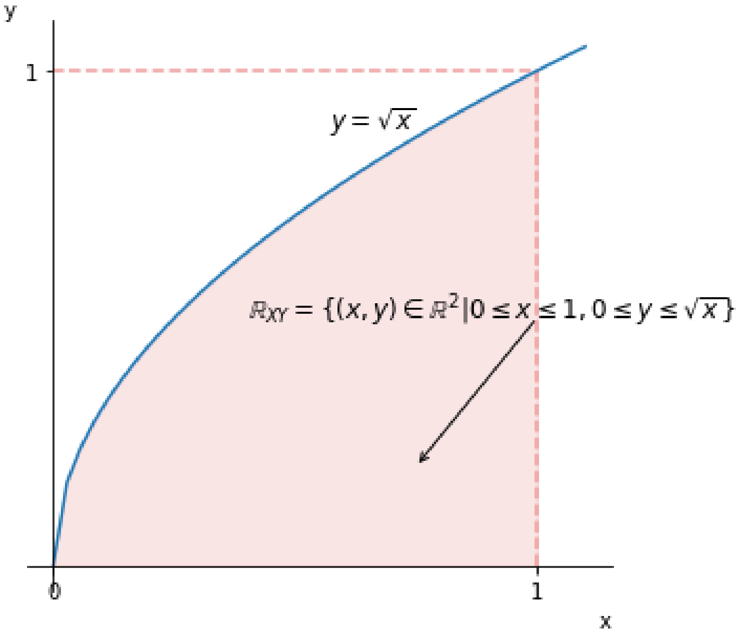
Soit (X, Y) un couple de v.a.r. absolument continues à la fonction de densité jointe $f_{XY}(x, y)$:

$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} 10xy, & \text{si } 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq \sqrt{x} \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

Quelles sont les fonctions de densité marginales de X et Y ?

Fonction de densité marginale

$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} 10xy, & \text{si } 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq \sqrt{x} \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$



En dehors de la région colorée $\mathbb{R}_{XY}$,
$f_{XY}(x,y) = 0$

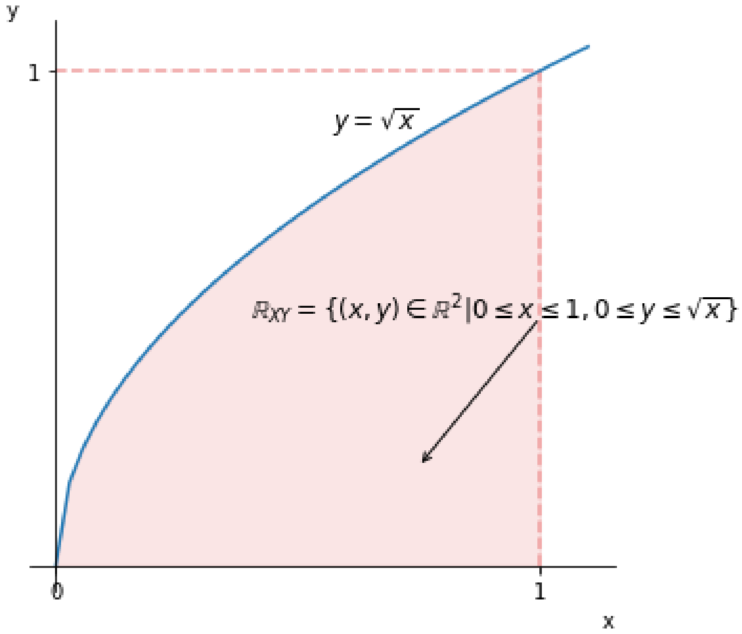
Fonction de densité marginale

$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} 10xy, & \text{si } 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq \sqrt{x} \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

Pour $0 \leq x \leq 1$:

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x,y)dy = \int_{0}^{\sqrt{x}} 10xydy$$

$$= 10x \left.\frac{y^2}{2}\right|_0^{\sqrt{x}} = 5x\left((\sqrt{x})^2 - 0\right) = 5x^2$$



Fonction de densité marginale

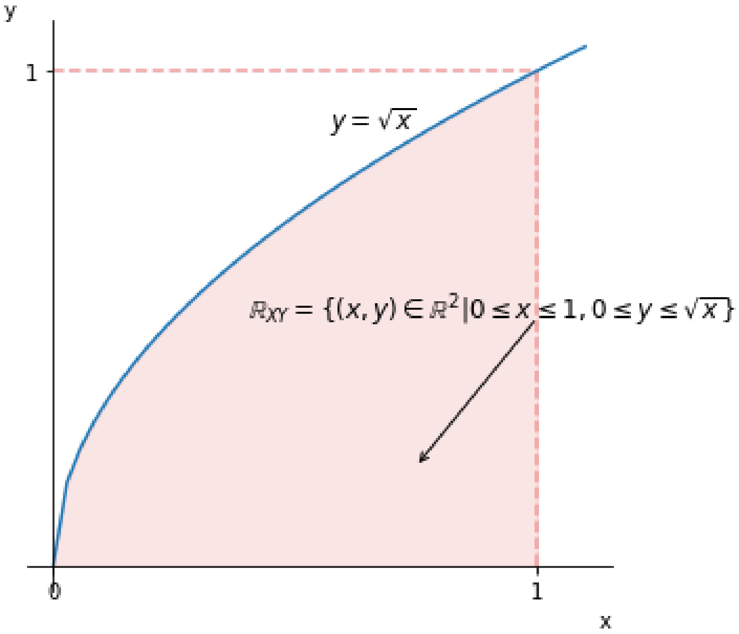
$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} 10xy, & \text{si } 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq \sqrt{x} \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

Pour $0 \leq x \leq 1$:

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x,y)dy = \int_{0}^{\sqrt{x}} 10xydy$$

$$= 10x \left. \frac{y^2}{2} \right|_0^{\sqrt{x}} = 5x\left((\sqrt{x})^2 - 0\right) = 5x^2$$

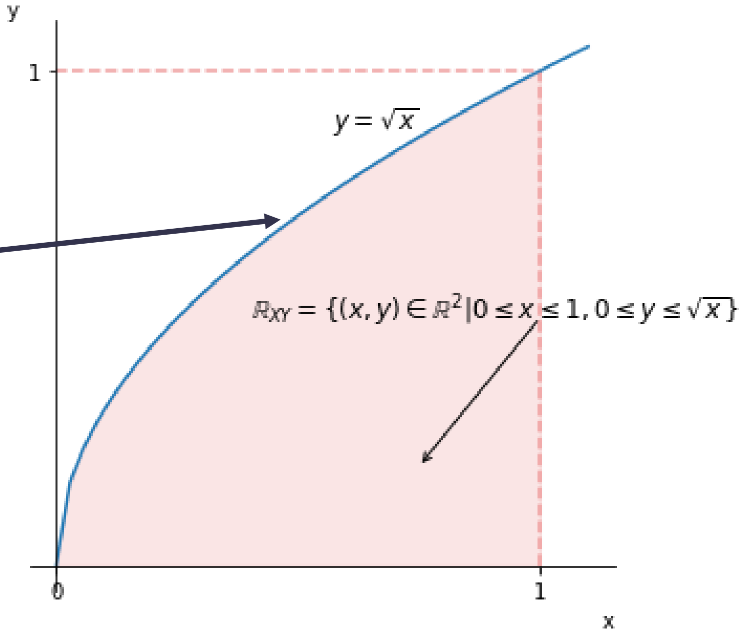
$$\boxed{f_X(x) = \begin{cases} 5x^2, \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 0, \text{sinon} \end{cases}}$$



Fonction de densité marginale

$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} 10xy, & \text{si } 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq \sqrt{x} \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

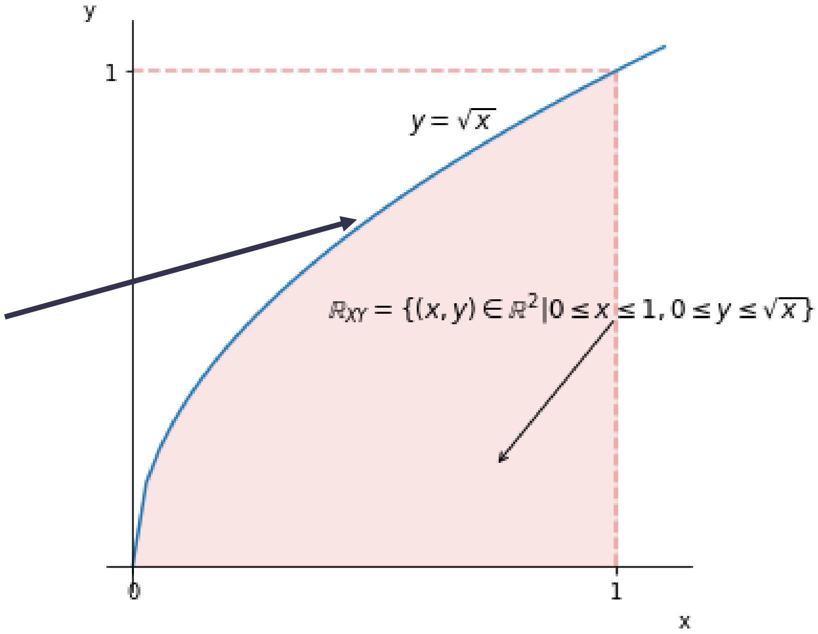
$$y = \sqrt{x} \Rightarrow x = y^2$$



Fonction de densité marginale

$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} 10xy, & \text{si } 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq \sqrt{x} \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

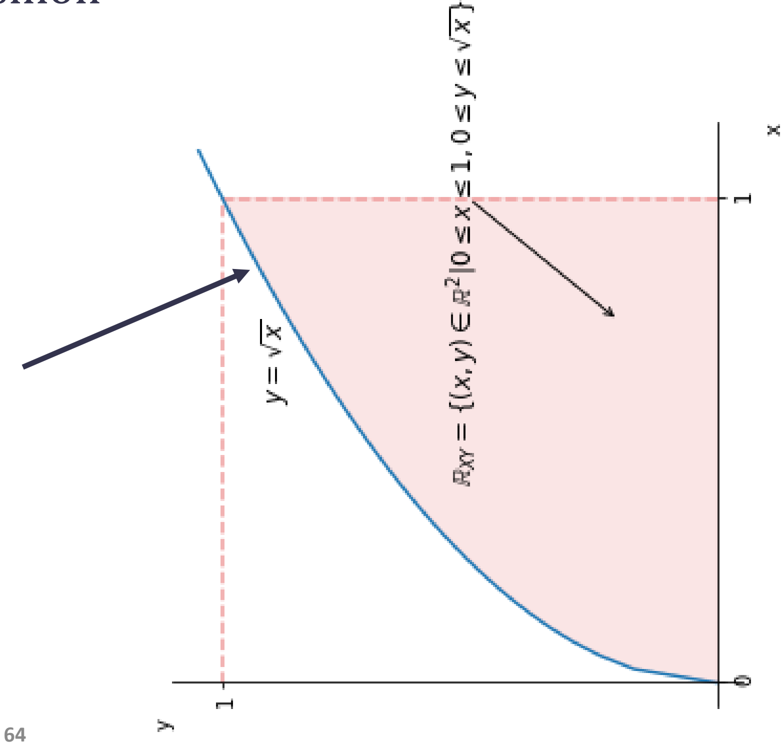
$$y = \sqrt{x} \Rightarrow x = y^2$$
$$\Downarrow$$
$$y^2 \leq x \leq 1$$



Fonction de densité marginale

$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} 10xy, & \text{si } 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq \sqrt{x} \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

$$y = \sqrt{x} \Rightarrow x = y^2$$
$$\Downarrow$$
$$y^2 \leq x \leq 1$$



Fonction de densité marginale

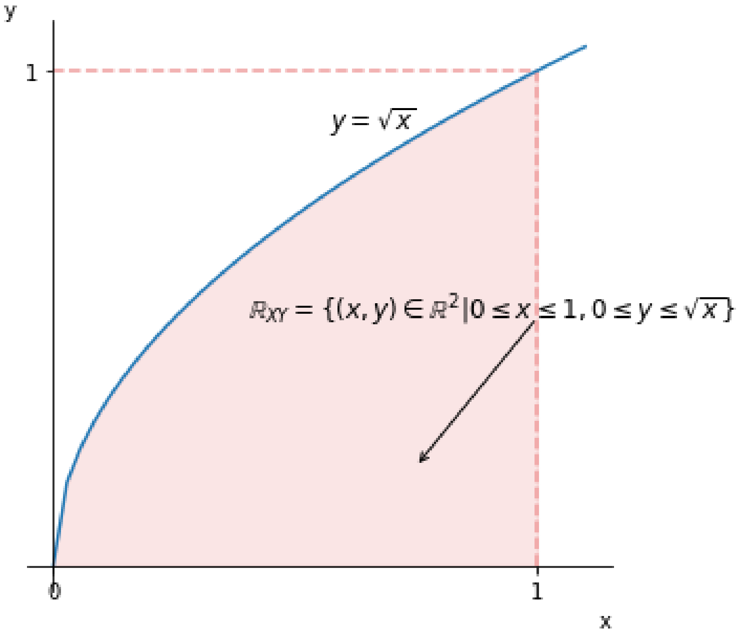
$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} 10xy, & \text{si } 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq \sqrt{x} \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

Pour $0 \leq y \leq \sqrt{x}$:

$$f_Y(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x,y)dx = \int_{y^2}^{1} 10xydx$$

$$= 10y\frac{x^2}{2}\Bigg|_{y^2}^{1} = 5y(1^2 - (y^2)^2)$$

$$= 5y(1 - y^4)$$



Fonction de densité marginale

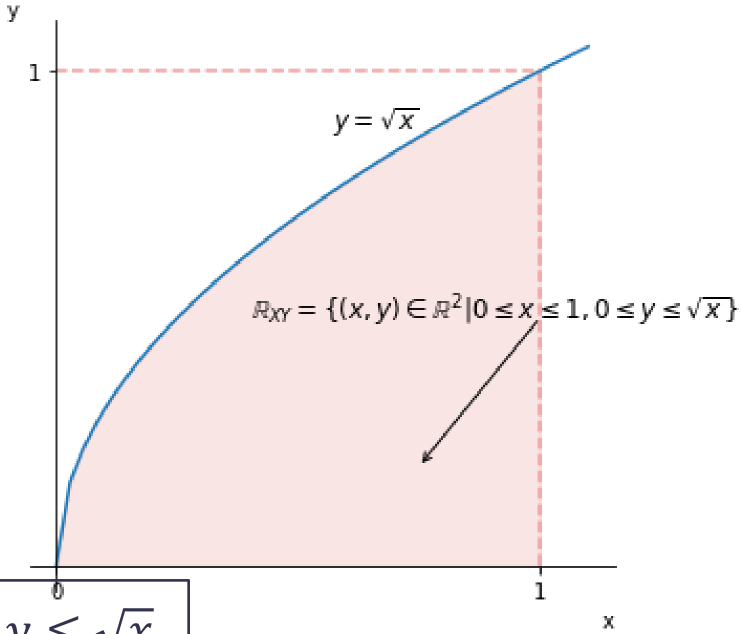
$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} 10xy, & \text{si } 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq \sqrt{x} \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

Pour $0 \leq y \leq \sqrt{x}$:

$$f_Y(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x,y)dx = \int_{y^2}^{1} 10xydx$$

$$= 10y \left. \frac{x^2}{2} \right|_{y^2}^{1} = 5y(1^2 - (y^2)^2)$$

$$= 5y(1 - y^4)$$



$$\boxed{f_Y(y) = \begin{cases} 5y(1 - y^4), \text{si } 0 \leq y \leq \sqrt{x} \\ 0, \text{sinon} \end{cases}}$$

Fonction de densité marginale

Soit (X, Y) un couple de v.a.r. absolument continues à la fonction de densité jointe $f_{XY}(x, y)$:

$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} 10xy, & \text{si } 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq \sqrt{x} \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

Quelle est la fonction de répartition jointe ?

Fonction de densité marginale

$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} 10xy, & \text{si } 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq \sqrt{x} \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

$$F_{XY}(x,y) = ?$$

- Si $x < 0$ ou $y < 0 \Rightarrow F_{XY}(x,y) = 0$
- Si $x \geq 1$ et $y \geq \sqrt{x} \Rightarrow F_{XY}(x,y) = 1$

Fonction de densité marginale

$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} 10xy, & \text{si } 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq \sqrt{x} \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

$$F_{XY}(x,y) = ?$$

- Si $x < 0$ ou $y < 0 \Rightarrow F_{XY}(x,y) = 0$
- Si $x \geq 1$ et $y \geq \sqrt{x} \Rightarrow F_{XY}(x,y) = 1$

Pour $x > 0, y > 0$:

$$F_{XY}(x,y) = \int_{-\infty}^{y} \int_{-\infty}^{x} f_{XY}(u,v)dudv = ?$$

Fonction de densité marginale

$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} 10xy, & \text{si } 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq \sqrt{x} \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

$$F_{XY}(x,y) = ?$$

Pour $x > 0, y > 0$:

$$F_{XY}(x,y) = \int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x} f_{XY}(u,v)dudv = \int_{0}^{y}\int_{0}^{x} f_{XY}(u,v)dudv = \int_{0}^{\min(y,\sqrt{x})}\int_{0}^{\min(x,1)} 10uvdudv$$

Fonction de densité marginale

$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} 10xy, & \text{si } 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq \sqrt{x} \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

$$F_{XY}(x,y) = ?$$

Pour $0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq \sqrt{x}$:

$$F_{XY}(x,y) = \int_0^y \int_0^x 10uvdudv = \int_0^y 10v \left.\frac{u^2}{2}\right|_0^x dv = \int_0^y 5vx^2dv = 5x^2 \left.\frac{v^2}{2}\right|_0^y = \frac{5}{2}(xy)^2$$

Fonction de densité marginale

$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} 10xy, & \text{si } 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq \sqrt{x} \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

$$F_{XY}(x,y) = ?$$

Pour $0 \leq x \leq 1$, $y \geq \sqrt{x}$:

$$F_{XY}(x,y) = F_{XY}(x,\sqrt{x}) = \frac{5}{2}(x\sqrt{x})^2 = \frac{5}{2}x^3$$

Fonction de densité marginale

$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} 10xy, & \text{si } 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq \sqrt{x} \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

$$F_{XY}(x,y) = ?$$

Pour $x \geq 1, 0 \leq y \leq \sqrt{x}$:

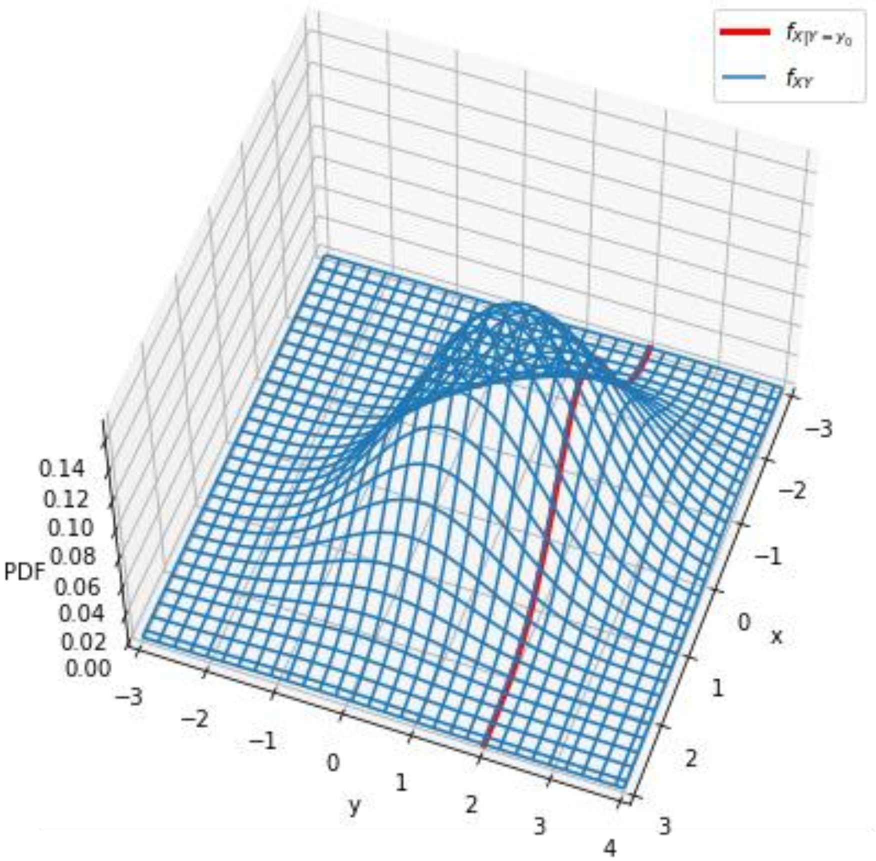
$$F_{XY}(x,y) = F_{XY}(1,y) = \frac{5}{2}(1y)^2 = \frac{5}{2}y^2$$

Fonction de densité marginale

$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} 10xy, & \text{si } 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq \sqrt{x} \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\boxed{F_{XY}(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \; ou \; y < 0 \\ {}^{5}\!/_{2}\,(xy)^2 & \text{si } 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq \sqrt{x} \\ {}^{5}\!/_{2}\,x^3 & \text{si } 0 \leq x \leq 1, y \geq \sqrt{x} \\ {}^{5}\!/_{2}\,y^2 & \text{si } x \geq 1, 0 \leq y \leq \sqrt{x} \\ 1 & \text{si } x \geq 1, y \geq \sqrt{x} \end{cases}}$$

Loi conditionnelle



Loi conditionnelle

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}, \mathbb{P}(B) > 0$$

Soit (X, Y) un couple de v.a.r. de densité $f_{XY}(x, y)$ et $f_Y(y)$ la densité de Y.

La **fonction de densité conditionnelle** (*conditional PDF*) de X sachant $Y = y$ où $f_Y(Y = y) \neq 0$:

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{XY}(x, y)}{f_Y(y)}$$

La probabilité conditionnelle de $X \in A$ sachant $Y = y$:

$$\mathbb{P}(X \in A|Y = y) = \int_A f_{X|Y}(x, y)dx$$

La **fonction de répartition conditionnelle** (*conditional CDF*) de X sachant $Y = y$:

$$F_{X|Y}(x|y) = \mathbb{P}(X \leq x|\, Y = y) = \int_{-\infty}^{x} f_{X|Y}(x|y)dx$$

Loi conditionnelle

Soit A un évènement défini comme $a < X < b$, alors :

$$F_{X|A}(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x > b \\ \dfrac{F_X(x) - F_X(a)}{F_X(b) - F_X(a)}, & \text{si } a \leq x < b \\ 0, & \text{si } x < a \end{cases}$$

et

$$f_{X|A}(x) = \begin{cases} \dfrac{f_X(x)}{\mathbb{P}(A)}, & \text{si } a \leq x < b \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

Loi conditionnelle

$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} 10xy, & \text{si } 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq \sqrt{x} \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

Quelle est la densité conditionnelle $f_{X|Y}(x,y)$?

Loi conditionnelle

$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} 10xy, & \text{si } 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq \sqrt{x} \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

Quelle est la densité conditionnelle $f_{X|Y}(x,y)$?

Selon la définition :

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{XY}(x,y)}{f_Y(y)}$$

Loi conditionnelle

$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} 10xy, & \text{si } 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq \sqrt{x} \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

Quelle est la densité conditionnelle $f_{X|Y}(x,y)$?

Selon la définition :

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{XY}(x,y)}{f_Y(y)}$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} 5y(1-y^4), \text{si } 0 \leq y \leq \sqrt{x} \\ 0, \text{sinon} \end{cases}$$

Loi conditionnelle

$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} 10xy, & \text{si } 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq \sqrt{x} \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

Quelle est la densité conditionnelle $f_{X|Y}(x,y)$?

Selon la définition :

$$f_{Y}(y) = \begin{cases} 5y(1-y^4), \text{si } 0 \leq y \leq \sqrt{x} \\ 0, \text{sinon} \end{cases}$$

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{XY}(x,y)}{f_Y(y)}$$

Quelle est l'intervalle de valeurs sur lequel $f_{X|Y}(x|y) \neq 0$?

Loi conditionnelle

$$f_{XY}(x,y) \;=\; \begin{cases} 10xy, & \text{si } 0 \leq \; x \leq \; 1, 0 \leq \; y \leq \sqrt{x} \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

Quelle est la densité conditionnelle $f_{X|Y}(x,y)$?

Selon la définition :

$$f_Y(y) = \begin{cases} 5y(1-y^4), \text{si } 0 \leq y \leq \sqrt{x} \\ 0, \text{sinon} \end{cases}$$

$$f_{X|Y}(x|y) \;=\; \frac{f_{XY}(x,y)}{f_Y(y)}$$

$$y \leq \sqrt{x} \;\Rightarrow y^2 \leq x$$

Loi conditionnelle

$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} 10xy, & \text{si } 0 \le x \le 1, 0 \le y \le \sqrt{x} \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

Quelle est la densité conditionnelle $f_{X|Y}(x,y)$?

Selon la définition :

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{XY}(x,y)}{f_Y(y)}$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} 5y(1-y^4), \text{si } 0 \le y \le \sqrt{x} \\ 0, \text{sinon} \end{cases}$$

$$y \le \sqrt{x} \Rightarrow y^2 \le x$$

$$f_{XY}(x,y) \ne 0 \text{ si } 0 \le x \le 1$$

Loi conditionnelle

$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} 10xy, & \text{si } 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq \sqrt{x} \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

Quelle est la densité conditionnelle $f_{X|Y}(x,y)$?

Selon la définition :

$$f_Y(y) = \begin{cases} 5y(1-y^4), \text{si } 0 \leq y \leq \sqrt{x} \\ 0, \text{sinon} \end{cases}$$

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{XY}(x,y)}{f_Y(y)}$$

$$\begin{cases} y \leq \sqrt{x} \Rightarrow y^2 \leq x \\ f_{XY}(x,y) \neq 0 \text{ si } 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

➡

$$y^2 \leq x \leq 1$$

Loi conditionnelle

$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} 10xy, & \text{si } 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq \sqrt{x} \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

Quelle est la densité conditionnelle $f_{X|Y}(x,y)$?

$$f_Y(y) = \begin{cases} 5y(1-y^4), \text{si } 0 \leq y \leq \sqrt{x} \\ 0, \text{sinon} \end{cases}$$

Selon la définition :

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{XY}(x,y)}{f_Y(y)} = \begin{cases} \dfrac{10xy}{5y(1-y^4)} & \text{si } y^2 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{2x}{1-y^4} & \text{si } y^2 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Indépendence

$$\mathbb{P}(X \leq x, Y \leq y) = \mathbb{P}(X \leq x) \times \mathbb{P}(Y \leq y) \Rightarrow X \text{ et } Y\ indépendants$$
$$F_{XY}(x,y) = F_X(x) \times F_Y(y) \Rightarrow X \text{ et } Y\ indépendants$$

Soit (X, Y) un couple de v.a.r. absolument continu à la densité $f_{XY}(x,y)$. Soit $f_X(x)$ et $f_Y(y)$ les fonctions de denstié marginale de X et Y respectivement.

X et Y sont indépendantes si et seulement si :

$$\forall\, s \in \mathbb{R}_X, \forall\, t \in \mathbb{R}_Y, \qquad f_{XY}(s,t) = f_X(s) \times f_Y(t)$$

Loi conditionnelle

$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} 10xy, & \text{si } 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq \sqrt{x} \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

Est-ce que X et Y sont indépendantes ?

Loi conditionnelle

$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} 10xy, & \text{si } 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq \sqrt{x} \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

Est-ce que X et Y sont indépendantes ?

$$f_X(x) = \begin{cases} 5x^2, \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 0, \text{sinon} \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} 5y(1-y^4), \text{si } 0 \leq y \leq \sqrt{x} \\ 0, \text{sinon} \end{cases}$$

Loi conditionnelle

$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} 10xy, & \text{si } 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq \sqrt{x} \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

Est-ce que X et Y sont indépendantes ?

$$f_X(x) = \begin{cases} 5x^2, \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 0, \text{sinon} \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} 5y(1-y^4), \text{si } 0 \leq y \leq \sqrt{x} \\ 0, \text{sinon} \end{cases}$$

Pour $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq \sqrt{x}$:

$$f_X(x) \times f_Y(y) = 5x^2 \times 5y(1-y^4)$$
$$= 25x^2y(1-y^4)$$

Loi conditionnelle

$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} 10xy, & \text{si } 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq \sqrt{x} \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

Est-ce que X et Y sont indépendantes ?

$$f_X(x) = \begin{cases} 5x^2, \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 0, \text{sinon} \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} 5y(1-y^4), \text{si } 0 \leq y \leq \sqrt{x} \\ 0, \text{sinon} \end{cases}$$

Pour $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq \sqrt{x}$:

$$f_X(x) \times f_Y(y) = 5x^2 \times 5y(1-y^4)$$
$$= 25x^2y(1-y^4) \neq f_{XY}(x,y)$$

Loi conditionnelle

$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} 10xy, & \text{si } 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq \sqrt{x} \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

Est-ce que X et Y sont indépendantes ?

Pour $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq \sqrt{x}$:

$$f_X(x) = \begin{cases} 5x^2, \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 0, \text{sinon} \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} 5y(1-y^4), \text{si } 0 \leq y \leq \sqrt{x} \\ 0, \text{sinon} \end{cases}$$

$$f_X(x) \times f_Y(y) = 5x^2 \times 5y(1-y^4)$$
$$= 25x^2y(1-y^4) \neq f_{XY}(x,y)$$

➡ X et Y NE sont PAS indépendantes

Cas discret

Cas continue

Moments

Fonction caractéristique et fonction génératrice

Espérance

On appelle **espérance** (*expectation*) du couple de v.a.r. (X, Y), notée $\mathbb{E}(X, Y)$, l'élément de $\mathbb{R}^2$ défini comme suit :

$$\mathbb{E}(X, Y) = (\mathbb{E}X, \mathbb{E}Y)$$

(cas discret) Soit $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction bornée et continu par morceaux. L'espérance de la v.a.r. $Z = h(X, Y)$ est donnée par :

$$\mathbb{E}[Z] = \sum_{(i,j)\in\mathbb{R}_{XY}} h(i, j) \times \mathbb{P}(X = i, Y = j)$$

(cas continu) Soit (X, Y) a pour densité la fonction $f_{XY}(x, y)$. Soit $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction bornée et continu par morceaux. L'espérance de la v.a.r. $Z = h(X, Y)$ est donnée par :

$$\mathbb{E}[Z] = \int_{\mathbb{R}^2} h(u, v) \times f_{XY}(u, v) du dv$$

lorsque cette intégrale existe.

Espérance conditionnelle

Soit (X, Y) un couple de v.a.r. discrètes. Soit A un évènement.

L'espérance conditionnelle (*conditional expectation*) de X:

1. Sachant A est définie par :

$$\mathbb{E}[X|A] = \sum_{x_i \in \mathbb{R}_X} x_i \mathbb{P}_{X|A}(x_i)$$

2. Sachant $Y = y_j$ est définie par :

$$\mathbb{E}[X|Y = y_j] = \sum_{x_i \in \mathbb{R}_X} x_i \mathbb{P}_{X|Y}(x_i|y_j)$$

Dans le cas continu :

$$\mathbb{E}[X|Y = y] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_{X|Y=y}(x|y) dx$$

Loi de l’espérance totale

La loi de l'espérance totale (*Law of Total Expectation* ou *Law of Iterated Expectation*) :

(cas discret)

Soit (X, Y) un couple de v.a.r. discrètes. L'espérance totale de X :

$$\mathbb{E}X = \sum_{y_j \in \mathbb{R}_Y} \mathbb{E}\left[X \middle| Y = y_j\right] \mathbb{P}_Y(y_j)$$

(cas continu)

Soit (X, Y) un couple de v.a.r. absolument continu. L'espérance totale de X :

$$\mathbb{E}X = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{E}[X|Y = y] f_Y(y) dy = \mathbb{E}\big[\mathbb{E}[X|Y]\big]$$

Espérance conditionnelle

$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} 10xy, & \text{si } 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq \sqrt{x} \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

Quelle est l’espérance $\mathbb{E}[X|Y = y]$ pour $0 \leq y \leq \sqrt{x}$?

Espérance conditionnelle

$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} 10xy, & \text{si } 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq \sqrt{x} \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

Quelle est l'espérance $\mathbb{E}[X|Y = y]$ pour $0 \leq y \leq \sqrt{x}$?

$$\mathbb{E}[X|Y = y] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_{X|Y=y}(x|y) dx$$

Espérance conditionnelle

$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} 10xy, & \text{si } 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq \sqrt{x} \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

Quelle est l'espérance $\mathbb{E}[X|Y = y]$ pour $0 \leq y \leq \sqrt{x}$?

$$\mathbb{E}[X|Y = y] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_{X|Y=y}(x|y) dx$$

$$f_{X|Y}(x|y) = \begin{cases} \dfrac{2x}{1 - y^4} & \text{si } y^2 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Espérance conditionnelle

$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} 10xy, & \text{si } 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq \sqrt{x} \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

Quelle est l'espérance $\mathbb{E}[X|Y=y]$ pour $0 \leq y \leq \sqrt{x}$?

$$\mathbb{E}[X|Y=y] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_{X|Y=y}(x|y)dx =$$

$$f_{X|Y}(x|y) = \begin{cases} \dfrac{2x}{1-y^4} & \text{si } y^2 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$= \int_{y^2}^{1} x \frac{2x}{1-y^4} dx = \int_{y^2}^{1} \frac{2x^2}{1-y^4} dx$$

$$= \frac{2}{1-y^4} \cdot \frac{x^3}{3}\bigg|_{y^2}^{1} = \frac{2}{3(1-y^4)}(1-y^6)$$

Variance conditionnelle

Soit (X, Y) un couple de v.a.r. discrètes. Soit $\mu_{X|Y}\,(y) = \mathbb{E}[X|Y = y]$.

La variance conditionnelle (*conditional variance*) de X sachant $Y = y$, notée $Var(X|Y = y)$, est définie par :

$$Var(X|Y = y) = \mathbb{E}\left[\left(X - \mu_{X|Y}(y)\right)^2 \middle| Y = y\right] = \mathbb{E}[X^2|Y = y] \; - \mu_{X|Y}(y)^2$$

Dans le cas discret :

$$Var(X|Y = y) = \sum_{x_i \in \mathbb{R}_X} \left(x_i - \mu_{X|Y}(y)\right)^2 \mathbb{P}_{X|Y}(x_i)$$

Loi de la variance totale

La loi de la variance totale (*Law of Total Variance*) :

Soit (X, Y) un couple de v.a.r. discrètes. La variance totale de X peut être calculée comme suit :

$$Var(X) = \mathbb{E}[Var(X|Y)] + Var(\mathbb{E}[X|Y])$$

Covariance

Quelle est la relation des variations des valeurs de deux variables aléatoires X et Y ?

Covariance

Soit (X, Y) un couple de v.a.r. Si $\mathbb{E}X$ et $\mathbb{E}Y$ existent, la **covariance** (*covariance*) entre X et Y, notée $Cov(X, Y)$ ou σ_{XY}, est définie par :

$$Cov(X, Y) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}X)(Y - \mathbb{E}Y)] = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}X \times \mathbb{E}Y$$

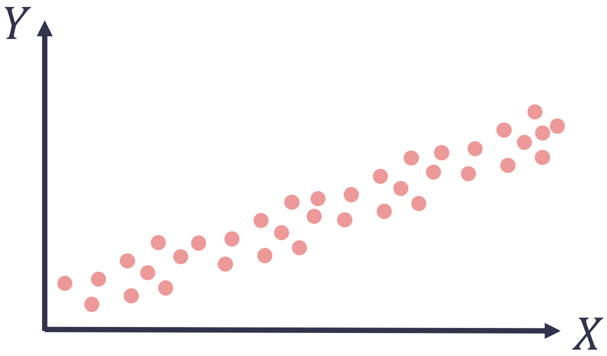
Covariance

Propriétés :

- $Cov(X,X) = \mathbb{E}[(X-\mathbb{E}X)(X-\mathbb{E}X)] = \mathbb{E}[XX] - \mathbb{E}X \times \mathbb{E}X = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}X)^2 = Var(X)$
- $Cov(X,Y) = Cov(Y,X)$
- $Cov(aX_1 + bY_1, X_2) = a\, Cov(X_1, X_2) + b\, Cov(Y_1, X_2),\ \forall\, a, b \in \mathbb{R}$
- $Cov(X_1, aX_2 + bY_2) = a\, Cov(X_1, X_2) + b\, Cov(X_1, Y_2),\ \forall\, a, b \in \mathbb{R}$
- $Cov(X, a) = 0$
- $Cov(aX, bY) = ab\, Cov(X,Y)$
- $Cov(X + c, Y) = Cov(X,Y)$

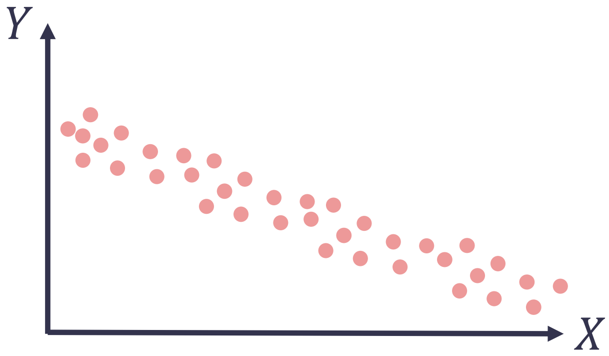
Covariance

$$\boxed{Cov(X,Y) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}X)(Y - \mathbb{E}Y)] = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}X \times \mathbb{E}Y}$$



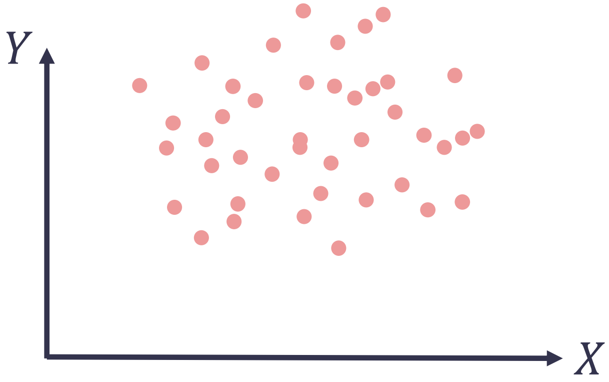
$Cov(X,Y) > 0$

Les plus grandes valeurs de Y correspondent aux plus grandes valeurs de X



$Cov(X,Y) < 0$

Les plus grandes valeurs de Y correspondent aux plus petites valeurs de X



$Cov(X,Y) \approx 0$

Pas de relation évidente

Covariance

Soit X une v.a.r. continue de la loi uniforme sur $[1,2]$, c.à.d. $X \sim \mathcal{U}([1,2])$. Soit Y une v.a.r. qui sous condition $X = x$ suit la loi exponentielle avec le paramètre $\lambda = x$, c.à.d. $\mathcal{E}(\lambda = x)$. Trouvez la covariance $Cov(X, Y)$.

Pishro-Nik, Hossein. 2014. *Introduction to Probability, Statistics, and Random Processes*. Blue Bell, PA: Kappa Research, LLC. https://www.probabilitycourse.com/.

Covariance

Soit X une v.a.r. continue de la loi uniforme sur $[1,2]$, c.à.d. $X \sim \mathcal{U}([1,2])$. Soit Y une v.a.r. qui sous condition $X = x$ suit la loi exponentielle avec le paramètre $\lambda = x$, c.à.d. $\mathcal{E}(\lambda = x)$. Trouvez la covariance $Cov(X, Y)$.

	Plage des valeurs	Densité	Espérance	Variance
Uniforme, $\boldsymbol{\mathcal{U}([a,b])}$	$[a,b]$	$f(x) = \frac{1}{b-a}\mathbb{I}_{[a,b]}(x)$ $\mathbb{I}_A(x) = \begin{cases} 1, \text{si } x \in A \\ 0, \text{sinon} \end{cases}$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
Exponentielle, $\boldsymbol{\mathcal{E}(\lambda)}$	$\mathbb{R}^+$	$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}\mathbb{I}_{\mathbb{R}^+}(x)$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$

Pishro-Nik, Hossein. 2014. *Introduction to Probability, Statistics, and Random Processes*. Blue Bell, PA: Kappa Research, LLC. https://www.probabilitycourse.com/.

Covariance

Soit X une v.a.r. continue de la loi uniforme sur $[1,2]$, c.à.d. $X \sim \mathcal{U}([1,2])$. Soit Y une v.a.r. qui sous condition $X = x$ suit la loi exponentielle avec le paramètre $\lambda = x$, c.à.d. $\mathcal{E}(\lambda = x)$. Trouvez la covariance $Cov(X, Y)$.

$$\boxed{Cov(X,Y) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}X)(Y - \mathbb{E}Y)] = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}X \times \mathbb{E}Y}$$

Pishro-Nik, Hossein. 2014. *Introduction to Probability, Statistics, and Random Processes*. Blue Bell, PA: Kappa Research, LLC. https://www.probabilitycourse.com/.

Covariance

Soit X une v.a.r. continue de la loi uniforme sur $[1,2]$, c.à.d. $X \sim \mathcal{U}([1,2])$. Soit Y une v.a.r. qui sous condition $X = x$ suit la loi exponentielle avec le paramètre $\lambda = x$, c.à.d. $\mathcal{E}(\lambda = x)$. Trouvez la covariance $Cov(X,Y)$.

$$\boxed{Cov(X,Y) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}X)(Y - \mathbb{E}Y)] = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}X \times \mathbb{E}Y}$$

$$X \sim \mathcal{U}([1,2]) \Rightarrow \mathbb{E}X = \frac{a+b}{2} = \frac{1+2}{2} = \frac{3}{2}$$

Pishro-Nik, Hossein. 2014. *Introduction to Probability, Statistics, and Random Processes*. Blue Bell, PA: Kappa Research, LLC. https://www.probabilitycourse.com/.

Covariance

Soit X une v.a.r. continue de la loi uniforme sur $[1,2]$, c.à.d. $X \sim \mathcal{U}([1,2])$. Soit Y une v.a.r. qui sous condition $X = x$ suit la loi exponentielle avec le paramètre $\lambda = x$, c.à.d. $\mathcal{E}(\lambda = x)$. Trouvez la covariance $Cov(X, Y)$.

$$\boxed{Cov(X,Y) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}X)(Y - \mathbb{E}Y)] = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}X \times \mathbb{E}Y}$$

$$Y|X = x \sim \mathcal{E}(\lambda = x)$$

Comment trouver $\mathbb{E}Y$ si c'est que la distribution conditionnelle qui est donnée ?

Pishro-Nik, Hossein. 2014. *Introduction to Probability, Statistics, and Random Processes*. Blue Bell, PA: Kappa Research, LLC. https://www.probabilitycourse.com/.

Covariance

Soit X une v.a.r. continue de la loi uniforme sur $[1,2]$, c.à.d. $X \sim \mathcal{U}([1,2])$. Soit Y une v.a.r. qui sous condition $X = x$ suit la loi exponentielle avec le paramètre $\lambda = x$, c.à.d. $\mathcal{E}(\lambda = x)$. Trouvez la covariance $Cov(X, Y)$.

$$\boxed{Cov(X,Y) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}X)(Y - \mathbb{E}Y)] = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}X \times \mathbb{E}Y}$$

$$Y|X = x \sim \mathcal{E}(\lambda = x)$$

Comment trouver $\mathbb{E}Y$ si c'est que la distribution conditionnelle qui est donnée ?

$$\mathbb{E}Y = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{E}[Y|X = x] f_X(x) dx = \mathbb{E}\big[\mathbb{E}[Y|X]\big]$$

Pishro-Nik, Hossein. 2014. *Introduction to Probability, Statistics, and Random Processes*. Blue Bell, PA: Kappa Research, LLC. https://www.probabilitycourse.com/.

Covariance

Soit X une v.a.r. continue de la loi uniforme sur $[1,2]$, c.à.d. $X \sim \mathcal{U}([1,2])$. Soit Y une v.a.r. qui sous condition $X = x$ suit la loi exponentielle avec le paramètre $\lambda = x$, c.à.d. $\mathcal{E}(\lambda = x)$. Trouvez la covariance $Cov(X,Y)$.

$$\boxed{Cov(X,Y) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}X)(Y - \mathbb{E}Y)] = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}X \times \mathbb{E}Y}$$

$$Y|X = x \sim \mathcal{E}(\lambda = x) \Rightarrow \mathbb{E}[Y|X] = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{X}$$

$$\mathbb{E}Y = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{E}[Y|X = x] f_X(x) dx = \mathbb{E}\big[\mathbb{E}[Y|X]\big]$$

Pishro-Nik, Hossein. 2014. *Introduction to Probability, Statistics, and Random Processes*. Blue Bell, PA: Kappa Research, LLC. https://www.probabilitycourse.com/.

Covariance

Soit X une v.a.r. continue de la loi uniforme sur $[1,2]$, c.à.d. $X \sim \mathcal{U}([1,2])$. Soit Y une v.a.r. qui sous condition $X = x$ suit la loi exponentielle avec le paramètre $\lambda = x$, c.à.d. $\mathcal{E}(\lambda = x)$. Trouvez la covariance $Cov(X,Y)$.

$$\boxed{Cov(X,Y) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}X)(Y - \mathbb{E}Y)] = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}X \times \mathbb{E}Y}$$

$$Y|X = x \sim \mathcal{E}(\lambda = x) \Rightarrow \mathbb{E}[Y|X] = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{X}$$

$$\mathbb{E}\big[\mathbb{E}[Y|X]\big] = \mathbb{E}\left[\frac{1}{X}\right] = ?$$

$$\mathbb{E}Y = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{E}[Y|X = x] f_X(x) dx = \mathbb{E}\big[\mathbb{E}[Y|X]\big]$$

Pishro-Nik, Hossein. 2014. *Introduction to Probability, Statistics, and Random Processes*. Blue Bell, PA: Kappa Research, LLC. https://www.probabilitycourse.com/.

Covariance

Soit X une v.a.r. continue de la loi uniforme sur $[1,2]$, c.à.d. $X \sim \mathcal{U}([1,2])$. Soit Y une v.a.r. qui sous condition $X = x$ suit la loi exponentielle avec le paramètre $\lambda = x$, c.à.d. $\mathcal{E}(\lambda = x)$. Trouvez la covariance $Cov(X,Y)$.

$$\boxed{Cov(X,Y) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}X)(Y - \mathbb{E}Y)] = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}X \times \mathbb{E}Y}$$

$$Y|X = x \sim \mathcal{E}(\lambda = x) \Rightarrow \mathbb{E}[Y|X] = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{X}$$

$$\mathbb{E}\big[\mathbb{E}[Y|X]\big] = \mathbb{E}\left[\frac{1}{X}\right] = ?$$

Fonction de X

$$\mathbb{E}Y = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{E}[Y|X = x] f_X(x) dx = \mathbb{E}\big[\mathbb{E}[Y|X]\big]$$

Pishro-Nik, Hossein. 2014. *Introduction to Probability, Statistics, and Random Processes*. Blue Bell, PA: Kappa Research, LLC. https://www.probabilitycourse.com/.

Covariance

Soit X une v.a.r. continue de la loi uniforme sur $[1,2]$, c.à.d. $X \sim \mathcal{U}([1,2])$. Soit Y une v.a.r. qui sous condition $X = x$ suit la loi exponentielle avec le paramètre $\lambda = x$, c.à.d. $\mathcal{E}(\lambda = x)$. Trouvez la covariance $Cov(X,Y)$.

$$\boxed{Cov(X,Y) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}X)(Y - \mathbb{E}Y)] = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}X \times \mathbb{E}Y}$$

$$Y|X = x \sim \mathcal{E}(\lambda = x) \Rightarrow \mathbb{E}[Y|X] = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{X}$$

$$\mathbb{E}[h(X)] = \int_{\mathbb{R}} h(x) f_X(x) dx$$

$$\mathbb{E}\big[\mathbb{E}[Y|X]\big] = \mathbb{E}\left[\frac{1}{X}\right] = ?$$

Fonction de X

$$\mathbb{E}Y = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{E}[Y|X = x] f_X(x) dx = \mathbb{E}\big[\mathbb{E}[Y|X]\big]$$

Pishro-Nik, Hossein. 2014. *Introduction to Probability, Statistics, and Random Processes*. Blue Bell, PA: Kappa Research, LLC. https://www.probabilitycourse.com/.

Covariance

Soit X une v.a.r. continue de la loi uniforme sur $[1,2]$, c.à.d. $X \sim \mathcal{U}([1,2])$. Soit Y une v.a.r. qui sous condition $X = x$ suit la loi exponentielle avec le paramètre $\lambda = x$, c.à.d. $\mathcal{E}(\lambda = x)$. Trouvez la covariance $Cov(X, Y)$.

$$\boxed{Cov(X,Y) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}X)(Y - \mathbb{E}Y)] = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}X \times \mathbb{E}Y}$$

$$\mathbb{E}[h(X)] = \int_{\mathbb{R}} h(x) f_X(x) dx$$

$$Y|X = x \sim \mathcal{E}(\lambda = x) \Rightarrow \mathbb{E}[Y|X] = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{X}$$

$$\mathbb{E}[\mathbb{E}[Y|X]] = \mathbb{E}\left[\frac{1}{X}\right] = \int_1^2 \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{2-1} dx = \int_1^2 \frac{1}{x} dx = \ln x \Big|_1^2 = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2$$

$$\mathbb{E}Y = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{E}[Y|X = x] f_X(x) dx = \mathbb{E}\big[\mathbb{E}[Y|X]\big]$$

Pishro-Nik, Hossein. 2014. *Introduction to Probability, Statistics, and Random Processes*. Blue Bell, PA: Kappa Research, LLC. https://www.probabilitycourse.com/.

Covariance

Soit X une v.a.r. continue de la loi uniforme sur $[1,2]$, c.à.d. $X \sim \mathcal{U}([1,2])$. Soit Y une v.a.r. qui sous condition $X = x$ suit la loi exponentielle avec le paramètre $\lambda = x$, c.à.d. $\mathcal{E}(\lambda = x)$. Trouvez la covariance $Cov(X, Y)$.

$$\boxed{Cov(X,Y) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}X)(Y - \mathbb{E}Y)] = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}X \times \mathbb{E}Y}$$

Pishro-Nik, Hossein. 2014. *Introduction to Probability, Statistics, and Random Processes*. Blue Bell, PA: Kappa Research, LLC. https://www.probabilitycourse.com/.

Covariance

Soit X une v.a.r. continue de la loi uniforme sur $[1,2]$, c.à.d. $X \sim \mathcal{U}([1,2])$. Soit Y une v.a.r. qui sous condition $X = x$ suit la loi exponentielle avec le paramètre $\lambda = x$, c.à.d. $\mathcal{E}(\lambda = x)$. Trouvez la covariance $Cov(X, Y)$.

$$\boxed{Cov(X,Y) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}X)(Y - \mathbb{E}Y)] = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}X \times \mathbb{E}Y}$$

Comment trouver $\mathbb{E}[XY]$?

Pishro-Nik, Hossein. 2014. *Introduction to Probability, Statistics, and Random Processes*. Blue Bell, PA: Kappa Research, LLC. https://www.probabilitycourse.com/.

Covariance

Soit X une v.a.r. continue de la loi uniforme sur $[1,2]$, c.à.d. $X \sim \mathcal{U}([1,2])$. Soit Y une v.a.r. qui sous condition $X = x$ suit la loi exponentielle avec le paramètre $\lambda = x$, c.à.d. $\mathcal{E}(\lambda = x)$. Trouvez la covariance $Cov(X, Y)$.

$$\boxed{Cov(X,Y) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}X)(Y - \mathbb{E}Y)] = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}X \times \mathbb{E}Y}$$

Comment trouver $\mathbb{E}[XY]$?

$$\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}\big[\mathbb{E}[XY|X]\big]$$

Pishro-Nik, Hossein. 2014. *Introduction to Probability, Statistics, and Random Processes*. Blue Bell, PA: Kappa Research, LLC. https://www.probabilitycourse.com/.

Covariance

Soit X une v.a.r. continue de la loi uniforme sur $[1,2]$, c.à.d. $X \sim \mathcal{U}([1,2])$. Soit Y une v.a.r. qui sous condition $X = x$ suit la loi exponentielle avec le paramètre $\lambda = x$, c.à.d. $\mathcal{E}(\lambda = x)$. Trouvez la covariance $Cov(X,Y)$.

$$\boxed{Cov(X,Y) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}X)(Y - \mathbb{E}Y)] = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}X \times \mathbb{E}Y}$$

$$\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}\big[\mathbb{E}[XY|X]\big] = [\mathbb{E}[X|X = x] = x] = \mathbb{E}\big[X\mathbb{E}[Y|X]\big] = \left[\mathbb{E}[Y|X] = \frac{1}{X}\right] = \mathbb{E}\left[X\frac{1}{X}\right]$$

$$= \mathbb{E}[1] = 1$$

Pishro-Nik, Hossein. 2014. *Introduction to Probability, Statistics, and Random Processes*. Blue Bell, PA: Kappa Research, LLC. https://www.probabilitycourse.com/.

Covariance

Soit X une v.a.r. continue de la loi uniforme sur $[1,2]$, c.à.d. $X \sim \mathcal{U}([1,2])$. Soit Y une v.a.r. qui sous condition $X = x$ suit la loi exponentielle avec le paramètre $\lambda = x$, c.à.d. $\mathcal{E}(\lambda = x)$. Trouvez la covariance $Cov(X,Y)$.

$$\boxed{Cov(X,Y) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}X)(Y - \mathbb{E}Y)] = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}X \times \mathbb{E}Y}$$

$$\left.\begin{aligned} &\mathbb{E}[XY] = 1 \\ &\mathbb{E}[X] = \frac{3}{2} \\ &\mathbb{E}[Y] = \ln 2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \boxed{Cov(X,Y) = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}X \times \mathbb{E}Y = 1 - \frac{3}{2}\ln 2}$$

Pishro-Nik, Hossein. 2014. *Introduction to Probability, Statistics, and Random Processes*. Blue Bell, PA: Kappa Research, LLC. https://www.probabilitycourse.com/.

Covariance et Indépendance

Soit X et Y deux v.a.r. indépendantes. Alors, on a :

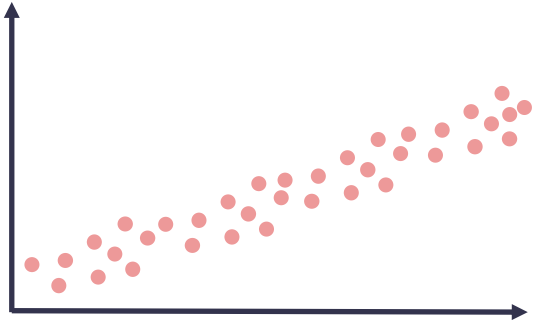
1. $\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}X \times \mathbb{E}Y$ et $\mathbb{E}[g(X)h(Y)] = \mathbb{E}[g(X)] \times \mathbb{E}[h(Y)]$
2. $\mathbb{E}[X|Y] = \mathbb{E}[X]$ et $\mathbb{E}[g(X)|Y] = \mathbb{E}[g(X)]$
3. $Var(X+Y) = Var(X) \ + \ Var(Y)$
4. $Cov(X,Y) = 0$ car $\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}X \times \mathbb{E}Y$

Soit X et Y deux v.a.r. , et h et g deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

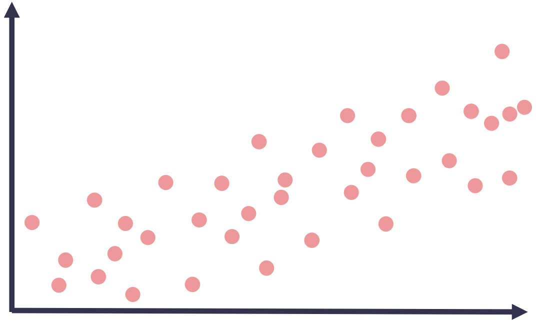
Si X et Y sont indépendantes, alors les v.a.r. $g(X)$ et $h(Y)$ sont indépendantes et :

$$\mathbb{E}\big(g(X)h(Y)\big) = \mathbb{E}\big(g(X)\big) \times \mathbb{E}\big(h(Y)\big)$$

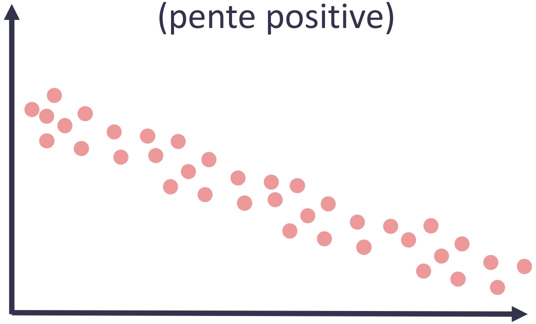
Relation linéaire



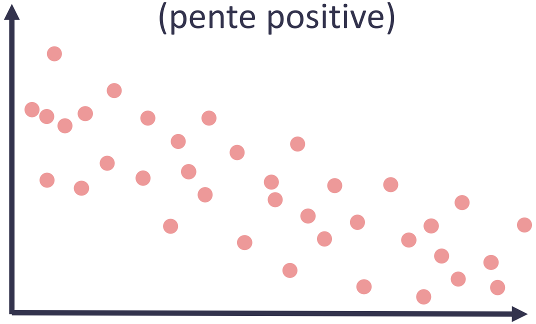
Forte relation linéaire
(pente positive)



Faible relation linéaire
(pente positive)

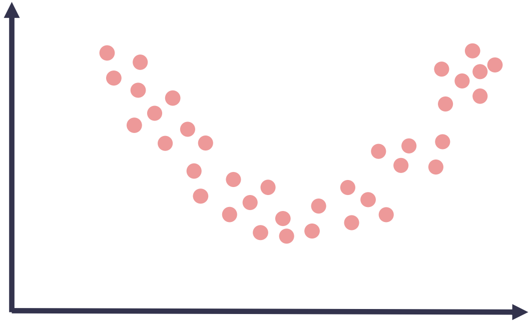


Forte relation linéaire
(pente négative)

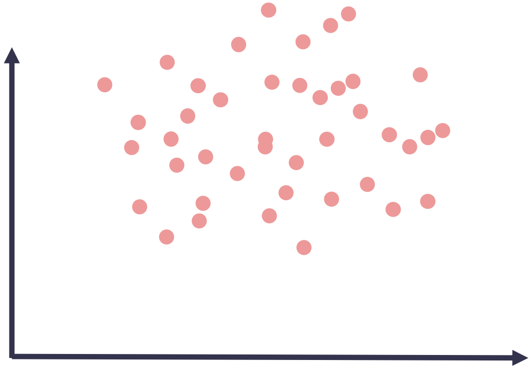


Faible relation linéaire
(pente négative)

Relation linéaire



Relation non-linéaire



Pas de relation évidente

Coefficient de corrélation linéaire

$$\boxed{\rho(X,Y) = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X)Var(Y)}} = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X \sigma_Y}}$$

Reflète une relation linéaire entre les variables (une forme normalisée de la covariance)

$$-1 \leq r \leq 1$$

-1.0
forte corrélation négative

0
pas de corrélation (pas de relation linéaire)

1.0
forte corrélation positive

Coefficient de corrélation linéaire

$$\boxed{\rho(X,Y) = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X)Var(Y)}} = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X \sigma_Y}}$$

Reflète une relation linéaire entre les variables

$$-1 \leq r \leq 1$$

-1.0 forte corrélation négative

0 pas de corrélation (pas de relation linéaire)

1.0 forte corrélation positive

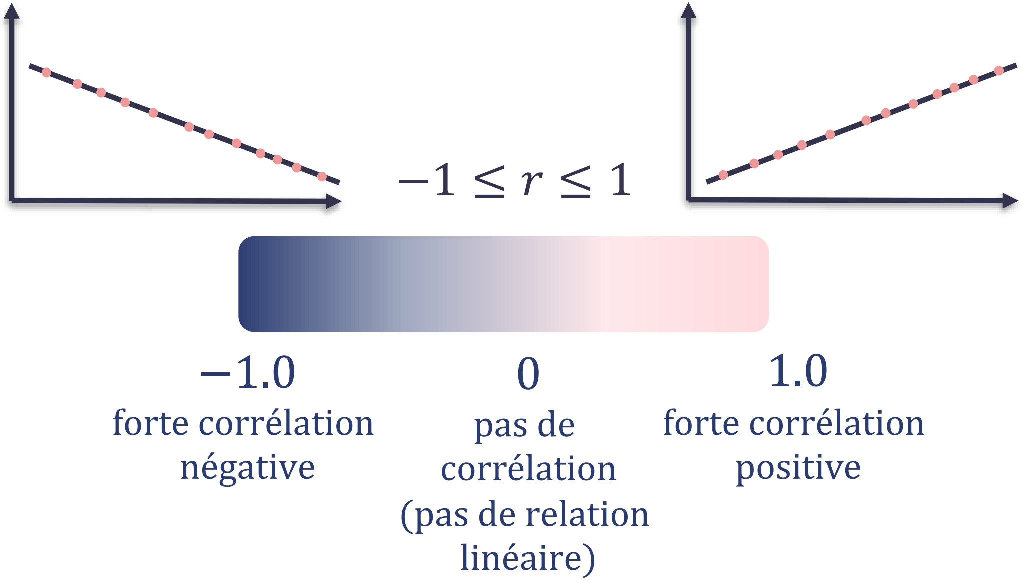
Si X et Y sont indépendantes, alors :

$$\rho(X,Y) = 0$$

Coefficient de corrélation linéaire

$$\boxed{\rho(X,Y) = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X)Var(Y)}} = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X \sigma_Y}}$$

Reflète une relation linéaire entre les variables



$-1 \leq r \leq 1$

-1.0
forte corrélation négative

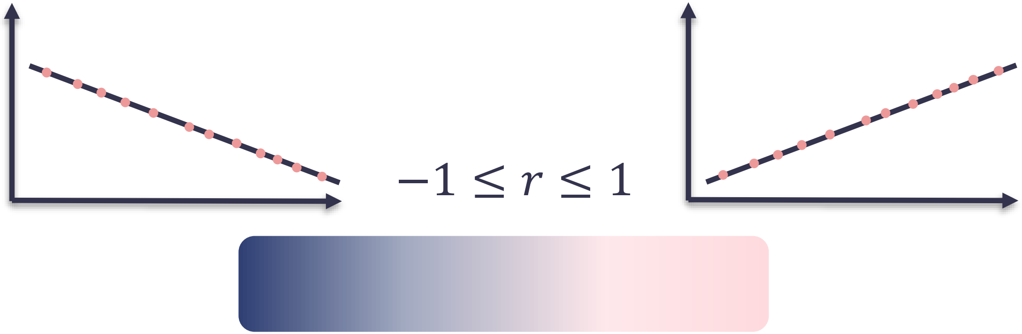
0
pas de corrélation
(pas de relation linéaire)

1.0
forte corrélation positive

Coefficient de corrélation linéaire

$$\rho(X,Y) = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X)Var(Y)}} = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X \sigma_Y}$$

Reflète une relation linéaire entre les variables



$$-1 \leq r \leq 1$$

-1.0
forte corrélation négative

0
pas de corrélation (pas de relation linéaire)

1.0
forte corrélation positive

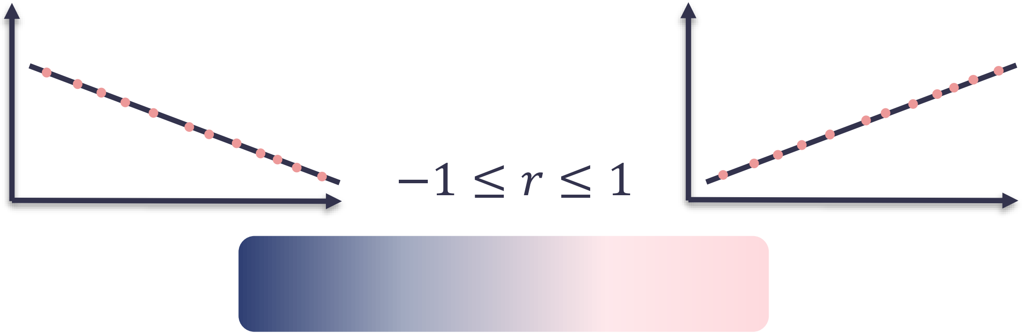
Relation linéaire :

$$\exists(a,b) \in \mathbb{R}^2 : \; Y = aX + b \;\Rightarrow |\rho_{XY}| = 1$$

Coefficient de corrélation linéaire

$$\boxed{\rho(X,Y) = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X)Var(Y)}} = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X \sigma_Y}}$$

Reflète une relation linéaire entre les variables



$-1 \leq r \leq 1$

-1.0
forte corrélation négative

0
pas de corrélation (pas de relation linéaire)

1.0
forte corrélation positive

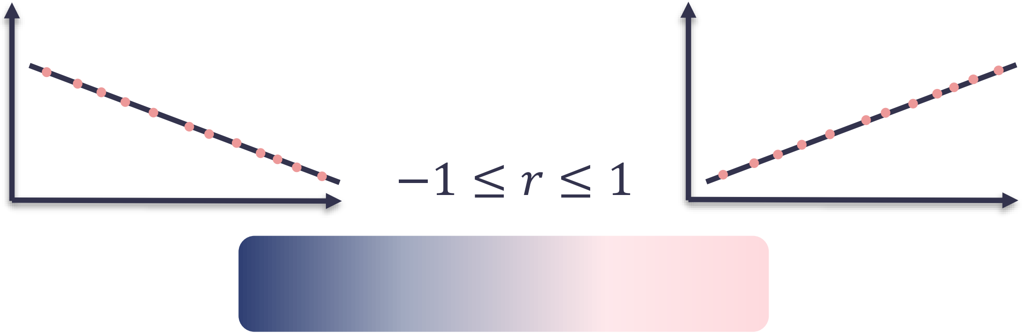
Si $\rho(X,Y) = 0$, alors :
$Var(X+Y) = Var(X) + Var(Y)$

Coefficient de corrélation linéaire

$$\boxed{\rho(X,Y) = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X)Var(Y)}} = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X \sigma_Y}}$$

Reflète une relation linéaire entre les variables

! Corrélation ≠ causalité



$-1 \leq r \leq 1$

-1.0
forte corrélation
négative

0
pas de
corrélation
(pas de relation
linéaire)

1.0
forte corrélation
positive

Cas discret

Cas continue

Moments

Fonction caractéristique et fonction génératrice

Fonction caractéristique

On appelle **fonction caractéristique** (*characteristic function* ou *CF*) du couple de v.a.r. (X, Y) la fonction ϕ_{XY} définie de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{C}$ par :

$$\phi_{XY}(t_1, t_2) = \mathbb{E}\left[e^{i(t_1 X + t_2 Y)}\right]$$

Fonction génératrice

On appelle **fonction génératrice** (*generating function*) du couple de v.a.r. (X, Y) la fonction $G_{XY} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$G_{XY}(s_1, s_2) = \mathbb{E}[s_1^X s_2^Y]$$

Lien entre Fonction génératrice / Fonction caractéristique et Indépendance

1. Soit (X, Y) un couple de v.a.r. de fonction caractéristique ϕ_{XY}. Soit ϕ_X et ϕ_Y les fonctions caractéristiques de X et Y respectivement.

Les v.a.r. X et Y sont indépendantes si et seulement si :

$$\forall\, s, t \in \mathbb{R}, \qquad \phi_{XY}(s,t) = \phi_X(s) \times \phi_Y(t)$$

2. Soit (X, Y) un couple de v.a.r. discrètes de fonction génératrice G_{XY}. Soit G_X et G_Y les fonctions génératrices de X et Y respectivement.

Les v.a.r. X et Y sont indépendantes si et seulement si :

$$\forall\, s, t \in \ [-1, 1], \qquad G_{XY}(s,t) = \ G_X(s) \times \ G_Y(t)$$