Lois conditionnelles - Cas discret

Contents

Exercice 1

On jette deux dés équilibrés. On désigne respectivement par X et par Y le maximum et le minimum des résultats obtenus. Déterminer la loi du couple (X, Y). Les v.a. X et Y sont-elles indépendantes ?

Solution

1. Déterminer la loi du couple (X, Y)**.** Pour un lancer d'un dé équilibré nous savons que les issues possibles sont { ⚀ ⚁ ⚂ ⚃ ⚄ ⚅ } et que les résultats sont équiprobables, i.e. $\mathbb{P}(Z = 1) = \mathbb{P}(Z = 2) = \mathbb{P}(Z = 3) = \mathbb{P}(Z = 4) = \mathbb{P}(Z = 5) = \mathbb{P}(Z = 6) = \frac{1}{6}$. Le nombre total de résultats possibles de deux lancers est 36.

Selon l'énoncé :

- X est le **maximum** des résultats obtenues de deux lancers. Donc X peut prendre les valeurs $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
- Y est le **minimum** des résultats obtenues de deux lancers. Donc Y peut prendre les valeurs $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Si les résultats de deux lancers sont : ⚂ et ⚄. Alors le max des résultats est 5 et le min des résultats est 3.

Remarquons que pour tout $\forall y > x$, la probabilité $\mathbb{P}(X = x, Y = y) = 0$ car le minimum des résultats ne peut pas être supérieur au maximum des mêmes résultats.

Par exemple : soient $X = 1$ et $Y = 1$.

Quelles sont les issues possibles qui donne ces valeurs de X et Y ?

La seule possibilité est d'avoir ⚀ ⚀. Donc :

$$\mathbb{P}(X=1, Y=1) = \frac{\#\{(1,1)\}}{\#total} = \frac{1}{36}$$

Pour tous les autres Y, i.e. $Y \in \{2,3,4,5,6\}$ où $y > x$, la probabilité $\mathbb{P}(X=1, Y=2) = \mathbb{P}(X=1, Y=3) = \mathbb{P}(X=1, Y=4) = \mathbb{P}(X=1, Y=5) = \mathbb{P}(X=1, Y=6) = 0$.

Considérons $X = 2$ et $Y = 1$.

Quelles sont les issues possibles qui donne ces valeurs de X et Y ?

Il existe deux possibilités :

- ⚀ et ⚁
- ⚁ et ⚀

Donc $\mathbb{P}(X=2, Y=1) = \frac{\#\{(1,2),(2,1)\}}{\#total} = \frac{2}{36}$

Considérons $X = 2$ et $Y = 2$. Il existe la seul possibilité : ⚁ et ⚁. Donc $\mathbb{P}(X=1, Y=1) = \frac{\#\{(2,2)\}}{\#total} = \frac{1}{36}$

Pour $\forall y > 2$: $\mathbb{P}(X=2, Y=y) = 0$.

En continuant, on peut remarquer que $\mathbb{P}(X=k, Y=k) = \frac{\#\{(k,k)\}}{\#total} = \frac{1}{36}$, $\forall k \in \{1,2,3,4,5,6\}$.

Construisons la table définissant la fonction de masse jointe de X et Y :

$X \downarrow \backslash Y \rightarrow$	1	2	3	4	5	6
1	$\mathbf{\frac{1}{36}}$	0	0	0	0	0
2	$\frac{2}{36}$	$\mathbf{\frac{1}{36}}$	0	0	0	0
3	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\mathbf{\frac{1}{36}}$	0	0	0
4	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\mathbf{\frac{1}{36}}$	0	0
5	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\mathbf{\frac{1}{36}}$	0
6	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\mathbf{\frac{1}{36}}$

Définissons maintenant les lois marginales de X et Y :

$X \downarrow \backslash Y \rightarrow$	1	2	3	4	5	6	$\mathbb{P}_X$
1	$\frac{1}{36}$	0	0	0	0	0	$\mathbf{\frac{1}{36}}$
2	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	0	0	0	0	$\mathbf{\frac{3}{36}}$
3	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	0	0	0	$\mathbf{\frac{5}{36}}$
4	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	0	0	$\mathbf{\frac{7}{36}}$
5	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	0	$\mathbf{\frac{9}{36}}$
6	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\mathbf{\frac{11}{36}}$
$\mathbb{P}_Y$	$\mathbf{\frac{11}{36}}$	$\mathbf{\frac{9}{36}}$	$\mathbf{\frac{7}{36}}$	$\mathbf{\frac{5}{36}}$	$\mathbf{\frac{3}{36}}$	$\mathbf{\frac{1}{36}}$	1

2. Les v.a. X et Y sont-elles indépendantes ? X et Y sont indépendantes si :

$$\forall i, j: \ \mathbb{P}(X=i, Y=j) = \mathbb{P}_X(X=i) \times \mathbb{P}_Y(Y=j)$$

(i,j)	$\mathbb{P}(X=i,Y=j)$		$\mathbb{P}(X=i) \times \mathbb{P}(Y=j)$
$(1,1)$	$\frac{1}{36}$	$\neq$	$\frac{1}{36} \times \frac{11}{36} = \frac{11}{36^2}$
$(1,2)$	0	$\neq$	$\frac{1}{36} \times \frac{9}{36} = \frac{9}{36^2}$

Donc, X et Y ne sont pas indépendantes.

Exercice 2

On suppose que le nombre N d'oeufs pondus par un batracien suit une loi de Poisson de paramètre λ. De plus, on suppose également que les oeufs pondus ont une évolution indépendante les uns des autres, et que chaque oeuf a une probabilité p d'arriver à éclosion. On note X le nombre d'oeufs éclos.

1. Déterminer la loi du couple aléatoire (X, N).
2. En déduire la loi de X.

Solution

1. Déterminer la loi du couple aléatoire (X, N). Selon l'énoncé $N \sim \mathcal{P}(\lambda)$, c.à.d. :

$$\mathbb{P}(N=n) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}$$

Concernant $X =$ "# oeufs éclos", selon l'énoncé : les oeufs ont une évolution indépendante et chaque oeuf a une probabilité p d'arriver à éclosion. Ainsi, pour chaque oeuf il y a deux issues possibles : arriver à éclosion ou pas (Bernoulli de paramètre p, $\mathcal{B}(p)$).

Donc s'il y a n oeufs pondus, X suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$. On peut formaliser cela à l'aide de probabilités conditionnelles comme suit $[X|N=n] \sim \mathcal{B}(n,p)$, i.e. pour $\forall k \leq n, k \in \mathbb{N}$:

$$\mathbb{P}[X=k|N=n] = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k}$$

Remarque : nous utilisons $k \leq n$ car le nombre d'oeufs éclos k ne peut pas être supérieur au nombre d'oeufs pondus n.

Afin de trouver la loi du couple (X, N), il faut qu'on définisse $\mathbb{P}(X=k, N=n)$. Pour cela on peut se servir de la formule suivante : $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A|B) \times \mathbb{P}(B)$ où $A =$ "$X = k$", $B =$ "$N = n$"

$$\mathbb{P}(X=k, N=n) = \mathbb{P}(X=k|N=n) \times \mathbb{P}(N=n) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \times e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!} =$$

$$e^{-\lambda}\frac{n!\lambda^n}{k!(n-k)!n!} p^k (1-p)^{n-k} = \frac{e^{-\lambda}\lambda^n}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k}$$

2. En déduire la loi de X. L'interprétation de $\mathbb{P}_X(X=k)$: la loi de X correspond à la probabilité qu'il y ait k oeufs éclos ne sachant pas encore le nombre d'eufs pondus n ($n \geq k$).

Pour trouver $\mathbb{P}_X(X=k)$, on va se servir de la formule de probabilité totale.

$$\mathbb{P}_X(X=k)=\sum_{n=k}^{\infty}\mathbb{P}(X=k,N=n)=\sum_{n=k}^{\infty}\frac{e^{-\lambda}\lambda^n p^k(1-p)^{n-k}}{k!(n-k)!}=\frac{e^{-\lambda}p^k}{k!}\sum_{n=k}^{\infty}\frac{\lambda^n(1-p)^{n-k}}{(n-k)!}=$$

$$=\frac{e^{-\lambda}p^k}{k!}\sum_{n=k}^{\infty}\frac{\lambda^{\mathbf{k}}\lambda^{\mathbf{n-k}}(1-p)^{n-k}}{(n-k)!}=\frac{e^{-\lambda}p^k\lambda^k}{k!}\sum_{n=k}^{\infty}\frac{\lambda^{n-k}(1-p)^{n-k}}{(n-k)!}=\frac{e^{-\lambda}(p\lambda)^k}{k!}\sum_{n=k}^{\infty}\frac{(\lambda(1-p))^{n-k}}{(n-k)!}$$

Introduisons $m=n-k$:

$$\mathbb{P}_X(X=k)=\frac{e^{-\lambda}(p\lambda)^k}{k!}\sum_{n=k}^{\infty}\frac{(\lambda(1-p))^{n-k}}{(n-k)!}=\frac{e^{-\lambda}(p\lambda)^k}{k!}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(\lambda(1-p))^{m}}{m!}$$

Pour rappel, la fonction exponentielle e^z peut être présentée sous forme d'une série :

$$e^z=\sum_{t=0}^{\infty}\frac{z^t}{t!}=1+z+\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{6}+...$$

On peut donc remarquer que :

$$\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(\lambda(1-p))^{m}}{m!}=e^{\lambda(1-p)}$$

Dans ce cas :

$$\mathbb{P}_X(X=k)=\frac{e^{-\lambda}(p\lambda)^k}{k!}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(\lambda(1-p))^{m}}{m!}=\frac{e^{-\lambda}(p\lambda)^k}{k!}e^{\lambda(1-p)}=$$

$$=\frac{(p\lambda)^k}{k!}e^{-\lambda+\lambda(1-p)}=\frac{(p\lambda)^k}{k!}e^{-\lambda+\lambda-\lambda p}=\frac{e^{-\lambda p}(p\lambda)^k}{k!}$$

Introduisons $\eta=\lambda p$. Alors :

$$\mathbb{P}_X(X=k)=\frac{e^{-\lambda p}(p\lambda)^k}{k!}=\frac{e^{-\eta}\eta^k}{k!}\sim\mathcal{P}(\eta)=\mathcal{P}(\lambda p)$$

Ainsi, X suit la loi de Poisson de paramètre λp, i.e. $\mathcal{P}(\lambda p)$

Exercice 3

Un dé équilibré est lancé n fois de suite. Soient les événements A_i = "on obtient 1 au i-ème lancer", et B_i = "on obtient 2 au i-ème lancer". Soient alors les v.a.r. $X_i=\mathbf{1}_{A_i}$ et $Y_i=\mathbf{1}_{B_i}$.

1. Quelles sont les lois de X_i et Y_i ?
2. Exprimer les v.a. X et Y représentant respectivement le nombre de fois où on a obtenu 1 et le nombre de fois où on a obtenu 2 sur les n lancers, en fonction des v.a.r. X_i et Y_i. En déduire leurs lois.
3. Calculer $\rho(X,Y)$. Interpréter sa valeur et son signe.

Solution

1. Quelles sont les lois de X_i et Y_i ? Pour un lancer d'un dé équilibré nous savons que les issues possibles sont { ⚀ ⚁ ⚂ ⚃ ⚄ ⚅ } et que les résultats sont équiprobables, i.e. $\mathbb{P}(Z = 1) = \mathbb{P}(Z = 2) = \mathbb{P}(Z = 3) = \mathbb{P}(Z = 4) = \mathbb{P}(Z = 5) = \mathbb{P}(Z = 6) = \frac{1}{6}$.

Alors les évènements A_i et B_i se produisent avec la probabilité $p = \frac{1}{6}$. Chaque X_i et Y_i peuvent avoir deux valeurs possibles : 0 ou 1 en fonction de A_i et B_i repsectivement.

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{si on obtient 1 au } i\text{-ème lancer} \\ 0 & \textit{sinon} \end{cases}, \ \forall i \in [1, n]$$

$$Y_i = \begin{cases} 1 & \text{si on obtient 2 au } i\text{-ème lancer} \\ 0 & \textit{sinon} \end{cases}, \ \forall i \in [1, n]$$

Donc, on est dans le cas de lois de Bernoulli de paramètre $p = \frac{1}{6}$:

$$X_i \sim \mathcal{B}\left(p = \frac{1}{6}\right), \ Y_i \sim \mathcal{B}\left(p = \frac{1}{6}\right)$$

2. Exprimer les v.a. X et Y représentant respectivement le nombre de fois où on a obtenu 1 et le nombre de fois où on a obtenu 2 sur les n lancers, en fonction des v.a.r. X_i et Y_i. En déduire leurs lois. Selon l'énoncé :

- $X =$ "le nombre de fois où on a obtenu 1 sur n lancers"
- $Y =$ "le nombre de fois où on a obtenu 2 sur n lancers"

Donc :

- $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$
- $Y = \sum_{i=1}^{n} X_i$

Ainsi, les deux X et Y représentent les sommes de n Bernoullis, donc elles suivent une loi binomiale de paramètres n et $p = \frac{1}{6}$, i.e. : $X \sim \mathcal{B}\left(n, \frac{1}{6}\right)$ et $Y \sim \mathcal{B}\left(n, \frac{1}{6}\right)$

3. Calculer $\rho(X, Y)$. Interpréter sa valeur et son signe. Selon la formule, le coefficient de corrélation est donnée par :

$$\rho(X, Y) = \frac{Cov(X, Y)}{\sqrt{Var(X)Var(Y)}}$$

On sait que $X \sim \mathcal{B}\left(n, \frac{1}{6}\right)$ et $Y \sim \mathcal{B}\left(n, \frac{1}{6}\right)$. Donc :

- $\mathbb{E}X = \mathbb{E}Y = np = \frac{n}{6}$
- $Var(X) = Var(Y) = np(1 - p) = n\frac{1}{6}(1 - \frac{1}{6}) = n\frac{1}{6} \times \frac{5}{6} = \frac{5n}{36}$

Il reste de trouver la covariance. Selon la formule :

$$Cov(X, Y) = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}X \times \mathbb{E}Y = \mathbb{E}[XY] - \frac{n}{6} \times \frac{n}{6} = \mathbb{E}[XY] - \frac{n^2}{36}$$

Maintenant, il faut trouver $\mathbb{E}[XY]$:

$$\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}\left[\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)\left(\sum_{j=1}^{n} Y_j\right)\right] = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \mathbb{E}[X_i Y_j]$$

Afin de trouver $\mathbb{E}[X_iY_j]$, définissons d'abord X_iY_j :

$$X_iY_j = \begin{cases} 1 & \text{si on obtient 1 au } i\text{-ème lancer ET 2 au } j\text{-ème lancer} \\ 0 & sinon \end{cases}, \ \forall i \in [1, n]$$

Remarquons que si $i = j$, il s'agit de l'évènement si on obtient 1 au i-ème lancer ET 2 au i-ème lancer. L'un exclus l'autre, alors $\mathbb{P}(X_iY_i) = 0$.

Regardons le cas $i \neq j$: $\mathbb{P}(X_i, Y_j) = \mathbb{P}(A_i \cap B_j) = \frac{1}{36}$

Alors $\mathbb{E}[X_iY_j] = \begin{cases} 1 \times \frac{1}{36} + 0 \times \frac{5}{36} = \frac{1}{36} & i \neq j \\ 0 & sinon \end{cases}$

Alors :

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\mathbb{E}[X_iY_j] = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1 j\neq i}^{n}\mathbb{E}[X_iY_j] = n \times (n-1) \times \frac{1}{36} = \frac{n(n-1)}{36}$$

Rassemblons la formule de la covariance :

$$Cov(X, Y) = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}X \times \mathbb{E}Y = \frac{n(n-1)}{36} - \frac{n^2}{36} = \frac{n(n-1) - n^2}{36} =$$

$$= \frac{n^2 - n - n^2}{36} = -\frac{n}{36}$$

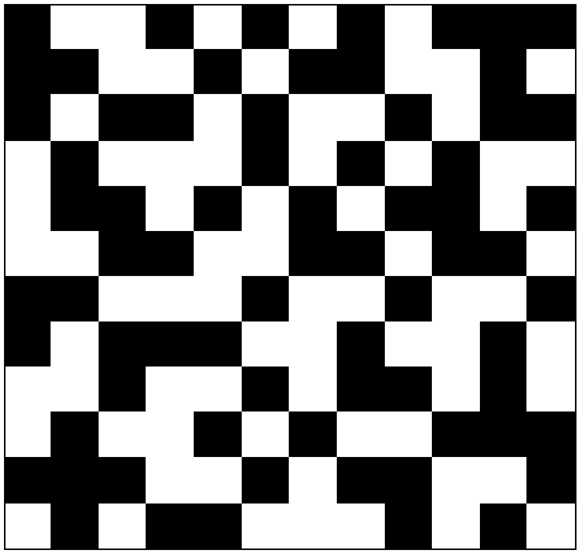
Donc :

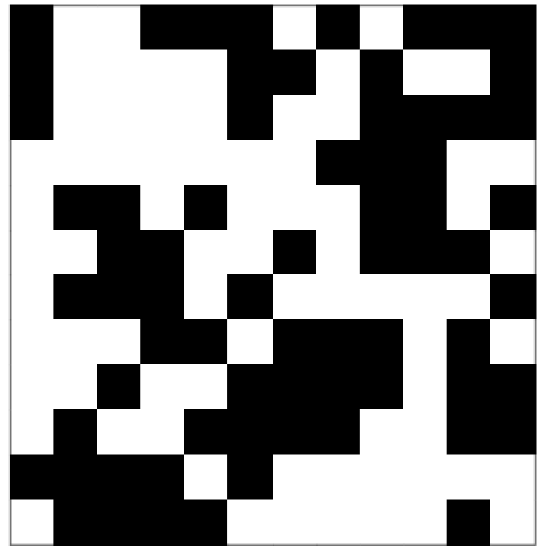
$$\rho(X, Y) = \frac{Cov(X, Y)}{\sqrt{Var(X)Var(Y)}} = \frac{-\frac{n}{36}}{\sqrt{\frac{5n}{36} \times \frac{5n}{36}}} = -\frac{\frac{n}{36}}{\frac{5n}{36}} = -\frac{n \times 36}{36 \times 5n} = -\frac{1}{5}$$

Le nombre de 1 qu'on obtient en lançant un dé est négativement corrélé avec le nombre de 2 : au nombre de 1 plus grand correspond le nombre de 2 plus petit et vice versa.

La corrélation n'est pas forte.

Annexe : perception de l'aléatoire





Les pixels des deux figures ci-dessus ont été générés par des lois de Bernouilli (avec une probabilité 1/2 d'avoir noir et 1/2 d'avoir blanc). Sur l'une des deux figures, les valeurs des pixels ont été générées indépendamment des voisins. Quelle est la figure correspondante ?

Commentaire : quand les valeurs des pixels ont été générées indépendamment des voisins, on ne doit pas percevoir de régularités dans la suite (dans la coloration de matrice). La figure de droite a l'air plus *aléatoire* que celle de gauche ou on remarque qu'une case noir a plus de chance d'être entourée par les cases banches et inversement. Notre perception de l'aléatoire n'est en générale pas bonne, comme de nombreuses études l'ont illustré ces dernières années.

Lien utile : Variables i.i.d. sur Wikipédia