

Théorèmes limites et convergence de variables aléatoires

Diana Nurbakova

Contents

Convergence de variable aléatoire	1
Convergence en loi	2
Convergence en probabilité	3
Exemple	3
Convergence presque sûre	4
Loi faible des grands nombres	5
Loi forte des grands nombres	6
Théorème de la limite centrale	6
Quelques distributions intéressantes	7
Liens utiles	23

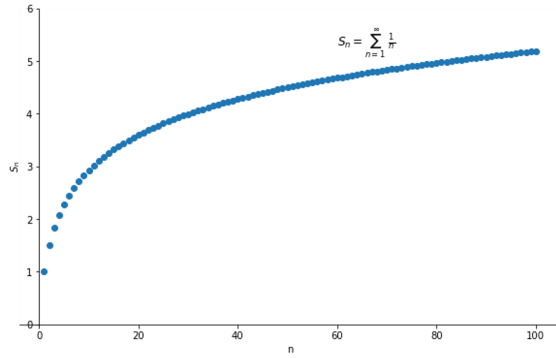
Convergence de variable aléatoire

Souvent dans le monde réel, on se retrouve dans la situation où il y a un certain phénomène aléatoire mais on ignore sa distribution. Il peut être impossible d'observer ce phénomène dans son intégralité directement, e.g. la taille de toutes les personnes sur Terre. Représentons ce phénomène avec une variable aléatoire X .

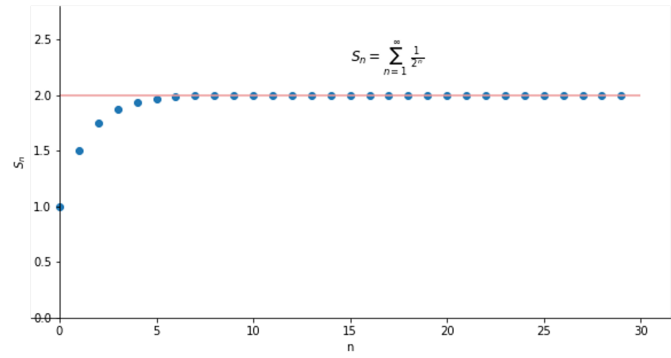
Supposons qu'on peut observer certaines réalisations de ce phénomène, ou on peut prendre des mesures X_1, X_2, \dots, X_n qui vont nous permettre d'avoir une estimation de X . Si on prend l'exemple de la taille des personnes, on peut mesurer la taille de certains nombre de gens dans les pays différents, par exemple.

Il paraît naturel que plus on augmente le nombre de nos mesures n , plus notre estimation de X devient précise. Ainsi on considère que X_n s'approche de X avec $n \rightarrow \infty$. Autrement dit, X_n converge vers X .

Quand on parle des séries numériques, on distingue les *séries divergentes* et les *séries convergentes*. Voici un exemple :



Série divergente



Série convergente

La série $S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{k} + \dots \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$ est divergente.

La série $S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{k^2} + \dots \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 2$ est convergente.

Soit (a_1, a_2, a_3, \dots) une séquence infinie des nombres. On dit que la série $S = \sum_{i=1}^{\infty} a_i$ **converge** ou est **convergente** (en. *converges* ou *convergent series*) vers $l \in \mathbb{R}$, si la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de ses sommes partielles converge vers l pour $\forall n \in \mathbb{N}$, i.e.

$$\forall \epsilon \in \mathbb{R}, \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N : |a_n - l| < \epsilon \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = l$$

Mais qu'est-ce que ça veut dire la convergence de variable aléatoire ?

Par la suite, on va considérer trois type de convergence stochastique :

1. convergence en loi
2. convergence en probabilité
3. convergence presque sûre

On va se servir des définitions basées sur [1].

Covergence en loi

Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de v.a.r. de fonctions de répartition respectives $(F_{X_n})_{n \in \mathbb{N}}$. Soit X une v.a.r. de fonction de répartition F_X .

La suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est dite **converger en loi** (en. *convergence in distribution*) vers X , noté

$$X_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} X$$

si pour $\forall x \in \mathbb{R}$ tel que F_X est continue en x , on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} F_{X_n}(x) = F_X(x)$$

Remarque : dans la notation anglo-saxonne :

$$X_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{d} X$$

Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de v.a.r. de fonctions caractéristiques respectives $(\phi_{X_n})_{n \in \mathbb{N}}$. Soit X une v.a.r. Soit ϕ_X la fonction caractéristique de X .

$X_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} X$ si et seulement si :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \lim_{n \rightarrow +\infty} \phi_{X_n}(t) = \phi_X(t)$$

Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de v.a.r. et X une v.a.r. Soit $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction bornée et continue par morceaux.

$X_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} X$ si et seulement si :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E}[h(X_n)] = \mathbb{E}[h(X)], \forall h$$

Convergence en probabilité

Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de v.a.r.. Soit X une v.a.r.. X et $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

La suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est dite **converger en probabilité** (en. *convergence in probability*) vers X , noté :

$$X_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathbb{P}} X$$

si :

$$\forall \epsilon > 0, \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(|X_n - X| \geq \epsilon) = 0$$

Si la suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers X en probabilité, alors elle converge vers X en loi :

$$X_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathbb{P}} X \Rightarrow X_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} X$$

Remarque : la réciproque n'est pas vraie en général.

Exemple

Considérons un exemple proposé par [2].

Soit X une v.a.r. Soit $X_n = X + Y_n$, où Y_n a l'espérance $\mathbb{E}Y_n = \frac{1}{n}$ et la variance $\text{Var}(Y_n) = \frac{\sigma^2}{n}$, où $\sigma > 0$ est une constante.

Montrons que $X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathbb{P}} X$.

Solution

Pour montrer que $X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathbb{P}} X$ il faut que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(|X_n - X| \geq \epsilon) = 0$.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(|X_n - X| \geq \epsilon) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(|(X + Y_n) - X| \geq \epsilon) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(|Y_n| \geq \epsilon)$$

Qu'est-ce qu'on peut dire par rapport à $|Y_n|$?

Notons que $\forall a, b \in \mathbb{R}$, l'inégalité suivante est vraie :

$$|a + b| \leq |a| + |b|$$

Posons $a = Y_n - \mathbb{E}Y_n$ et $b = \mathbb{E}Y_n$. Alors $|a + b| = |(Y_n - \mathbb{E}Y_n) + \mathbb{E}Y_n| = |Y_n|$. Donc, on obtient :

$$|Y_n| \leq |Y_n - \mathbb{E}Y_n| + |\mathbb{E}Y_n|$$

On peut remplacer $|\mathbb{E}Y_n|$ par sa valeur $\frac{1}{n}$. On obtient :

$$|Y_n| \leq |Y_n - \mathbb{E}Y_n| + \frac{1}{n}$$

Reprenons notre limite :

$$\mathbb{P}(|Y_n| \geq \epsilon) \leq \mathbb{P}\left(|Y_n - \mathbb{E}Y_n| + \frac{1}{n} \geq \epsilon\right) = \mathbb{P}\left(|Y_n - \mathbb{E}Y_n| \geq \epsilon - \frac{1}{n}\right)$$

On peut se servir de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, selon laquelle :

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}X| \geq a) \leq \frac{\text{Var}(X)}{a^2}$$

Dans notre cas, $a = \epsilon - \frac{1}{n}$. Donc :

$$\mathbb{P}\left(|Y_n - \mathbb{E}Y_n| \geq \epsilon - \frac{1}{n}\right) \leq \frac{\text{Var}(Y_n)}{\left(\epsilon - \frac{1}{n}\right)^2} = \frac{\frac{\sigma^2}{n}}{\left(\epsilon - \frac{1}{n}\right)^2} = \frac{\sigma^2}{n\left(\epsilon - \frac{1}{n}\right)^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Alors la condition de la convergence en probabilité est satisfaite et on peut conclure que $X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathbb{P}} X$.

Covergence presque sûre

Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de v.a.r.. Soit X une v.a.r.. X et $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

Soit $A \in \mathcal{A}$ l'ensemble des éventualités $\omega \in \Omega$ telles que la suite numérique $(X_n(\omega))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $X(\omega)$.

La suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est dite **converger presque sûrement** (en. *almost sure convergence*) vers X , noté :

$$X_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{p.s.} X$$

si $\mathbb{P}(A) = 1$.

Remarque : dans la notation anglo-saxonne :

$$X_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{a.s.} X$$

Si la suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers X presque sûrement, alors elle converge vers X en probabilité :

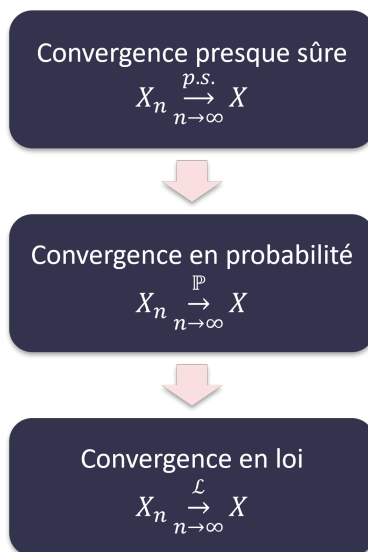
$$X_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{p.s.} X \Rightarrow X_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathbb{P}} X$$

Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une séquence de v.a.r. X_1, X_2, \dots . Si pour tout $\forall \epsilon > 0, \epsilon \in \mathbb{R}$, la condition suivante est satisfaite :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(|X_n - X| > \epsilon) < \infty$$

alors $X_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{p.s.} X$.

On peut résumer les implications des types de convergence de variables aléatoires de la façon suivante :



Loi faible des grands nombres

Soit X_1, \dots, X_n n v.a.r. i.i.d.. La **moyenne de l'échantillon** (en. *sample mean*), notée \bar{X}_n , est une valeur définie par :

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}$$

L'idée principale de la loi des grands nombres est que la moyenne du grand nombre de v.a.r. i.i.d. converge vers l'espérance. Ainsi, si on répète une expérimentation de manière indépendante un grand nombre de fois et on prend une moyenne des résultats obtenus, cette moyenne va être proche de l'espérance théorique.

Loi faible des grands nombres (en. *Weak law of large numbers* ou *WLLN*)

Soit X_1, \dots, X_n n v.a.r. i.i.d. de l'espérance $\mathbb{E}X_i = m < \infty, \forall i = 1, \dots, n$ et la variance $\text{Var}(X_i) = \sigma^2 < \infty, \forall i = 1, \dots, n$ finies. Soit $\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$.

Alors, \bar{X}_n converge en probabilité vers m , $\bar{X}_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathbb{P}} m$, i.e. :

$$\forall \epsilon > 0, \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(|\bar{X}_n - m| \geq \epsilon) = 0$$

Pour le démontrer, on peut se servir de l'inégalité de Tchebychev :

$$\mathbb{P}(|\bar{X}_n - m| \geq \epsilon) \leq \frac{\text{Var}(\bar{X}_n)}{\epsilon^2}$$

Notons que :

$$\text{Var}(\bar{X}_n) = \text{Var}\left(\frac{X_1 + \dots + X_n}{n}\right) = \frac{1}{n^2} \times n \text{Var}(X) = \frac{1}{n^2} \times n \sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n}$$

Alors :

$$\frac{\text{Var}(\bar{X}_n)}{\epsilon^2} = \frac{\sigma^2}{n \epsilon^2} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$$

Loi forte des grands nombres

Loi forte des grands nombres (en. *Strong law of large numbers* ou *LLN*)

Soient X_1, \dots, X_n n v.a.r. i.i.d. de l'espérance m finie. Soit $\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$.

Alors, \bar{X}_n converge presque sûrement vers m , i.e. :

$$\bar{X}_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{p.s.} m$$

Autrement dit, $\exists \Omega_0 \subset \Omega$ avec $\mathbb{P}(\overline{\Omega_0}) = \mathbb{P}(\Omega_0^c) = 0$ tel que $\forall \omega \in \Omega_0$:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \bar{X}_n(\omega) = m$$

Théorème de la limite centrale

L'idée principale du Théorème de la limite centrale est que sous certaines conditions, la somme du grand nombre de v.a.r. peut être approximée par la distribution normale.

Théorème de la limite centrale ou **TLC** (en. *Central Limit Theorem* ou *CLT*)

Soient X_1, \dots, X_n n v.a.r. i.i.d. de moyenne $\mathbb{E}X_i = m < \infty$, $\forall i = 1, \dots, n$ et de variance $\text{Var}(X_i) = \sigma^2 < \infty$, $\forall i = 1, \dots, n$. Soit $S = \sum_{i=1}^n X_i = n\bar{X}_n$.

Alors :

$$\frac{S_n - nm}{\sigma \sqrt{n}} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} Y \sim \mathcal{N}(0, 1)$$

Autrement dit,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(S_n \leq x) = \Phi(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

où $\Phi(x)$ est la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0, 1)$.

Une formule équivalente qui est très utilisée est :

$$\frac{\bar{X} - m}{\sigma / \sqrt{n}} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} Y \sim \mathcal{N}(0, 1)$$

où $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ est la moyenne de X_1, \dots, X_n .

Remarque : on applique la normalisation (standartisation) afin d'assurer l'espérance et la variance finies, car sinon $\mathbb{E}S_n = n\mathbb{E}X_i \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \infty$ et $\text{Var}(S_n) = n\sigma^2 \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \infty$. La variable aléatoire normalisée $Z_n = \frac{S_n - nm}{\sigma \sqrt{n}}$ a l'espérance et la variance finies, $\mathbb{E}Z_n = 0$, $\text{Var}(Z_n) = 1$. Notons que pour tout n fixe, la fonction de densité de Z_n est obtenue en changeant l'échelle et en déplaçant la fonction de densité de S_n . La forme de deux courbes est donc similaire.

Quelle n est considérée comme étant suffisamment grand afin d'appliquer le TLC ?

Dans le cas général, on considère qu'à partir de $n = 30$, on peut utiliser l'approximation par la loi normale en se servant du TLC.

Application du Théorème de la limite centrale

1. Définir la variable aléatoire d'intérêt Y comme la somme de n v.a.r. i.i.d. $X_i, i = 1, \dots, n$:

$$Y = X_1 + X_2 + \dots + X_n$$

2. Trouver $\mathbb{E}Y$ et $\text{Var}(Y)$ comme :

$$\mathbb{E}Y = n\mathbb{E}X_i = nm$$

$$\text{Var}(Y) = n\text{Var}(X_i) = n\sigma^2$$

3. Selon TLC : $\frac{Y - \mathbb{E}Y}{\sqrt{\text{Var}(Y)}} = \frac{Y - nm}{\sqrt{n}\sigma} \sim \mathcal{N}(0, 1)$. Alors, on peut trouver $\mathbb{P}(y_1 \leq Y \leq y_2)$ comme suit :

$$\mathbb{P}(y_1 \leq Y \leq y_2) = \mathbb{P}\left(\frac{y_1 - nm}{\sqrt{n}\sigma} \leq \frac{Y - nm}{\sqrt{n}\sigma} \leq \frac{y_2 - nm}{\sqrt{n}\sigma}\right) \approx \Phi\left(\frac{y_2 - nm}{\sqrt{n}\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{y_1 - nm}{\sqrt{n}\sigma}\right)$$

Quelques distributions intéressantes

Soient X_1, \dots, X_n n v.a.r. i.i.d. de loi de Bernoulli $X_i \sim \mathcal{B}(p)$, $i = 1, \dots, n$. Soit $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$.

Alors :

1. S_n suit la loi binomiale $S_n \sim \mathcal{B}(n, p)$
2. $S_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} Y \sim \mathcal{N}(np, np(1-p))$

On peut voir l'idée du TLC avec la simulation.

Soient X_1, \dots, X_n n v.a.r. i.i.d. de loi de Bernoulli $X_i \sim \mathcal{B}(p)$, $i = 1, \dots, n$. Posons pour l'exemple $p = 0.3$.

De point de vue théorique, pour la loi de Bernoulli $X \sim \mathcal{B}(p = 0.3)$:

- $m = p = 0.3$
- $\text{Var}(X) = p(1-p) = 0.3 \times (1-0.3) = 0.3 \times 0.7 = 0.21$

La fonction de masse de X est donnée par :

$$\begin{cases} \mathbb{P}(X = 1) = p = 0.3 \\ \mathbb{P}(X = 0) = 1 - p = 0.7 \end{cases}$$

Graphiquement, on a :

```
p <- 0.3 # paramètre p de la distribution de Bernoulli
x <- c(0,1) # valeurs possibles de X

# graphique
plot(x, dbinom(x, size = 1, prob = p), main = "Fonction de masse de B(0.3)",
     xlab="x", ylab="P(X=x)",
     col = brewer.pal(5, "YlGnBu")[4], pch = 19, cex = 1.5,
     ylim = c(0, 1), xaxt="n", yaxt="n")
xtick <- c(0, 1)
axis(side=1, at=xtick, labels = FALSE)
text(x=xtick, par("usr")[3], offset = 0.7,
     labels = xtick, pos = 1, xpd = TRUE)
ytick <- c(0, 0.3, 0.7, 1)
axis(side=2, at=ytick, labels = FALSE)
text(par("usr")[1], ytick, offset = 0.7,
```

```

labels = ytick, pos = 2, xpd = TRUE)
lines(x=c(0,0), y=c(0, dbinom(0, size = 1, prob = p)),
      col = brewer.pal(5, "YlGnBu")[4], lwd = 2)
lines(x=c(1,1), y=c(0, dbinom(1, size = 1, prob = p)),
      col = brewer.pal(5, "YlGnBu")[4], lwd = 2)

```

Fonction de masse de B(0.3)



Passons maintenant à la simulation.

L'idée de la simulation est la suivante :

1. Prendre un certain nombre d'échantillons / observations k de n tirages (e.g. $n = \{1, 5, 10, 30, 50, 100\}$) et enregistrer les X_i , $i = 1, \dots, n$
2. Calculer $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$. Nous savons que $S_n \sim \mathcal{B}(n, p)$ (loi binomiale)
3. Normaliser S_n en obtenant $Z_n = \frac{S_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}$
4. Visualiser la fonction de masse de S_n et Z_n

Commençons avec un seul tirage $n = 1$.

Remarque : dans le R il est possible de générer des v.a. suivant la loi binomial avec la fonction `rbinom()`. Pour rappel, un loi de Bernoulli correspond à un tirage de la loi Binomial $\mathcal{B}(n = 1, p)$.

```

p <- 0.3 # probabilité de succès
k <- 10 # nombre d'observations
n <- 1 # nombre de tirages (Bernoulli correspond à un tirage de la loi binomial)
# espérance
m <- n * p
# variance

```



```

var <- n * p * (1 - p)

# fixer la graine (seed) du générateur aléatoire pour la reproductibilité
set.seed(23)

# générer n=k observations de size=n tirages de la loi binomial
x <- rbinom(n=k, size=n, prob=p); x

## [1] 0 0 0 1 1 0 1 1 1 1

# normaliser Sn
zn <- (x - n*p)/(sqrt(n*p*(1 - p))) ; zn

## [1] -0.6546537 -0.6546537 -0.6546537 1.5275252 1.5275252 -0.6546537 1.5275252 1.5275252
## [9] 1.5275252 1.5275252

```

On remarque que parmi les $k = 10$ observations, i.e. valeurs obtenues (d'une manière aléatoire) x , on obtient le nombre d'occurrences suivant :

```

# data frame contenant les effectifs de valeurs
freq <- as.data.frame(table(x)); freq

##   x Freq
## 1 0     4
## 2 1     6

# calcul de la fréquence de l'occurrence de chaque valeur
freq$RelFreq = freq$Freq / sum(freq$Freq)

```

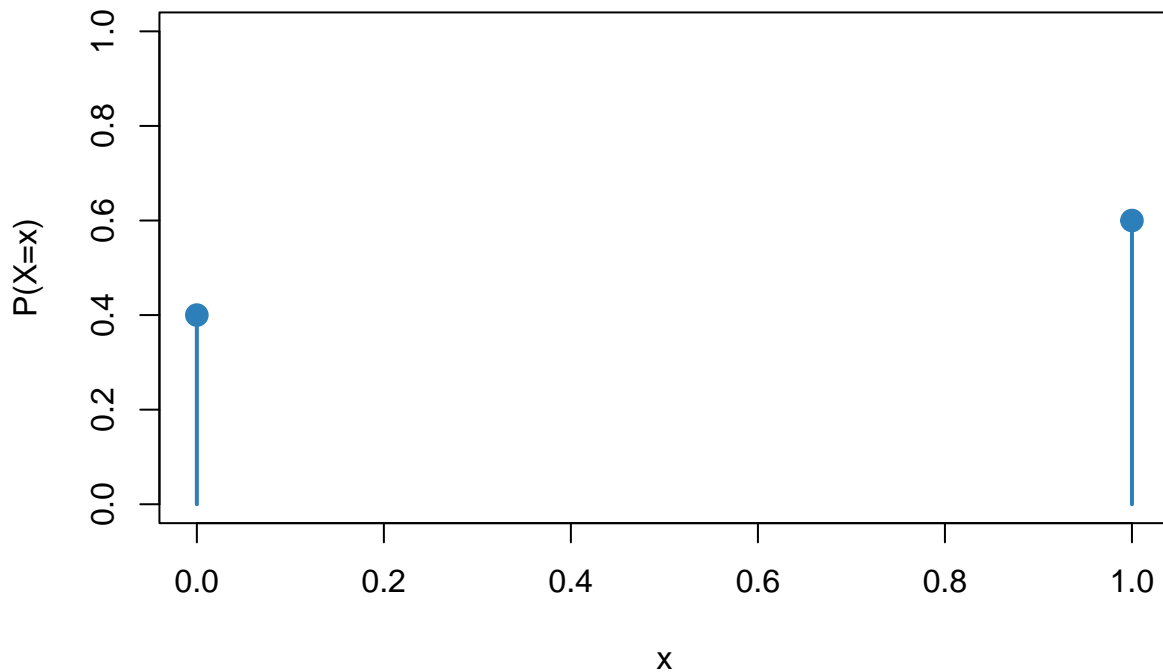
Ce résultat pourrait être visualisé de la façon suivante :

```

# graphique
plot(as.numeric((as.vector(freq$x))), c(freq$RelFreq),
     main = "Fonction de masse empirique de Sn",
     xlab="x", ylab="P(X=x)",
     col = brewer.pal(5, "YlGnBu")[4], pch = 19, cex = 1.5,
     ylim = c(0, 1))
lines(x=c(0,0), y=c(0, freq$RelFreq[1]),
      col = brewer.pal(5, "YlGnBu")[4], lwd = 2)
lines(x=c(1,1), y=c(0, freq$RelFreq[2]),
      col = brewer.pal(5, "YlGnBu")[4], lwd = 2)

```

Fonction de masse empirique de S_n



Nous remarquons que cet état ne correspond pas forcément à la fonction de densité théorique de $X \sim \mathcal{B}(0.3)$.

Varions n et augmentons $k = 200$. Notons que pour n v.a.r., les valeurs possibles de S_n vont être $\{0, 1, \dots, n\}$, où $S_n = n$ si toutes les $X_i = 1, \forall i = 1, \dots, n$.

```
# nombre d'observations (échantillons)
k <- 200
# options pour n
nn <- c(1, 5, 10, 30, 50, 100)
# param p de la distribution de Bernoulli
p <- 0.3
```

Pour la visualisation des simulations on peut se servir de la fonction suivante :

```
getDistPlot <- function(n=50, k=100, p=0.3, standard = FALSE){
  # génération de k observations de v.a. de la loi binomiale
  # avec prob=p, nombre de tirages size=n
  rv <- rbinom(n=k, size=n, prob=p)
  m <- n * p # espérance
  sigma2 <- n * p * (1 - p) # variance
  # standartisé ou pas
  if (standard){
    # standartisation de rv
    rv <- (rv - m) / sqrt(sigma2)
    # loi normale centrée réduite
    xx <- seq(-sqrt(n*p/(1-p))-1, sqrt(n*(1-p)/p) + 1, 0.1)
```

```

y <- dnorm(xx, mean = 0, sd = 1)

pdfLegend <- "pdf N(0, 1)"

} else {
  # loi normale avec les params (np, sqrt(np(1-p)))
  xx <- seq(0, n, 0.1)
  y <- dnorm(xx, mean = m, sd = sqrt(sigma2))

  pdfLegend <- "pdf N(np, np(1-p))"
}

# data frame contenant les effectifs de valeurs
freq <- as.data.frame(table(rv))
# calcul de la fréquence de l'occurrence de chaque valeur
freq$RelFreq = freq$Freq / sum(freq$Freq)
# graphique
if (standard){
  # histogramme
  p.plot <- hist(rv, freq=FALSE,
    main=paste("Histogramme de Sn standardisé, n = ",
      as.character(n), sep = ""),
    xlab="x", ylab="P(X=x)",
    ylim = c(0, max(c(freq$RelFreq, y)) + 0.1),
    col = brewer.pal(5, "YlGnBu")[4],
    breaks = min(round(sqrt(n*p/(1-p))), 5)
  )
} else {
  # scatterplot
  p.plot <- plot(as.numeric((as.vector(freq$rv))), c(freq$RelFreq),
    main = paste("Fonction de masse empirique de Sn, n = ",
      as.character(n), sep = ""),
    xlab="x", ylab="P(X=x)",
    col = brewer.pal(5, "YlGnBu")[4], pch = 19, cex = 1.5,
    ylim = c(0, max(c(freq$RelFreq, y)) + 0.1))
}
# ajout de la fonction de densité de la loi normale N(np, np(1-p))
lines(xx, y, col = brewer.pal(5, "RdPu")[4])
# légende
legend("topright", legend=c("Sn", pdfLegend),
  col=c(brewer.pal(5, "YlGnBu")[4], brewer.pal(5, "RdPu")[4]),
  lty=1, cex=0.8, pch=c(19,20))

return(p.plot)
}

```

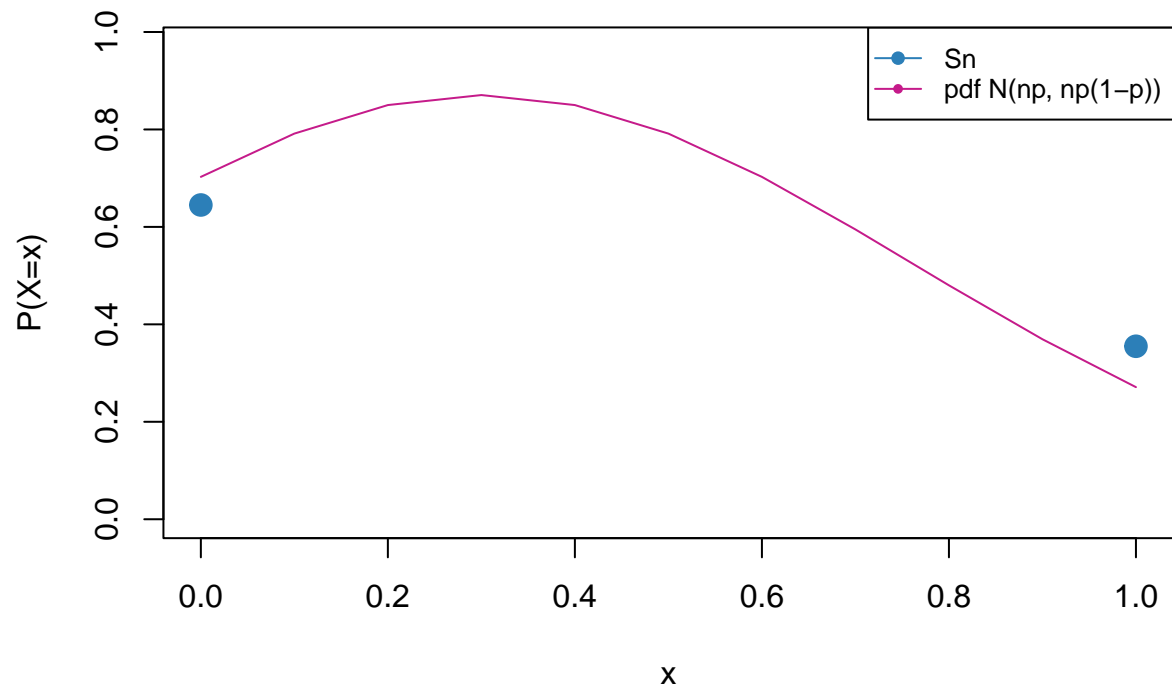
Lançons les simulations :

```

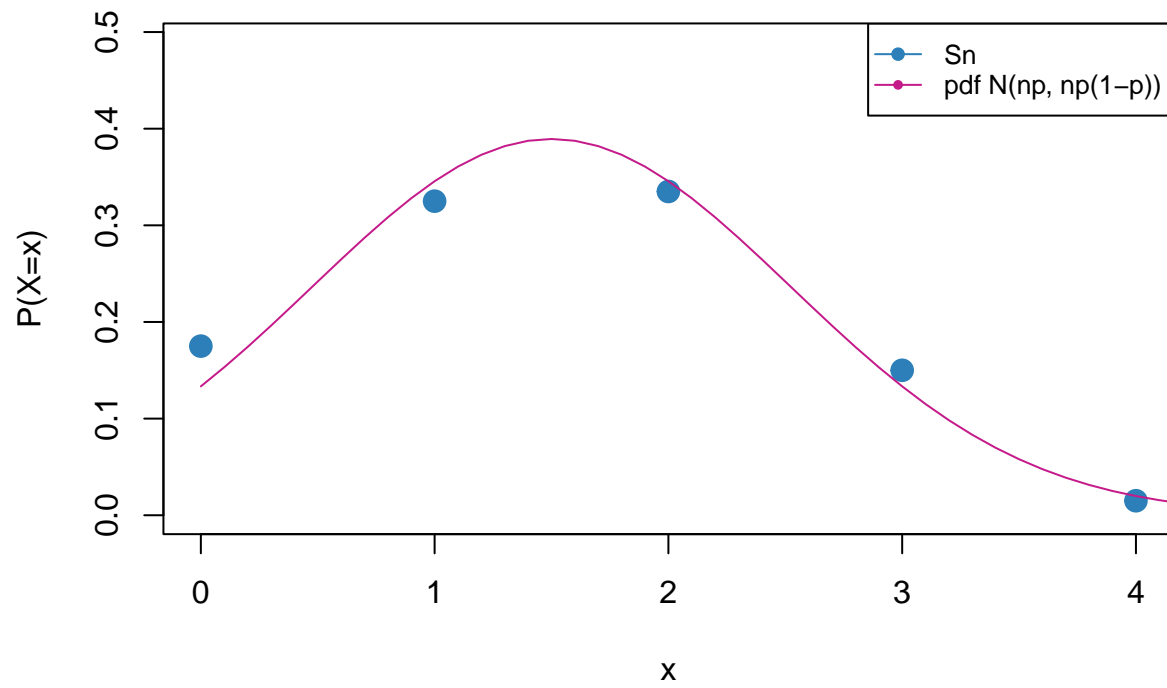
for (n in nn){
  plt <- getDistPlot(n=n, k=k, p=p, standard=FALSE)
}

```

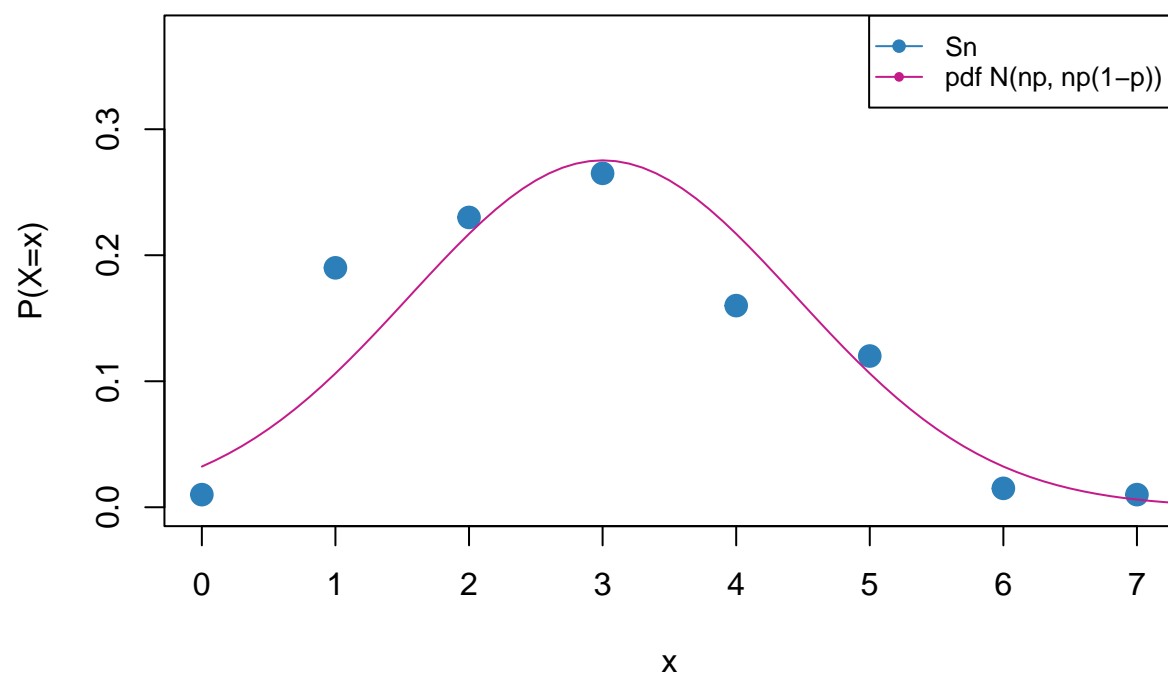
Fonction de masse empirique de S_n , $n = 1$



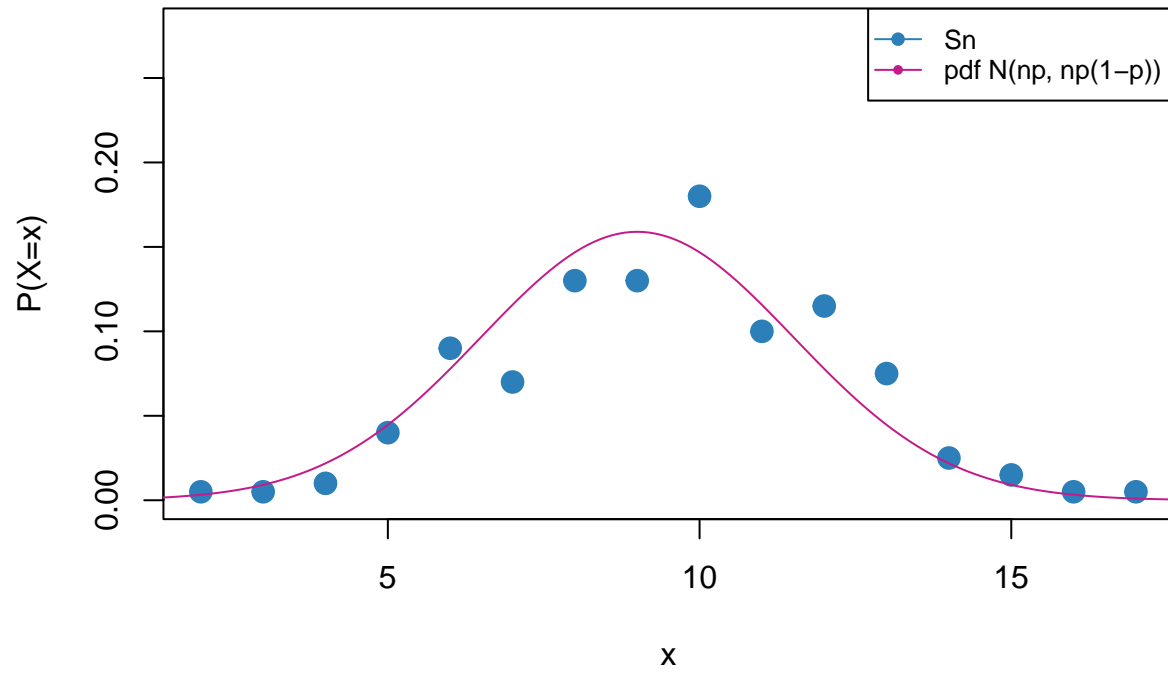
Fonction de masse empirique de S_n , $n = 5$



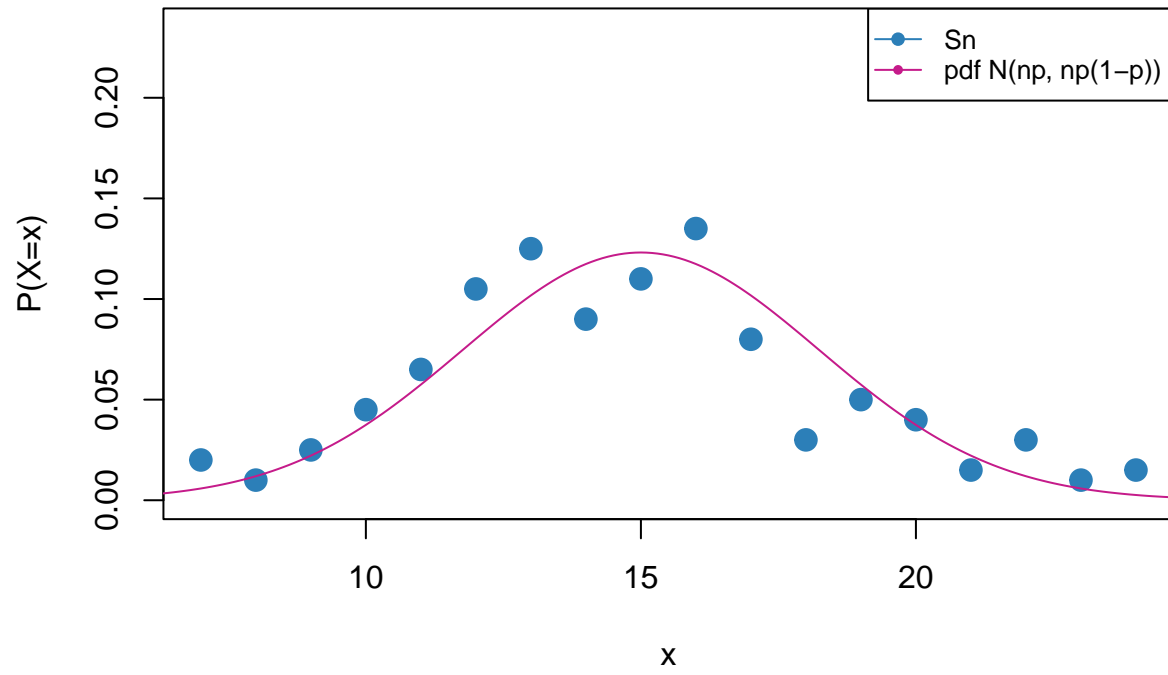
Fonction de masse empirique de S_n , $n = 10$



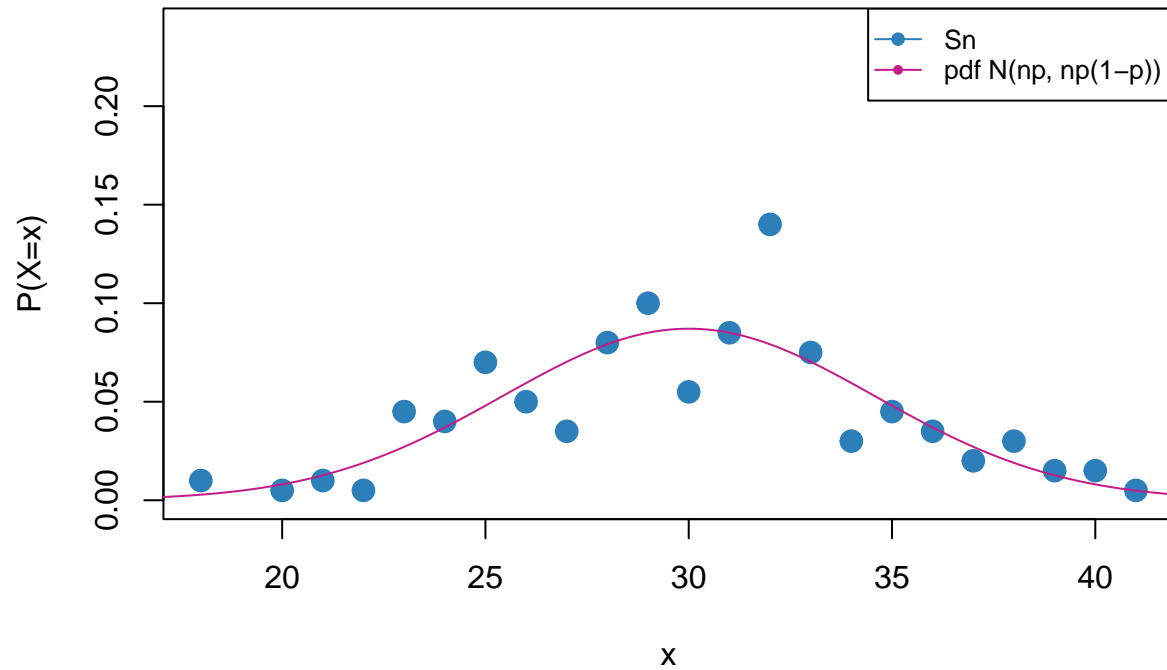
Fonction de masse empirique de S_n , $n = 30$



Fonction de masse empirique de S_n , $n = 50$



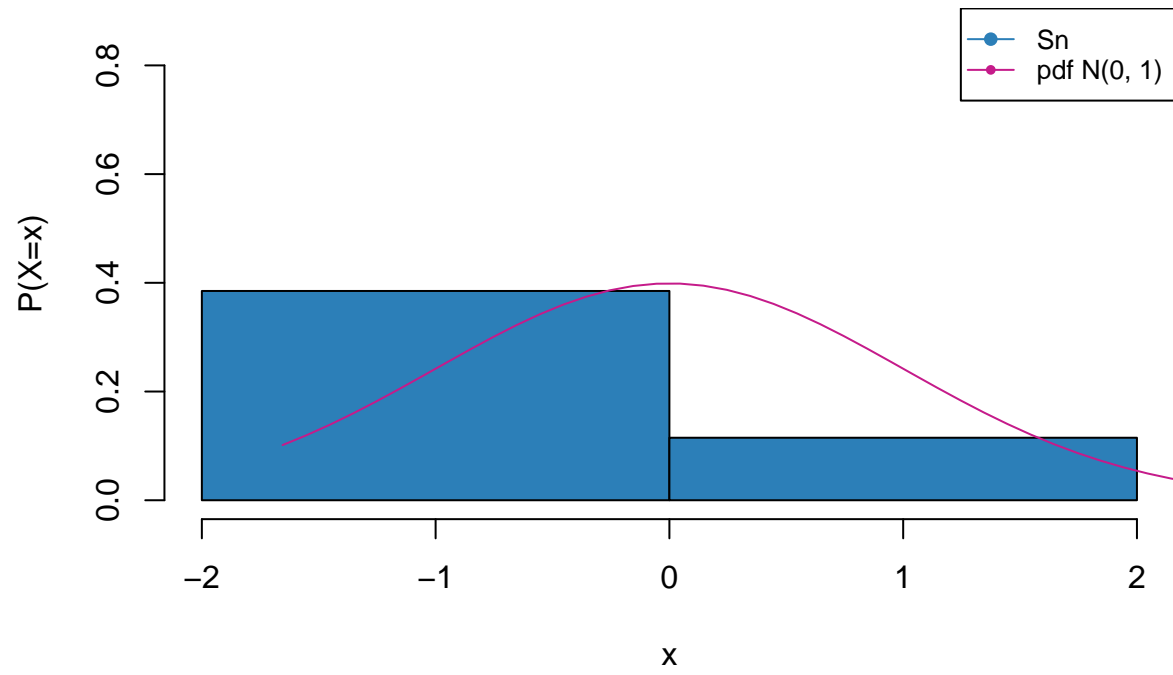
Fonction de masse empirique de S_n , $n = 100$



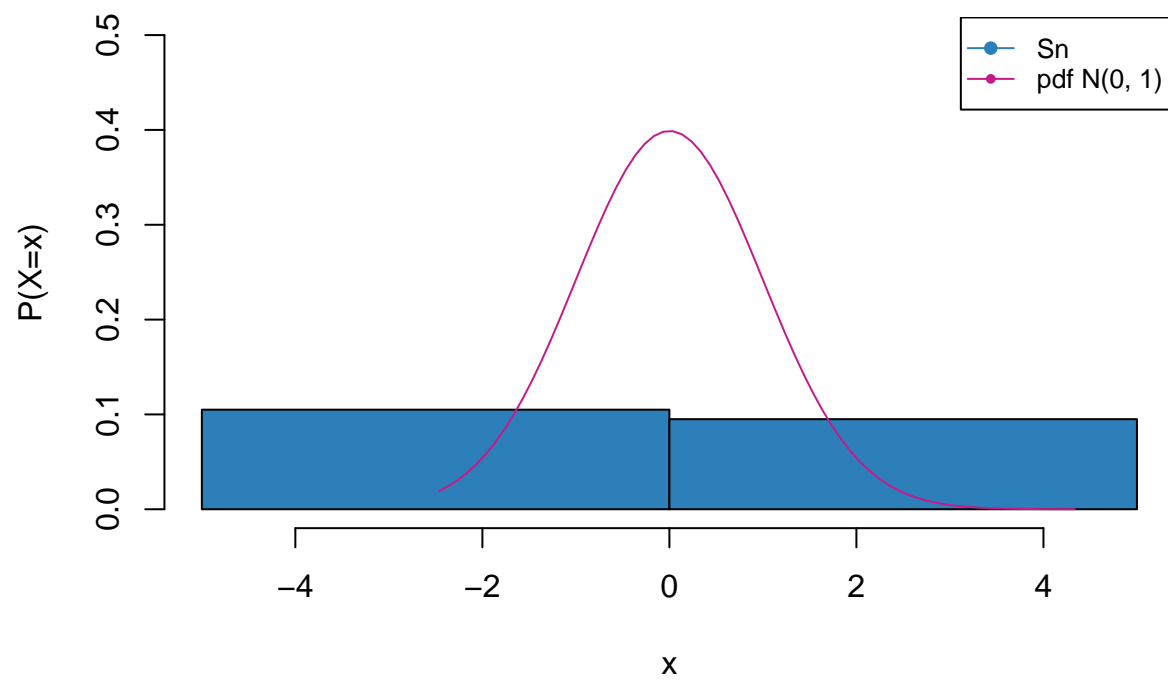
La version standardisée de S_n avec une histogramme :

```
for (n in nn){  
  plt <- getDistPlot(n=n, k=k, p=p, standard=TRUE)  
}
```

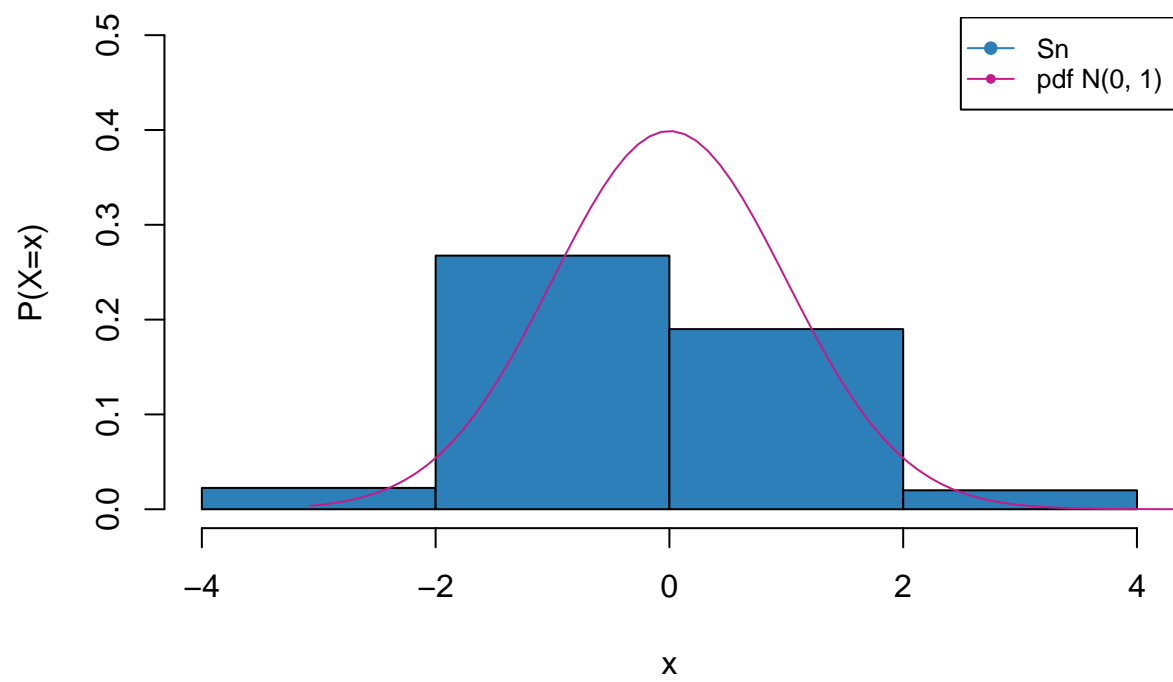
Histogramme de S_n standardisé, $n = 1$



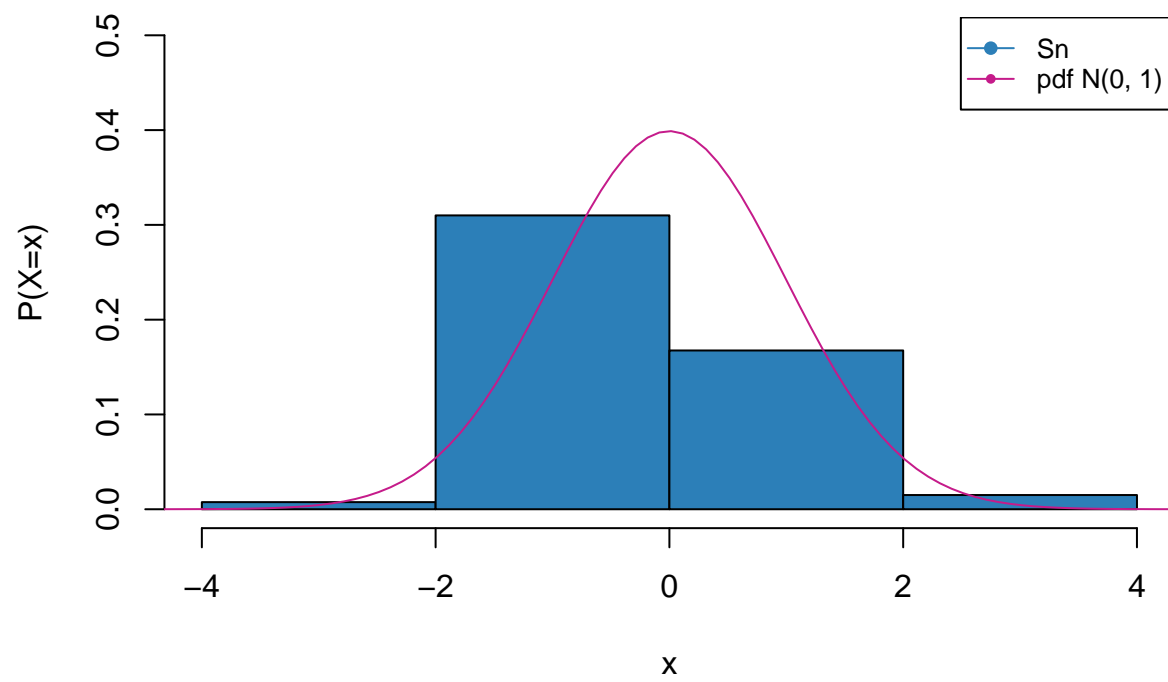
Histogramme de S_n standardisé, $n = 5$



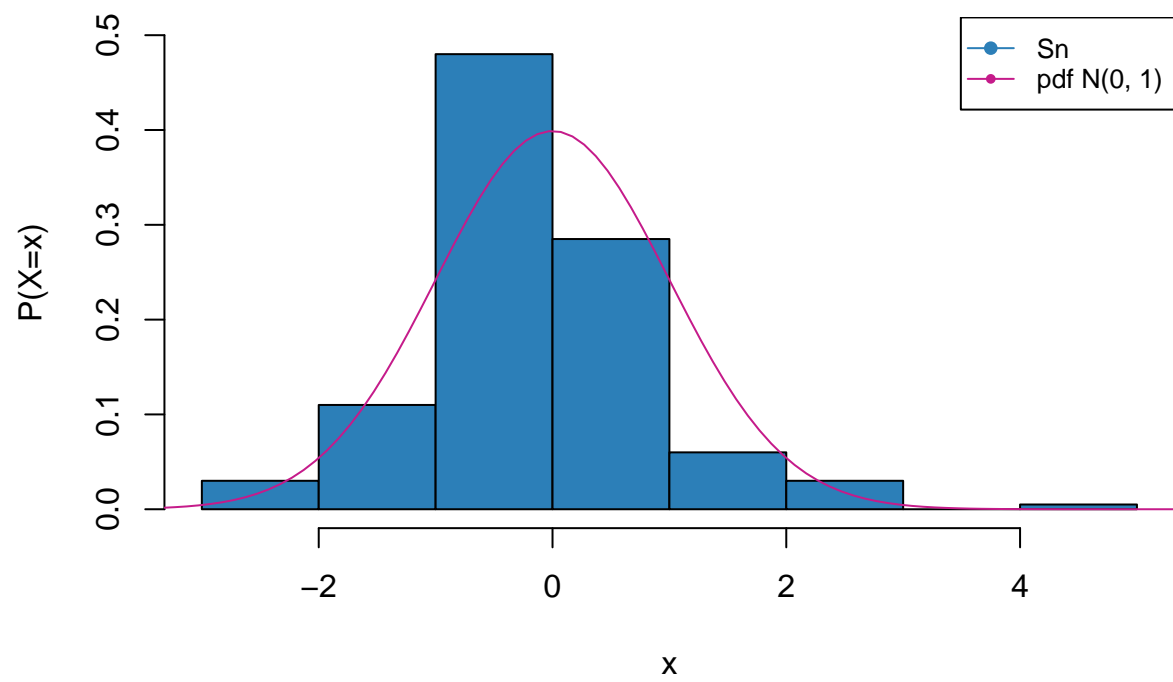
Histogramme de S_n standardisé, $n = 10$



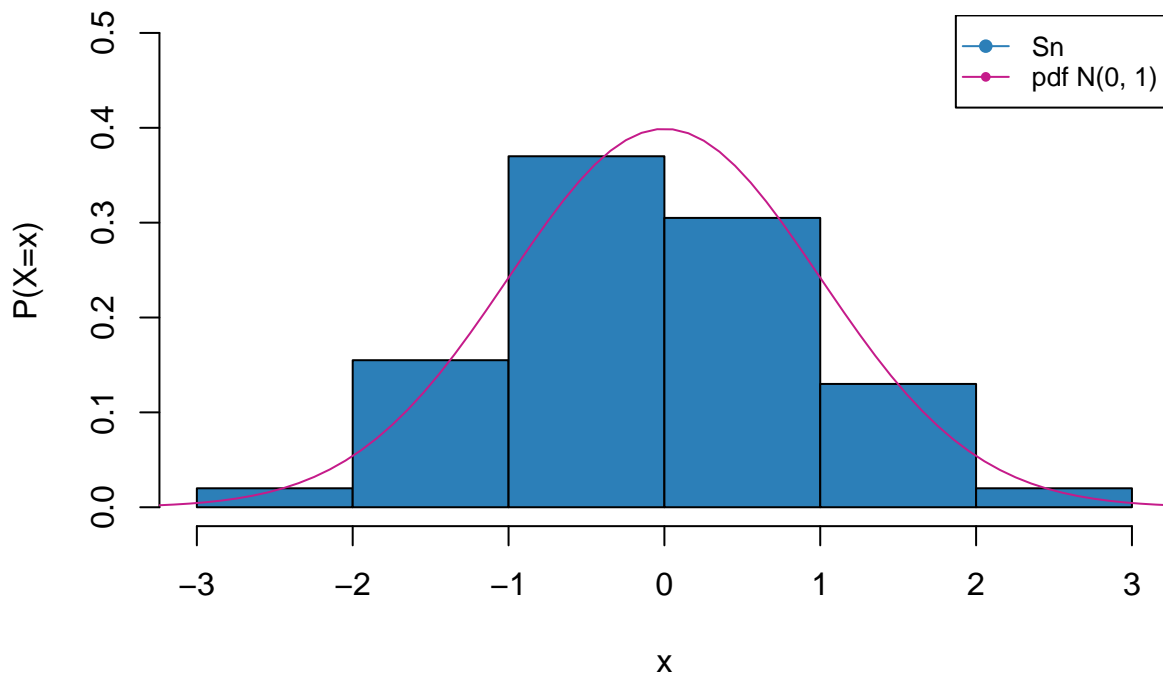
Histogramme de S_n standardisé, $n = 30$



Histogramme de S_n standartisé, $n = 50$



Histogramme de S_n standardisé, $n = 100$



On remarque bien que avec la croissance de n , on s'approche de la loi normale, même si la loi initiale des X_i , $i = 1, \dots, n$ est discrète.

Un autre exemple consiste de la loi de Poisson.

Soient X_1, \dots, X_n n v.a.r. i.i.d. de loi de Poisson $X_i \sim \mathcal{P}(\hat{\mu})$. Soit $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$.

Alors :

1. S_n suit la loi de Poisson $S_n \sim \mathcal{P}(n\hat{\mu})$
2. $S_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} Y \sim \mathcal{N}(n\hat{\mu}, n\hat{\mu})$

Liens utiles

1. Jeremy Orloff, and Jonathan Bloom. *18.05 Introduction to Probability and Statistics*. Spring 2014. Massachusetts Institute of Technology: MIT OpenCourseWare, <https://ocw.mit.edu>. License: Creative Commons BY-NC-SA.

References

- [1] Stéphane Balac and Olivier Mazet. *Introduction aux Probabilités*. URL: <https://perso.univ-rennes1.fr/stephane.balac/publis/polypbs.pdf> (visited on 05/13/2021).
- [2] Hossein Pishro-Nik. *Introduction to Probability, Statistics, and Random Processes*. English. Blue Bell, PA: Kappa Research, LLC, Aug. 2014. ISBN: 9780990637202. URL: <https://www.probabilitycourse.com/>.