INSA INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES LYON

Introduction aux Probabilités

2023/2024

membre de UNIVERSITÉ DE LYON

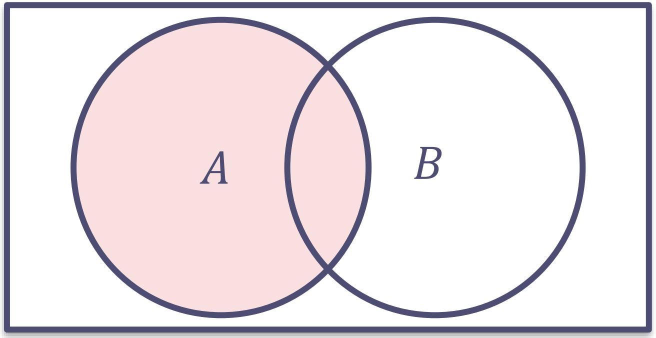
Dénombrements (Counting) : Rappel

	Sans répétition (remise)	Avec répétition (remise)
Avec ordre	$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$	n^p
Sans ordre	$C_n^p = \frac{n!}{p!\,(n-p)!}$	$C_{n+p-1}^p = \frac{(n+p-1)!}{p!\,(n-1)!}$

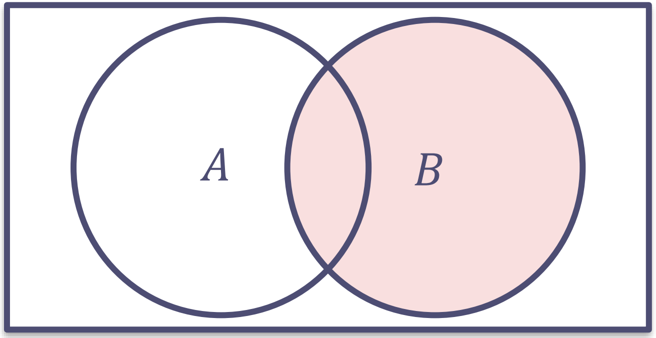
Plan

Théorie des ensembles

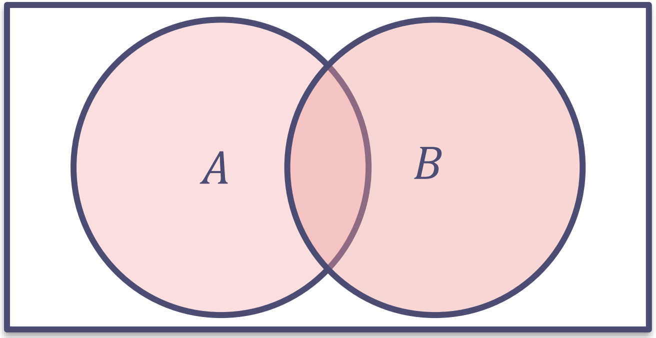
Rappel de la théorie des ensembles



A

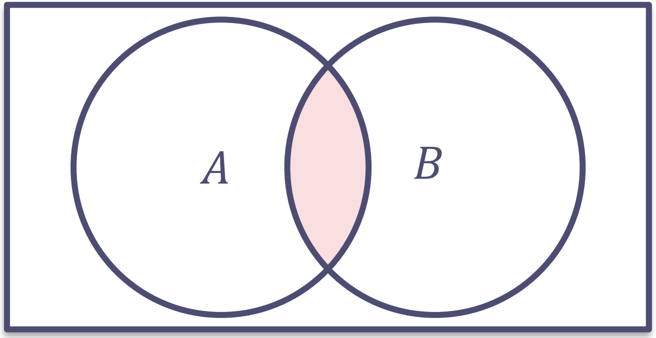


B



$A \cup B$

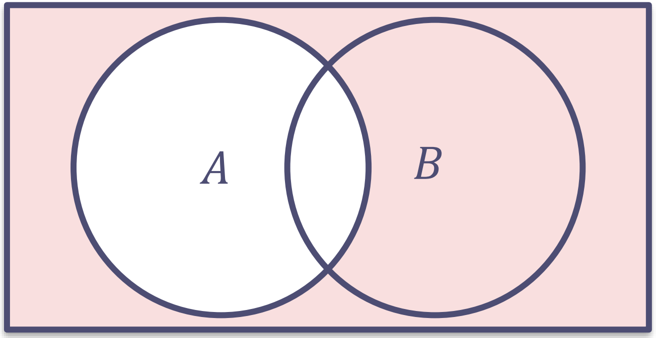
(*Union : « A union B »*)



$A \cap B$

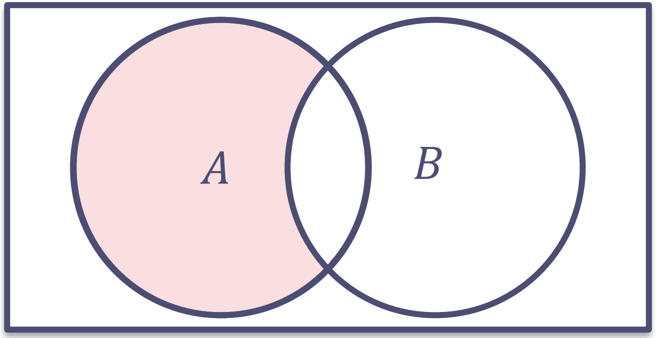
(*Intersection : « A inter B »*)

Rappel de la théorie des ensembles



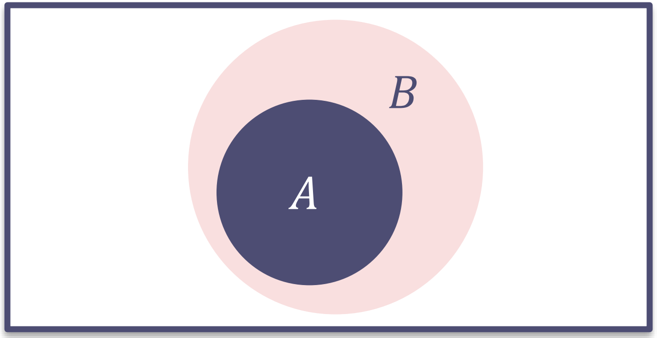
A^c ou $\bar{A}$

(*Complémentaire de* A)



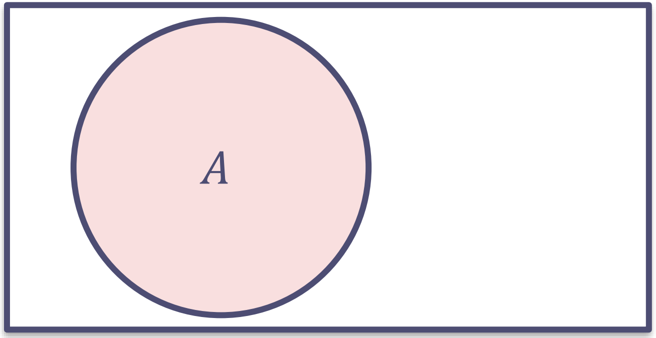
$A \backslash B$ ou $A - B$

(*Différence :* « A moins B »)



$A \subset B$ (*Inclusion :* « A est inclus dans B »)

Rappel de la théorie des ensembles



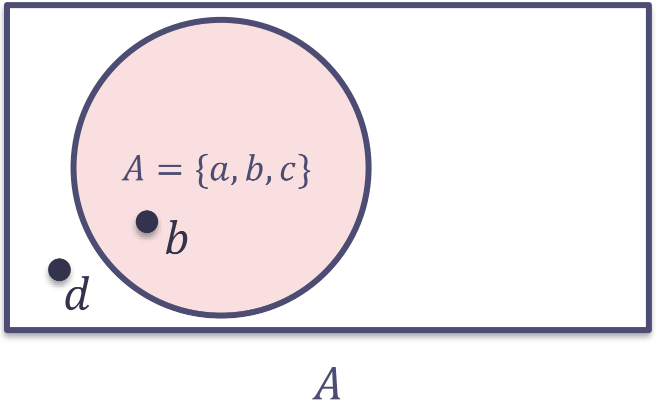
A

Cardinalité (ensemble fini, *cardinality***):**

$$card(A) = |A| = \#A = \#\ éléments\ de\ A \in \mathbb{N}$$

$$A = \{a, b, c\}$$
$$card(A) = 3$$

Rappel de la théorie des ensembles



Cardinalité (ensemble fini, *cardinality***):**

$$card(A) = |A| = \#A = \#\ éléments\ de\ A \in \mathbb{N}$$

$$A = \{a, b, c\}$$
$$card(A) = 3$$

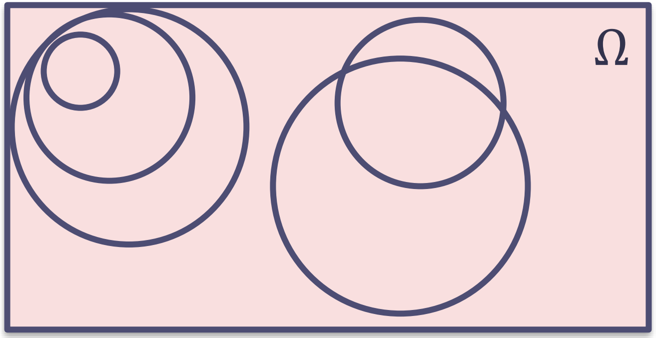
Fonction indicatrice (*indicator function, characteristic function*)**:**

$$\mathbb{I}_A(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \in A \\ 0 \text{ si } x \notin A \end{cases}$$

$$\mathbb{I}_A(b) = 1$$
$$\mathbb{I}_A(d) = 0$$

Rappel de la théorie des ensembles

$\emptyset$ - ensemble vide



$\mathcal{P}(\Omega)$ ensemble des parties de Ω (ensemble de tous les sous-ensembles, *powerset*)

$$\Omega = \{1,2,3\}$$

$$\mathcal{P}(\Omega) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$$

Fondements de la Théorie des Probabilités

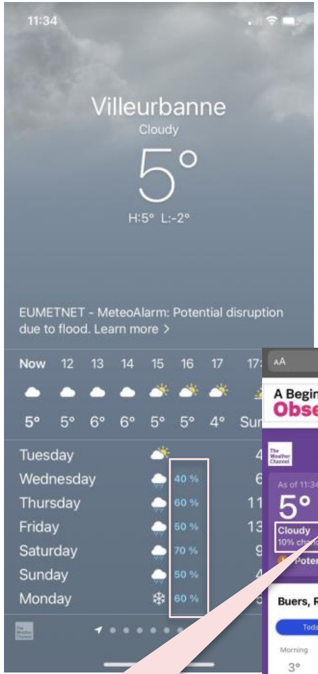
Probabilité, c'est quoi ?

Evénement

Probabilité d'un événement

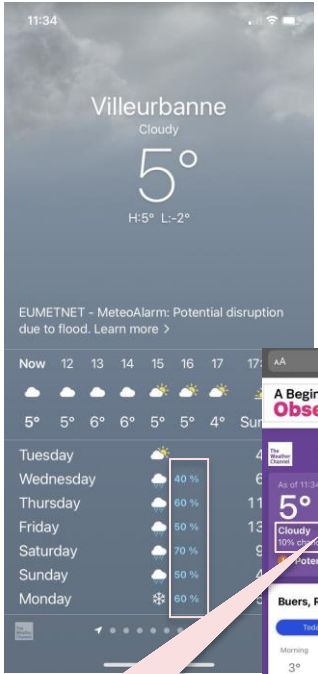
Probabilité de deux événements

Probabilité, c'est quoi ? Vu du quotidien



Ça veut dire quoi ?

Probabilité, c'est quoi ? Vu du quotidien



Ça veut dire quoi ?

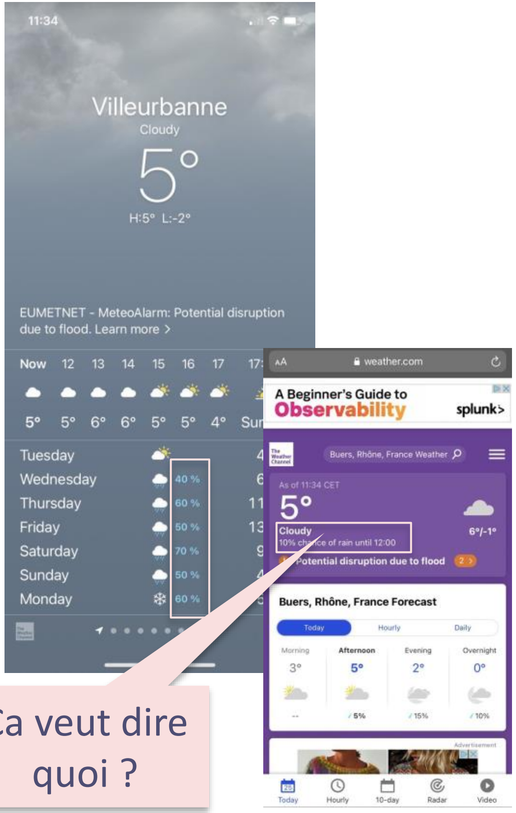
Nous sommes **sûrs** qu'il NE va PAS pleuvoir

Nous sommes **sûrs** qu'il va pleuvoir

0.0
très improbable

1.0
très probable

Probabilité, c'est quoi ? Vu du quotidien



Ça veut dire quoi ?

Nous sommes **sûrs** qu'il NE va PAS pleuvoir

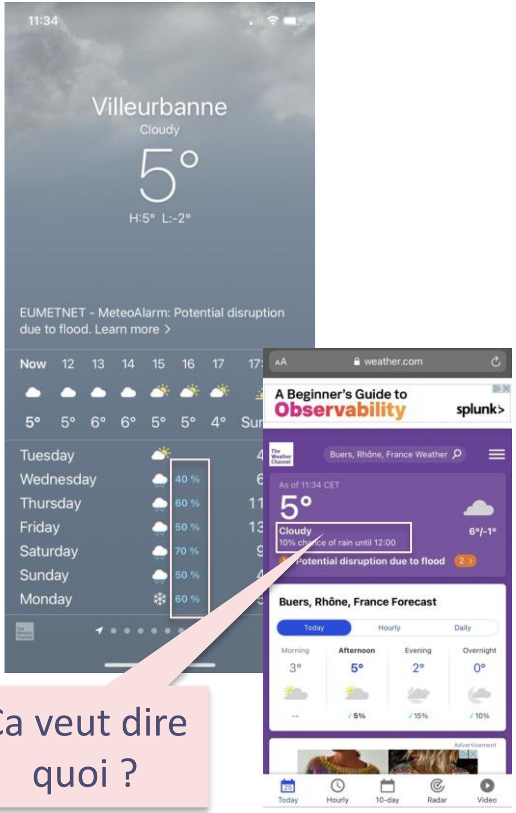
Nous sommes **sûrs** qu'il va pleuvoir

0.0 0.3 1.0

très improbable

Il peut quand même pleuvoir

Probabilité, c'est quoi ? Vu du quotidien



Ça veut dire quoi ?

Donner une idée en moyenne : en regardant les données sur plusieurs jours et en faisant des prédictions, dans 30% de cas en moyenne le résultat va être vrai

Nous sommes **sûrs** qu'il NE va PAS pleuvoir

Nous sommes **sûrs** qu'il va pleuvoir

0.0 0.3

très improbable

Il peut quand même pleuvoir

Probabilité, c’est quoi ? Vu du quotidien

Dans 50% de cas, quand nous lançons une pièce, le côté sorti va être soit pile, soit face

Probabilité, c'est quoi ?

Définition (intuitive) de travail :

La probabilité d'un certain événement A, notée $\mathbb{P}(A)$, est une mesure de la chance (certitude) que cet événement se réalise qui prend la valeur entre 0 et 1.

Nous sommes **sûrs** que l'événement NE va PAS se réaliser

Nous sommes **sûrs** que l'événement se réalise, il a « toutes ses chances »

$$0 \leq \mathbb{P}(A) \leq 1$$

0.0
"très improbable"
"impossible"
"négligeable"

1.0
"très probable"
"presque sûr"
"quasi certain"

Probabilité, c’est quoi ?

Evénement

Probabilité d’un événement

Probabilité de deux événements

Evénement

On considère un dé :

Quels sont les résultats (issues) possibles ?

Evénement

On considère un dé :

Quels sont les résultats (issues) possibles ?

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \text{ ou } S$$

Ensemble des possibles ou **ensemble des éventualités** ou **univers** (*sample space*)

Evénement

On considère un dé :

Diagramme de Venn

Quels sont les résultats (issues) possibles ?

$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ou S

Ensemble des possibles ou **ensemble des éventualités** ou **univers** (*sample space*)

Evénement

On considère un dé :

Fini :

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$\Omega = \{a, b, c\}$$

Quels sont les résultats (issues) possibles ?

Infini :

$$\Omega = \{1, 2, 3, \dots\}$$

$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ou S

Ensemble des possibles ou **ensemble des éventualités** ou **univers** (*sample space*)

Evénement

On considère un dé :

Événement élémentaire ou **issue** ou **épreuve** de l'expérience aléatoire (*outcome*), $\omega \in \Omega$

Quels sont les résultats (issues) possibles ?

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

Ensemble des possibles ou **ensemble des éventualités** ou **univers** (*sample space*)

Evénement

On considère un dé :

Événement élémentaire ou **issue** ou **épreuve** de l'expérience aléatoire (*outcome*), $\omega \in \Omega$

Quels sont les résultats (issues) possibles ?

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

Si la même chance d'avoir un issue en lançant un dé, alors les issues sont *équiprobables* :

$$\forall \omega \in \Omega, \mathbb{P}(avoir\ \omega) = \frac{\#\ possibilité\ avoir\ \omega}{\#\ total\ de\ possibilités} = \frac{1}{card(\Omega)} = \frac{1}{6}$$

Evénement

On considère un dé :

Un événement (*event*) lié à une expérience aléatoire est un sous-ensemble des résultats possibles qui forme les résultats favorables

$$A = \text{"obtenir un résultat pair"}$$
$$= \{2,4,6\} \in \mathcal{P}(\Omega)$$

Quels sont les résultats (issues) possibles ?

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

Evénement

On considère un dé :

Un événement (*event*) lié à une expérience aléatoire est un sous-ensemble des résultats possibles qui forme les résultats favorables

$A =$ "obtenir un résultat pair" $= \{2,4,6\} \in \mathcal{P}(\Omega)$

On fait une expérience en lançant un dé : http://devirtuel.com/

- le résultat $3 \notin \{2,4,6\} \Rightarrow$ l'événement A n'est pas réalisé
- le résultat $2 \in \{2,4,6\} \Rightarrow$ l'événement A est réalisé

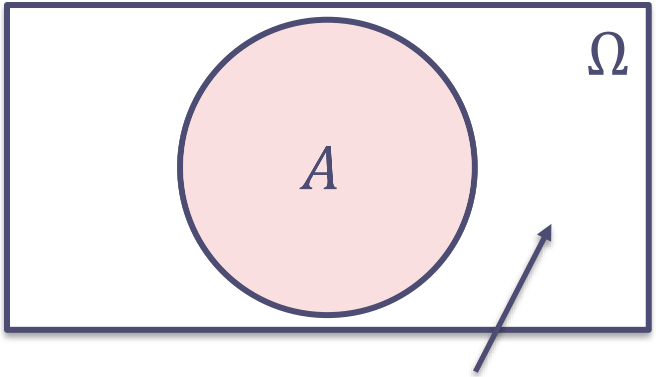
$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

Evénement

On considère un dé :

Un événement (*event*) lié à une expérience aléatoire est un sous-ensemble des résultats possibles qui forme les résultats favorables

$A =$ "obtenir un résultat pair"
$= \{2,4,6\} \in \mathcal{P}(\Omega)$



$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Probabilité, c'est quoi ?

Evénement

Probabilité d'un événement

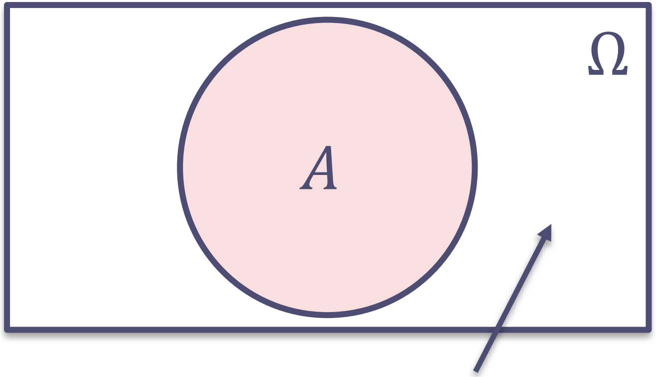
Probabilité de deux événements

Probabilité d'un événement

On considère un dé :

Un événement (*event*) lié à une expérience aléatoire est un sous-ensemble des résultats possibles qui forme les résultats favorables

$$A = \text{"obtenir un résultat pair"}$$
$$= \{2,4,6\} \in \mathcal{P}(\Omega)$$



tous les autres événements, $\bar{A}$

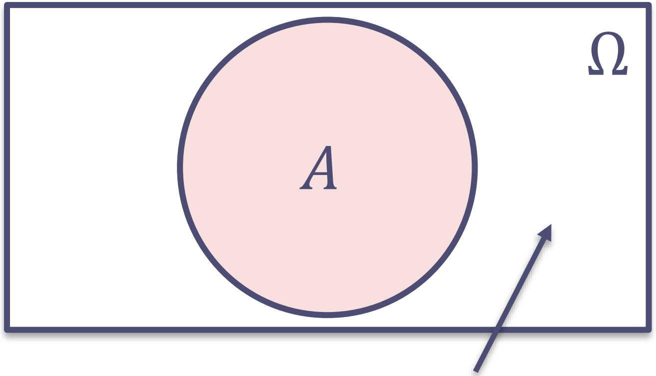
$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$\boxed{\mathbb{P}(A) = \frac{\#\, résultats\ favorables}{\#\, résultats\ possibles} = \frac{card(A)}{card(\Omega)}}$$

Probabilité d'un événement

On considère un dé :

Un événement (*event*) lié à une expérience aléatoire est un sous-ensemble des résultats possibles qui forme les résultats favorables



tous les autres événements, $\bar{A}$

$A =$ "obtenir un résultat pair" $= \{2,4,6\} \in \mathcal{P}(\Omega)$

$$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$$

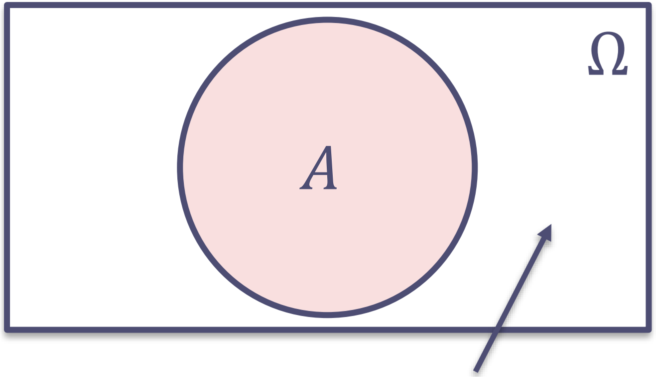
$$\boxed{\mathbb{P}(A) = \frac{\#\,résultats\ favorables}{\#\,résultats\ possibles} = \frac{card(A)}{card(\Omega)}}$$

$$0 \leq \mathbb{P}(A) \leq 1$$

Probabilité d'un événement

On considère un dé :

Un événement (*event*) lié à une expérience aléatoire est un sous-ensemble des résultats possibles qui forme les résultats favorables



tous les autres événements, $\bar{A}$

$A =$ "obtenir un résultat pair" $= \{2,4,6\} \in \mathcal{P}(\Omega)$

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$\boxed{\mathbb{P}(A) = \frac{\#\, résultats\ favorables}{\#\, résultats\ possibles} = \frac{card(A)}{card(\Omega)}} = \frac{card(\{2,4,6\})}{card(\{1,2,3,4,5,6\})} = \frac{3}{6} = 0.5$$

Probabilité d'un événement

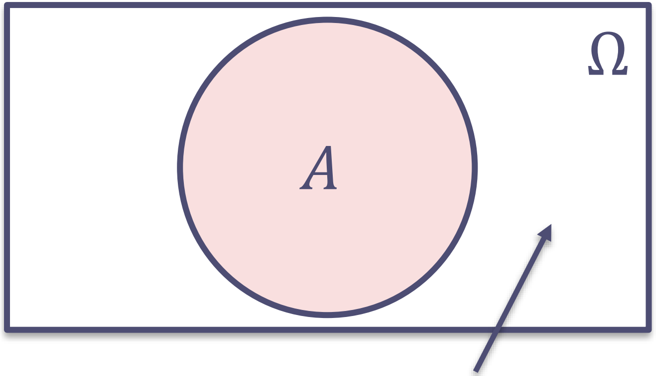
Quelle est la probabilité de tirer un as du jeu de 52 cartes ?

A♦	A♣	A♥	A♠

Probabilité d'un événement

Quelle est la probabilité de tirer un as du jeu de 52 cartes ?

A♦ A♣ A♥ A♠



$A =$ "tirer un as"

tous les autres événements, $\bar{A}$

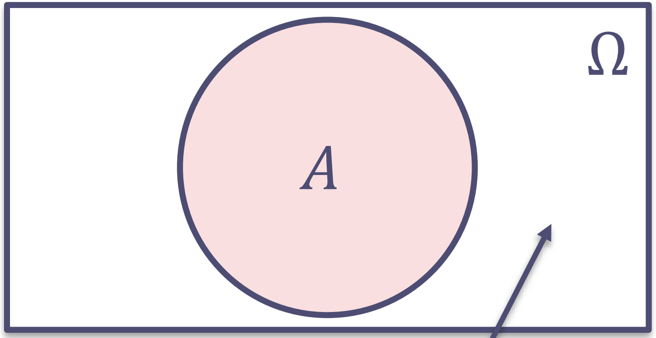
$$\boxed{\mathbb{P}(A) = \frac{\#\,résultats\ favorables}{\#\,résultats\ possibles}}$$

Probabilité d'un événement

Quelle est la probabilité de tirer un as du jeu de 52 cartes ?

A♦ A♣ A♥ A♠

$A =$ "tirer un as"



tous les autres événements, $\bar{A}$

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\#\ résultats\ favorables}{\#\ résultats\ possibles}$$

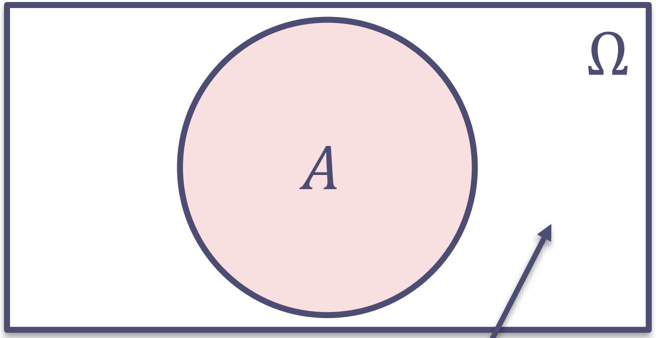
Probabilité d’un événement

Quelle est la probabilité de tirer un as du jeu de 52 cartes ?

A♦ A♣ A♥ A♠

$\underbrace{\hspace{4em}}_{4}$

$A =$ "tirer un as"



tous les autres événements, $\bar{A}$

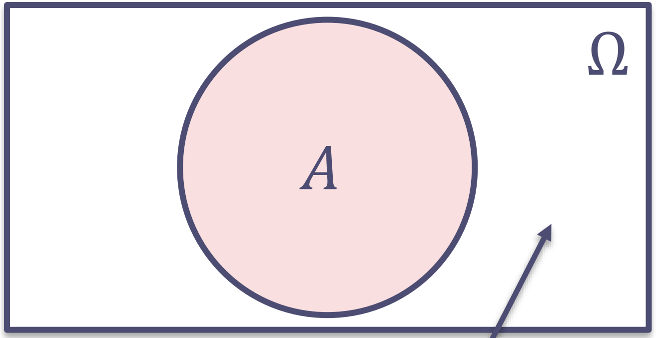
$$\mathbb{P}(A) = \frac{\#\, résultats\ favorables}{\#\, résultats\ possibles}$$

Probabilité d'un événement

Quelle est la probabilité de tirer un as du jeu de 52 cartes ?

$$\underbrace{\text{A♦} \quad \text{A♣} \quad \text{A♥} \quad \text{A♠}}_{4}$$

$A =$ "tirer un as"



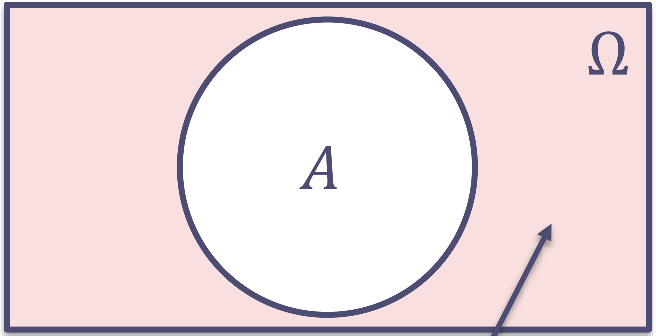
tous les autres événements, $\bar{A}$

$$\boxed{\mathbb{P}(A) = \frac{\#\, résultats\ favorables}{\#\, résultats\ possibles}} = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$$

Probabilité d'un événement complémentaire

On considère un dé :

Un événement (*event*) lié à une expérience aléatoire est un sous-ensemble des résultats possibles qui forme les résultats favorables



tous les autres événements, $\bar{A}$

$A =$ "obtenir un résultat pair" $= \{2,4,6\} \in \mathcal{P}(\Omega)$

$\bar{A} =$ "ne pas obtenir un résultat pair" $= \{1,3,5\} \in \mathcal{P}(\Omega)$

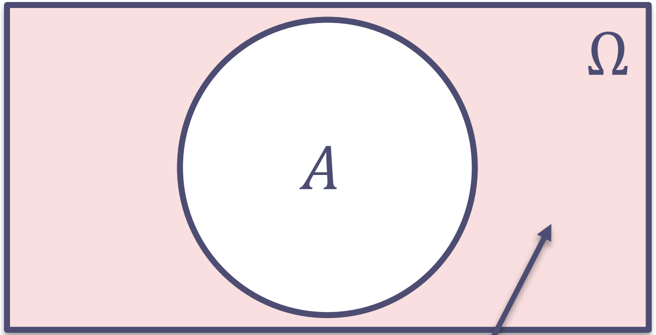
$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$\boxed{\mathbb{P}(\bar{A}) = \frac{\#\, résultats\ favorables}{\#\, résultats\ possibles} = \frac{card(\bar{A})}{card(\Omega)}}$$

Probabilité d'un événement complémentaire

On considère un dé :

Un événement (*event*) lié à une expérience aléatoire est un sous-ensemble des résultats possibles qui forme les résultats favorables



tous les autres événements, $\bar{A}$

$A =$ "obtenir un résultat pair" $= \{2,4,6\} \in \mathcal{P}(\Omega)$

$\bar{A} =$ "ne pas obtenir un résultat pair" $= \{1,3,5\} \in \mathcal{P}(\Omega)$

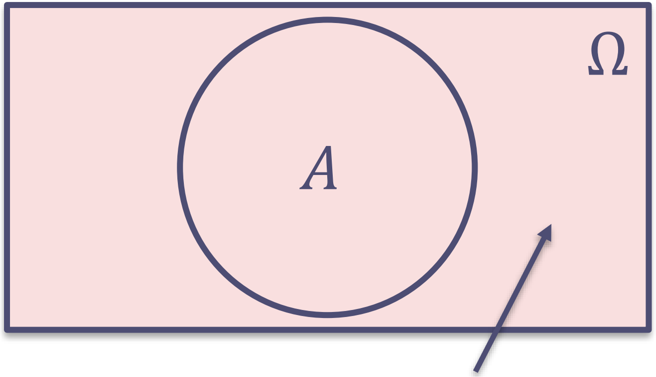
$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$\boxed{\mathbb{P}(\bar{A}) = \frac{\#\, résultats\ favorables}{\#\, résultats\ possibles} = \frac{card(\bar{A})}{card(\Omega)}} = \frac{card(\{1,3,5\})}{card(\{1,2,3,4,5,6\})} = \frac{3}{6} = 0.5$$

Probabilité d'un événement complémentaire

On considère un dé :

Un événement (*event*) lié à une expérience aléatoire est un sous-ensemble des résultats possibles qui forme les résultats favorables



tous les autres événements, $\bar{A}$

$A =$ "obtenir un résultat pair" $= \{2,4,6\} \in \mathcal{P}(\Omega)$

$\bar{A} =$ "ne pas obtenir un résultat pair" $= \{1,3,5\} \in \mathcal{P}(\Omega)$

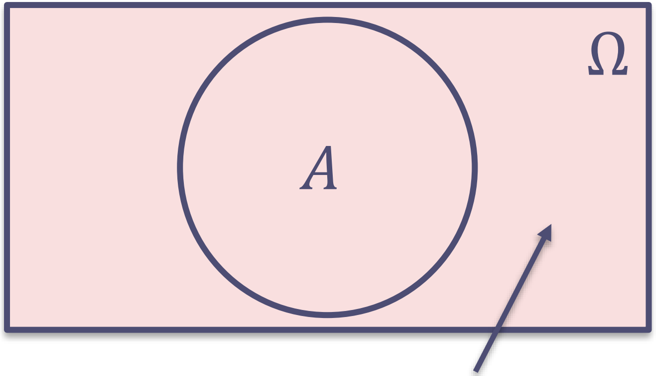
$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$\boxed{\mathbb{P}(\Omega) = \frac{card(\Omega)}{card(\Omega)} = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(\bar{A}) = 1}$$

Probabilité d'un événement complémentaire

On considère un dé :

Un événement (*event*) lié à une expérience aléatoire est un sous-ensemble des résultats possibles qui forme les résultats favorables



tous les autres événements, $\bar{A}$

$A =$ "obtenir un résultat pair" $= \{2,4,6\} \in \mathcal{P}(\Omega)$

$\bar{A} =$ "ne pas obtenir un résultat pair" $= \{1,3,5\} \in \mathcal{P}(\Omega)$

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$\boxed{\mathbb{P}(\Omega) = \frac{card(\Omega)}{card(\Omega)} = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(\bar{A}) = 1}$$

$$\boxed{\mathbb{P}(A) = 1 - \mathbb{P}(\bar{A})}$$

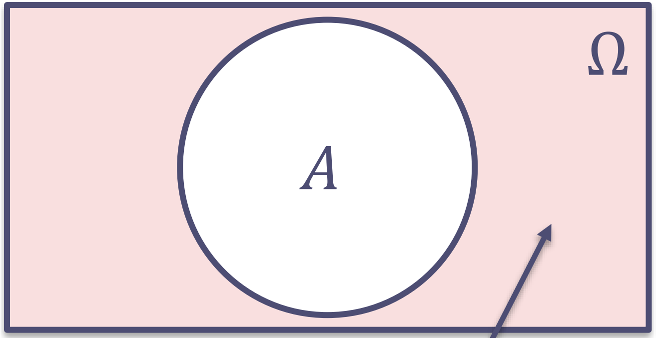
Probabilité d'un événement complémentaire

Quelle est la probabilité de tirer un as du jeu de 52 cartes ?

$$\underbrace{\boxed{A\diamondsuit}\ \boxed{A\clubsuit}\ \boxed{A\heartsuit}\ \boxed{A\spadesuit}}_{4}$$

$$A = \text{"tirer un as"}$$

$$\bar{A} = \text{"ne pas tirer un as"}$$



tous les autres événements, $\bar{A}$

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\#\, résultats\ favorables}{\#\, résultats\ possibles} = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$$

$$\mathbb{P}(\bar{A}) = 1 - \mathbb{P}(A) = 1 - \frac{1}{13} = \frac{12}{13}$$

Probabilité d'un événement complémentaire

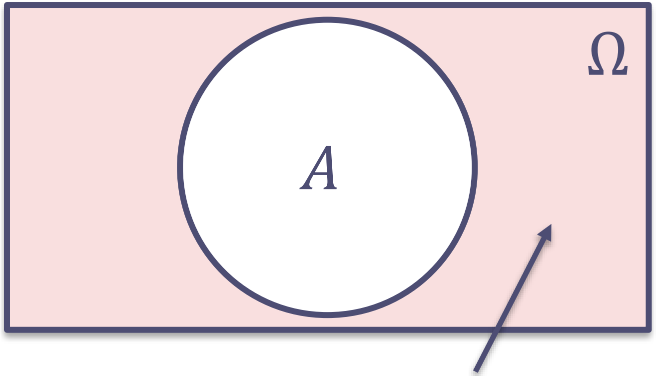
Quelle est la probabilité de tirer un as du jeu de 52 cartes ?

A♦ A♣ A♥ A♠

$\underbrace{\text{A♦ \quad A♣ \quad A♥ \quad A♠}}_{4}$

$A =$ "tirer un as"

$\bar{A} =$ "ne pas tirer un as"



tous les autres événements, $\bar{A}$

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\#\, résultats\ favorables}{\#\, résultats\ possibles} = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$$

$$\mathbb{P}(\bar{A}) = 1 - \mathbb{P}(A) = 1 - \frac{1}{13} = \frac{12}{13} = \frac{52-4}{52} = \frac{48}{52}$$

Probabilité d'un événement

Une station de vélo a 18 vélos de ville et 12 trottinettes électriques. Si nous choisissons 4 transports d'une manière aléatoire, quelle est la probabilité d'avoir 2 vélos de ville et 2 trottinettes ?

Probabilité d'un événement

Une station de vélo a 18 vélos de ville et 12 trottinettes électriques. Si nous choisissons 4 transports d'une manière aléatoire, quelle est la probabilité d'avoir 2 vélos de ville et 2 trottinettes ?

$$A = \text{"avoir 2 vélos et 2 trottinettes"}$$

Quel est le nombre de choix possibles de prendre 4?

Probabilité d’un événement

Une station de vélo a 18 vélos de ville et 12 trottinettes électriques. Si nous choisissons 4 transports d’une manière aléatoire, quelle est la probabilité d’avoir 2 vélos de ville et 2 trottinettes ?

$$A = \text{"avoir 2 vélos et 2 trottinettes"}$$

$$18 + 12 = 30 \text{ transports}$$

Quel est le nombre de choix possibles de prendre 4?

Le nombre de façons de choisir 4 parmi 30 :

$$C_{30}^{4} = \binom{30}{4} = \frac{30!}{4!\,(30-4)!} = \frac{30!}{4!\,26!} = \frac{30 \times 29 \times 28 \times 27}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 35 \times 29 \times 27 = 27{,}405$$

Probabilité d’un événement

Une station de vélo a 18 vélos de ville et 12 trottinettes électriques. Si nous choisissons 4 transports d’une manière aléatoire, quelle est la probabilité d’avoir 2 vélos de ville et 2 trottinettes ?

Quel est le nombre de choix possibles de prendre 4?

$$A = \text{"avoir 2 vélos et 2 trottinettes"}$$

$$18 + 12 = 30 \text{ transports}$$

Le nombre de façons de choisir 4 parmi 30 :

$$C_{30}^{4} = \binom{30}{4} = \frac{30!}{4!\,(30-4)!} = \frac{30!}{4!\,26!} = \frac{30 \times 29 \times 28 \times 27}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 35 \times 29 \times 27 = 27{,}405$$

Choisir 2 vélos de ville

$$C_{18}^{2} = \binom{18}{2}$$

Choisir 2 trottinettes

$$C_{12}^{2} = \binom{12}{2}$$

Probabilité d'un événement

Une station de vélo a 18 vélos de ville et 12 trottinettes électriques. Si nous choisissons 4 transports d'une manière aléatoire, quelle est la probabilité d'avoir 2 vélos de ville et 2 trottinettes ?

$A =$ "avoir 2 vélos et 2 trottinettes"

$18 + 12 = 30$ transports

Quel est le nombre de choix possibles de prendre 4?

Le nombre de façons de choisir 4 parmi 30 :

$$C_{30}^{4} = \binom{30}{4} = \frac{30!}{4!\,(30-4)!} = \frac{30!}{4!\,26!} = \frac{30 \times 29 \times 28 \times 27}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 35 \times 29 \times 27 = 27{,}405$$

Choisir 2 vélos de ville

$$C_{18}^{2} = \binom{18}{2}$$

Choisir 2 de chaque

$$\binom{18}{2} \times \binom{12}{2}$$

Choisir 2 trottinettes

$$C_{12}^{2} = \binom{12}{2}$$

Probabilité d’un événement

Une station de vélo a 18 vélos de ville et 12 trottinettes électriques. Si nous choisissons 4 transports d’une manière aléatoire, quelle est la probabilité d’avoir 2 vélos de ville et 2 trottinettes ?

$A = \text{"avoir 2 vélos et 2 trottinettes"}$

$18 + 12 = 30 \text{ transports}$

Quel est le nombre de choix possibles de prendre 4?

Le nombre de façons de choisir 4 parmi 30 :

$$C_{30}^{4} = \binom{30}{4} = \frac{30!}{4!\,(30-4)!} = \frac{30!}{4!\,26!} = \frac{30 \times 29 \times 28 \times 27}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 35 \times 29 \times 27 = 27{,}405$$

Choisir 2 de chaque

$$\binom{18}{2} \times \binom{12}{2} = \frac{18!}{2!\,(18-2)!} \times \frac{12!}{2!\,(12-2)!} = \frac{18!}{2!\,16!} \times \frac{12!}{2!\,10!} = \frac{18 \times 17 \times 12 \times 11}{2 \times 1 \times 2 \times 1} = 10{,}098$$

Probabilité d’un événement

> Une station de vélo a 18 vélos de ville et 12 trottinettes électriques. Si nous choisissons 4 transports d’une manière aléatoire, quelle est la probabilité d’avoir 2 vélos de ville et 2 trottinettes ?

$A =$ "avoir 2 vélos et 2 trottinettes"

$18 + 12 = 30$ transports

Le nombre de façons de choisir 4 parmi 30 :

$$C_{30}^{4} = \binom{30}{4} = \frac{30!}{4!\,(30-4)!} = \frac{30!}{4!\,26!} = \frac{30 \times 29 \times 28 \times 27}{4 \times 3 \times 2 \times \cdots} = 35 \times 29 \times 27 = 27{,}405$$

résultats possibles

Choisir 2 de chaque

résultats favorables

$$\binom{18}{2} \times \binom{12}{2} = \frac{18!}{2!\,(18-2)!} \times \frac{12!}{2!\,(12-2)!} = \frac{18!}{2!\,16!} \times \frac{12!}{2!\,10!} = \frac{18 \times 17 \times 12 \times 11}{2 \times 1 \times 2 \times 1} = 10{,}098$$

Probabilité d’un événement

Une station de vélo a 18 vélos de ville et 12 trottinettes électriques. Si nous choisissons 4 transports d’une manière aléatoire, quelle est la probabilité d’avoir 2 vélos de ville et 2 trottinettes ?

$$A = \text{"avoir 2 vélos et 2 trottinettes"}$$

$$C_{30}^{4} = \binom{30}{4} = \frac{30!}{4!\,(30-4)!} = \frac{30!}{4!\,26!} = \frac{30 \times 29 \times 28 \times 27}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 35 \times 29 \times 27 = 27{,}405$$

$$\binom{18}{2} \times \binom{12}{2} = \frac{18!}{2!\,(18-2)!} \times \frac{12!}{2!\,(12-2)!} = \frac{18!}{2!\,16!} \times \frac{12!}{2!\,10!} = \frac{18 \times 17 \times 12 \times 11}{2 \times 1 \times 2 \times 1} = 10{,}098$$

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\#\, résultats\ favorables}{\#\, résultats\ possibles} = \frac{10{,}098}{27{,}405} \approx 0.368$$

Probabilité, c’est quoi ?

Evénement

Probabilité d’un événement

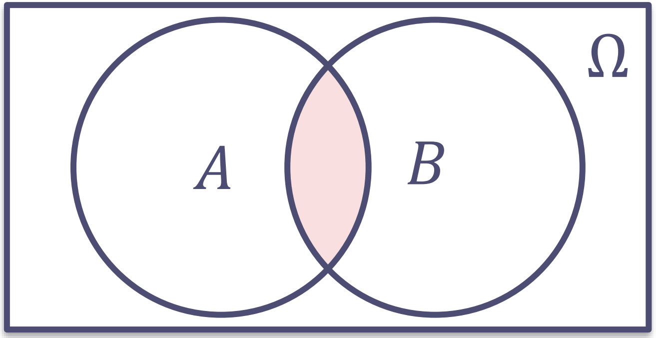
Probabilité de deux événements

Probabilité de 2 événements

On considère un dé : $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$A =$ "obtenir un résultat pair"
$= \{2,4,6\} \in \mathcal{P}(\Omega)$ et
$B =$ "obtenir un résultat ≥ 4"
$= \{4,5,6\} \in \mathcal{P}(\Omega)$

2 événements

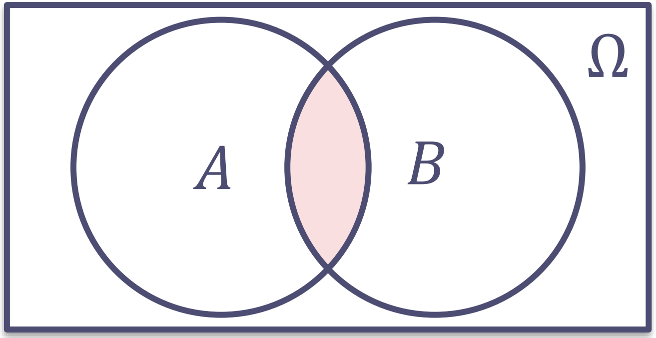


$A \cap B$

Probabilité de 2 événements

On considère un dé : $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$A =$ "obtenir un résultat pair"
$= \{2,4,6\} \in \mathcal{P}(\Omega)$ et
$B =$ "obtenir un résultat ≥ 4"
$= \{4,5,6\} \in \mathcal{P}(\Omega)$

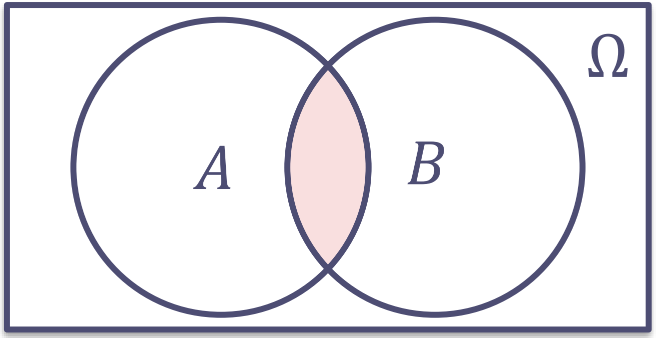


$A \cap B$

$$A \cap B = \{2,4,6\} \cap \{4,5,6\} = \{4,6\}$$

Probabilité de 2 événements

On considère un dé : $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$



$A \cap B$

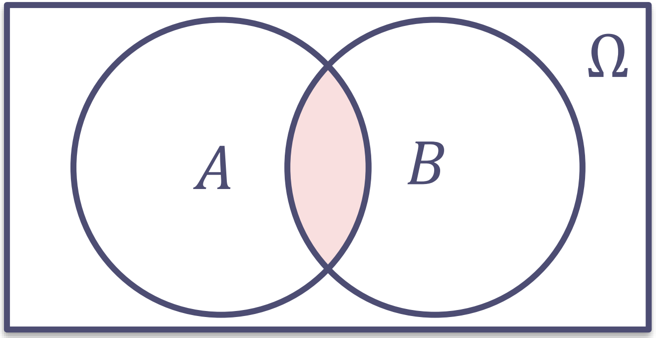
$A =$ "obtenir un résultat pair"
$= \{2,4,6\} \in \mathcal{P}(\Omega)$ et
$B =$ "obtenir un résultat ≥ 4"
$= \{4,5,6\} \in \mathcal{P}(\Omega)$

$$A \cap B = \{2,4,6\} \cap \{4,5,6\} = \{4,6\} \neq \emptyset$$

Probabilité de 2 événements

On considère un dé : $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$A =$ "obtenir un résultat pair" $= \{2,4,6\} \in \mathcal{P}(\Omega)$ et
$B =$ "obtenir un résultat ≥ 4" $= \{4,5,6\} \in \mathcal{P}(\Omega)$



$A \cap B$

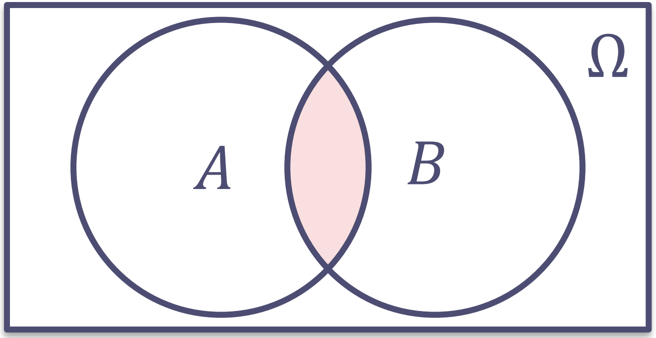
$$A \cap B = \{2,4,6\} \cap \{4,5,6\} = \{4,6\} \neq \emptyset$$

$$\boxed{\mathbb{P}(A \cap B) = \frac{card(A \cap B)}{card(\Omega)}}$$

Probabilité de 2 événements

On considère un dé : $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$A =$ "obtenir un résultat pair" $= \{2,4,6\} \in \mathcal{P}(\Omega)$ et
$B =$ "obtenir un résultat ≥ 4" $= \{4,5,6\} \in \mathcal{P}(\Omega)$



$A \cap B$

$$A \cap B = \{2,4,6\} \cap \{4,5,6\} = \{4,6\} \neq \emptyset$$

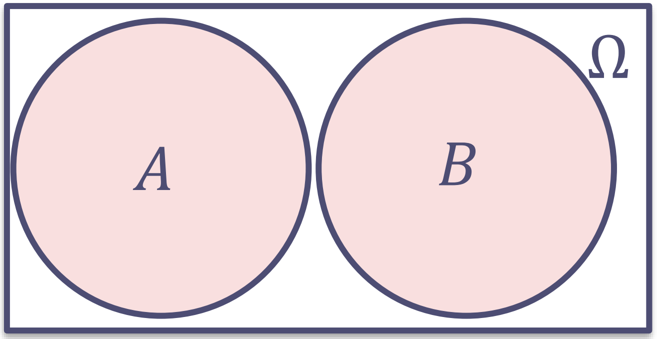
$$\boxed{\mathbb{P}(A \cap B) = \frac{card(A \cap B)}{card(\Omega)}} = \frac{card(\{4,6\})}{card(\{1,2,3,4,5,6\})} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

Probabilité de 2 événements

On considère un dé : $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$A =$ "obtenir un résultat pair" $= \{2,4,6\} \in \mathcal{P}(\Omega)$ ou

$B =$ "obtenir un 3" $= \{3\} \in \mathcal{P}(\Omega)$

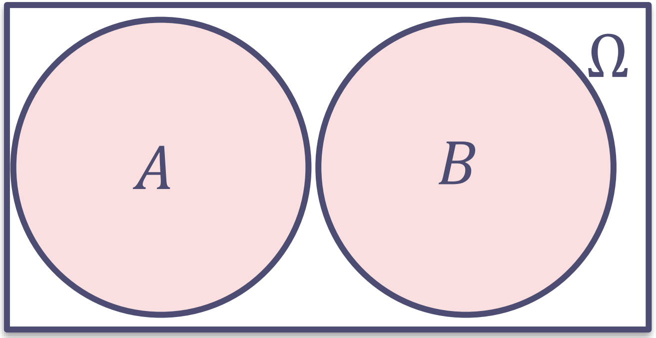


$A \cup B$, si $A \cap B = \emptyset$

Probabilité de 2 événements

On considère un dé : $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$A =$ "obtenir un résultat pair" $= \{2,4,6\} \in \mathcal{P}(\Omega)$ ou
$B =$ "obtenir un 3" $= \{3\} \in \mathcal{P}(\Omega)$



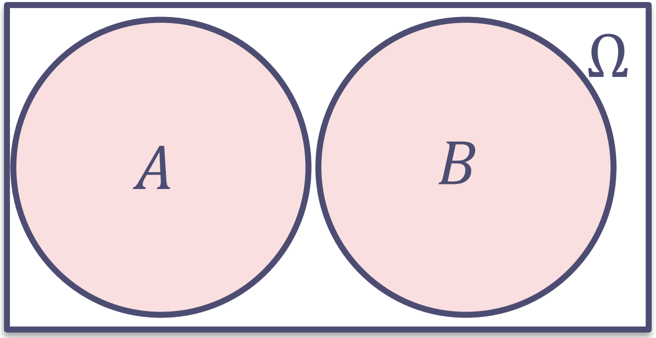
$A \cap B = \emptyset$ (A et B sont disjoints)

$A \cup B = \{2,4,6\} \cup \{3\} = \{2,3,4,6\}$

$A \cup B$, si $A \cap B = \emptyset$

Probabilité de 2 événements

On considère un dé : $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$



$A =$ "obtenir un résultat pair" $= \{2,4,6\} \in \mathcal{P}(\Omega)$ ou
$B =$ "obtenir un 3" $= \{3\} \in \mathcal{P}(\Omega)$

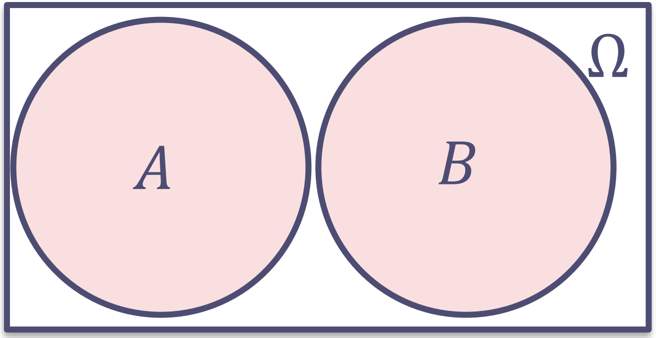
$A \cap B = \emptyset$ (A et B sont disjoints)
$A \cup B = \{2,4,6\} \cup \{3\} = \{2,3,4,6\}$

$A \cup B$, si $A \cap B = \emptyset$

$$\boxed{\mathbb{P}(A \cup B) = \frac{card(A \cup B)}{card(\Omega)} = \frac{card(A) + card(B)}{card(\Omega)} = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)}$$

Probabilité de 2 événements

On considère un dé : $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$



$A =$ "obtenir un résultat pair" $= \{2,4,6\} \in \mathcal{P}(\Omega)$ ou
$B =$ "obtenir un 3" $= \{3\} \in \mathcal{P}(\Omega)$

$A \cap B = \emptyset$ (A et B sont disjoints)
$A \cup B = \{2,4,6\} \cup \{3\} = \{2,3,4,6\}$

$A \cup B$, si $A \cap B = \emptyset$

$$\boxed{\mathbb{P}(A \cup B) = \frac{card(A \cup B)}{card(\Omega)} = \frac{card(A) + card(B)}{card(\Omega)} = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)} = \frac{3}{6} + \frac{1}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

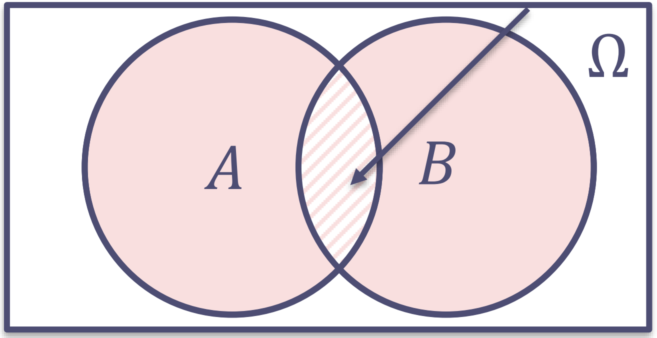
Probabilité de 2 événements

On considère un dé : $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$A =$ "obtenir un résultat pair" $= \{2,4,6\} \in \mathcal{P}(\Omega)$ ou

$B =$ "obtenir 3 ou 6" $= \{3,6\} \in \mathcal{P}(\Omega)$

$A \cap B \neq \emptyset$

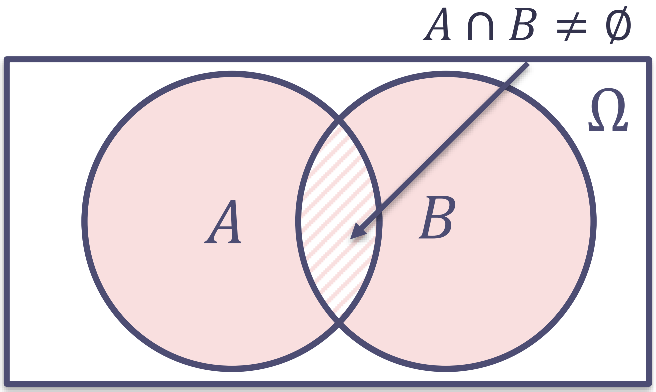


$A \cup B - A \cap B$, si $A \cap B \neq \emptyset$

afin d'éviter de compter les éléments de $A \cap B$ 2 fois

Probabilité de 2 événements

On considère un dé : $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$



$A =$ "obtenir un résultat pair" $= \{2,4,6\} \in \mathcal{P}(\Omega)$ ou

$B =$ "obtenir 3 ou 6" $= \{3,6\} \in \mathcal{P}(\Omega)$

$$A \cap B = \{6\} \neq \emptyset$$

$$A \cup B = \{2,4,6\} \cup \{3,6\} = \{2,3,4,6,\cancel{6}\} = \{2,3,4,6\}$$

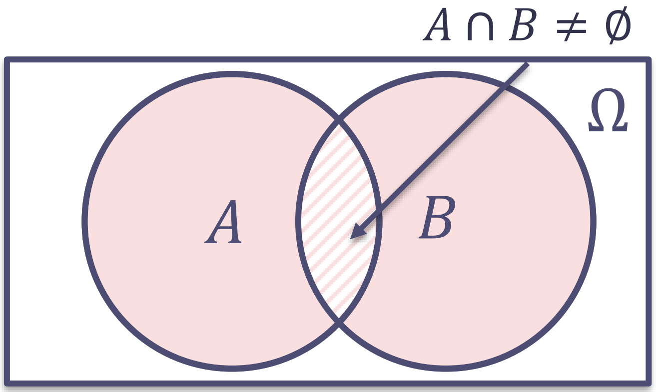
sinon, pas unique

$A \cup B - A \cap B$, si $A \cap B \neq \emptyset$ afin d'éviter de compter les éléments de $A \cap B$ 2 fois

Probabilité de 2 événements

On considère un dé : $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$A =$ "obtenir un résultat pair"
$= \{2,4,6\} \in \mathcal{P}(\Omega)$ ou
$B =$ "obtenir 3 ou 6" $= \{3,6\} \in \mathcal{P}(\Omega)$



$$A \cap B = \{6\} \neq \emptyset$$

$$A \cup B = \{2,4,6\} \cup \{3,6\} = \{2,3,4,6,\cancel{6}\} = \{2,3,4,6\}$$

sinon, pas unique

$A \cup B - A \cap B$, si $A \cap B \neq \emptyset$ afin d'éviter de compter les éléments de $A \cap B$ 2 fois

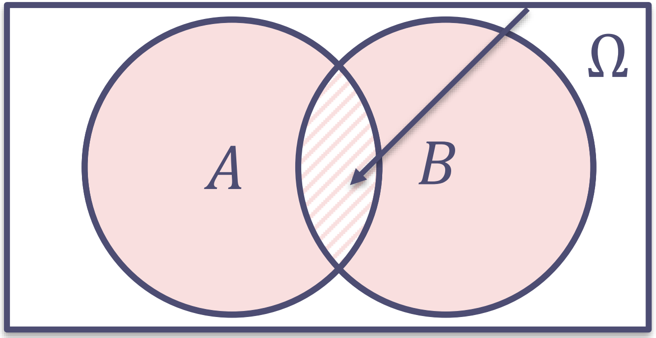
$$\boxed{\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)}$$

Probabilité de 2 événements

A = "tirer un as du jeu de cartes" ou
B = "tirer un pique"

$A \cap B$ = "tirer un as de pique"
$A \cup B$ = "tirer tout as ou tout pique"

$A \cap B \neq \emptyset$



$A \cup B - A \cap B$, si $A \cap B \neq \emptyset$
afin d'éviter de compter les éléments de $A \cap B$ 2 fois

Probabilité de 2 événements

Nous lançons 2 dés. Quelle est la probabilité que la somme des points soit 3 ou 4 ?

Probabilité de 2 événements

Nous lançons 2 dés. Quelle est la probabilité que la somme des points soit 3 ou 4 ?

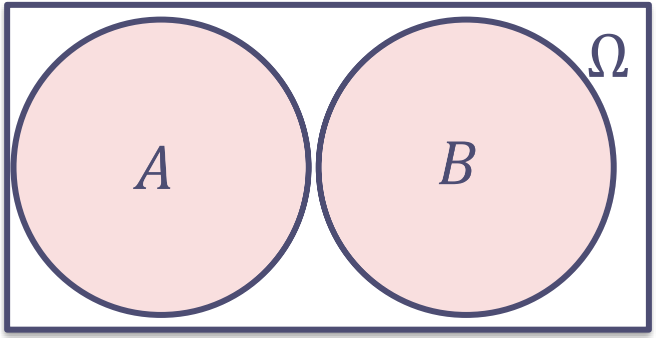
$$A = \text{"la somme } = 3\text{"}$$

ou

$$B = \text{"la somme } = 4\text{"}$$

Probabilité de 2 événements

Nous lançons 2 dés. Quelle est la probabilité que la somme des points soit 3 ou 4 ?



$A =$ "la somme $= 3$"

ou

$B =$ "la somme $= 4$"

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$$
$$= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(\emptyset)$$

$A \cup B$, si $A \cap B = \emptyset$

Probabilité de 2 événements

Nous lançons 2 dés. Quelle est la probabilité que la somme des points soit 3 ou 4 ?

$A = \text{"la somme } = 3\text{"}$

ou

$B = \text{"la somme } = 4\text{"}$

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$$
$$= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(\emptyset)$$

$\mathbb{P}(A) = ?$

Probabilité de 2 événements

Nous lançons 2 dés. Quelle est la probabilité que la somme des points soit 3 ou 4 ?

$A = \text{"la somme } = 3\text{"}$

ou

$B = \text{"la somme } = 4\text{"}$

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$$
$$= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(\emptyset)$$

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\#\, résultats\ favorables}{\#\, résultats\ possibles} = ?$$

Possibilités favorables que l'événement A se réalise

	Dé 1	Dé 2	
2	1	2	$= 3$
	2	1	$= 3$

Possibilités d'issues de lancement de 2 dés :
$6 \times 6 = 36$

Probabilité de 2 événements

Nous lançons 2 dés. Quelle est la probabilité que la somme des points soit 3 ou 4 ?

$A =$ "la somme $= 3$"

ou

$B =$ "la somme $= 4$"

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$$
$$= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(\emptyset)$$

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\#\, résultats\ favorables}{\#\, résultats\ possibles} = \frac{2}{36}$$

Possibilités favorables que l'événement A se réalise

	Dé 1	Dé 2	
2	1	2	$= 3$
	2	1	$= 3$

Possibilités d'issues de lancement de 2 dés :
$6 \times 6 = 36$

Probabilité de 2 événements

Nous lançons 2 dés. Quelle est la probabilité que la somme des points soit 3 ou 4 ?

$A = \text{"la somme } = 3\text{"}$

ou

$B = \text{"la somme } = 4\text{"}$

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$$
$$= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(\emptyset)$$

$\mathbb{P}(B) = ?$

Probabilité de 2 événements

Nous lançons 2 dés. Quelle est la probabilité que la somme des points soit 3 ou 4 ?

$A = \text{"la somme } = 3\text{"}$

ou

$B = \text{"la somme } = 4\text{"}$

$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$
$= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(\emptyset)$

$$\mathbb{P}(B) = \frac{\#\, résultats\ favorables}{\#\, résultats\ possibles} = ?$$

Possibilités favorables que l'événement B se réalise

	Dé 1	Dé 2	
3	1	3	$= 4$
	2	2	$= 4$
	3	1	$= 4$

Possibilités d'issues de lancement de 2 dés :
$6 \times 6 = 36$

Probabilité de 2 événements

Nous lançons 2 dés. Quelle est la probabilité que la somme des points soit 3 ou 4 ?

$A =$ "la somme $= 3$"

ou

$B =$ "la somme $= 4$"

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$$
$$= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(\emptyset)$$

$$\mathbb{P}(B) = \frac{\#\, résultats\ favorables}{\#\, résultats\ possibles} = \frac{3}{36}$$

Possibilités favorables que l'événement B se réalise

Dé 1	Dé 2	
1	3	$= 4$
2	2	$= 4$
3	1	$= 4$

3

Possibilités d'issues de lancement de 2 dés :

$6 \times 6 = 36$

Probabilité de 2 événements

Nous lançons 2 dés. Quelle est la probabilité que la somme des points soit 3 ou 4 ?

$$A = \text{"la somme } = 3\text{"}$$

ou

$$B = \text{"la somme } = 4\text{"}$$

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(\emptyset) = \frac{2}{36} + \frac{3}{36} = \frac{5}{36}$$

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\#\, résultats\ favorables}{\#\, résultats\ possibles} = \frac{2}{36}$$

$$\mathbb{P}(B) = \frac{\#\, résultats\ favorables}{\#\, résultats\ possibles} = \frac{3}{36}$$

Probabilité de n événements

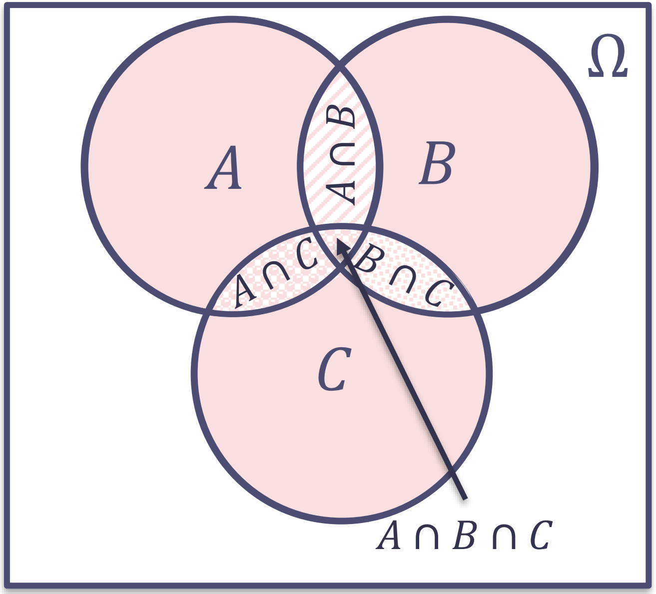
$A_1, A_2, \ldots, A_n$ - événements

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) =$$

$$\sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i) - \sum_{(i,j)|1\leq i<j\leq n} \mathbb{P}(A_i \cap A_j)$$

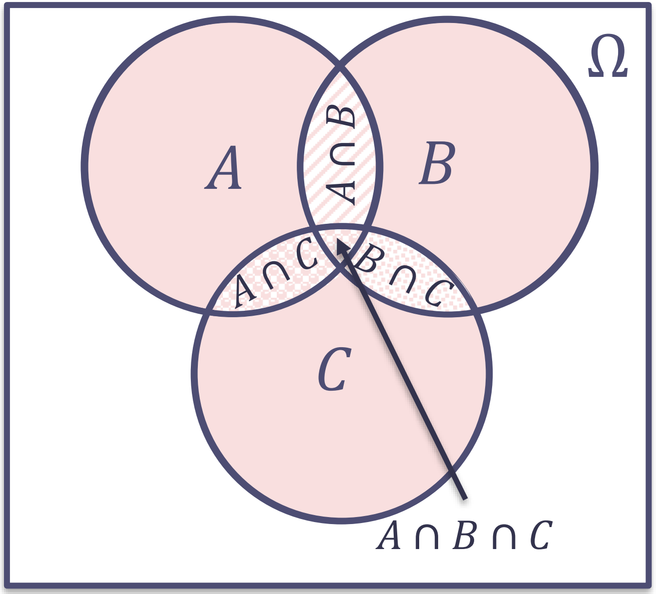
$$+ \sum_{(i,j,k)|1\leq i<j<k\leq n} \mathbb{P}(A_i \cap A_j \cap A_k) + \cdots$$

$$+(-1)^{n-1}\mathbb{P}(A_1 \cap \cdots \cap A_n)$$



Probabilité de n événements

$A_1, A_2, \dots, A_n$ - événements



$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{(i_1,\dots,i_k) \mid 1 \le i_1 < \dots < i_k \le n} \mathbb{P}(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k})$$

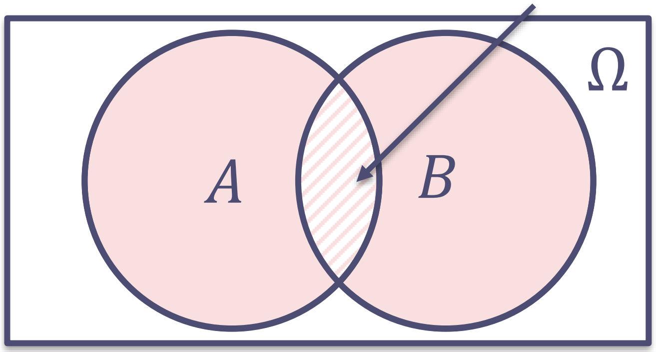
Probabilités conditionnelles et Indépendance

Probabilités conditionnelles et indépendance

Théorème bayésienne

Probabilité conditionnelle

$A \cap B \neq \emptyset$

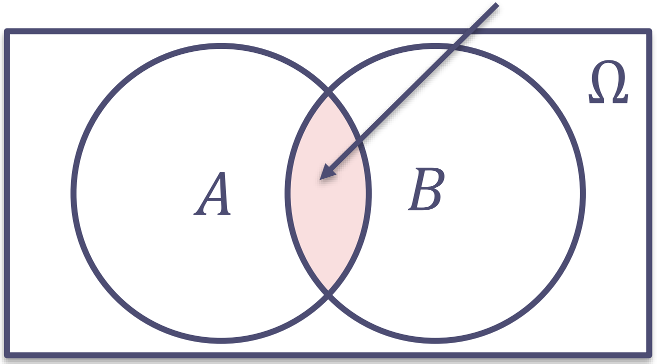


$$\mathbb{P}(A \cup B) = \underbrace{\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)} - \mathbb{P}(A \cap B)$$

A ou B

$$\mathbb{P}(A \cup B) \geq \mathbb{P}(A)$$
$$\mathbb{P}(A \cup B) \geq \mathbb{P}(B)$$

Les deux événements A et B doivent se réaliser $A \cap B$



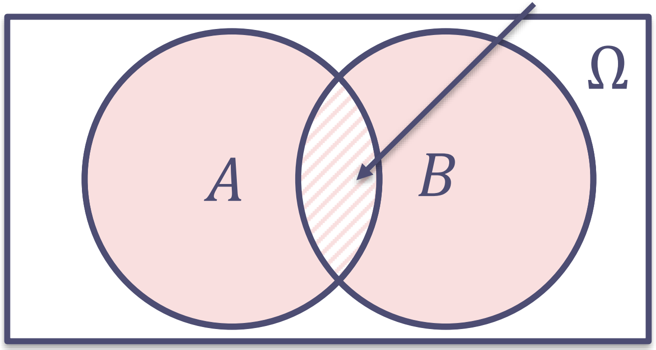
$$\mathbb{P}(A \cap B) = ?$$

A et B

$$\mathbb{P}(A \cap B) < \mathbb{P}(A)$$
$$\mathbb{P}(A \cap B) < \mathbb{P}(B)$$

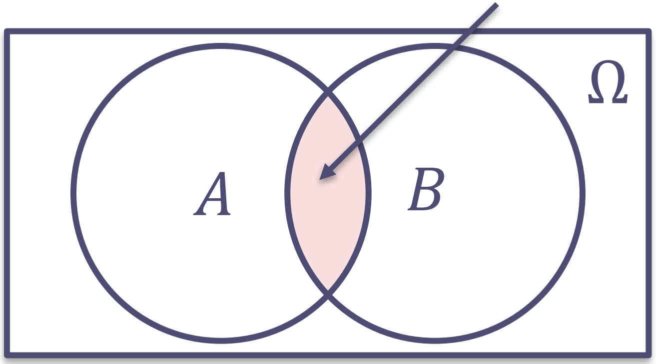
Probabilité conditionnelle

$A \cap B \neq \emptyset$



Les deux événements A et B doivent se réaliser

$A \cap B$



$$\boxed{\mathbb{P}(A \cup B) = \underbrace{\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)} - \mathbb{P}(A \cap B)}$$

A ou B

$$\mathbb{P}(A \cup B) \geq \mathbb{P}(A)$$
$$\mathbb{P}(A \cup B) \geq \mathbb{P}(B)$$

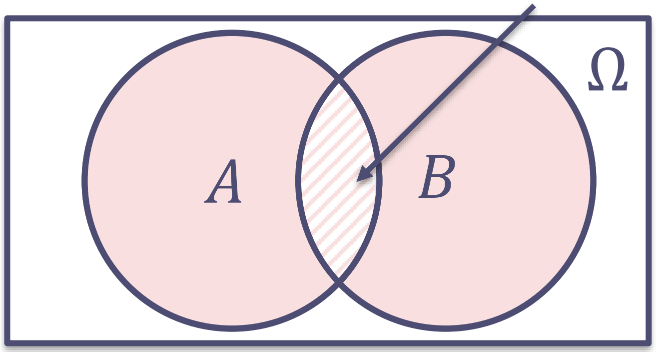
$$\boxed{\mathbb{P}(A \cap B) = \underbrace{\overset{\leq 1}{\mathbb{P}(A)} \cdot \overset{\leq 1}{\mathbb{P}(B|A)}}}$$

A et B

$$\mathbb{P}(A \cap B) < \mathbb{P}(A)$$
$$\mathbb{P}(A \cap B) < \mathbb{P}(B)$$

Probabilité conditionnelle

$A \cap B \neq \emptyset$



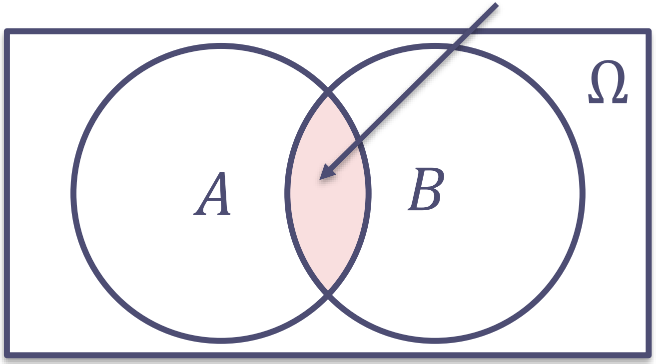
$$\boxed{\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)}$$

A ou B

$$\mathbb{P}(A \cup B) \geq \mathbb{P}(A)$$
$$\mathbb{P}(A \cup B) \geq \mathbb{P}(B)$$

Les deux événements A et B doivent se réaliser

$A \cap B$



≤ 1 ≤ 1

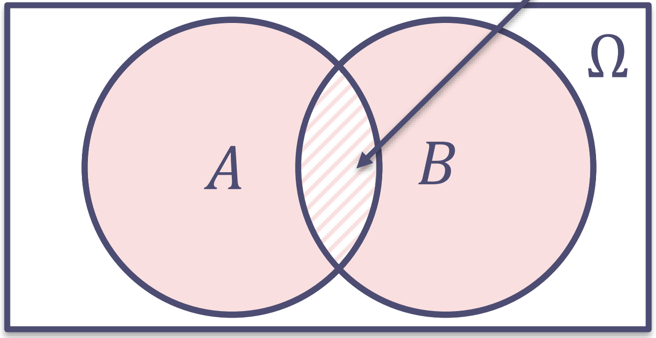
$$\boxed{\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B|A)}$$

A et B

« probabilité de B sachant A »

Probabilité conditionnelle

$A \cap B \neq \emptyset$



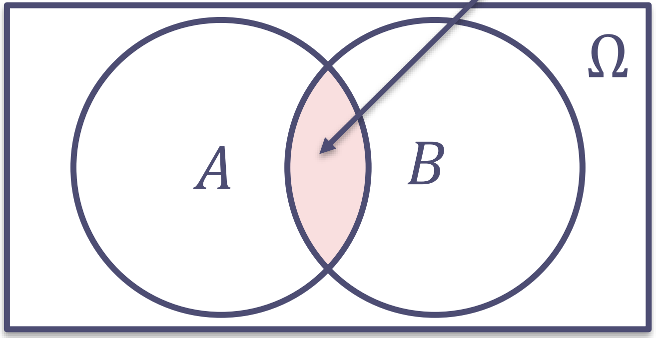
$$\boxed{\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \underbrace{\mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)}}$$

A ou B

$\mathbb{P}(A \cup B) \geq \mathbb{P}(A)$
$\mathbb{P}(A \cup B) \geq \mathbb{P}(B)$

Les deux événements A et B doivent se réaliser

$A \cap B$



≤ 1 ≤ 1

$$\boxed{\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B|A)}$$

A et B

« probabilité de B sachant A »

La réalisation de A influence la probabilité de B

Probabilité conditionnelle

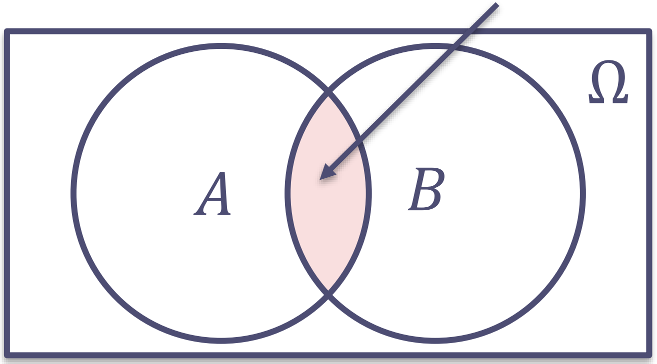
$A =$ "*avoir un as parmi 52 cartes*"

51 cartes dans le jeu

$B =$ "*avoir un roi parmi* **51** *cartes*"

La réalisation de A a influencé la probabilité de B

Les deux événements A et B doivent se réaliser



$$\boxed{\mathbb{P}(A \cap B) = \overset{\leq 1}{\mathbb{P}(A)} \cdot \overset{\leq 1}{\mathbb{P}(B|A)}}$$

A et B

« probabilité de B sachant A »

La réalisation de A influence la probabilité de B

Probabilité conditionnelle

$A =$ "*avoir un as parmi 52 cartes*"

$$\mathbb{P}(A) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$$

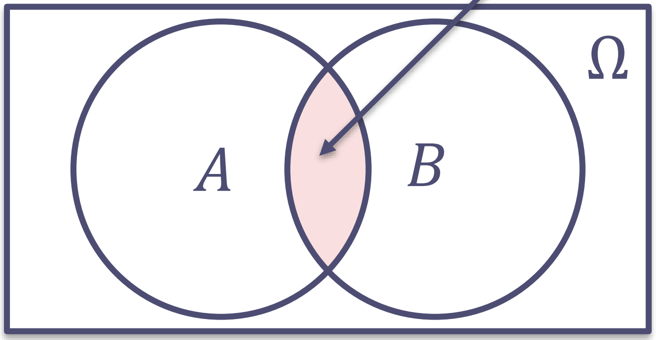
51 cartes dans le jeu

$B =$ "*avoir un roi parmi* **51** *cartes*"

$$\mathbb{P}(B|A) = \frac{4}{51}$$

La réalisation de A a influencé la probabilité de B

Les deux événements A et B doivent se réaliser $A \cap B$



$$\boxed{\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B|A)}$$

≤ 1 ≤ 1

A et B

« *probabilité de B sachant A* »

La réalisation de A influence la probabilité de B

Probabilité conditionnelle

$A =$ "*avoir un as parmi 52 cartes*"

$$\mathbb{P}(A) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$$

51 cartes dans le jeu

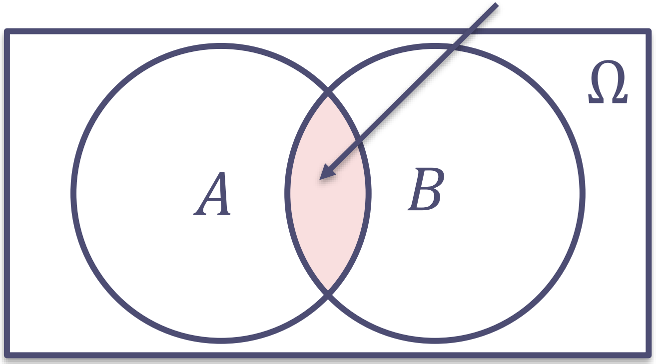
$B =$ "*avoir un roi parmi* **51** *cartes*"

$$\mathbb{P}(B|A) = \frac{4}{51}$$

Les événements A et B sont **dépendants** (*dependent events*)

Les deux événements A et B doivent se réaliser

$A \cap B$



≤ 1 $\quad$ ≤ 1

$$\boxed{\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B|A)}$$

A et B

« probabilité de B sachant A »

La réalisation de A influence la probabilité de B

Probabilité conditionnelle

$A =$ "*obtenir pile en lançant une pièce*"

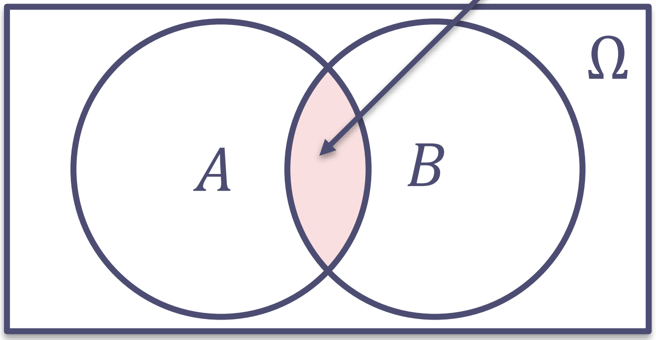
$$\mathbb{P}(A) = \frac{1}{2}$$

$B =$ "*obtenir face en lançant une pièce*"

$$\mathbb{P}(B|A) = \mathbb{P}(B) = \frac{1}{2}$$

Les événements A et B sont **indépendants** (in*dependent events*) si A n'influence pas B

Les deux événements A et B doivent se réaliser $A \cap B$



$$\boxed{\mathbb{P}(A \cap B) = \underbrace{\mathbb{P}(A)}_{\leq 1} \cdot \underbrace{\mathbb{P}(B)}_{\leq 1}}$$

A et B

Probabilité conditionnelle

Si votre anniversaire est le 2 février, quelle est la probabilité que vos 2 ami.e.s ont leur anniversaire le même jour ?

Probabilité conditionnelle

Si votre anniversaire est le 2 février, quelle est la probabilité que vos 2 ami.e.s ont leur anniversaire le même jour ?

$$A = \text{"}l'anniversaire\ d'un.e\ ami.e\ est\ le\ 2\ février\text{"}$$

et

$$B = \text{"}l'anniversaire\ d'un.e\ autre\ ami.e\ est\ le\ 2\ février\text{"}$$

$$\mathbb{P}(A \cap B) = ?$$

Probabilité conditionnelle

Si votre anniversaire est le 2 février, quelle est la probabilité que vos 2 ami.e.s ont leur anniversaire le même jour ?

$A = "l'anniversaire\ d'un.e\ ami.e\ est\ le\ 2\ février"$ $\quad \mathbb{P}(A) = 1/365$

$B = "l'anniversaire\ d'un.e\ autre\ ami.e\ est\ le\ 2\ février"$ $\quad \mathbb{P}(B) = 1/365$

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B|A)$$

Est-ce que A influence B ?

Probabilité conditionnelle

Si votre anniversaire est le 2 février, quelle est la probabilité que vos 2 ami.e.s ont leur anniversaire le même jour ?

$A =$ "$l'anniversaire\ d'un.e\ ami.e\ est\ le\ 2\ février$" $\qquad \mathbb{P}(A) = 1/365$

$B =$ "$l'anniversaire\ d'un.e\ autre\ ami.e\ est\ le\ 2\ février$" $\qquad \mathbb{P}(B) = 1/365$

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B|A) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B) =$$
$$= \frac{1}{365} \times \frac{1}{365} = \frac{1}{365^2}$$

Est-ce que A influence B?
NON

Probabilité conditionnelle

Karine, Michel, Kevin, Amélie, Pierre se connectent sur la session ZOOM de la Théorie des Probabilités aux moments différents et d'une manière aléatoire. Quelle est la probabilité que Karine se connecte la première et Kevin le dernier ?

Probabilité conditionnelle

Karine, Michel, Kevin, Amélie, Pierre se connectent sur la session ZOOM de la Théorie des Probabilités aux moments différents et d'une manière aléatoire. Quelle est la probabilité que Karine se connecte la première et Kevin le dernier ?

L'ordre de connexion compte et une fois qu'une personne soit connectée, le nombre de possibilités pour les autres devient différent $\Rightarrow$ les événements dépendants

Probabilité conditionnelle

Karine, Michel, Kevin, Amélie, Pierre se connectent sur la session ZOOM de la Théorie des Probabilités aux moments différents et d'une manière aléatoire. Quelle est la probabilité que Karine se connecte la première et Kevin le dernier ?

$$A = \text{"}Karine\ se\ connecte\ la\ 1\text{ère"}$$

et

$$B = \text{"}Kevin\ se\ connecte\ le\ dernier\text{"}$$

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B|A) = ?$$

L'ordre de connexion compte et une fois qu'une personne soit connectée, le nombre de possibilités pour les autres devient différent $\Rightarrow$ les événements dépendants

Probabilité conditionnelle

Karine, Michel, Kevin, Amélie, Pierre se connectent sur la session ZOOM de la Théorie des Probabilités aux moments différents et d'une manière aléatoire. Quelle est la probabilité que Karine se connecte la première et Kevin le dernier ?

$A = \text{"}Karine\ se\ connecte\ la\ 1\text{ère"}$ $\mathbb{P}(A) = 1/5$

et

$B = \text{"}Kevin\ se\ connecte\ le\ dernier\text{"}$ $\mathbb{P}(B|A) = 1/4$

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B|A) = ?$$

Probabilité conditionnelle

Karine, Michel, Kevin, Amélie, Pierre se connectent sur la session ZOOM de la Théorie des Probabilités aux moments différents et d'une manière aléatoire. Quelle est la probabilité que Karine se connecte la première et Kevin le dernier ?

$A = \text{"}Karine\ se\ connecte\ la\ 1\text{ère"}$ $\mathbb{P}(A) = 1/5$

et

$B = \text{"}Kevin\ se\ connecte\ le\ dernier\text{"}$ $\mathbb{P}(B|A) = 1/4$

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B|A) = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{20}$$

Probabilité conditionnelle

La probabilité de l'événement A est $\mathbb{P}(A) = 0.8$, la probabilité de l'événement C est $\mathbb{P}(C) = 0.35$ et la probabilité $\mathbb{P}(A \cap C) = 0.28$. Est-ce que les événements A et C sont indépendants ?

Probabilité conditionnelle

La probabilité de l'événement A est $\mathbb{P}(A) = 0.8$, la probabilité de l'événement C est $\mathbb{P}(C) = 0.35$ et la probabilité $\mathbb{P}(A \cap C) = 0.28$. Est-ce que les événements A et C sont indépendants ?

Si les événements sont indépendants :
$\mathbb{P}(A \cap C) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(C)$

Probabilité conditionnelle

La probabilité de l'événement A est $\mathbb{P}(A) = 0.8$, la probabilité de l'événement C est $\mathbb{P}(C) = 0.35$ et la probabilité $\mathbb{P}(A \cap C) = 0.28$. Est-ce que les événements A et C sont indépendants ?

Si les événements sont indépendants :
$\mathbb{P}(A \cap C) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(C)$

$0.28 \;?\; 0.8 \times 0.35$
$0.28 = 0.28$

Probabilité conditionnelle

La probabilité de l'événement A est $\mathbb{P}(A) = 0.8$, la probabilité de l'événement C est $\mathbb{P}(C) = 0.35$ et la probabilité $\mathbb{P}(A \cap C) = 0.28$. Est-ce que les événements A et C sont indépendants ?

Si les événements sont indépendants :
$\mathbb{P}(A \cap C) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(C)$

$0.28 \; ? \; 0.8 \times 0.35$
$0.28 = 0.28$

$\Downarrow$

A et C sont indépendants

Probabilités conditionnelles et indépendance

Théorème bayésienne

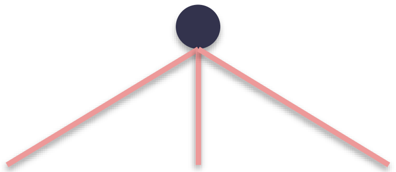
Théorème bayésienne (Bayes Rule)

La production de l'énergie d'un pays se base sur 3 sources principales. Le nucléaire produit 60% de l'énergie, les énergies fossiles 30% et les énergies renouvelables constituent 10%. Dans le premier cas, le processus de la production est complétement fonctionnelle dans 95% de temps, dans le 2ème cas dans 80% de temps, et dans le 3ème cas dans 65% de temps. Quelle est la probabilité qu'en vous inscrivant au contrat, vous n'allez pas avoir de fail ?*

https://www.youtube.com/watch?v=rp9I0x0jqHo

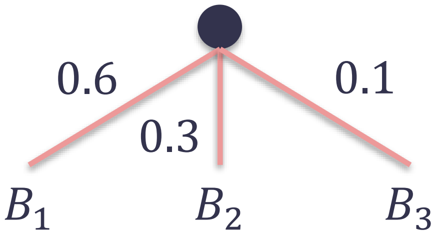
* Les chiffres sont imaginaires

Théorème bayésienne (Bayes Rule)



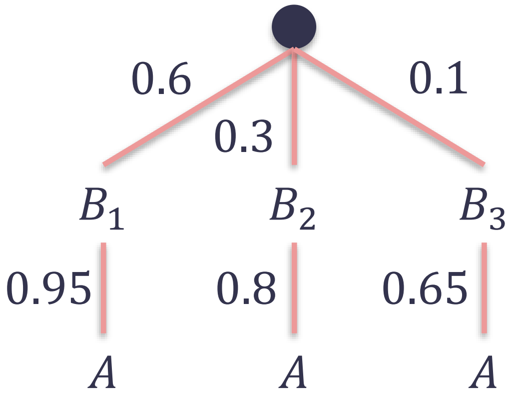
B_1 B_2 B_3 les options de sources de l’énergie pour un contrat

Théorème bayésienne (Bayes Rule)



les options de sources de l'énergie pour un contrat

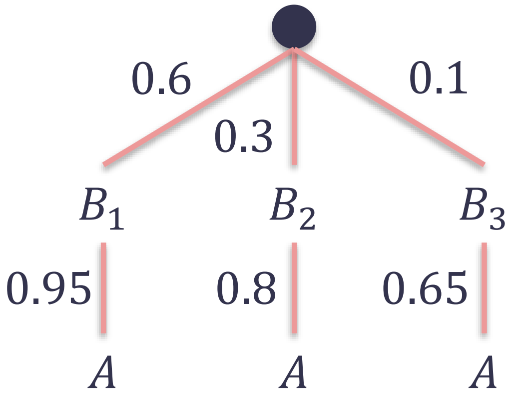
Théorème bayésienne (Bayes Rule)



les options de sources de l’énergie pour un contrat

les contrats sans interruption

Théorème bayésienne (Bayes Rule)



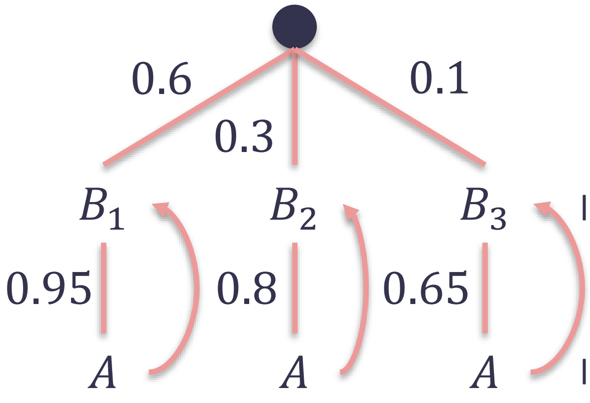
les options de sources de l’énergie pour un contrat

les contrats sans interruption

$$A = \text{"}contrat\ avec\ le\ service\ sans\ interruption\text{"}$$

$$B_1 = \text{"}la\ provenance\ de\ l'énergie\text{: } nucléaire\text{“}$$
$$B_2 = \text{"}la\ provenance\ de\ l'énergie\text{: } fossile\text{“}$$
$$B_3 = \text{"}la\ provenance\ de\ l'énergie\text{: } renouvelable\ \text{“}$$

Théorème bayésienne (Bayes Rule)



les options de sources de l’énergie pour un contrat

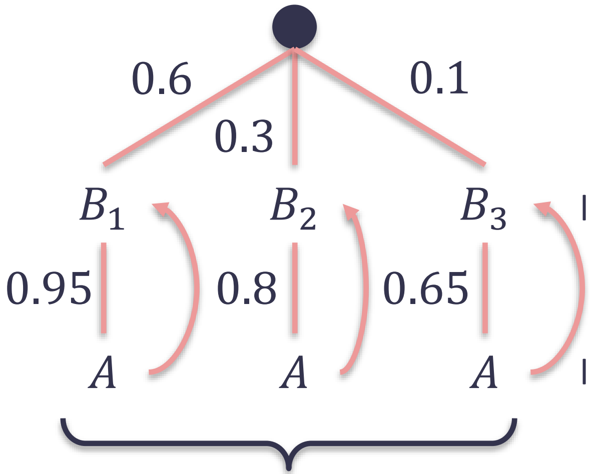
La probabilité de A en sachant B_i

les contrats sans interruption

$$A = \text{"contrat avec le service sans interruption"}$$

$$B_1 = \text{"la provenance de l'énergie: nucléaire“}$$
$$B_2 = \text{"la provenance de l'énergie: fossile“}$$
$$B_3 = \text{"la provenance de l'énergie: renouvelable “}$$

Théorème bayésienne (Bayes Rule)



les options de sources de l'énergie pour un contrat

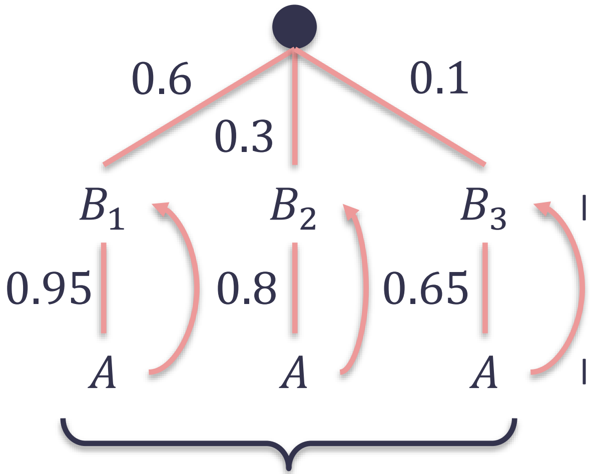
La probabilité de A en sachant B_i

les contrats sans interruption

3 chemins (façons) d'arriver à A

$$\mathbb{P}(A) = ?$$

Théorème bayésienne (Bayes Rule)



les options de sources de l'énergie pour un contrat

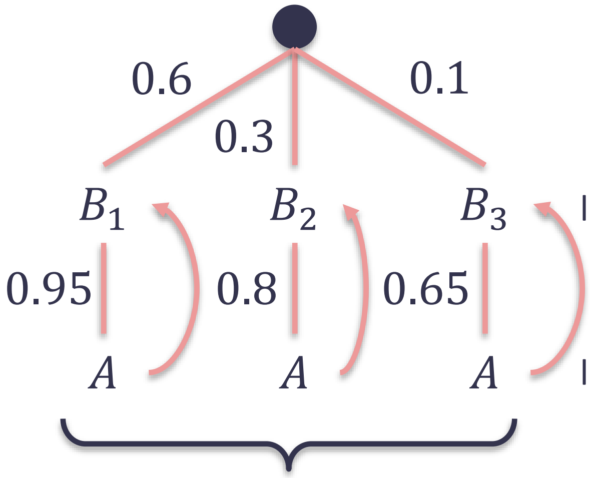
La probabilité de A en sachant B_i

les contrats sans interruption

3 chemins (façons) d'arriver à A

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B_1) \cdot \mathbb{P}(A|B_1) + \mathbb{P}(B_2) \cdot \mathbb{P}(A|B_2) + \mathbb{P}(B_3) \cdot \mathbb{P}(A|B_3)$$

Théorème bayésienne (Bayes Rule)



les options de sources de l'énergie pour un contrat

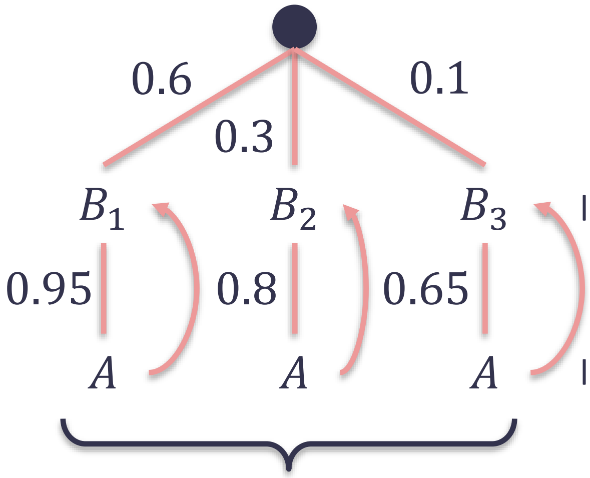
La probabilité de A en sachant B_i

les contrats sans interruption

3 chemins (façons) d'arriver à A

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B_1)\cdot\mathbb{P}(A|B_1) + \mathbb{P}(B_2)\cdot\mathbb{P}(A|B_2) + \mathbb{P}(B_3)\cdot\mathbb{P}(A|B_3)$$
$$= 0.6\times 0.95 + 0.3\times 0.8 + 0.1\times 0.65 = 0.57 + 0.24 + 0.065 = 0.875$$

Théorème bayésienne (Bayes Rule)



les options

La proba

les contrat

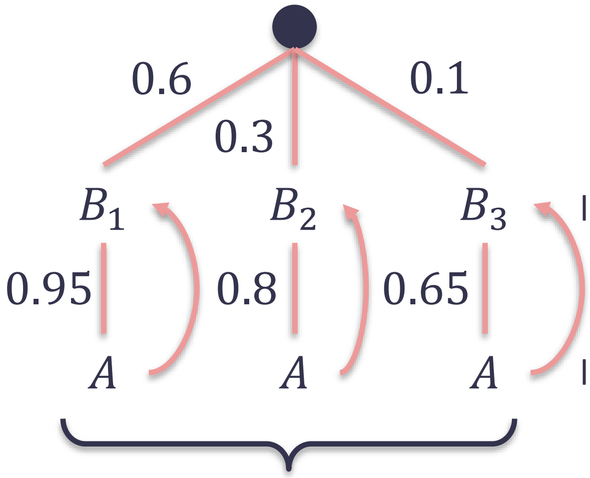
3 chemins (façons) d'arriver à A

La formule des probabilités totales (*law of total probability / elimination rule*) :
Si $B_1, B_2, \ldots, B_n$ est un système exhaustif d'événements et $\forall i = \overline{1, n}$: $\mathbb{P}(B_i) \neq 0$, alors :

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A|B_i) \cdot \mathbb{P}(B_i) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A \cap B_i)$$

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B_1) \cdot \mathbb{P}(A|B_1) + \mathbb{P}(B_2) \cdot \mathbb{P}(A|B_2) + \mathbb{P}(B_3) \cdot \mathbb{P}(A|B_3)$$
$$= 0.6 \times 0.95 + 0.3 \times 0.8 + 0.1 \times 0.65 = 0.57 + 0.24 + 0.065 = 0.875$$

Théorème bayésienne (Bayes Rule)



les options de sources de l'énergie pour

La probabilité de A en sachant B_i

les contrats sans interruption

3 chemins (façons) d'arriver à A

Et si on voulait savoir quelle est la probabilité d'une source particulière en sachant que A s'est réalisé, i.e. $\mathbb{P}(B_i|A)$?

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B_1) \cdot \mathbb{P}(A|B_1) + \mathbb{P}(B_2) \cdot \mathbb{P}(A|B_2) + \mathbb{P}(B_3) \cdot \mathbb{P}(A|B_3)$$
$$= 0.6 \times 0.95 + 0.3 \times 0.8 + 0.1 \times 0.65 = 0.57 + 0.24 + 0.065 = 0.875$$

Théorème bayésienne (Bayes Rule)

Probabilité conditionnelle : $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B|A)$

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$$

$$\mathbb{P}(B|A) = \frac{\mathbb{P}(B \cap A)}{\mathbb{P}(A)}$$

Théorème bayésienne (Bayes Rule)

Probabilité conditionnelle : $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B|A)$

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$$

$$\mathbb{P}(B|A) = \frac{\mathbb{P}(B \cap A)}{\mathbb{P}(A)}$$

$$\mathbb{P}(B \cap A) = \mathbb{P}(B|A) \cdot \mathbb{P}(A)$$

Théorème bayésienne (Bayes Rule)

Probabilité conditionnelle : $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B|A)$

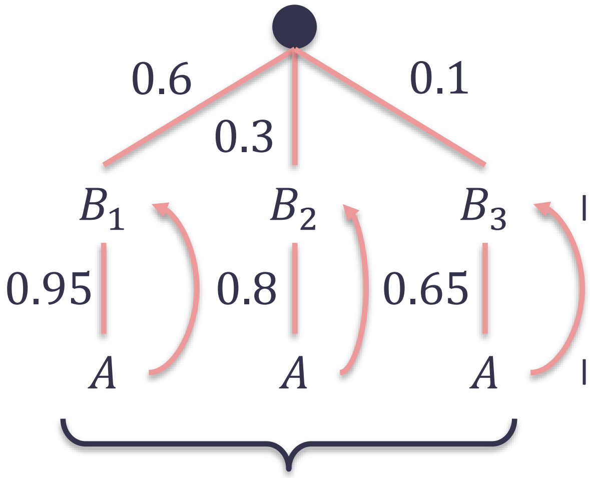
$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$$

$$\mathbb{P}(B|A) = \frac{\mathbb{P}(B \cap A)}{\mathbb{P}(A)}$$

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(B|A) \cdot \mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)}$$

$$\mathbb{P}(B \cap A) = \mathbb{P}(B|A) \cdot \mathbb{P}(A)$$

Théorème bayésienne (Bayes Rule)



les options de sources de l'énergie pour

La probabilité de A en sachant B_i

les contrats sans interruption

3 chemins (façons) d'arriver à A

Et si on voulait savoir quelle est la probabilité d'une source particulière en sachant que A s'est réalisé, i.e. $\mathbb{P}(B_i|A)$?

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B_1) \cdot \mathbb{P}(A|B_1) + \mathbb{P}(B_2) \cdot \mathbb{P}(A|B_2) + \mathbb{P}(B_3) \cdot \mathbb{P}(A|B_3)$$
$$= 0.6 \times 0.95 + 0.3 \times 0.8 + 0.1 \times 0.65 = 0.57 + 0.24 + 0.065 = 0.875$$

$$\mathbb{P}(B_2|A) = \frac{\mathbb{P}(A|B_2) \cdot \mathbb{P}(B_2)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{0.8 \cdot 0.3}{0.875} = \frac{0.24}{0.0875} = 0.274$$

Indépendance mutuelle

Les événements $A_1, \dots, A_n$ sont **mutuellement indépendants**, si $\forall k \in \{1, \dots, n\}$ et $\forall (i_1, \dots, i_k) \in \mathbb{N}^k$ tel que $1 \leq i_1 \leq \; i_2 \leq \cdots \leq i_k \leq n$, on a :

$$P\left(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}\right) \; = \; P\left(A_{i_1}\right) \times \cdots \times P\left(A_{i_k}\right)$$

Pour le cas de 3 événements A, B, C, les conditions suivantes doivent être satisfaites :

1. indépendance 2 à 2 :
- $P(A \cap B) = \; P(A) \times P(B)$
- $P(A \cap C) = \; P(A) \times P(C)$
- $P(B \cap C) = \; P(B) \times P(C)$

2. $P(A \cap \; B \cap \; C) = \; P(A) \times \; P(B) \times \; P(C)$

Remarque : des événements peuvent être 2 à 2 indépendants sans être mutuellement indépendants.