Introduction aux Probabilités

2023/2024

Sur la promotion de 50 étudiant.e.s, nous savons que :
(A) 20 personnes sont des droitières;
(B) 25 personnes sont sur TikTok.

Pour un.e étudiant.e choisi.e au hasard, quelle est la probabilité de $p = P(A \cup B)$?
Sélectionnez une plage de valeur.

Sur la promotion de 50 étudiant.e.s, nous savons que :
(A) 20 personnes sont des droitières;
(B) 25 personnes sont sur TikTok.

Pour un.e étudiant.e choisi.e au hasard, quelle est la probabilité de $p = P(A \cup B)$?
Sélectionnez une plage de valeur.

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$$

$$\mathbb{P}(A) = \frac{20}{50} = \frac{2}{5} = 0.4$$

$$\mathbb{P}(B) = \frac{25}{50} = \frac{1}{2} = 0.5$$

Sur la promotion de 50 étudiant.e.s, nous savons que :
(A) 20 personnes sont des droitières;
(B) 25 personnes sont sur TikTok.

Pour un.e étudiant.e choisi.e au hasard, quell … $\mathbb{P}(A \cup B)$?
Sélectionnez une plage de valeur.

La valeur de $\mathbb{P}(A \cap B)$ définit le **min** et le **max** de l'expression

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$$

$$\mathbb{P}(A) = \frac{20}{50} = \frac{2}{5} = 0.4$$

$$\mathbb{P}(B) = \frac{25}{50} = \frac{1}{2} = 0.5$$

Sur la promotion de 50 étudiant.e.s, nous savons que :
(A) 20 personnes sont des droitières;
(B) 25 personnes sont sur TikTok.

Pour un.e étudiant.e choisi.e au hasard, quell $\mathbb{P}(A \cup B)$?
Sélectionnez une plage de valeur.

La valeur de $\mathbb{P}(A \cap B)$ définit le **min** et le **max** de l'expression

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$$

$\min \mathbb{P}(A \cup B)$	$\max \mathbb{P}(A \cup B)$
$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) = 0.4$	$\mathbb{P}(A \cap B) = 0$
"tou.te.s les droitier.e.s ont le compte TikTok"	*"aucun.e droitier.e a le compte TikTok"*
$A \subset B$	$A \cap B = \emptyset$
$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$	$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$
$= 0.4 + 0.5 - 0.4 = 0.5$	$= 0.4 + 0.5 - 0 = 0.9$

Sur la promotion de 50 étudiant.e.s, nous savons que :
(A) 20 personnes sont des droitières;
(B) 25 personnes sont sur TikTok.

Pour un.e étudiant.e choisi.e au hasard, quell[e] ... $\mathbb{P}(A \cup B)$?
Sélectionnez une plage de valeur.

La valeur de $\mathbb{P}(A \cap B)$ définit le **min** et le **max** de l'expression

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$$

$\min \mathbb{P}(A \cup B)$ | $0.5 \leq p \leq 0.9$ | $\max \mathbb{P}(A \cup B)$

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) = 0.4$$

"tou.te.s les droitier.e.s ont le compte TikTok"

$$A \subset B$$

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$$
$$= 0.4 + 0.5 - 0.4 = 0.5$$

$$\mathbb{P}(A \cap B) = 0$$

"aucun.e droitier.e a le compte TikTok"

$$A \cap B = \emptyset$$

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$$
$$= 0.4 + 0.5 - 0 = 0.9$$

Plan

1. Rappels d’analyse combinatoire
2. Fondements de la Théorie des Probabilités
3. Variables aléatoires réelles
   3.1. discrètes
   3.2. continues
4. Moments d’une variable aléatoire
5. Couple de variables aléatoires réelles et Indépendance
6. Vecterus aléatoires
7. Théorèmes limites
8. Chaînes de Markov discrètes

Variables aléatoires

Variable aléatoire

Loi de probabilité

Les exemples de lois de probabilité

Moments d'une variable aléatoire

Variable aléatoire

Variable aléatoire (v.a.)
(*random variable, r.v.*)

le résultat d'une expérience aléatoire qu'on peut mesurer ou compter

Variable aléatoire

- plusieurs valeurs possibles ;
- résultat de hasard / chance

Variable aléatoire (v.a.)
(*random variable, r.v.*)

le résultat d'une expérience aléatoire qu'on peut mesurer ou compter

Variable aléatoire

Variable aléatoire (v.a.)
(*random variable, r.v.*)

le résultat d'une expérience aléatoire qu'on peut mesurer ou compter

Expérience aléatoire

$$\Omega = \{pile, face\}$$

Variable aléatoire

Variable aléatoire (v.a.)
(*random variable, r.v.*)

le résultat d'une expérience aléatoire qu'on peut mesurer ou compter

$\in \mathbb{R}$

Expérience aléatoire

HEADS

$\mapsto$

0

TAILS

1

$$\Omega = \{pile, face\}$$

Variable aléatoire

Variable aléatoire (v.a.)
(*random variable, r.v.*)

le résultat d'une expérience aléatoire qu'on peut mesurer ou compter

$\in \mathbb{R}$

Expérience aléatoire

$\mapsto$

0

1

$$X\colon\ \Omega \mapsto \{0,1\}$$

$$\Omega = \{pile, face\}$$

Variable aléatoire

Variable aléatoire (v.a.)
(*random variable, r.v.*)

le résultat d'une expérience aléatoire qu'on peut mesurer ou compter

$\in \mathbb{R}$

Expérience aléatoire

$$\mapsto$$

0 $\quad X(\omega) = 0 \text{ sinon}$

1 $\quad X(\omega) = 1 \text{ si } \omega = \text{"}pile\text{"}$

$$X\colon\ \Omega \mapsto \{0,1\}$$

$$\Omega = \{pile, face\}$$

Variable aléatoire

Variable aléatoire (v.a.)
(*random variable, r.v.*)

le résultat d'une expérience aléatoire qu'on peut mesurer ou compter

$\in \mathbb{R}$

Expérience aléatoire

$$\mapsto$$

0 $\quad X(\omega) = 0 \text{ sinon}$

$$X\colon\ \Omega \mapsto \{0,1\}$$

1 $\quad X(\omega) = 1 \text{ si } \omega = "pile"$

$$\Omega = \{pile, face\}$$

$"X = a"$ désigne l'événement $\{\omega | X(\omega) = a\}$

Variable aléatoire

Variable aléatoire (v.a.)
(*random variable, r.v.*)

le résultat d'une expérience aléatoire qu'on peut mesurer ou compter

Variable quantitative
(*quantitative variable*)

une valeur numérique (aka *numeric variable*)

? Combien ? Avec quelle fréquence ?

« Combien d'étudiants vont manger au Grillon ce midi ? »

Variable qualitative
(*qualitative variable*)

une valeur catégorielle (aka *categorical variable*)

? De quel type ? Quel ?

« Quel département allez-vous rejoindre ? »
« Pour qui vous allez voter aux prochaines élections ? »

Variable aléatoire

Variable aléatoire (v.a.)
(*random variable, r.v.*)

le résultat d'une expérience aléatoire qu'on peut mesurer ou compter

Variable quantitative
(*quantitative variable*)

une valeur numérique (aka *numeric variable*)

Variable discrète
(*discrete variable*)

valeurs dénombrables entre deux valeurs

Variable continue
(*continuous variable*)

nombre infini de valeurs entre deux valeurs

$$[0,1]; [a,b]; [0,\infty); (-\infty,\infty)$$

Variable qualitative
(*qualitative variable*)

une valeur catégorielle (aka *categorical variable*)

https://www.cleanpng.com/png-line-art-point-dice-clip-art-rolling-dice-4938487/download-png.html
https://www.freepik.com/free-vector/global-warming-with-melting-earth_7890030.htm

Variable aléatoire

Soit $\mathcal{A}$ un ensemble d'évènements associés à l'univers Ω, appelé **tribu**, vérifiant les propriétés suivantes :

a. $\Omega \in \mathcal{A}$

b. $A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c \in \mathcal{A}$

c. $\forall i \in \mathbb{N},\ A_i \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i \in \mathcal{A}$

Pour Ω fini ou infini dénombrable, on considère souvent $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$.

Pour $\Omega = \mathbb{R}$: $\mathcal{A} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$, où $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ est un ensemble des Boréliens, i.e. l'ensemble des parties de $\mathbb{R}$ engendrés par les intervalles de $\mathbb{R}$

Variable aléatoire

Soit $\mathcal{A}$ un ensemble d'évènements associés à l'univers Ω.
Soit $(\Omega, \mathcal{A})$ un espace d'évènements de l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et $(E, \mathcal{E})$ un espace mesurable. Une **variable aléatoire, v.a.** (*random variable, r.v.*) X de Ω vers E est une fonction mesurable :

$$X : \Omega \to E$$

telle que :

$$\forall A' \in \mathcal{E}, X^{-1}(A') \in \mathcal{A}$$

où $X^{-1}(A')$ est l'image réciproque $X^{-1}(A') = \{\omega \in \Omega \,|\, X(\omega) \in A'\} \in \mathcal{A}$.
Si $E \subset \mathbb{R}$, alors on parle de **variables aléatoires réelles, v.a.r.** (*real-valued random variable*) sur l'espace d'évènements $(\Omega, \mathcal{A})$:
$$\forall x \in \mathbb{R}, X^{-1}(]-\infty, x]) \in \mathcal{A}$$

Variable aléatoire

Loi de probabilité

Les exemples de lois de probabilité

Moments d'une variable aléatoire

INSA INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES LYON

membre de UNIVERSITÉ DE LYON

Loi de probabilité

Loi de probabilité de X
(*probability distribution*)

Comment se répartit X : la probabilité de tout événement lié à l'expérience

Loi de probabilité

Loi de probabilité de X
(*probability distribution*)

Comment se répartit X : la probabilité de tout événement lié à l'expérience

Un espace $(\Omega, \mathcal{A})$ est munie d'une mesure de probabilité $\mathbb{P}$ dans l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Grâce à la mésurabilité de la variable aléatoire X, il est possible de définir la probabilité $\mathbb{P}(X)$: $\mathcal{E} \rightarrow [0,1]$ (aussi appelée **la loi de probabilité de la v.a.r. X** ou juste **loi de la v.a.r. X** (*probability distribution*)) sur l'espace mesurable $(E, \mathcal{E})$:

$$\forall A' \in \mathcal{E}, \mathbb{P}_X(A') = \mathbb{P}\left(X^{-1}(A')\right) = \mathbb{P}(X \in A')$$

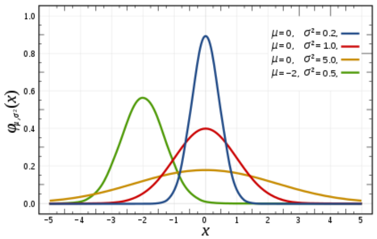
Ainsi, une loi de probabilité est une fonction qui décrit la probabilité d'occurrence d'issues possibles de l'expérience aléatoire.

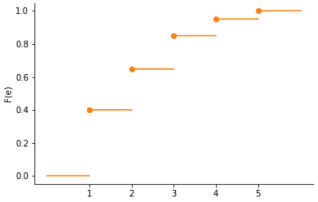
Loi de probabilité

Loi de probabilité de X
(*probability distribution*)

Comment se répartit X : la probabilité de tout événement lié à l'expérience

graphe	table	fonction





Valeurs de X	$f(x)$
0	1/4
1	1/4
2	1/4
3	1/4

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-1/2\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2}$$

Loi de probabilité

Loi de probabilité de X
(*probability distribution*)

Comment se répartit X : la probabilité de tout événement lié à l'expérience

Variable discrète
(*discrete variable*)

$X =$ "nombre de tasses de café un.e étudiant.e prend avant la pause de midi"

$$\underbrace{\quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad}_{\text{Valeurs de la v.a. } X}$$

X	1	2	3	4	5

Loi de probabilité

Loi de probabilité de X
(*probability distribution*)

Comment se répartit X : la probabilité de tout événement lié à l'expérience

Variable discrète
(*discrete variable*)

$X =$ "nombre de tasses de café un.e étudiant.e prend avant la pause de midi"

Valeurs de la v.a. X

X	1	2	3	4	5
$p(e)$	0.4	0.25	0.2	0.1	0.05

Les probabilités des valeurs de X

Loi de probabilité

Loi de probabilité de X
(*probability distribution*)

Comment se répartit X : la probabilité de tout événement lié à l'expérience

Variable discrète
(*discrete variable*)

$X =$ "nombre de tasses de café un. e étudiant. e prend avant la pause de midi"

Valeurs de la v.a. X

X	1	2	3	4	5
$p(e)$	0.4	0.25	0.2	0.1	0.05

Les probabilités des valeurs de X

$$\sum_{i=1}^{n} p(e_i) = 0.4 + 0.25 + 0.2 + 0.1 + 0.05 = 1$$

Loi de probabilité

Loi de probabilité de X
(*probability distribution*)

Comment se répartit X : la probabilité de tout événement lié à l'expérience

Variable discrète
(*discrete variable*)

$X =$ "nombre de tasses de café un. e étudiant. e prend avant la pause de midi"

Toutes les valeurs à probabilité $\neq 0$

Valeurs de la v.a. X

X	1	2	3	4	5
$p(e)$	0.4	0.25	0.2	0.1	0.05

Les probabilités des valeurs de X

$$\sum_{i=1}^{n} p(e_i) = 0.4 + 0.25 + 0.2 + 0.1 + 0.05 = 1$$

Loi de probabilité

Loi de probabilité de X (*probability distribution*)

Comment se répartit X : la probabilité de tout événement lié à l'expérience

Variable discrète (*discrete variable*)

$$\chi = \{e_1, e_2, \dots\}$$

Fonction de masse (*probability mass function, pmf*)

$$p(e_i) = P(X = e_i)$$

$X =$ "nombre de tasses de café un.e étudiant.e prend avant la pause de midi"

Valeurs de la v.a. X

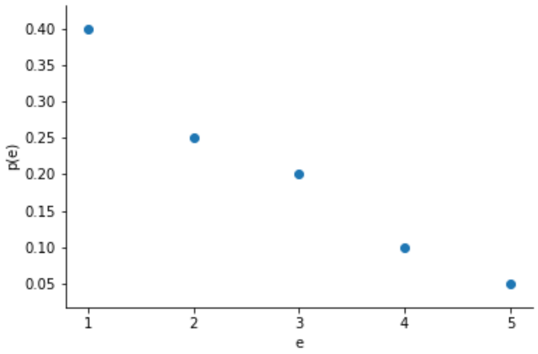
X	1	2	3	4	5
$p(e)$	0.4	0.25	0.2	0.1	0.05

Les probabilités des valeurs de X

Loi de probabilité

Loi de probabilité de X
(*probability distribution*)

Comment se répartit X : la probabilité de tout éváneme



Variable discrète
(*discrete variable*)

$$\chi = \{e_1, e_2, \dots\}$$

Fonction de masse (*probability mass function, pmf*)

$$p(e_i) = P(X = e_i)$$

$X =$ "nombre de tasses de café un. e étudiant. e prend avant la pause de midi"

Valeurs de la v.a. X

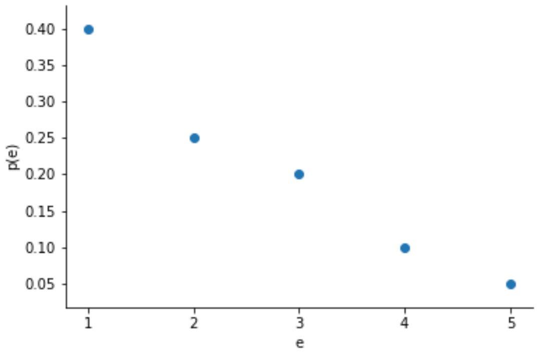
X	1	2	3	4	5
$p(e)$	0.4	0.25	0.2	0.1	0.05

Les probabilités des valeurs de X

Loi de probabilité

Loi de probabilité de X
(*probability distribution*)

Comment se répartit X : la probabilité de tout événeme



Variable discrète
(*discrete variable*)

$$\chi = \{e_1, e_2, \dots\}$$

Fonction de masse (*probability mass function, pmf*)

$$p(e_i) = P(X = e_i)$$

$$(1) \sum_{i=1}^{n} p(e_i) = 1$$

$$(2)\ 0 \leq p(e_i) \leq 1$$

$X =$ "nombre de tasses de café un.e étudiant.e prend avant la pause de midi"

Valeurs de la v.a. X

X	1	2	3	4	5
$p(e)$	0.4	0.25	0.2	0.1	0.05

Les probabilités des valeurs de X

Loi de probabilité

Loi de probabilité de X
(*probability distribution*)

Comment se répartit X : la probabilité de tout événement lié à l'expérience

Variable discrète
(*discrete variable*)

$$\chi = \{e_1, e_2, \dots\}$$

Fonction de répartition (*cumulative distribution function, cdf*)

$$F(e_i) = P(X \leq e_i)$$

$X =$ "nombre de tasses de café un.e étudiant.e prend avant la pause de midi"

Valeurs de la v.a. X

X	1	2	3	4	5
$p(e)$	0.4	0.25	0.2	0.1	0.05

Les probabilités des valeurs de X

Loi de probabilité

Loi de probabilité de X
(*probability distribution*)

Comment se répartit X : la probabilité de tout événement lié à l'expérience

Variable discrète
(*discrete variable*)

$$\chi = \{e_1, e_2, \dots\}$$

Fonction de répartition (*cumulative distribution function, cdf*)

$$F(e_i) = P(X \leq e_i)$$

$X =$ "nombre de tasses de café un. e étudiant. e prend avant la pause de midi"

X	1	2	3	4	5
$p(e)$	0.4	0.25	0.2	0.1	0.05
$F(e)$	?	?	?	?	?

Loi de probabilité

Loi de probabilité de X (*probability distribution*)

Comment se répartit X : la probabilité de tout événement lié à l'expérience

Variable discrète (*discrete variable*)

$$\chi = \{e_1, e_2, \dots\}$$

Fonction de répartition (*cumulative distribution function, cdf*)

$$F(e_i) = P(X \leq e_i)$$

$X =$ "nombre de tasses de café un.e étudiant.e prend avant la pause de midi"

X	1	2	3	4	5
$p(e)$	$\boxed{0.4}$	0.25	0.2	0.1	0.05
$F(e)$	0.4	?	?	?	?

Loi de probabilité

Loi de probabilité de X (*probability distribution*)

Comment se répartit X : la probabilité de tout événement lié à l'expérience

Variable discrète (*discrete variable*)

$$\chi = \{e_1, e_2, \dots\}$$

Fonction de répartition (*cumulative distribution function, cdf*)

$$F(e_i) = P(X \leq e_i)$$

$X =$ "nombre de tasses de café un.e étudiant.e prend avant la pause de midi"

X	1	2	3	4	5
$p(e)$	0.4	0.25	0.2	0.1	0.05
$F(e)$	0.4	0.65	?	?	?

Loi de probabilité

Loi de probabilité de X (*probability distribution*)

Comment se répartit X : la probabilité de tout événement lié à l'expérience

Variable discrète (*discrete variable*)

$$\chi = \{e_1, e_2, \dots\}$$

Fonction de répartition (*cumulative distribution function, cdf*)

$$F(e_i) = P(X \leq e_i)$$

$X =$ "nombre de tasses de café un. e étudiant. e prend avant la pause de midi"

X	1	2	3	4	5
$p(e)$	0.4	0.25	0.2	0.1	0.05
$F(e)$	0.4	0.65	0.85	?	?

Loi de probabilité

Loi de probabilité de X (*probability distribution*)

Comment se répartit X : la probabilité de tout événement lié à l'expérience

Variable discrète (*discrete variable*)

$$\chi = \{e_1, e_2, \dots\}$$

Fonction de répartition (*cumulative distribution function, cdf*)

$$F(e_i) = P(X \leq e_i)$$

$X =$ "nombre de tasses de café un.e étudiant.e prend avant la pause de midi"

X	1	2	3	4	5
$p(e)$	0.4	0.25	0.2	0.1	0.05
$F(e)$	0.4	0.65	0.85	0.95	?

Loi de probabilité

Loi de probabilité de X
(*probability distribution*)

Comment se répartit X : la probabilité de tout événement lié à l'expérience

Variable discrète
(*discrete variable*)

$$\chi = \{e_1, e_2, \dots\}$$

Fonction de répartition (*cumulative distribution function, cdf*)

$$F(e_i) = P(X \leq e_i)$$

$X =$ "nombre de tasses de café un.e étudiant.e prend avant la pause de midi"

X	1	2	3	4	5
$p(e)$	0.4	0.25	0.2	0.1	0.05
$F(e)$	0.4	0.65	0.85	0.95	1

Loi de probabilité

Loi de probabilité de X
(*probability distribution*)

Comment se répartit X : la probabilité de tout événement lié à l'expérience

Variable discrète
(*discrete variable*)

$$\chi = \{e_1, e_2, \dots\}$$

Fonction de répartition (*cumulative distribution function, cdf*)

$$F(e_i) = P(X \leq e_i)$$

$X =$ "nombre de tasses de café un.e étudiant.e prend avant la pause de midi"

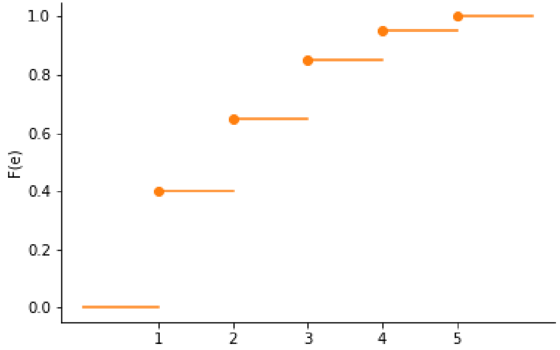
X	1	2	3	4	5
$p(e)$	0.4	0.25	0.2	0.1	0.05
$F(e)$	0.4	0.65	0.85	0.95	1

$$F(0) = 0$$
$$F(6) = 1$$

Loi de probabilité

Loi de probabilité de X
(*probability distribution*)

Comment se répartit X : la probabilité de tout événem



Variable discrète
(*discrete variable*)

$$\chi = \{e_1, e_2, \dots\}$$

Fonction de répartition (*cumulative distribution function, cdf*)

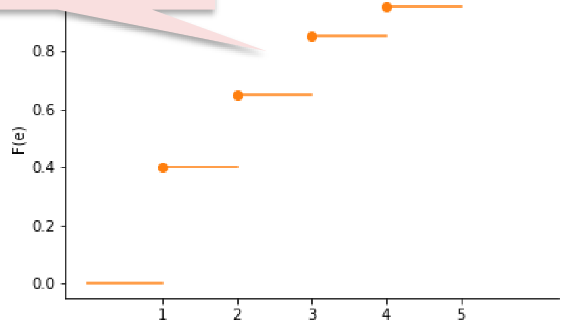
$$F(e_i) = P(X \leq e_i)$$

$X =$ "nombre de tasses de café un. e étudiant. e prend avant la pause de midi"

X	1	2	3	4	5
$p(e)$	0.4	0.25	0.2	0.1	0.05
$F(e)$	0.4	0.65	0.85	0.95	1

$$F(0) = 0$$
$$F(6) = 1$$

Loi de probabilité



Loi de probabilité de X (*probability distribution*)

Comment se répartit X : la probabilité de tout événem

Variable discrète (*discrete variable*)

$$\chi = \{e_1, e_2, \dots\}$$

Fonction de répartition (*cumulative distribution function, cdf*)

$$F(e_i) = P(X \leq e_i)$$

$X =$ "nombre de tasses de café un. e étudiant. e prend avant la pause de midi"

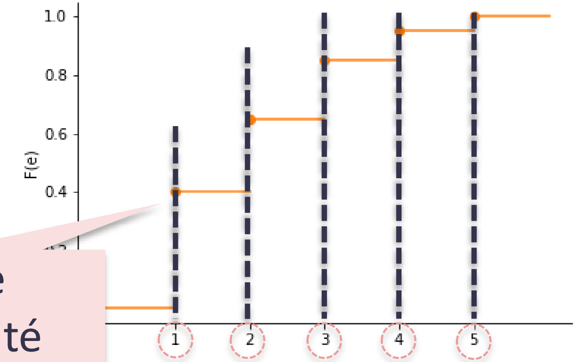
X	1	2	3	4	5
$p(e)$	0.4	0.25	0.2	0.1	0.05
$F(e)$	0.4	0.65	0.85	0.95	1

$$F(0) = 0$$
$$F(6) = 1$$

Loi de probabilité

Loi de probabilité de X (*probability distribution*)

Comment se répartit X : la probabilit



Points de discontinuité

Variable discrète (*discrete variable*)

$$\chi = \{e_1, e_2, \dots\}$$

Fonction de répartition (*cumulative distribution function, cdf*)

$$F(e_i) = P(X \leq e_i)$$

$X =$ "nombre de tasses de café un.e étudiant.e prend avant la pause de midi"

X	1	2	3	4	5
$p(e)$	0.4	0.25	0.2	0.1	0.05
$F(e)$	0.4	0.65	0.85	0.95	1

$$F(0) = 0$$
$$F(6) = 1$$

Loi de probabilité

Loi de probabilité de X
(*probability distribution*)

Comment se répartit X : la probabilité de tout événement lié à l'expérience

Variable discrète
(*discrete variable*)

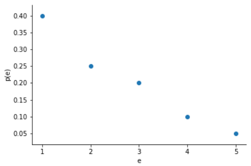
$$\chi = \{e_1, e_2, \dots\}$$

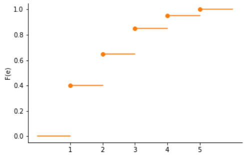
Fonction de masse (*probability mass function, pmf*)

$$p(e_i) = P(X = e_i)$$

Fonction de répartition (*cumulative distribution function, cdf*)

$$F(e_i) = P(X \leq e_i)$$





$X =$ "nombre de tasses de café un.e étudiant.e prend avant la pause de midi"

X	1	2	3	4	5
$p(e)$	0.4	0.25	0.2	0.1	0.05
$F(e)$	0.4	0.65	0.85	0.95	1

$$F(0) = 0$$
$$F(6) = 1$$

Loi de probabilité

Loi de probabilité de X
(*probability distribution*)

Comment se répartit X : la probabilité de tout événement lié à l'expérience

Variable discrète
(*discrete variable*)

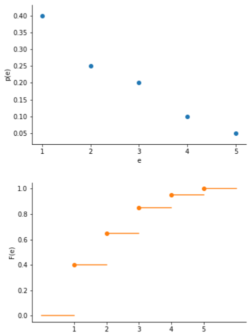
$$\chi = \{e_1, e_2, \dots\}$$

Fonction de masse (*probability mass function, pmf*)

$$p(e_i) = P(X = e_i)$$

Fonction de répartition (*cumulative distribution function, cdf*)

$$F(e_i) = P(X \leq e_i)$$



$X =$ "nombre de tasses de café un. e étudiant. e prend avant la pause de midi"

X	1	2	3	4	5
$p(e)$	0.4	0.25	0.2	0.1	0.05
$F(e)$	0.4	0.65	0.85	0.95	1

$$F(0) = 0$$
$$F(6) = 1$$

$$P(a \leq x \leq b) = F(b) - F(a)$$

INSA INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES LYON

membre de UNIVERSITÉ DE LYON

Loi de probabilité

Loi de probabilité de X
(*probability distribution*)

Comment se répartit X : la probabilité de tout événement lié à l'expérience

Variable continue
(*continuous variable*)

Fonction de densité (*probability density function, pdf*)

$$f(x) \geq 0$$

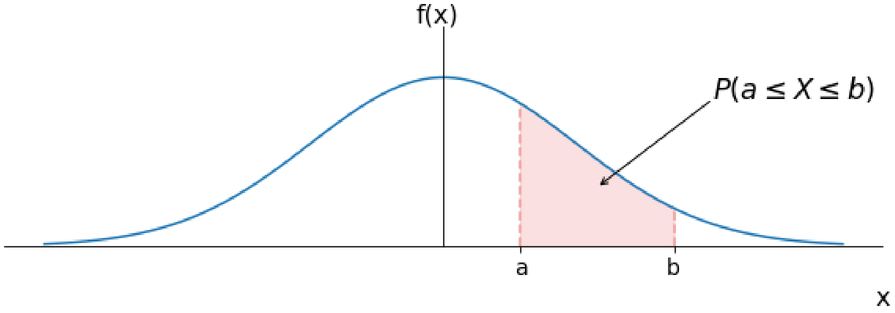
$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx$$

$$f_X(x) = \lim_{\Delta \to 0} \frac{\mathbb{P}(x < X \leq x + \Delta)}{\Delta}$$

Loi de probabilité

Loi de probabilité de X
(*probability distribution*)

Comment se répartit X : la probabilité de tout événement lié à l'expérience



Variable continue
(*continuous variable*)

Fonction de densité (*probability density function, pdf*)

$$f(x) \geq 0$$

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx$$

$$f_X(x) = \lim_{\Delta \to 0} \frac{\mathbb{P}(x < X \leq x + \Delta)}{\Delta}$$

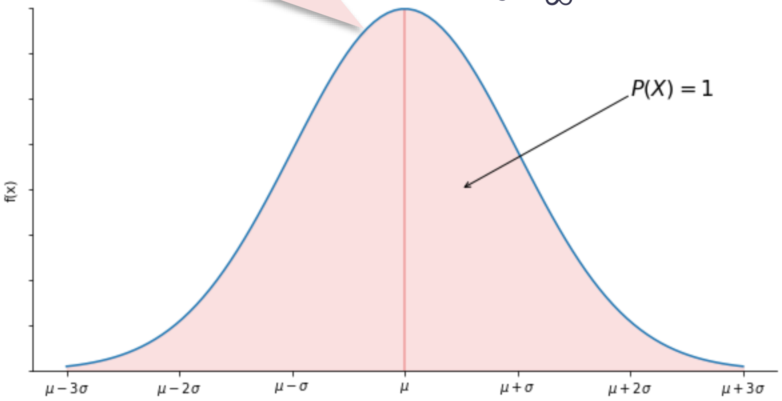
Loi de probabilité

Loi de probabilité de X (*probability distribution*)

Comment se répartit X : la probabilité de tout événement lié à l'expérience

Aire sous la courbe = 1

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = 1$$



Variable continue (*continuous variable*)

Fonction de densité (*probability density function, pdf*)

$$f(x) \geq 0$$

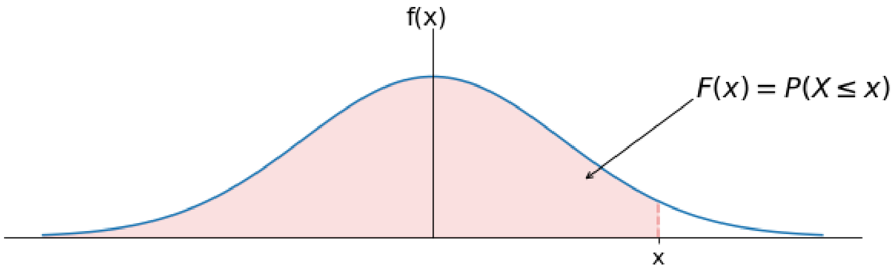
$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx$$

Loi de probabilité

Loi de probabilité de X
(*probability distribution*)

Comment se répartit X : la probabilité de tout événement lié à l'expérience

Variable continue
(*continuous variable*)



Fonction de répartition (*cumulative distribution function, cdf*)

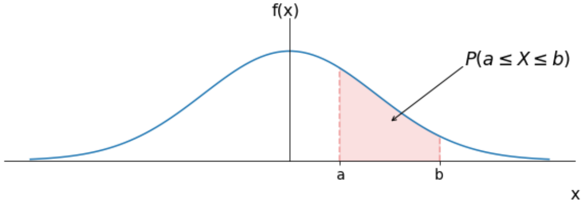
$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$

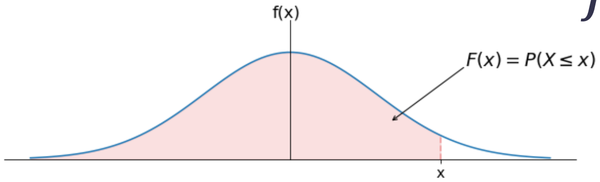
Loi de probabilité

Loi de probabilité de X (*probability distribution*)

Comment se répartit X : la probabilité de tout événement lié à l'expérience

Variable continue (*continuous variable*)





$$f_X(x) = \frac{d}{dx} F_X(x)$$

Fonction de densité

$$f(x) \geq 0$$

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx$$

Fonction de répartition

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$

Loi de probabilité

Loi de probabilité de X
(*probability distribution*)

Comment se répartit X : la probabilité de tout événement lié à l'expérience

Question

La v.a. X est définie sur l'intervalle $[0,2]$ par la fonction de densité $f(x) = cx^2$.

1. Quelle est la valeur de c ?
2. Quelle est sa fonction de répartition $F(x)$?
3. Quelle est la probabilité $P(1 \leq x \leq 2)$?

Variable continue
(*continuous variable*)

Fonction de densité

$$f(x) \geq 0$$

$$P(a \leq x \leq b) = \int_a^b f(x)dx$$

Fonction de répartition

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$

Loi de probabilité

Question

La v.a. X est définie sur l'intervalle $[0,2]$ par la fonction de densité $f(x) = cx^2$.

1. Quelle est la valeur de c ?
2. Quelle est sa fonction de répartition $F(x)$?
3. Quelle est la probabilité $P(1 \leq x \leq 2)$?

1. La somme des probabilités doit être **égale à 1**.

$$\int_a^b f(x)dx = \int_0^2 cx^2 dx = c\left.\frac{x^3}{3}\right|_0^2 =$$

$$= c\frac{8}{3} - 0 = c\frac{8}{3} = 1$$

Loi de probabilité

Question

La v.a. X est définie sur l'intervalle $[0,2]$ par la fonction de densité $f(x) = cx^2$.

1. Quelle est la valeur de c ?
2. Quelle est sa fonction de répartition $F(x)$?
3. Quelle est la probabilité $P(1 \leq x \leq 2)$?

1. La somme des probabilités doit être **égale à 1**.

$$\int_a^b f(x)dx = \int_0^2 cx^2 dx = c\left.\frac{x^3}{3}\right|_0^2 =$$

$$= c\frac{8}{3} - 0 = c\frac{8}{3} = 1$$

$$\boxed{c = \frac{3}{8}}$$

Loi de probabilité

Question

La v.a. X est définie sur l'intervalle $[0,2]$ par la fonction de densité $f(x) = cx^2$.

1. Quelle est la valeur de c ?
2. Quelle est sa fonction de répartition $F(x)$?
3. Quelle est la probabilité $P(1 \leq x \leq 2)$?

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$

Loi de probabilité

Question

La v.a. X est définie sur l'intervalle $[0,2]$ par la fonction de densité $f(x) = cx^2$.

1. Quelle est la valeur de c ?
2. Quelle est sa fonction de répartition $F(x)$?
3. Quelle est la probabilité $P(1 \leq x \leq 2)$?

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$

Loi de probabilité

Question

La v.a. X est définie sur l'intervalle $[0,2]$ par la fonction de densité $f(x) = cx^2$.
1. Quelle est la valeur de c ?
2. Quelle est sa fonction de répartition $F(x)$?
3. Quelle est la probabilité $P(1 \leq x \leq 2)$?

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$

2. Par définition, la fonction de densité $f(x)$ est égale à 0 en dehors de l'intervalle $[0, 2]$, c'est-à-dire $f(x < 0) = 0$ et $f(x > 2) = 0$. La fonction de répartition $F(x < 0) = 0$ et $F(x > 2) = 1$

Loi de probabilité

Question

La v.a. X est définie sur l'intervalle $[0,2]$ par la fonction de densité $f(x) = cx^2$.

1. Quelle est la valeur de c ?
2. Quelle est sa fonction de répartition $F(x)$?
3. Quelle est la probabilité $P(1 \leq x \leq 2)$?

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$

2. Par définition, la fonction de densité $f(x)$ est égale à 0 en dehors de l'intervalle $[0, 2]$, c'est-à-dire $f(x < 0) = 0$ et $f(x > 2) = 0$. La fonction de répartition $F(x < 0) = 0$ et $F(x > 2) = 1$

Alors, sur l'intervalle $0 \leq x \leq 2$:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{0}^{x} ct^2 dt = \frac{c}{3}x^3$$

$$= \frac{3}{8 \cdot 3}x^3 = \frac{x^3}{8} = \left(\frac{x}{2}\right)^3$$

Loi de probabilité

Question

La v.a. X est définie sur l'intervalle $[0,2]$ par la fonction de densité $f(x) = cx^2$.

1. Quelle est la valeur de c ?
2. Quelle est sa fonction de répartition $F(x)$?
3. Quelle est la probabilité $P(1 \leq x \leq 2)$?

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$

2. Par définition, la fonction de densité $f(x)$ est égale à 0 en dehors de l'intervalle $[0, 2]$, c'est-à-dire $f(x < 0) = 0$ et $f(x > 2) = 0$. La fonction de répartition $F(x < 0) = 0$ et $F(x > 2) = 1$

Alors, sur l'intervalle $0 \leq x \leq 2$:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{0}^{x} ct^2 dt = \frac{c}{3}x^3$$

$$= \frac{3}{8 \cdot 3}x^3 = \frac{x^3}{8} = \left(\frac{x}{2}\right)^3$$

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 0 \\ \left(\frac{x}{2}\right)^3, & \text{si } 0 \leq x \leq 2 \\ 1, & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

Loi de probabilité

Question

La v.a. X est définie sur l'intervalle $[0,2]$ par la fonction de densité $f(x) = cx^2$.
1. Quelle est la valeur de c ?
2. Quelle est sa fonction de répartition $F(x)$?
3. Quelle est la probabilité $P(1 \leq x \leq 2)$?

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$

2. Par définition, la fonction de densité $f(x)$ est égale à 0 en dehors de l'intervalle $[0, 2]$, c'est-à-dire $f(x < 0) = 0$ et $f(x > 2) = 0$. La fonction de répartition $F(x < 0) = 0$ et $F(x > 2) = 1$

Alors, sur l'intervalle $0 \leq x \leq 2$:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{0}^{x} ct^2 dt = \frac{c}{3}x^3$$

$$= \frac{3}{8 \cdot 3}x^3 = \frac{x^3}{8} = \left(\frac{x}{2}\right)^3$$

$$\boxed{F(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 0 \\ \left(\frac{x}{2}\right)^3, & \text{si } 0 \leq x \leq 2 \\ 1, & \text{si } x > 2 \end{cases}}$$

Loi de probabilité

Question

La v.a. X est définie sur l'intervalle $[0,2]$ par la fonction de densité $f(x) = cx^2$.

1. Quelle est la valeur de c ?
2. Quelle est sa fonction de répartition $F(x)$?
3. Quelle est la probabilité $P(1 \leq x \leq 2)$?

3. $$P(a \leq x \leq b) = \int_a^b f(x)dx$$

ou

$$P(a \leq x \leq b) = F(b) - F(a)$$

Loi de probabilité

Question

La v.a. X est définie sur l'intervalle $[0,2]$ par la fonction de densité $f(x) = cx^2$.

1. Quelle est la valeur de c ?
2. Quelle est sa fonction de répartition $F(x)$?
3. Quelle est la probabilité $P(1 \le x \le 2)$?

3. $$P(a \le x \le b) = \int_a^b f(x)dx$$

ou

$$P(a \le x \le b) = F(b) - F(a)$$

Option 1.

$P(1 \le x \le 2) = \int_1^2 f(x)dx =$
$\int_1^2 cx^2dx = c\,\frac{x^3}{3}\Big|_1^2 = \frac{3}{8} \cdot \frac{x^3}{3}\Big|_1^2 = \frac{x^3}{8}\Big|_1^2 =$
$\frac{8}{8} - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$

Loi de probabilité

Question

La v.a. X est définie sur l'intervalle $[0,2]$ par la fonction de densité $f(x) = cx^2$.

1. Quelle est la valeur de c ?
2. Quelle est sa fonction de répartition $F(x)$?
3. Quelle est la probabilité $P(1 \leq x \leq 2)$?

3. $$P(a \leq x \leq b) = \int_a^b f(x)dx$$

ou

$$P(a \leq x \leq b) = F(b) - F(a)$$

Option 1.

$$P(1 \leq x \leq 2) = \int_1^2 f(x)dx = \int_1^2 cx^2dx = c\left.\frac{x^3}{3}\right|_1^2 = \frac{3}{8} \cdot \left.\frac{x^3}{3}\right|_1^2 = \left.\frac{x^3}{8}\right|_1^2 = \frac{8}{8} - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$$

Option 2.

$$P(1 \leq x \leq 2) = F(2) - F(1) = \frac{8}{8} - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$$

Loi de probabilité

Question

La v.a. X est définie sur l'intervalle $[0,2]$ par la fonction de densité $f(x) = cx^2$.

1. Quelle est la valeur de c ?
2. Quelle est sa fonction de répartition $F(x)$?
3. Quelle est la probabilité $P(1 \leq x \leq 2)$?

3. $$P(a \leq x \leq b) = \int_a^b f(x)dx$$

ou

$$P(a \leq x \leq b) = F(b) - F(a)$$

Option 1.

$P(1 \leq x \leq 2) = \int_1^2 f(x)dx = \int_1^2 cx^2dx = c\left.\frac{x^3}{3}\right|_1^2 = \frac{3}{8} \cdot \left.\frac{x^3}{3}\right|_1^2 = \left.\frac{x^3}{8}\right|_1^2 = \frac{8}{8} - \frac{1}{8} = \boxed{\frac{7}{8}}$

Option 2.

$P(1 \leq x \leq 2) = F(2) - F(1) = \frac{8}{8} - \frac{1}{8} = \boxed{\frac{7}{8}}$

Loi de probabilité

Loi de probabilité de X (*probability distribution*)

Comment se répartit X : la probabilité de tout événement lié à l'expérience

Variable discrète (*discrete variable*)

$$\chi = \{e_1, e_2, \dots\}$$

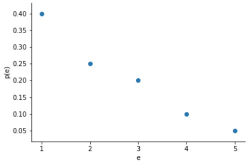
Fonction de masse (*probability mass function, pmf*)

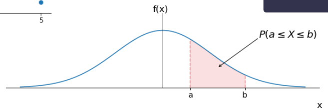
$$p(e_i) = P(X = e_i)$$

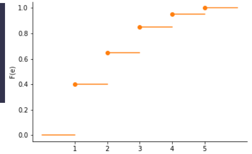
Fonction de répartition (*cumulative distribution function, cdf*)

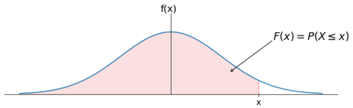
$$F(e_i) = P(X \leq e_i)$$

$$P(a \leq x \leq b) = F(b) - F(a)$$









Variable continue (*continuous variable*)

Fonction de densité

$$f(x) \geq 0$$

$$P(a \leq x \leq b) = \int_a^b f(x)dx$$

Fonction de répartition

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$

Variable aléatoire

Loi de probabilité

Les exemples de lois de probabilité

Moments d'une variable aléatoire

Moments (! Variables quantitatives)

Caractéristiques numériques de la distribution

Caractère central

Espérance
(expectation)

Mesure de la dispersion

Variance
(variance)

Ecart type
(standard deviation, std)

https://www.savagechickens.com/2009/03/love-stats.html

Moments (! Variables quantitatives)

Caractéristiques numériques de la distribution

Caractère central

Espérance
(expectation)

Mesure de la dispersion

Variance
(variance)

Ecart type
(standard deviation, std)

https://www.savagechickens.com/2009/03/love-stats.html

Moments (! Variables quantitatives)

Caractéristiques numériques de la distribution

Caractère central

Espérance (expectation)

Valeur moyenne

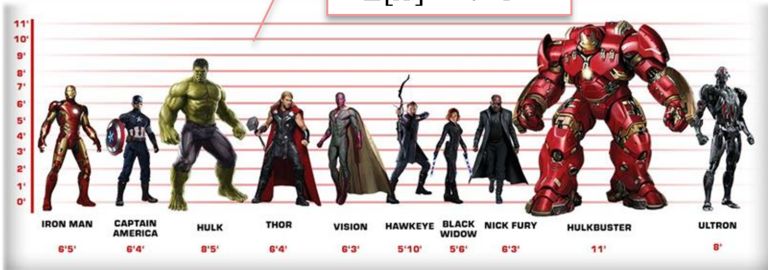
Discrètes v.a.

$$\mathbb{E}[X] = \sum_i x_i p_i = \sum_i x_i P(X = x_i)$$

Continues v.a.

$$\mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$$

$\mathbb{E}[X] = 7'4''$



http://www.herebegeeks.com/movies/5-things-to-know-about-the-the-avengers-age-of-ultrons-hulkbuster/

Moments (! Variables quantitatives)

Caractéristiques numériques de la distribution

Caractère central

Espérance (expectation)

Valeur moyenne

Discrètes v.a.

$$\mathbb{E}[X] = \sum_i x_i p_i = \sum_i x_i P(X = x_i)$$

Continues v.a.

$$\mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$$

❶ $\mathbb{E}[X + Y] = \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y]$

❷ $\mathbb{E}[aX + b] = a\mathbb{E}[X] + b$

http://www.herebegeeks.com/movies/5-things-to-know-about-the-the-avengers-age-of-ultrons-hulkbuster/

Moments (! Variables quantitatives)

Si chaque fois que vous obtenez *face* en lançant une pièce, vous gagnez 5 euros, et chaque fois que vous obtenez *pile*, vous perdez 5 euros. Quelle est l'espérance de gain ?

Moments (! Variables quantitatives)

Si chaque fois que vous obtenez *face* en lançant une pièce, vous gagnez 5 euros, et chaque fois que vous obtenez *pile*, vous perdez 5 euros. Quelle est l'espérance de gain ?

$$\mathbb{E}[X] = \sum_i x_i p_i = \sum_i x_i P(X = x_i)$$

x	-5	5
$P(X = x)$	$1/2$	$1/2$

Moments (! Variables quantitatives)

Si chaque fois que vous obtenez *face* en lançant une pièce, vous gagnez 5 euros, et chaque fois que vous obtenez *pile*, vous perdez 5 euros. Quelle est l'espérance de gain ?

$$\mathbb{E}[X] = \sum_i x_i p_i = \sum_i x_i P(X = x_i)$$

x	-5	5
$P(X = x)$	$1/2$	$1/2$

$$\mathbb{E}[X] = 5 \times \frac{1}{2} + (-5) \times \frac{1}{2} = 0$$

Moments (! Variables quantitatives)

Caractéristiques numériques de la distribution

Caractère central

Espérance
(expectation)

Mesure de la dispersion

Variance
(variance)

Ecart type
(standard deviation, std)

Moments (! Variables quantitatives)

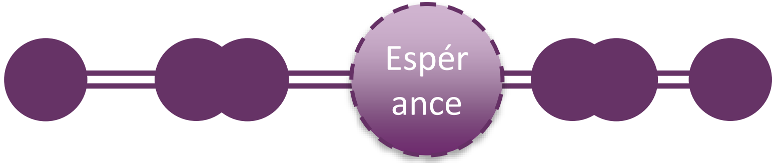
Caractéristiques numériques de la distribution

$$Var(X) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}X)^2] = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}X)^2 = \sigma^2$$

$$Var(X) = \int_a^b (x - \mathbb{E}X)^2 f(x)dx \text{ pour } X \text{ continu}$$

$$Var(X) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mathbb{E}X)^2 p(x_i) \text{ pour } X \text{ discret}$$

Dispersion de données
autour de son espérance $\mathbb{E}X$



Mesure de la dispersion

Variance
(variance)

Ecart type
(standard deviation, std)

Moments (! Variables quantitatives)

Caractéristiques numériques de la distribution

❶ $Var(X+Y) = Var(X) + Var(Y)$, si X et Y sont indép.
❷ $Var(aX+b) = a^2 Var(X)$

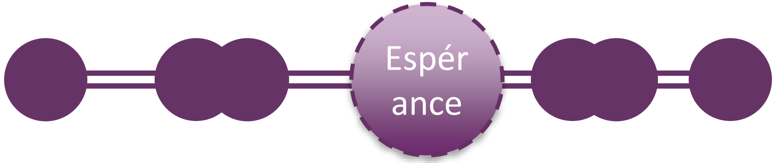
Mesure de la dispersion

$$Var(X) = \mathbb{E}[(X-\mathbb{E}X)^2] = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}X)^2 = \sigma^2$$

Variance
(variance)

Dispersion de données
autour de son espérance $\mathbb{E}X$

Ecart type
(standard deviation, std)



Moments (! Variables quantitatives)

Caractéristiques numériques de la distribution

Caractère central

Mesure de la dispersion

Espérance
(mean)

Variance
(variance)

Ecart type
(standard deviation, std)

Moments (! Variables quantitatives)

Caractéristiques numériques de la distribution

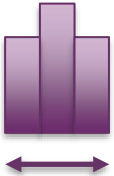
Mesure de la dispersion

l'écart entre les valeurs
prises par X et son espérance $\mathbb{E}X$

Variance
(variance)

$$\sigma(X) = \sqrt{Var(X)}$$

Ecart type
(standard deviation, std)



Petite valeur

Grande valeur

Moments (! Variables quantitatives)

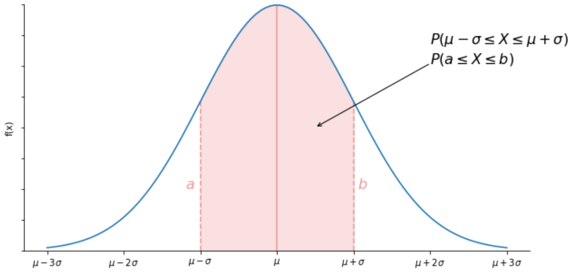
Caractéristiques numériques de la distribution

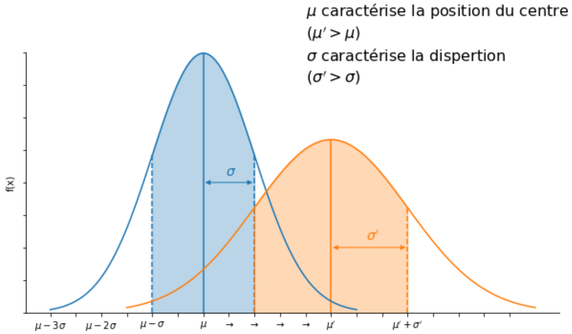
Espérance
(expectation)

Médiane
(median)

Variance
(variance)

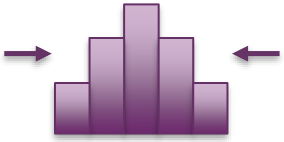
Ecart type
(standard deviation)

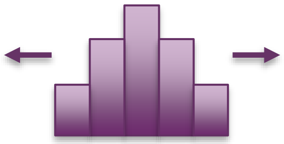




Moments (! Variables quantitatives)

Caractéristiques numériques de la distribution



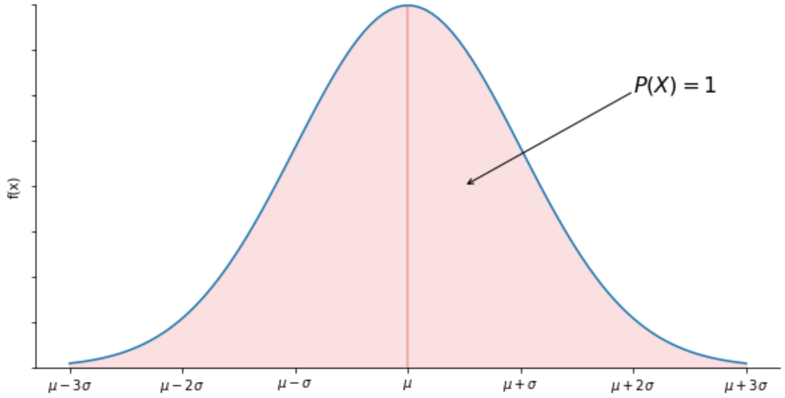


Espérance
(expectation)

Médiane
(median)

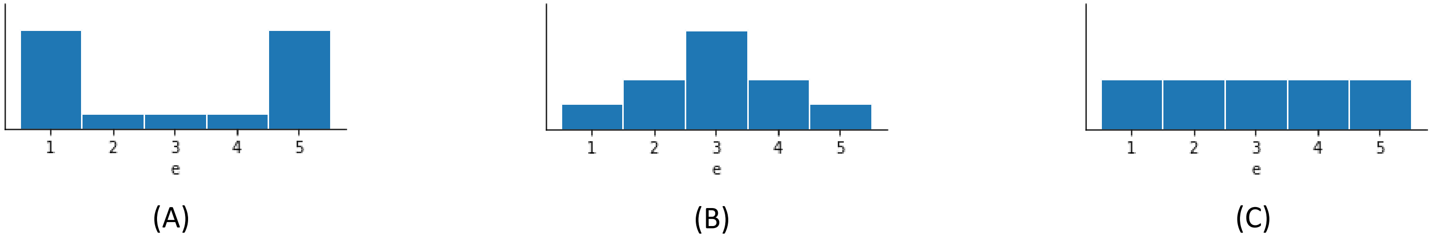
Variance
(variance)

Ecart type
(standard deviation)



Questions

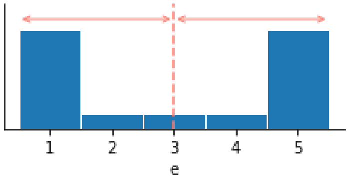
Q1: Les graphiques ci-dessous correspondent aux fonctions de masse de 3 v.a. En supposant que les unités de e de toutes les v.a. sont les mêmes, ordonnez les graphiques selon l'écart-type du plus grand au plus petit.



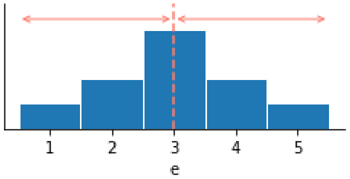
$1.\ ABC$ $\quad 2.\ ACB$ $\quad 3.\ BCA$ $\quad 4.\ CAB$ $\quad 5.\ BAC$ $\quad 6.\ CBA$

Questions

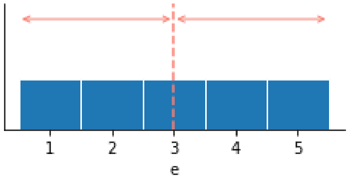
Q1: Les graphiques ci-dessous correspondent aux fonctions de masse de 3 v.a. En supposant que les unités de e de toutes les v.a. sont les mêmes, ordonnez les graphiques selon l'écart-type du plus grand au plus petit.



(A)



(B)



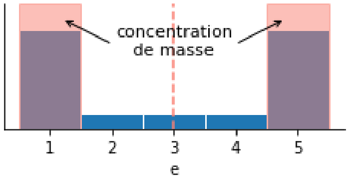
(C)

Toutes les v.a. ont la même plage de valeurs $\{1,2,3,4,5\}$ *et sont symétriques. Leur moyenne est égale à* 3.

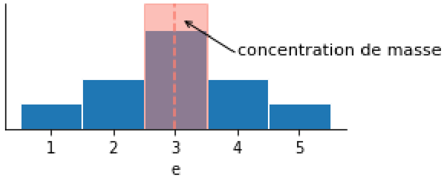
Jeremy Orloff, and Jonathan Bloom. *18.05 Introduction to Probability and Statistics.* Spring 2014. Massachusetts Institute of Technology: MIT OpenCourseWare, https://ocw.mit.edu. License:

Questions

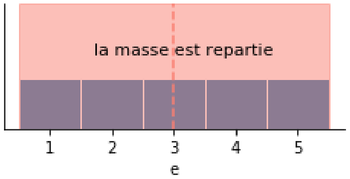
Q1: Les graphiques ci-dessous correspondent aux fonctions de masse de 3 v.a. En supposant que les unités de e de toutes les v.a. sont les mêmes, ordonnez les graphiques selon l'écart-type du plus grand au plus petit.



(A)



(B)

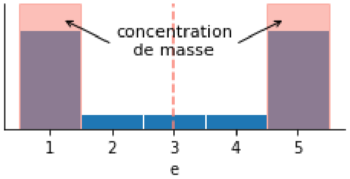


(C)

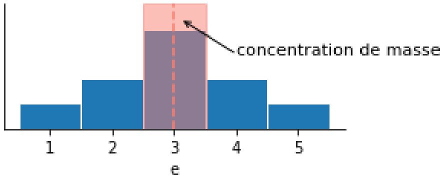
Toutes les v.a. ont la même plage de valeurs $\{1,2,3,4,5\}$ *et sont symétriques. Leur moyenne est égale à* 3.

Questions

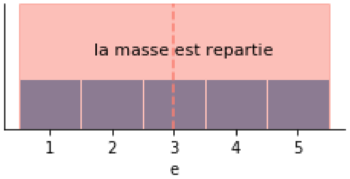
Q1: Les graphiques ci-dessous correspondent aux fonctions de masse de 3 v.a. En supposant que les unités de e de toutes les v.a. sont les mêmes, ordonnez les graphiques selon l'écart-type du plus grand au plus petit.



(A)



(B)



(C)

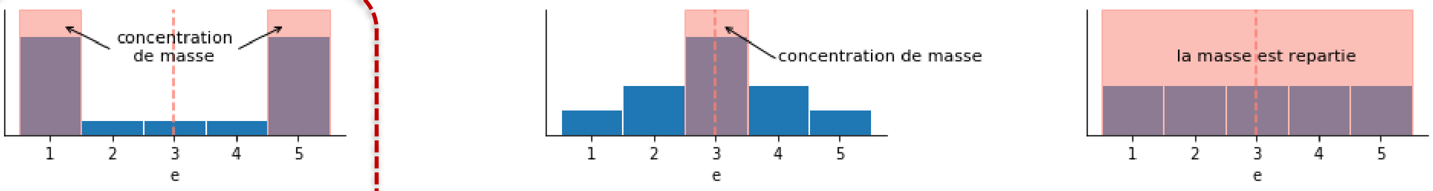
La dispersion maximale

Toutes les v.a. ont la même plage de valeurs $\{1,2,3,4,5\}$ *et sont symétriques.*
Leur moyenne est égale à 3.

Jeremy Orloff, and Jonathan Bloom. *18.05 Introduction to Probability and Statistics.* Spring 2014. Massachusetts Institute of Technology: MIT OpenCourseWare, https://ocw.mit.edu. License: Creative Commons BY-NC-SA.

Questions

Q1: Les graphiques ci-dessous correspondent aux fonctions de masse de 3 v.a. En supposant que les unités de e de toutes les v.a. sont les mêmes, ordonnez les graphiques selon l'écart-type du plus grand au plus petit.



(A) (B) (C)

La dispersion maximale

Toutes les v.a. ont la même plage de valeurs $\{1,2,3,4,5\}$ *et sont symétriques. Leur moyenne est égale à* 3.

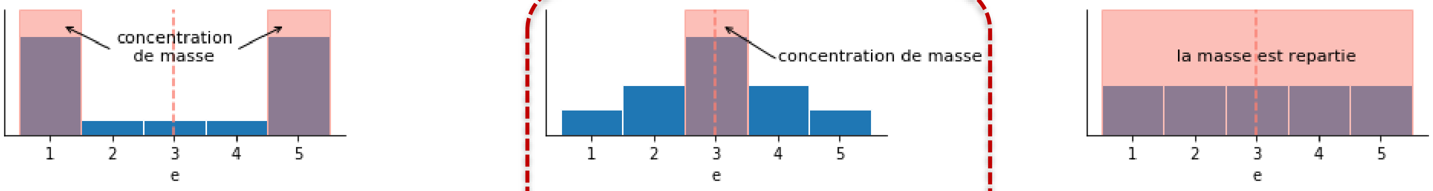
Réponse : A..

Jeremy Orloff, and Jonathan Bloom. *18.05 Introduction to Probability and Statistics.* Spring 2014. Massachusetts Institute of Technology: MIT OpenCourseWare, https://ocw.mit.edu. License: Creative Commons BY-NC-SA.

Questions

Q1: Les graphiques ci-dessous correspondent aux fonctions de masse de 3 v.a. En supposant que les unités de e de toutes les v.a. sont les mêmes, ordonnez les graphiques selon l'écart-type du plus grand au plus petit.

La dispersion minimale



(A) (B) (C)

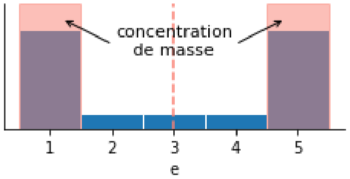
Toutes les v.a. ont la même plage de valeurs $\{1,2,3,4,5\}$ *et sont symétriques. Leur moyenne est égale à* 3.

Réponse : A. .

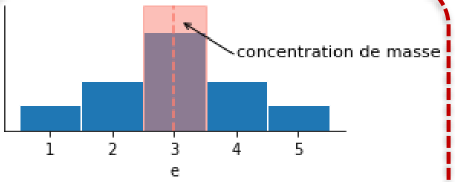
Questions

Q1: Les graphiques ci-dessous correspondent aux fonctions de masse de 3 v.a. En supposant que les unités de e de toutes les v.a. sont les mêmes, ordonnez les graphiques selon l'écart-type du plus grand au plus petit.

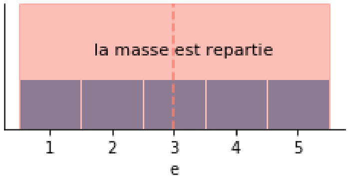
La dispersion minimale



(A)



(B)



(C)

Toutes les v.a. ont la même plage de valeurs $\{1,2,3,4,5\}$ *et sont symétriques.*
Leur moyenne est égale à 3.

Réponse : ACB

Questions

Q2: Soit X une v.a. définie par les valeurs ci-dessous. Calculez sa variance et son écart-type.

x	1	2	3	4	5
$p(x)$	0,05	0,25	0,4	0,25	0,05

Questions

Q2: Soit X une v.a. définie par les valeurs ci-dessous. Calculez sa variance et son écart-type.

x	1	2	3	4	5
$p(x)$	0,05	0,25	0,4	0,25	0,05

$$Var(X) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}X)^2] = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}X)^2 = \sigma^2$$

Questions

Q2: Soit X une v.a. définie par les valeurs ci-dessous. Calculez sa variance et son écart-type.

x	1	2	3	4	5
$p(x)$	0,05	0,25	0,4	0,25	0,05

$$Var(X) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}X)^2] = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}X)^2 = \sigma^2$$

Option 1

Questions

Q2: Soit X une v.a. définie par les valeurs ci-dessous. Calculez sa variance et son écart-type.

x	1	2	3	4	5
$p(x)$	0,05	0,25	0,4	0,25	0,05

$$Var(X) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}X)^2] = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}X)^2 = \sigma^2$$

$$\mathbb{E}[X] = \sum_i x_i p_i = \sum_i x_i P(X = x_i)$$

Option 1

Questions

Q2: Soit X une v.a. définie par les valeurs ci-dessous. Calculez sa variance et son écart-type.

x	1	2	3	4	5
$p(x)$	0,05	0,25	0,4	0,25	0,05

$$Var(X) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}X)^2] = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}X)^2 = \sigma^2$$

$$\mathbb{E}[X] = \sum_i x_i p_i = \sum_i x_i P(X = x_i)$$

$$\mathbb{E}[X] = 1 \times 0{,}05 + 2 \times 0{,}25 + 3 \times 0{,}4 + 4 \times 0{,}25 + 5 \times 0{,}05 = \\ = 0{,}05 + 0{,}5 + 1{,}2 + 1 + 0{,}25 = 3$$

Option 1

Questions

Q2: Soit X une v.a. définie par les valeurs ci-dessous. Calculez sa variance et son écart-type.

x	1	2	3	4	5
$p(x)$	$0{,}05$	$0{,}25$	$0{,}4$	$0{,}25$	$0{,}05$
$(X-\mathbb{E}X)^2$	$(1-3)^2=4$	$(2-3)^2=1$	$(3-3)^2=0$	$(4-3)^2=1$	$(5-3)^2=4$

$$Var(X)=\mathbb{E}[(X-\mathbb{E}X)^2]=\mathbb{E}[X^2]-(\mathbb{E}X)^2=\sigma^2$$

$$\mathbb{E}[X]=\sum_i x_i p_i=\sum_i x_i P(X=x_i)$$

$$\mathbb{E}[X]=1\times 0{,}05+2\times 0{,}25+3\times 0{,}4+4\times 0{,}25+5\times 0{,}05=$$
$$=0{,}05+0{,}5+1{,}2+1+0{,}25=3$$

Option 1

Questions

Q2: Soit X une v.a. définie par les valeurs ci-dessous. Calculez sa variance et son écart-type.

x	1	2	3	4	5
$p(x)$	0,05	0,25	0,4	0,25	0,05
$(X-\mathbb{E}X)^2$	$(1-3)^2=4$	$(2-3)^2=1$	$(3-3)^2=0$	$(4-3)^2=1$	$(5-3)^2=4$

$$Var(X)=\mathbb{E}[(X-\mathbb{E}X)^2]=\mathbb{E}[X^2]-(\mathbb{E}X)^2=\sigma^2$$

$$\mathbb{E}[X]=\sum_i x_i p_i=\sum_i x_i P(X=x_i)$$

$$Var(X)=4\times 0{,}05+1\times 0{,}25+0\times 0{,}4+1\times 0{,}25+4\times 0{,}05=$$
$$=0{,}2+0{,}25+0+0{,}25+0{,}2=0{,}9$$

Option 1

Questions

Q2: Soit X une v.a. définie par les valeurs ci-dessous. Calculez sa variance et son écart-type.

x	1	2	3	4	5
$p(x)$	$0{,}05$	$0{,}25$	$0{,}4$	$0{,}25$	$0{,}05$
$(X-\mathbb{E}X)^2$	$(1-3)^2=4$	$(2-3)^2=1$	$(3-3)^2=0$	$(4-3)^2=1$	$(5-3)^2=4$

$$Var(X) = \mathbb{E}[(X-\mathbb{E}X)^2] = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}X)^2 = \sigma^2$$

$$Var(X) = 4\times 0{,}05 + 1\times 0{,}25 + 0\times 0{,}4 + 1\times 0{,}25 + 4\times 0{,}05 =$$
$$= 0{,}2 + 0{,}25 + 0 + 0{,}25 + 0{,}2 = 0{,}9$$

$$\sigma(X) = \sqrt{Var(X)}$$

$$\sigma(X) = \sqrt{0{,}9}$$

Option 1

Questions

Q2: Soit X une v.a. définie par les valeurs ci-dessous. Calculez sa variance et son écart-type.

x	1	2	3	4	5
$p(x)$	0,05	0,25	0,4	0,25	0,05

$$Var(X) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}X)^2] = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}X)^2 = \sigma^2$$

Option 2

Questions

Q2: Soit X une v.a. définie par les valeurs ci-dessous. Calculez sa variance et son écart-type.

x	1	2	3	4	5
$p(x)$	$0{,}05$	$0{,}25$	$0{,}4$	$0{,}25$	$0{,}05$
x^2	$1^2 = 1$	$2^2 = 4$	$3^2 = 9$	$4^2 = 16$	$5^2 = 25$

$$Var(X) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}X)^2] = \mathbb{E}[{\color{red}X^2}] - (\mathbb{E}X)^2 = \sigma^2$$

Option 2

Questions

Q2: Soit X une v.a. définie par les valeurs ci-dessous. Calculez sa variance et son écart-type.

x	1	2	3	4	5
$p(x)$	0,05	0,25	0,4	0,25	0,05
x^2	$1^2 = 1$	$2^2 = 4$	$3^2 = 9$	$4^2 = 16$	$5^2 = 25$

$$Var(X) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}X)^2] = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}X)^2 = \sigma^2$$

$$\mathbb{E}[X^2] = 1 \times 0.05 + 4 \times 0.25 + 9 \times 0.4 + 16 \times 0.25 + 25 \times 0.05$$
$$= 0.05 + 1 + 3.6 + 4 + 1.25 = 9.9$$

Option 2

Questions

Q2: Soit X une v.a. définie par les valeurs ci-dessous. Calculez sa variance et son écart-type.

x	1	2	3	4	5
$p(x)$	0,05	0,25	0,4	0,25	0,05
x^2	$1^2 = 1$	$2^2 = 4$	$3^2 = 9$	$4^2 = 16$	$5^2 = 25$

$$Var(X) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}X)^2] = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}X)^2 = \sigma^2$$

$$\mathbb{E}[X^2] = 1 \times 0.05 + 4 \times 0.25 + 9 \times 0.4 + 16 \times 0.25 + 25 \times 0.05$$
$$= 0.05 + 1 + 3.6 + 4 + 1.25 = 9.9$$

$$\mathbb{E}[X] = 1 \times 0{,}05 + 2 \times 0{,}25 + 3 \times 0{,}4 + 4 \times 0{,}25 + 5 \times 0{,}05 =$$
$$= 0{,}05 + 0{,}5 + 1{,}2 + 1 + 0{,}25 = 3$$
$$(\mathbb{E}X)^2 = 3^2 = 9$$

Option 2

Questions

Q2: Soit X une v.a. définie par les valeurs ci-dessous. Calculez sa variance et son écart-type.

x	1	2	3	4	5
$p(x)$	0,05	0,25	0,4	0,25	0,05
x^2	$1^2 = 1$	$2^2 = 4$	$3^2 = 9$	$4^2 = 16$	$5^2 = 25$

$$Var(X) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}X)^2] = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}X)^2 = \sigma^2 = 9.9 - 9 = 0.9$$

$$\mathbb{E}[X^2] = 1 \times 0.05 + 4 \times 0.25 + 9 \times 0.4 + 16 \times 0.25 + 25 \times 0.05$$
$$= 0.05 + 1 + 3.6 + 4 + 1.25 = 9.9$$
$$\mathbb{E}[X] = 1 \times 0{,}05 + 2 \times 0{,}25 + 3 \times 0{,}4 + 4 \times 0{,}25 + 5 \times 0{,}05 =$$
$$= 0{,}05 + 0{,}5 + 1{,}2 + 1 + 0{,}25 = 3$$
$$(\mathbb{E}X)^2 = 3^2 = 9$$

Option 2

Questions

Q3: Est-ce que l'affirmation suivante est correcte :

$$\text{Si } Var(X) = 0 \ \Rightarrow X = const\ ?$$

Questions

Q3: Est-ce que l'affirmation suivante est correcte :

$$\text{Si } Var(X) = 0 \;\Rightarrow X = const \text{ ?}$$

$$Var(X) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}X)^2]$$

Preuve par absurde :

Si X peut prendre différentes valeurs à probabilité positive,
alors $Var(X) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}X)^2] = \sum_i (x_i - \mathbb{E}X)^2 p_i$, *c'est-à-dire une somme d'éléments positifs. Il est donc impossible que* $Var(X) = 0$.

Donc $X = const$ *si* $Var(X) = 0$

Questions

Q3: Est-ce que l'affirmation suivante est correcte :

$$\text{Si } Var(X) = 0 \Rightarrow X = const \text{ ?}$$

$$Var(X) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}X)^2]$$

Preuve par absurde :

Si X peut prendre différentes valeurs à probabilité positive, alors $Var(X) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}X)^2] = \sum_i (x_i - \mathbb{E}X)^2 p_i$, c'est-à-dire une somme d'éléments positifs. Il est donc impossible que $Var(X) = 0$.

Donc $X = const$ si $Var(X) = 0$

Réponse : $Vrai$

Jeremy Orloff, and Jonathan Bloom. *18.05 Introduction to Probability and Statistics.* Spring 2014. Massachusetts Institute of Technology: MIT OpenCourseWare, https://ocw.mit.edu. License: Creative Commons BY-NC-SA.

Variable aléatoire

Loi de probabilité

Les exemples de lois de probabilité

Moments d’une variable aléatoire

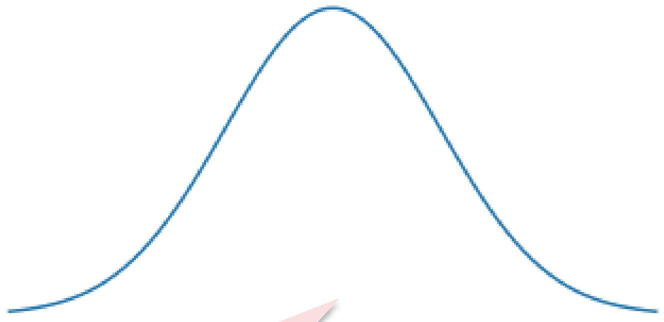
Distribution normale (Normal Distribution)

Distribution «**normale**» car plusieurs phénomènes suivent cette loi de probabilité

aka : distribution Gaussienne

Distribution normale (Normal Distribution)

Distribution «**normale**» car plusieurs phénomènes suivent cette loi de probabilité
aka : distribution Gaussienne

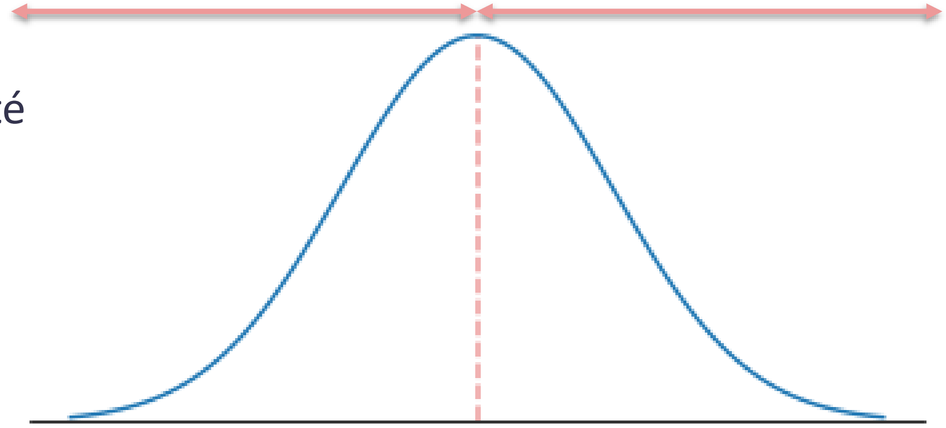


Forme de cloche
(*bell shape*)

Distribution normale (Normal Distribution)

Distribution «**normale**» car plusieurs phénomènes suivent cette loi de probabilité

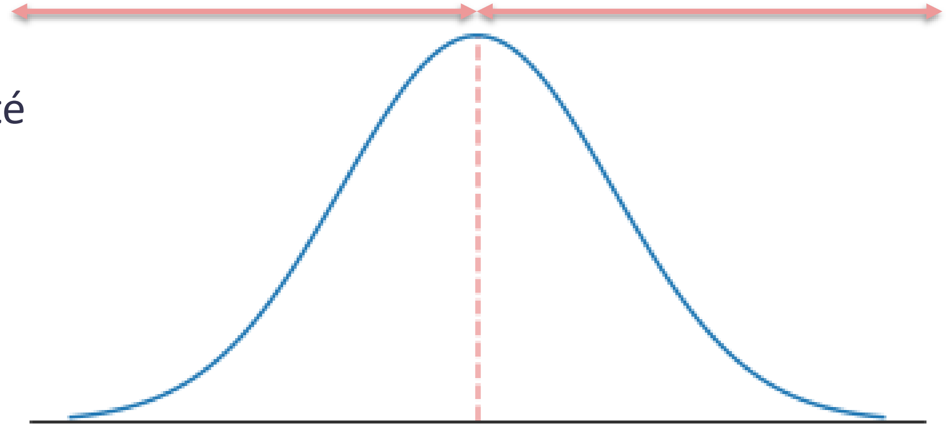
aka : distribution Gaussienne



Symétrique

Distribution normale (Normal Distribution)

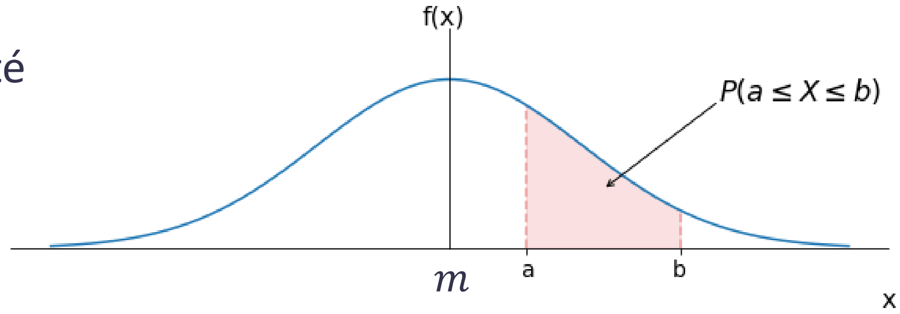
Distribution «**normale**» car plusieurs phénomènes suivent cette loi de probabilité
aka : distribution Gaussienne



Symétrique

Distribution normale (Normal Distribution)

Distribution «**normale**» car plusieurs phénomènes suivent cette loi de probabilité
aka : distribution Gaussienne



$$\boxed{f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-1/2\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2}}$$

Fonction de densité

$$f(x) \geq 0$$

$$P(a \leq x \leq b) = \int_a^b f(x)dx$$

Distribution normale (Normal Distribution)

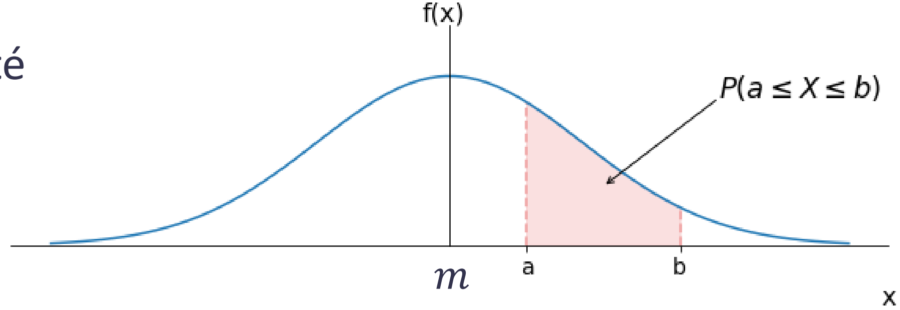
Distribution «**normale**» car plusieurs phénomènes suivent cette loi de probabilité
aka : distribution Gaussienne

$\mathcal{N}(m, \sigma^2)$

Moyenne (espérance)

$$\boxed{f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-1/2\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2}}$$

dispersion



Fonction de densité

$$f(x) \geq 0$$

$$P(a \leq x \leq b) = \int_a^b f(x)dx$$

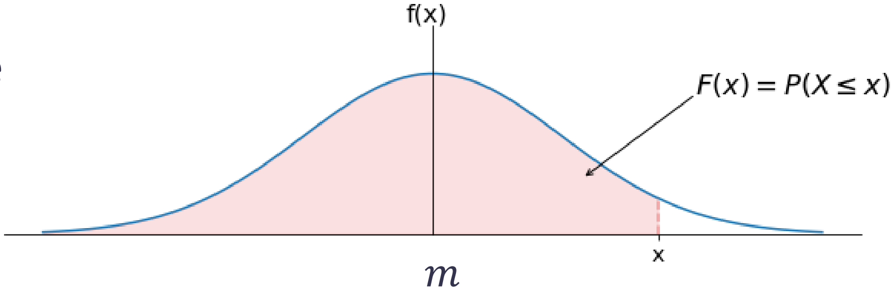
parfois la notation μ est utilisée au lieu de m

Distribution normale (Normal Distribution)

Distribution «**normale**» car plusieurs phénomènes suivent cette loi de probabilité
aka : distribution Gaussienne

$\mathcal{N}(m, \sigma^2)$

$$\boxed{F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-1/2\left(\frac{t-m}{\sigma}\right)^2} dt}$$



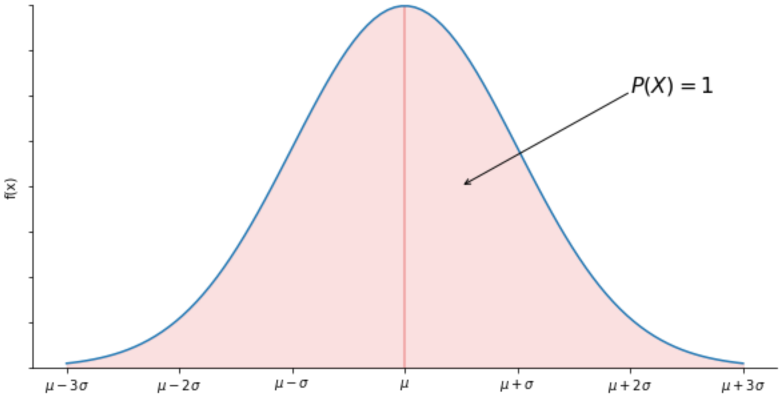
Fonction de répartition

$$f(x) \geq 0$$

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$

Distribution normale (Normal Distribution)

Distribution «**normale**» car plusieurs phénomènes suivent cette loi de probabilité
aka : distribution Gaussienne



$\mathcal{N}(m, \sigma^2)$

$$\boxed{F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-1/2\left(\frac{t-m}{\sigma}\right)^2} dt}$$

Fonction de répartition

$$f(x) \geq 0$$

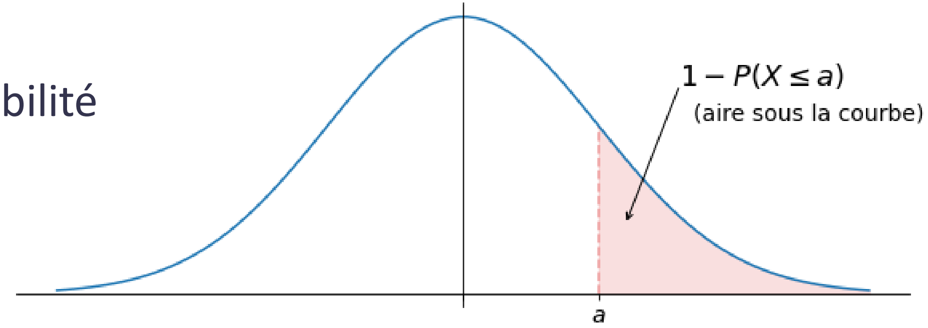
$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$

Distribution normale (Normal Distribution)

Distribution «**normale**» car plusieurs phénomènes suivent cette loi de probabilité
aka : distribution Gaussienne

$\mathcal{N}(m, \sigma^2)$

$$\boxed{F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-1/2\left(\frac{t-m}{\sigma}\right)^2} dt}$$



Fonction de répartition

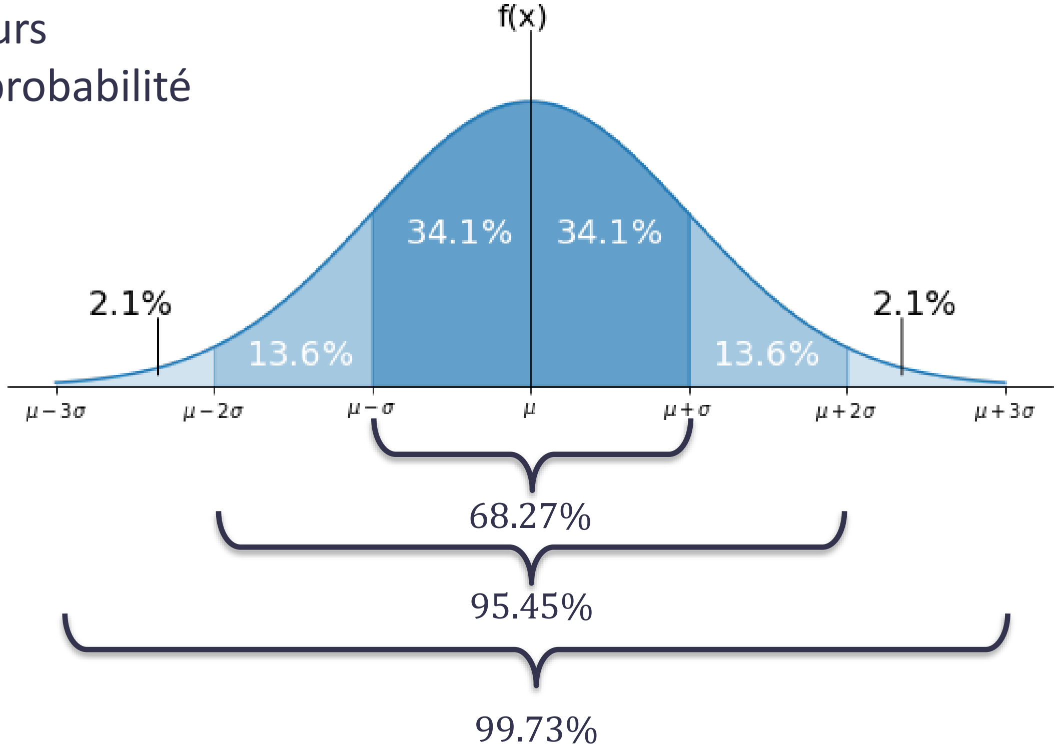
$$f(x) \geq 0$$

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$

Distribution normale (Normal Distribution)

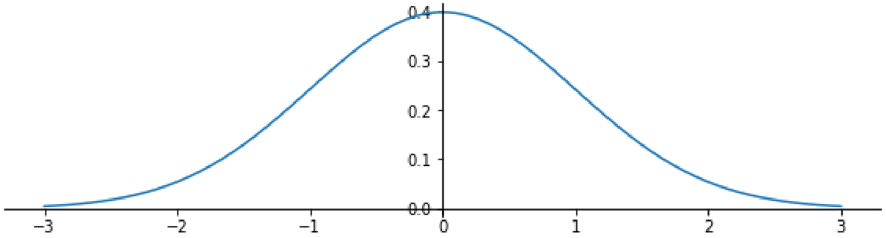
Distribution «**normale**» car plusieurs phénomènes suivent cette loi de probabilité
aka : distribution Gaussienne

$\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$



Distribution normale (Normal Distribution)

Distribution «**normale**» car plusieurs phénomènes suivent cette loi de probabilité
aka : distribution Gaussienne

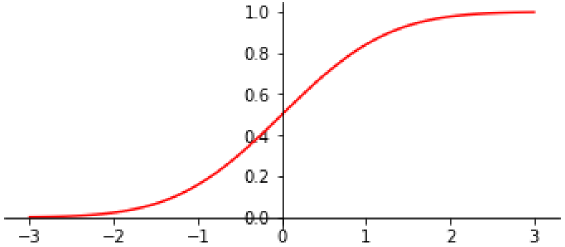


$\mathcal{N}(0,1)$

$m = 0, \sigma^2 = 1 \Rightarrow$ **Loi normale centrée réduite**
(*standard normal distribution*)

$$\boxed{\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}}$$

$$\boxed{\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt}$$



Les valeurs de la distribution sont connues

INSA INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES LYON

membre de UNIVERSITÉ DE LYON

Dis nal Distribution)

Distr

phén lité

aka

$\mathcal{N}(($

$m =$ **éduite**

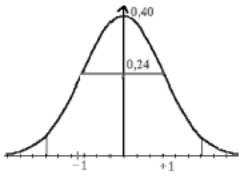
(*stan*

Table de la fonction de répartition de la loi normale

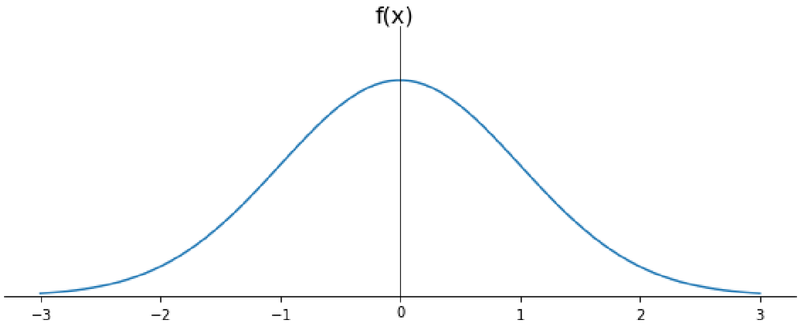
Si X est une variable aléatoire suivant une loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0,1)$, la table donne la valeur de la fonction de répartition de X en x, $F(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$.

La valeur de x s'obtient par addition des nombres inscrits en marge.

Pour $x < 0$, on a $F(x) = 1 - F(|x|)$.



x	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7703	.7734	.7764	.7793	.7823	.7852
.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767
2.0	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
2.2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890
2.3	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916
2.4	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936
2.5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952
2.6	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	.9962	.9963	.9964
2.7	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9974
2.8	.9974	.9975	.9976	.9977	.9977	.9978	.9979	.9979	.9980	.9981
2.9	.9981	.9982	.9982	.9983	.9984	.9984	.9985	.9985	.9986	.9986
3.0	.9987	.9987	.9987	.9988	.9988	.9989	.9989	.9989	.9990	.9990



$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

Les valeurs de la distribution sont connues

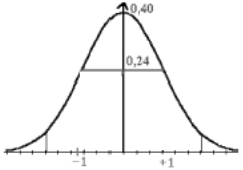
Dis… nal Distribution)

Table de la fonction de répartition de la loi normale

Si X est une variable aléatoire suivant une loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0,1)$, la table donne la valeur de la fonction de répartition de X en x, $F(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$.

La valeur de x s'obtient par addition des nombres inscrits en marge.

Pour $x < 0$, on a $F(x) = 1 - F(|x|)$.



x	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7703	.7734	.7764	.7793	.7823	.7852
.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767
2.0	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
2.2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890
2.3	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916
2.4	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936
2.5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952
2.6	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	.9962	.9963	.9964
2.7	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9974
2.8	.9974	.9975	.9976	.9977	.9977	.9978	.9979	.9979	.9980	.9981
2.9	.9981	.9982	.9982	.9983	.9984	.9984	.9985	.9985	.9986	.9986
3.0	.9987	.9987	.9987	.9988	.9988	.9989	.9989	.9989	.9990	.9990

Distr… lité

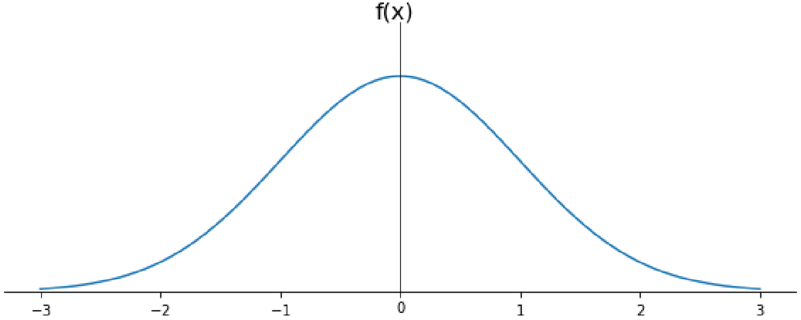
phér…

aka

$\mathcal{N}(0$…

$m =$ … **éduite**

(*star*…



$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

Les valeurs de la distribution sont connues

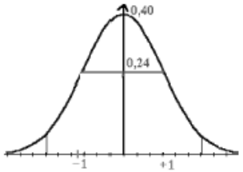
Dis… …nal Distri…

Table de la fonction de répartition de la loi normale

Si X est une variable aléatoire suivant une loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0,1)$, la table donne la valeur de la fonction de répartition de X en x, $F(x) = \mathbb{P}(X \le x)$.

La valeur de x s'obtient par addition des nombres inscrits en marge.

Pour $x < 0$, on a $F(x) = 1 - F(|x|)$.



x	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7703	.7734	.7764	.7793	.7823	.7852
.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767
2.0	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
2.2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890
2.3	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916
2.4	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936
2.5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952
2.6	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	.9962	.9963	.9964
2.7	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9974
2.8	.9974	.9975	.9976	.9977	.9977	.9978	.9979	.9979	.9980	.9981
2.9	.9981	.9982	.9982	.9983	.9984	.9984	.9985	.9985	.9986	.9986
3.0	.9987	.9987	.9987	.9988	.9988	.9989	.9989	.9989	.9990	.9990

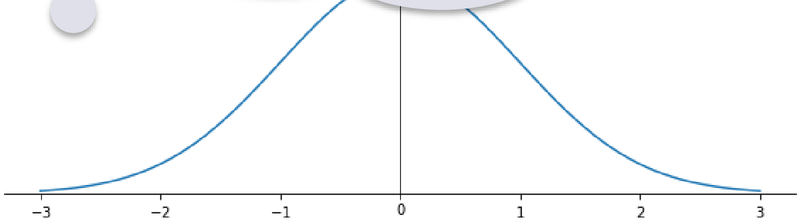
Quelle est la valeur de $\Phi(1.53)$?

Distr… phén… …lité
aka

$\mathcal{N}(0$…

$m =$ … …éduite
(*stan*…

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$



Les valeurs de la distribution sont connues

Dis… nal Distri…

Distr… phén… lité

aka …

$\mathcal{N}(($…

$m =$ … éduite

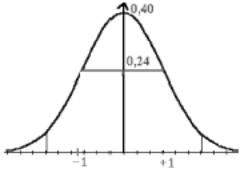
(*star*…

Table de la fonction de répartition de la loi normale

Si X est une variable aléatoire suivant une loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0,1)$, la table donne la valeur de la fonction de répartition de X en x, $F(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$.

La valeur de x s'obtient par addition des nombres inscrits en marge.

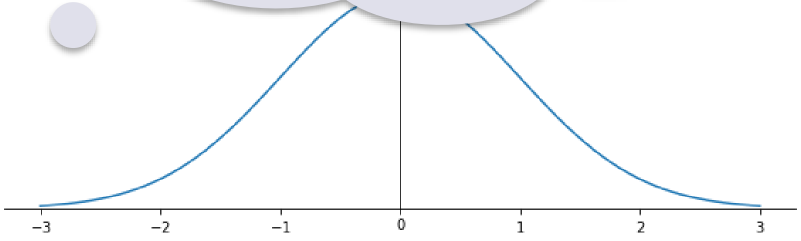
Pour $x < 0$, on a $F(x) = 1 - F(|x|)$.



x	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7703	.7734	.7764	.7793	.7823	.7852
.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	$\boxed{.9370}$	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767
2.0	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
2.2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890
2.3	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916
2.4	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936
2.5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952
2.6	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	.9962	.9963	.9964
2.7	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9974
2.8	.9974	.9975	.9976	.9977	.9977	.9978	.9979	.9979	.9980	.9981
2.9	.9981	.9982	.9982	.9983	.9984	.9984	.9985	.9985	.9986	.9986
3.0	.9987	.9987	.9987	.9988	.9988	.9989	.9989	.9989	.9990	.9990

Quelle est la valeur de $\Phi(1.53)$?

0.937



$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

Les valeurs de la distribution sont connues

Dis… nal Distri…

Distr… phén… …lité

aka …

$\mathcal{N}(0$ …

$m =$ … …duite

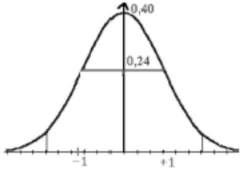
(*stan*…

Table de la fonction de répartition de la loi normale

Si X est une variable aléatoire suivant une loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0, 1)$, la table donne la valeur de la fonction de répartition de X en x, $F(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$.

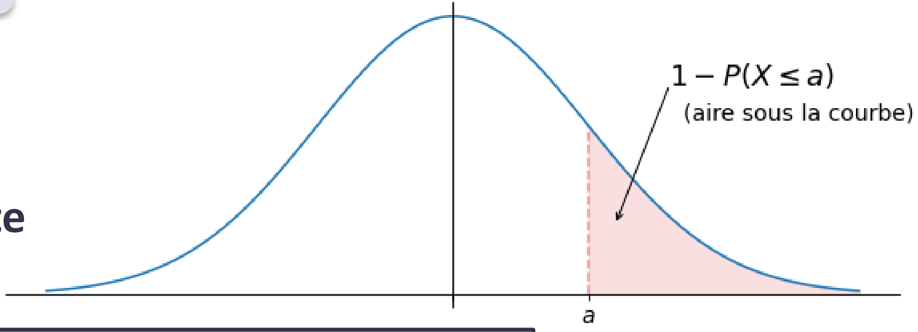
La valeur de x s'obtient par addition des nombres inscrits en marge.

Pour $x < 0$, on a $F(x) = 1 - F(|x|)$.



x	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7703	.7734	.7764	.7793	.7823	.7852
.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767
2.0	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
2.2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890
2.3	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916
2.4	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936
2.5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952
2.6	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	.9962	.9963	.9964
2.7	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9974
2.8	.9974	.9975	.9976	.9977	.9977	.9978	.9979	.9979	.9980	.9981
2.9	.9981	.9982	.9982	.9983	.9984	.9984	.9985	.9985	.9986	.9986
3.0	.9987	.9987	.9987	.9988	.9988	.9989	.9989	.9989	.9990	.9990

Quelle est la valeur de $\Phi(-2)$?



$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

Les valeurs de la distribution sont connues

Dis… …nal Distri…

Distr… phén… … …lité
aka …

$\mathcal{N}(0$ …

$m =$ … …**eduite**
(star …

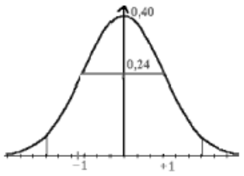
$\Phi($ …

Table de la fonction de répartition de la loi normale

Si X est une variable aléatoire suivant une loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0, 1)$, la table donne la valeur de la fonction de répartition de X en x, $F(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$.

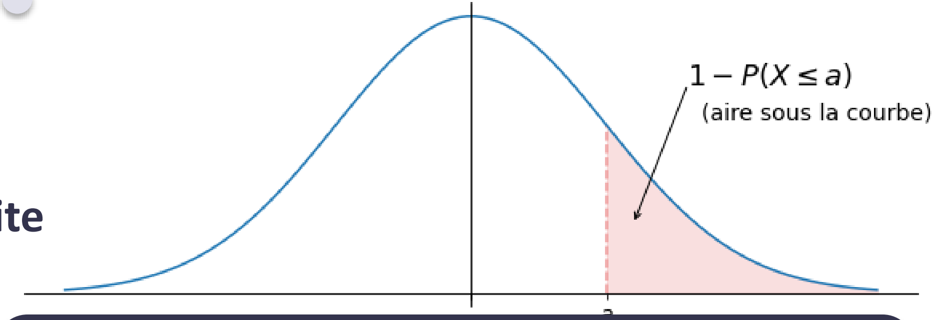
La valeur de x s'obtient par addition des nombres inscrits en marge.

Pour $x < 0$, on a $F(x) = 1 - F(|x|)$.



x	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7703	.7734	.7764	.7793	.7823	.7852
.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767
2.0	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
2.2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890
2.3	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916
2.4	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936
2.5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952
2.6	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	.9962	.9963	.9964
2.7	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9974
2.8	.9974	.9975	.9976	.9977	.9977	.9978	.9979	.9979	.9980	.9981
2.9	.9981	.9982	.9982	.9983	.9984	.9984	.9985	.9985	.9986	.9986
3.0	.9987	.9987	.9987	.9988	.9988	.9989	.9989	.9989	.9990	.9990

Quelle est la valeur de $\Phi(-2)$?



Pour $x < 0$: $\Phi(x) = 1 - \Phi(|x|)$

Les valeurs de la distribution sont connues

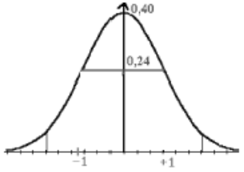
Dis... nal Distri...

Table de la fonction de répartition de la loi normale

Si X est une variable aléatoire suivant une loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0,1)$, la table donne la valeur de la fonction de répartition de X en x, $F(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$.

La valeur de x s'obtient par addition des nombres inscrits en marge.

Pour $x < 0$, on a $F(x) = 1 - F(|x|)$.



x	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7703	.7734	.7764	.7793	.7823	.7852
.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767
2.0	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
2.2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890
2.3	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916
2.4	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936
2.5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952
2.6	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	.9962	.9963	.9964
2.7	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9974
2.8	.9974	.9975	.9976	.9977	.9977	.9978	.9979	.9979	.9980	.9981

Distr... lité

phén...

aka

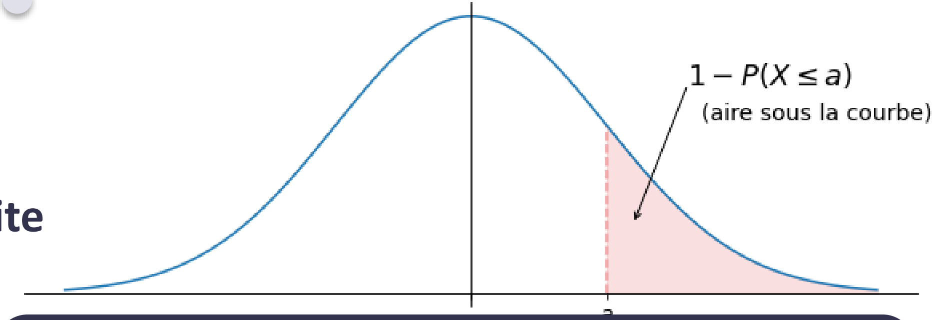
$\mathcal{N}(0$

$m =$ ... éduite

(stan

$\Phi($

Quelle est la valeur de $\Phi(-2)$?



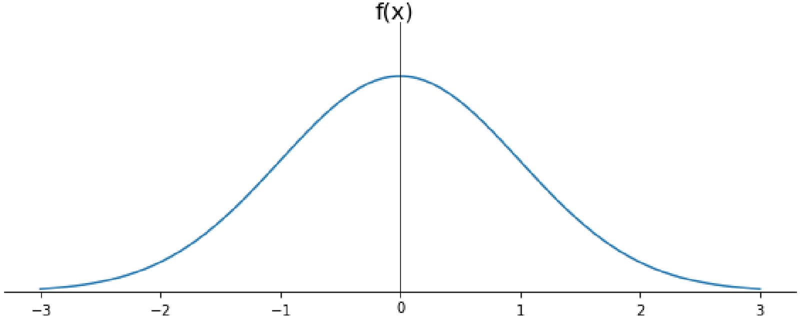
Pour $x < 0$: $\Phi(x) = 1 - \Phi(|x|)$

Les valeurs de la distribution sont connues

$$\boldsymbol{\Phi(-2) = 1 - \Phi(2) = 1 - 0.9972 = 0.0028}$$

Distribution normale (Normal Distribution)

Distribution «**normale**» car plusieurs phénomènes suivent cette loi de probabilité
aka : distribution Gaussienne



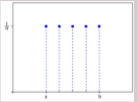
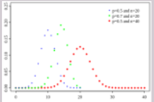
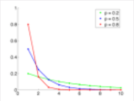
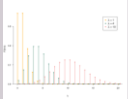
$$X \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2) \;\; \rightarrow \;\; Y \sim \mathcal{N}(0, 1)$$

Le processus de **normalisation** (standardisation) :

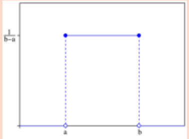
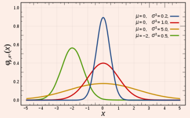
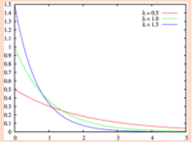
$$\boxed{Y = \frac{X - m}{\sigma}}$$

$$\boxed{\mathbb{P}(X \leq x) = \mathbb{P}\left(\frac{X - m}{\sigma} \leq \frac{x - m}{\sigma}\right) = \mathbb{P}\left(Y \leq \frac{x - m}{\sigma}\right)}$$

Loi de probabilité – Variables discrètes

	Plage des valeurs	Fonction de masse		Espérance	Variance	Interprétation
Uniforme discrète, $\boldsymbol{\mathcal{U}(N)}$	$\{1, \dots, N\}$	$P(X=k) = \frac{1}{N}$		$\frac{N+1}{2}$	$\frac{N^2-1}{12}$	N issues équiprobables possibles
Bernoulli, $\boldsymbol{\mathcal{B}(p)}$	$\{0,1\}$	$P(X=k) = \begin{cases} 1-p, \text{si } k=0 \\ p, \quad \text{si } k=1 \\ 0, \quad \text{sinon} \end{cases}$		p	$p(1-p)$	2 issues possibles (*pile ou face d'une pièce*)
Binomiale, $\boldsymbol{\mathcal{B}(n,p)}$	$\{0, \dots, n\}$	$P(X=k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$		np	$np(1-p)$	Somme de n Bernoullis indép. : # de succès dans n tirages si chaque tirage a une probabilité p d'être gagnant (*# de tickets gagnant parmi n*)
Géométrique, $\boldsymbol{\mathcal{G}(p)}$	$\{0, \dots, \infty\}$	$P(X=k) = p(1-p)^{k-1}$		$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$	# de tirages avant le premier succès dans une séquence de Bernoullis indép. (*# de piles avant la première face*)
Poisson, $\boldsymbol{\mathcal{P}(\lambda)}$	$\{0, \dots, \infty\}$	$P(X=k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$		λ	λ	Évènements rares : une réalisation sur un grand nombre d'expériences

Loi de probabilité – Variables continues

	Plage des valeurs	Densité		Espérance	Variance	Interprétation
Uniforme, $\boldsymbol{\mathcal{U}([a,b])}$	$[a,b]$	$f(x) = \frac{1}{b-a}\mathbb{I}_{[a,b]}(x)$ $\mathbb{I}_A(x) = \begin{cases} 1, \text{si } x \in A \\ 0, \text{sinon} \end{cases}$		$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$	Toutes les valeurs ont la même chance d'apparaître (permutation aléatoire uniforme)
Normale, Gaussienne, Laplace-Gauss, $\boldsymbol{\mathcal{N}(m,\sigma^2)}$	$\mathbb{R}$	$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-1/2\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2}$		m	σ^2	Loi des moyennes
Exponentielle, $\boldsymbol{\mathcal{E}(\lambda)}$	$\mathbb{R}^+$	$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}\mathbb{I}_{\mathbb{R}^+}(x)$		$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$	Loi des durés de vie / réalisations de tâches

Fonction caractéristique

On appelle **fonction caractéristique** (*characteristic function* ou *CF*) de la v.a.r. X la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ définie par

$$\phi_X(t) = \mathbb{E}\left(e^{itX}\right) = \mathbb{E}(\cos(tX)) + i\mathbb{E}(\sin(tX)), \forall t \in \mathbb{R}$$

Cas continu : S'il existe une fonction de densité; f_X, alors : $\phi_X(t) = \int_{\mathbb{R}} f_X(x)\, e^{itx} dx$

Cas discret : $\phi_X(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(X = k) e^{tik} = G_X\left(e^{it}\right)$

Fonction caractéristique

On appelle **fonction caractéristique** (*characteristic function* ou *CF*) de la v.a.r. X la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ définie par

$$\phi_X(t) = \mathbb{E}\left(e^{itX}\right) = \mathbb{E}(\cos(tX)) + i\mathbb{E}(\sin(tX)), \forall t \in \mathbb{R}$$

Propriétés :

1. Si $\phi_X(t)$ est deux fois dérivable en 0, alors $\mathbb{E}[X]$ et $\mathbb{E}[X^2]$ existent et :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}X &= -i\phi_X'(0) \\ \mathbb{E}X^2 &= -\phi_X''(0) \end{aligned}$$

2. Soit a et b deux réels et Y la v.a.r. définie par $Y = aX + b$. La fonction caractéristique $\phi_Y(t)$ de la v.a.r. Y vérifie :

$$\phi_Y(t) = e^{itb}\phi_X(at), \ \forall t \in \mathbb{R}$$

Fonction génératrice

Soit X v.a.r. discrète à valeurs entières. On appelle **fonction génératrice** (*generating function*) ou **fonction génératrice des moments factoriels** de X la fonction définie pour tout $s \in [-1,1]$ par

$$G_X(s) = \mathbb{E}(s^X) = \sum_{j \in \mathbb{N}} s^j \times \mathbb{P}(X = j)$$

Propriétés :

- $G_X(1) = 1, G_X(0) = \mathbb{P}(X = 0)$
- $G_X'(1) = \mathbb{E}(X), G_X''(1) = \mathbb{E}\big(X(X-1)\big)$ et plus généralement : $\forall\, k \in \mathbb{N}^*$

$$G_X^{(k)}(1) = \mathbb{E}\big(X \times (X-1) \times \cdots \times (X-k+1)\big)$$