INSA INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES LYON

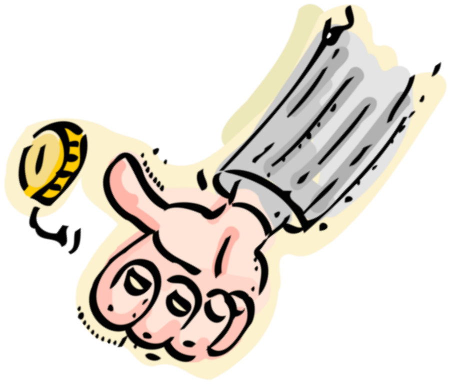
Introduction aux Probabilités

Diana Nurbakova

2023/2024

Introduction

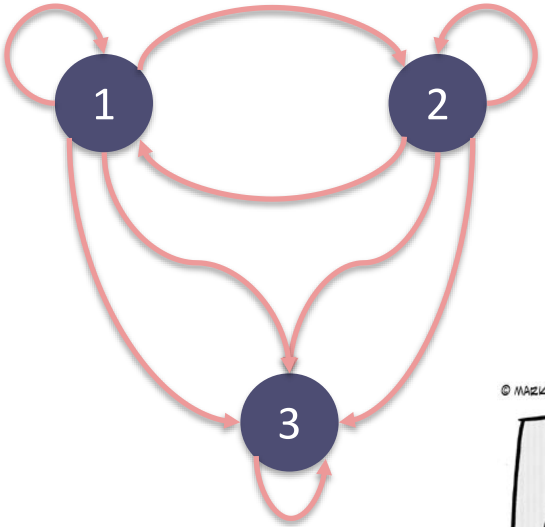
Notion de hazard, chance

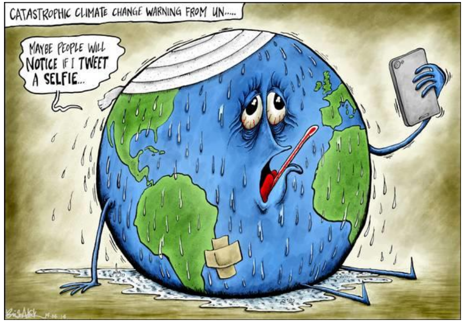


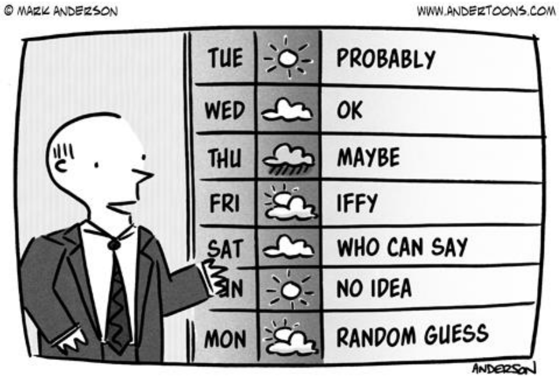
https://www.pinclipart.com/

Introduction

Science de hazard, risque







"And now the 7-day forecast..."

https://andertoons.com/weather/cartoon/6825/and-now-the-7-day-forecast

Plan

Analyse combinatoire

Dénombrements (Counting) : Motivation

Rangs (*ranks*) :	A	K	D	V	10	9	8	7	6	5	4	3	2
Enseignes (*suits*) :	♦	♣	♥	♠									

Combien de combinaisons possibles ?

Dénombrements (Counting) : Motivation

	A	K	D	V	10	9	8	7	6	5	4	3	2
♦	A♦	K♦	D♦	V♦	10♦	9♦	8♦	7♦	6♦	5♦	4♦	3♦	2♦
♣	A♣	K♣	D♣	V♣	10♣	9♣	8♣	7♣	6♣	5♣	4♣	3♣	2♣
♥	A♥	K♥	D♥	V♥	10♥	9♥	8♥	7♥	6♥	5♥	4♥	3♥	2♥
♠	A♠	K♠	D♠	V♠	10♠	9♠	8♠	7♠	6♠	5♠	4♠	3♠	2♠

Dénombrements (Counting) : Motivation

Une main au Poker : 5 cartes

La paire (*one-pair*) : 2 cartes de même rang + 3 autres cartes quelconques dont le rang est différent de la paire (sinon c'est un brelan) et différent entre elles (sinon c'est une double paire)

9♣ 9♥ V♠ 6♦ 2♣

La probabilité d'avoir une paire est :

(A) $< 5\%$

(B) entre 5% et 10%

(C) entre 10% et 20%

(D) entre 20% et 40%

(E) $> 40\%$

Sans répétition

Permutations

Arrangements

Combinaisons

Avec répétition

Permutations

Une permutation (*permutation*) de n éléments est toute disposition **ordonnée** de ces n éléments.

Permutations

Une permutation (*permutation*) de n éléments est toute disposition **ordonnée** de ces n éléments.

- Les éléments des permutations du même ensemble E sont les mêmes

$$E = \{\ \boxed{\diamondsuit}\ \boxed{\clubsuit}\ \boxed{\heartsuit}\ \boxed{\spadesuit}\ \}$$

$$\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array}$$

$$permutation_1(E) = \{\ \boxed{\diamondsuit}\ \boxed{\heartsuit}\ \boxed{\clubsuit}\ \boxed{\spadesuit}\ \}$$

$$permutation_2(E) = \{\ \boxed{\spadesuit}\ \boxed{\diamondsuit}\ \boxed{\heartsuit}\ \boxed{\clubsuit}\ \}$$

Permutations

Une permutation (*permutation*) de n éléments est toute disposition **ordonnée** de ces n éléments.

- Les éléments des permutations du même ensemble E sont les mêmes

$$E = \{a, b, c\}$$

1	a		b		c	
2	b	c	a	c	b	a
3	c	b	c	a	a	b

abc
acb
bac
bca
cab
cba

Permutations

Une permutation (*permutation*) de n éléments est toute disposition **ordonnée** de ces n éléments.

- Les éléments des permutations du même ensemble E sont les mêmes

$$E = \{a, b, c\}$$

1	a		b		c	
2	b	c	a	c	b	a
3	c	b	c	a	a	b

abc

acb

cba

Nombre de manières de choisir le 1er élément $= 3 = n$

Permutations

Une permutation (*permutation*) de n éléments est toute disposition **ordonnée** de ces n éléments.

- Les éléments des permutations du même ensemble E sont les mêmes

$$E = \{a, b, c\}$$

1	a		b		c	
2	b	c	a	c	b	a
3	c	b	c	a	a	b

abc

acb

Nombre de manières de choisir le 2ème élément pour le 1er élément déjà choisi $= 2 = n - 1$

Permutations

Une permutation (*permutation*) de n éléments est toute disposition **ordonnée** de ces n éléments.

- Les éléments des permutations du même ensemble E sont les mêmes

$$E = \{a, b, c\}$$

1 a b c

2 b c a c b a

3 c b c a a b

abc

acb

Nombre de manières de choisir le 3ème élément pour les deux premiers éléments déjà choisis $= 1 = n - 2$

Permutations

Une permutation (*permutation*) de n éléments est toute disposition **ordonnée** de ces n éléments.

- Les éléments des permutations du même ensemble E sont les mêmes

$$E = \{a, b, c\}$$

1	a		b		c	
2	b	c	a	c	b	a
3	c	b	c	a	a	b

abc

acb

Le nombre de permutations

$$3 \times 2 \times 1 = 6 \; = 3!$$

$$n \times (n-1) \times \cdots \times 1 \; = n!$$

Permutations

Une permutation (*permutation*) de n éléments est toute disposition **ordonnée** de ces n éléments.

- Les éléments des permutations du même ensemble E sont les mêmes
- Le nombre de permutations d'un ensemble à n éléments est :

$$n!$$

Sans répétition

Permutations

Arrangements

Combinaisons

Avec répétition

Arrangements sans répétition

4 personnes participent au Cross de l'INSA :
Karine, Michel, Kevin, Amélie
Combien de possibilités existe-t-il pour définir la 1ère et la 2ème place de la compétition ?

Arrangements sans répétition

4 personnes participent au Cross de l’INSA :
Karine, Michel, Kevin, Amélie
Combien de possibilités existe-t-il pour définir la $1^{ère}$ et la $2^{ème}$ place de la compétition ?

$1^{ère}$ place Karine

Arrangements sans répétition

4 personnes participent au Cross de l'INSA :
Karine, Michel, Kevin, Amélie
Combien de possibilités existe-t-il pour définir la 1ère et la 2ème place de la compétition ?

CROSS DE L'INSA XXVI ÉDITION

1ère place

Karine

Quelles sont les possibilités pour la 2ème place une fois que nous savons la 1ère ?

2ème place

Arrangements sans répétition

4 personnes participent au Cross de l'INSA :
Karine, Michel, Kevin, Amélie
Combien de possibilités existe-t-il pour définir la 1ère et la 2ème place de la compétition ?

1ère place — Karine

2ème place — Michel, Kevin, Amélie

Arrangements sans répétition

4 personnes participent au Cross de l'INSA :
Karine, Michel, Kevin, Amélie
Combien de possibilités existe-t-il pour définir la $1^{\text{ère}}$ et la $2^{\text{ème}}$ place de la compétition ?

$1^{\text{ère}}$ place

Karine

$2^{\text{ème}}$ place

Michel Kevin Amélie

Choix parmi les **3** options restantes

Arrangements sans répétition

4 personnes participent au Cross de l’INSA :
Karine, Michel, Kevin, Amélie
Combien de possibilités existe-t-il pour définir la 1ère et la 2ème place de la compétition ?

1ère place

2ème place

Arrangements sans répétition

4 personnes participent au Cross de l'INSA :
Karine, Michel, Kevin, Amélie
Combien de possibilités existe-t-il pour définir la 1ère et la 2ème place de la compétition ?

1ère place		Karine			Michel	
2ème place	Michel	Kevin	Amélie	Karine	Kevin	Amélie

Les gens (éléments) sont les mêmes mais l'ordre est différent
⇒ pas la même chose (arrangement)

Arrangements sans répétition

4 personnes participent au Cross de l'INSA :
Karine, Michel, Kevin, Amélie
Combien de possibilités existe-t-il pour définir la 1ère et la 2ème place de la compétition ?

1ère place		Karine			Michel	
2ème place	Michel	Kevin	Amélie	Karine	Kevin	Amélie
1ère place		Kevin				
2ème place	Michel	Karine	Amélie			

Arrangements sans répétition

4 personnes participent au Cross de l'INSA :
Karine, Michel, Kevin, Amélie
Combien de possibilités existe-t-il pour définir la $1^{\text{ère}}$ et la $2^{\text{ème}}$ place de la compétition ?

$1^{\text{ère}}$ place		Karine			Michel	
$2^{\text{ème}}$ place	Michel	Kevin	Amélie	Karine	Kevin	Amélie
$1^{\text{ère}}$ place		Kevin			Amélie	
$2^{\text{ème}}$ place	Michel	Karine	Amélie	Karine	Kevin	Michel

Arrangements sans répétition

4 personnes participent au Cross de l'INSA :
Karine, Michel, Kevin, Amélie
Combien de possibilités existe-t-il pour définir la 1ère et la 2ème place de la compétition ?

4 possibilités pour la 1ère place

1ère place	Karine		Michel
2ème place	Michel, Kevin, Amélie		Karine, Kevin, Amélie
1ère place	Kevin		Amélie
2ème place	Michel, Karine, Amélie		Karine, Kevin, Michel

Arrangements sans répétition

4 personnes participent au Cross de l'INSA :
Karine, Michel, Kevin, Amélie
Combien de possibilités existe-t-il pour définir la 1ère et la 2ème … compétition ?

Pour chaque 1ère place, 3 possibilités pour la 2ème place

1ère place	Karine	Michel
2ème place	Michel, Kevin, Amélie	Karine, Kevin, Amélie
1ère place	Kevin	Amélie
2ème place	Michel, Karine, Amélie	Karine, Kevin, Michel

Arrangements sans répétition

4 personnes participent au Cross de l'INSA :
Karine, Michel, Kevin, Amélie
Combien de possibilités existe-t-il pour définir la 1ère et la 2ème ... compétition ?

Pour chaque 1ère place, 3 possibilités pour la 2ème place

1ère place		Karine			Michel	
2ème place	Michel	Kev...		...n		Amélie
1ère place		Kevin			Amélie	
2ème place	Michel	Karine	Amélie	Karine	Kevin	Michel

$$4 \times 3 = 12$$

Arrangements sans répétition

Un arrangement sans répétition (k-*permutation*) de k éléments parmi les n de l'ensemble E est toute disposition **ordonnée** de k éléments.

Arrangements sans répétition

Un arrangement sans répétition (k-*permutation*) de k éléments parmi les n de l'ensemble E est toute disposition **ordonnée** de k éléments.

- Un arrangement sans répétition de n éléments pris parmi n éléments est une permutation

Arrangements sans répétition

Un arrangement sans répétition (k-*permutation*) de k éléments parmi les n de l'ensemble E est toute disposition **ordonnée** de k éléments.

$$E = \{a, b, c, d\}$$

Tous les arrangements de 3 éléments :

?

Arrangements sans répétition

Un arrangement sans répétition (k-*permutation*) de k éléments parmi les n de l'ensemble E est toute disposition **ordonnée** de k éléments.

$$E = \{a, b, c, d\}$$

Tous les arrangements de 3 éléments :

1 $a \quad b \quad c \quad d$

2 $b \; c \; d \quad a \; c \; d \quad b \; a \; d \quad b \; c \; a$

3 $c\,d \;\; b\,d \;\; b\,c \quad c\,d \;\; a\,d \;\; a\,c \quad a\,d \;\; b\,d \;\; b\,a \quad c\,a \;\; b\,a \;\; b\,c$

Arrangements sans répétition

Un arrangement sans répétition (*k-permutation*) de k éléments parmi les n de l'ensemble E est toute disposition **ordonnée** de k éléments.

$$E = \{a, b, c, d\}$$

Tous les arrangements de 3 éléments :

$abc\ abd\ acb\ acd\ adb\ adc$
$bac\ bad\ bca\ bcd\ bda\ bdc$
$cba\ cbd\ cab\ cad\ cdb\ cda$
$dbc\ dba\ dcb\ dca\ dab\ dac$

1 $\quad a \qquad b \qquad c \qquad d$

2 $\quad b\ c\ d \qquad a\ c\ d \qquad b\ a\ d \qquad b\ c\ a$

3 $\quad c\ d\ \ b\ d\ \ b\ c \qquad c\ d\ \ a\ d\ \ a\ c \qquad a\ d\ \ b\ d\ \ b\ a \qquad c\ a\ \ b\ a\ \ b\ c$

Arrangements sans répétition

Un arrangement sans répétition (k-*permutation*) de k éléments parmi les n de l'ensemble E est toute disposition **ordonnée** de k éléments.

$$E = \{a, b, c, d\}$$

Tous les ar

Nombre de manières de choisir le 1er élément parmi 4 $= 4 \; = \; n$

$abc \; abd \; acb \; acd \; adb \; adc$
$bac \; bad \; bca \; bcd \; bda \; bdc$
$cba \; cbd \; cab \; cad \; cdb \; cda$
$dbc \; dba \; dcb \; dca \; dab \; dac$

1 $\quad a \quad b \quad c \quad d$

2 $\quad b \; c \; d \quad a \; c \; d \quad b \; a \; d \quad b \; c \; a$

3 $\quad c\,d \;\; b\,d \;\; b\,c \quad c\,d \;\; a\,d \;\; a\,c \quad a\,d \;\; b\,d \;\; b\,a \quad c\,a \;\; b\,a \;\; b\,c$

Arrangements sans répétition

Un arrangement sans répétition (*k-permutation*) de k éléments parmi les n de l'ensemble E est toute disposition **ordonnée** de k éléments.

$$E = \{a, b, c, d\}$$

Tous les ar

Nombre de manières de choisir le 2ème élément sachant le 1er $=$ $3 = n - 1$

$abc\ abd\ acb\ acd\ adb\ adc$
$bac\ bad\ bca\ bcd\ bda\ bdc$
$cba\ cbd\ cab\ cad\ cdb\ cda$
$dbc\ dba\ dcb\ dca\ dab\ dac$

1 a b c d

2 b c d a c d b a d b c a

3 $c\ d$ $b\ d$ $b\ c$ $c\ d$ $a\ d$ $a\ c$ $a\ d$ $b\ d$ $b\ a$ $c\ a$ $b\ a$ $b\ c$

Arrangements sans répétition

Un arrangement sans répétition (k-*permutation*) de k éléments parmi les n de l'ensemble E est toute disposition **ordonnée** de k éléments.

$$E = \{a, b, c, d\}$$

Tous les ar

Nombre de manières de choisir le 3ème élément sachant le 1er et le 2ème $= 2 \; = \; n - 2$

$abc \; abd \; acb \; acd \; adb \; adc$
$bac \; bad \; bca \; bcd \; bda \; bdc$
$cba \; cbd \; cab \; cad \; cdb \; cda$
$dbc \; dba \; dcb \; dca \; dab \; dac$

1 $\quad a \quad b \quad c \quad d$

2 $\quad b \; c \; d \quad a \; c \; d \quad b \; a \; d \quad b \; c \; a$

3 $\quad c\,d \;\; b\,d \;\; b\,c \quad c\,d \;\; a\,d \;\; a\,c \quad a\,d \;\; b\,d \;\; b\,a \quad c\,a \;\; b\,a \;\; b\,c$

Arrangements sans répétition

Un arrangement sans répétition (k-*permutation*) de k éléments parmi les n de l'ensemble E est toute disposition **ordonnée** de k éléments.

$E = \{a, b, c, d\}$

Tous les ar

Nombre d'arrangements de 3 éléments parmi 4 $= 4 \times 3 \times 2 = 24 = n \times (n-1) \times (n-2)$

$abc\ abd\ acb\ acd\ adb\ adc$
$bac\ bad\ bca\ bcd\ bda\ bdc$
$cba\ cbd\ cab\ cad\ cdb\ cda$
$dbc\ dba\ dcb\ dca\ dab\ dac$

1 $\quad a \quad b \quad c \quad d$

2 $\quad b\ c\ d \quad a\ c\ d \quad b\ a\ d \quad b\ c\ a$

3 $\quad c\ d\ \ b\ d\ \ b\ c \quad c\ d\ \ a\ d\ \ a\ c \quad a\ d\ \ b\ d\ \ b\ a \quad c\ a\ \ b\ a\ \ b\ c$

Arrangements sans répétition

Un arrangement sans répétition (k-*permutation*) de k éléments parmi les n de l'ensemble E est toute disposition **ordonnée** de k éléments.

- Un arrangement sans répétition de n éléments pris parmi n éléments est une permutation
- Le nombre d'arrangements sans répétition de k éléments parmi n éléments est :

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} = n \times (n-1) \times \cdots \times (n-k+1)$$

Sans répétition

Permutations

Arrangements

Combinaisons

Avec répétition

Combinaisons sans répétition

Parmi les 4 personnes qui ont participé au Cross de l'INSA :
Karine, Michel, Kevin, Amélie
2 ont reçu un t-shirt blanc à la fin de la course. Combien de possibilités de donner un t-shirt blanc à 2 participant.e.s ?

Combinaisons sans répétition

Parmi les 4 personnes qui ont participé au Cross de l'INSA :
Karine, Michel, Kevin, Amélie
2 ont reçu un t-shirt blanc à la fin de la course. Combien de possibilités de donner un t-shirt blanc à 2 participant.e.s ?

L'ordre ne compte pas

Karine + Michel = Michel + Karine
Karine + Amélie = Amélie + Karine

Combinaisons sans répétition

Parmi les 4 personnes qui ont participé au Cross de l'INSA :
Karine, Michel, Kevin, Amélie
2 ont reçu un t-shirt blanc à la fin de la course. Combien de possibilités de donner un t-shirt blanc à 2 participant.e.s ?

Toutes les paires :

Karine Michel
Karine Kevin
Karine Amélie
Michel Kevin
Michel Amélie
Kevin Amélie

Combinaisons sans répétition

Parmi les 4 personnes qui ont participé au Cross de l'INSA :
Karine, Michel, Kevin, Amélie
2 ont reçu un t-shirt blanc à la fin de la course. Combien de possibilités de donner un t-shirt blanc à 2 participant.e.s ?

Toutes les paires :

Karine Michel
Karine Kevin
Karine Amélie
Michel Kevin
Michel Amélie
Kevin Amélie

6 options

Combinaisons sans répétition

Parmi les 4 personnes qui ont participé au Cross de l'INSA :
Karine, Michel, Kevin, Amélie
2 ont reçu un t-shirt blanc à la fin de la course. Combien de possibilités de donner un t-shirt blanc à 2 participant.e.s ?

Toutes les paires :

Karine Michel
Karine Kevin
Karine Amélie
Michel Kevin
Michel Amélie
Kevin Amélie

6 options vs. 12 arrangements

Combinaisons sans répétition

Une combinaison (*combination*) sans répétition de p éléments parmi les n éléments de l'ensemble E est toute disposition **non ordonnée** de ces p éléments.

- Deux combinaisons sont différentes si elles contiennent au moins un élément différent

Combinaisons sans répétition

Une combinaison (*combination*) sans répétition de p éléments parmi les n éléments de l'ensemble E est toute disposition **non ordonnée** de ces p éléments.

- Deux combinaisons sont différentes si elles contiennent au moins un élément différent

L'ordre ne compte pas

Combinaisons sans répétition

Une combinaison (*combination*) sans répétition de p éléments parmi les n éléments de l'ensemble E est toute disposition **non ordonnée** de ces p éléments.

- Deux combinaisons sont différentes si elles contiennent au moins un élément différent

$$E = \{a, b, c, d\}$$

$$ab\boldsymbol{c} \neq ab\boldsymbol{d}$$
$$abc = cba$$

Combinaisons sans répétition

Une combinaison (*combination*) sans répétition de p éléments parmi les n éléments de l'ensemble E est toute disposition **non ordonnée** de ces p éléments.

- Deux combinaisons sont différentes si elles contiennent au moins un élément différent

$$E = \{a, b, c, d\}$$

Toutes les combinaisons de 3 éléments sans répétition :

?

Combinaisons sans répétition

Une combinaison (*combination*) sans répétition de p éléments parmi les n éléments de l'ensemble E est toute disposition **non ordonnée** de ces p éléments.

- Deux combinaisons sont différentes si elles contiennent au moins un élément différent

$$E = \{a, b, c, d\}$$

Toutes les combinaisons de 3 éléments sans répétition :

$$abc$$
$$abd$$
$$acd$$
$$bcd$$

Combinaisons sans répétition

Une combinaison (*combination*) sans répétition de p éléments parmi les n éléments de l'ensemble E est toute disposition **non ordonnée** de ces p éléments.

- Deux combinaisons sont différentes si elles contiennent au moins un élément différent

$$E = \{a, b, c, d\}$$

arrangements	combinaisons
$abc\ abd\ acb\ acd\ adb\ adc$	abc
$bac\ bad\ bca\ bcd\ bda\ bdc$	abd
$cba\ cbd\ cab\ cad\ cdb\ cda$	acd
$dbc\ dba\ dcb\ dca\ dab\ dac$	bcd

Jeremy Orloff, and Jonathan Bloom. *18.05 Introduction to Probability and Statistics.* Spring 2014. Massachusetts Institute of Technology: MIT OpenCourseWare, https://ocw.mit.edu.

Combinaisons sans répétition

Une combinaison (*combination*) sans répétition de p éléments parmi les n éléments de l'ensemble E est toute disposition **non ordonnée** de ces p éléments.

- Deux combinaisons sont différentes si elles contiennent au moins un élément différent

$$E = \{a, b, c, d\}$$

arrangements	combinaisons
$abc\ abd\ acb\ acd\ adb\ adc$	abc
$bac\ bad\ bca\ bcd\ bda\ bdc$	abd
$cba\ cbd\ cab\ cad\ cdb\ cda$	acd
$dbc\ dba\ dcb\ dca\ dab\ dac$	bcd

$$A_4^3 = 4 \times 3 \times 2 = 24$$

Combinaisons sans répétition

Une combinaison (*combination*) sans répétition de p éléments parmi les n éléments de l'ensemble E est toute disposition **non ordonnée** de ces p éléments.

- Deux combinaisons sont différentes si elles contiennent au moins un élément différent

$$E = \{a, b, c, d\}$$

arrangements	combinaisons
abc abd acb acd adb adc	abc
bac bad bca bcd bda bdc	abd
cba cbd cab cad cdb cda	acd
dbc dba dcb dca dab dac	bcd

$$A_4^3 = 4 \times 3 \times 2 = 24$$

Combinaisons sans répétition

Une combinaison (*combination*) sans répétition de p éléments parmi les n éléments de l'ensemble E est toute disposition **non ordonnée** de ces p éléments.

- Deux co… contiennent au moins un élément différen…

Permutations de $p = 3$ éléments pour chaque combinaison :

$$p! = 3 \times 2 \times 1 = 6$$

$c, d\}$

	combinaisons
$abc\ abd\ acb\ acd\ adb\ adc$	abc
$bac\ bad\ bca\ bcd\ bda\ bdc$	abd
$cba\ cbd\ cab\ cad\ cdb\ cda$	acd
$dbc\ dba\ dcb\ dca\ dab\ dac$	bcd

$$A_4^3 = 4 \times 3 \times 2 = 24$$

Combinaisons sans répétition

Une combinaison (*combination*) sans répétition de p éléments parmi les n éléments de l'ensemble E est toute disposition **non ordonnée** de ces p éléments.

- Deux combinaisons sont différentes si elles contiennent au moins un élément différent
- Le nombre de combinaisons sans répétition de p éléments parmi n éléments est :

$$C_n^p = \binom{n}{p} = \frac{n!}{p!\,(n-p)!} = \frac{A_n^p}{p!} = \frac{n \times (n-1) \times \cdots \times (n-p+1)}{p!}$$

Combinaisons sans répétition

$$C_n^p = \binom{n}{p} = \frac{n!}{p!\,(n-p)!} = \frac{A_n^p}{p!} = \frac{n \times (n-1) \times \cdots \times (n-p+1)}{p!}$$

Propriétés :

$$(1) \quad C_n^{n-p} = \frac{n!}{(n-p)!\,(n-(n-p))!} = \frac{n!}{(n-p)!\,p!} = \frac{n!}{p!\,(n-p)!} = C_n^p$$

Combinaisons sans répétition

$$C_n^p = \binom{n}{p} = \frac{n!}{p!\,(n-p)!} = \frac{A_n^p}{p!} = \frac{n \times (n-1) \times \cdots \times (n-p+1)}{p!}$$

Propriétés :

$$(1) \quad C_n^{n-p} = \frac{n!}{(n-p)!\,(n-(n-p))!} = \frac{n!}{(n-p)!\,p!} = \frac{n!}{p!\,(n-p)!} = C_n^p$$

Le nombre de choix possibles d'un élément parmi n :

$$(2) \quad C_n^1 = \binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = C_n^{n-1} = n$$

Combinaisons sans répétition

$$C_n^p = \binom{n}{p} = \frac{n!}{p!\,(n-p)!} = \frac{A_n^p}{p!} = \frac{n \times (n-1) \times \cdots \times (n-p+1)}{p!}$$

Propriétés :

$$(3) \quad C_n^p = C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^p$$

Combinaisons sans répétition

$$C_n^p = C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^p$$

$$\boldsymbol{C_{n-1}^{p-1}} = \frac{(n-1)!}{(p-1)!\,((n-1)-(p-1))!} = \frac{(n-1)!}{(p-1)!\,(n-p)!}$$

$$\boldsymbol{C_{n-1}^{p}} = \frac{(n-1)!}{(p)!\,((n-1)-p)!} = \frac{(n-1)!}{p!\,(n-p-1)!}$$

$$\boldsymbol{C_{n-1}^{p-1}} + \boldsymbol{C_{n-1}^{p}} = \frac{(n-1)!}{(p-1)!\,(n-p)!} + \frac{(n-1)!}{p!\,(n-p-1)!} = \frac{(n-1)!}{(p-1)!\,(n-p-1)!}\left(\frac{1}{n-p} + \frac{1}{p}\right)$$

$$= \frac{(n-1)!}{(p-1)!\,(n-p-1)!}\left(\frac{p}{p(n-p)} + \frac{n-p}{p(n-p)}\right) = \frac{(n-1)!}{(p-1)!\,(n-p-1)!} \times \frac{p+n-p}{p(n-p)}$$

$$= \frac{(n-1)! \times n}{\big((p-1)! \times p\big) \times \big((n-p-1)! \times (n-p)\big)} = \frac{n!}{p!\,(n-p)!} = \boldsymbol{C_n^p}$$

Combinaisons sans répétition

$$C_n^p = \binom{n}{p} = \frac{n!}{p!\,(n-p)!} = \frac{A_n^p}{p!} = \frac{n \times (n-1) \times \cdots \times (n-p+1)}{p!}$$

Propriétés :

$$(4) \quad C_n^p + C_n^{p+1} = \binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p+1} = C_{n+1}^{p+1}$$

Combinaisons sans répétition

$$C_n^p + C_n^{p+1} = \binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p+1} = C_{n+1}^{p+1}$$

$$\boldsymbol{C_n^p} + \boldsymbol{C_n^{p+1}} = \frac{n!}{p!\,(n-p)!} + \frac{n!}{(p+1)!\,(n-(p+1))!} = \frac{n!}{p!\,(n-p-1)!}\left(\frac{1}{n-p} + \frac{1}{p+1}\right)$$

$$= \frac{n!}{p!\,(n-p-1)!}\left(\frac{p+1}{(n-p)(p+1)} + \frac{n-p}{(n-p)(p+1)}\right) = \frac{n!}{p!\,(n-p-1)!} \times \frac{p+1+n-p}{(n-p)(p+1)}$$

$$= \frac{n! \times (n+1)}{\big(p! \times (p+1)\big)\big((n-p-1)! \times (n-p)\big)} = \frac{(n+1)!}{(p+1)!\,(n-p)!} = \frac{(n+1)!}{(p+1)!\,((n+1)-(p+1))!} = \boldsymbol{C_{n+1}^{p+1}}$$

Combinaisons sans répétition

$$C_n^p = \binom{n}{p} = \frac{n!}{p!\,(n-p)!} = \frac{A_n^p}{p!} = \frac{n \times (n-1) \times \cdots \times (n-p+1)}{p!}$$

Propriétés :

Formule du binôme : $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2$ (ensemble des couples de nombres réels),

$\forall n \in \mathbb{N}$:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k} \quad (5)$$

Coefficient binomial

Combinaisons sans répétition

$$C_n^p = \binom{n}{p} = \frac{n!}{p!\,(n-p)!} = \frac{A_n^p}{p!} = \frac{n \times (n-1) \times \cdots \times (n-p+1)}{p!}$$

Propriétés :

Formule du binôme : $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2$ (ensemble des couples de nombres réels),

$\forall n \in \mathbb{N}$:

$$(5) \quad (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k}$$

Ex : $(a+b)^2 = C_2^0 a^0 b^{2-0} + C_2^1 a^1 b^{2-1} + C_2^2 a^2 b^{2-2}$

$$= \frac{2!}{0!\,(2-0)!} \times b^2 + \frac{2!}{1!\,(2-1)!} ab + \frac{2!}{2!\,(2-2)!} \times a^2 = b^2 + 2ab + a^2$$

Combinaisons sans répétition

Pour créer un robot, nous avons besoin de 2 moteurs et 2 modules de relais. Nous avons le choix parmi 8 moteurs et 5 modules de relais. Combien de combinaisons existe-t-il ?

Combinaisons sans répétition

Pour créer un robot, nous avons besoin de 2 moteurs et 2 modules de relais. Nous avons le choix parmi 8 moteurs et 5 modules de relais. Combien de combinaisons existe-t-il ?

L’ordre n’a pas d’importance $\Rightarrow$ combinaisons

Combinaisons sans répétition

Pour créer un robot, nous avons besoin de 2 moteurs et 2 modules de relais. Nous avons le choix parmi 8 moteurs et 5 modules de relais. Combien de combinaisons existe-t-il ?

Moteurs	Modules de relais

$$\boxed{C_n^p = \binom{n}{p} = \frac{n!}{p!\,(n-p)!}}$$

Combinaisons sans répétition

Pour créer un robot, nous avons besoin de 2 moteurs et 2 modules de relais. Nous avons le choix parmi 8 moteurs et 5 modules de relais. Combien de combinaisons existe-t-il ?

$$\boxed{C_n^p = \binom{n}{p} = \frac{n!}{p!\,(n-p)!}}$$

Moteurs	Modules de relais
$n = 8$ $p = 2$	$n = 5$ $p = 2$
$C_8^2 = \binom{8}{2} = \frac{8!}{2!\,(8-2)!} = \frac{8!}{2!\,6!} = \frac{8 \cdot 7}{2} = 28$	$C_5^2 = \binom{5}{2} = \frac{5!}{2!\,(5-2)!} = \frac{5!}{2!\,3!} = \frac{5 \cdot 4}{2} = 10$

Combinaisons sans répétition

Pour créer un robot, nous avons besoin de 2 moteurs et 2 modules de relais. Nous avons le choix parmi 8 moteurs et 5 modules de relais. Combien de combinaisons existe-t-il ?

$$\boxed{C_n^p = \binom{n}{p} = \frac{n!}{p!\,(n-p)!}}$$

Moteurs

$n = 8$
$p = 2$

$$C_8^2 = \binom{8}{2} = \frac{8!}{2!\,(8-2)!} = \frac{8!}{2!\,6!}$$

$$= \frac{8 \cdot 7}{2} = 28$$

Événement 1, E_1

Modules de relais

$n = 5$
$p = 2$

$$C_5^2 = \binom{5}{2} = \frac{5!}{2!\,(5-2)!} = \frac{5!}{2!\,3!}$$

$$= \frac{5 \cdot 4}{2} = 10$$

Événement 2, E_2

Combinaisons sans répétition

Pour créer un robot, nous avons besoin de 2 moteurs et 2 modules de relais. Nous avons le choix parmi 8 moteurs et 5 modules de relais. Combien de combinaisons existe-t-il ?

Moteurs	Modules de relais
$n = 8$ $p = 2$	$n = 5$ $p = 2$
$C_8^2 = \binom{8}{2} = \frac{8!}{2!\,(8-2)!} = \frac{8!}{2!\,6!} = \frac{8 \cdot 7}{2} = 28$	$C_5^2 = \binom{5}{2} = \frac{5!}{2!\,(5-2)!} = \frac{5!}{2!\,3!} = \frac{5 \cdot 4}{2} = 10$
Événement 1, E_1	Événement 2, E_2

$$28 \times 10 = 280$$

Sans répétition

Permutations

Arrangements

Combinaisons

Avec répétition

Arrangements avec répétition

Nous cherchons à trouver le code composé de 7 chiffres. Nous savons que les trois premiers chiffres sont 116. Combien de codes possibles existe-t-il?

1	1	6	?	?	?	?

CODE

Arrangements avec répétition

Nous cherchons à trouver le code composé de 7 chiffres. Nous savons que les trois premiers chiffres sont 116. Combien de codes possibles existe-t-il?

Est-ce que l'ordre est important ?

1	1	6	?	?	?	?

CODE

Arrangements avec répétition

Nous cherchons à trouver le code composé de 7 chiffres. Nous savons que les trois premiers chiffres sont 116. Combien de codes possibles existe-t-il?

Est-ce que l'ordre est important ?

$$\left.\begin{array}{l}116\ \ 3542\\116\ \ 5423\end{array}\right\}$$ Pas le même code ⇒ l'ordre joue

arrangements

1	1	6	?	?	?	?

CODE

Arrangements avec répétition

Nous cherchons à trouver le code composé de 7 chiffres. Nous savons que les trois premiers chiffres sont 116. Combien de codes possibles existe-t-il?

Est-ce que l'ordre est important ?

$$\left.\begin{matrix} 116\ \ 3542 \\ 116\ \ 5423 \end{matrix}\right\}$$ Pas le même code ⇒ l'ordre joue

arrangements

$$1\ \ 1\ \ 6\ \underbrace{?\ \ ?\ \ ?\ \ ?}_{\text{4 chiffres qui peuvent changer}}$$

Arrangements avec répétition

Nous cherchons à trouver le code composé de 7 chiffres. Nous savons que les trois premiers chiffres sont 116. Combien de codes possibles existe-t-il?

4ème	5ème	6ème	7ème
?	?	?	?

Combien d'options pour choisir ce chiffre ?

Arrangements avec répétition

Nous cherchons à trouver le code composé de 7 chiffres. Nous savons que les trois premiers chiffres sont 116. Combien de codes possibles existe-t-il?

4ème	5ème	6ème	7ème
?	?	?	?

$\mathbf{10}$

Arrangements avec répétition

Nous cherchons à trouver le code composé de 7 chiffres. Nous savons que les trois premiers chiffres sont 116. Combien de codes possibles existe-t-il?

4ème	5ème	6ème	7ème
?	?	?	?
10			

Combien d'options pour choisir ce chiffre ?

Arrangements avec répétition

Nous cherchons à trouver le code composé de 7 chiffres. Nous savons que les trois premiers chiffres sont 116. Combien de codes possibles existe-t-il?

$4^{ème}$	$5^{ème}$	$6^{ème}$	$7^{ème}$
?	?	?	?

$$10 \quad 10 \quad 10 \quad 10$$

Arrangements avec répétition

Nous cherchons à trouver le code composé de 7 chiffres. Nous savons que les trois premiers chiffres sont 116. Combien de codes possibles existe-t-il?

4ème	5ème	6ème	7ème
?	?	?	?

$$\mathbf{10\times10\times10\times10} = 10^4 = 10{,}000$$

Arrangements avec répétition

Nous cherchons à trouver le code composé de 7 chiffres. Nous savons que les trois premiers chiffres sont 116. Combien de codes possibles existe-t-il?

4ème	5ème	6ème	7ème
?	?	?	?

$$\mathbf{10\times10\times10\times10} = 10^4 = 10{,}000$$

! Nous **NE** retirons **PAS** les éléments (les options restent disponibles)

Arrangements avec répétition

Un arrangement avec répétition de k éléments parmi les n de l'ensemble E est toute disposition **ordonnée** de k éléments, **non nécessairement distincts**.

- Le nombre d'arrangements avec répétition de k éléments parmi n éléments est :

$$\underbrace{n \times n \times \cdots \times n}_{k \text{ fois}} = n^k$$

Sans répétition

Permutations

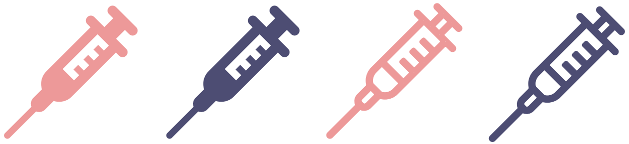
Arrangements

Combinaisons

Avec répétition

Combinaisons avec répétition

4 types de vaccin

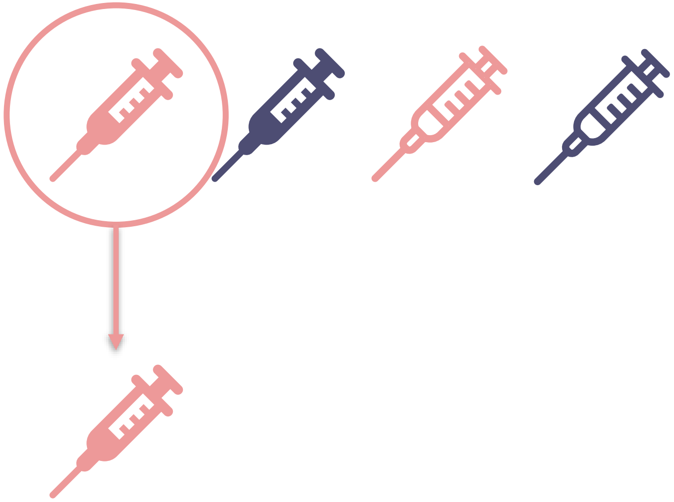


3 patients

Chaque personne reçoit un vaccin, possiblement du même type. Quel est le nombre de configurations possibles ?

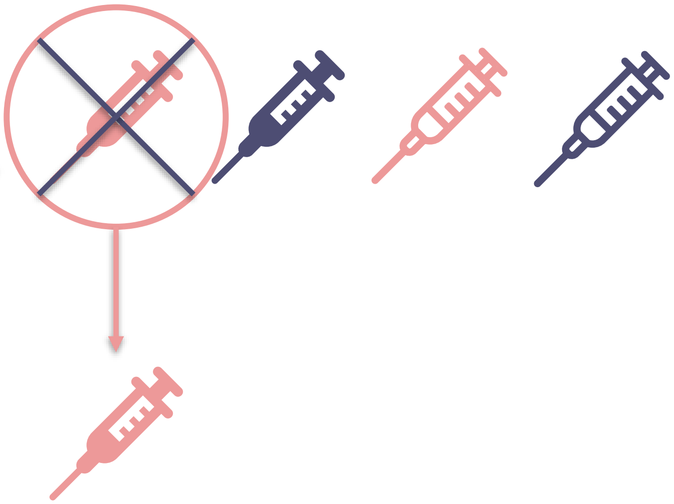
Combinaisons avec répétition

4 types de vaccin



Combinaisons avec répétition

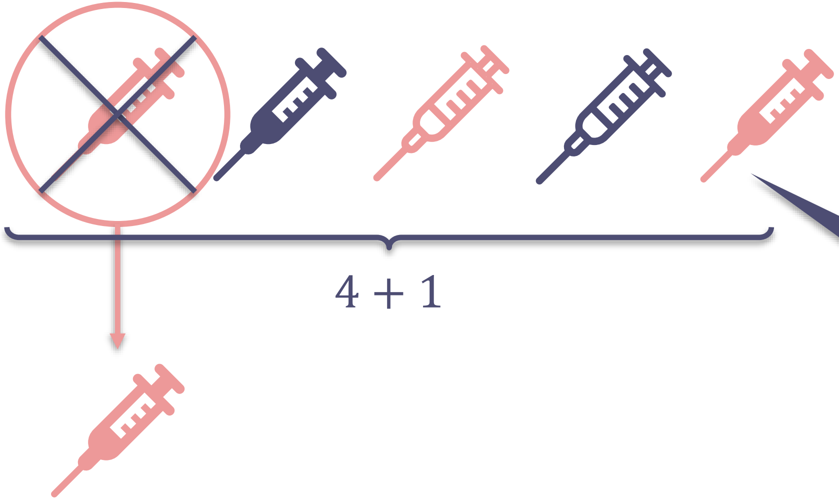
4 types de vaccin



Est pris

Combinaisons avec répétition

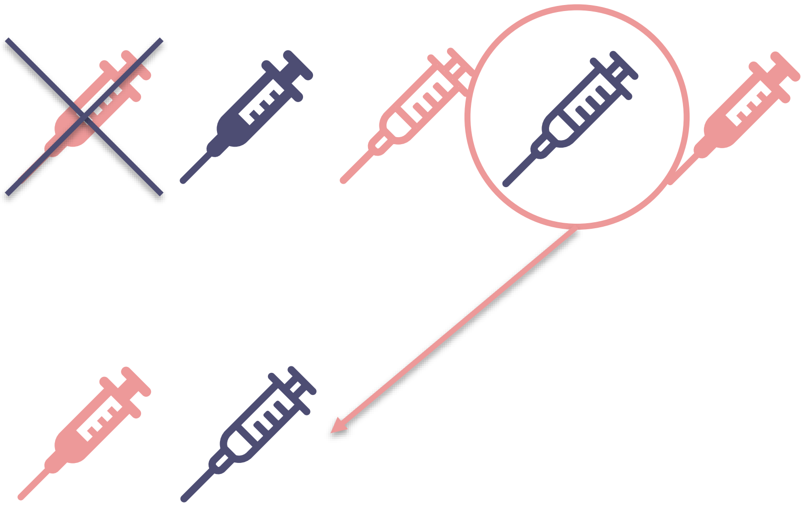
4 types de vaccin



On rajoute le même élément afin de rassurer le choix initial

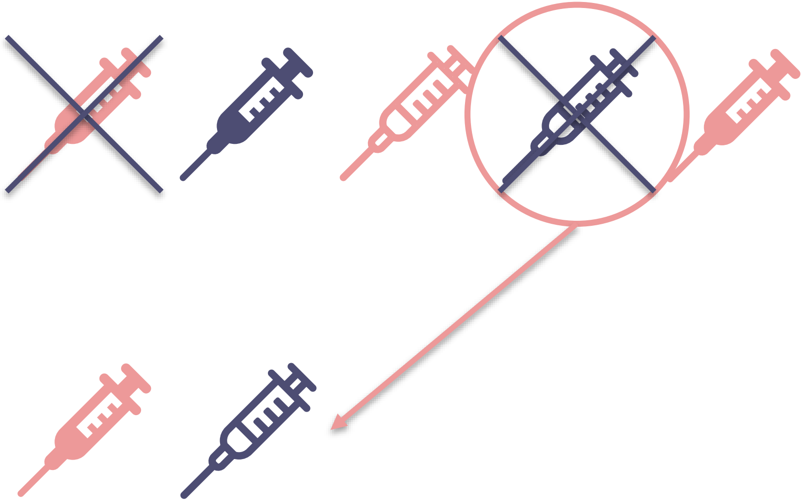
Combinaisons avec répétition

4 types de vaccin



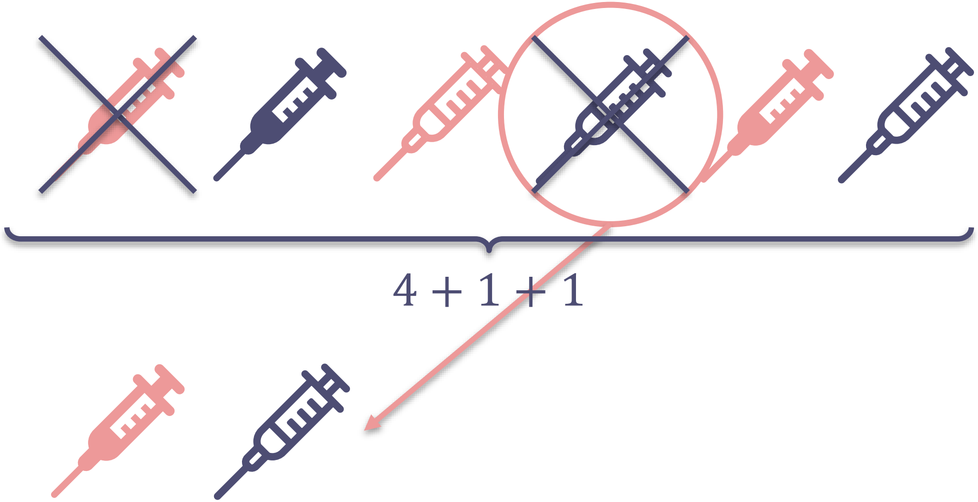
Combinaisons avec répétition

4 types de vaccin



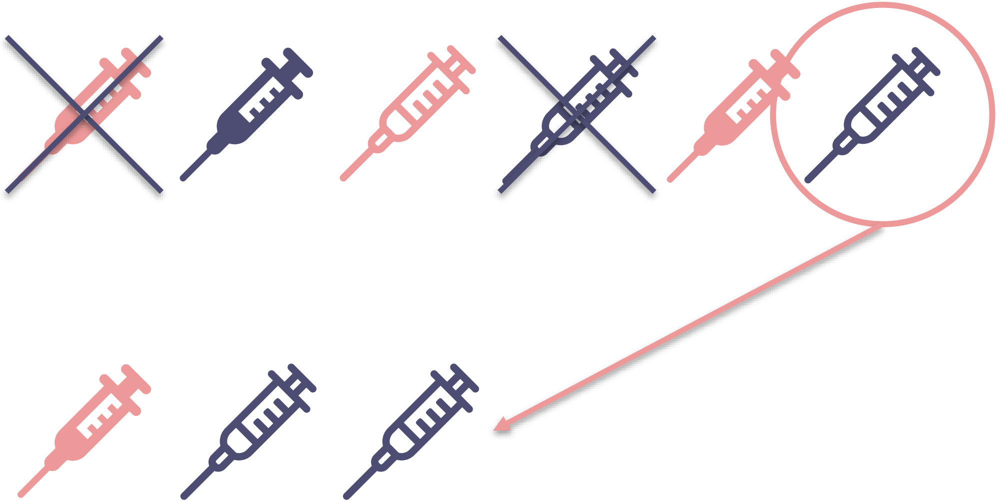
Combinaisons avec répétition

4 types de vaccin



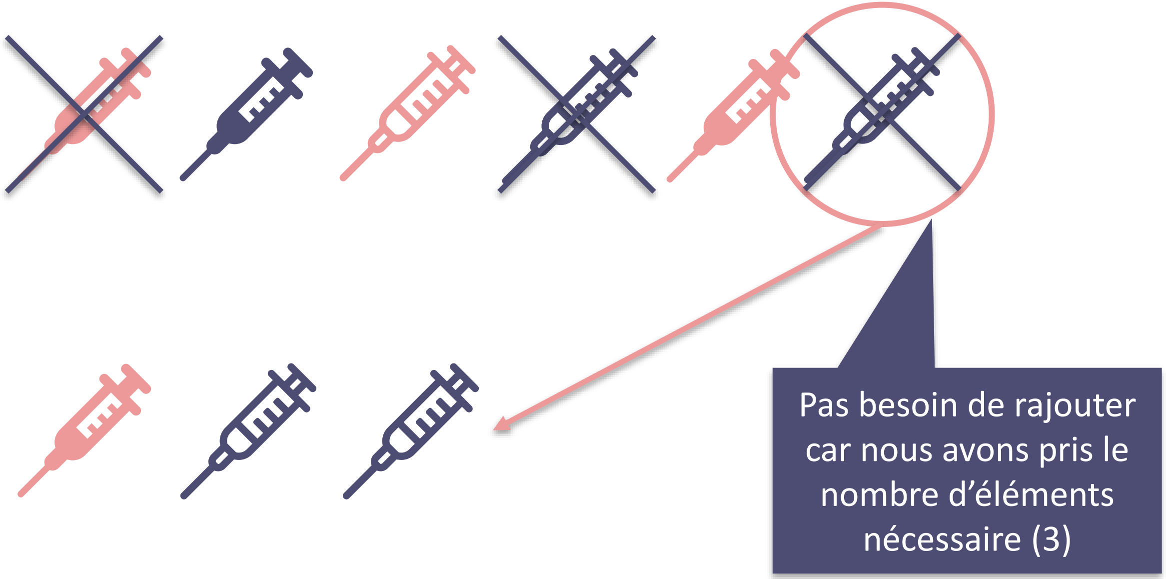
Combinaisons avec répétition

4 types de vaccin



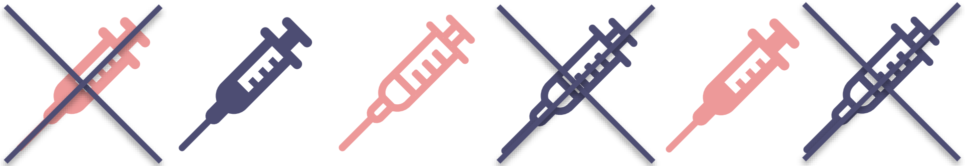
Combinaisons avec répétition

4 types de vaccin



Combinaisons avec répétition

4 types de vaccin



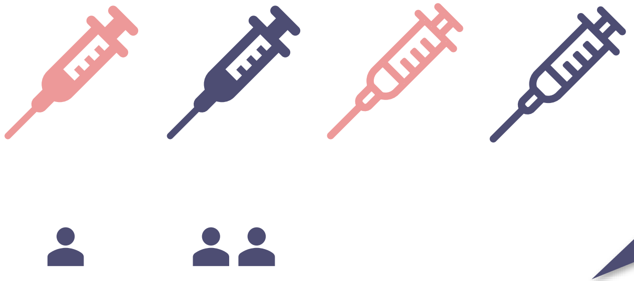
Choisir 3 éléments parmi 6 :

$$C_6^3 = \frac{6!}{3!\,(6-3)!} = \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{(3 \times 2) \times (3 \times 2)!}$$

$$= 5 \times 4 = 20 = C_{4+3-1}^3$$

Combinaisons avec répétition

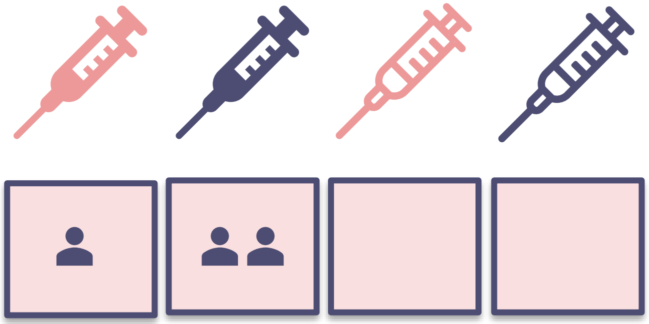
4 types de vaccin



Répartir 3 personnes en 4 groupes, si les groupes peuvent rester vides et/ou contenir plusieurs éléments

Combinaisons avec répétition

4 types de vaccin

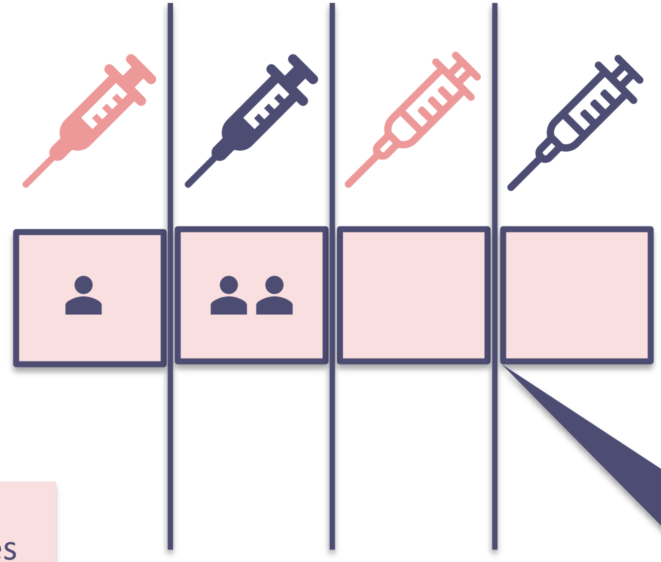


Répartir 3 personnes en 4 groupes, si les groupes peuvent rester vides et/ou contenir plusieurs éléments

Où sont les frontières des urnes (groupes) ?

Combinaisons avec répétition

4 types de vaccin

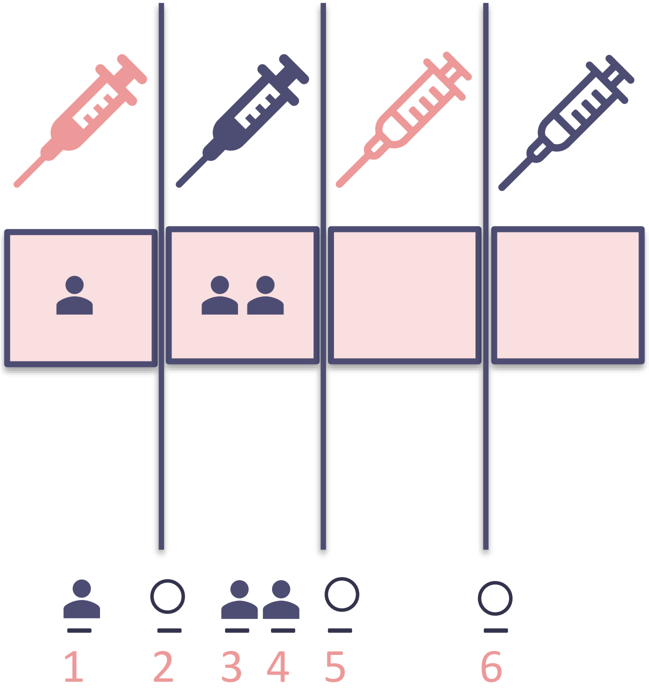


Où sont les frontières des urnes (groupes) ?

Graphiquement, il suffit d'utiliser 3 séparateurs pour distinguer selon type parmi 4 (définir les frontières entre les groupes)

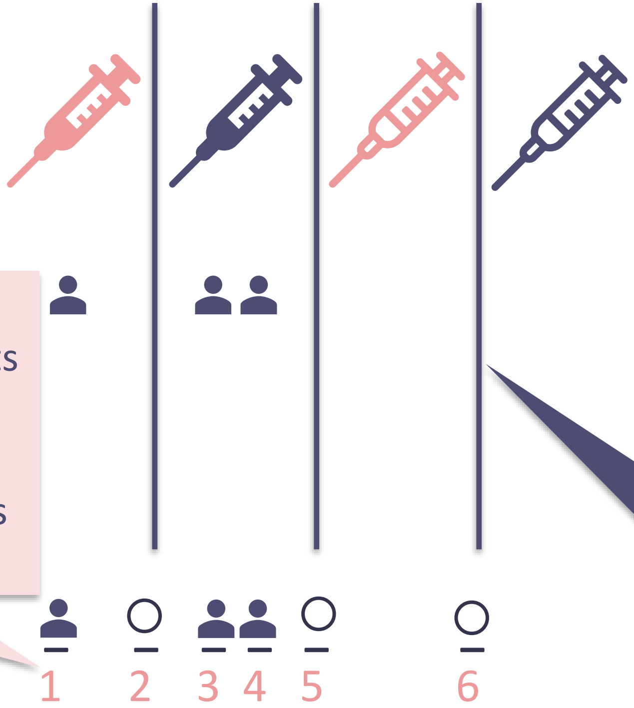
Combinaisons avec répétition

4 types de vaccin



Combinaisons avec répétition

4 types de vaccin



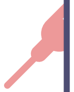
3 patients à répartir + 3 séparateurs = 6 positions (éléments possibles) possibles qui font une configuration : en sachant les positions des patients, nous allons savoir une configuration

Graphiquement, il suffit d’utiliser 3 séparateurs pour distinguer selon type parmi 4 (définir les frontières entre les groupes)

https://www.youtube.com/watch?v=1crNnZkIvac

Combinaisons avec répétition

4 types de vaccin



Choisir 3 éléments (positions) parmi 6 :

$$C_6^3 = \frac{6!}{3!\,(6-3)!} = \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{(3 \times 2) \times (3 \times 2)!}$$

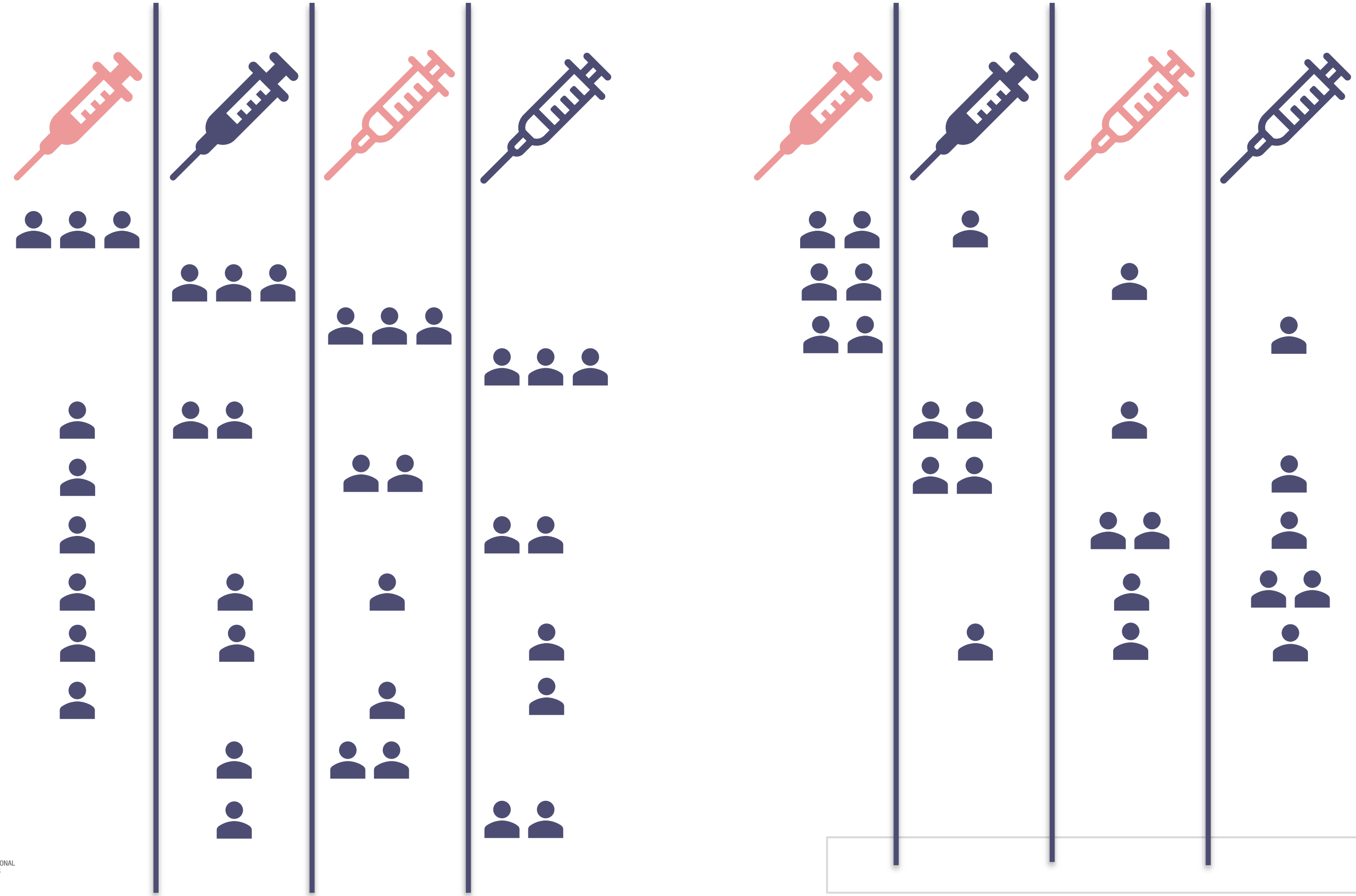
$$= 5 \times 4 = 20 = C_{4+3-1}^3$$

3 patients à répartir + 3 séparateurs = 6 positions (éléments possibles) possibles qui font une configuration : en sachant les positions des patients, nous allons savoir une configuration

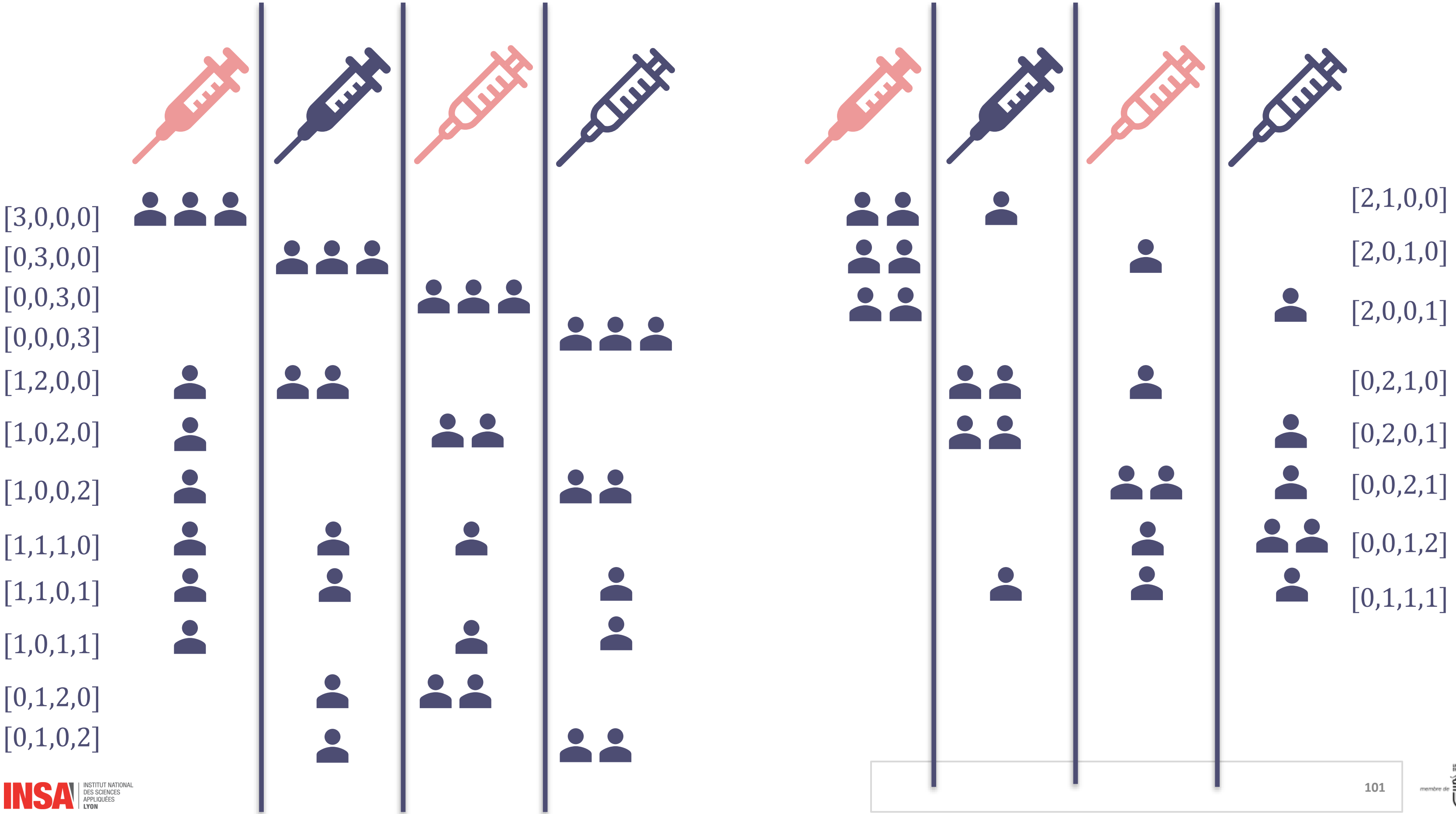
Graphiquement, il suffit d'utiliser 3 séparateurs pour distinguer selon type parmi 4 (définir les frontières entre les groupes)

1 2 3 4 5 6

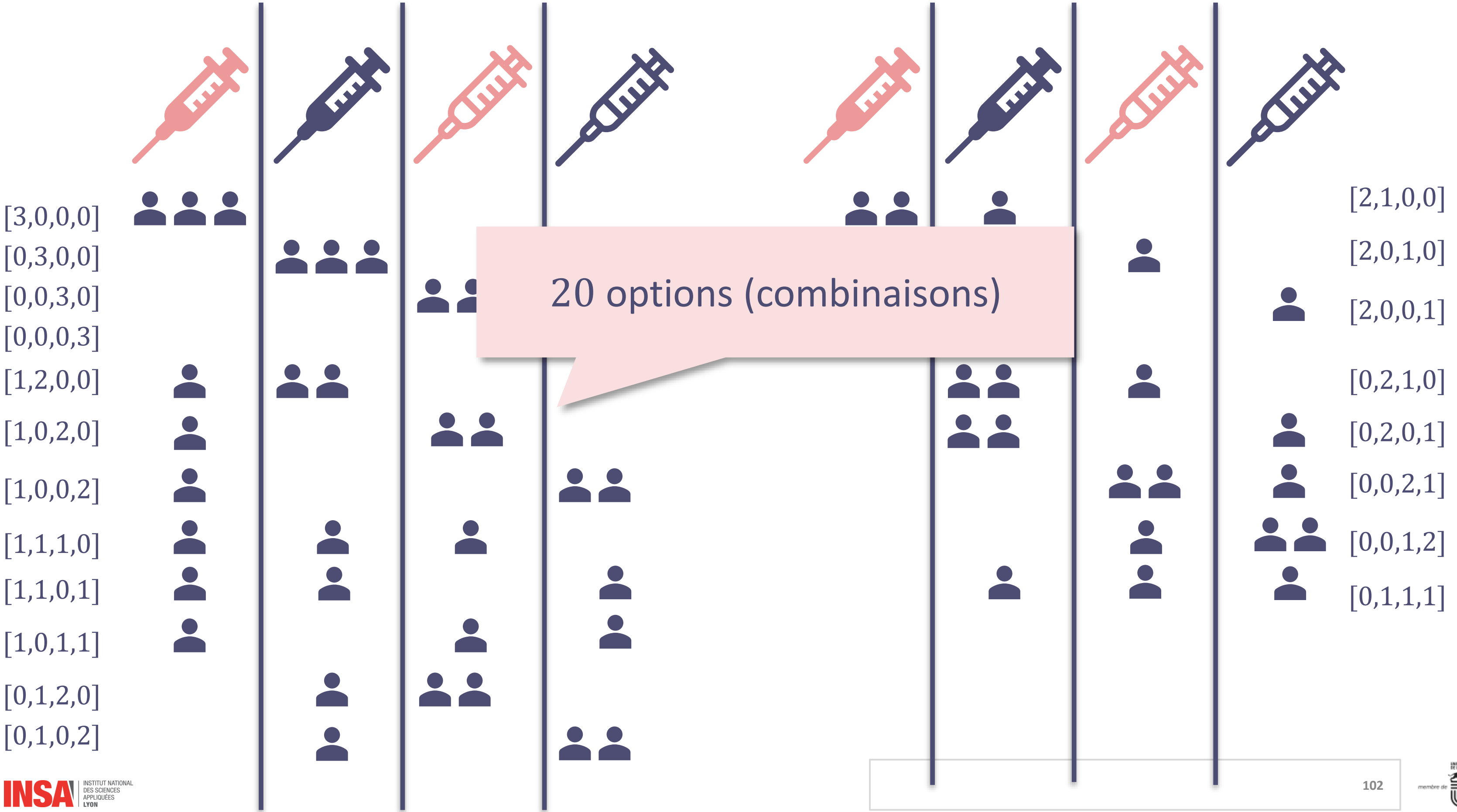
Combinaisons avec répétition



Combinaisons avec répétition



Combinaisons avec répétition



Combinaisons avec répétition

Une combinaison avec répétition de p éléments parmi les n éléments de l'ensemble E est toute disposition **non ordonnée** de ces p éléments, **non nécessairement distincts**.

- Le nombre de combinaisons avec répétition de p éléments parmi n éléments est :

$$C_{n+p-1}^{p} = \binom{n+p-1}{p} = \frac{(n+p-1)!}{p!\,(n-1)!}$$

Sans répétition

Permutations

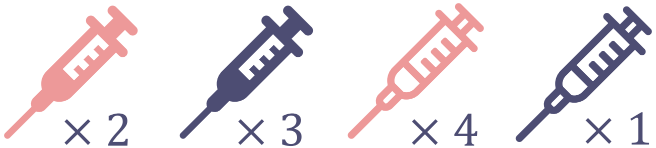
Arrangements

Combinaisons

Avec répétition

Permutations avec répétition

4 types de vaccin



$\times 2$ $\times 3$ $\times 4$ $\times 1$

10 doses en total

$\times 10$

Quel est le nombre de possibilités à mettre 10 vaccins répartis en 4 types à 10 personnes qui font la queue ?

Permutations avec répétition

4 types de vaccin

$\times 2$ $\times 3$ $\times 4$ $\times 1$

10 doses en total

On s'intéresse à l'ordre

$\times 10$

Les éléments du même type ne sont pas distincts

Quel est le nombre de possibilités à mettre 10 vaccins répartis en 4 types à 10 personnes qui font la queue ?

Permutations avec répétition

4 types de vaccin

$\times 2$ $\times 3$ $\times 4$ $\times 1$

10 doses en total

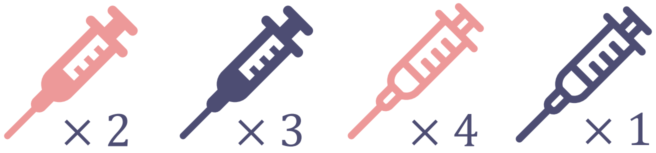
$\times 10$

Choisir 10 éléments parmi 10 en tenant compte de l'ordre $\Rightarrow$ permutations :

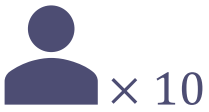
$$n! = 10!$$

Permutations avec répétition

4 types de vaccin

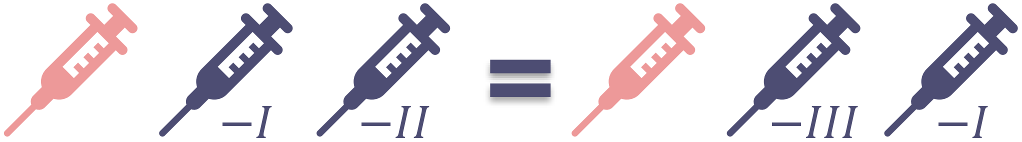


10 doses en total



Choisir 10 éléments parmi 10 en tenant compte de l'ordre ⇒ permutations :

$$n! = 10!$$

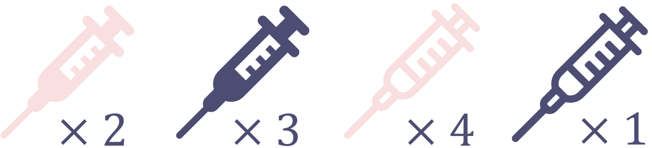


Prendre en compte les permutations parmi les éléments du même type :

$$n_1! = 2!$$
$$n_2! = 3!$$
$$n_3! = 4!$$
$$n_4! = 1!$$

Permutations avec répétition

4 types de vaccin



10 doses en total

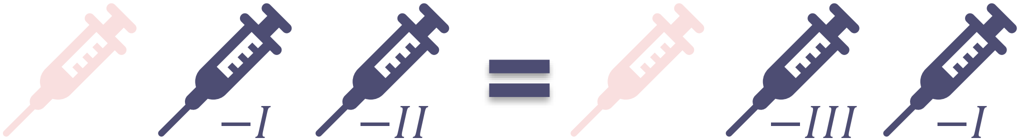
Le nombre total des permutations :

$$\frac{10!}{2! \times 3! \times 4! \times 1!} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{(2 \times 1) \times (3 \times 2 \times 1) \times (4 \times 3 \times 2 \times 1) \times 1!} = 10 \times 9 \times 4 \times 7 \times 5 = 12{,}600$$

$\times\ 10$

Choisir 10 éléments parmi 10 en tenant compte de l'ordre ⇒ permutations :

$$n! = 10!$$



Prendre en compte les permutations parmi les éléments du même type :

$$n_1! = 2!$$
$$n_2! = 3!$$
$$n_3! = 4!$$
$$n_4! = 1!$$

Permutations avec répétition

Soit il existe l catégories, les éléments de l'ensemble E se répartissent en ces catégories de la façon que $n_1 + n_2 + \cdots + n_l = n$, où n_i est les nombre d'éléments dans la catégorié i.
Une permutation avec répétition de n éléments répartis en l catégories est toute disposition **ordonnée** de n éléments qui contient n_i éléments de chaque catégories i.

- « Répétition » au niveau de catégories (types) : un type d'élément peut être présent plusieurs fois

Permutations avec répétition

Soit il existe l catégories, les éléments de l'ensemble E se répartissent en ces catégories de la façon que $n_1 + n_2 + \cdots + n_l = n$, où n_i est les nombre d'éléments dans la catégorié i.
Une permutation avec répétition de n éléments répartis en l catégories est toute disposition **ordonnée** de n éléments qui contient n_i éléments de chaque catégories i.

- « Répétition » au niveau de catégories (types) : un type d'élément peut être présent plusieurs fois
- Le nombre de permutations avec répétition :

$$\frac{n!}{n_1! \times n_2! \times \ldots \times n_l!}$$

Dénombrements (Counting) : Bilan

	Sans répétition (remise)	Avec répétition (remise)
Avec ordre	$A_n^p = \dfrac{n!}{(n-p)!}$	n^p
Sans ordre	$C_n^p = \dfrac{n!}{p!\,(n-p)!}$	$C_{n+p-1}^p = \dfrac{(n+p-1)!}{p!\,(n-1)!}$

Solution de l'exemple du début du cours

Une main au Poker : 5 cartes

La paire (*one-pair*) : 2 cartes de même rang + 3 autres cartes quelconques dont le rang est différent de la paire (sinon c'est un brelan) et différent entre elles (sinon c'est une double paire)

9♣ 9♥ V♠ 6♦ 2♣

La probabilité d'avoir une paire est :

(A) $< 5\%$

(B) entre 5% et 10%

(C) entre 10% et 20%

(D) entre 20% et 40%

(E) $> 40\%$

Solution de l'exemple du début du cours

9♣	9♥	V♠	6♦	2♣

Soit :

$n = 13$ le nombre de valeurs (cartes de la même couleur / enseigne)

Alors :

$4n = 4 \cdot 13 = 52$ le nombre de carte dans le paquet

Solution de l'exemple du début du cours

9♣ 9♥ V♠ 6♦ 2♣

Soit :

$n = 13$ le nombre de valeurs (cartes de la même couleur / enseigne)

Alors :

$4n = 4 \cdot 13 = 52$ le nombre de carte dans le paquet

Le nombre de combinaisons pour choisir 5 cartes (une main) parmi 52 $(4n)$:

$$\binom{52}{5} = 2{,}598{,}960$$

Solution de l’exemple du début du cours

Option 1

9♣	9♥	V♠	6♦	2♣

Une paire est déterminée par sa **Valeur** et la **Couleur** de ses cartes :

Solution de l’exemple du début du cours

Option 1

9♣ 9♥ | V♠ 6♦ 2♣

Une paire est déterminée par sa **Valeur** et la **Couleur** de ses cartes :

Concernant la **Couleur** :
choisir 2 couleurs parmi 4

$$\binom{4}{2} = 6$$

Toutes les combinaisons de couleurs dans une paire :
(l’ordre ne compte pas)

{♦, ♣}
{♦, ♥}
{♦, ♠}
{♣, ♥}
{♣, ♠}
{♥, ♠}

Solution de l'exemple du début du cours

Option 1

9♣ 9♥ | V♠ 6♦ 2♣

Une paire est déterminée par sa **Valeur** et la **Couleur** de ses cartes :

Une paire est déterminée par sa **Valeur** :
choisir 1 valeur parmi $n = 13$

$$\binom{n}{1} = n = 13$$

	8
A	7
K	6
D	5
V	4
10	3
9	2

Solution de l'exemple du début du cours

Option 1

9♣	9♥	V♠	6♦	2♣

Une paire est déterminée par sa **Valeur** et la **Couleur** de ses cartes :

$$\binom{n}{1} \times \binom{4}{2} = 6n = 6 \times 13 = 78$$

	8
A	7
K	6
D	5
V	4
10	3
9	2

Solution de l'exemple du début du cours

Option 1

9♣	9♥	V♠	6♦	2♣

Une paire ≠ **autres mains**

⇓

les **3 cartes libres**:

- les valeurs différentes entre elles
- les valeurs différentes de celle de la paire
- les couleurs sont libres

Solution de l'exemple du début du cours

Option 1

9♣ 9♥ | V♠ 6♦ 2♣

Une paire $\neq$ **autres mains**

$\Downarrow$

les **3 cartes libres**:

- les valeurs différentes entre elles
- les valeurs différentes de celle de la paire $\Rightarrow$ le choix parmi $n-1=12$
- les couleurs sont libres

Solution de l'exemple du début du cours

Option 1

9♣	9♥	V♠	6♦	2♣

Une paire ≠ **autres mains**

$\Downarrow$

les **3 cartes libres**:

- les valeurs différentes entre elles ⇒ choisir 3 parmi 12
- les valeurs différentes de celle de la paire ⇒ le choix parmi $n-1=12$
- les couleurs sont libres

$$\binom{12}{3} = \frac{12!}{3!\,(12-3)!} = \frac{12!}{3!\,9!} = \frac{12 \times 11 \times 10}{6} = 220$$

Solution de l'exemple du début du cours

Option 1

9♣ 9♥ | V♠ 6♦ 2♣

Une paire $\neq$ **autres mains**

$\Downarrow$

les **3 cartes libres**:

- les valeurs différentes entre elles $\Rightarrow$ choisir 3 parmi 12
- les valeurs différentes de celle de la paire $\Rightarrow$ le choix parmi $n - 1 = 12$
- les couleurs sont libres $\Rightarrow$ choisir 1 parmi 4 pour chacune des cartes libres

$$\binom{4}{1}\binom{4}{1}\binom{4}{1} = 4^3 = 64$$

Solution de l'exemple du début du cours

Option 1

9♣ 9♥ | V♠ 6♦ 2♣

Une paire $\neq$ **autres mains**

$\Downarrow$

les **3 cartes libres**:

- les valeurs différentes entre elles $\Rightarrow$ choisir 3 parmi 12
- les valeurs différentes de celle de la paire $\Rightarrow$ le choix parmi $n-1=12$
- les couleurs sont libres $\Rightarrow$ choisir 1 parmi 4 pour chacune des cartes libres

$$\binom{12}{3} \cdot 4^3 = 220 \cdot 64 = 14{,}080$$

Solution de l'exemple du début du cours

Option 1

9♣ | 9♥ | V♠ | 6♦ | 2♣

Une paire est déterminée par sa **Valeur** et la **Couleur** de ses cartes :

$$\binom{13}{1} \times \binom{4}{2} = 78$$

les **3 cartes libres**:

$$\binom{12}{3} \times 4^3 = 220 \times 64 = 14{,}080$$

Solution de l'exemple du début du cours

Option 1

9♣ 9♥ V♠ 6♦ 2♣

Une paire est déterminée par sa **Valeur** et la **Couleur** de ses cartes :

$$\binom{13}{1} \times \binom{4}{2} = 78$$

les **3 cartes libres**:

$$\binom{12}{3} \times 4^3 = 220 \times 64 = 14{,}080$$

Le nombre de combinaisons pour avoir une main avec une paire parmi 52 cartes :

$$78 \times 14{,}080 = 1{,}098{,}240$$

Solution de l'exemple du début du cours

Option 1

Le nombre de combinaisons pour avoir une main avec une paire parmi 52 cartes :

$$\binom{13}{1} \times \binom{4}{2} \times \binom{12}{3} \times 4^3 = 1{,}098{,}240$$

Toutes les combinaisons : $\binom{52}{5} = 2{,}598{,}960$

$$P(une\ main\ avec\ une\ paire) = \frac{1{,}098{,}240}{2{,}598{,}960} \approx 42.46\%$$

Solution de l'exemple du début du cours

Option 2

9♣	9♥	V♠	6♦	2♣

Nombre total de cartes : 52

Solution de l’exemple du début du cours

Option 2

9♣ 9♥ | V♠ 6♦ 2♣

Nombre total de cartes : 52

Combien de choix pour définir la **1ère carte** de la main qui va faire partie de la paire ?

52

9♣

Solution de l'exemple du début du cours

Option 2

9♣	9♥	V♠	6♦	2♣

Nombre total de cartes : 52

Combien de choix pour définir la **1ère carte** de la main qui va faire partie de la paire ?

$$52$$

Attention : Dans cette réflexion, on introduit la notion d'ordre de cartes dans la main qu'il faudra enlever par la suite

Solution de l'exemple du début du cours

Option 2

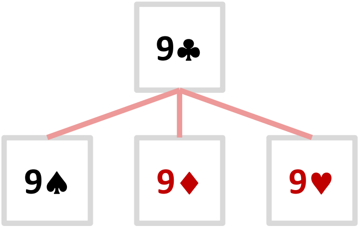
Nombre total de cartes : 52

Combien de choix pour définir la **1ère carte** de la main qui va faire partie de la paire ?

52

Combien de choix pour définir la **2ème carte** de la main qui va faire partie de la paire ?

3



Solution de l'exemple du début du cours

Option 2

Nombre total de cartes : 52

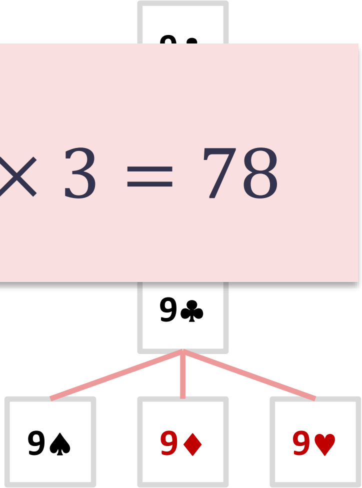
Combien de choix pour définir la **1ère carte** de la main qui va faire partie de la paire ?

$$52$$

Combien de choix pour définir la **2ème carte** paire ?

$$3$$

$$\frac{52 \times 3}{2!} = 26 \times 3 = 78$$



Solution de l’exemple du début du cours

Option 2

9♣ 9♥ | V♠ 6♦ 2♣

Nombre total de cartes : 52

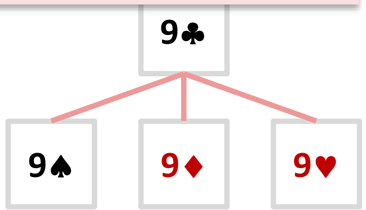
Combien de choix pour définir la **1ère carte** de la main qui va faire partie de la paire ?

$$52$$

Combien de
la paire ?

L’ordre n’est **PAS** important ⇒ introduction d’une pénalité correspondante au nombre de permutations de 2 cartes formant la paire

$$\frac{52 \times 3}{\boxed{2!}} = 26 \times 3 = 78$$



Solution de l’exemple du début du cours

Option 2

9♣ 9♥ | V♠ 6♦ 2♣

Nombre total de cartes : 52

Une valeur parmi 13 est prise par la paire. Toutes les valeurs de 3 cartes restantes doivent être distinctes

Solution de l'exemple du début du cours

Option 2

9♣ 9♥ | V♠ 6♦ 2♣

Nombre total de cartes : 52

Une valeur parmi 13 est prise par la paire. Toutes les valeurs de 3 cartes restantes doivent être distinctes

Combien de choix pour définir la **1ère carte** de la main qui NE va PAS faire partie de la paire ?

$$52 - 4 = 48$$

(ici on soustrait 4 cartes du rang de la paire)

Solution de l’exemple du début du cours

Option 2

9♣ 9♥ | V♠ 6♦ 2♣

Nombre total de cartes : 52
Une valeur parmi 13 est prise par la paire. Toutes les valeurs de 3 cartes restantes doivent être distinctes

Combien de choix pour définir la **1ère carte** de la main qui NE va PAS faire partie de la paire ?

$$52 - 4 = 48$$

(ici on soustrait 4 cartes du rang de la paire)

Attention : Dans cette réflexion, on introduit la notion d’ordre de cartes dans la main qu’il faudra enlever par la suite

Solution de l'exemple du début du cours

Option 2

9♣ 9♥ | V♠ 6♦ 2♣

Nombre total de cartes : 52
Une valeur parmi 13 est prise par la paire. Toutes les valeurs de 3 cartes restantes doivent être distinctes

Combien de choix pour définir la **2ème carte** de la main qui NE va PAS faire partie de la paire ?

$$52 - 4 - 4 = 44$$

(ici on soustrait 4 cartes du rang de la paire et 4 cartes du rang de la 3ème carte de la main)

Solution de l'exemple du début du cours

Option 2

9♣	9♥	V♠	6♦	2♣

Nombre total de cartes : 52
Une valeur parmi 13 est prise par la paire. Toutes les valeurs de 3 cartes restantes doivent être distinctes

Combien de choix pour définir la **3ème carte** de la main qui NE va PAS faire partie de la paire ?

$$52 - 4 - 4 - 4 = 40$$

(ici on soustrait 4 cartes du rang de la paire, 4 cartes du rang de la 3ème carte de la main et 4 cartes de la 4ème carte de la main)

Solution de l'exemple du début du cours

Option 2

9♣ 9♥ | V♠ 6♦ 2♣

Nombre total de cartes : 52

Une valeur parmi 13 est prise par la paire. Toutes les valeurs de 3 cartes restantes doivent être distinctes

$$\frac{48 \times 44 \times 40}{3!} = \frac{48 \times 44 \times 40}{3 \times 2 \times 1} = 14{,}080$$

INSA INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES LYON

membre de UNIVERSITÉ DE LYON

Solution de l'exemple du début du cours

Option 2

9♣ 9♥ | V♠ 6♦ 2♣

Nombre total de cartes : 52

Une valeur parmi 13 est prise par la paire. Toutes les valeurs de 3 cartes restantes doivent être distinctes

$$\frac{48 \times 44 \times 40}{\boxed{3!}} =$$

L'ordre n'est **PAS** important ⇒ introduction d'une pénalité correspondante au nombre de permutations de 2 cartes NE formant PAS la paire

Solution de l'exemple du début du cours

Option 2

9♣	9♥	V♠	6♦	2♣

Nombre total de cartes : 52

Nombre de possibilités d'obtenir une main de la paire :

$$78 \times 14{,}080 = 1{,}098{,}240$$

INSA INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES LYON

membre de UNIVERSITÉ DE LYON

Solution de l'exemple du début du cours

Option 2

9♣ 9♥ | V♠ 6♦ 2♣

Nombre total de cartes : 52

Nombre de possibilités d'obtenir une main de la paire :

$$78 \times 14{,}080 = 1{,}098{,}240$$

$$P(une\ main\ avec\ une\ paire) = \frac{1{,}098{,}240}{2{,}598{,}960} \approx 42.46\%$$

Solution de l'exemple du début du cours

Une main au Poker : 5 cartes

La paire (*one-pair*) : 2 cartes de même rang + 3 autres cartes quelconques dont le rang est différent de la paire (sinon c'est un brelan) et différent entre elles (sinon c'est une double paire)

9♣	9♥	V♠	6♦	2♣

La probabilité d'avoir une paire est :

(A) $< 5\%$

(B) entre 5% et 10%

(C) entre 10% et 20%

(D) entre 20% et 40%

(E) $> 40\%$