INSA INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES LYON

Introduction aux Probabilités

2022/2023

membre de UNIVERSITÉ DE LYON

Plan

Quelques inégalités utiles (*Probability Bounds*)

Inégalité de Markov

Inégalité de Markov (*Markov's inequality*) : Soit X une v.a.r. Alors :

$$\forall a > 0, a \in \mathbb{R} : \mathbb{P}(|X| \geq a) \leq \frac{1}{a} \mathbb{E}[|X|]$$

Inégalité de Markov

Soit $X \sim \mathcal{B}(n, p)$. En utilisant l'inégalité de Markov, trouvez la borne supérieure de $\mathbb{P}(X \geq \alpha n)$ où $p < \alpha < 1$. Evaluez la borne pour $p = \frac{1}{2}$ et $\alpha = \frac{3}{4}$.

https://www.probabilitycourse.com/chapter6/6_2_2_markov_chebyshev_inequalities.php

Inégalité de Markov

Soit $X \sim \mathcal{B}(n, p)$. En utilisant l'inégalité de Markov, trouvez la borne supérieure de $\mathbb{P}(X \geq \alpha n)$ où $p < \alpha < 1$. Evaluez la borne pour $p = \frac{1}{2}$ et $\alpha = \frac{3}{4}$.

$$\boxed{\forall a > 0, a \in \mathbb{R} : \mathbb{P}(|X| \geq a) \leq \frac{1}{a} \mathbb{E}[|X|]}$$

https://www.probabilitycourse.com/chapter6/6_2_2_markov_chebyshev_inequalities.php

Inégalité de Markov

Soit $X \sim \mathcal{B}(n, p)$. En utilisant l'inégalité de Markov, trouvez la borne supérieure de $\mathbb{P}(X \geq \alpha n)$ où $p < \alpha < 1$. Evaluez la borne pour $p = \frac{1}{2}$ et $\alpha = \frac{3}{4}$.

$$\boxed{\forall a > 0, a \in \mathbb{R} : \mathbb{P}(|X| \geq a) \leq \frac{1}{a} \mathbb{E}[|X|]}$$

$\mathbb{E}X = np$

https://www.probabilitycourse.com/chapter6/6_2_2_markov_chebyshev_inequalities.php

Inégalité de Markov

> Soit $X \sim \mathcal{B}(n,p)$. En utilisant l'inégalité de Markov, trouvez la borne supérieure de $\mathbb{P}(X \geq \alpha n)$ où $p < \alpha < 1$. Evaluez la borne pour $p = \frac{1}{2}$ et $\alpha = \frac{3}{4}$.

$$\boxed{\forall a > 0, a \in \mathbb{R} : \mathbb{P}(|X| \geq a) \leq \frac{1}{a}\, \mathbb{E}[|X|]}$$

$\mathbb{E}X = np$

$a = \alpha n$

https://www.probabilitycourse.com/chapter6/6_2_2_markov_chebyshev_inequalities.php

Inégalité de Markov

> Soit $X \sim \mathcal{B}(n,p)$. En utilisant l'inégalité de Markov, trouvez la borne supérieure de $\mathbb{P}(X \geq \alpha n)$ où $p < \alpha < 1$. Evaluez la borne pour $p = \frac{1}{2}$ et $\alpha = \frac{3}{4}$.

$$\boxed{\forall a > 0, a \in \mathbb{R} : \mathbb{P}(|X| \geq a) \leq \frac{1}{a}\, \mathbb{E}[|X|]}$$

$\mathbb{E}X = np$

$a = \alpha n$

$$\mathbb{P}(|X| \geq \alpha n) \leq \frac{np}{\alpha n}$$

https://www.probabilitycourse.com/chapter6/6_2_2_markov_chebyshev_inequalities.php

Inégalité de Markov

Soit $X \sim \mathcal{B}(n, p)$. En utilisant l'inégalité de Markov, trouvez la borne supérieure de $\mathbb{P}(X \geq \alpha n)$ où $p < \alpha < 1$. Evaluez la borne pour $p = \frac{1}{2}$ et $\alpha = \frac{3}{4}$.

$$\boxed{\forall a > 0, a \in \mathbb{R} : \mathbb{P}(|X| \geq a) \leq \frac{1}{a} \mathbb{E}[|X|]}$$

$\mathbb{E}X = np$

$a = \alpha n$

$$\mathbb{P}(|X| \geq \alpha n) \leq \frac{np}{\alpha n}$$

$$\mathbb{P}(|X| \geq \alpha n) \leq \frac{p}{\alpha}$$

https://www.probabilitycourse.com/chapter6/6_2_2_markov_chebyshev_inequalities.php

Inégalité de Markov

Soit $X \sim \mathcal{B}(n,p)$. En utilisant l'inégalité de Markov, trouvez la borne supérieure de $\mathbb{P}(X \geq \alpha n)$ où $p < \alpha < 1$. Evaluez la borne pour $p = \frac{1}{2}$ et $\alpha = \frac{3}{4}$.

$$\boxed{\forall a > 0, a \in \mathbb{R} : \mathbb{P}(|X| \geq a) \leq \frac{1}{a} \mathbb{E}[|X|]}$$

$\mathbb{E}X = np$

$a = \alpha n$

$$\mathbb{P}(|X| \geq \alpha n) \leq \frac{np}{\alpha n}$$

$$\mathbb{P}(|X| \geq \alpha n) \leq \frac{p}{\alpha} \Rightarrow \mathbb{P}\left(|X| \geq \frac{3}{4} n\right) \leq \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}} \Rightarrow \mathbb{P}\left(|X| \geq \frac{3n}{4}\right) \leq \frac{2}{3}$$

https://www.probabilitycourse.com/chapter6/6_2_2_markov_chebyshev_inequalities.php

Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Inégalité de Bienaymé-Tchebychev (*Chebychev's inequality*) : Soit X une v.a.r. Alors :

$$\forall \alpha > \ 0, \alpha \in \mathbb{R} : \mathbb{P}(|X - \mathbb{E}X| \geq \alpha) \leq \frac{Var(X)}{\alpha^2}$$

Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Soit $X \sim \mathcal{B}(n,p)$. En utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, trouvez la borne supérieure de $\mathbb{P}(X \geq \alpha n)$ où $p < \alpha < 1$. Evaluez la borne pour $p = \frac{1}{2}$ et $\alpha = \frac{3}{4}$.

https://www.probabilitycourse.com/chapter6/6_2_2_markov_chebyshev_inequalities.php

Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Soit $X \sim \mathcal{B}(n, p)$. En utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, trouvez la borne supérieure de $\mathbb{P}(X \geq \alpha n)$ où $p < \alpha < 1$. Evaluez la borne pour $p = \frac{1}{2}$ et $\alpha = \frac{3}{4}$.

$$\boxed{\forall \alpha > 0, \alpha \in \mathbb{R} : \mathbb{P}(|X - \mathbb{E}X| \geq \alpha) \leq \frac{Var(X)}{\alpha^2}}$$

https://www.probabilitycourse.com/chapter6/6_2_2_markov_chebyshev_inequalities.php

Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Soit $X \sim \mathcal{B}(n,p)$. En utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, trouvez la borne supérieure de $\mathbb{P}(X \geq \alpha n)$ où $p < \alpha < 1$. Evaluez la borne pour $p = \frac{1}{2}$ et $\alpha = \frac{3}{4}$.

$$\boxed{\forall \alpha > 0, \alpha \in \mathbb{R} : \mathbb{P}(|X - \mathbb{E}X| \geq \alpha) \leq \frac{Var(X)}{\alpha^2}}$$

$Var(X) = np(1-p)$

https://www.probabilitycourse.com/chapter6/6_2_2_markov_chebyshev_inequalities.php

Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Soit $X \sim \mathcal{B}(n,p)$. En utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, trouvez la borne supérieure de $\mathbb{P}(X \geq \alpha n)$ où $p < \alpha < 1$. Evaluez la borne pour $p = \frac{1}{2}$ et $\alpha = \frac{3}{4}$.

$$\boxed{\forall \alpha > 0, \alpha \in \mathbb{R} : \mathbb{P}(|X - \mathbb{E}X| \geq \alpha) \leq \frac{Var(X)}{\alpha^2}}$$

$Var(X) = np(1-p)$

$\mathbb{E}X = np$

Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Soit $X \sim \mathcal{B}(n, p)$. En utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, trouvez la borne supérieure de $\mathbb{P}(X \geq \alpha n)$ où $p < \alpha < 1$. Evaluez la borne pour $p = \frac{1}{2}$ et $\alpha = \frac{3}{4}$.

$$\boxed{\forall \alpha > 0, \alpha \in \mathbb{R} : \mathbb{P}(|X - \mathbb{E}X| \geq \alpha) \leq \frac{Var(X)}{\alpha^2}}$$

$Var(X) = np(1 - p)$
$\mathbb{E}X = np$

https://www.probabilitycourse.com/chapter6/6_2_2_markov_chebyshev_inequalities.php

Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Soit $X \sim \mathcal{B}(n,p)$. En utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, trouvez la borne supérieure de $\mathbb{P}(X \geq \alpha n)$ où $p < \alpha < 1$. Evaluez la borne pour $p = \frac{1}{2}$ et $\alpha = \frac{3}{4}$.

$$\boxed{\forall \alpha > 0, \alpha \in \mathbb{R} : \mathbb{P}(|X - \mathbb{E}X| \geq \alpha) \leq \frac{Var(X)}{\alpha^2}}$$

$Var(X) = np(1-p)$
$\mathbb{E}X = np$

$$\mathbb{P}(X \geq \alpha n) = \mathbb{P}(X - np \geq \alpha n - np) \leq \mathbb{P}(|X - np| \geq \alpha n - np) \leq \frac{np(1-p)}{(\alpha n - np)^2}$$

$$\mathbb{P}(X \geq \alpha n) \leq \frac{p(1-p)}{n(\alpha - p)^2}$$

Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Soit $X \sim \mathcal{B}(n,p)$. En utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, trouvez la borne supérieure de $\mathbb{P}(X \geq \alpha n)$ où $p < \alpha < 1$. Evaluez la borne pour $p = \frac{1}{2}$ et $\alpha = \frac{3}{4}$.

$$\boxed{\forall \alpha > \ 0, \alpha \in \mathbb{R} : \mathbb{P}(|X - \mathbb{E}X| \geq \alpha) \leq \frac{Var(X)}{\alpha^2}}$$

$$Var(X) = np(1-p)$$
$$\mathbb{E}X = np$$

$$\mathbb{P}(X \geq \alpha n) \leq \frac{p(1-p)}{n(\alpha-p)^2} \Rightarrow \mathbb{P}\left(X \geq \frac{3}{4}n\right) \leq \frac{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}\right)}{n\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{2}\right)^2} \Rightarrow \mathbb{P}\left(X \geq \frac{3n}{4}\right) \leq \frac{\frac{1}{4}}{n\left(\frac{1}{4}\right)^2}$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}\left(X \geq \frac{3n}{4}\right) \leq \frac{4}{n}$$

https://www.probabilitycourse.com/chapter6/6_2_2_markov_chebyshev_inequalities.php

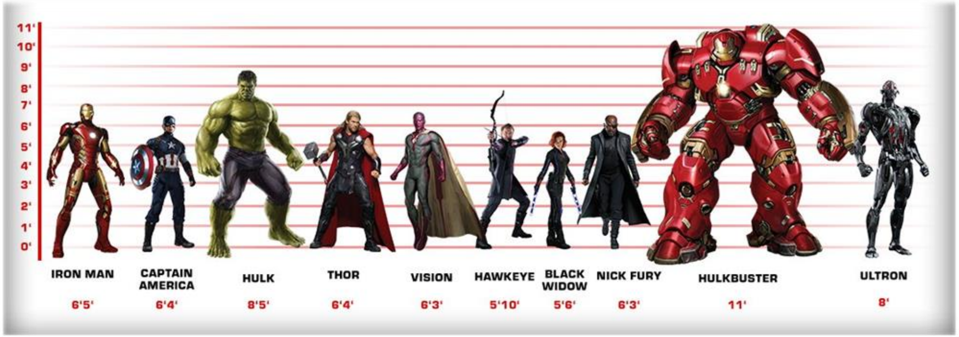
Convergence

Intuition

On étudie un certain phénomène,
e.g. *taille des gens sur Terre*

$$X$$

! Impossible d'observer tout le monde



Intuition

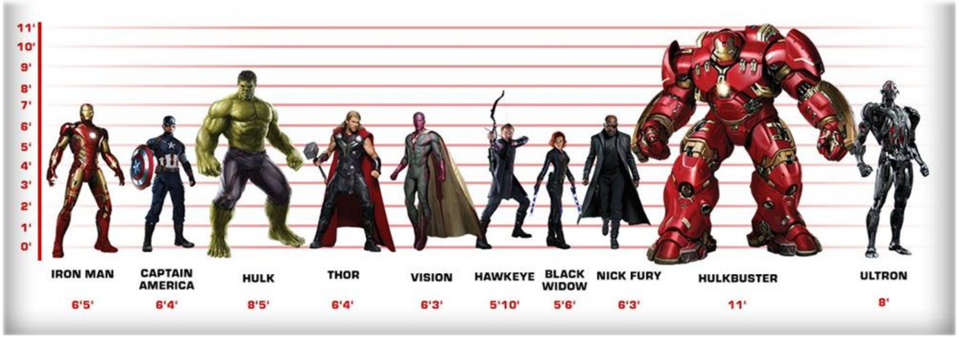
On étudie un certain phénomène, e.g. *taille des gens sur Terre*

$$X$$

! Impossible d'observer tout le monde

On peut observer certaines **réalisations** de ce phénomène :

$$X_1, X_2, \dots, X_n$$



Intuition

On étudie un certain phénomène, e.g. *taille des gens sur Terre*

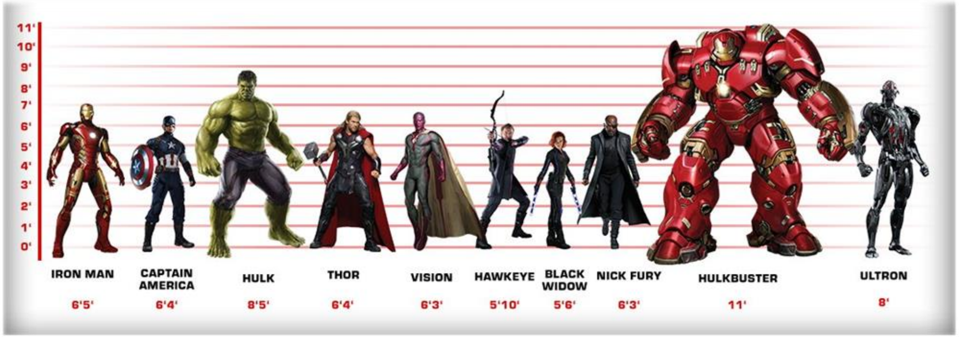
X

! Impossible d'observer tout le monde

On peut observer certaines **réalisations** de ce phénomène :

$X_1, X_2, \dots, X_n$

estimation



Intuition

On étudie un certain phénomène, e.g. *taille des gens sur Terre*

$\boxed{X}$

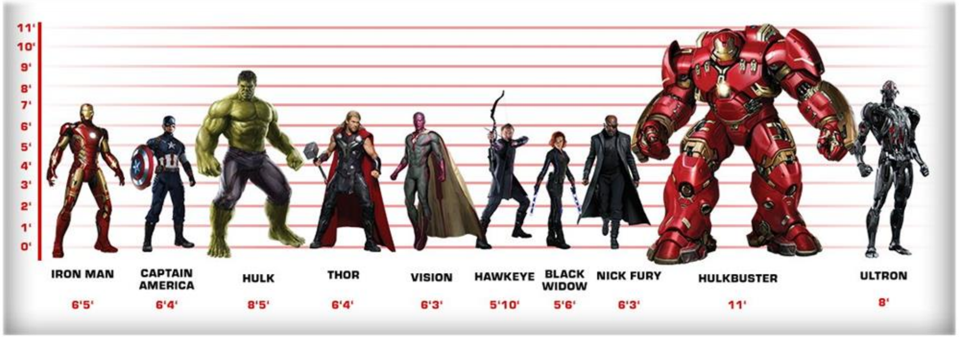
On peut observer certaines **réalisations** de ce phénomène :

$\boxed{X_1, X_2, \ldots, X_n}$

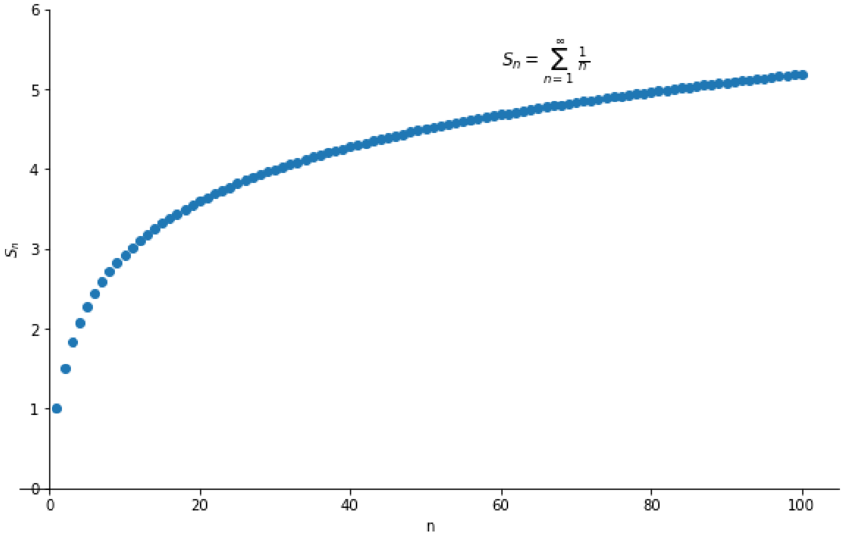
estimation

! Impossible d'observer tout le monde

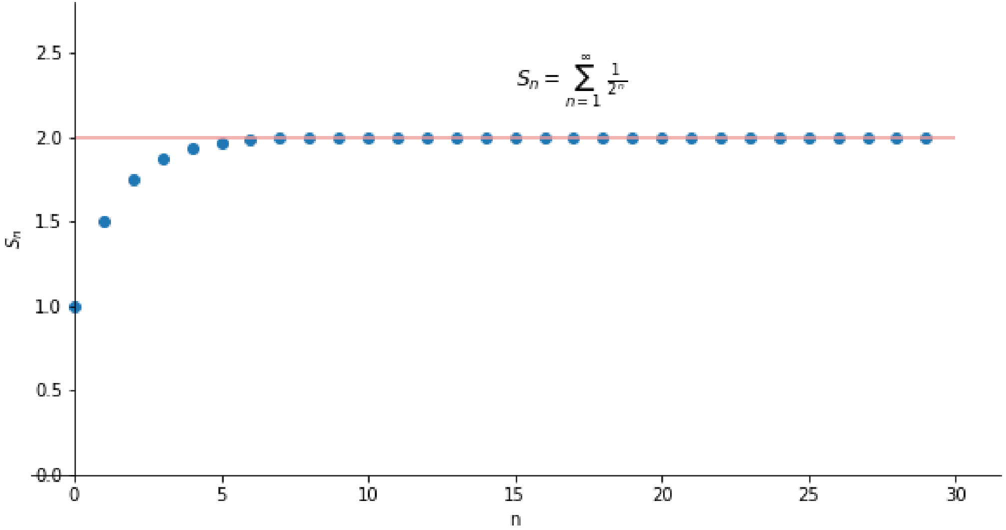
Intuition : plus n est grand, plus on se rapproche du « vrai » phénomène



Rappel : convergence d’une série numérique

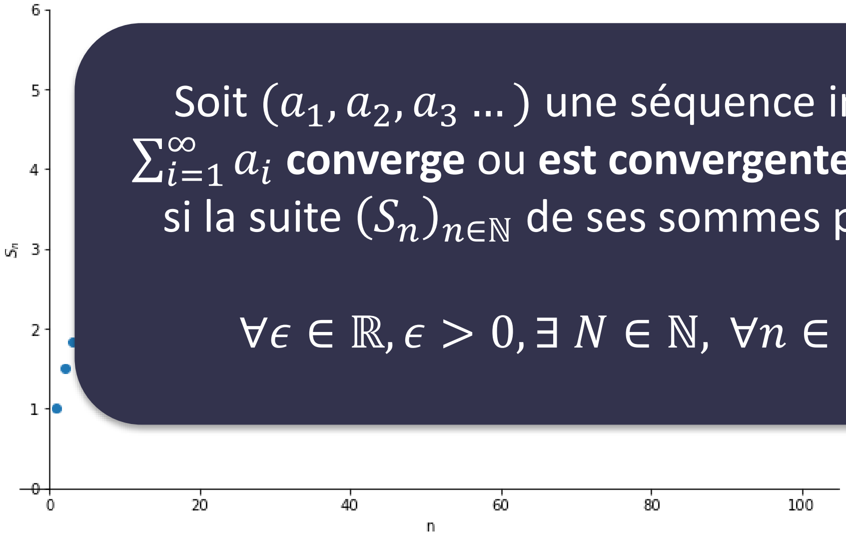


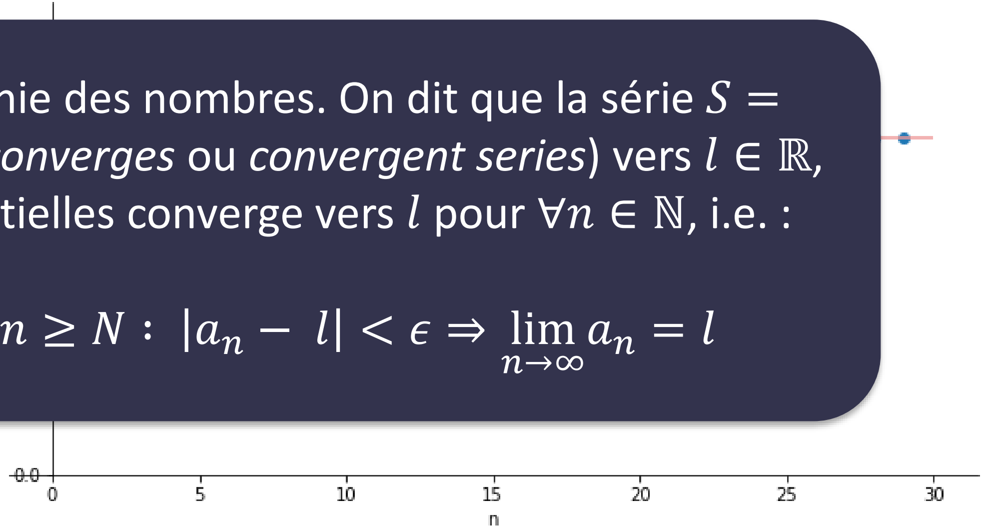
Série divergente



Série convergente

Rappel : convergence d'une série numérique





Soit $(a_1, a_2, a_3 \dots)$ une séquence infinie des nombres. On dit que la série $S = \sum_{i=1}^{\infty} a_i$ **converge** ou **est convergente** (*converges* ou *convergent series*) vers $l \in \mathbb{R}$, si la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de ses sommes partielles converge vers l pour $\forall n \in \mathbb{N}$, i.e. :

$$\forall \epsilon \in \mathbb{R}, \epsilon > 0, \exists\, N \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N :\ |a_n - l| < \epsilon \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = l$$

Série divergente

Série convergente

Convergence en loi

Convergence en probabilité

Convergence presque sûre

Convergence en loi

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une séquence de v.a.r. $X_1, X_2, \ldots$ de fonctions de répartition respectives $\left(F_{X_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$. Soit X une v.a.r.. X de fonction de répartition F_X.

La suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite **converger en loi** (*convergence in distribution*) vers X, noté:

$$X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} X$$

si pour $\forall x \in \mathbb{R}$ tel que F_X est continue en x, on a :

$$\lim_{n\to+\infty} F_{X_n}(x) = F_X(x)$$

Convergence en loi

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de v.a.r. de fonctions caratéristiques respectives $\left(\phi_{X_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

Soit X une v.a.r. de la fonction caractéristique ϕ_X.

$$X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} X$$

si et seulement si :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \lim_{n\to+\infty} \phi_{X_n}(t) = \phi_X(t)$$

Convergence en loi

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de v.a.r. et X une v.a.r.

Soit h: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction bornée et continue par morceaux.

$$X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} X$$

si et seulement si :

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}[h(X_n)] = \mathbb{E}[h(X)],\ \forall h$$

Convergence en loi

Convergence en probabilité

Convergence presque sûre

Convergence en probabilité

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une séquence de v.a.r. X_1, X_2, ... Soit X une v.a.r.. X et $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

La suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite **converger en probabilité** (*convergence in probability*) vers X, noté :

$$X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbb{P}} X$$

si $\forall \epsilon > 0, \quad \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(|X_n - X| \geq \epsilon) = 0$

Convergence en probabilité

Si la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers X en probabilité, alors elle converge vers X en loi :

$$X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbb{P}} X \Rightarrow X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} X$$

Remarque : la réciproque n'est pas vraie en général.

Convergence en probabilité

Soit X une v.a.r. Soit $X_n = X + Y_n$, où Y_n a l'espérance $\mathbb{E}Y_n = \frac{1}{n}$ et la variance $Var(Y_n) = \frac{\sigma^2}{n}$, où $\sigma > 0$ est une constante.

Montrons que $X_n \xrightarrow[n \to +\infty]{\mathbb{P}} X$.

Convergence en probabilité

Soit X une v.a.r. Soit $X_n = X + Y_n$, où Y_n a l'espérance $\mathbb{E}Y_n = \frac{1}{n}$ et la variance $Var(Y_n) = \frac{\sigma^2}{n}$, où $\sigma > 0$ est une constante.

Montrons que $X_n \xrightarrow[n \to +\infty]{\mathbb{P}} X$.

$$\boxed{X_n \xrightarrow[n \to +\infty]{\mathbb{P}} X \text{ si } \forall \epsilon > 0, \ \lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}(|X_n - X| \geq \epsilon) = 0}$$

INSA INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES LYON

membre de UNIVERSITÉ DE LYON

Convergence en probabilité

Soit X une v.a.r. Soit $X_n = X + Y_n$, où Y_n a l'espérance $\mathbb{E}Y_n = \frac{1}{n}$ et la variance $Var(Y_n) = \frac{\sigma^2}{n}$, où $\sigma > 0$ est une constante.

Montrons que $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbb{P}} X$.

$$\boxed{X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbb{P}} X \text{ si } \forall\epsilon > 0,\ \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(|X_n - X| \geq \epsilon) = 0}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(|X_n - X| \geq \epsilon) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(|(X + Y_n) - X| \geq \epsilon) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(|Y_n| \geq \epsilon)$$

Convergence en probabilité

Soit X une v.a.r. Soit $X_n = X + Y_n$, où Y_n a l'espérance $\mathbb{E}Y_n = \frac{1}{n}$ et la variance $Var(Y_n) = \frac{\sigma^2}{n}$, où $\sigma > 0$ est une constante.

Montrons que $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbb{P}} X$.

$$\boxed{X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbb{P}} X \text{ si } \forall\epsilon > 0,\ \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(|X_n - X| \geq \epsilon) = 0}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(|X_n - X| \geq \epsilon) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(|(X + Y_n) - X| \geq \epsilon) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(|Y_n| \geq \epsilon)$$

?

Convergence en probabilité

Soit X une v.a.r. Soit $X_n = X + Y_n$, où Y_n a l'espérance $\mathbb{E}Y_n = \frac{1}{n}$ et la variance $Var(Y_n) = \frac{\sigma^2}{n}$, où $\sigma > 0$ est une constante.

Montrons que $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbb{P}} X$.

$$\boxed{X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbb{P}} X \text{ si } \forall\epsilon > 0, \ \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(|X_n - X| \geq \epsilon) = 0}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(|X_n - X| \geq \epsilon) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(|(X + Y_n) - X| \geq \epsilon) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(|Y_n| \geq \epsilon)$$

$$\boxed{|a + b| \leq |a| + |b|, \forall a, b \in \mathbb{R}}$$

Convergence en probabilité

Soit X une v.a.r. Soit $X_n = X + Y_n$, où Y_n a l'espérance $\mathbb{E}Y_n = \frac{1}{n}$ et la variance $Var(Y_n) = \frac{\sigma^2}{n}$, où $\sigma > 0$ est une constante.

Montrons que $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbb{P}} X$.

$$\boxed{X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbb{P}} X \text{ si } \forall\epsilon > 0,\ \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(|X_n - X| \geq \epsilon) = 0}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(|X_n - X| \geq \epsilon) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(|(X + Y_n) - X| \geq \epsilon) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(|Y_n| \geq \epsilon)$$

$$\boxed{|a+b| \leq |a| + |b|, \forall a, b \in \mathbb{R}}$$

$$\begin{cases} a = Y_n - \mathbb{E}Y_n \\ b = \mathbb{E}Y_n \end{cases} \Rightarrow \underbrace{|Y_n|}_{|a+b|} \leq \underbrace{|Y_n - \mathbb{E}Y_n|}_{|a|} + \underbrace{|\mathbb{E}Y_n|}_{|b|} \Rightarrow |Y_n| \leq |Y_n - \mathbb{E}Y_n| + \left|\frac{1}{n}\right|$$

Convergence en probabilité

Soit X une v.a.r. Soit $X_n = X + Y_n$, où Y_n a l'espérance $\mathbb{E}Y_n = \frac{1}{n}$ et la variance $Var(Y_n) = \frac{\sigma^2}{n}$, où $\sigma > 0$ est une constante.

Montrons que $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbb{P}} X$.

$$\boxed{X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbb{P}} X \text{ si } \forall\epsilon > 0,\ \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(|X_n - X| \geq \epsilon) = 0}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(|X_n - X| \geq \epsilon) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(|(X + Y_n) - X| \geq \epsilon) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(|Y_n| \geq \epsilon)$$

$$\leq \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(|Y_n - \mathbb{E}Y_n| + \frac{1}{n} \geq \epsilon\right)$$

$$\begin{cases} a = Y_n - \mathbb{E}Y_n \\ b = \mathbb{E}Y_n \end{cases} \Rightarrow \underbrace{|Y_n|}_{|a+b|} \leq \underbrace{|Y_n - \mathbb{E}Y_n|}_{|a|} + \underbrace{|\mathbb{E}Y_n|}_{|b|} \Rightarrow |Y_n| \leq |Y_n - \mathbb{E}Y_n| + \left|\frac{1}{n}\right|$$

Convergence en probabilité

Soit X une v.a.r. Soit $X_n = X + Y_n$, où Y_n a l'espérance $\mathbb{E}Y_n = \frac{1}{n}$ et la variance $Var(Y_n) = \frac{\sigma^2}{n}$, où $\sigma > 0$ est une constante.

Montrons que $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbb{P}} X$.

$$\boxed{X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbb{P}} X \text{ si } \forall\epsilon > 0,\ \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(|X_n - X| \geq \epsilon) = 0}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(|X_n - X| \geq \epsilon) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(|(X + Y_n) - X| \geq \epsilon) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(|Y_n| \geq \epsilon)$$
$$\leq \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(|Y_n - \mathbb{E}Y_n| + \frac{1}{n} \geq \epsilon\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(|Y_n - \mathbb{E}Y_n| \geq \epsilon - \frac{1}{n}\right)$$

Convergence en probabilité

Soit X une v.a.r. Soit $X_n = X + Y_n$, où Y_n a l'espérance $\mathbb{E}Y_n = \frac{1}{n}$ et la variance $Var(Y_n) = \frac{\sigma^2}{n}$, où $\sigma > 0$ est une constante.

Montrons que $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbb{P}} X$.

L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev :

$$\forall \alpha > 0, \alpha \in \mathbb{R} : \mathbb{P}(|X - \mathbb{E}X| \geq \alpha) \leq \frac{Var(X)}{\alpha^2}$$

$$\boxed{X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbb{P}} X \text{ si } \forall \epsilon > 0,\ \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(|X_n - X| \geq \epsilon) = 0}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(|X_n - X| \geq \epsilon) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(|(X + Y_n) - X| \geq \epsilon) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(|Y_n| \geq \epsilon)$$

$$\leq \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(|Y_n - \mathbb{E}Y_n| + \frac{1}{n} \geq \epsilon\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(|Y_n - \mathbb{E}Y_n| \geq \epsilon - \frac{1}{n}\right)$$

Convergence en probabilité

Soit X une v.a.r. Soit $X_n = X + Y_n$, où Y_n a l'espérance $\mathbb{E}Y_n = \frac{1}{n}$ et la variance $Var(Y_n) = \frac{\sigma^2}{n}$, où $\sigma > 0$ est une constante.

Montrons que $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbb{P}} X$.

L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev :

$$\forall \alpha > 0, \alpha \in \mathbb{R} : \mathbb{P}(|X - \mathbb{E}X| \geq \alpha) \leq \frac{Var(X)}{\alpha^2}$$

$$X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbb{P}} X \text{ si } \forall \epsilon > 0, \quad \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(|X_n - X| \geq \epsilon) = 0$$

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(|X_n - X| \geq \epsilon) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(|(X + Y_n) - X| \geq \epsilon) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(|Y_n| \geq \epsilon)$$

$$\leq \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(|Y_n - \mathbb{E}Y_n| + \frac{1}{n} \geq \epsilon\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(|Y_n - \mathbb{E}Y_n| \geq \epsilon - \frac{1}{n}\right) \leq \frac{\frac{\sigma^2}{n}}{\left(\epsilon - \frac{1}{n}\right)^2} = \frac{\sigma^2}{n\left(\epsilon - \frac{1}{n}\right)^2}$$

Convergence en probabilité

Soit X une v.a.r. Soit $X_n = X + Y_n$, où Y_n a l'espérance $\mathbb{E}Y_n = \frac{1}{n}$ et la variance $Var(Y_n) = \frac{\sigma^2}{n}$, où $\sigma > 0$ est une constante.

Montrons que $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbb{P}} X$.

L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev :

$$\forall \alpha > 0, \alpha \in \mathbb{R} : \mathbb{P}(|X - \mathbb{E}X| \geq \alpha) \leq \frac{Var(X)}{\alpha^2}$$

$$X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbb{P}} X \text{ si } \forall \epsilon > 0, \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(|X_n - X| \geq \epsilon) = 0$$

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(|X_n - X| \geq \epsilon) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(|(X + Y_n) - X| \geq \epsilon) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(|Y_n| \geq \epsilon)$$

$$\leq \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(|Y_n - \mathbb{E}Y_n| + \frac{1}{n} \geq \epsilon\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(|Y_n - \mathbb{E}Y_n| \geq \epsilon - \frac{1}{n}\right) \leq \frac{\frac{\sigma^2}{n}}{\left(\epsilon - \frac{1}{n}\right)^2} = \frac{\sigma^2}{n\left(\epsilon - \frac{1}{n}\right)^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathbf{0}$$

Convergence en loi

Convergence en probabilité

Convergence presque sûre

Convergence presque sûre

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une séquence de v.a.r. $X_1, X_2, \ldots$. Soit X une v.a.r.. X et $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

Soit $A \in \mathcal{A}$ l'ensemble des éventualités $\omega \in \Omega$ telles que la suite numérique $\left(X_n(\omega)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $X(\omega)$.

La suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite **converger presque sûrement** (*almost sure convergence*) vers X, noté :

$$X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{p.s.} X$$

si $\mathbb{P}(A) = 1$

Convergence presque sûre

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une séquence de v.a.r. $X_1, X_2, \ldots$. Si pour tout $\forall\, \epsilon > 0, \epsilon \in \mathbb{R}$, la condition suivante est satisfaite :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(|X_n - X| > \epsilon) < \infty$$

Alors :

$$X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{p.s.} X$$

Convergence presque sûre

Si la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers X presque sûrement, alors elle converge vers X en probabilité :

$$X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{p.s.} X \ \Rightarrow X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbb{P}} X$$

INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES LYON

membre de UNIVERSITÉ DE LYON

Bilan sur convergence

Convergence presque sûre

$$X_n \xrightarrow[n\to\infty]{p.s.} X$$

↓

Convergence en probabilité

$$X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} X$$

↓

Convergence en loi

$$X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} X$$

Lois des grands nombres et Théorème de la Limite Centrale

Moyenne de l'échantillon

Soit $X_1, \dots, X_n$ n v.a.r. i.i.d. La **moyenne de l'échantillon** (*sample mean*), notée $\overline{X_n}$, est une valeur définie par :

$$\overline{X_n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

Loi faible des grands nombres

Loi forte des grands nombres

Théorème de la limite centrale

Loi faible des grands nombres

Intuition : la moyenne du grand nombre de v.a.r. i.i.d. converge vers l'espérance théorique.

Si on répète une expérimentation de manière indépendante un grand nombre de fois et on prend une moyenne des résultats obtenus, cette moyenne va être proche de l'espérance théorique

Loi faible des grands nombres

Loi faible des grands nombres (*Weak law of large numbers* ou *WLLN*)

Soit $X_1, \dots, X_n$ n v.a.r. i.i.d. de l'espérance finie $\mathbb{E}X_i = m < \infty, \forall i = 1, \dots, n$ et la variance finie $Var(X_i) = \sigma^2 < \infty, \forall i = 1, \dots, n$. Soit $\overline{X_n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$.

Alors, $\overline{X_n}$ converge en probabilité vers m :

$$\overline{X_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbb{P}} m$$

i.e.: $\forall \epsilon > 0, \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(|\overline{X_n} - m| \geq \epsilon) = 0$

Loi faible des grands nombres

Loi forte des grands nombres

Théorème de la limite centrale

Loi forte des grands nombres

Loi forte des grands nombres (*Strong law of large numbers* ou *LLN*)

Soient $X_1, \dots, X_n$ n v.a.r. i.i.d. de l'espérance m finie. Soit $\overline{X_n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$.

Alors, $\overline{X_n}$ converge presque sûrement vers m, i.e. :

$$\overline{X_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{p.s.} m$$

Autrement dit, $\exists \Omega_0 \subset \Omega$ avec $\mathbb{P}\left(\overline{\Omega_0}\right) = \mathbb{P}\left(\Omega_0^C\right) = 0$ tel que $\forall \omega \in \Omega_0$:

$$\lim_{n\to+\infty} \overline{X_n}(\omega) = m$$

Loi faible des grands nombres

Loi forte des grands nombres

Théorème de la limite centrale

Théorème de la Limite Centrale (*Central Limit Theorem, CLT*)

Soient $X_1, \dots, X_n$ n v.a.r. i.i.d. de moyenne $\mathbb{E}X_i = m < \infty, \forall i = 1, \dots, n$ et de variance $Var(X_i) = \sigma^2 < \infty,\ \forall i = 1, \dots, n$. Soit $S = \sum_{i=1}^{n} X_i \ = \ n\overline{X_n}$. Alors :

$$\frac{S_n - nm}{\sigma\sqrt{n}} \xrightarrow[n \to +\infty]{\mathcal{L}} Y \sim \mathcal{N}(0,1)$$

Autrement dit,

$$\lim_{n \to \infty} \mathbb{P}(S_n \leq x) = \Phi(x), \forall x \in \mathbb{R}$$

où $\Phi(x)$ est la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0,1)$.

Une formule équivalente qui est très utilisée est :

$$\frac{\bar{X} - m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \xrightarrow[n \to +\infty]{\mathcal{L}} Y \sim \mathcal{N}(0,1)$$

où $\overline{X_n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ est la moyenne de $X_1, \dots, X_n$.

Application de TLC

1. Définir la variable aléatoire d'intérêt Y comme la somme de n v.a.r. i.i.d. $X_i, i = 1, \dots, n$: $Y = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$

2. Trouver $\mathbb{E}Y$ et $Var(Y)$ comme :

$$\mathbb{E}Y = n\mathbb{E}X_i = nm$$

$$Var(Y) = nVar(X_i) = n\sigma^2$$

3. Selon TLC : $\frac{Y - EY}{\sqrt{Var(Y)}} = \frac{Y - nm}{\sqrt{n}\sigma} \sim \mathcal{N}(0,1)$.

Alors, on peut trouver $\mathbb{P}(y_1 \leq Y \leq y_2)$ comme suit :

$$\mathbb{P}(y_1 \leq Y \leq y_2) = \mathbb{P}\left(\frac{y_1 - nm}{\sqrt{n}\,\sigma} \leq \frac{Y - nm}{\sqrt{n}\,\sigma} \leq \frac{y_2 - nm}{\sqrt{n}\,\sigma}\right)$$

$$\approx \Phi\left(\frac{y_2 - nm}{\sqrt{n}\,\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{y_1 - nm}{\sqrt{n}\,\sigma}\right)$$

Quelques distributions intéressantes

Soient $X_1, \dots, X_n$ n v.a.r. i.i.d. de loi de Bernoulli $X_i \sim \mathcal{B}(p),\ i = 1, \dots, n$. Soit $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$.

Alors :

1. S_n suit la loi binomiale $S_n \sim \mathcal{B}(n, p)$
2. $S_n \xrightarrow[n \to +\infty]{\mathcal{L}} Y \sim \mathcal{N}(np, np(1-p))$

Quelques distributions intéressantes (Simulation)

Soient $X_1, \dots, X_n$ n v.a.r. i.i.d. de loi de Bernoulli $X_i \sim \mathcal{B}(p),\ i = 1, \dots, n$. Soit $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$.

Soit $p = 0.3$

Quelques distributions intéressantes (Simulation)

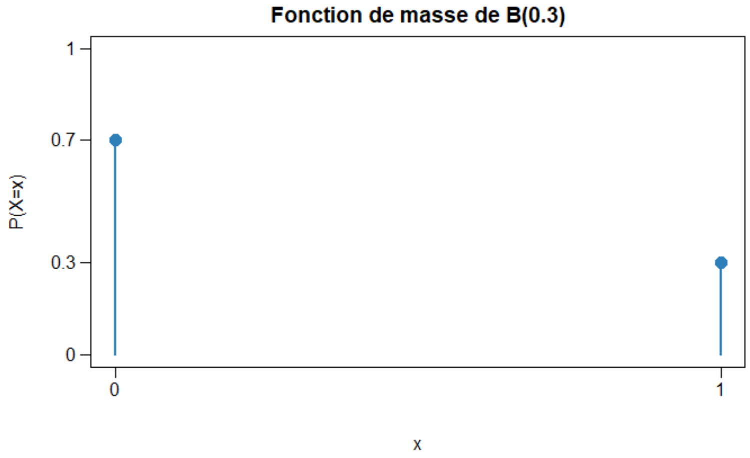
Soient $X_1, \dots, X_n$ n v.a.r. i.i.d. de loi de Bernoulli $X_i \sim \mathcal{B}(p),\ i = 1, \dots, n$. Soit $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$.

Soit $p = 0.3$

$$X_i \sim \mathcal{B}(p = 0.3) : \begin{cases} \mathbb{P}(X_i = 1) = p = 0.3 \\ \mathbb{P}(X_i = 0) = 1 - p = 0.7 \end{cases}$$

- $\mathbb{E}X_i = p = 0.3$
- $Var(X_i) = p(1-p) = 0.3(1-0.3) = 0.21$

théorique



Quelques distributions intéressantes (Simulation)

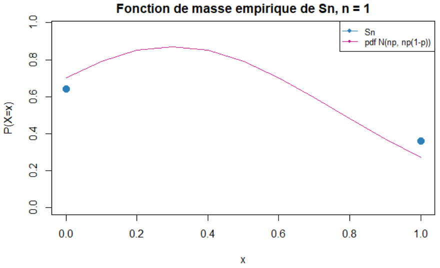
Soient $X_1, \ldots, X_n$ n v.a.r. i.i.d. de loi de Bernoulli $X_i \sim \mathcal{B}(p),\ i = 1, \ldots, n$. Soit $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$.

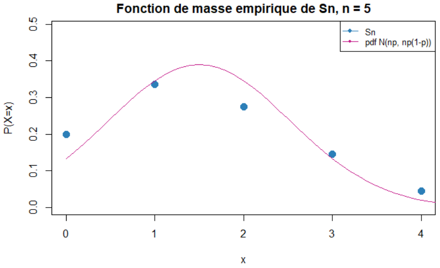
Soit $p = 0.3$

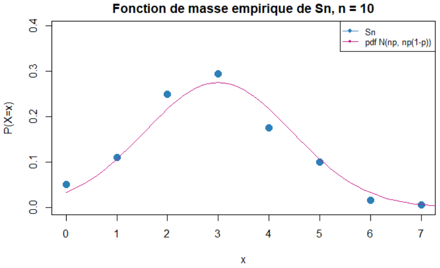
Empirique

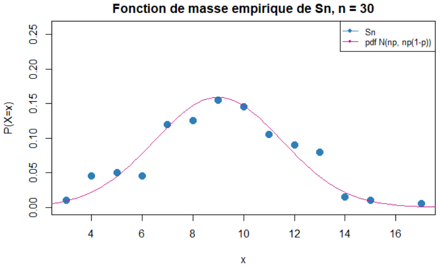
1. Prendre un certain nombre d'observations k de n tirages (e.g. $n = \{1, 5, 10, 30, 50, 100\}$) et enregistrer les $X_i, i = 1, \ldots, n$
2. Calculer $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$. Nous savons que $S_n \sim \mathcal{B}(n, p)$ (loi binomiale)
3. Normaliser S_n en obtenant $Z_n = \frac{S_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}$
4. Visualiser la fonction de masse de S_n et Z_n

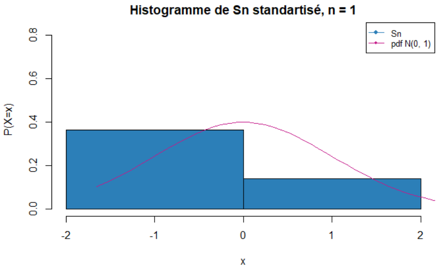
Quelques distributions intéressantes (Simulation)

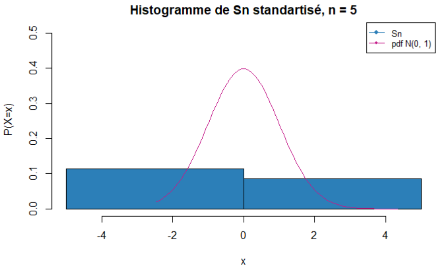


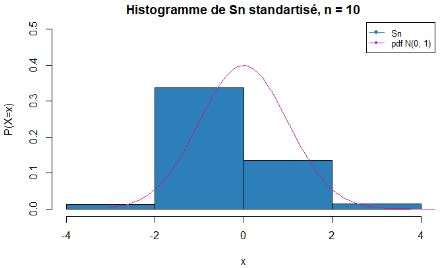


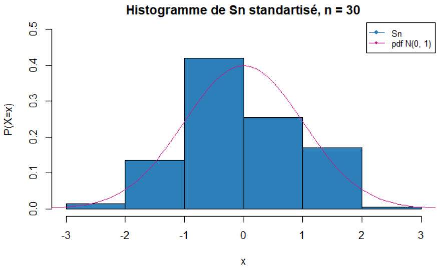












Quelques distributions intéressantes

Soient $X_1, \dots, X_n$ n v.a.r. i.i.d. de loi de Poisson $X_i \sim \mathcal{P}(\lambda),\ i = 1, \dots, n$. Soit $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$.

Alors :

1. S_n suit la loi de Poisson $S_n \sim \mathcal{P}(n\lambda)$
2. $S_n \xrightarrow[n \to +\infty]{\mathcal{L}} Y \sim \mathcal{N}(n\lambda, n\lambda)$