Introduction aux Probabilités

2022/2023

Plan

Fonction de deux variables aléatoires

Fonction de deux v.a.r.

(cas discret) Soit X et Y deux v.a.r. discrètes. Soit $Z = g(X,Y)$ où g: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Alors :

$$\mathbb{P}_Z(z) = \mathbb{P}_Z(g(X,Y) = z) = \sum_{(x_i,y_j)\in A} \mathbb{P}_{XY}(x_i, y_j)$$

où $A = \{(x_i, y_j) \in \mathbb{R}_{XY} : \; g(x_i, y_j) = z\}$

(cas continu) Dans le cas continu, la fonction de répartition de $Z = g(X,Y)$ peut être défini comme :

$$F_Z(z) = \mathbb{P}(Z \leq z) = \mathbb{P}(g(X,Y) \leq z) = \iint_D f_{XY}(x,y)dxdy$$

où $D = \{(x,y) \mid g(x,y) \leq z\}$

Espérance d'une fonction de deux v.a.r.

(cas discret) Soit X et Y deux v.a.r. discrètes. Soit $Z = g(X, Y)$ où $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Alors, l'espérance de Z est donnée par (*Law of the unconscious statistician (LOTUS)*) :

$$\mathbb{E}Z = \mathbb{E}[g(X,Y)] = \sum_{(x_i, y_j) \in \mathbb{R}_{XY}} g(x_i, y_j)\mathbb{P}_{XY}(x_i, y_j)$$

(cas continu) Soit (X, Y) un couple de v.a.r. absolument continu à la fonction de densité $f_{XY}(x, y)$ Soit $Z = g(X, Y)$ où $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Alors, l'espérance de Z est donnée par :

$$\mathbb{E}Z = \mathbb{E}[g(X,Y)] = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} g(x, y) f_{XY}(x, y) dx dy$$

Pour rappel, si X et Y sont indépendantes,alors : $f_{XY}(x, y) = f_X(x) \times f_Y(y)$

Théorème

Soit (X, Y) un couple de v.a.r. absolument continu. Soit g: $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction admettant des dérivées partielles continues.

Soit (Z, W) un couple de v.a.r. défini par :

$$(Z, W) = g(X, Y) = \left(g_1(X, Y), g_2(X, Y)\right)$$

Soit $h = g^{-1}$ une fonction inverse de g, i.e. :

$$(X, Y) = h(Z, W) = \left(h_1(Z, W), h_2(Z, W)\right)$$

Alors (Z, W) est un couple de v.a.r. absolument continu à la fonction de densité jointe $f_{ZW}(z, w)$ défini par :

$$\forall\, (z, w) \in \mathbb{R}_{ZW}, \qquad f_{ZW}(z, w) = f_{XY}\left(h_1(z, w), h_2(z, w)\right) |J|$$

où J est le Jacobian de h donné par :

$$J = \det \begin{bmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial z} & \frac{\partial h_1}{\partial w} \\ \frac{\partial h_2}{\partial z} & \frac{\partial h_2}{\partial w} \end{bmatrix} = \frac{\partial h_1}{\partial z} \cdot \frac{\partial h_2}{\partial w} - \frac{\partial h_2}{\partial z} \cdot \frac{\partial h_1}{\partial w}$$

Théorème (Exemple)

X et Y deux v.a.r. à la fonction de densité jointe $f_{XY}(x, y)$. Soit $Z = X + Y$.

Quelle est la fonction de densité $f_Z(z)$?

Théorème (Exemple)

X et Y deux v.a.r. à la fonction de densité jointe $f_{XY}(x,y)$. Soit $Z = X + Y$.

Quelle est la fonction de densité $f_Z(z)$?

$$\boxed{f_{ZW}(z,w) = f_{XY}\big(h_1(z,w), h_2(z,w)\big)\,|J|}$$

Théorème (Exemple)

X et Y deux v.a.r. à la fonction de densité jointe $f_{XY}(x,y)$. Soit $Z = X + Y$.

Quelle est la fonction de densité $f_Z(z)$?

$$\boxed{f_{ZW}(z,w) = f_{XY}\big(h_1(z,w), h_2(z,w)\big)\,|J|}$$

Pour pouvoir appliquer le théorème, il nous faut 2 v.a.r. Z et W.

Théorème (Exemple)

X et Y deux v.a.r. à la fonction de densité jointe $f_{XY}(x,y)$. Soit $Z = X + Y$.

Quelle est la fonction de densité $f_Z(z)$?

$$\boxed{f_{ZW}(z,w) = f_{XY}\big(h_1(z,w), h_2(z,w)\big)\,|J|}$$

Pour pouvoir appliquer le théorème, il nous faut 2 v.a.r. Z et W.

Soit $W = X$, alors :

$$g: \begin{cases} z = x + y \\ w = x \end{cases}$$

Théorème (Exemple)

X et Y deux v.a.r. à la fonction de densité jointe $f_{XY}(x, y)$. Soit $Z = X + Y$.
Quelle est la fonction de densité $f_Z(z)$?

$$\boxed{f_{ZW}(z, w) = f_{XY}\big(h_1(z, w), h_2(z, w)\big)\,|J|}$$

Pour pouvoir appliquer le théorème, il nous faut 2 v.a.r. Z et W.
Soit $W = X$, alors :

$$g: \begin{cases} z = x + y \\ w = x \end{cases}$$

Quelle est la fonction inverse $h = g^{-1}$?

Théorème (Exemple)

X et Y deux v.a.r. à la fonction de densité jointe $f_{XY}(x, y)$. Soit $Z = X + Y$.

Quelle est la fonction de densité $f_Z(z)$?

$$\boxed{f_{ZW}(z, w) = f_{XY}\big(h_1(z, w), h_2(z, w)\big)\, |J|}$$

Pour pouvoir appliquer le théorème, il nous faut 2 v.a.r. Z et W.

Soit $W = X$, alors :

$$g: \begin{cases} z = x + y \\ w = x \end{cases}$$

Quelle est la fonction inverse $h = g^{-1}$?

$$h: \begin{cases} x = w \\ y = z - w \end{cases}$$

Théorème (Exemple)

X et Y deux v.a.r. à la fonction de densité jointe $f_{XY}(x, y)$. Soit $Z = X + Y$.
Quelle est la fonction de densité $f_Z(z)$?

$$\boxed{f_{ZW}(z, w) = f_{XY}\big(h_1(z, w), h_2(z, w)\big)\, |J|}$$

Pour pouvoir appliquer le théorème, il nous faut 2 v.a.r. Z et W.
Soit $W = X$, alors :

$$g: \begin{cases} z = x + y \\ w = x \end{cases}$$

Quelle est la fonction inverse $h = g^{-1}$?

$$h: \begin{cases} x = w \\ y = z - w \end{cases}$$

Quelle est le Jacobian ?

Théorème (Exemple)

X et Y deux v.a.r. à la fonction de densité jointe $f_{XY}(x, y)$. Soit $Z = X + Y$.
Quelle est la fonction de densité $f_Z(z)$?

$$\boxed{f_{ZW}(z,w) = f_{XY}\big(h_1(z,w), h_2(z,w)\big)\,|J|}$$

Pour pouvoir appliquer le théorème, il nous faut 2 v.a.r. Z et W.
Soit $W = X$, alors :

$$g: \begin{cases} z = x + y \\ w = x \end{cases}$$

Quelle est la fonction inverse $h = g^{-1}$?

$$h: \begin{cases} x = w \\ y = z - w \end{cases}$$

Quelle est le Jacobian ?

$$J = \det\begin{bmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial z} & \frac{\partial h_1}{\partial w} \\ \frac{\partial h_2}{\partial z} & \frac{\partial h_2}{\partial w} \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = 0 \times (-1) - 1 \times 1 = -1$$

Théorème (Exemple)

X et Y deux v.a.r. à la fonction de densité jointe $f_{XY}(x, y)$. Soit $Z = X + Y$.

Quelle est la fonction de densité $f_Z(z)$?

$$\boxed{f_{ZW}(z, w) = f_{XY}\big(h_1(z, w), h_2(z, w)\big)\, |J|}$$

$$h: \begin{cases} x = w \\ y = z - w \end{cases}$$

$$J = \det \begin{bmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial z} & \frac{\partial h_1}{\partial w} \\ \frac{\partial h_2}{\partial z} & \frac{\partial h_2}{\partial w} \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = 0 \times (-1) - 1 \times 1 = -1$$

$$f_{ZW}(z, w) = f_{XY}\big(h_1(z, w), h_2(z, w)\big)\, |J| = f_{XY}(w, z - w)\, |-1| = f_{XY}(w, z - w)$$

Théorème (Exemple)

X et Y deux v.a.r. à la fonction de densité jointe $f_{XY}(x, y)$. Soit $Z = X + Y$.

Quelle est la fonction de densité $f_Z(z)$?

$$\boxed{f_{ZW}(z, w) = f_{XY}\big(h_1(z, w), h_2(z, w)\big)\, |J|}$$

$$h: \begin{cases} x = w \\ y = z - w \end{cases}$$

$$J = \det \begin{bmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial z} & \frac{\partial h_1}{\partial w} \\ \frac{\partial h_2}{\partial z} & \frac{\partial h_2}{\partial w} \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = 0 \times (-1) - 1 \times 1 = -1$$

$$f_{ZW}(z, w) = f_{XY}\big(h_1(z, w), h_2(z, w)\big)\, |J| = f_{XY}(w, z - w)\, |-1| = f_{XY}(w, z - w)$$

$f_Z(z)$ – fonction de densité marginale

Théorème (Exemple)

X et Y deux v.a.r. à la fonction de densité jointe $f_{XY}(x,y)$. Soit $Z = X + Y$.

Quelle est la fonction de densité $f_Z(z)$?

$$\boxed{f_{ZW}(z,w) = f_{XY}\big(h_1(z,w), h_2(z,w)\big)\,|J|}$$

$$h: \begin{cases} x = w \\ y = z - w \end{cases}$$

$$J = \det \begin{bmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial z} & \frac{\partial h_1}{\partial w} \\ \frac{\partial h_2}{\partial z} & \frac{\partial h_2}{\partial w} \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = 0 \times (-1) - 1 \times 1 = -1$$

$$f_{ZW}(z,w) = f_{XY}\big(h_1(z,w), h_2(z,w)\big)\,|J| = f_{XY}(w, z-w)\,|-1| = f_{XY}(w, z-w)$$

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(w, z-w)\,dw$$

Théorème (Exemple)

X et Y deux v.a.r. à la fonction de densité jointe $f_{XY}(x,y)$. Soit $Z = X + Y$.
Quelle est la fonction de densité $f_Z(z)$?

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(w, z-w)\, dw$$

Si X et Y sont **indépendantes**, alors $f_{XY}(x,y) = f_X(x) f_Y(y)$

Théorème (Exemple)

X et Y deux v.a.r. à la fonction de densité jointe $f_{XY}(x,y)$. Soit $Z = X + Y$.
Quelle est la fonction de densité $f_Z(z)$?

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(w, z-w)\,dw$$

Si X et Y sont **indépendantes**, alors $f_{XY}(x,y) = f_X(x)f_Y(y)$

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(w, z-w)\,dw = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(w)f_Y(z-w)\,dw$$

Théorème (Exemple)

X et Y deux v.a.r. à la fonction de densité jointe $f_{XY}(x, y)$. Soit $Z = X + Y$.
Quelle est la fonction de densité $f_Z(z)$?

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(w, z-w)\, dw$$

Si X et Y sont **indépendantes**, alors $f_{XY}(x, y) = f_X(x) f_Y(y)$

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(w, z-w)\, dw = \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(w) f_Y(z-w)\, dw}_{\text{Convolution ou produit de convolution (convolution)}}$$

Convolution ou **produit de convolution** (*convolution*)

Théorème (Exemple)

X et Y deux v.a.r. à la fonction de densité jointe $f_{XY}(x,y)$. Soit $Z = X + Y$.
Quelle est la fonction de densité $f_Z(z)$?

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(w, z-w)\, dw$$

Si X et Y sont **indépendantes**, alors $f_{XY}(x,y) = f_X(x) f_Y(y)$

$$f_Z(z) = f_X(z) * f_Y(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(w, z-w)\, dw = \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(w) f_Y(z-w)\, dw}_{\text{Convolution ou produit de convolution (convolution)}}$$

Convolution ou **produit de convolution** (*convolution*)

Fonction de deux v.a.r.

Soit X et Y deux v.a.r. *indépendantes*. Soit $Z = X + Y$. La loi de Z est obtenue en effectuant le **produit de convolution** (*convolution*) des lois de X et Y comme suit :

$$\text{(cas discret) } \forall\, k \in \mathbb{N}, \qquad \mathbb{P}(Z = k) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(X = k - i) \times \mathbb{P}(Y = i)$$

(cas continu) Soit $f_X(x)$ et $f_Y(y)$ les fonctions de densité de X et Y respectives. On obtient :

$$\forall\, z \in \mathbb{R}, \qquad f_Z(z) = \int_{\mathbb{R}} f_X(x) f_Y(z - x) dx$$

Fonction de deux v.a.r.

X et Y deux v.a.r. discrètes :

x	-1	1
$\mathbb{P}(X = x)$	$1/3$	$2/3$

y	-2	0	2
$\mathbb{P}(Y = y)$	$2/6$	$1/6$	$3/6$

Quelle est la probabilité que $X + Y = 1$?

Fonction de deux v.a.r.

X et Y deux v.a.r. discrètes :

$\boldsymbol{x}$	$\mathbf{-1}$	$\mathbf{1}$
$\mathbb{P}(\boldsymbol{X} = \boldsymbol{x})$	$1/3$	$2/3$

$\boldsymbol{y}$	$\mathbf{-2}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{2}$
$\mathbb{P}(\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{y})$	$2/6$	$1/6$	$3/6$

Quelle est la probabilité que $X + Y = 1$?

$X + Y$

	$\mathbf{-2}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{2}$
$\mathbf{-1}$	-3	-1	1
$\mathbf{1}$	-1	1	3

Fonction de deux v.a.r.

X et Y deux v.a.r. discrètes :

$\boldsymbol{x}$	$\mathbf{-1}$	$\mathbf{1}$
$\mathbb{P}(\boldsymbol{X} = \boldsymbol{x})$	$1/3$	$2/3$

$\boldsymbol{y}$	$\mathbf{-2}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{2}$
$\mathbb{P}(\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{y})$	$2/6$	$1/6$	$3/6$

Quelle est la probabilité que $X + Y = 1$?

$X + Y$

	$\mathbf{-2}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{2}$
$\mathbf{-1}$	-3	-1	$\mathbf{1}$
$\mathbf{1}$	-1	$\mathbf{1}$	3

Fonction de deux v.a.r.

X et Y deux v.a.r. discrètes :

x	-1	1
$\mathbb{P}(X = x)$	$1/3$	$2/3$

y	-2	0	2
$\mathbb{P}(Y = y)$	$2/6$	$1/6$	$3/6$

Quelle est la probabilité que $X + Y = 1$?

$X + Y$

	-2	0	2
-1	-3	-1	$\mathbf{1}$
1	-1	$\mathbf{1}$	3

$$\mathbb{P}_{X+Y}(1) = \mathbb{P}_X(X = -1) \times \mathbb{P}_Y(Y = 2) + \mathbb{P}_X(X = 1) \times \mathbb{P}_Y(Y = 0) = \frac{1}{3} \times \frac{3}{6} + \frac{2}{3} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{6} + \frac{1}{9} = \frac{5}{18}$$

Fonction caractéristique et fonction génératrice de la somme

Soient X, Y deux v.a.r. indépendantes de fonctions caractéristiques ϕ_X et ϕ_Y. Soit $Z = X + Y$. Alors :

$$\phi_Z(t) = \phi_X(t) \times \phi_Y(t), \qquad \forall\, t \in \mathbb{R}$$

Soient X, Y deux v.a.r. indépendantes de fonctions génératrice G_X et G_Y. Soit $Z = X + Y$. Alors :

$$G_Z(s) = G_X(s) \times G_Y(s), \qquad \forall\, s \in [-1,1]$$

Somme de deux v.a.r. suivant une loi normale

Soit $X \sim \mathcal{N}(\mu_X, \sigma_X^2)$ et $Y \sim \mathcal{N}(\mu_Y, \sigma_Y^2)$. Soit X et Y indépendantes. Alors :

$$X + Y \sim \mathcal{N}(\mu_X + \mu_Y, \sigma_X^2 + \sigma_Y^2)$$

Somme de deux v.a.r. suivant une loi de Poisson

Soit $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ et $Y \sim \mathcal{P}(\mu)$. Soit X et Y indépendantes. Alors :

$$X + Y \sim \mathcal{P}(\lambda + \mu)$$

Vecteurs aléatoires

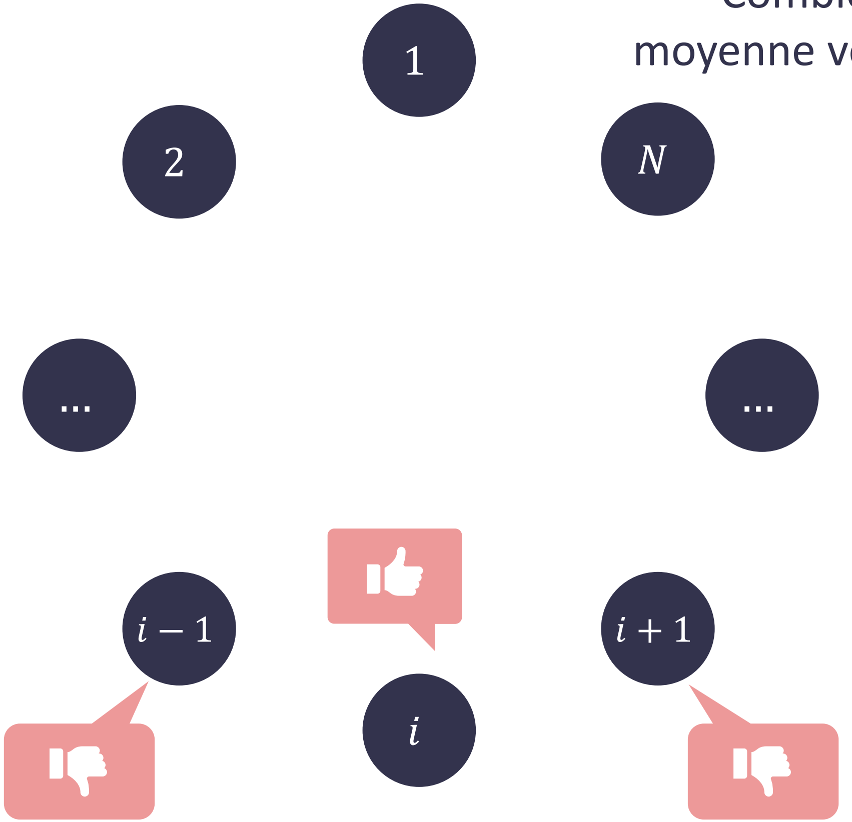
Combien de gagnants ?

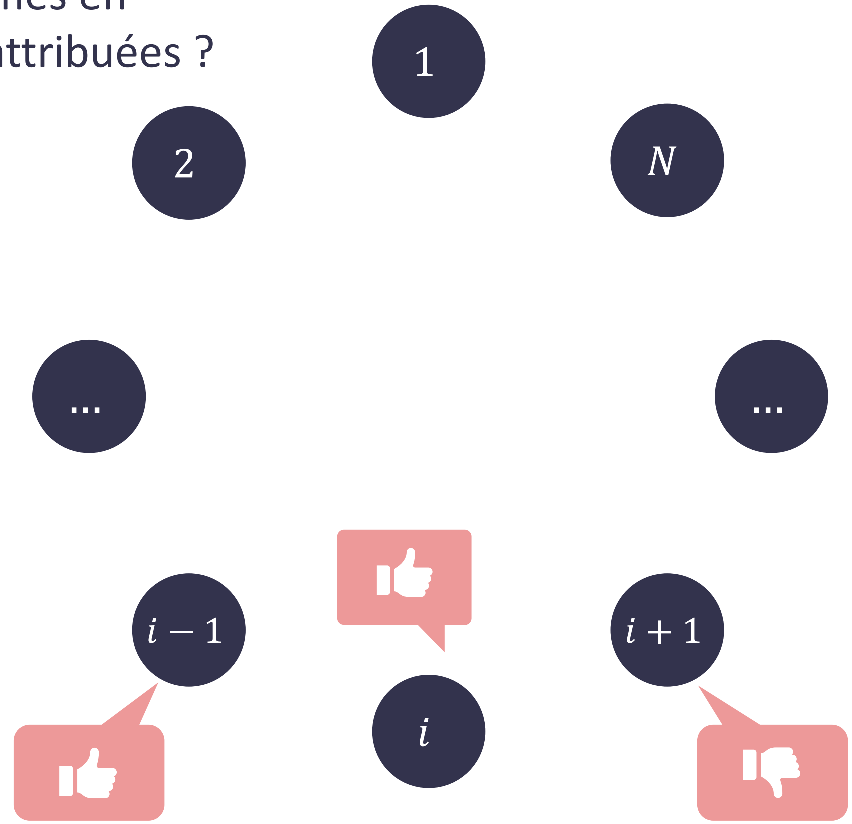
$N > 5$ annonces publicitaires sont affichées en carrousel. Chaque annonce peut être aimé ou pas aimé par utilisateur avec la probabilité 0.5 (comme dans le cas d'un lancement d'une pièce). Une prime est associée à une publicité si la préférence de l'utilisateur (aimé ou pas aimé) est différente de celles faite par rapport à ces voisines.

Combien de primes en moyenne vont être attribuées ?

Combien de gagnants ?

Combien de primes en moyenne vont être attribuées ?





$\Rightarrow$ $i^{\text{ème}}$ élément gagne une prime

$\Rightarrow$ $i^{\text{ème}}$ élément ne gagne pas de prime

Loi

Moments

Indépendance

Fonction caractéristique et fonction génératrice

Quelques distributions importantes

Somme de n v.a.r.

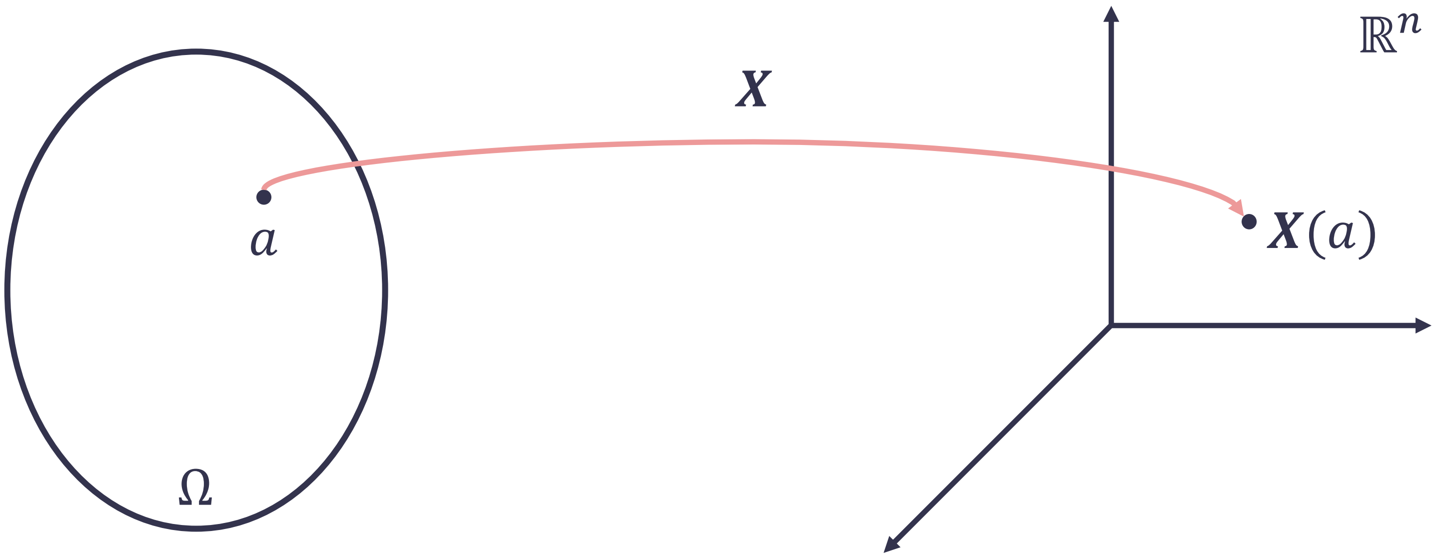
Vecteur aléatoire

$$\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \cdots \\ X_n \end{bmatrix}$$

Vecteur aléatoire

$$\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \cdots \\ X_n \end{bmatrix}$$

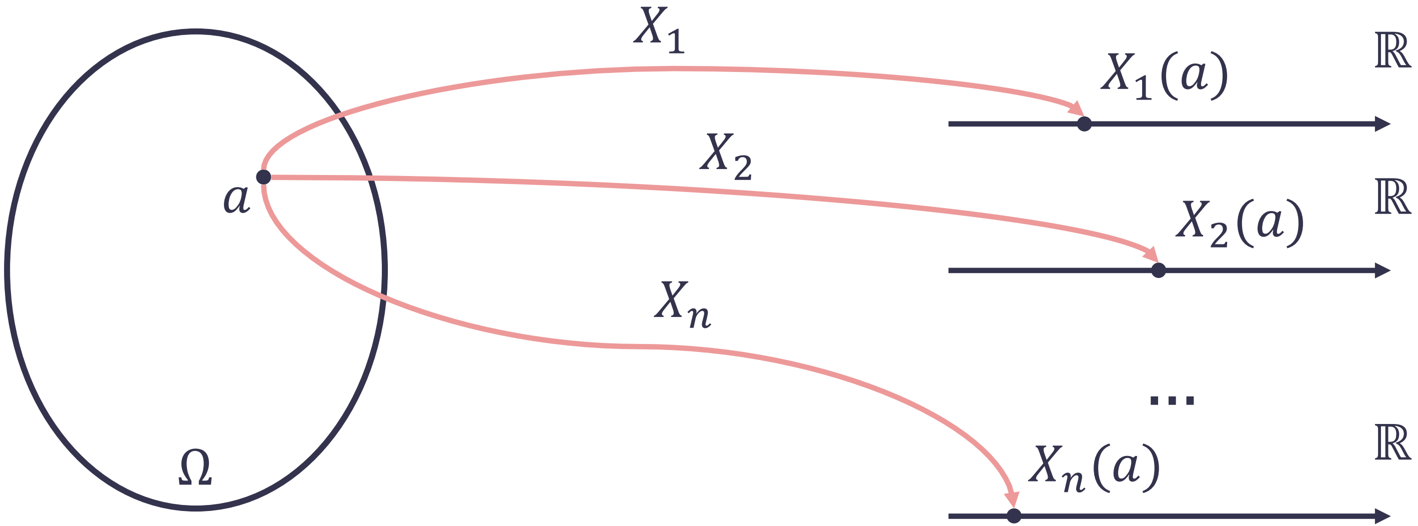
une application de Ω dans $\mathbb{R}^n$



Vecteur aléatoire

$$\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \cdots \\ X_n \end{bmatrix}$$

un vecteur de n v.a.



Loi d'un vecteur aléatoire (cas discret)

Soit $X_1, X_2, \dots X_n$ n v.a.r. **discrètes** définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.
La **fonction de masse jointe** (*joint probability mass function* ou *joint PMF*) est donnée par :

$$\mathbb{P}_{X_1,X_2,\dots,X_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \mathbb{P}(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_n = x_n)$$

La fonction de répartition jointe (*joint CDF*) de n v.a.r. $X_1, \dots, X_n$ est définie par :

$$F_{X_1 X_2 \dots X_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \mathbb{P}([X_1 \le x_1] \cap [X_2 \le x_2] \cap \cdots \cap [X_n \le x_n])$$

Loi d'un vecteur aléatoire (cas continue)

Soit $X_1, X_2, \dots X_n$ n v.a.r. **absolument continues** définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

La **fonction de densité jointe** (*joint probability density function* ou *joint PDF*) $f_{X_1X_2\dots X_n}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ une fonction telle que pour tout ensemble $A \subset \mathbb{R}^n$ la probabilité des v.a.r. $X_1, X_2, \dots, X_n$ de se retrouver dans A est donnée par l'intégrale de cette fonction sur l'ensemble A, i.e. :

$$\forall A \in \mathbb{R}^n, \mathbb{P}\big((X_1, X_2, \dots, X_n) \in A\big) = \int \dots \int_A \dots \int f_{X_1X_2\dots X_n}(t_1, t_2, \dots, t_n) dt_1\, dt_2 \dots dt_n$$

La fonction de répartition jointe (*joint CDF*) de n v.a.r. $X_1, \dots, X_n$ est définie par :

$$F_{X_1X_2\dots X_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \mathbb{P}(X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2, \dots X_n \leq x_n)$$
$$= \int_{-\infty}^{x_1} \int_{-\infty}^{x_2} \dots \int_{-\infty}^{x_n} f_{X_1X_2\dots X_n}(t_1, t_2, \dots, t_n) dt_1\, dt_2 \dots dt_n$$

Loi d'un vecteur aléatoire

La fonction de répartition jointe (*joint CDF*) de n v.a.r. $X_1, \dots, X_n$ est définie par :

$$F_{X_1 X_2 \dots X_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \mathbb{P}([X_1 \leq x_1] \cap [X_2 \leq x_2] \cap \cdots \cap [X_n \leq x_n])$$

- $\lim\limits_{x \to -\infty} F_{\boldsymbol{X}}(x, \dots, x) = 0$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} F_{\boldsymbol{X}}(x, \dots, x) = 1$

Loi d'un vecteur aléatoire

Soit X, Y, Z trois v.a.r. absolument continues de la fonction de densité jointe :

$$f_{XYZ}(x, y, z) = \begin{cases} c(3x + 2y + z) & \text{si } 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

où c est une constante. Trouvez c.

Loi d'un vecteur aléatoire

Soit X, Y, Z trois v.a.r. absolument continues de la fonction de densité jointe :

$$f_{XYZ}(x,y,z) = \begin{cases} c(3x + 2y + z) & \text{si } 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

où c est une constante. Trouvez c.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_{XYZ}(x,y,z) dxdydz = 1$$

INSA INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES LYON

membre de UNIVERSITÉ DE LYON

Loi d'un vecteur aléatoire

Soit X, Y, Z trois v.a.r. absolument continues de la fonction de densité jointe :

$$f_{XYZ}(x,y,z) = \begin{cases} c(3x + 2y + z) & \text{si } 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

où c est une constante. Trouvez c.

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f_{XYZ}(x,y,z)dxdydz = \int_{0}^{1}\int_{0}^{1}\int_{0}^{1} f_{XYZ}(x,y,z)dxdydz = 1$$

Loi d'un vecteur aléatoire

Soit X, Y, Z trois v.a.r. absolument continues de la fonction de densité jointe :

$$f_{XYZ}(x,y,z) = \begin{cases} c(3x + 2y + z) & \text{si } 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

où c est une constante. Trouvez c.

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f_{XYZ}(x,y,z)dxdydz = \int_0^1\int_0^1\int_0^1 f_{XYZ}(x,y,z)dxdydz = 1$$

$$\int_0^1\int_0^1\int_0^1 c(3x + 2y + z)dxdydz = 1$$

Loi d'un vecteur aléatoire

Soit X, Y, Z trois v.a.r. absolument continues de la fonction de densité jointe :

$$f_{XYZ}(x, y, z) = \begin{cases} c(3x + 2y + z) & \text{si } 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

où c est une constante. Trouvez c.

$$\int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 c(3x + 2y + z)dx\,dy\,dz = \int_0^1 \int_0^1 c\left(\frac{3x^2}{2} + 2yx + zx\right)\Big|_0^1 dy\,dz$$

$$= \int_0^1 \int_0^1 c\left(\frac{3}{2} + 2y + z\right)dy\,dz = \int_0^1 c\left(\frac{3}{2}y + \frac{2y^2}{2} + zy\right)\Big|_0^1 dz = \int_0^1 c\left(\frac{3}{2} + 1 + z\right)dz$$

$$= \int_0^1 c\left(\frac{5}{2} + z\right)dz = c\left(\frac{5}{2}z + \frac{z^2}{2}\right)\Big|_0^1 = c\left(\frac{5}{2} + \frac{1}{2}\right) = 3c = 1$$

Loi d'un vecteur aléatoire

Soit X, Y, Z trois v.a.r. absolument continues de la fonction de densité jointe :

$$f_{XYZ}(x,y,z) = \begin{cases} c(3x + 2y + z) & \text{si } 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

où c est une constante. Trouvez c.

$$\int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 c(3x + 2y + z)dx\, dy\, dz = \int_0^1 \int_0^1 c\left(\frac{3x^2}{2} + 2yx + zx\right)\Big|_0^1 dy\, dz$$

$$= \int_0^1 \int_0^1 c\left(\frac{3}{2} + 2y + z\right) dy\, dz = \int_0^1 c\left(\frac{3}{2}y + \frac{2y^2}{2} + zy\right)\Big|_0^1 dz = \int_0^1 c\left(\frac{3}{2} + 1 + z\right) dz$$

$$= \int_0^1 c\left(\frac{5}{2} + z\right) dz = c\left(\frac{5}{2}z + \frac{z^2}{2}\right)\Big|_0^1 = c\left(\frac{5}{2} + \frac{1}{2}\right) = 3c = 1 \Rightarrow \boxed{c = \frac{1}{3}}$$

Loi d'un vecteur aléatoire

Soit X, Y, Z trois v.a.r. absolument continues de la fonction de densité jointe :

$$f_{XYZ}(x,y,z) = \begin{cases} \frac{1}{3}(3x + 2y + z) & \text{si } 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1, 0 \le z \le 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

où c est une constante. Trouvez c.

$$\int_0^1\int_0^1\int_0^1 c(3x+2y+z)dx\,dy\,dz = \int_0^1\int_0^1 c\left(\frac{3x^2}{2}+2yx+zx\right)\Big|_0^1 dy\,dz$$

$$= \int_0^1\int_0^1 c\left(\frac{3}{2}+2y+z\right)dy\,dz = \int_0^1 c\left(\frac{3}{2}y+\frac{2y^2}{2}+zy\right)\Big|_0^1 dz = \int_0^1 c\left(\frac{3}{2}+1+z\right)dz$$

$$= \int_0^1 c\left(\frac{5}{2}+z\right)dz = c\left(\frac{5}{2}z+\frac{z^2}{2}\right)\Big|_0^1 = c\left(\frac{5}{2}+\frac{1}{2}\right) = 3c = 1 \Rightarrow \boxed{c = \frac{1}{3}}$$

Loi marginale

Soit $\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ un vecteur aléatoire de $\mathbb{R}^n$. On appelle $k^{ième}$ **loi marginale** (*marginal distribution*) $k \in \{1, \ldots, n\}$ du $\boldsymbol{X}$ la loi de la v.a.r. X_k.

Loi marginale

La densité marginale de X_i peut être obtenue par l'intégration de tous les autres $X_j, j \neq i$, i.e. :

$$f_{X_i}(x_i) = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} f_{X_1 X_2 \dots X_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_{i-1} dx_{i+1} \dots dx_n$$

La fonction de répartition marginale :

$$F_{X_i}(x) = \mathbb{P}(X_i \leq x) = \mathbb{P}(X_1 \in \mathbb{R}, \dots, X_{i-1} \in \mathbb{R}, X_i \leq x, X_{i+1} \in \mathbb{R}, \dots, X_n \in \mathbb{R})$$

$$= \lim_{y \to \infty} F_{\boldsymbol{X}}(\underbrace{y, \dots, y}_{i-1 \text{ éléments}} \overbrace{x}^{i^{\text{ème}}} \underbrace{, y, \dots, y}_{\substack{\text{à partir de} \\ (i+1)^{\text{ème}}}})$$

Loi marginale

Soit X, Y, Z trois v.a.r. absolument continues de la fonction de densité jointe :

$$f_{XYZ}(x,y,z) = \begin{cases} \frac{1}{3}(3x + 2y + z) & \text{si } 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Quelle est la loi marginale de X ?

Loi marginale

Soit X, Y, Z trois v.a.r. absolument continues de la fonction de densité jointe :

$$f_{XYZ}(x, y, z) = \begin{cases} \frac{1}{3}(3x + 2y + z) & \text{si } 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Quelle est la loi marginale de X ?

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_{XYZ}(x, y, z) dy\, dz$$

Loi marginale

Soit X, Y, Z trois v.a.r. absolument continues de la fonction de densité jointe :

$$f_{XYZ}(x,y,z) = \begin{cases} \frac{1}{3}(3x + 2y + z) & \text{si } 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Quelle est la loi marginale de X ?

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_{XYZ}(x,y,z)dy\,dz = \int_0^1\int_0^1 \frac{1}{3}(3x + 2y + z)dy\,dz$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{3}\left(3xy + \frac{2y^2}{2} + zy\right)\Big|_0^1 dz = \int_0^1 \frac{1}{3}(3x + 1 + z)dz = \frac{1}{3}\left(3xz + z + \frac{z^2}{2}\right)\Big|_0^1$$

$$= \frac{1}{3}\left(3x + 1 + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{3}\left(3x + \frac{3}{2}\right) = x + \frac{1}{2}$$

Loi

Moments

Indépendance

Fonction caractéristique et fonction génératrice

Quelques distributions importantes

Somme de n v.a.r.

Espérance

Soit $\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ un vecteur aléatoire de $\mathbb{R}^n$. Soit $\mathbb{E}[X_i] \in \mathbb{R}, \forall i = 1, \ldots, n$ l'espérance de X_i. L'espérance de $\boldsymbol{X}$ est définie comme :

$$\mathbb{E}\boldsymbol{X} = (\mathbb{E}[X_1], \ldots, \mathbb{E}[X_n]) \in \mathbb{R}^n$$

Espérance

Soit $\boldsymbol{X} = (X_1, \dots, X_n)$ un vecteur aléatoire défini sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Soit $Z = h(X_1, \dots, X_n)$ où $h: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction bornée et continue par morceaux.

(cas discret) Soit $\boldsymbol{X}$ un vecteur aléatoire ayant des valeurs dans $D = \boldsymbol{X}(\Omega) \subset \mathbb{R}^n$ sous ensemble fini ou dénombrable. Alors, l'espérance $\mathbb{E}Z$ est donnée par :

$$\mathbb{E}Z = \sum_{k=(k_1,\dots,k_n)\in D} h(k_1, \dots, k_n)\mathbb{P}(X_1 = k_1, \dots, X_n = k_n)$$

(cas continu) Soit $f_{\boldsymbol{X}}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ la fonction de densité de $\boldsymbol{X}$. Alors, l'espérance $\mathbb{E}Z$ est donnée par :

$$\mathbb{E}Z = \int_{\mathbb{R}^n} h(t_1, \dots, t_n) f_{\boldsymbol{X}}(t_1, \dots, t_n) dt_1 \dots dt_n$$

lorsque cette intégrale existe.

Espérance

Soient $\boldsymbol{X}$ et $\boldsymbol{Y}$ deux vecteurs aléatoires de $\mathbb{R}^n$. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice carrée d'ordre n à coefficients réels. On a :

1. $\mathbb{E}[A\boldsymbol{X}] = A\,\mathbb{E}\boldsymbol{X}$
2. $\mathbb{E}(\boldsymbol{X}+\boldsymbol{Y}) = \mathbb{E}\boldsymbol{X} + \mathbb{E}\boldsymbol{Y}$

Matrice de covariance

Soit $\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_n)^T$ un vecteur aléatoire de $\mathbb{R}^n$. La **matrice de covariance** (*covariance matrix*), notée $\Sigma_{\boldsymbol{X}}$ ou $K_{\boldsymbol{XX}}$, est une matrice carrée symétrique t.q. :

$$K_{\boldsymbol{XX}} = \Sigma_{\boldsymbol{X}} = \left(Cov\left(X_i, X_j\right)\right)_{i,j=1,\ldots,n}$$

Propriétés :

1. *symétrique*, i.e. : $Cov\left(X_i, X_j\right) = Cov\left(X_j, X_i\right), \forall\, i, j = 1, \ldots, n$
2. *semi-définie positive*, i.e. : $\forall \boldsymbol{x} = (x_1\ x_2\ \ldots\ x_n)^T \in \mathbb{R}^n$ on a $\boldsymbol{x}^T M \boldsymbol{x} \geq 0$

Variance de la somme

Soit $Z = X_1 + \cdots + X_n$. Alors **la variance** peut être calculée comme suit :

$$Var(Z) = Cov\left(\sum_{i=1}^{n} X_i , \sum_{j=1}^{n} X_j\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} Cov(X_i, X_j)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} Var(X_i) + 2\sum_{i<j} Cov(X_i, X_j)$$

Moments de l’ordre n

Soit X une v.a.r. On appelle **moment de l'ordre $\boldsymbol{n}$** (n^{th} *moment*) de X la valeur $\mathbb{E}[X^n]$.

On appelle **moment central de l'ordre $\boldsymbol{n}$** (n^{th} *central moment*) de X la valeur $\mathbb{E}[(X-\mathbb{E}X)^n]$.

Loi

Moments

Indépendance

Fonction caractéristique et fonction génératrice

Quelques distributions importantes

Somme de n v.a.r.

Indépendance

Les connaissances qu'on a sur un évènement (une v.a.) n'ont pas d'influence sur la probabilité des évènements qui restent

Indépendance

Les connaissances qu'on a sur un évènement (une v.a.) n'ont pas d'influence sur la probabilité des évènements qui restent

Soient $A_1, A_2, \dots, A_n$ les évènements indépendants

Indépendance

Les connaissances qu'on a sur un évènement (une v.a.) n'ont pas d'influence sur la probabilité des évènements qui restent

Soient $A_1, A_2, \dots, A_n$ les évènements indépendants

$$\mathbb{P}(A_5 \cap \overline{A_6}) = \mathbb{P}\left(\underbrace{A_5 \cap \overline{A_6}}_{\substack{\text{évènement} \\ d'\text{intérêt}}} \mid \underbrace{\overline{A_1} \cup A_2 \cup (A_3 \cap \overline{A_4}) \cup A_7}_{ce\ qu'on\ sait}\right)$$

Indépendance

Les évènements $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sont dits **mutuellement indépendants** (*independent*), si pour tous indices distincts $\forall i, j, \ldots, m : \; i \neq j \neq \cdots \neq m$ et pour tout nombre d'évènements choisis :

$$\mathbb{P}\left(A_i \cap A_j \cap \cdots \cap A_m\right) = \mathbb{P}(A_i) \times \mathbb{P}\left(A_j\right) \times \cdots \times \mathbb{P}(A_m)$$

Indépendance

Les évènements $A_1, A_2, \dots, A_n$ sont dits **mutuellement indépendants** (*independent*), si pour tous indices distincts $\forall i, j, \dots, m : \ i \neq j \neq \cdots \neq m$ et pour tout nombre d'évènements choisis :

$$\mathbb{P}(A_i \cap A_j \cap \cdots \cap A_m) = \mathbb{P}(A_i) \times \mathbb{P}(A_j) \times \cdots \times \mathbb{P}(A_m)$$

Les v.a.r. $X_1, X_2, \dots, X_n$ sont dites **mutuellement indépendantes** (*mutually independent*), si $\forall (x_1, \dots, x_n) \in \ \mathbb{R}^n$, les évènements $[X_i \leq x_i], i = 1, \dots, n$ sont *mutuellement indépendants*.

Indépendance

Si $X_1, \dots, X_n$ sont mutuellement indépendantes, alors :

$$Var\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} Var(X_i)$$

i.i.d.

Les v.a.r. $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sont dites **indépendantes et identiquement distribuées (i.i.d.)** (*independent and identically distributed (i.i.d.)*) si $\forall (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, les v.a.r. $X_i, i = 1, \ldots, n$ sont mutuellement indépendantes et ont la même fonction de répartition :

$$F_{X_1}(x) = F_{X_2}(x) = \cdots = F_{X_n}(x), \forall x \in \mathbb{R}$$

i.i.d.

Soit $X_1, \dots, X_n$ n v.a.r. i.i.d., alors :

$$\mathbb{E}[X_1 \dots X_n] = (indépendance) = \mathbb{E}X_1 \times \mathbb{E}X_2 \times \cdots \times \mathbb{E}X_n$$
$$= (identiquement\ distribuées) = \mathbb{E}X_1 \times \mathbb{E}X_1 \times \cdots \times \mathbb{E}X_1 = (\mathbb{E}X_1)^n$$

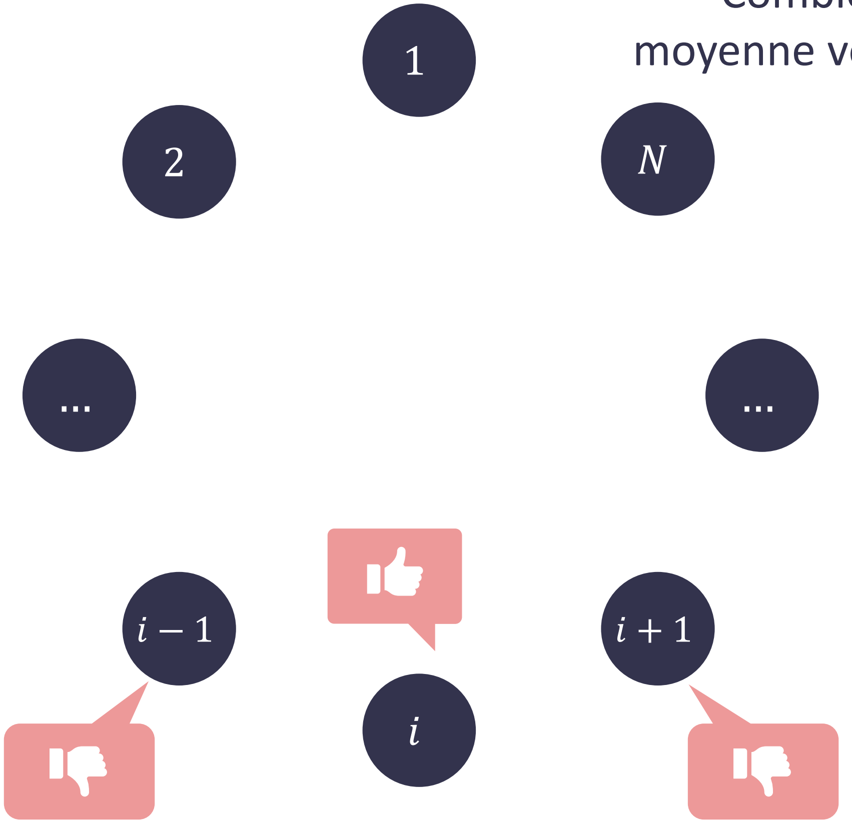
Combien de gagnants ?

$N > 5$ annonces publicitaires sont affichées en carrousel. Chaque annonce peut être aimé ou pas aimé par utilisateur avec la probabilité 0.5 (comme dans le cas d'un lancement d'une pièce). Une prime est associée à une publicité si la préférence de l'utilisateur (aimé ou pas aimé) est différente de celles faite par rapport à ces voisines.

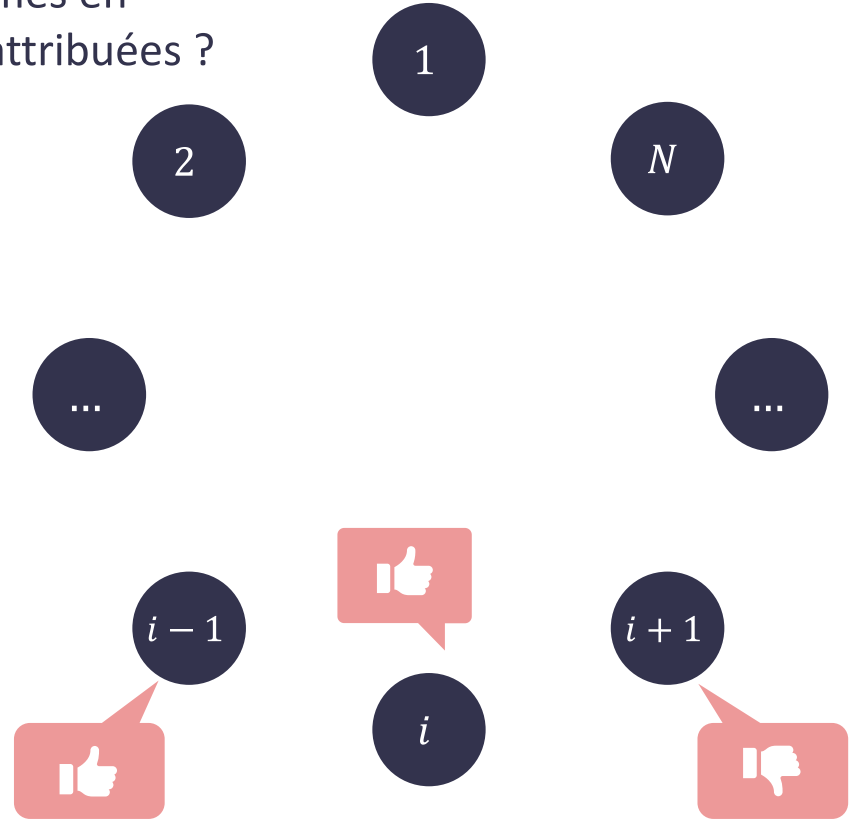
Combien de primes en moyenne vont être attribuées ?

Combien de gagnants ?

Combien de primes en moyenne vont être attribuées ?



$\Rightarrow i^{\text{ème}}$ élément gagne une prime



$\Rightarrow i^{\text{ème}}$ élément ne gagne pas de prime

Combien de gagnants ?

$N > 5$ annonces publicitaires sont affichées en carrousel. Chaque annonce peut être aimé ou pas aimé par utilisateur avec la probabilité 0.5 (comme dans le cas d'un lancement d'une pièce). Une prime est associée à une publicité si la préférence de l'utilisateur (aimé ou pas aimé) est différente de celles faite par rapport à ces voisines.

Combien de primes en moyenne vont être attribuées ?

Soit X le nombre de primes attribuées

$\mathbb{E}X = ?$

Combien de gagnants ?

$N > 5$ annonces publicitaires sont affichées en carrousel. Chaque annonce peut être aimé ou pas aimé par utilisateur avec la probabilité 0.5 (comme dans le cas d'un lancement d'une pièce). Une prime est associée à une publicité si la préférence de l'utilisateur (aimé ou pas aimé) est différente de celles faite par rapport à ces voisines.

Combien de primes en moyenne vont être attribuées ?

Soit X le nombre de primes attribuées

$\mathbb{E}X = ?$

Soit X_i une v.a.r. indiquant si une prime est attribuée à l'annonce i :

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{prime est attribuée à l'annonce } i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Combien de gagnants ?

$N > 5$ annonces publicitaires sont affichées en carrousel. Chaque annonce peut être aimé ou pas aimé par utilisateur avec la probabilité 0.5 (comme dans le cas d'un lancement d'une pièce). Une prime est associée à une publicité si la préférence de l'utilisateur (aimé ou pas aimé) est différente de celles faite par rapport à ces voisines.

Combien de primes en moyenne vont être attribuées ?

Soit X le nombre de primes attribuées

$\mathbb{E}X = ?$

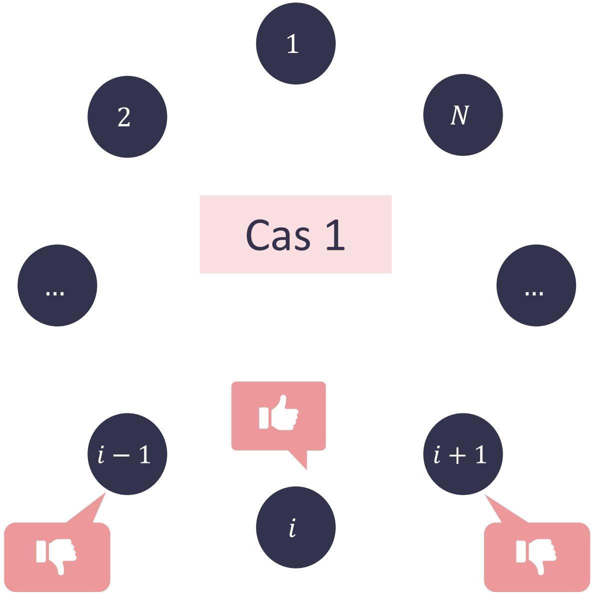
Soit X_i une v.a.r. indiquant si une prime est attribuée à l'annonce i :

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{prime est attribuée à l'annonce } i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

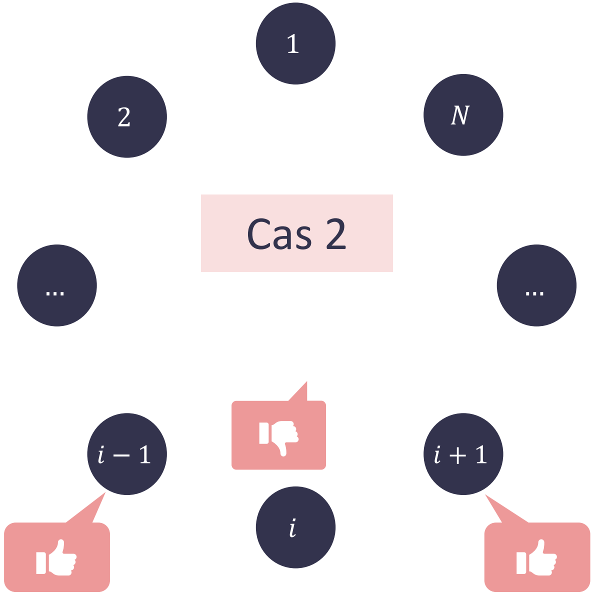
$$\Rightarrow \quad X = X_1 + X_2 + \cdots + X_N$$

Combien de gagnants ?

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{prime est attribuée à l'annonce } i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$



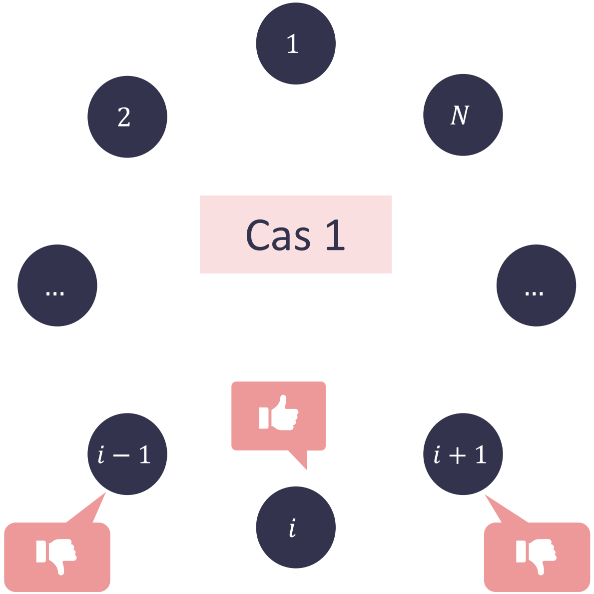
$\Rightarrow$ $i^{\text{ème}}$ élément gagne une prime

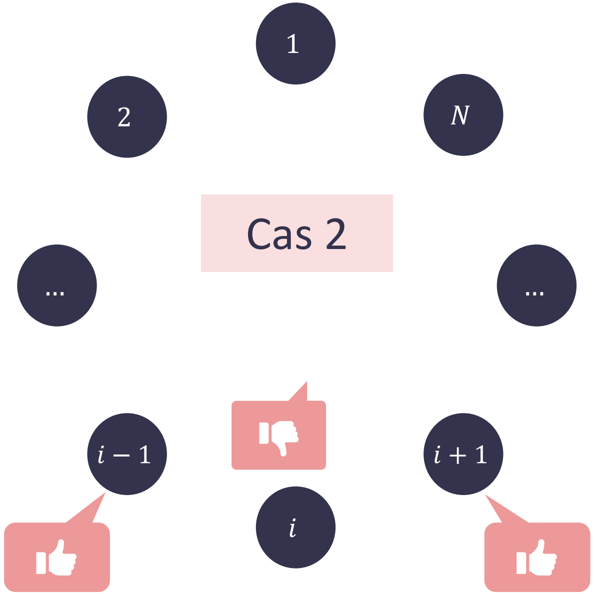


$\Rightarrow$ $i^{\text{ème}}$ élément gagne une prime

Combien de gagnants ?

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{prime est attribuée à l'annonce } i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$





Indép.

$\Rightarrow i^{\text{ème}}$ élément gagne une prime

$$\boxed{\mathbb{P}(\text{👎}_{i-1} \cap \text{👍}_i \cap \text{👎}_{i+1}) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}}$$

$\Rightarrow i^{\text{ème}}$ élément gagne une prime

$$\boxed{\mathbb{P}(\text{👍}_{i-1} \cap \text{👎}_i \cap \text{👍}_{i+1}) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}}$$

Combien de gagnants ?

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{prime est attribuée à l'annonce } i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\boxed{\mathbb{P}(X_i = 1) = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{4}}$$

$$\boxed{\mathbb{P}(\text{👎}_{i-1} \cap \text{👍}_i \cap \text{👎}_{i+1}) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}}$$

$$\boxed{\mathbb{P}(\text{👍}_{i-1} \cap \text{👎}_i \cap \text{👍}_{i+1}) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}}$$

Combien de gagnants ?

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{prime est attribuée à l'annonce } i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\boxed{\mathbb{E}X_i = 1 \times \mathbb{P}(X_i = 1) + 0 \times \mathbb{P}(X_i = 0) = \mathbb{P}(X_i = 1) = \frac{1}{4}}$$

$$\boxed{\mathbb{P}(X_i = 1) = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{4}}$$

$$\boxed{\mathbb{P}(\text{👎}_{i-1} \cap \text{👍}_i \cap \text{👎}_{i+1}) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}}$$

$$\boxed{\mathbb{P}(\text{👍}_{i-1} \cap \text{👎}_i \cap \text{👍}_{i+1}) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}}$$

Combien de gagnants ?

$$\mathbb{E}X = \mathbb{E}X_1 + \mathbb{E}X_2 + \cdots + \mathbb{E}X_N = N \times \mathbb{E}X_i = N\frac{1}{4} = \boldsymbol{\frac{N}{4}}$$

$$\mathbb{E}X_i = 1 \times \mathbb{P}(X_i = 1) + 0 \times \mathbb{P}(X_i = 0) = \mathbb{P}(X_i = 1) = \frac{1}{4}$$

$$\mathbb{P}(X_i = 1) = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{4}$$

$$\mathbb{P}(\text{👎}_{i-1} \cap \text{👍}_i \cap \text{👎}_{i+1}) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

$$\mathbb{P}(\text{👍}_{i-1} \cap \text{👎}_i \cap \text{👍}_{i+1}) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

Combien de gagnants ?

$N > 5$ annonces publicitaires sont affichées en carrousel. Chaque annonce peut être aimé ou pas aimé par utilisateur avec la probabilité 0.5 (comme dans le cas d'un lacement d'une pièce). Une prime est associée à une publicité si la préférence de l'utilisateur (aimé ou pas aimé) est différente de celles faite par rapport à ces voisines.

Quelle est la variance ?

Soit X le nombre de primes attribuées

$Var(X) = ?$

Combien de gagnants ?

$N > 5$ annonces publicitaires sont affichées en carrousel. Chaque annonce peut être aimé ou pas aimé par utilisateur avec la probabilité 0.5 (comme dans le cas d'un lacement d'une pièce). Une prime est associée à une publicité si la préférence de l'utilisateur (aimé ou pas aimé) est différente de celles faite par rapport à ces voisines.

Quelle est la variance ?

Soit X le nombre de primes attribuées

$Var(X) = ?$

$$Var(X) = \sum_{i=1}^{N} Var(X_i) + 2\sum_{i<j} Cov(X_i, X_j)$$

$$= \sum_{i=1}^{N} Var(X_i) + \sum_{i \neq j} Cov(X_i, X_j) = \sum_{i=1}^{N} Var(X_i) + \sum_{i=1}^{N} \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^{N} Cov(X_i, X_j)$$

Combien de gagnants ?

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{prime est attribuée à l'annonce } i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\mathbb{P}(X_i = 1) = \frac{1}{4}$$

$$X_i \sim \mathcal{B}\left(p = \frac{1}{4}\right), i = 1, \dots, N$$

$$Var(X) = \sum_{i=1}^{N} Var(X_i) + \sum_{i=1}^{N} \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^{N} Cov(X_i, X_j)$$

Combien de gagnants ?

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{prime est attribuée à l'annonce } i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\mathbb{P}(X_i = 1) = \frac{1}{4}$$

$$X_i \sim \mathcal{B}\left(p = \frac{1}{4}\right), i = 1, \dots, N$$

$$\sum_{i=1}^{N} Var(X_i) = \sum_{i=1}^{N} p(1-p) = N \times \frac{1}{4} \times \left(1 - \frac{1}{4}\right) = N \times \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{3N}{16}$$

$$Var(X) = \sum_{i=1}^{N} Var(X_i) + \sum_{i=1}^{N} \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^{N} Cov(X_i, X_j)$$

Combien de gagnants ?

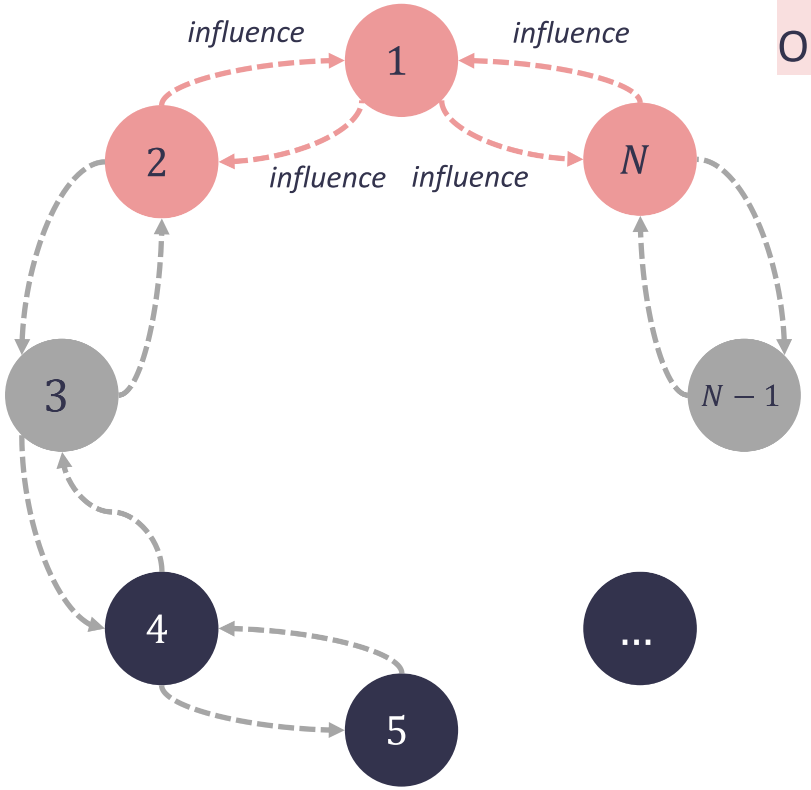
$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{prime est attribuée à l'annonce } i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\mathbb{P}(X_i = 1) = \frac{1}{4}$$

$$X_i \sim \mathcal{B}\left(p = \frac{1}{4}\right), i = 1, \dots, N$$

$$Var(X) = \sum_{i=1}^{N} Var(X_i) + \sum_{i=1}^{N} \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^{N} Cov(X_i, X_j)$$

Combien de gagnants ?



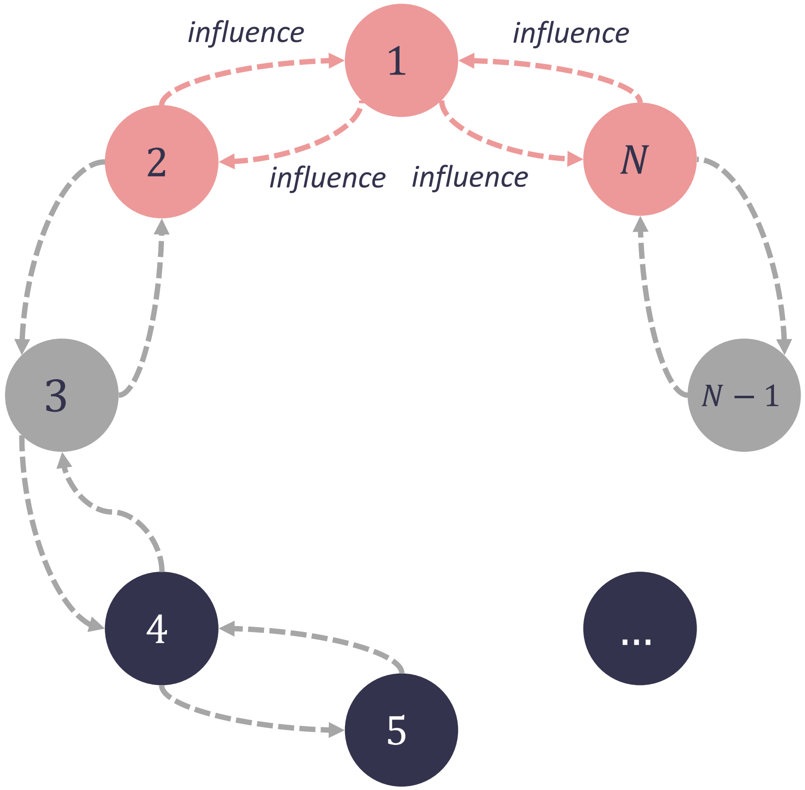
$i = 1$

On observe les 2 voisins $(i-1)$ et $(i+1)$

X_1 et X_2 sont dépendantes
X_1 et X_3 sont dépendantes
X_1 et X_4 sont **indépendantes**
X_1 et X_5 sont **indépendantes**
…
X_1 et X_{N-2} sont **indépendantes**
X_1 et X_{N-1} sont dépendantes
X_1 et X_N sont dépendantes

Combien de gagnants ?

X_i et X_j sont indépendantes si $2 < |i - j| < N - 2$



X_1 et X_2 sont dépendantes
X_1 et X_3 sont dépendantes
X_1 et X_4 sont **indépendantes**
X_1 et X_5 sont **indépendantes**
…
X_1 et X_{N-2} sont **indépendantes**
X_1 et X_{N-1} sont dépendantes
X_1 et X_N sont dépendantes

Combien de gagnants ?

X_i et X_j sont indépendantes si $2 < |i - j| < N - 2$

$$Cov(X_i, X_j) = \mathbf{0}, \forall i, j : 2 < |i - j| < N - 2$$

Combien de gagnants ?

X_i et X_j sont indépendantes si $2 < |i-j| < N-2$

$$Cov(X_i, X_j) = \mathbf{0}, \forall i,j : 2 < |i-j| < N-2$$

Pour $N = 7$:

$$K = \begin{pmatrix} Var(X_1) & Cov(X_1,X_2) & Cov(X_1,X_3) & 0 & 0 & Cov(X_1,X_6) & Cov(X_1,X_7) \\ Cov(X_2,X_1) & Var(X_2) & Cov(X_2,X_3) & Cov(X_2,X_4) & 0 & 0 & Cov(X_2,X_7) \\ Cov(X_3,X_1) & Cov(X_3,X_2) & Var(X_3) & Cov(X_3,X_4) & Cov(X_3,X_5) & 0 & 0 \\ 0 & Cov(X_4,X_2) & Cov(X_4,X_3) & Var(X_4) & Cov(X_4,X_5) & Cov(X_4,X_6) & 0 \\ 0 & 0 & Cov(X_5,X_3) & Cov(X_5,X_4) & Var(X_5) & Cov(X_5,X_6) & Cov(X_5,X_7) \\ Cov(X_6,X_1) & 0 & 0 & Cov(X_6,X_4) & Cov(X_6,X_5) & Var(X_6) & Cov(X_6,X_7) \\ Cov(X_7,X_1) & Cov(X_7,X_2) & 0 & 0 & Cov(X_7,X_5) & Cov(X_7,X_6) & Var(X_7) \end{pmatrix}$$

Combien de gagnants ?

X_i et X_j sont indépendantes si $2 \ < \ |i-j| \ < \ N-2$

$$Cov(X_i, X_j) = \mathbf{0}, \forall i, j : 2 < |i-j| < N-2$$

$$\begin{cases} Cov(X_1, X_2) = Cov(X_2, X_3) = \cdots = Cov(X_{i-1}, X_i) = Cov(X_i, X_{i+1}) = \cdots \\ = Cov(X_{N-1}, X_N) = Cov(X_N, X_1) \\ \\ Cov(X_1, X_3) = Cov(X_2, X_4) = \cdots = Cov(X_{i-1}, X_{i+1}) = Cov(X_i, X_{i+2}) = \cdots \\ = Cov(X_{N-2}, X_N) = Cov(X_{N-1}, X_1) = Cov(X_N, X_2) \end{cases}$$

Combien de gagnants ?

$$\boxed{Cov(X_i, X_j) = \mathbb{E}[X_i X_j] - \mathbb{E}X_i \mathbb{E}X_j}$$

$$\boxed{\mathbb{E}X_i = \frac{1}{4}}$$

$$\begin{cases} Cov(X_1, X_2) = Cov(X_2, X_3) = \cdots = Cov(X_{i-1}, X_i) = Cov(X_i, X_{i+1}) = \cdots \\ = Cov(X_{N-1}, X_N) = Cov(X_N, X_1) \\ \\ Cov(X_1, X_3) = Cov(X_2, X_4) = \cdots = Cov(X_{i-1}, X_{i+1}) = Cov(X_i, X_{i+2}) = \cdots \\ = Cov(X_{N-2}, X_N) = Cov(X_{N-1}, X_1) = Cov(X_N, X_2) \end{cases}$$

Combien de gagnants ?

$$\boxed{Cov(X_i, X_j) = \mathbb{E}[X_i X_j] - \mathbb{E}X_i \mathbb{E}X_j}$$

$$\boxed{\mathbb{E}X_i = \frac{1}{4}}$$

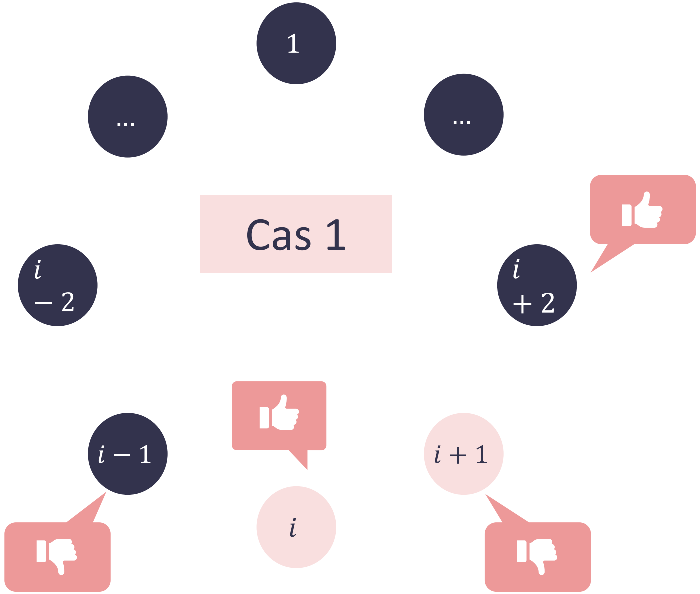
Pour chaque i il faut trouver $Cov(X_i, X_{i+1})$ et $Cov(X_i, X_{i+2})$

$$\mathbb{E}[X_i X_{i+1}] = \mathbb{P}(X_i = 1, X_{i+1} = 1)$$

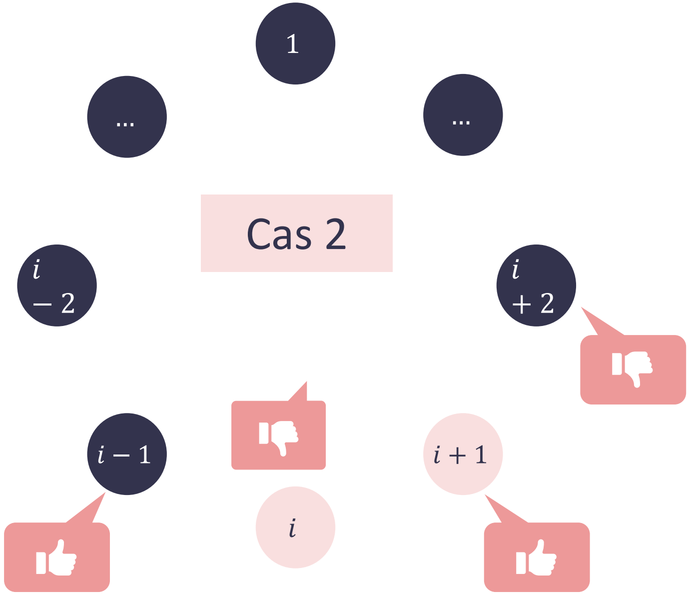
$$\begin{cases} Cov(X_1, X_2) = Cov(X_2, X_3) = \cdots = Cov(X_{i-1}, X_i) = Cov(X_i, X_{i+1}) = \cdots \\ = Cov(X_{N-1}, X_N) = Cov(X_N, X_1) \\ \\ Cov(X_1, X_3) = Cov(X_2, X_4) = \cdots = Cov(X_{i-1}, X_{i+1}) = Cov(X_i, X_{i+2}) = \cdots \\ = Cov(X_{N-2}, X_N) = Cov(X_{N-1}, X_1) = Cov(X_N, X_2) \end{cases}$$

Combien de gagnants ?

$$X_i = 1, X_{i+1} = 1$$



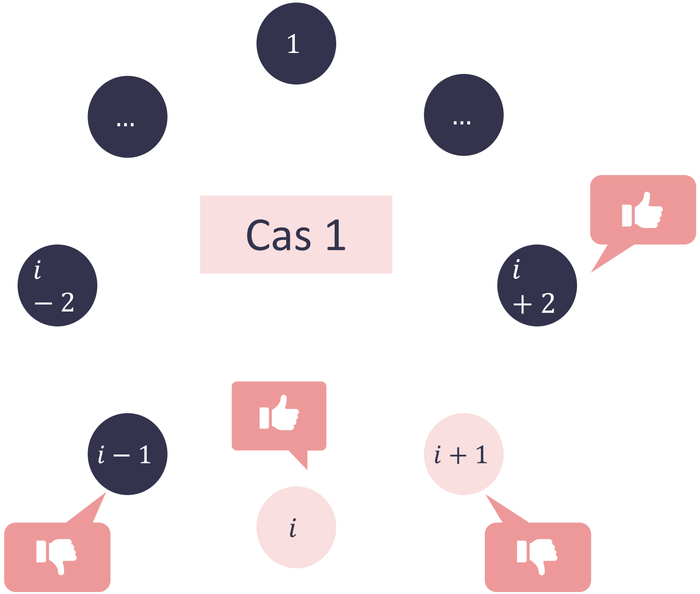
$\Rightarrow i^{\text{ème}}$ élément gagne une prime

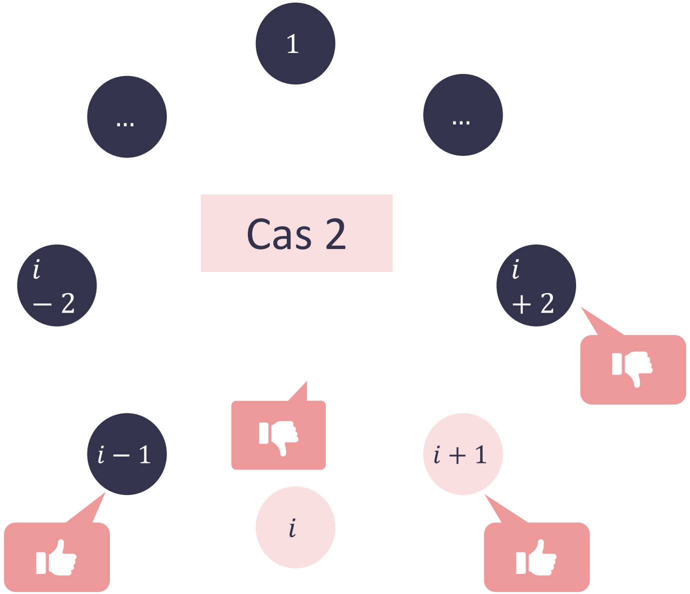


$\Rightarrow i^{\text{ème}}$ élément gagne une prime

Combien de gagnants ?

$$X_i = 1, X_{i+1} = 1$$





$\Rightarrow i^{\text{ème}}$ élément gagne une prime

$\Rightarrow i^{\text{ème}}$ élément gagne une prime

$$\mathbb{P}(\text{👎}_{i-1} \cap \text{👍}_i \cap \text{👎}_{i+1} \cap \text{👍}_{i+2}) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{16}$$

$$\mathbb{P}(\text{👍}_{i-1} \cap \text{👎}_i \cap \text{👍}_{i+1} \cap \text{👎}_{i+2}) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{16}$$

Combien de gagnants ?

$$X_i = 1, X_{i+1} = 1$$

$$\boxed{\mathbb{E}[X_i X_{i+1}] = \frac{1}{16} + \frac{1}{16} = \frac{1}{8}}$$

$$\boxed{\mathbb{P}(\text{👎}_{i-1} \cap \text{👍}_i \cap \text{👎}_{i+1} \cap \text{👍}_{i+2}) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{16}}$$

$$\boxed{\mathbb{P}(\text{👍}_{i-1} \cap \text{👎}_i \cap \text{👍}_{i+1} \cap \text{👎}_{i+2}) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{16}}$$

Combien de gagnants ?

$$X_i = 1, X_{i+1} = 1$$

$$\boxed{Cov[X_i X_{i+1}] = \mathbb{E}[X_i X_{i+1}] - \mathbb{E}[X_i]\mathbb{E}[X_{i+1}] = \frac{1}{8} - \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{2}{16} - \frac{1}{16} = \frac{1}{16}}$$

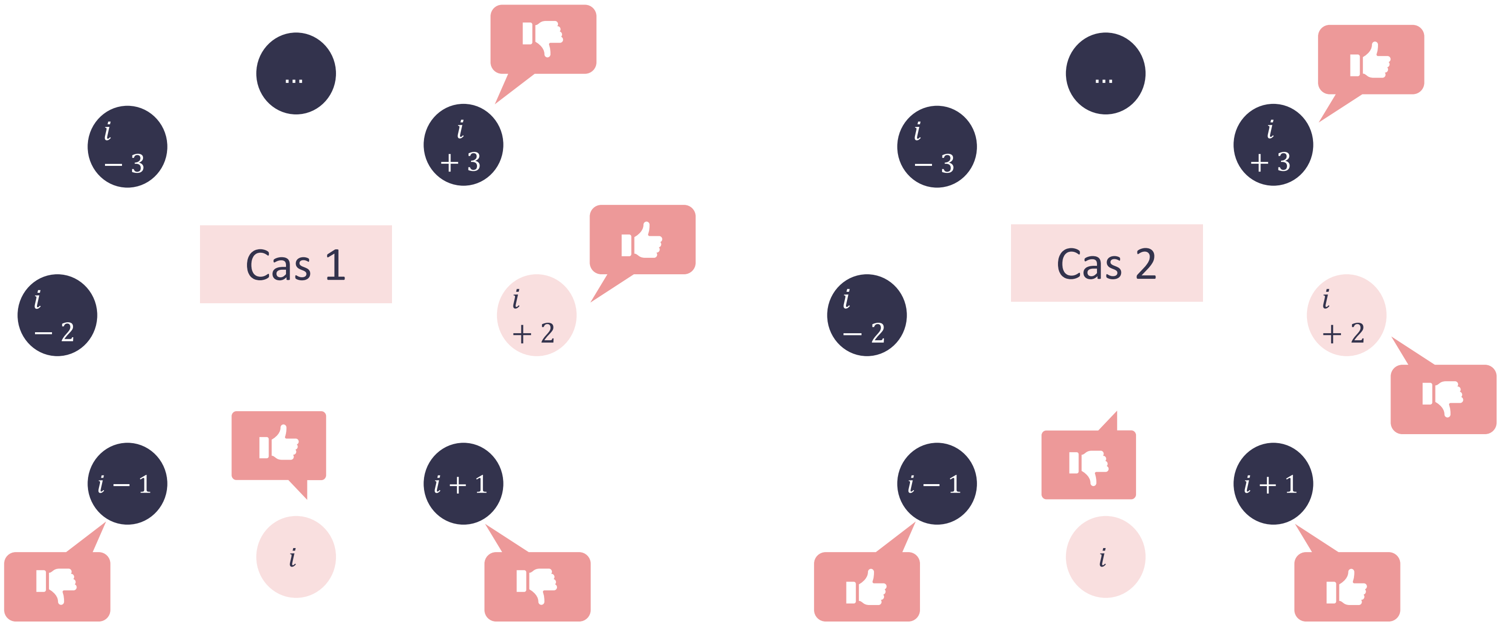
$$\boxed{\mathbb{E}[X_i X_{i+1}] = \frac{1}{16} + \frac{1}{16} = \frac{1}{8}}$$

$$\boxed{\mathbb{P}(\text{👎}_{i-1} \cap \text{👍}_i \cap \text{👎}_{i+1} \cap \text{👍}_{i+2}) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{16}}$$

$$\boxed{\mathbb{P}(\text{👍}_{i-1} \cap \text{👎}_i \cap \text{👍}_{i+1} \cap \text{👎}_{i+2}) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{16}}$$

Combien de gagnants ?

$$X_i = 1, X_{i+2} = 1$$

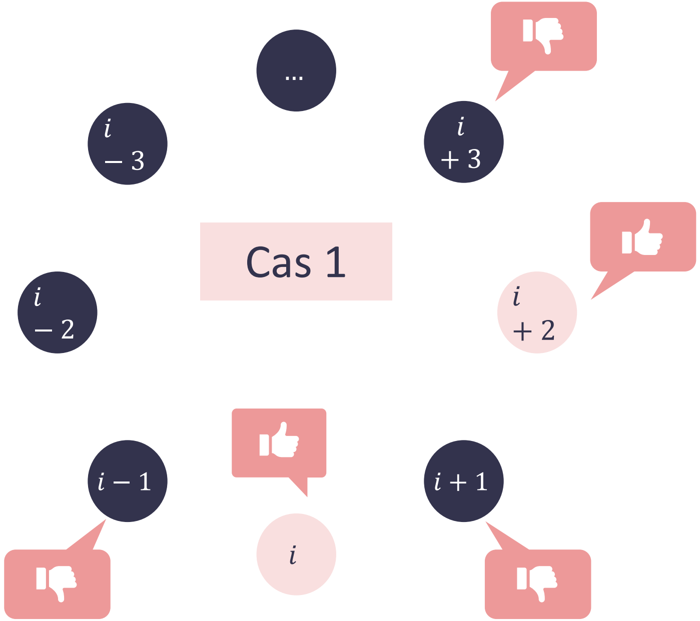


$\Rightarrow i^{\text{ème}}$ élément gagne une prime

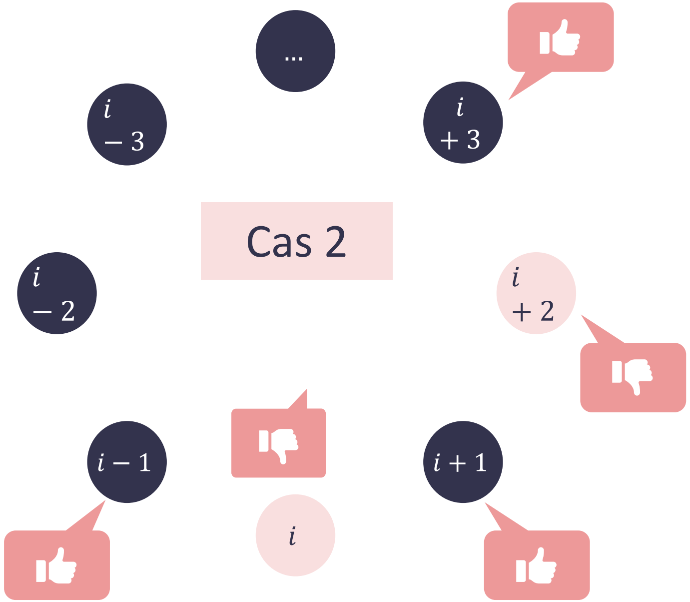
$\Rightarrow i^{\text{ème}}$ élément gagne une prime

Combien de gagnants ?

$$X_i = 1, X_{i+2} = 1$$



$$\mathbb{P}(\text{👎}_{i-1} \cap \text{👍}_{i} \cap \text{👎}_{i+1} \cap \text{👍}_{i+2} \cap \text{👎}_{i+3}) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{32}$$



$$\mathbb{P}(\text{👍}_{i-1} \cap \text{👎}_{i} \cap \text{👍}_{i+1} \cap \text{👎}_{i+2} \cap \text{👍}_{i+3}) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{32}$$

Combien de gagnants ?

$$X_i = 1, X_{i+2} = 1$$

$$\boxed{\mathbb{E}[X_i X_{i+2}] = \frac{1}{32} + \frac{1}{32} = \frac{1}{16}}$$

$$\mathbb{P}(\text{👎}_{i-1} \cap \text{👍}_i \cap \text{👎}_{i+1} \cap \text{👍}_{i+2} \cap \text{👎}_{i+3}) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{32}$$

$$\mathbb{P}(\text{👍}_{i-1} \cap \text{👎}_i \cap \text{👍}_{i+1} \cap \text{👎}_{i+2} \cap \text{👍}_{i+3}) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{32}$$

Combien de gagnants ?

$$X_i = 1, X_{i+2} = 1$$

$$\boxed{Cov[X_i X_{i+2}] = \mathbb{E}[X_i X_{i+2}] - \mathbb{E}[X_i]\mathbb{E}[X_{i+1}] = \frac{1}{16} - \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{16} - \frac{1}{16} = 0}$$

$$\boxed{\mathbb{E}[X_i X_{i+2}] = \frac{1}{32} + \frac{1}{32} = \frac{1}{16}}$$

$$\mathbb{P}(\text{👎}_{i-1} \cap \text{👍}_i \cap \text{👎}_{i+1} \cap \text{👍}_{i+2} \cap \text{👎}_{i+3}) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{32}$$

$$\mathbb{P}(\text{👍}_{i-1} \cap \text{👎}_i \cap \text{👍}_{i+1} \cap \text{👎}_{i+2} \cap \text{👍}_{i+3}) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{32}$$

Combien de gagnants ?

$$\sum_{i=1}^{N}\sum_{\substack{j=1\\ i\neq j}}^{N} Cov(X_i, X_j) = 2N \times Cov(X_i, X_{i+1}) + 2N \times Cov(X_i, X_{i+2})$$

$$= 2N \times \frac{1}{16} + 2N \times 0 = \frac{2N}{16}$$

$$Var(X) = \sum_{i=1}^{N} Var(X_i) + \sum_{i=1}^{N}\sum_{\substack{j=1\\ i\neq j}}^{N} Cov(X_i, X_j)$$

Combien de gagnants ?

$$Var(X) = \sum_{i=1}^{N} Var(X_i) + \sum_{i=1}^{N} \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^{N} Cov(X_i, X_j) = \frac{3N}{16} + \frac{2N}{16} = \boldsymbol{\frac{5N}{16}}$$

Loi

Moments

Indépendance

Fonction caractéristique et fonction génératrice

Quelques distributions importantes

Somme de n v.a.r.

Fonction caractéristique et Fonction génératrice

Soit $\boldsymbol{X} = (X_1, \dots, X_n)$ un vecteur aléatoire dans $\mathbb{R}^n$. La fonction $\phi_{\boldsymbol{X}}$ définie pour $\forall \tau = (\tau_1, \dots, \tau_n) \in \mathbb{R}^n$ est appellée **fonction caractéristique** (*characteristic function*) de $\boldsymbol{X}$ qui est donnée par :

$$\phi_{\boldsymbol{X}}(\tau) = \mathbb{E}\left(\exp\left(i \sum_{i=1}^{n} \tau_k X_k \right) \right) \mathbb{E}\left[e^{i(\tau.\boldsymbol{X})}\right]$$

où $\tau.\boldsymbol{X} \in \mathbb{R}$ est le produit scalaire entre deux vecteurs.

Fonction caractéristique et Fonction génératrice

Soit $\boldsymbol{X}$ un vecteur aléatoire de fonction caractéristique $\phi_{\boldsymbol{X}}(\tau)$.
Pour toute matrice $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et vecteur $\forall \boldsymbol{B} \in \mathbb{R}^n$, la fonction caractéristique du vecteur aléatoire $\boldsymbol{Y} = A\boldsymbol{X} + \boldsymbol{B}$ est donnée par :

$$\phi_{\boldsymbol{Y}}(\tau) = e^{i(\tau.\boldsymbol{B})}\phi_{\boldsymbol{X}}(\tau A)$$

où $\tau A \in \mathbb{R}^n$ est le produit matriciel.

Fonction caractéristique et Fonction génératrice

Soit $\boldsymbol{X} = (X_1, \dots, X_n)$ un vecteur aléatoire discret dans $\mathbb{R}^n$. On appelle **fonction génératrice** (*generating function*) de $\boldsymbol{X}$, notée $G_{\boldsymbol{X}}(s)$, la fonction définie pour $\forall s = (s_1, \dots, s_n) \in [0,1]^n$ comme suit :

$$G_{\boldsymbol{X}}(s) = \mathbb{E}\left[s_1^{X_1} \dots s_n^{X_n}\right]$$

Fonction caractéristique et Fonction génératrice

Soit X une v.a.r. On appelle **fonction génératrice des moments** (*moment generating function* ou *MGF*) de X, notée $M_X(s)$, la fonction définie comme :

$$M_X(s) = \mathbb{E}[e^{sX}] = \mathbb{E}\left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(sX)^k}{k!}\right] = \mathbb{E}\left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{s^k X^k}{k!}\right] = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}[X^k] \frac{s^k}{k!}$$

$M_X(s)$ existe s'il existe une constante $a > 0,\ a \in \mathbb{R}$ telle que $M_X(s)$ est finie $\forall s \in [-a, a]$.

Fonction caractéristique et Fonction génératrice

Soit $X_1, X_2, \dots, X_n$ n v.a.r. mutuellement indépendantes de fonction génératrice des moments $M_{X_i}, \ \forall i = 1, \dots, n$. Soit $Z = X_1 + \cdots + X_n$.

Alors la fonction génératrice des moments $M_Z(s)$ est donnée par :

$$M_Z(s) = M_{X_1}(s) \times M_{X_2}(s) \times \cdots \times M_{X_n}(s)$$

Loi

Moments

Indépendance

Fonction caractéristique et fonction génératrice

Quelques distributions importantes

Somme de n v.a.r.

INSA INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES LYON

membre de UNIVERSITÉ DE LYON

Quelques distributions importantes

Loi multinomiale (*multinomial distribution*), notée $\mathcal{M}(n, p_1, \dots, p_k)$ où $n \in \mathbb{N}^*$ et $p_i \in \,]0{,}1[\;\; \forall i \in \{1, \dots, k\}$ est la généralisation de la loi binomiale, i.e. :

$$\mathcal{B}(n, p) = \mathcal{M}(n, p, 1 - p)$$

La fonction de masse de $\mathcal{M}(n, p_1, \dots, p_k)$ est définie par :

$$\mathbb{P}(X_1 = \eta_1, \dots, X_n = \eta_n) = \frac{n!}{\eta_1! \times \dots \times \eta_k!} p_1^{\eta_1} \times \dots \times p_k^{\eta_k},$$
$$\forall \eta = (\eta_1, \dots, \eta_k) \in \mathbb{N}^k$$

où :

- $\sum_{i=1}^{k} \eta_i = n$
- $\sum_{i=1}^{k} p_i = 1$

Quelques distributions importantes

La **loi normale $\boldsymbol{n}$-dimensionnelle** ou **loi normale multidimensionnelle** (*multivariate normal distribution* ou *multivariate Gaussian distribution* ou *joint normal distribution*), notée $\mathcal{N}(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ où $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \dots, \mu_n) \in \mathbb{R}^n$ et $\boldsymbol{\Sigma}$ est une matrice de covariance (carrée d'ordre n, symétrique définie positive), est la généralisation de la loi normale $N(m, \sigma^2)$ où $\boldsymbol{\mu} = (m)$ et $\boldsymbol{\Sigma} = (\sigma^2)$

$$f_X(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \det\boldsymbol{\Sigma}}} \exp\left(-\frac{1}{2}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\mu})^T\, \boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\mu})\right)$$

où

- $(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\mu})^T$ désigne le vecteur colonne composé de $x_i - \mu_i, \forall i \in \{1, \dots, n\}$
- $\boldsymbol{\Sigma}^{-1}$ désigne l'inverse de la matrice $\boldsymbol{\Sigma}$

La valeur $\sqrt{(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\mu})^T\, \boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\mu})}$ est appelé la **distance de Mahalanobis** (*Mahalanobis distance*) entre le point $\boldsymbol{x}$ et l'espérance $\boldsymbol{\mu}$.

Loi

Moments

Indépendance

Fonction caractéristique et fonction génératrice

Quelques distributions importantes

Somme de n v.a.r.

Somme de n v.a.r.

Soit $X_1, \ldots, X_n$ n v.a.r. mutuellement indépendantes. Soit $S = \sum_{i=1}^{n} X_i$.

(cas discret) Soit $X_1, \ldots, X_n$ v.a.r. discrètes de fonction génératrice G_{X_i}. Alors, la fonction génératrice $G_S(s)$ de S pour $\forall s \in [0,1]$ est donnée par :

$$G_S(s) = \prod_{i=1}^{n} G_{X_i}(s)$$

(cas continu) Soit ϕ_{X_i} une fonction caractéristique de $X_i, i = 1, \ldots, n$. Alors, la fonction caractéristique de S pour $\forall t \in \mathbb{R}$ est donnée par :

$$\phi_S(t) = \prod_{i=1}^{n} \phi_{X_i}(t)$$

Somme de n v.a.r.

Soit $X_1, X_2, \dots, X_n$ n v.a.r. mutuellement indépendantes de même loi de Bernoulli de paramètre p, c.à.d. $\forall i = 1, \dots, n, \quad X_i \sim \mathcal{B}(p)$. Alors, la v.a.r. définie comme la somme $\sum_{i=1}^{n} X_i$ suit une loi binomiale de paramètre (n, p).

Somme de n v.a.r.

Soit $X_1, X_2, \dots, X_n$ n v.a.r. mutuellement indépendantes, dont chaque $X_k, \forall k \in \{1, \dots, n\}$ suit une loi normale $\mathcal{N}(\mu_k, \sigma_k^2)$.

Alors, la v.a.r. définie comme la somme $\sum_{i=1}^{n} X_i$ suit une loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, où :

- $\mu = \sum_{k=1}^{n} \mu_k$
- $\sigma^2 = \sum_{k=1}^{n} \sigma_k^2$

Si $\forall k = \{1, \dots, n\}, X_k \sim \mathcal{N}(0,1)$, alors $T = \sum_{k=1}^{n} X_k^2$ suit la loi Chi-Carré à n degré de liberté, notée χ_n^2 ou $\chi^2(n)$.

Somme de n v.a.r.

Identité de Wald ou **formule de Wald** (*Wald's equation* ou *Wald's identity* ou *Wald's lemma*) :

Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un espace probabilisé discret.
Soit N une v.a.r. discrète définie sur Ω à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ de fonction génératrice G_N.
Soit $X_1, \dots, X_N$ des v.a.r. i.i.d. définies sur Ω de fonction génératrice commune G_X.

Soit S une v.a.r. définie comme :

$$S : \omega \in \Omega \to \; S(\omega) = \sum_{i=1}^{N(\omega)} X_i(\omega)$$

Alors l'espérance de S est donnée par :

$$\mathbb{E}[S] = \mathbb{E}[X_i] \times \mathbb{E}[N]$$

S admet pour fonction génératrice :

$$\forall s \in [0,1], \qquad G_S(s) = G_N\big(G_X(s)\big)$$

Somme de n v.a.r.

La variance de S est donnée par :

$$Var(S) = \mathbb{E}[N] \times Var(X_i) + Var(N) \times (\mathbb{E}[X_i])^2$$