report project scipy nov-dec

December 2020

1 Формулировка задачи

В предыдущей части работы было получено представление периодических сплайн-интерполянтов в степенном базисе. Теперь нужно получить такое же представление в другом пространстве - в базисе B-сплайнов:

$$\mathbb{S}_{k,\ t} = \left\{ \sum_{j=1}^{n} c_j B_{j,\ k} | c_j \in \mathbb{R},\ 1 \leq j \leq n \right\},$$

где n - число точек, по которым строится B-сплайн,
k - степень многочлена,
$t = (t_i)_{i=1}^{n+k+1}$ - вектор узлов

2 B-сплайны

B-сплайны определяются рекурсивно:

$$B_{i,\ 0} = \begin{cases} 1, & \text{if } t_i \leq x < t_{i+1} \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$B_{i,\ k}(x) = \frac{x - t_i}{t_{i+k} - t_i} B_{i,\ k-1}(x) + \frac{t_{i+k+1} - x}{t_{i+k+1} - t_{i+1}} B_{i+1,\ k-1}(x),$$

В таком случае сплайн-функция:

$$S(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j B_{j,\ k}(x)$$

3 Вектор узлов на кольце

Составим вектор узлов из контрольных точек, добавив по k узлов слева и справа в соответствие с правилом:

$$
\begin{gathered}
t_0 = x_0 - (x_{n-1} - x_{n-k-1}) \\
t_1 = x_0 - (x_{n-1} - x_{n-k}) \\
\dots \\
t_{k-1} = x_0 - (x_{n-1} - x_{n-2}) \\
t_k = x_0 \\
t_{k+1} = x_1 \\
\dots \\
t_{n+k-1} = x_{n-1} \\
t_{n+k} = x_{n-1} + (x_1 - x_0) \\
t_{n+k+1} = x_{n-1} + (x_2 - x_0) \\
\dots \\
t_{n+2k-1} = x_{n-1} + (x_k - x_0)
\end{gathered}
$$

4 Теорема о совпадающих коэффициентах

Пусть матрица коэффициентов выглядит следующим образом:

$$
\left(\begin{array}{ccccccccccc}
a_{0,0} & a_{0,1} & \dots & a_{0,k-1} & 0 & \dots & 0 & -a_{0,0} & -a_{0,1} & \dots & -a_{0,k-1} \\
a_{1,0} & a_{1,1} & \dots & a_{1,k-1} & 0 & \dots & 0 & -a_{1,0} & -a_{1,1} & \dots & -a_{1,k-1} \\
 & & & & & \vdots & & & & & \\
a_{k-2,0} & a_{k-2,1} & \dots & a_{k-2,k-1} & 0 & \dots & 0 & -a_{k-2,0} & -a_{k-2,1} & \dots & -a_{k-2,k-1} \\
\hline
a_{k-1,0} & a_{k-1,1} & \dots & a_{k-1,k-1} & 0 & 0 & \dots & & & & \\
0 & a_{k,1} & a_{k,2} & \dots & a_{k,k} & 0 & 0 & \dots & & & \\
0 & 0 & \ddots & \ddots & \dots & \ddots & 0 & \dots & & & \\
 & & & & & & \ddots & & & & \\
 & & & & \dots & 0 & \ddots & \ddots & \dots & \ddots & 0 \\
 & & & & & \dots & 0 & a_{n+k-2,n-2} & a_{n+k-2,n-1} & \dots & a_{n+k-2,n+k-2}
\end{array}\right)
$$

Сформулируем теорему:

Теорема 4.0.1. *Если матрица A имееет вид 4, то в системе $Ac = y$, где c - вектор неизвестных коэффициентов k совпадающих коэффициентов, причем*

$$
\begin{cases}
c_0 = c_{n-1} \\
c_1 = c_n \\
\vdots \\
c_{k-1} = c_{n+k-2}
\end{cases}
$$

Таким образом, можем привести матрицу A к следующему виду ...

to be continued ...