Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
«Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»

Московский институт электроники и математики им. А.Н. Тихонова

Прикладная математика
(Название ОП)

бакалавр
(уровень образования)

ОТЧЕТ
по проектной работе

Сплайн-интерполяция и аппроксимация в SciPy.
(название проекта)

Выполнили: студент гр. БПМ185

Земляной Егор Олегович
(ФИО)

(подпись)

студентка гр. БПМ182

Суховерхова Диана Дмитриевна
(ФИО)

(подпись)

Руководитель проекта:

Буровский Евгений Андреевич
(должность, ФИО руководителя проекта)

(оценка) (подпись)

(дата)

2021 г.

Содержание

1 Техническое задание

- **Цель:** реализовать алгоритм сплайн-интерполяции с периодическими граничными условиями в различных базисах.
- **Задачи:**
  1. Повторить аналитические результаты для сплайн-интерполяции с периодическими граничными условиями в степенном базисе.
  2. Разработать и реализовать алгоритм нахождения сплайн-интерполянта с периодическими граничными условиями в базисе Б-сплайнов.
- **Результаты:**
  1. *Pull request* в *scipy* с исправлением ошибок в построении сплайн-интерполнянта с периодическими граничными условиями в степенном базисе.
  2. *Pull request* в *scipy* с реализацией алгоритма сплайн-интерполяции с периодическими граничными условиями в базисе Б-сплайнов.
- **Ход работы:**
  1. Получение аналитического решения для задания сплайн-интерполянта с периодическими граничными условиями в степенном базисе и сравнение его с известными результатами.
  2. Реализация данного алгоритма и доказательство с его помощью наличия ошибки в *scipy*.
  3. Исправление ошибок в *scipy*, связанных с отсутствием непрерывности второй производной в некоторых случаях.
  4. Получение оптимального алгоритма для сплайн-интерполяции в базисе Б-сплайнов с периодическими граничными условиями.
  5. Реализация и добавление данного алгоритма в *scipy*.

2 Актуальность проведенной работы

Основная теоретическая часть нашей работы была разработана в 70-х годах прошлого века (например, в книге [1]), однако оптимальная реализация некоторых случаев (в том числе периодической сплайн-интерполяции) отсутствовала до сих пор. Реализация сплайн-интерполяции с нуля в каждом новом проекте требует больших технических затрат, поэтому необходим программный код библиотечного уровня. В этом и заключается актуальность проделанной нами работы.

3 Подходы и методы

3.1 Вступление

Наша работа включает в себя сплайн-интерполяцию с периодическими граничными условиями в двух базисах: степенном и базисе Б-сплайнов. В степенном базисе мы исследовали только кубические многочлены, в то время как в базисе Б-сплайнов мы разработали алгоритм для многочленов любой степени.

3.2 Постановка задачи в степенном базисе

Задача кубической сплайн-интерполяции с периодическими граничными условиями может быть решена следующим образом:

1. Численно найти первые производные интерполяционной функции в заданных точках
2. Построить кубический многочлен в форме Эрмита для каждого интервала

3.3 Многочлен в форме Эрмита

В данном пункте мы строим многочлен в форме Эрмита, основываясь на его определении ([2]).

Сначала построим многочлен на отдельном интервале $[a, b]$ (известны только значения в граничных точках):
Обозначим:

$$h = \frac{1}{x_b - x_a}$$

Из формулы Лагранжа:

$$p_1(x) = y_b \cdot (x - x_a)\ h + y_a \cdot (x_b - x)\ h$$
$$p_1(x_a) = y_a$$
$$p_1(x_b) = y_b$$

Построим кубический многочлен p_3 так, что

$$p_3(x) = p_1(x) + \dots$$
$$p_3(x_a) = y_a,\ p_3(x_b) = y_b$$
$$p_3'(x_a) = s_a,\ p_3'(x_b) = s_b$$

Предположим, что значения s_a и s_b известны

$$p_3(x) = y_b(x - x_a)\ h + y_a(x_b - x)\ h + (x - x_a)\ h \cdot (x_b - x)\ h\,[A(x - x_a) + B(x_b - x)]$$

Найдем A и B:

$$p_3'(x) = (y_b - y_a) \cdot h + (x_b - x) \cdot h^2\,[A(x - x_a) + B(x_b - x)] -$$
$$-(x - x_a) \cdot h^2\,[A(x - x_a) + B(x_b - x)] + (x - x_a)(x_b - x) \cdot h^2\,[A - B]$$

Обозначим

$$m = \frac{y_b - y_a}{x_b - x_a}$$

Добавим x_a и x_b в $p_3'(x)$:

$$p_3'(x_a) = m + B = s_a \Rightarrow B = s_a - m$$
$$p_3'(x_b) = m - A = s_b \Rightarrow A = m - s_b$$

Мы получили кубический многочлен в форме Эрмита для одного интервала:

$$p_3(x) = y_b(x - x_a)\ h + y_a(x_b - x)\ h + (x - x_a)\ h \cdot (x_b - x)\ h\,[(m - s_b)(x - x_a) + (s_a - m)(x_b - x)]$$

3.4 Первые производные

Для того, чтобы найти зависимость между многочленами в форме Эрмита для соседних интервалов, нам необходимо найти вторые производные этих многочленов $p_3''(x)$:

$$p_3''(x) = -2h^2(s_b - m)\,[(x_b - x) - 2(x - x_a)] - 2h^2(s_a - m)\,[2(x_b - x) - (x - x_a)]$$

Найдем значение многочлена $p_3''(x)$ в граничных точках x_a и x_b:

$$p_3''(x_a) = -2h(s_b - m) - 4h(s_a - m)$$
$$p_3''(x_b) = 4h(s_b - m) + 4h(s_a - m)$$

Построим многочлены $p_{3,k}$ $(k = 0, \ldots, n)$ на каждом из интервалов $[x_{k-1},\ x_k]$, которые будут составлять сплайн-интерполянт:

$$
\begin{gathered}
x_a = x_k,\ x_b = x_{k+1}, \\
s_a = s_k,\ s_b = s_{k+1}, \\
h = h_k = \frac{1}{x_{k+1} - x_k} \\
m = m_k = \frac{y_{k+1} - y_k}{x_{k+1} - x_k}
\end{gathered}
$$

$$
\begin{gathered}
p_{3,k}(x) = y_{k+1}(x - x_k)\ h_k + y_k(x_{k+1} - x)\ h_k + \\
+(x - x_k)\ h_k \cdot (x_{k+1} - x)\ h_k\left[(m_k - s_k)(x - x_k) + (s_{k-1} - m_k)(x_{k+1} - x)\right] \\
p''_{3,k}(x_k) = -2h_k(s_{k+1} - m_k) - 4h_k(s_k - m_k) \\
p''_{3,k}(x_{k+1}) = 4h_k(s_{k+1} - m_k) + 4h_k(s_k - m_k)
\end{gathered}
$$

Из определения кубической сплайн-интерполяции:

$$p''_{3,k-1}(x_k) = p''_{3,k}(x_k)$$

$$(2h_{k-1}s_{k-1} + 4h_{k-1}s_k) - 6h_{k-1}m_{k-1} = -(4h_k s_k + 2h_k s_{k+1}) + 6h_k m_k$$

После перегруппировки слагаемых в этом уравнении получаем систему линейных алгебраических уравнений:

$$h_{k-1}s_{k-1} + 2(h_{k-1} + h_k)s_k + h_k s_{k+1} = 3h_{k-1}m_{k-1} + 3h_k m_k$$

Матрица данной системы может быть переписана в почти трехдиагональном виде (здесь используется **периодическое граничное условие**: $s_{-1} = s_n$, $s_0 = s_{n+1}$):

$$
A = \begin{pmatrix}
2h_n + 2h_0 & h_0 & 0 & 0 & & 0 & h_n \\
h_0 & 2h_0 + 2h_1 & h_1 & 0 & & 0 & 0 \\
 & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\
 & & & & & & \\
 & & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\
0 & & & 0 & h_{n-2} & 2h_{n-2} + 2h_{n-1} & h_{n-1} \\
h_n & 0 & & 0 & 0 & h_{n-1} & 2h_{n-1} + 2h_n
\end{pmatrix}
$$

$$
x = \begin{pmatrix} s_0 \\ s_1 \\ \vdots \\ s_n \end{pmatrix},\ b = 3\begin{pmatrix} h_n m_n + h_0 m_0 \\ h_0 m_0 + h_1 m_1 \\ \vdots \\ h_{n-1}m_{n-1} + h_n m_n \end{pmatrix}
$$

Матрица A почти трехдиагональна, что позволяет нам разбить ее в сумму трехдиагональной матрицы B и добавки: $A = B + uv^T$, где

$$
u = \begin{pmatrix} h_n \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ h_n \end{pmatrix},\ v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}
$$

после чего, находим значени первых производных в заданных точках с помощью алгоритма Шермана-Моррисона: для системы

$$(B + uv^T)x = b$$

нам нужно решить две вспомогательные системы:

$$By = b, \; Bz = u$$

Данная система может быть решена с использованием метода прогонки (так как матрица B являет трехдиагональной), после чего вектор x находится по следующей формуле:

$$x = y - \left[\frac{vy}{1+vz}\right] z$$

3.5 Постановка задачи в базисе Б-сплайнов

В предыдущей части работы было получено представление периодических сплайн-интерполянтов в степенном базисе. Теперь нужно получить такое же представление в другом пространстве - в базисе Б-сплайнов:

$$\mathbb{S}_{k,\ t} = \left\{ \sum_{j=1}^{n+k-1} c_j B_{j,\ k} | c_j \in \mathbb{R}, \, 1 \leq j \leq n \right\},$$

где n - число точек, по которым строится Б-сплайн,
k - степень многочлена,
$t = (t_i)_{i=1}^{n+2k}$ - вектор узлов
Б-сплайны определяются рекурсивно:

$$B_{i,\ 0} = \begin{cases} 1, & \text{если } t_i \leq x < t_{i+1} \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

$$B_{i,\ k}(x) = \frac{x - t_i}{t_{i+k} - t_i} B_{i,\ k-1}(x) + \frac{t_{i+k+1} - x}{t_{i+k+1} - t_{i+1}} B_{i+1,\ k-1}(x),$$

В таком случае сплайн-функция:

$$S(x) = \sum_{j=1}^{n+k-1} c_j B_{j,\ k}(x)$$

3.6 Вектор узлов на кольце

Составим вектор узлов из контрольных точек, добавив по k узлов слева и справа в соответствие с правилом:
Для нечетного k:

$$\begin{gathered} t_0 = x_0 - (x_{n-1} - x_{n-k-1}) \\ t_1 = x_0 - (x_{n-1} - x_{n-k}) \\ \ldots \\ t_{k-1} = x_0 - (x_{n-1} - x_{n-2}) \\ t_k = x_0 \\ t_{k+1} = x_1 \\ \ldots \\ t_{n+k-1} = x_{n-1} \\ t_{n+k} = x_{n-1} + (x_1 - x_0) \\ t_{n+k+1} = x_{n-1} + (x_2 - x_0) \\ \ldots \\ t_{n+2k-1} = x_{n-1} + (x_k - x_0) \end{gathered}$$

Для четного k:

$$t_0 = x_0 - \left(x_{n-1} - (x_{n-1-k} - \frac{x_{n-1-k} - x_{n-k}}{2})\right) = x_0 - x_{n-1} + \frac{x_{n-1-k} + x_{n-k}}{2}$$
$$t_1 = x_0 - \left(x_{n-1} - (x_{n-k} - \frac{x_{n-k} - x_{n-k+1}}{2})\right) = x_0 - x_{n-1} + \frac{x_{n-k} + x_{n-k+1}}{2}$$
$$\dots$$
$$t_{k-1} = x_0 - \left(x_{n-1} - (x_{n-2} - \frac{x_{n-2} - x_{n-3}}{2})\right) = x_0 - x_{n-1} + \frac{x_{n-2} + x_{n-3}}{2}$$
$$t_k = x_0$$
$$t_{k+1} = x_1 - \frac{x_1 - x_0}{2} = \frac{x_0 + x_1}{2}$$
$$t_{k+2} = x_2 - \frac{x_2 - x_1}{2} = \frac{x_1 + x_2}{2}$$
$$\dots$$
$$t_{n+k-2} = x_{n-2} - \frac{x_{n-2} - x_{n-3}}{2} = \frac{x_{n-3} + x_{n-2}}{2}$$
$$t_{n+k-1} = x_{n-1}$$
$$t_{n+k} = x_{n-1} + \left(x_1 - \frac{x_1 - x_0}{2} - x_0\right)$$
$$t_{n+k+1} = x_{n-1} + \left(x_2 - \frac{x_2 - x_1}{2} - x_0\right)$$
$$\dots$$
$$t_{n+2k-1} = x_{n-1} + \left(x_{n-2} - \frac{x_{n-2} - x_{n-3}}{2} - x_0\right)$$

3.7 Система уравнений на коэффициенты

Рассмотрим следующую СЛАУ:

$$\left\{\begin{array}{l} S'(x_0) = S'(x_{n-1}) \\ \dots \\ S^{(k-1)}(x_0) = S^{(k-1)}(x_{n-1}) \\ \hline \\ S(x_i) = y_i,\ i = 0,\ \dots,\ n-1 \end{array}\right.$$

3.8 Теорема о совпадающих коэффициентах

Пусть матрица коэффициентов устроена следующим образом:

$$\left(\begin{array}{ccccccccccc}
a_{0,0} & a_{0,1} & \dots & a_{0,k-1} & 0 & \dots & 0 & -a_{0,0} & -a_{0,1} & \dots & -a_{0,k-1} \\
a_{1,0} & a_{1,1} & \dots & a_{1,k-1} & 0 & \dots & 0 & -a_{1,0} & -a_{1,1} & \dots & -a_{1,k-1} \\
 & & & & & \vdots & & & & & \\
a_{k-2,0} & a_{k-2,1} & \dots & a_{k-2,k-1} & 0 & \dots & 0 & -a_{k-2,0} & -a_{k-2,1} & \dots & -a_{k-2,k-1} \\
\hline
a_{k-1,0} & a_{k-1,1} & \dots & a_{k-1,k-1} & 0 & 0 & \dots & & & & \\
0 & a_{k,1} & a_{k,2} & \dots & a_{k,k} & 0 & 0 & \dots & & & \\
0 & 0 & \ddots & \ddots & \dots & \ddots & 0 & \dots & & & \\
 & & & & & & \ddots & & & & \\
 & & & & \dots & 0 & \ddots & \ddots & \dots & \ddots & 0 \\
 & & & & & \dots & 0 & a_{n+k-2,n-2} & a_{n+k-2,n-1} & \dots & a_{n+k-2,n+k-2}
\end{array}\right)$$

Сформулируем теорему:

Теорема 3.8.1. *Рассмотрим СЛАУ, записанную в матричном виде:*

$$Ac = b$$

где матрица A имеет вид 3.8, а вектор свободных членов b устроен следующим образом: в первых $k-1$ строках стоят 0, а на k и последней строках находятся одинаковые элементы

$$b = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b_{k-1} \\ b_k \\ \vdots \\ b_{n+k-3} \\ b_{k-1} \end{pmatrix}$$

тогда для решения данной СЛАУ справедливы следующие равенства:

$$\begin{cases} c_0 = c_{n-1} \\ c_1 = c_n \\ \vdots \\ c_{k-1} = c_{n+k-2} \end{cases}$$

Доказательство. Выпишем первые k уравнений исходной системы, а также последнее уравнение:

$$\begin{cases} a_{0,0}c_0 + a_{0,1}c_1 + \dots + a_{0,k-1}c_{k-1} - a_{0,0}c_{n-1} - a_{0,1}c_n - \dots - a_{0,k-1}c_{n+k-2} = 0 \\ a_{1,0}c_0 + a_{1,1}c_1 + \dots + a_{1,k-1}c_{k-1} - a_{1,0}c_{n-1} - a_{1,1}c_n - \dots - a_{1,k-1}c_{n+k-2} = 0 \\ \vdots \\ a_{k-2,0}c_0 + a_{k-2,1}c_1 + \dots + a_{k-2,k-1}c_{k-1} - a_{k-2,0}c_{n-1} - a_{k-2,1}c_n - \dots - a_{k-2,k-1}c_{n+k-2} = 0 \\ a_{k-1,0}c_0 + a_{k-1,1}c_1 + \dots + a_{k-1,k-1}c_{k-1} = y_0 \\ a_{k-1,0}c_{n-1} + a_{k-1,n}c_1 + \dots + a_{k-1,n+k-2}c_{n+k-2} = y_0 \end{cases}$$

Объединим последние два уравнения и сгруппируем каждом из полученных уравнений слагаемые:

$$\begin{cases} a_{0,0}(c_0 - c_{n-1}) + a_{0,1}(c_1 - c_n) + \dots + a_{0,k-1}(c_{k-1} - c_{n+k-2}) = 0 \\ a_{1,0}(c_0 - c_{n-1}) + a_{1,1}(c_1 - c_n) + \dots + a_{1,k-1}(c_{k-1} - c_{n+k-2}) = 0 \\ \vdots \\ a_{k-1,0}(c_0 - c_{n-1}) + a_{k-1,1}(c_1 - c_n) + \dots + a_{k-1,k-1}(c_{k-1} - c_{n+k-2}) = 0 \end{cases}$$

Таким образом, получаем однородную СЛАУ относительно переменных $(c_0 - c_{n-1}), (c_1 - c_n), \dots, (c_{k-1} - c_{n+k-2})$ с матрицей коэффициентов

$$\begin{pmatrix} a_{0,0} & a_{0,1} & \dots & a_{0,k-1} \\ a_{1,0} & a_{1,1} & \dots & a_{1,k-1} \\ & & \dots & \\ a_{k-1,0} & a_{k-1,1} & \dots & a_{k-1,k-1} \end{pmatrix}$$

Получаем невырожденную матрицу однородной СЛАУ и, таким образом, единственным ее решение будет нулевой вектор:

$$\begin{cases} c_0 - c_{n-1} = 0 \\ c_1 - c_n = 0 \\ \vdots \\ c_{k-1} - c_{n+k-2} = 0 \end{cases}$$

Следовательно, имеем требуемое равенство коэффициентов.

Докажем теперь, что матрица системы 3.7 имеет вид 3.8. Для этого докажем почленное равенство $k-1$ производной сплайн-функции $S(x)$ в крайних точках ([3]): $D^r S(x_0) = D^r S(x_{n-1})$.
Запишем r-ую производную сплайн-функции $S(x)$ через матрицы Б-сплайнов:

$$D^r S(x) = \frac{k!}{(k-r)!}\mathbf{R}_1(x)\cdot\mathbf{R}_2(x)\cdot\dots\cdot\mathbf{R}_{k-r}(x)\cdot D\mathbf{R}_{k-r+1}\cdot\dots\cdot D\mathbf{R}_k\cdot\mathbf{c}_k,$$

$\mathbf{c}_k = (c_{\mu-k},\, c_{\mu-k+1},\, \dots,\, c_{\mu-1})^T$ - вектор коэффициентов, которые влияют на Б-сплайн на интервале $[t_\mu,\, t_{\mu+1})$

Матрицы Б-сплайнов и матрицы производных определяются следующим образом:
$x \in [t_\mu,\, t_{\mu+1})$

$$\mathbf{R}_i(x) = \begin{pmatrix} \frac{t_{\mu+1}-x}{t_{\mu+1}-t_{\mu+1-i}} & \frac{x-t_{\mu+1-i}}{t_{\mu+1}-t_{\mu+1-i}} & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{t_{\mu+2}-x}{t_{\mu+2}-t_{\mu+2-i}} & \frac{x-t_{\mu+2-i}}{t_{\mu+2}-t_{\mu+2-i}} & \ddots & 0 & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \\ 0 & 0 & \dots & \frac{t_{\mu+i}-x}{t_{\mu+i}-t_\mu} & \frac{x-t_\mu}{t_{\mu+i}-t_\mu} & \end{pmatrix}$$

$$D\mathbf{R}_i(x) = D\mathbf{R}_i = \begin{pmatrix} \frac{-1}{t_{\mu+1}-t_{\mu+1-i}} & \frac{1}{t_{\mu+1}-t_{\mu+1-i}} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \frac{-1}{t_{\mu+i}-t_\mu} & \frac{1}{t_{\mu+i}-t_\mu} \end{pmatrix}$$

В случае периодического вектора узлов $x_0 \in [t_k,\, t_{k+1})$, $x_{n-1} \in [t_{k+n-1}, t_{k+n})$.

Рассмотрим $\mathbf{R}_i(x)$ $(\forall i = 1{,}2, \dots,\, k-r)$ и сравним поэлементно две матрицы: $\mathbf{R}_i(x_0)$ $(\mu = k)$ и $\mathbf{R}_i(x_{n-1})$ $(\mu = k+n-1)$. Рассмотрим j-ю строку и столбцы j и $j+1$ $(j = 1, \dots,\, i)$:

- $t_{k+j} - t_{k+j-i}$ и $t_{k+n-1+j} - t_{k+n-1+j-i}$
  1. $t_{k+j} = x_j$
     $t_{k+j-i} = x_0 - (x_{n-1} - x_{n-1-i+j}) \Rightarrow t_{k+j} - t_{k+j-i} = x_j - x_0 + x_{n-1} - x_{n-1-i+j}$
  2. $t_{k+n-1+j-i} = x_{n-1-i+j}$
     $t_{k+n-1+j} = x_{n-1} + (x_j - x_0) \Rightarrow t_{k+n-1+j} - t_{k++n-1+j-i} = x_{n-1} + x_j - x_0 - x_{n-1-i+j}$

  Доказали, что знаменатели равны, т.е. $t_{k+j} - t_{k+j-i} = t_{k+n-1+j} - t_{k+n-1+j-i}$

- $t_{k+j} - x_0$ и $t_{k+n-1+j} - x_{n-1}$
  1. $t_{k+j} - x_0 = x_j - x_0$
  2. $t_{k+n-1+j} - x_{n-1} = x_{n-1} + (x_j - x_0) - x_{n-1} = x_j - x_0 \Rightarrow$

  $\Rightarrow t_{k+j} - x_0 = t_{k+n-1+j} - x_{n-1}$

- $x_0 - t_{k+j-i}$ и $x_{n-1} - t_{k+n-1+j-i}$
  1. $x_0 - t_{k+j-i} = x_0 - (x_0 - (x_{n-1} - x_{n-1-i+j})) = x_{n-1} - x_{n-1-i+j}$
  2. $x_{n-1} - t_{k+n-1+j-i} = x_{n-1} - xn - 1 - i + j \Rightarrow$

  $\Rightarrow x_0 - t_{k+j-i} = x_{n-1} - t_{k+n-1+j-i}$

Таким образом, $\mathbf{R}_i(x_0)$ и $\mathbf{R}_i(x_{n-1})$ совпадают, значит совпадают и производные сплайн-функции: $D^rS(x_0) = D^rS(x_{n-1})$
Осталось доказать, что совпадают коэффициенты при c_i и c_{n-1+i} $(i = 0{,}1, \ldots, k)$
Для x_0 вектор $\mathbf{c}_k = (c_0, c_1, \ \ldots, c_{k-1})^T$, для x_{n-1} $\hat{\mathbf{c}}_k = (c_{n-1}, c_n, \ \ldots, c_{n+k-2})^T$
Занулим все элементы $\mathbf{c}_k$ и $\hat{\mathbf{c}}_k$ кроме c_i и c_{n-1+i} соответственно $(i = 1{,}2, \ \ldots, k)$
Так как $D^rS(x_0) = D^rS(x_{n-1})$, то коэффициенты при c_i и c_{n-1+i} равны.
В силу произвольности выбранных i и r, все $k-1$ производные $S(x)$ в x_0 и x_{n-1} совпадают почленно, а значит, матрица системы 3.7 действительно имеет вид 3.8.

Доказательство теоремы 3.8.1 при векторе узлов для четного k остается неизменным, кроме сравнения матриц Б-сплайнов и матриц производных в точках x_0 и x_{n-1}:
В случае вектора узлов 3.6 $x_0 \in [t_k, t_{k+1})$, $x_{n-1} \in [t_{k+n-1}, t_{k+n})$.

Рассмотрим $\mathbf{R}_i(x)$ $(\forall i = 1{,}2, \ldots, k-r)$ и сравним поэлементно две матрицы: $\mathbf{R}_i(x_0)$ $(\mu = k)$ и $\mathbf{R}_i(x_{n-1})$ $(\mu = k+n-1)$. Рассмотрим j-ю строку и столбцы j и $j+1$ $(j = 1, \ldots, i)$:

- $t_{k+j} - t_{k+j-i}$ и $t_{k+n-1+j} - t_{k+n-1+j-i}$
  1. $t_{k+j} = x_j - \dfrac{x_j - x_{j-1}}{2}$
     $t_{k+j-i} = x_0 - \left(x_{n-1} - (x_{i-j} - \dfrac{x_{i-j} - x_{i-j-1}}{2})\right) \Rightarrow$
     $\Rightarrow t_{k+j} - t_{k+j-i} = x_j - \dfrac{x_j - x_{j-1}}{2} - x_0 + x_{n-1} - x_{i-j} + \dfrac{x_{i-j} - x_{i-j-1}}{2}$
  2. $t_{k+n-1+j} = x_{n-1} + \left(x_j - \dfrac{x_j - x_{j-1}}{2} - x_0\right)$
     $t_{k+n-1+j-i} = x_{i-j} - \dfrac{x_{i-j} - x_{i-j-1}}{2} \Rightarrow$
     $\Rightarrow t_{k+n-1+j} - t_{k++n-1+j-i} = x_{n-1} + x_j - \dfrac{x_j - x_{j-1}}{2} - x_0 - x_{i-j} + \dfrac{x_{i-j} - x_{i-j-1}}{2}$

  Доказали, что знаменатели равны, т.е. $t_{k+j} - t_{k+j-i} = t_{k+n-1+j} - t_{k+n-1+j-i}$
- $t_{k+j} - x_0$ и $t_{k+n-1+j} - x_{n-1}$
  1. $t_{k+j} - x_0 = x_j - \dfrac{x_j - x_{j-1}}{2} - x_0$
  2. $t_{k+n-1+j} - x_{n-1} = x_{n-1} + \left(x_j - \dfrac{x_j - x_{j-1}}{2} - x_0\right) - x_{n-1} = x_j - \dfrac{x_j - x_{j-1}}{2} - x_0 \Rightarrow$

  $\Rightarrow t_{k+j} - x_0 = t_{k+n-1+j} - x_{n-1}$
- $x_0 - t_{k+j-i}$ и $x_{n-1} - t_{k+n-1+j-i}$
  1. $x_0 - t_{k+j-i} = x_0 - x_0 + x_{n-1} - \left(x_{i-j} - \dfrac{x_{i-j} - x_{i-j-1}}{2}\right) = x_{n-1} - \left(x_{i-j} - \dfrac{x_{i-j} - x_{i-j-1}}{2}\right)$
  2. $x_{n-1} - t_{k+n-1+j-i} = x_{n-1} - x_{i-j} + \dfrac{x_{i-j} - x_{i-j-1}}{2} \Rightarrow$

  $\Rightarrow x_0 - t_{k+j-i} = x_{n-1} - t_{k+n-1+j-i}$

Таким образом, $\mathbf{R}_i(x_0)$ и $\mathbf{R}_i(x_{n-1})$ совпадают, значит совпадают и производные сплайн-функции:

$$D^rS(x_0) = D^rS(x_{n-1})$$

Остальная часть доказательства остается без изменений. □

3.9 Вид матрицы

Воспользуемся полученной выше теоремой, чтобы преобразовать изначальную СЛАУ:
Уберем из системы все уравнения, в которые входят $c_{n-1}, \ldots, c_{n+k-2}$ - повторяющиеся коэффициенты. Таким образом, получим марицу A' размера $n-1 \times n-1$ и вектор свободных членов:

$$b' = \begin{pmatrix} b_{k-1} \\ b_k \\ \vdots \\ b_{n+k-3} \end{pmatrix}$$

В случае **нечетных** k первые $\frac{k-1}{2}$ неизвестных c_i можно перенести в конец вектора неизвестных. Тогда матрица A' останется ленточной, но появятся треугольные "блоки"в левом нижнем и правом верхних углах размера $\frac{k-1}{2}$ x $\frac{k-1}{2}$.
В случае **четных** k первые $\frac{k}{2}$ неизвестных c_i можно перенести в конец вектора неизвестных. Матрица A' также останется ленточной, изменятся только размеры блоков: $\frac{k}{2}$ x $\frac{k}{2}$.
Таким образом, мы свели матрицу к почти диагональному виду:

$$\begin{pmatrix}
\times & \ldots & \times & 0 & \ldots & 0 & \times & \ldots & \times \\
\vdots & \ddots & \ldots & \times & 0 & \ldots & 0 & \ddots & \vdots \\
\times & \vdots & \ddots & \ldots & \ddots & 0 & \ldots & 0 & \times \\
0 & \times & \vdots & \ddots & \ldots & \ddots & 0 & \ldots & 0 \\
\vdots & 0 & \ddots & \vdots & \ddots & \ldots & \ddots & 0 & \vdots \\
0 & \ldots & 0 & \ddots & \vdots & \ddots & \ldots & \ddots & 0 \\
\times & 0 & \ldots & 0 & \ddots & \vdots & \ddots & \ldots & \times \\
\vdots & \ddots & 0 & \ldots & 0 & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
\times & \ldots & \times & 0 & \ldots & 0 & \times & \ldots & \times
\end{pmatrix}$$

С помощью формулы Вудбери мы можем получить решение этой системы с линейной сложностью.

Пример 1. *Вид матрицы системы в случае* $n = 10$, $k = 5$:

$$\begin{pmatrix}
\times & \times & \times & 0 & 0 & 0 & 0 & \times & \times \\
\times & \times & \times & \times & 0 & 0 & 0 & 0 & \times \\
\times & \times & \times & \times & \times & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \times & \times & \times & \times & \times & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \times & \times & \times & \times & \times & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \times & \times & \times & \times & \times & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \times & \times & \times & \times & \times \\
\times & 0 & 0 & 0 & 0 & \times & \times & \times & \times \\
\times & \times & 0 & 0 & 0 & 0 & \times & \times & \times
\end{pmatrix}$$

4 Результаты

1. *Pull request* с исправлением ошибок, связанных с отсутствием непрерывности второй производной у кубического сплайн-интерполянта
2. *Pull request* с реализацией алгоритма периодической сплайн-интерполяции в базисе Б-сплайнов
3. Репозиторий с исходным кодом и промежуточными отчетами

Список литературы

[1] Carl de Boor, A Practical Guide to Splines. — 1978.

[2] William H. Press, Saul A. Teukolsky, William T. Vetterling and Brian P. Flannery, Numerical Recipes. — 2007 — Sec. 3.3.

[3] Tom Lyche and Knut Mørken, Spline Methods. — 2005.