report project scipy nov-feb

February 2021

1 Формулировка задачи

В предыдущей части работы было получено представление периодических сплайн-интерполянтов в степенном базисе. Теперь нужно получить такое же представление в другом пространстве - в базисе B-сплайнов:

$$\mathbb{S}_{k,\ t} = \left\{ \sum_{j=1}^{n} c_j B_{j,\ k} | c_j \in \mathbb{R},\ 1 \leq j \leq n \right\},$$

где n - число точек, по которым строится B-сплайн,
k - степень многочлена,
$t = (t_i)_{i=1}^{n+2k}$ - вектор узлов

2 B-сплайны

B-сплайны определяются рекурсивно:

$$B_{i,\ 0} = \begin{cases} 1, & \text{если } t_i \leq x < t_{i+1} \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

$$B_{i,\ k}(x) = \frac{x - t_i}{t_{i+k} - t_i} B_{i,\ k-1}(x) + \frac{t_{i+k+1} - x}{t_{i+k+1} - t_{i+1}} B_{i+1,\ k-1}(x),$$

В таком случае сплайн-функция:

$$S(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j B_{j,\ k}(x)$$

3 Вектор узлов на кольце

Составим вектор узлов из контрольных точек, добавив по k узлов слева и справа в соответствие с правилом:

$$
\begin{gathered}
t_0 = x_0 - (x_{n-1} - x_{n-k-1}) \\
t_1 = x_0 - (x_{n-1} - x_{n-k}) \\
\ldots \\
t_{k-1} = x_0 - (x_{n-1} - x_{n-2}) \\
t_k = x_0 \\
t_{k+1} = x_1 \\
\ldots \\
t_{n+k-1} = x_{n-1} \\
t_{n+k} = x_{n-1} + (x_1 - x_0) \\
t_{n+k+1} = x_{n-1} + (x_2 - x_0) \\
\ldots \\
t_{n+2k-1} = x_{n-1} + (x_k - x_0)
\end{gathered}
$$

4 Система уравнений на коэффициенты

Рассмотрим следующую СЛАУ

$$
\begin{cases}
S'(x_0) = S'(x_{n-1}) \\
\ldots \\
S^{(k-1)}(x_0) = S^{(k-1)}(x_{n-1}) \\
\hline
S(x_i) = y_i,\ i = 0,\ \ldots,\ n-1
\end{cases}
$$

5 Теорема о совпадающих коэффициентах

Пусть матрица коэффициентов устроена следующим образом:

$$
\left(\begin{array}{ccccccccccc}
a_{0,0} & a_{0,1} & \ldots & a_{0,k-1} & 0 & \ldots & 0 & -a_{0,0} & -a_{0,1} & \ldots & -a_{0,k-1} \\
a_{1,0} & a_{1,1} & \ldots & a_{1,k-1} & 0 & \ldots & 0 & -a_{1,0} & -a_{1,1} & \ldots & -a_{1,k-1} \\
 & & & & & \vdots & & & & & \\
a_{k-2,0} & a_{k-2,1} & \ldots & a_{k-2,k-1} & 0 & \ldots & 0 & -a_{k-2,0} & -a_{k-2,1} & \ldots & -a_{k-2,k-1} \\
\hline
a_{k-1,0} & a_{k-1,1} & \ldots & a_{k-1,k-1} & 0 & 0 & \ldots & & & & \\
0 & a_{k,1} & a_{k,2} & \ldots & a_{k,k} & 0 & 0 & \ldots & & & \\
0 & 0 & \ddots & \ddots & \ldots & \ddots & 0 & \ldots & & & \\
 & & & & & & \ddots & & & & \\
 & & & & \ldots & 0 & \ddots & \ddots & \ldots & \ddots & 0 \\
 & & & & & \ldots & 0 & a_{n+k-2,n-2} & a_{n+k-2,n-1} & \ldots & a_{n+k-2,n+k-2}
\end{array}\right)
$$

Сформулируем теорему:

Теорема 5.0.1. *Рассмотрим СЛАУ, записанную в матричном виде:*

$$Ac = b$$

где матрица A имеет вид 5, а вектор свободных членов b устроен следующим образом: в первых $k-1$ строках стоят 0, а на k и последней строках находятся одинаковые элементы

$$b = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b_{k-1} \\ b_k \\ \vdots \\ b_{n+k-3} \\ b_{k-1} \end{pmatrix}$$

тогда для решения данной СЛАУ справедливы следующие равенства.

$$\begin{cases} c_0 = c_{n-1} \\ c_1 = c_n \\ \vdots \\ c_{k-1} = c_{n+k-2} \end{cases}$$

Доказательство. Выпишем первые k уравнений исходной системы, а также последнее уравнение:

$$\begin{cases} a_{0,0}c_0 + a_{0,1}c_1 + \cdots + a_{0,k-1}c_{k-1} - a_{0,0}c_{n-1} - a_{0,1}c_n - \cdots - a_{0,k-1}c_{n+k-2} = 0 \\ a_{1,0}c_0 + a_{1,1}c_1 + \cdots + a_{1,k-1}c_{k-1} - a_{1,0}c_{n-1} - a_{1,1}c_n - \cdots - a_{1,k-1}c_{n+k-2} = 0 \\ \vdots \\ a_{k-2,0}c_0 + a_{k-2,1}c_1 + \cdots + a_{k-2,k-1}c_{k-1} - a_{k-2,0}c_{n-1} - a_{k-2,1}c_n - \cdots - a_{k-2,k-1}c_{n+k-2} = 0 \\ a_{k-1,0}c_0 + a_{k-1,1}c_1 + \cdots + a_{k-1,k-1}c_{k-1} = y_0 \\ a_{k-1,0}c_{n-1} + a_{k-1,n}c_1 + \cdots + a_{k-1,n+k-2}c_{n+k-2} = y_0 \end{cases}$$

Объединим последние два уравнения и сгруппируем каждом из полученных уравнений слагаемые:

$$\begin{cases} a_{0,0}(c_0 - c_{n-1}) + a_{0,1}(c_1 - c_n) + \cdots + a_{0,k-1}(c_{k-1} - c_{n+k-2}) = 0 \\ a_{1,0}(c_0 - c_{n-1}) + a_{1,1}(c_1 - c_n) + \cdots + a_{1,k-1}(c_{k-1} - c_{n+k-2}) = 0 \\ \vdots \\ a_{k-1,0}(c_0 - c_{n-1}) + a_{k-1,1}(c_1 - c_n) + \cdots + a_{k-1,k-1}(c_{k-1} - c_{n+k-2}) = 0 \end{cases}$$

Таким образом, получаем однородную СЛАУ относительно переменных $(c_0 - c_{n-1})$,$(c_1 - c_n), \ldots$,$(c_{k-1} - c_{n+k-2})$ с матрицей коэффициентов

$$\begin{pmatrix} a_{0,0} & a_{0,1} & \ldots & a_{0,k-1} \\ a_{1,0} & a_{1,1} & \ldots & a_{1,k-1} \\ & & \ldots & \\ a_{k-1,0} & a_{k-1,1} & \ldots & a_{k-1,k-1} \end{pmatrix}$$

Получаем невырожденную матрицу однородной СЛАУ и, таким образом, единственным ее решение будет нулевой вектор:

$$\begin{cases} c_0 - c_{n-1} = 0 \\ c_1 - c_n = 0 \\ \vdots \\ c_{k-1} - c_{n+k-2} = 0 \end{cases}$$

Следовательно, имеем требуемое равенство коэффициентов.

Докажем теперь, что матрица системы 4 имеет вид 5. Для этого докажем почленное равенство $k-1$ производной сплайн-функции $S(x)$ в крайних точках: $D^r S(x_0) = D^r S(x_{n-1})$. Запишем r-ую производную сплайн-функции $S(x)$ через матрицы B-сплайнов:

$$D^r S(x) = \frac{k!}{(k-r)!}\mathbf{R}_1(x)\cdot\mathbf{R}_2(x)\cdot\dots\cdot\mathbf{R}_{k-r}(x)\cdot D\mathbf{R}_{k-r+1}\cdot\dots\cdot D\mathbf{R}_k\cdot\mathbf{c}_k,$$

$\mathbf{c}_k = (c_{\mu-k},\, c_{\mu-k+1},\, \dots,\, c_{\mu-1})^T$ - вектор коэффициентов, которые влияют на B-сплайн на интервале $[t_\mu,\, t_{\mu+1})$

Матрицы B-сплайнов и матрицы производных определяются следующим образом:
$x \in [t_\mu,\, t_{\mu+1})$

$$\mathbf{R}_i(x) = \begin{pmatrix} \frac{t_{\mu+1}-x}{t_{\mu+1}-t_{\mu+1-i}} & \frac{x-t_{\mu+1-i}}{t_{\mu+1}-t_{\mu+1-i}} & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{t_{\mu+2}-x}{t_{\mu+2}-t_{\mu+2-i}} & \frac{x-t_{\mu+2-i}}{t_{\mu+2}-t_{\mu+2-i}} \ddots & 0 & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \\ 0 & 0 & \dots & \frac{t_{\mu+i}-x}{t_{\mu+i}-t_\mu} & \frac{x-t_\mu}{t_{\mu+i}-t_\mu} & \end{pmatrix}$$

$$D\mathbf{R}_i(x) = D\mathbf{R}_i = \begin{pmatrix} \frac{-1}{t_{\mu+1}-t_{\mu+1-i}} & \frac{1}{t_{\mu+1}-t_{\mu+1-i}} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \frac{-1}{t_{\mu+i}-t_\mu} & \frac{1}{t_{\mu+i}-t_\mu} \end{pmatrix}$$

В случае периодического вектора узлов $x_0 \in [t_k,\, t_{k+1})$, $x_{n-1} \in [t_{k+n-1}, t_{k+n})$.

Рассмотрим $\mathbf{R}_i(x)$ $(\forall i = 1{,}2, \dots, k-r)$ и сравним поэлементно две матрицы: $\mathbf{R}_i(x_0)$ $(\mu = k)$ и $\mathbf{R}_i(x_{n-1})$ $(\mu = k+n-1)$. Рассмотрим j-ю строку и столбцы j и $j+1$ $(j = 1, \dots, i)$:

- $t_{k+j} - t_{k+j-i}$ и $t_{k+n-1+j} - t_{k+n-1+j-i}$
  1. $t_{k+j} = x_j$
     $t_{k+j-i} = x_0 - (x_{n-1} - x_{n-1-i+j}) \Rightarrow t_{k+j} - t_{k+j-i} = x_j - x_0 + x_{n-1} - x_{n-1-i+j}$
  2. $t_{k+n-1+j-i} = x_{n-1-i+j}$
     $t_{k+n-1+j} = x_{n-1} + (x_j - x_0) \Rightarrow t_{k+n-1+j} - t_{k++n-1+j-i} = x_{n-1} + x_j - x_0 - x_{n-1-i+j}$

  Доказали, что знаменатели равны, т.е. $t_{k+j} - t_{k+j-i} = t_{k+n-1+j} - t_{k+n-1+j-i}$

- $t_{k+j} - x_0$ и $t_{k+n-1+j} - x_{n-1}$
  1. $t_{k+j} - x_0 = x_j - x_0$
  2. $t_{k+n-1+j} - x_{n-1} = x_{n-1} + (x_j - x_0) - x_{n-1} = x_j - x_0 \Rightarrow$

  $\Rightarrow t_{k+j} - x_0 = t_{k+n-1+j} - x_{n-1}$

- $x_0 - t_{k+j-i}$ и $x_{n-1} - t_{k+n-1+j-i}$

    1. $x_0 - t_{k+j-i} = x_0 - (x_0 - (x_{n-1} - x_{n-1-i+j})) = x_{n-1} - x_{n-1-i+j}$
    2. $x_{n-1} - t_{k+n-1+j-i} = x_{n-1} - xn - 1 - i + j \Rightarrow$

    $\Rightarrow x_0 - t_{k+j-i} = x_{n-1} - t_{k+n-1+j-i}$

Таким образом, $\mathbf{R}_i(x_0)$ и $\mathbf{R}_i(x_{n-1})$ совпадают, значит совпадают и производные сплайн-функции: $D^r S(x_0) = D^r S(x_{n-1})$
Осталось доказать, что совпадают коэффициенты при c_i и c_{n-1+i} $(i = 0{,}1, \dots, k)$
Для x_0 вектор $\mathbf{c}_k = (c_0, c_1, \ \dots, c_{k-1})^T$, для x_{n-1} $\hat{\mathbf{c}}_k = (c_{n-1}, c_n, \ \dots, c_{n+k-2})^T$
Занулим все элементы $\mathbf{c}_k$ и $\hat{\mathbf{c}}_k$ кроме c_i и c_{n-1+i} соответственно $(i = 1{,}2, \ \dots, k)$
Так как $D^r S(x_0) = D^r S(x_{n-1})$, то коэффициенты при c_i и c_{n-1+i} равны.
В силу произвольности выбранных i и r, все $k-1$ производные $S(x)$ в x_0 и x_{n-1} совпадают почленно, а значит, матрица системы 4 действительно имеет вид 5. □

Воспользуемся полученной выше теоремой, чтобы преобразовать изначальную СЛАУ:
Уберем из системы все уравнения, в которые входят $c_{n-1}, \dots, c_{n+k-2}$ - повторяющиеся коэффициенты. Таким образом, получим марицу A' размера $n-1 \times n-1$:

$$\begin{pmatrix}
a_{0,0} & a_{0,1} & \dots & a_{0,k-1} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\
0 & a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,k} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \ddots & \dots & \dots & \ddots & 0 & \dots & 0 & 0 \\
0 & \dots & 0 & \ddots & \dots & \dots & \ddots & 0 & \dots & 0 \\
0 & 0 & \dots & 0 & \ddots & \dots & \dots & \ddots & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_{n-k-1,\ n-k-1} & a_{n-k-1,\ n-k} & \dots & \dots & a_{n-k-1,\ n-1} \\
a_{n-k,\ 0} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & a_{n-k,\ n-k} & \dots & \dots & a_{n-k,\ n-1} \\
a_{n-k+1,\ 0} & a_{n-k+1,\ 1} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_{n-k+1,\ n-k+1} & \dots & a_{n-k+1,\ n-1} \\
\vdots & \dots & \ddots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \ddots & \vdots \\
a_{n-1,\ 0} & a_{n-1,\ 1} & \dots & a_{n-1,\ k-2} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & a_{n-1,\ n-1}
\end{pmatrix}$$

и вектор свободных членов:

$$b' = \begin{pmatrix} b_{k-1} \\ b_k \\ \vdots \\ b_{n+k-3} \end{pmatrix}$$

В случае **нечетных** k первые $\frac{k-1}{2}$ неизвестных c_i можно перенести в конец вектора неизвестных. Тогда матрица A' останется ленточной, но появятся треугольные "блоки"в левом нижнем и правом верхних углах размера $\frac{k-1}{2}$ x $\frac{k-1}{2}$.
Таким образом, мы свели матрицу к почти диагональному виду и, с помощью формулы Вудбери, можем получить решение с линейной сложностью.