

report project scipy nov-feb

February 2021

1 Формулировка задачи

В предыдущей части работы было получено представление периодических сплайн-интерполянтов в степенном базисе. Теперь нужно получить такое же представление в другом пространстве - в базисе В-сплайнов:

$$\mathbb{S}_{k, t} = \left\{ \sum_{j=1}^n c_j B_{j, k} \mid c_j \in \mathbb{R}, 1 \leq j \leq n \right\},$$

где n - число точек, по которым строится В-сплайн,
 k - степень многочлена,
 $t = (t_i)_{i=1}^{n+2k}$ - вектор узлов

2 В-сплайны

В-сплайны определяются рекурсивно:

$$B_{i, 0} = \begin{cases} 1, & \text{если } t_i \leq x < t_{i+1} \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$
$$B_{i, k}(x) = \frac{x - t_i}{t_{i+k} - t_i} B_{i, k-1}(x) + \frac{t_{i+k+1} - x}{t_{i+k+1} - t_{i+1}} B_{i+1, k-1}(x),$$

В таком случае сплайн-функция:

$$S(x) = \sum_{j=1}^n c_j B_{j, k}(x)$$

3 Вектор узлов на кольце

Составим вектор узлов из контрольных точек, добавив по k узлов слева и справа в соответствие с правилом:

$$\begin{aligned}
t_0 &= x_0 - (x_{n-1} - x_{n-k-1}) \\
t_1 &= x_0 - (x_{n-1} - x_{n-k}) \\
&\dots \\
t_{k-1} &= x_0 - (x_{n-1} - x_{n-2}) \\
t_k &= x_0 \\
t_{k+1} &= x_1 \\
&\dots \\
t_{n+k-1} &= x_{n-1} \\
t_{n+k} &= x_{n-1} + (x_1 - x_0) \\
t_{n+k+1} &= x_{n-1} + (x_2 - x_0) \\
&\dots \\
t_{n+2k-1} &= x_{n-1} + (x_k - x_0)
\end{aligned}$$

4 Система уравнений на коэффициенты

Рассмотрим следующую СЛАУ

$$\begin{cases} S'(x_0) = S'(x_{n-1}) \\ \dots \\ S^{(k-1)}(x_0) = S^{(k-1)}(x_{n-1}) \\ \hline S(x_i) = y_i, i = 0, \dots, n-1 \end{cases}$$

5 Теорема о совпадающих коэффициентах

Пусть матрица коэффициентов устроена следующим образом:

$$\begin{pmatrix} a_{0,0} & a_{0,1} & \dots & a_{0,k-1} & 0 & \dots & 0 & -a_{0,0} & -a_{0,1} & \dots & -a_{0,k-1} \\ a_{1,0} & a_{1,1} & \dots & a_{1,k-1} & 0 & \dots & 0 & -a_{1,0} & -a_{1,1} & \dots & -a_{1,k-1} \\ & & & & \vdots & & & & & & \\ a_{k-2,0} & a_{k-2,1} & \dots & a_{k-2,k-1} & 0 & \dots & 0 & -a_{k-2,0} & -a_{k-2,1} & \dots & -a_{k-2,k-1} \\ \hline a_{k-1,0} & a_{k-1,1} & \dots & a_{k-1,k-1} & 0 & 0 & \dots & & & & \\ 0 & a_{k,1} & a_{k,2} & \dots & a_{k,k} & 0 & 0 & \dots & & & \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \dots & \ddots & 0 & \dots & & & \\ & & & & & \ddots & & & & & \\ & & & & \dots & 0 & \ddots & \ddots & \dots & \ddots & 0 \\ & & & & \dots & 0 & a_{n+k-2,n-2} & a_{n+k-2,n-1} & \dots & a_{n+k-2,n+k-2} \end{pmatrix}$$

Сформулируем теорему:

Теорема 5.0.1. *Рассмотрим СЛАУ, записанную в матричном виде:*

$$Ac = b$$

где матрица A имеет вид 5, а вектор свободных членов b устроен следующим образом: в первых $k - 1$ строках стоят 0, а на k и последней строках находятся одинаковые элементы

$$b = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b_{k-1} \\ b_k \\ \vdots \\ b_{n+k-3} \\ b_{k-1} \end{pmatrix}$$

тогда для решения данной СЛАУ справедливы следующие равенства.

$$\begin{cases} c_0 = c_{n-1} \\ c_1 = c_n \\ \vdots \\ c_{k-1} = c_{n+k-2} \end{cases}$$

Доказательство. Выпишем первые k уравнений исходной системы, а также последнее уравнение:

$$\begin{cases} a_{0,0}c_0 + a_{0,1}c_1 + \dots + a_{0,k-1}c_{k-1} - a_{0,0}c_{n-1} - a_{0,1}c_n - \dots - a_{0,k-1}c_{n+k-2} = 0 \\ a_{1,0}c_0 + a_{1,1}c_1 + \dots + a_{1,k-1}c_{k-1} - a_{1,0}c_{n-1} - a_{1,1}c_n - \dots - a_{1,k-1}c_{n+k-2} = 0 \\ \vdots \\ a_{k-2,0}c_0 + a_{k-2,1}c_1 + \dots + a_{k-2,k-1}c_{k-1} - a_{k-2,0}c_{n-1} - a_{k-2,1}c_n - \dots - a_{k-2,k-1}c_{n+k-2} = 0 \\ a_{k-1,0}c_0 + a_{k-1,1}c_1 + \dots + a_{k-1,k-1}c_{k-1} = y_0 \\ a_{k-1,0}c_{n-1} + a_{k-1,n}c_1 + \dots + a_{k-1,n+k-2}c_{n+k-2} = y_0 \end{cases}$$

Объединим последние два уравнения и сгруппируем каждым из полученных уравнений слагаемые:

$$\begin{cases} a_{0,0}(c_0 - c_{n-1}) + a_{0,1}(c_1 - c_n) + \dots + a_{0,k-1}(c_{k-1} - c_{n+k-2}) = 0 \\ a_{1,0}(c_0 - c_{n-1}) + a_{1,1}(c_1 - c_n) + \dots + a_{1,k-1}(c_{k-1} - c_{n+k-2}) = 0 \\ \vdots \\ a_{k-1,0}(c_0 - c_{n-1}) + a_{k-1,1}(c_1 - c_n) + \dots + a_{k-1,k-1}(c_{k-1} - c_{n+k-2}) = 0 \end{cases}$$

Таким образом, получаем однородную СЛАУ относительно переменных $(c_0 - c_{n-1}), (c_1 - c_n), \dots, (c_{k-1} - c_{n+k-2})$ с матрицей коэффициентов

$$\begin{pmatrix} a_{0,0} & a_{0,1} & \dots & a_{0,k-1} \\ a_{1,0} & a_{1,1} & \dots & a_{1,k-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k-1,0} & a_{k-1,1} & \dots & a_{k-1,k-1} \end{pmatrix}$$

Получаем невырожденную матрицу однородной СЛАУ и, таким образом, единственным ее решение будет нулевой вектор:

$$\begin{cases} c_0 - c_{n-1} = 0 \\ c_1 - c_n = 0 \\ \vdots \\ c_{k-1} - c_{n+k-2} = 0 \end{cases}$$

Следовательно, имеем требуемое равенство коэффициентов.

Докажем теперь, что матрица системы 4 имеет вид 5. Для этого докажем почленное равенство $k-1$ производной сплайн-функции $S(x)$ в крайних точках: $D^r S(x_0) = D^r S(x_{n-1})$. Запишем r -ую производную сплайн-функции $S(x)$ через матрицы В-сплайнов:

$$D^r S(x) = \frac{k!}{(k-r)!} \mathbf{R}_1(x) \cdot \mathbf{R}_2(x) \cdot \dots \cdot \mathbf{R}_{k-r}(x) \cdot D\mathbf{R}_{k-r+1} \cdot \dots \cdot D\mathbf{R}_k \cdot \mathbf{c}_k,$$

$\mathbf{c}_k = (c_{\mu-k}, c_{\mu-k+1}, \dots, c_{\mu})^T$ - вектор коэффициентов, которые влияют на В-сплайн на интервале $[t_{\mu}, t_{\mu+1})$

Матрицы В-сплайнов и матрицы производных определяются следующим образом:
 $x \in [t_{\mu}, t_{\mu+1})$

$$\mathbf{R}_i(x) = \begin{pmatrix} \frac{t_{\mu+1}-x}{t_{\mu+1}-t_{\mu+1-i}} & \frac{x-t_{\mu+1-i}}{t_{\mu+1}-t_{\mu+1-i}} & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{t_{\mu+2}-x}{t_{\mu+2}-t_{\mu+2-i}} & \frac{x-t_{\mu+2-i}}{t_{\mu+2}-t_{\mu+2-i}} & \dots & 0 & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{t_{\mu+i}-x}{t_{\mu+i}-t_{\mu}} & \frac{x-t_{\mu}}{t_{\mu+i}-t_{\mu}} & \end{pmatrix}$$

$$D\mathbf{R}_i(x) = D\mathbf{R}_i = \begin{pmatrix} \frac{-1}{t_{\mu+1}-t_{\mu+1-i}} & \frac{1}{t_{\mu+1}-t_{\mu+1-i}} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \frac{-1}{t_{\mu+i}-t_{\mu}} & \frac{1}{t_{\mu+i}-t_{\mu}} \end{pmatrix}$$

В случае периодического вектора узлов $x_0 \in [t_k, t_{k+1})$, $x_{n-1} \in [t_{k+n}, t_{k+n+1})$.

Рассмотрим $\mathbf{R}_i(x)$ ($\forall i = 1, 2, \dots, k-r$) и сравним поэлементно две матрицы: $\mathbf{R}_i(x_0)$ ($\mu = k$) и $\mathbf{R}_i(x_{n-1})$ ($\mu = k+n-1$). Рассмотрим j -ую строку и столбцы j и $j+1$ ($j = 1, \dots, i$):

- $t_{k+j} - t_{k+j-i}$ и $t_{k+n-1+j} - t_{k+n-1+j-i}$

1. $t_{k+j} = x_j$

$$t_{k+j-i} = x_0 - (x_{n-1} - x_{n-1-i+j}) \Rightarrow t_{k+j} - t_{k+j-i} = x_j - x_0 + x_{n-1} - x_{n-1-i+j}$$

2. $t_{k+n-1+j-i} = x_{n-1-i+j}$

$$t_{k+n-1+j} = x_{n-1} + (x_j - x_0) \Rightarrow t_{k+n-1+j} - t_{k+n-1+j-i} = x_{n-1} + x_j - x_0 - x_{n-1-i+j}$$

Доказали, что знаменатели равны, т.е. $t_{k+j} - t_{k+j-i} = t_{k+n-1+j} - t_{k+n-1+j-i}$

- $t_{k+j} - x_0$ и $t_{k+n-1+j} - x_{n-1}$

1. $t_{k+j} - x_0 = x_j - x_0$

2. $t_{k+n-1+j} - x_{n-1} = x_{n-1} + (x_j - x_0) - x_{n-1} = x_j - x_0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow t_{k+j} - x_0 = t_{k+n-1+j} - x_{n-1}$$

- $x_0 - t_{k+j-i}$ и $x_{n-1} - t_{k+n-1+j-i}$

$$1. x_0 - t_{k+j-i} = x_0 - (x_0 - (x_{n-1} - x_{n-1-i+j})) = x_{n-1} - x_{n-1-i+j}$$

$$2. x_{n-1} - t_{k+n-1+j-i} = x_{n-1} - x_{n-1-i+j} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_0 - t_{k+j-i} = x_{n-1} - t_{k+n-1+j-i}$$

Таким образом, $\mathbf{R}_i(x_0)$ и $\mathbf{R}_i(x_{n-1})$ совпадают, значит совпадают и производные сплайн-функции: $D^r S(x_0) = D^r S(x_{n-1})$

Осталось доказать, что совпадают коэффициенты при c_i и c_{n-1+i} ($i = 0, 1, \dots, k$)

Для x_0 вектор $\mathbf{c}_k = (c_0, c_1, \dots, c_k)^T$, для x_{n-1} $\hat{\mathbf{c}}_k = (c_0, c_1, \dots, c_k)^T$

Занулим все элементы \mathbf{c}_k и $\hat{\mathbf{c}}_k$ кроме c_i и c_{n-1+i} соответственно ($i = 1, 2, \dots, k$)

Так как $D^r S(x_0) = D^r S(x_{n-1})$, то коэффициенты при c_i и c_{n-1+i} равны.

В силу произвольности выбранных i и r , все $k-1$ производные $S(x)$ в x_0 и x_{n-1} совпадают почленно, а значит, матрица системы 4 действительно имеет вид 5. \square

Воспользуемся полученной выше теоремой, чтобы преобразовать изначальную СЛАУ:

Уберем из системы все уравнения, в которые входят $c_{n-1}, \dots, c_{n+k-2}$ - повторяющиеся коэффициенты. Таким образом, получим матрицу A' размера $n-1 \times n-1$:

$$\begin{pmatrix} a_{0,0} & a_{0,1} & \dots & a_{0,k-1} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,k} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \dots & \dots & \ddots & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \ddots & \dots & \dots & \ddots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \ddots & \dots & \dots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_{n-k-1, n-k-1} & a_{n-k-1, n-k} & \dots & \dots & a_{n-k-1, n-1} \\ a_{n-k, 0} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & a_{n-k, n-k} & \dots & \dots & a_{n-k, n-1} \\ a_{n-k+1, 0} & a_{n-k+1, 1} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_{n-k+1, n-k+1} & \dots & a_{n-k+1, n-1} \\ \vdots & \dots & \ddots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ a_{n-1, 0} & a_{n-1, 1} & \dots & a_{n-1, k-2} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & a_{n-1, n-1} \end{pmatrix}$$

и вектор свободных членов:

$$b' = \begin{pmatrix} b_{k-1} \\ b_k \\ \vdots \\ b_{n+k-3} \end{pmatrix}$$

В случае **нечетных** k первые $\frac{k-1}{2}$ неизвестных c_i можно перенести в конец вектора неизвестных. Тогда матрица A' останется ленточной, но появятся треугольные "блоки" в левом нижнем и правом верхних углах размера $\frac{k-1}{2}$ х $\frac{k-1}{2}$.

Таким образом, мы свели матрицу к почти диагональному виду и, с помощью формулы Вудбери, можем получить решение с линейной сложностью.