אלגברה 2 תרגיל 11 - פתרון

BGU, Spring 2014

June 13, 2014

1) יהי $T:\mathbb{C}^2\to\mathbb{C}^2$ אופרטור לינארי ע"י:

$$T(e_1)=(1,-2),T(e_2)=(i,-1)$$

יש למצוא את $T^\star$.

ראשית, נכתוב את המטריצה המייצגת של T:

$$[T]_E=\begin{pmatrix}1 & i\\ -2 & -1\end{pmatrix}$$

לכן, הצמוד של T הינו:

$$[T^\star]_E=\begin{pmatrix}1 & -2\\ -i & -1\end{pmatrix}$$

נציג את $T^\star$ באופן מפורש:

$$T^\star(x,y)=[T^\star]_E\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -2\\ -i & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=(x-2y,-ix-y)$$

2) יהי $T:\mathbb{C}^2\to\mathbb{C}^2$ אופרטור לינארי המוגדר על ידי $T(e_1)=(1+i,2),T(e_2)=(i,i)$. יש למצוא את $[T^\star]_E$ ולבדוק אם T ו-$T^\star$ מתחלפים בכפל.

נמצא את $[T^\star]_E$:

$$[T]_E = \begin{pmatrix} 1+i & i \\ 2 & i \end{pmatrix} \Longrightarrow [T^\star]_E = \begin{pmatrix} 1-i & 2 \\ -i & -i \end{pmatrix}$$

נבדוק אם $T \cdot T^\star = T^\star \cdot T$:

$$T \cdot T^\star \Longrightarrow [T \cdot T^\star]_E = [T]_E[T^\star]_E = \begin{pmatrix} 1+i & i \\ 2 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1-i & 2 \\ -i & -i \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 3+2i \\ 3-2i & 5 \end{pmatrix}$$

כעת, נבדוק את הצד השני של המשוואה:

$$T^\star \cdot T \Longrightarrow [T^\star \cdot T]_E = [T^\star]_E[T]_E = \begin{pmatrix} 1-i & 2 \\ -i & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1+i & i \\ 2 & i \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 6 & 1+3i \\ 1-3i & 2 \end{pmatrix}$$

האופרטור לא מתחלפים בכפל.

3) יהי V מרחב מכפלה פנימית ממימד סופי ו-$T : V \to V$ אופרטור לינארי.
יש להראות כי $Im(T^\star) = (Ker(T))^\perp$.
נוכיח הכלה דו כיוונית:
$Im(T^\star) \subseteq (Ker(T))^\perp$: יהי $v \in Im(T^\star)$ ויהי $u \in Ker(T)$. אם $v \in Im(T^\star)$ אז קיים $w \in V$ כך ש: $T^\star(w) = v$. נבדוק את המכפלה הפנימית $\langle u, v\rangle$:

$$\langle u, v\rangle = \langle u, T^\star(w)\rangle \overset{\text{מהגדרת הצמוד}}{=} \langle T(u), w\rangle \overset{u\in Ker(T)}{=} \langle 0, w\rangle = 0$$

מצאנו כי לכל $v \in Im(T^\star)$ ולכל $u \in Ker(T)$ המכפלה הפנימית $\langle u, v\rangle = 0$. לכן $v \in (Ker(T))^\perp$.
$(Ker(T))^\perp \subseteq Im(T^\star)$:

נשים לב כי לכל שני תת מרחבים U, W מתקיים:

$$W^{\perp} \subseteq U \iff \forall w \in W^{\perp} : w \in U \iff \left\{ w \notin U \to w \notin W^{\perp} \right\} \iff w \in U^{\perp} \to w \in W \iff U^{\perp} \subseteq W$$

לכן, נוכיח את ההכלה השקולה $(Im(T^{\star}))^{\perp} \subseteq Ker(T)$:
יהי $v \in (Im(T^{\star}))^{\perp}$. נרצה להראות ש-$\langle T(v), T(v) \rangle = 0$ כי אז ינבע ש-$T(v) = 0 \to v \in Ker(T)$. אז:

$$\langle T(v), T(v) \rangle = \langle v, T^{\star}(T(v)) \rangle \overset{v \perp Im(T^{\star}) \wedge T^{\star}(T(v)) \in Im(T^{\star})}{\Longrightarrow} \langle v, T^{\star}(T(v)) \rangle = 0$$

מצאנו כי $\langle T(v), T(v) \rangle = 0$ ולכן $v \in Ker(T)$.

4) יהי V מרחב מכפלה פנימית ממימד סופי ו-$T : V \to V$ אופרטור לינארי. יש להראות כי T הפיך אם ורק אם $T^{\star}$ הפיך וכי במקרה זה מתקיים $(T^{\star})^{-1} = (T^{-1})^{\star}$.
נוכיח את שני הכיוונים. מסעיף קודם ידוע כי $(Im(T^{\star}))^{\perp} = Ker(T)$.

$$T \text{ הפיך} \iff Ker(T) = \{0\} \iff (Im(T^{\star}))^{\perp} = \{0\} \iff Im(T^{\star}) = V \iff Ker(T^{\star}) = \{0\} \iff T^{\star} \text{ הפיך}$$

כעת, נראה כי $(T^{-1})^{\star} = (T^{\star})^{-1}$. יהיו $u, v \in V$.

$$\langle u, (T^{-1})^{\star}(v) \rangle = \langle T^{-1}(u), I(v) \rangle = \langle T^{-1}(u), T^{\star}(T^{\star})^{-1}(v) \rangle = \langle T(T^{-1}(u)), (T^{\star})^{-1}(v) \rangle \Longrightarrow$$

$$\langle I(u), (T^{\star})^{-1}(v) \rangle = \langle u, (T^{\star})^{-1}(v) \rangle$$

היות שהשוויון מתקיים לכל $u \in V$ אז $(T^{\star})^{-1} = (T^{-1})^{\star}$.

5) תהא $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$. יש להראות כי $det(A^\star) = \overline{det(A)}$.

מעל $\mathbb{C}$ כל מטריצה ניתנת לשילוש. נתבונן במטריצה המשולשית: $B = P^{-1}AP$. על האלכסון הראשי של B נמצאים הע״ע של A, נסמנם ב-λ_i. B משולשית, ולכן גם $B^\star$ משולשית. על האלכסון הראשי של $B^\star$ נמצאים $\overline{\lambda_i}$. נטען כי $\overline{\lambda_i}$ הם ע״ע של $A^\star$:

$$B = P^{-1}AP \iff B^\star = (P^{-1}AP)^\star \iff B^\star = P^\star A^\star (P^{-1})^\star$$

נבחין כי אם P הפיכה אז גם $P^\star$ הפיכה. זאת, כי פעולת השחלוף איננה משפיעה על הדטרמיננטה ופעולת ההצמדה היא חח״ע. בנוסף, הוכחה בכיתה כי אם $P^\star$ אז מתקיים $(P^{-1})^\star = (P^\star)^{-1}$. לכן, מצאנו $P^\star$ הפיכה כך שהמטריצה המשולשית $B^\star$ דומה ל-$A^\star$, ולכן האלכסון הראשי של $B^\star$ מכיל ערכים עצמיים של $A^\star$.

נותר להראות כי $det(B^\star) = \overline{det(B)}$. שתיהן מטריצות משולשיות, אז הדטרמיננטה שלהן היא מכפלת אברי האלכסון:

$$det(B^\star) = \prod_{i=1}^{n} b^\star_{i,i} = \prod_{i=1}^{n} \overline{b_{i,i}} = \overline{det(B)}$$

היות שלמטריצות דומות יש דטרמיננטה זהה, מתקיים:

$$det(A^\star) \overset{A^\star \simeq B^\star}{=} det(B^\star) = \overline{det(B)} \overset{A \sim B}{=} \overline{det(A)}$$

6) יהא $V = M_{n\times n}(\mathbb{C})$ עם המכפלה הפנימית $\langle A, B\rangle = Tr(AB^\star)$. תהא $P \in V$ מטריצה הפיכה ויהי אופרטור לינארי $T : V \to V$ המוגדר ע״י $T(A) = P^{-1}AP$. יש למצוא את $T^\star$.

מתקיים:

$$Tr(P^{-1}APB^\star) = \langle T(A), B\rangle = \langle A, T^\star(B)\rangle = Tr(A(T^\star(B))^\star)$$

בנוסף, היות שלכל A, B מתקיים $Tr(AB) = Tr(BA)$ אז:

$$Tr(P^{-1}APB^\star) = Tr(P^{-1}(APB^\star)) = Tr((APB^\star)P^{-1}) = Tr(A(PB^\star P^{-1})) \overset{\text{ראו שאלה 4}}{\Longrightarrow}$$

$$Tr(A((P^\star)^{-1}BP^\star)^\star) \Longrightarrow T^\star(B) = (P^\star)^{-1}BP^\star$$

7) יהיו V ו-W מרחבי מכפלה פנימית ותהא $T : V \to W$ טרנספורמציה לינארית. יש להראות כי לכל $v, u \in V$ מתקיים:

$$\langle v, u\rangle = \langle T(v), T(u)\rangle \Longleftrightarrow ||T(v)|| = ||v||$$

$\Leftarrow$אם $\langle v, u\rangle = \langle T(v), T(u)\rangle$ אז $||T(v)|| = ||v||$:
נבחר את u להיות v. ואז:

$$\langle v, v\rangle = \langle T(v), T(v)\rangle \Longrightarrow ||v||^2 = ||T(v)||^2 \Longrightarrow ||v|| = ||T(v)||$$

$\Rightarrow$אם $||T(v)|| = ||v||$ אז $\langle v, u\rangle = \langle T(v), T(u)\rangle$.
יהיו $u, v \in V$. מההנחה נובע כי $\langle w, w\rangle = \langle T(w), T(w)\rangle \to ||T(w)||^2 = ||w||^2$ לכל $w \in V$. נבחר את w להיות $w = v + u$ ואז:

$$\langle v + u, v + u\rangle = \langle T(v + u), T(v + u)\rangle \Longrightarrow$$

$$\langle v, v\rangle+\langle v, u\rangle+\langle u, v\rangle+\langle u, u\rangle = \langle T(v), T(v)\rangle+\langle T(v), T(u)\rangle+\langle T(u), T(v)\rangle+\langle T(u), T(u)\rangle \overset{\langle w,w\rangle=\langle T(w),T(w)\rangle}{\Longrightarrow}$$

$$\langle v, u\rangle+\langle u, v\rangle = \langle T(v), T(u)\rangle+\langle T(u), T(v)\rangle \Longrightarrow \langle v, u\rangle+\overline{\langle v, u\rangle} = \langle T(v), T(u)\rangle+\overline{\langle T(v), T(u)\rangle} \Longrightarrow$$

$$\Re\langle v, u\rangle = \Re\langle T(v), T(u)\rangle$$

הוכחנו כי מעל $\mathbb{R}$ השוויון אכן מתקיים. יש לבדוק מעל $\mathbb{C}$ באמצעות זהות הפולריזציה.