שיעור 1

- יהיו 10 תרגילים, חובה להגיש 9. 10% מהציון.
- יהיו 3 בחנים, ללא מועדי ב', כל אחד 30% מהציון.
- מייל יואב שגב: yoavs@math.bgu.ac.il

משרד: 58/215. שעות נוחות לקבלה:

יום ב' 10 והלאה

יום ד' לפני/אחרי השיעור

אופרטורים לינאריים

* הגדרה- אופרטור לינארי:

אופרטור לינארי הוא ט"ל $T:V\to V$.

* טענה:

יהי V מ"ו ממימד סופי מעל שדה F.

ויהי $T:V\to V$ אופרטור לינארי.

אזי התנאים הבאים שקולים:

1. $\ker(T)=\{0\}$
2. T חח"ע
3. T על

הוכחה:

$1 \Leftrightarrow 2$

שקילות זו נכונה לכל ט"ל. (נובע מלינאריות ט"ל).

$2 \Leftrightarrow 3$

$\Leftarrow$

נניח ש-T חח"ע.

[illegible] $\dim(V)=\dim(Im(T))$ ונובע שבהכרח $Im(T)=V$.

מאחר ש-T חח"ע, $ker(T)=\{0\}$.

לכן:

$$dim(ker(T))=0$$

לפי משפט המימד עבור ט"ל: $dim(V)=\begin{pmatrix}dim(ker(T))+\\+dim(Im(T))\end{pmatrix}$

לכן: $dim(V)=dim(Im(T))$

לפיכך $Im(T)=V$, כלומר לכל איבר ב-V יש מקור-T על.

$\longrightarrow$ (נראה ש-$3\leftarrow 1$)

נניח ש-T על.

אזי $Im(T)=V$, כלומר $dim(V)=dim(Im(T))$

לכן ממשפט המימד: $dim(V)=dim(V)+dim(ker(T))$

כלומר $dim(ker(T))=0$, כלומר $ker(T)=\{0\}$.

$\dashv$

* סימון:

נניח $T:V\to V$ אופרטור לינארי.

ויהי B בסיס סדור של V. המטריצה של T

ביחס לצוג הבסיסים B, המייצגת $[T]_B^B$ תסומן גם $[T]_B$

* למה:

יהי $T:V\to V$ א"ל, ויהי B בסיס סדור של V.

אזי:

א) T הפיך (חח"ע ועל) אמ"ם $[T]_B$ הפיכה.

ב) אם T הפיך אזי: $[T^{-1}]_B=([T]_B)^{-1}$

הוכחה:

נזכיר שהדרגה (rank) של מטריצה כלשהי A (לאו דווקא ריבועית), $rank(A)$ / $r(A)$, זהו מימד מרחב השורות שלה, השווה למימד מרחב העמודות שלה.

כמו כן, באלגברה 1 הוכחנו שהדרגה של ט"ל שווה לדרגה של המטריצה שלה ביחס לזוג בסיסים סדורים כלשהם.

כלומר אם $S:V\to W$ ט"ל, B בסיס סדור של V, C בסיס סדור של W, אזי:

$$rank(S)=r\left([S]_C^B\right)$$

ונזכור ש: $rank(S)=\dim(Im(S))$.

הוכחת חלק א':

T הפיך $\Leftrightarrow$ T על $\Leftrightarrow Im(T)=V \Leftrightarrow \dim(Im(T))=\dim(V)=n$

$\Leftrightarrow r([T]_B)=n$. כנדרש.

ונזכור ש- $[T]_B$ מטריצה $n\times n$. מטריצה $n\times n$ הפיכה אמ"מ דרגתה n.

לכן נקבל: T הפיך $\Leftrightarrow r([T]_B)=n \Leftrightarrow [T]_B$ הפיכה.

הוכחת חלק ב':

נניח ש- T הפיך. נתבונן בהרכבה: $V\xrightarrow{T}V\xrightarrow{T^{-1}}V$

ממשפט מאלגברה 1 נקבל:

$$[T\circ T^{-1}]_B^B=[T^{-1}]_B^B\cdot[T]_B^B$$

ולכן:

$$\underbrace{[I]_B}_{=I_n}=[T^{-1}]_B\cdot[T]_B \leftarrow \text{(המטריצה של העתקת הזהות)}$$

(n מימד V)

לפיכך: $[T^{-1}]_B=\left([T]_B\right)^{-1}$

המשפט הבא מתייחס לקשר בין $[T]_B$ ו- $[T]_C$
כאשר $T:V\to V$, ו- B,C שני בסיסים סדורים של V.

* משפט:

יהי $T:V\to V$ אופרטור. אזי:

(א) אם B,C שני בסיסים סדורים של V, אזי:

כאשר $P=[I]_B^C$ $\qquad$ $[T]_C = P^{-1}[T]_B P$

(ב) אם P מטריצה הפיכה $n\times n$ $(\dim(V)=n)$,
אזי קיים בסיס סדור D של V כך ש:

$$P^{-1}[T]_B P = [T]_D$$

הוכחה:

הוכחת א':

$$P^{-1}[T]_B P = [I]_C^B[T]_B[I]_B^C = [I\circ T]_C^B[I]_B^C =$$

$$= [T]_C^B[I]_B^C = [T\circ I]_C = [T]_C$$

הוכחת ב':

נסתמך על העובדה הבאה:

אם V מ"ו ממימד n מעל F, ואם $B=\{v_1,\dots,v_n\}$
בסיס סדור של V, אזי ההעתקה $V\to F^n$ שמוגדרת:

$$(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\to(\alpha_1 v_1+\dots+\alpha_n v_n)$$

מגדירה איזומורפיזם מ-F^n ל-V.

בחלק ב' נתונה מטריצה הפיכה P, $n\times n$.

מאחר ש-P הפיכה, עמודותיה בת"ל.

[illegible] בסיס של F^n.

נגדיר בסיס של V ע"י:

$$w_1 = p_{11}v_1 + p_{21}v_2 + \dots + p_{n1}v_n$$
$$w_2 = p_{12}v_1 + p_{22}v_2 + \dots + p_{n2}v_n$$
$$\vdots$$
$$w_n = p_{1n}v_1 + p_{2n}v_2 + \dots + p_{nn}v_n$$

מכיוון ש-(*) איזומורפיזם מ-F^n ל-V, נקבל ש-$(w_1,\dots,w_n)$ בסיס סדור של V. נגדיר:

$$D = (w_1,\dots,w_n)$$

אזי: $P = [I]_B^D$

ולכן לפי חלק א', $P^{-1}[T]_B P = [T]_D$.

$\vdash$