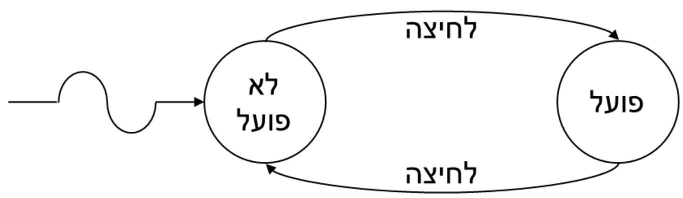
אוטומטים, הרצאה 1

בעיות כריעות ולא-כריעות

נדון במספר בעיות כלליות אשר התשובה להן בכל מקרה פרטי היא אחת מתוך שתי אפשרויות, למשל "כן" ו"לא"

דוגמא

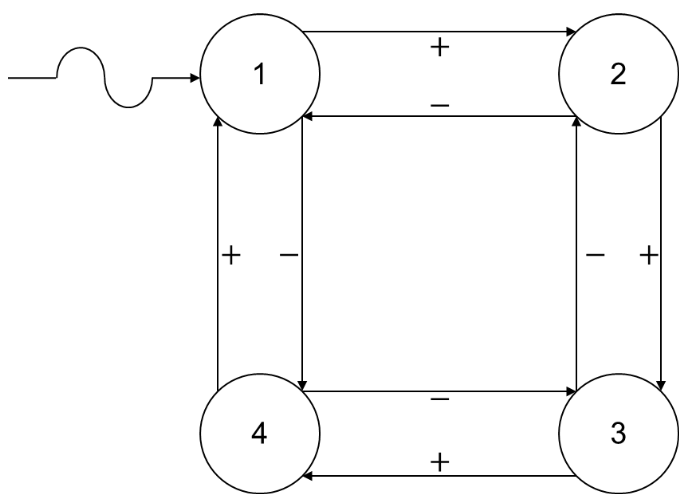
לחצן ההדלקה של מחשב מעביר אותו ממצב אי-פעולה למצב פעולה, ולהיפך. מתחילים במצב אי-פעולה.
בהינתן סדרת לחיצות, האם בסוף המחשב פועל?
ניתן לתאר את המערכת בעזרת הדיאגרמה הבאה:



בהינתן סדרת לחיצות, נעבור ממצב למצב לפי הדיאגרמה.
כאשר מסיימים לעבור על הסדרה, יודעים אם המכשיר פועל או לא לפי המצב אליו הגענו.
קל לאפיין את הסדרות המובילות למצב פעולה: אילו הסדרות באורך אי-זוגי

דוגמא

ברדיו מסויים 4 ערוצים. בורר הערוצים מורכב ממתג העלאה ומתג הורדה. מתחילים בערוץ 1.
כיצד נקבע אם סדרה מסויימת של פעולות מעבירה אותנו לאחד הערוצים 3 או 4 או לא?
ניתן לתאר את המערכת בעזרת הדיאגרמה הבאה:



עבור הקלט: + − + + + + − נגיע לערוץ 4, ולכן התשובה היא כן.

סדרה של פעולות מקיימת את התכונה הנידונה אם כאשר מתחילים במצב "1" ומתקדמים לפי חיצי ה+ וה− מגיעים בסוף התהליך לאחד המצבים "3" או "4".
אילו הן הסדרות בהן ההפרש בין מספר ה+ למספר ה− הוא 2 או 3 מודולו 4

דוגמא
בהינתן סדרה סופית של אותיות, או תווים כלשהם, יש לקבוע האם היא פלינדרומית, דהיינו שווה לסדרה המתקבלת ממנה ע"י היפוך סדר האותיות (כגון "הלילה")
ניתן למשל להכניס את איברי הסדרה למחסנית ואז לעבור במקביל על איברי הסדרה ועל איברי המחסנית (הנשלפים בסדר הפוך מהמקורי). אם כל האיברים המתאימים שווים- הסדרה פלינדרומית, ואם לא- היא אינה כזו.
נציין כי במקרה זה לא ברור קיום "מכונה" פשוטה, כמו בדוגמאות הקודמות, העוברת על איברי הסדרה וקובעת לבסוף אם היא פלינדרומית או לא.

דוגמא
בהינתן מספר טבעי, קבע אם הוא ראשוני או לא
אם המספר הוא n, ניתן לבדוק את התחלקותו בכל אחד מהמספרים מ2 עד $n-1$, אם הוא מתחלק באחד מהם- הוא אינו ראשוני, אחרת- הוא ראשוני.
נעיר כי ברור שאלגוריתם זה הוא מאוד בזבזני, אך נקודה זו אינה חשובה מבחינתנו.
נעיר גם כי ניתן לנסח את האלגוריתם במונחי סדרת ספרות המגדירה את המספר ע"י כך שרושמים אלגוריתמים לפעולות אריתמטיות שונות על מספרים הנתונים כסדרת ספרות מבלי להתייחס אליהם ישירות כמספרים. (זה בעצם מה שעושה המחשב)

יש בעיות רבות שהתשובה למקרים פרטיים שלהן מסובכת יותר- בעלת יותר משתי אפשרויות. ההבדל עינו עקרוני מכיוון שתשובה מסובכת ניתן לרשום במונחי מספר תשובות פשוטות

דוגמא
בהינתן מספר טבעי, מצא את פירוקו למכפלת ראשוניים
ניתן לעבור על המספרים מ2 עד $n-1$. בכל פעם בודקים התחלקות. אם יש התחלקות מצרפים את המחלק לרשימת הגורמים הראשוניים שמצאנו, וממשיכים לבדוק התחלקות עבור מנת המספר בגורם שמצאנו. (אם המספר אינו ראשוני, נסיים לפני שנגיע ל$n-1$).

דוגמא
נתון מספר סופי של סוגי אריחים בעלי צורה של ריבוע יחידה בגודל 1, עם כמות אינסופית מכל סוג. יש להניח את האריחים זה ליד זה באופן שכל המישור ירוצף באשר נתונים אילוצים לגבי זוגות האריחים שמותר להניח זה לצד זה ומעל זה.
בהינתן מערכת ריצוף, קבע אם היא מאפשרת ריצוף של כל המישור
<u>משפט</u>
אין אלגוריתם הקובע, בהינתן מערכת ריצוף, אם היא מאפשרת ריצוף של כל המישור

דוגמא
משוואה דיובנטית היא משוואה פולינומיאלית בה המקדמים שלמים ועל על המשתנים לקבל ערכים שלמים.
לדוגמא:

$$15x + 259y = 8131$$
$$28x - 432y = 158$$
$$x^2 + y^2 = 4680$$
$$x^2 + y^2 = 300$$
$$x^{73} + y^{73} = z^{73}$$

למשוואה הראשונה והשלישית יש פתרונות, לשניה ולרביעית אין לחמישית יש רק פתרונות טריויאליים
<u>משפט</u>
אין אלגוריתם אשר בהינתן משוואה דיופנטית קובע אם יש לה פתרון או לא

בעיה נקראת ***כריעה*** אם קיים אלגוריתם לפתרונה ו***אי-כריעה*** אחרת.
בהמשך הקורס יתברר כיצד ניתן להוכיח אי-כריעות של בעיות.
לגבי בעיות כריעות נתעניין לדעת איזה "חוזק" של "מכונה" דרוש לפתרון.

אלפביתים ושפות

אלפבית הינו קבוצה סופית לא-ריקה. איברי הקבוצה נקראים ***אותיות***, ***תווים*** או ***סימנים***.
מילה או ***מחרוזת*** היא סדרה סופית של אברי האלפבית

דוגמאות

האלפבית העברי, בין 22 אותיות (או 27)
האלפבית האנגלי, בין 26 אותיות (או 52)
האלפבית העשרוני, $\{0,1,\cdots,9\}$
האלפבית הבינרי, $\{0,1\}$
הקבוצה $\{+,-,\times,/,(,)\}$

בד"כ נסמן אלפבית בΣ