1 Розв'язок 1

Дано матрицю третього порядку, знайти її обернену

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Знайдемо визначник матриці

det(A) = 2*3*2 + 0*1*1 + 1*1*2 - 2*3*1 - 0*1*2 - 1*1*2 = 6

Далі знайдемо алгебраїчне доповнення матриці (елементи союзної матриці)

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3*2-1*1 = 5$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -(1*2-1*1) = -1$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1*1-3*1 = -2$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -(0*2-1*2) = 2$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2*2-1*2 = 2$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -(2*1-0*1) = -2$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 0*1-2*3 = -6$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -(2*1-2*1) = 0$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 2*3-0*1 = 6$$

Далі запишемо матрицю союзу матрицю:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \\ -6 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Обернемо її:

$$\tilde{A}^T = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -6 \\ -1 & 2 & 0 \\ -2 & -2 & 6 \end{pmatrix}$$

Підставляємо все у вище вказану формулу:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \tilde{A}^T = \frac{1}{6} * \begin{pmatrix} 5 & 2 & -6 \\ -1 & 2 & 0 \\ -2 & -2 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{6} & \frac{1}{3} & -1 \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix}$$

Отриманий результат перевіряємо за формулою:

$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{5}{6} & \frac{1}{3} & -1 \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 \cdot \frac{5}{6} + 0 \cdot \left(-\frac{1}{6}\right) + 2 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) & 2 \cdot \frac{1}{3} + 0 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) + 2 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) & 2 \cdot (-1) + 0 \cdot 0 + 2 \cdot 1 \\ 1 \cdot \frac{5}{6} + 3 \cdot \left(-\frac{1}{6}\right) + 1 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) & 1 \cdot \frac{1}{3} + 3 \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) & 1 \cdot (-1) + 3 \cdot 0 + 1 \cdot 1 \\ 1 \cdot \frac{5}{6} + 1 \cdot \left(-\frac{1}{6}\right) + 2 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) & 1 \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot \frac{1}{3} + 2 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) & 1 \cdot (-1) + 1 \cdot 0 + 2 \cdot 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{5}{6} + 0 - \frac{2}{3} & \frac{2}{3} + 0 - \frac{2}{3} & (-2) + 0 + 2 \\ \frac{5}{6} - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} & \frac{1}{3} + 1 - \frac{1}{3} & (-1) + 0 + 1 \\ \frac{5}{6} - \frac{1}{6} - \frac{2}{3} & \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{2}{3} & (-1) + 0 + 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Отже відповідь правильна

2 Розв'язок 2

Дано матрицю третього порядку, знайти її обернену

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Обчислимо визначник (детермінант) даної матриці

det(A) = 2*3*2+4*0*2+1*1*1-1*3*2-2*0*1-4*1*2= -1

Далі знайдемо алгебраїчне доповнення матриці (елементи союзної матриці)

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3*2-0*1 =6$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -(1*2-0*2)= -2$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1*1-3*2 = -5$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -(4*2-1*1) = -7$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 2*2-1*2 = 2$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -(2*1-4*2) = 6$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 4*0-1*3 = -3$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -(2*0-1*1) = 1$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 2*3-4*1 = 2$$

Запишемо союзну матрицю:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 6 & -2 & -5 \\ -7 & 2 & 6 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Обернемо її:

$$\tilde{A}^T = \begin{pmatrix} 6 & -7 & -3 \\ -2 & 2 & 1 \\ -5 & 6 & 2 \end{pmatrix}$$

Маючи всі потрібні елементи знайдемо обернену матрицю:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \tilde{A}^T = \frac{1}{-1} \begin{pmatrix} 6 & -7 & -3 \\ -2 & 2 & 1 \\ -5 & 6 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 7 & 3 \\ 2 & -2 & -1 \\ 5 & -6 & -2 \end{pmatrix}$$

Перевіримо чи $A \cdot A^{-1} = E$

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} -6 & 7 & 3 \\ 2 & -2 & -1 \\ 5 & -6 & -2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2\cdot(-6)+4\cdot 2+1\cdot 5 & 2\cdot 7+4\cdot(-2)+1\cdot(-6) & 2\cdot 3+4\cdot(-1)+1\cdot(-2) \\ 1\cdot(-6)+3\cdot 2+0\cdot 5 & 1\cdot 7+3\cdot(-2)+0\cdot(-6) & 1\cdot 3+3\cdot(-1)+0\cdot(-2) \\ 2\cdot(-6)+1\cdot 2+2\cdot 5 & 2\cdot 7+1\cdot(-2)+2\cdot(-6) & 2\cdot 3+1\cdot(-1)+2\cdot(-2) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -12+8+5 & 14-8-6 & 6-4-2 \\ -6+6+0 & 7-6+0 & 3-3+0 \\ -12+2+10 & 14-2-12 & 6-1-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E$$

Відповідь: $A^{-1} = \begin{pmatrix} -6 & 7 & 3 \\ 2 & -2 & -1 \\ 5 & -6 & -2 \end{pmatrix}$

3 Розв'язок 3

Дано матрицю третього порядку, знайти її обернену

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Знайдемо визначник матриці

det(A) = 2*2*3 + 3*1*3 + 2*1*1 - 2*2*3 - 2*1*2 - 3*1*3 = 0

Знайдений det(A) = 0, отже дана матриця немає оберненої.

4 Розв'язок

Дано матрицю третього порядку, знайти її обернену

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ця матриця та її обернена однакові, але давайте це перевіримо.

Знайдемо визначник матриці

det(A) = 1

Далі знайдемо алгебраїчне доповнення матриці (елементи союзної матриці)

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} =0$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

Запишемо союзну матрицю:

$$\tilde{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Обернемо її:

$$\tilde{\mathbf{A}}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Маючи всі потрібні елементи знайдемо обернену матрицю:

$$\mathrm{A}^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\tilde{\mathrm{A}}^{\mathrm{T}} = \frac{1}{1}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Перевіряти цю матрицю матицю немає сенсу. Відповідь правильна.

5 Розв'язок

Дано матрицю четвертого порядку, знайти її обернену

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & -1 \\ -3 & 3 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & -2 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Знайдемо визначник матриці

Для обрахунку визначника потрібно звести матрицю до верхньої трикутної форми за допомогою елементарних перетворень.

$$\mathbf{det(A)} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 & -1 \\ -3 & 3 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & -2 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} =$$

до 2-го рядка додаємо 1-ий рядок, помножений на 0.5; від 3-го рядка віднімаємо 1-ий рядок, помножений на 0.5; від 4-го рядка віднімаємо 1-ий помножений на 0.5

$$= \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 & -1 \\ 0 & 4.5 & 9 & -1.5 \\ 0 & 1.5 & 2 & -1.5 \\ 0 & -1.5 & -2 & 2.5 \end{vmatrix} =$$

Від 3-го рядка віднімаємо 2-ий рядок, помножений на $\frac{1}{3}$; до 4-го рядка додаємо 2-ий рядок, помножений на $\frac{1}{3}$

$$= \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 & -1 \\ 0 & 4.5 & 9 & -1.5 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} =$$

До 4-го рядка додаємо 3-ий рядок, помножений на 1

$$= \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 & -1 \\ 0 & 4.5 & 9 & -1.5 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2\cdot 4.5\cdot(-1)\cdot 1 = -9$$

РГР 3 етап Гринів,.docx - Word

Далі знайдемо алгебраїчне доповнення матриці (елементи союзної матриці)

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & -2 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 18$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} -3 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & -2 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -36$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} -3 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -18$$

$$A_{14} = (-1)^{1+4} \cdot \begin{vmatrix} -3 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -9$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -4$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 1 & 4 & -2 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 4$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 3$$

$$A_{24} = (-1)^{2+4} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 3 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -21$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & -2 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 39$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -3 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 18$$

$$A_{34} = (-1)^{3+4} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -3 & 3 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 9$$

$$A_{41} = (-1)^{4+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 3 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & -2 \end{vmatrix} = 12$$

$$A_{42} = (-1)^{4+2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 4 & -1 \\ -3 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 2 \end{vmatrix} = -21$$

$$A_{43} = (-1)^{4+3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -3 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \end{vmatrix} = -9$$

$$A_{44} = (-1)^{4+4} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -3 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = -9$$

Запишемо союзну матрицю:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 18 & 36 & 18 & 9 \\ 4 & 4 & -3 & 0 \\ -21 & -39 & 18 & -9 \\ -12 & -21 & 9 & -9 \end{pmatrix}$$

Обернемо її:

$$\tilde{A}^T = \begin{pmatrix} 18 & 4 & -21 & -12 \\ 36 & 4 & -39 & -21 \\ -18 & -3 & 18 & 9 \\ 9 & 0 & -9 & -9 \end{pmatrix}$$

Маючи всі потрібні елементи знайдемо обернену матрицю:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\tilde{A}^T = \frac{1}{-9}\begin{pmatrix} 18 & 4 & -21 & -12 \\ 36 & 4 & -39 & -21 \\ -18 & -3 & 18 & 9 \\ 9 & 0 & -9 & -9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -\frac{4}{9} & \frac{7}{3} & \frac{4}{3} \\ -4 & -\frac{4}{9} & \frac{13}{3} & \frac{7}{3} \\ 2 & \frac{1}{3} & -2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Відповідь: $\begin{pmatrix} -2 & -\frac{4}{9} & \frac{7}{3} & \frac{4}{3} \\ -4 & -\frac{4}{9} & \frac{13}{3} & \frac{7}{3} \\ 2 & \frac{1}{3} & -2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Страница 12 из 13 Число слов: 933 украинский