Міністерство освіти і науки України
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
“КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ”

Кафедра прикладної математики

ЕТАП №2

«Вивчення методу розв’язування задачі
РОЗРАХУНКОВО-ГРАФІЧНОЇ РОБОТИ»

з дисципліни: «Програмування» 1-й семестр
на тему: «Програма обчислення визначених
інтегралів за квадратурними формулами (формули Сімпсона)»

Виконав: Хавронюк Богдан Андрійович
Група КМ-02, факультет ФПМ

Керівник: Олефір О.С.

Київ-2020

Програма обчислення визначених інтегралів за квадратурними формулами (формули Сімпсона)

Інтегра́л — центральне поняття інтегрального числення, узагальнення поняття суми для функції, визначеній на континуумі. виникає під час розв'язування задач про знаходження площі кривої, знаходження пройденого шляху при нерівномірному русі та інших подібних задачах.

Ви́значений інтегра́л — в математичному аналізі це інтеграл функції з вказаною областю інтегрування. визначений інтеграл є неперервним функціоналом, лінійним по підінтегральним функціям і адитивним по області інтегрування. у найпростішому випадку область інтегрування — це відрізок числової осі. геометричний зміст визначеного інтеграла — це площа криволінійної фігури (криволінійної трапеції), обмеженої віссю абсцис, двома вертикалями на краях відрізка і кривою графіка функції.

Чисельне інтегрування функцій

Якщо для визначеної і неперервної на проміжку [a;b] функції f(x) відома первісна F(x), то визначений інтеграл $\int_a^b f(x)dx$ можна обчислити за формулою Ньютона-Лейбніца: $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$

Проте в багатьох випадках обчислити визначений інтеграл за цією формулою неможливо, оскільки знайти первісну F(x) через елементарні функції, як правило, не вдається. Навіть тоді, коли її можна визначити, вона часто має досить складний і незручний для обчислень вигляд. Крім того, на практиці підінтегральна функція часто задається таблично і в такому разі аналітичні методи просто незастосовні. У цих випадках для обчислення визначених інтегралів користуються чисельними методами. Чисельне інтегрування – це обчислення значення визначеного інтеграла через ряд значень підінтегральної функції та її похідних.

Оскільки знаходження числового значення визначеного інтеграла $\int_a^b f(x)dx$ (якщо $f(x)>0$) з геометричного погляду можна тлумачити як обчислення площі криволінійної трапеції (її квадратури), обмеженої віссю Ох, прямими $x=a$, $x=b$, і лінією $y=f(x)$, то формули для наближеного обчислення визначеного інтеграла називаються квадратурними.

Для побудови квадратурних формул можна використати інтерполяційний многочлен, а саме: підінтегральну функцію $y=f(x)$ на відрізку інтегрування замінити інтерполяційним многочленом $P_n(x)$ і вважати, що інтеграл від інтерполяційного многочлена наближено дорівнює інтегралу від заданої функції $\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b P_n(x)dx$

Якщо для інтерполяційного многочлена відомий залишковий член $R_n(x)=f(x)-P_n(x)$, то можна дістати вираз для залишкового члена квадратурної формули $R(f)=\int_a^b f(x)dx-\int_a^b P_n(x)dx=\int_a^b R_n(x)dx$, тобто залишковий член квадратурної формули дорівнює інтегралу від залишкового члена інтерполяційного многочлена.

Квадратурні формули Ньютона-Котеса : Розглянемо інтерполяційні квадратурні формули, в яких вузли x_k Î[a;b] рівновіддалені. Такі формули називаються формулами Ньютона-Котеса. Їх вперше розглянув Ньютон, а коефіцієнти для них при $n\leq 9$ знайшов Котес. Дослідження таких, формул показали, що коли $n\geq 10$, то серед коефіцієнтів A_k є від'ємні і $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}|A_k|=\infty$. Отже, при великих n похибка квадратурної суми буде великою навіть при малих похибках в значеннях функції $f(x_k)$. Тому на практиці квадратурні формули Ньютона-Котеса для великих n не використовуються. Розглянемо частинні випадки формул Ньютона-Котеса.

Вважатимемо, що для формул Ньютона-Котеса, які містять не менш як два доданки ($n \geq 1$), вузли x_k розміщено такі що $x_0=a$, $x_n=b$, $x_{k+1}=x_k+h$ ($k=0,1,\ldots,n-1$).

Крок h в даному випадку дорівнює $h=\frac{b-a}{n}$. У випадку $n=0$ за єдиний вузол x_0 можна взяти будь-яку точку на відрізку $[a;b]$.

Квадратурна формула Сімпсона. Розглянемо ще один приклад квадратурної формули Ньютона-Котеса, яка широко використовується на практиці і називається квадратурною формулою парабол, або формулою Сімпсона. Цю формулу дістанемо з (2), (3), якщо $n=2$. Вузлами тут є точки $x_0=a$, $x_1=\frac{a+b}{2}$, $x_2=b$. Знайдемо коефіцієнти формули.

$$A_0=\int_a^b \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x-x_0)0{,}5(a-b)(a-b)}dx=\frac{b-a}{6};$$

$$A_0=\int_a^b \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x-x_1)0{,}5(b-a)0{,}5(a-b)}dx=\frac{2(b-a)}{3};$$

$$A_0=\int_a^b \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x-x_2)(b-a)0{,}5(b-a)}dx=\frac{b-a}{6}.$$

Таким чином, формула Сімпсона має вигляд:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6}\left(f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right) \quad (8)$$

У випадку додатної функції f(x) формула (8), як бачимо, зводиться до того, що інтеграл $\int_a^b f(x)dx$ наближено замінюється площею фігури; яка обмежена віссю Ох, прямими $x=a$ і $x=b$ і параболою, що проходить через точки $(a;f(a))$, $\left(\frac{a+b}{2};f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right)$, $(b;f(b))$.

Узагальнена формула Сімпсона. Якщо відрізок $[a;b]$ великий, то його ділять на парну кількість $2m$ рівних частин: $[x_0;x_1]$, $[x_1;x_2]$, ..., $[x_{2m-1};x_{2m}]$ завдовжки $h=\frac{b-a}{2m}$ (тут $x_0=a$, $x_{2m}=b$) і до кожних двох сусідніх відрізків завдовжки

$2h$ застосовують формулу Сімпсона (8). Тоді

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=1}^{m} \int_{x_{2i-2}}^{x_{2i}} f(x)dx \approx \sum_{i=1}^{m} \frac{h}{3}\left(f(x_{2i-2})+4f(x_{2i-1})+f(x_{2i})\right)$$

або

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}\left(y_0+4y_1+2y_2+4y_3+\ldots+2y_{2m-2}+4y_{2m-1}+y_{2m}\right) \qquad (9)$$

де $y_i=f(x_i)$, $h=\frac{b-a}{2m}$. Формула (9) називається узагальненою формулою Сімпсона, або формулою парабол.

Оцінка похибки чисельного інтегрування

Однією з характеристик квадратурної формули є оцінка її залишкового члена. За нею можна визначити, яка з квадратурних формул точніша для даного класу функцій.

Гранична абсолютна похибка результату включає залишковий член квадратурної формули, похибку зумовлену неточністю значень підінтегральної функції і заключну похибку округлення. Якщо значення підінтегральної функції в усіх точках обчислюється з однаковою точністю, то похибка обчислень стала. Тоді похибка, зумовлена неточністю підінтегральної функції, обчислюється за формулою $\Delta f(b-a)$.

гранична абсолютна похибка значення інтеграла, обчисленого за квадратурною формулою Сімпсона , дорівнює **:** $\Delta_I=\frac{(b-a)h^4}{180}M_4+\Delta_f(b-a)+\Delta_0$

де, $M_2=\max_{x\in[a;b]}|f''(x)|$, $M_4=\max_{x\in[a;b]}|f^{(4)}(x)|$, Δ_0 – похибка остаточного округлення результату.

Іноді оцінити залишковий член квадратурної формули дуже важко або й неможливо, наприклад тоді, коли функцію задано таблично і аналітичний вираз її невідомий, або коли функцію задано складним аналітичним виразом і її похідні важко оцінити. Тоді використовують методи подвійного перерахунку, які передбачають двічі обчислювати означений інтеграл, але при різних h. Якщо результати практично рівні, то можна вважати, що обчислення проведено правильно і за остаточний результат взяти значення, обчислене при меншому кроці, а за похибку – різницю між одержаними значеннями.