Міністерство освіти і науки України
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
“КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ”

Кафедра прикладної математики

ЕТАП №3

«Вирішення контрольних прикладів
РОЗРАХУНКОВО-ГРАФІЧНОЇ РОБОТИ»

з дисципліни: «Програмування» 1-й семестр
на тему: «Програмаобчисленнявизначених
інтегралів за квадратурнимиформулами (формули Сімпсона)»

Виконав: Хавронюк Богдан Андрійович
Група КМ-02, факультет ФПМ

Керівник: Олефір О.С.

Київ-2020

контрольні приклади

Розглянемо для прикладу завдання :

Обчислити наближено визначений інтеграл за формулою Сімпсона з точністю до 0,001. Розбиття почати з двох відрізків $2n = 2$

$$I = \int_{1,2}^{2} \sqrt{1 + 2x^2 - x^3}\, dx$$

Починаємо вирішувати. Якщо у нас два відрізки розбиття, то вузлів буде на один більше: x_0, x_1, x_2 .І формула Сімпсона приймає вельми компактний вигляд:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}[f(x_0) + f(x_2) + 4f(x_1)]$$

Порахуємо крок розбиття : $h = \frac{(b-a)}{2n} = \frac{(2-1,2)}{2} = \frac{0,8}{2} = 0,4$

Заповнимо розрахункову таблицю :

i	0	1	2
x_i	1,2	1,6	2
$f(x_i)$	1,466970	1,422674	1

В результаті :

$$\int_{1,2}^{2} \sqrt{1 + 2x^2 - x^3}\, dx \approx \frac{0,4}{3}[1,466970 + 1 + 4 \cdot 1,422674] \approx 1,087689 \quad (I_2)$$

первинний результат отримано. Тепер подвоюємо кількість відрізків до чотирь-ох: $2n = 4$. Формула Сімпсона для даного розбиття приймає наступний вигляд:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}[f(x_0) + f(x_4) + 2f(x_2) + 4(f(x_1) + f(x_3))]$$

Порахуємо крок розбиття :

$$h = \frac{(b-a)}{2n} = \frac{(2-1,2)}{4} = \frac{0,8}{4} = 0,2$$

Заповнимо розрахункову таблицю :

i	0	1	2	3	4
x_i	1,2	1,4	1,6	1,8	2
$f(x_i)$	1,466970	1,475127	1,422674	1,283745	1

таким чином :

$$\int_{1,2}^{2}\sqrt{1+2x^2-x^3}dx \approx \frac{0,2}{3}[1,466970\ +1+2\cdot 1,422674\ +4\cdot(1,475127\ +1,283745\ )]\approx 1,089854 \qquad (I_4)$$

Знайдемо абсолютне значення різниці між наближеннями:

$$|I_4 - I_2| \approx |1,089854 - 1,087689| = 0,002165$$

Далі можна , застосувати правило Рунге , адже при використанні в методі трапецій воно дає похибку всього в одну третю

$$\frac{1}{15}|I_4 - I_2| \approx \frac{1}{15}\cdot 0,002165 = 0,000144 < 0,001$$

$$I = \int_{1,2}^{2}\sqrt{1+2x^2-x^3}dx \approx I_4 \approx 1,089854 \approx 1,090$$

Або можна використати класичний метод :

$$\int_{a}^{b} f(x)dx \approx \frac{h}{3}[f(x_0)+f(x_8)+2(f(x_2)+f(x_4)+f(x_6))+4(f(x_1)+f(x_3)+f(x_5)+f(x_7))]$$

Крок : $h = \dfrac{(b-a)}{2n} = \dfrac{(2-1,2)}{8} = \dfrac{0,8}{8} = 0,1$

таблиця :

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8
x_i	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2
$f(x_i)$	1,466970	1,477498	1,475127	1,457738	1,422674	1,366382	1,283745	1,166619	1

$$\int_{1,2}^{2}\sqrt{1+2x^2-x^3}dx \approx \frac{0,1}{3}\begin{bmatrix}1,466970\ +1+2\cdot(1,475127\ +1,422674\ +1,283745\ )+ \\ +4\cdot(1,477498\ +1,457738\ +1,366382\ +1,166619\ )\end{bmatrix} =$$

Далі : $= \dfrac{0,1}{3}\cdot(2,466970\ +8,363090\ +21,872948\ ) = \dfrac{0,1}{3}\cdot 32,703008\ = 1,090100 \qquad (I_8)$

$$\approx \frac{0,1}{3}\begin{bmatrix}1,466970\ +1+2\cdot(1,475127\ +1,422674\ +1,283745\ )+ \\ +4\cdot(1,477498\ +1,457738\ +1,366382\ +1,166619\ )\end{bmatrix} = 1,090100$$

Похибка : $|I_8 - I_4| \approx |1,090100 - 1,089854| = 0,000247$

Похибка менше необхідної точності:. Залишилося взяти найбільш точне значення, округлити його до трьох знаків після коми і записати:

Відповідь : $I = \int_{1,2}^{2} \sqrt{1 + 2x^2 - x^3}\, dx \approx 1,090$