LUCRAREA DE LABORATOR NR.1

**SEMNALE ÎN TIMP CONTINUU**

1. **Obiective**
   - terminologie: semnal în timp continuu - reprezentare în domeniul timp,
   - semnale standard în timp continuu,
   - reprezentarea semnalelor în timp continuu în domeniul operațional,
   - tabele de transformare pentru semnalele în timp continuu,
   - generarea semnalelor în timp continuu în Simulink și Xcos.

2. **Definiția unui semnal în timp continuu**

- Semnalele sunt funcţii de timpul *t* sau funcţii de timpul *t* (cazul monodimensional) şi de una sau mai multe coordonate spaţiale (*x, y, z*) (cazul multidimensional). Semnalele sunt folosite pentru a descrie variațiile în raport cu timpul ale diferitelor mărimi fizice sau de altă natură.

Notații:

$\mathscr{T}$ – mulțimea timp

$\mathscr{S}$ - mulțimea coordonatelor spațiale

$\mathscr{M}$ – mulțimea în care ia valori semnalul

$f : \mathscr{T} \rightarrow \mathscr{M}$ - semnal mono-dimensional (1)

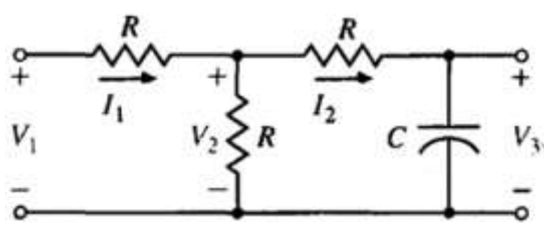
$f : \mathscr{T} \times \mathscr{S} \rightarrow \mathscr{M}$ - semnal multidimensional (2)

Mulțimile $\mathscr{T}$, $\mathscr{S}$ şi $\mathscr{M}$ sunt mulţimi de numere reale înzestrate cu relaţia de ordine totală " $\leq$ ". Funcția $f(\cdot)$ poate fi o funcţie scalară sau o funcție vectorială. Atunci când $\mathscr{T} \subseteq \boldsymbol{R}$ este un interval compact, semnalul $f(\cdot)$ se numește *semnal în timp continuu* ($\boldsymbol{R}$ este mulțimea numerelor reale). Ex. $\mathscr{T} = \boldsymbol{R}$, $\mathscr{T} = \boldsymbol{R}_+ = [0, \infty)$, $\mathscr{T} = [0, 2]$. Timpul și celelalte mărimi se exprimă de regulă în Sistemul Internațional de unități de măsură.

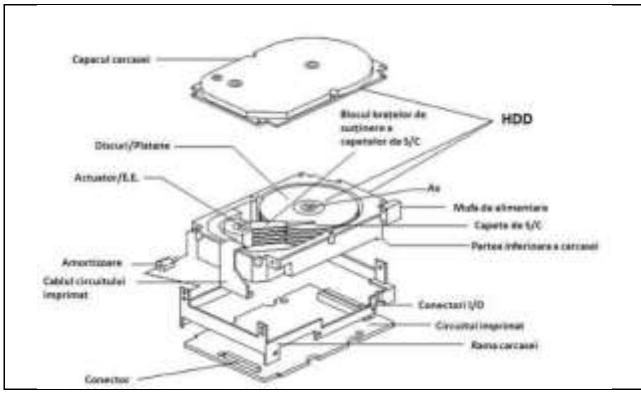
- Semnalele fiind funcţii, ele se pot aduna sau înmulţi unele cu altele, se pot înmulţi cu constante, se pot deriva, integra, translata în timp ş.a.m.d.
- Semnalul poate fi nu numai o *funcţie reală* (semnal cu valori reale), ci şi o *funcţie complexă* (semnalul cu valori complexe este o pereche de semnale cu valori reale) de variabilă timp şi/sau de variabile spaţiale.
- Pentru flexibilizarea limbajului, în locul termenului „semnal" folosim de multe ori termenii preluaţi din domeniul de aplicare vizat, de exemplu *curent*, *presiune*, *viteză, debit, cont* etc. iar în teoria sistemelor mai folosim și termenii: *mărime de intrare, mărime de ieşire* etc.

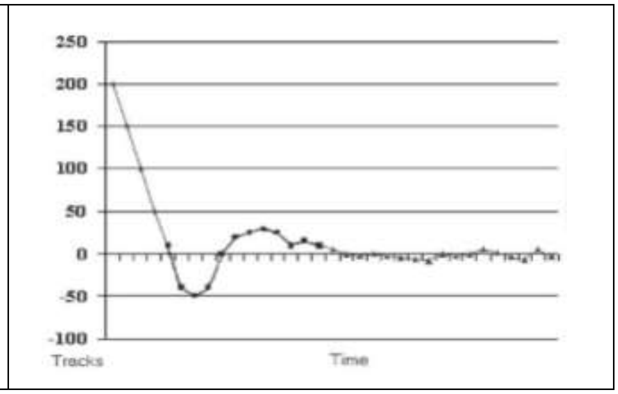
Exemple:

i) Circuitului din figură i se pot asocia semnalele $V_1(t)$, $V_2(t)$, $V_3(t)$, $I_1(t)$, $I_2(t)$, indicate în figură, precum și alte semnale, bunăoară puterea disipată pe cele trei rezistențe la un moment dat $P(t) = R\,[I_1^2(t)+I_2^2(t)+(I_1(t)-I_2(t))^2]$.




ii) HDD-urile (hard disk drive) reprezintă sisteme cu o structură complexă (figura din stânga). Funcționarea lor este caracterizată de numeroase semnale care corespund unor mărimi fizice de diferite naturi. De exemplu, rotirea discurilor este este descrisă în principal de *viteza unghiulară* $\omega_D(t)$, mișcarea blocului brațelor de susținere a capetelor de S/C (scriere/citire) de *viteza unghiulară de deplasare a brațului* $\omega_{S/C}(t)$ și de *unghiul de deplasare a brațului* $\alpha_{S/C}(t)$, iar poziționarea capetelor de S/C față de discuri prin *diferența* d(t) dintre numărul de ordine al pistei deasupra căruia se găsește la momentul curent capul S/C în raport cu numărul de ordine al pistei deasupra căreia trebuie să ajungă (figura din dreapta).

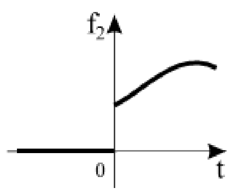


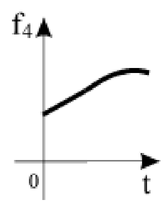




iii) Exemple numerice (toate semnalele se exprimă în Sistemul Internațional de unități de măsură):
$i(t) = 1.3\cdot\sin(2\cdot\pi\cdot50\cdot t-0.1)$, $t\in[0, 10]$ (intensitatea unui curent electric absorbit de la rețea),
$u(t) = 230\cdot\sin(100\cdot\pi\cdot t)$, $t\in \boldsymbol{R}$ (tensiunea de la rețea în cazul idealizat),
$v(t) = 2\cdot t+30$, $t\in[0, 4]$ (viteza unui vehicul în cursul accelerării uniforme pe o durată de timp limitată),
$x(t) = 10$, $t\in[t_0, t_0+900]$ (distanța în cursul unei parcări de un sfert de oră începând cu momentul $t_0$)
$\theta_{med}(t) = 21.3+0.00028\cdot t$, $t\in[0, 3600]$ (variația temperaturii medii într-o sală de curs).

iv) Imaginea de pe ecranul unui televizor poate fi interpretată ca un semnal tridimensional f(t,x,y) în care x și y reprezintă coordonate carteziene.

- În continuare, operăm de cele mai multe ori cu *semnale cauzale* monodimensionale, adică cu semnale $f : \boldsymbol{R} \to \mathscr{M}$, pentru care f(t) = 0 pentru t < 0 (figura din stânga).În diferite situații putem opera numai cu restricțiile acestora la semiaxa reală pozitivă, adică $\mathscr{T} = \boldsymbol{R}_+ = [0, \infty)$ (figura din dreapta), numite *semnale unilaterale*.




**3. Semnale în timp continuu standard**

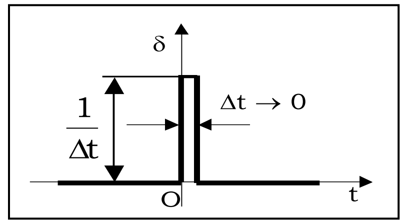
Semnalele standard sunt importante prin tipul de „solicitări la care supun sistemele la intrarea cărora sunt aplicate” şi prin „răspunsul sistemelor la aceste solicitări”. Totodată, semnalele standard sunt avantajoase şi din punct de vedere matematic întrucât simplifică calculele.

Principalele semnale standard sunt: *impulsul Dirac, funcţia treaptă unitară, funcţia rampă unitară şi semnalul sinusoidal*.

- ***Impulsul Dirac***, notat cu $\delta(t)$, denumit și ***funcţie impuls unitar***, este caracterizat în domeniul timp prin relaţia (3), ca funcţie propriu-zisă, respectiv prin relaţiile (4), ca distribuţie:

$$\begin{cases} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\cdot dt = 1 \\ \delta(t) = 0, \text{ pentru } t \neq 0 \end{cases} \quad , (3)$$

$$\begin{cases} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cdot \delta(t)\cdot dt = f(0) \\ \delta(t) = 0, \text{ pentru } \quad t \neq 0 \end{cases} \quad , \forall f: \mathbf{R} \to \mathbf{R} \quad . (4)$$

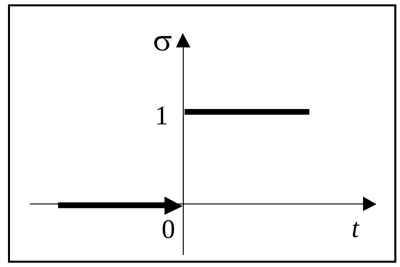



În tehnică, impulsul Dirac este imaginat ca limită temporală, pentru $\Delta t \to 0$, a impulsului dreptunghiular din figură (un impuls de "arie unitară" şi durată infinit mică).

*In analiza sistemelor dinamice liniare cauzale şi invariante în timp, impulsul Dirac este folosit în principal pentru a testa modul în care sistemul răspunde la solicitări intense de scurtă durată*.

- ***Semnalul treaptă unitară,*** notat cu $\sigma(t)$, este definit în domeniul timp prin relaţia

$$\sigma(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t \geq 0 \end{cases} \quad . (5)$$

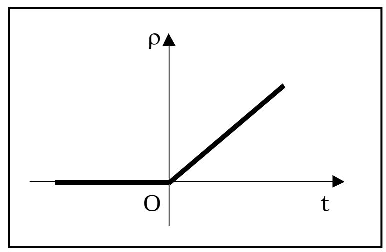



*El este folosit pentru a testa modul în care un sistem răspunde la solicitări de durată.*

- ***Semnalul rampă unitară***, $\rho(t)$, este definit prin formula:

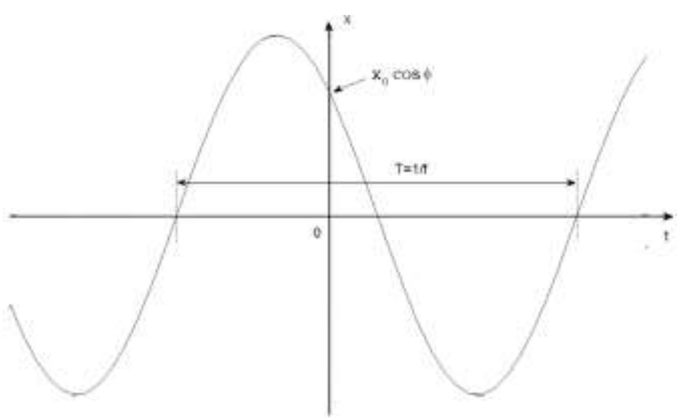
$$\rho(t) = t \cdot \sigma(t) \quad . (6)$$

El prezintă un punct unghiular la momentul t = 0, ceea ce din punct de vedere fizic are interpretarea de „modificare bruscă de viteză”.




- ***Semnalul armonic*** (*real*) *de amplitudine $x_0$*, pulsaţie $\omega$ şi fază iniţială $\varphi$, este folosit în varianta de semnal sinusoidal, definit prin relaţia (7), sau de semnal cosinusoidal definit de relaţia (8)

$$x(t) = x_0 \cdot \sin(\omega t + \varphi), \quad t \in \mathbf{R} \quad , (7) \qquad x(t) = x_0 \cdot \cos(\omega t + \varphi), \quad t \in \mathbf{R} \;. (8)$$




Semnalul armonic (8)

Ambele semnale au frecvența $f = \dfrac{\omega}{2\pi}$, respectiv perioada $T = \dfrac{1}{f}$ .

Semnalele armonice stau la baza *studiului experimental al sistemelor în domeniul pulsaţiilor* şi la baza *analizei spectrale a semnalelor*.

**4. Reprezentarea semnalelor în timp continuu în domeniul operațional. Transformata Laplace**

- Transformata Laplace se aplică semnalelor în timp continuu şi operatorilor cu care acestea se prelucrează.
- Se numeşte *integrală Laplace* a funcției *f(t)* : $\boldsymbol{R}$ expresia

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cdot e^{-st}\cdot dt \text{ în care } s\in C, s=\sigma+j\omega \text{ (\textit{frecvență complexă})}.$$

Pentru integrală, *s* joacă rol de parametru. Dacă această integrală este convergentă (poate fi calculată), rezultatul va fi o expresie de *s*. Expresia, interpretată ca funcţie de *s*, este denumită *transformată Laplace a funcţiei f(t)*. Pentru a simplifica scrierea o notăm cu *f(s)*. Mulțimea valorilor lui *s* pentru care *f*(*s*) există se numește domeniu de convergență al lui *f*(*s*). Deci:

$$f(s)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cdot e^{-st}\cdot dt\ . \qquad (9)$$

- Pentru semnalele cauzale și semnalele unilaterale formula (9) ia forma (10). Transformarea inversă, care asociază lui *f*(*s*) funcția *f(t)* din care a provenit, are forma (11).

$$f(s)=\int_{0}^{\infty} f(t)\cdot e^{-st}\cdot dt\ , \ (10) \qquad\qquad f(t)=\frac{1}{2\pi j}\int_{\alpha-j\infty}^{\alpha+j\infty} f(s)\cdot e^{st}\cdot ds\ .\ (11)$$

Valoarea $\alpha$ se adoptă astfel încât dreapta s = $\alpha$ + j$\omega$ să se situeze integral în domeniul de convergență al lui f(s).

- Mulţimea funcţiilor *f*(*t*) care au transformate Laplace se numeşte *mulţimea funcţiilor original.* Mulțimea transformatelor Laplace se numește *mulțimea funcțiilor imagine.* În situațiile la care ne referim în curs și în lucrările de laborator legătura dintre {*f*(*t*)} și {*f*(*s*)} este bijectivă.

Operația de asociere a transformatei Laplace *f*(*s*) funcției de timp *f*(*t*) o simbolizăm sub forma (haltera cu bile):

$$f(t) \multimap f(s) \quad (12)$$

- *Unora dintre operațiile cu funcții din domeniul timp le corespund, în domeniul operațional, operații mai simple. În acest context, transformata Laplace, respectiv calculul în domeniul operațional, sunt folosite pentru a ocoli dificultățile de calcul în domeniul timp.* Regulile de lucru sunt date de așa-numitele teoreme ale transformatei Laplace. Cele mai folosite teoreme sunt:

  *i)* *teorema de liniaritate*:

$$c_1 f_1(t)+c_2 f_2(t) \multimap c_1 f_1(s)+c_2 f_2(s)\ ,\ \forall\ f_1, f_2 \text{ funcții original, } \forall\ c_1, c_2\in R\ ;\ (13)$$

  *ii)* *teorema derivării*:

$$\dot{f}(t) \multimap s\cdot f(s) - f(0),\ (14)$$

$$\ddot{f}(t) \multimap s^2 f(s)-sf(0)-\dot{f}(0).\ (15)$$

…

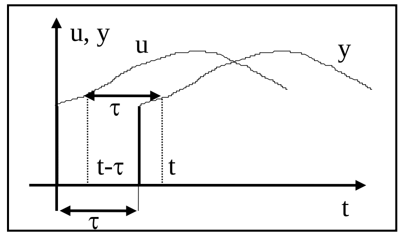
$f(0)$, $\dot{f}(0)$ se numesc *condiții inițiale ale lui f(t)*. Condiţiile iniţiale sintetizează preistoria semnalului și se asociază fie momentului $t=0_+$ ( $\lim\limits_{\substack{t\to 0\\ t>0}} t$ ), fie momentului $t=0_-$ ( $\lim\limits_{\substack{t\to 0\\ t<0}} t$ ). *Pentru o problemă dată, se aplică acelaşi* *mod de tratare a condițiilor inițiale pentru toate semnalele din sistem (de regulă $t = 0\_$ ).* Dacă condițiile inițiale sunt nule, relațiile din teorema derivării devin

$$\dot{f}(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\ s\cdot f(s) \text{ etc . } (16)$$

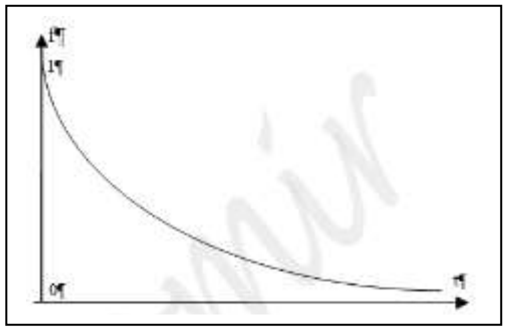
*iii)* *teorema produsului de convoluție – se va discuta în cadrul altei lucrări*;
*iv)* *teorema redardării (teorema întârzierii)*

$$\text{Dacă } f(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\ f(s), \text{ atunci } f(t-\tau) \circ\!\!-\!\!\bullet\ f(s)\cdot e^{-\tau s},\ \tau \geq 0. \quad (17)$$

Exemple:




i) Figura alăturată se referă la două semnale u(t) și y(t), y(t) provenind din u(t) prin întârzierea cu τ secunde: y(t) = u(t-τ). În acest caz, dacă u(t) o—● u(s) transformata Laplace a lui y(s) este $u(s)\cdot e^{-\tau s}$, adică y(t) o—● $u(s)\cdot e^{-\tau s}$.



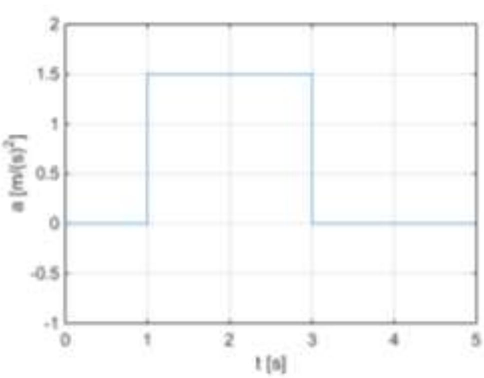
ii) Graficul din figura alăturată corespunde semnalului exponențial $f(t) = e^{-at}$, $t \geq 0$. Lui îi corespunde imaginea Laplace (demonstrația se găsește în curs) $f(s) = \dfrac{1}{s+a}, s \in \{\sigma + j\omega | \sigma > -a\}$.

iii) Pentru o buclă a unui circuit electric este valabilă egalitatea: $CLi^{(2)}(t) + CRi^{(1)}(t) + i(t) = Cu^{(1)}(t)$. C, L și R sunt constante, reprezentând valorile unei capacități, inductanțe, respectiv rezistențe. În domeniul operațional, ei i se pot asocia mai multe egalități în funcție de condițiile inițiale. Astfel:

- dacă condițiile inițiale sunt nule:
  $CLi^{(2)}(t) + CRi^{(1)}(t) + i(t) = Cu^{(1)}(t)$ o—● $C\cdot L\cdot s^2\cdot i(s)+C\cdot R\cdot s\cdot i(s)+i(s)=C\cdot s\cdot u(s)$
- dacă i(0) = 0.5 A, $i^{(1)}(0) = -0.2\ A\cdot s^{-1}$, u(0) = 3 V:
  $CLi^{(2)}(t) + CRi^{(1)}(t) + i(t) = Cu^{(1)}(t)$ o—● $C\cdot L\cdot[s^2\cdot i(s)-0.5s+0.2]+C\cdot R\cdot[s\cdot i(s)-0.5]+i(s)=C\cdot[s\cdot u(s)-3]$.

iv) Semnalul din figură redă variația unei accelerații, a, în formă de impuls dreptunghiular. Expresia semnalului se poate scrie folosind două semnale treaptă decalate cu 1 secundă, respectiv 3 secunde față de momentul t = 0. Rezultă:

$$a(t) = 1.5\cdot[\sigma(t-1) - \sigma(t-3)] \qquad (18)$$




Pentru a calcula transformata Laplace ne folosim de teorema de liniaritate (semnalul are două componente), de teorema retardării (ambele componente sunt întârziate) și de transformata Laplace a funcției treaptă unitate (se obține din rezultatul de la ii) pentru a = 0). Rezultă:

a(t) o—● $a(s) = 1.5\,(e^{-s} - e^{-3s})/s$.

### 5. Tabele de transformare

În practică (și în cadrul cursului), se lucrează cu transformate Laplace precalculate, disponibile în tabele de transformare. Tabelele de transformare conțin perechi de corespondențe f(t) o—• f(s), oferind imaginile Laplace ale unor funcții original (cauzale sau unilaterale) și invers, funcțiile original asociate unor expresii operaționale.

În cadrul cursului, operăm cu tabele de transformare care au structura din tabelul de mai jos:

| (1) | (2) | (3) | (4) |
|---|---|---|---|
| *f(t), t>0* | *f(s)* | $f(z)=\mathcal{Z}\{f(s)\}$ | $f_{\vartheta}(z)=\mathcal{Z}_{\vartheta}\{f(s)\}$ |

- În coloana (1), *f(t)* este o funcție original de timp continuu (cauzală , unilaterală).
- În coloana (2), *f(s)* este transformata Laplace a lui *f(t)* din coloana (1), anume *f(s)* •—◦ *f(t)*.
- Coloanele (3) și (4) nu se discută în această lucrare.

***Exemplu***: *Presupunem că un semnal are transformata Laplace* $f(s)=\frac{1}{s+2}$*. Pentru a calcula funcția original folosim din tabelul de transformări linia în care apare* $f(s)=\frac{1}{s+a}$*. Întrucât a=2, semnalul (funcția original) este* $f(t)=e^{-2t}$.

| f(t), ◄ f[t] ► | $f(s)=\mathcal{L}[f(t)]$ | $f(z)=\mathcal{Z}\{f[t]\}=\mathfrak{Z}\{f(s)\}$ | $f_{\vartheta}(z)=\mathcal{Z}\{f[t,\vartheta]\}=\mathfrak{Z}_{\vartheta}\{f(s)\}$ |
|---|---|---|---|
| (1) | (2) | (3) | (4) |
| 1, $\sigma(t)$ | $\frac{1}{s}$ | $\frac{z}{z-1}$ | $\frac{z}{z-1}$ |
| t | $\frac{1}{s^2}$ | $\frac{hz}{(z-1)^2}$ | $\frac{hz\cdot[\vartheta z+(1-\vartheta)]}{(z-1)^2}$ |
| $e^{-at}$ | $\frac{1}{s+a}$ | $\frac{z}{z-e^{-ah}}$ | $\frac{z\cdot e^{-a\vartheta h}}{z-e^{-ah}}$ |
| $t\cdot e^{-at}$ | $\frac{1}{(s+a)^2}$ | $\frac{hze^{-ah}}{(z-e^{-ah})^2}$ | $\frac{hze^{-a\vartheta h}\cdot[\vartheta z+(1-\vartheta)\cdot e^{-ah}]}{(z-e^{-ah})^2}$ |

- Potrivit tabelelor, transformatele Laplace ale semnalelor standard sunt:

$\delta(t)$ o—• 1, $\sigma(t)$ o—• $s^{-1}$, $\rho(t)$ o—• $s^{-2}$, $\sin(\omega t)$ o—• $\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$, $\cos(\omega t)$ o—• $\frac{s}{s^2+\omega^2}$ (19)

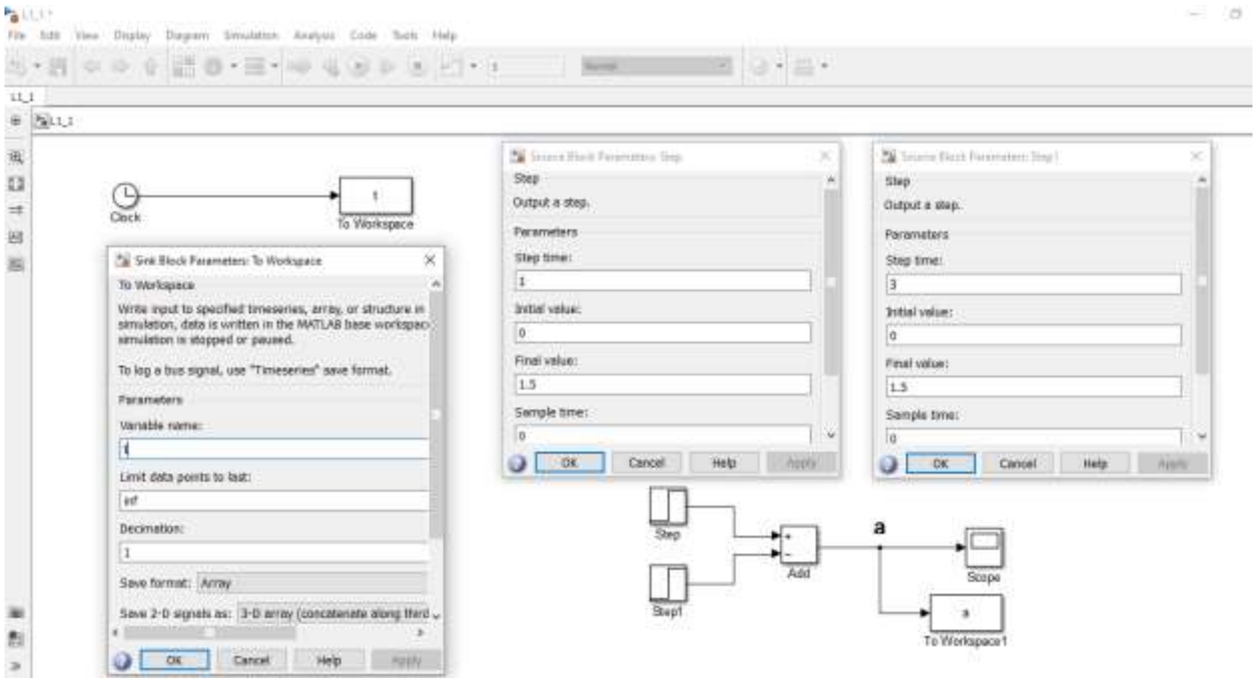
### 6. Generarea de semnale în Simulink/Xcos

Simulink, respectiv Xcos reprezintă utilitare software destinate modelării și simulării sistemelor dinamice integrate în mediile de programare Matlab, respectiv Scilab. Informații despre modul de instalare și utilizare a acestor programe se găsesc la adresa: https://www.mathworks.com/products/matlab.html, respectiv adresa: https://www.scilab.org/ pentru Scilab.

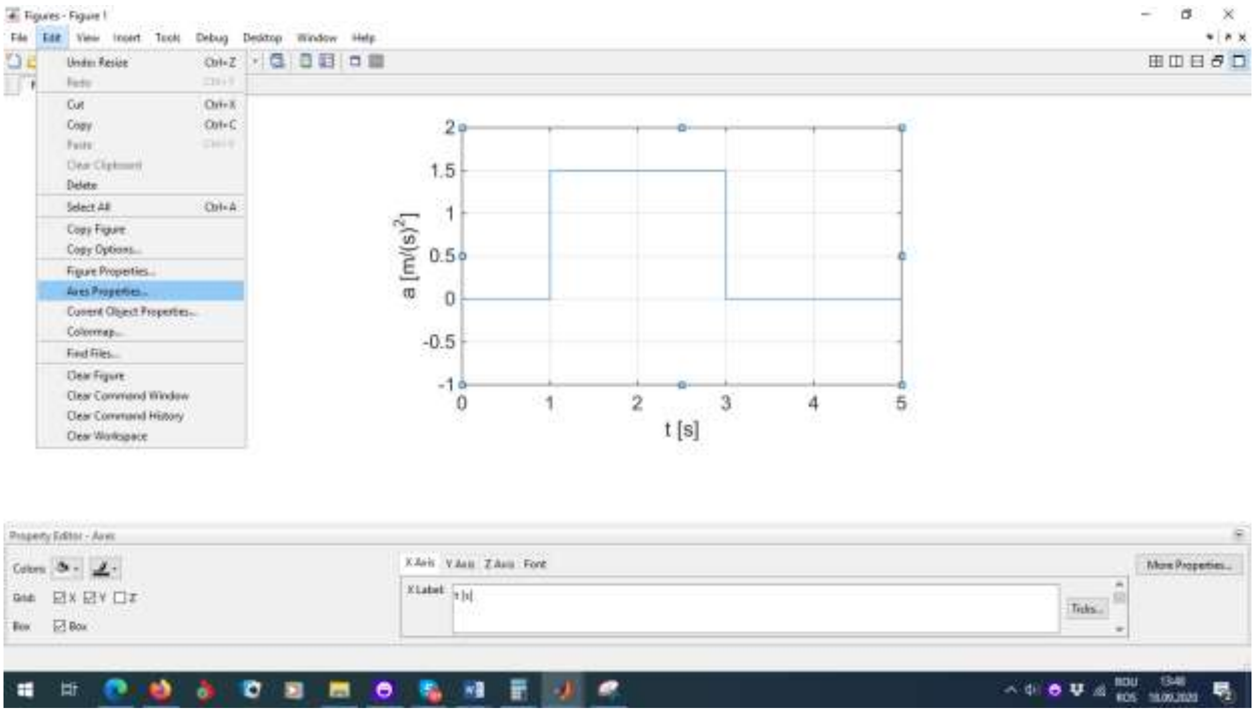
Prezentarea este concepută prin intermediul exemplificării generării și reprezentării grafice a semnalului (18).

***Simulink***

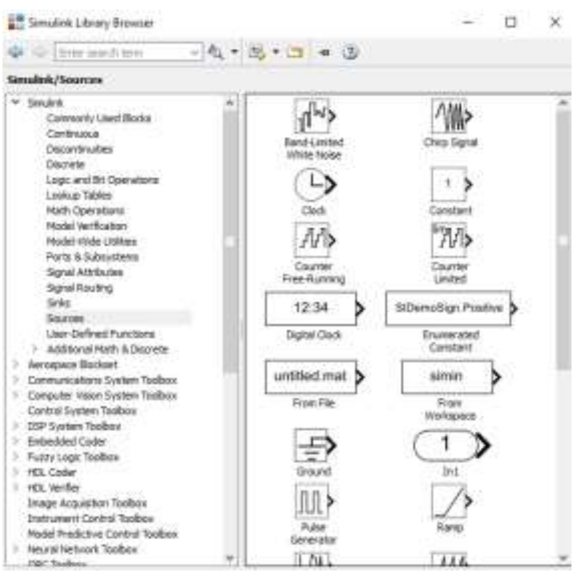
Figura de mai jos ilustrează modelul Simulink folosit pentru generarea semnalului, modul în care au fost setate unele blocuri, setarea la valoarea 5 secunde a intervalului de lucru (pe bara de sus) și modul în care este redat semnalul a(t) în blocul osciloscop.

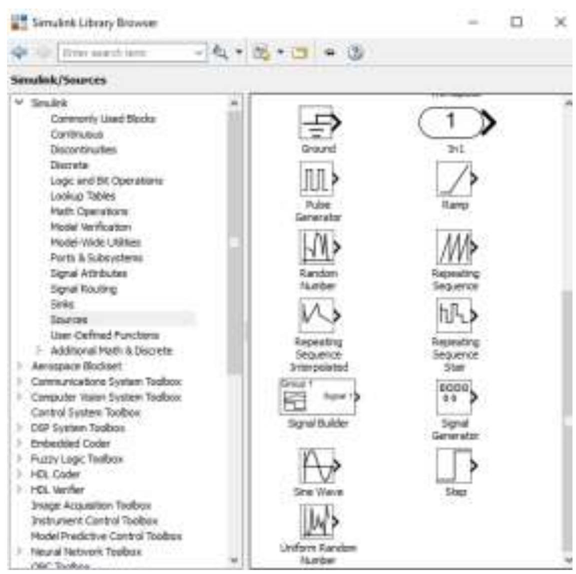


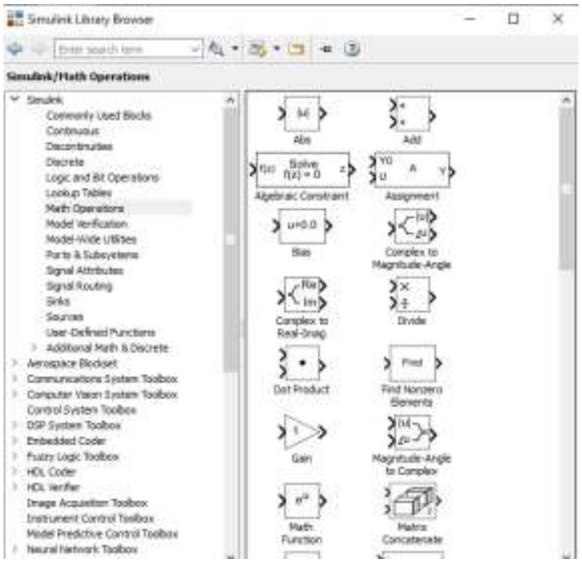

Următoarea figură indică câteva din mijloacele folosite pentru prelucrarea semnalului reprezentat grafic cu funcția plot(t,a).

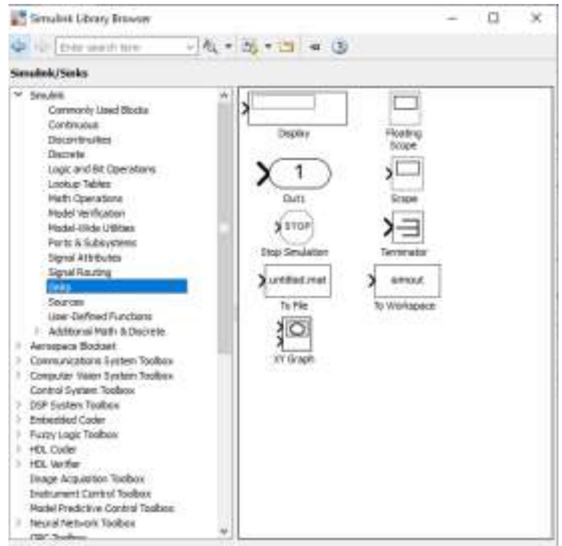



Cele 4 figuri prezentate în continuare detaliază componența librăriei „Sources” din care au fost extrase blocurile Clock și Step, a librăriei „Math operations” din care s-a folosit blocul Add și a librăriei „Sinks” din care s-au folosit blocurile ToWorkspace și Scope.



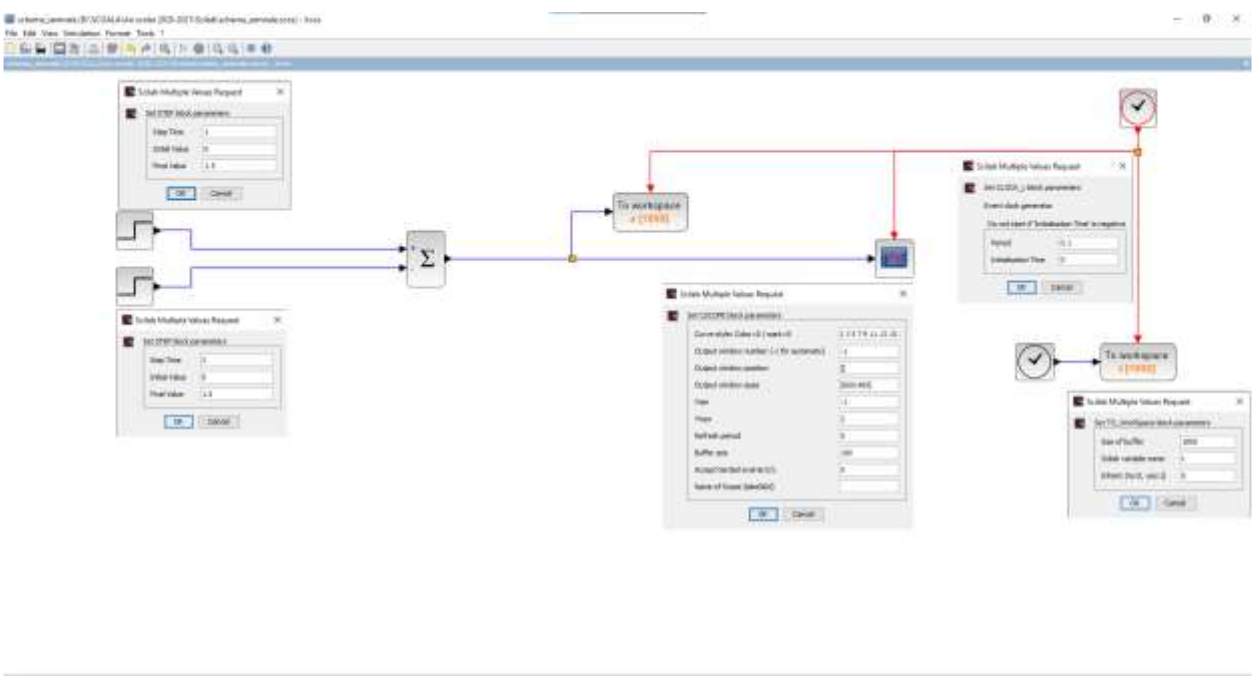






***Xcos***

Următoarele două figuri ilustrează modelul Xcos folosit pentru generarea semnalului și modul în care au fost setate unele blocuri, respectiv modul în care se setează valoarea de 5 secunde pentru intervalul de lucru.



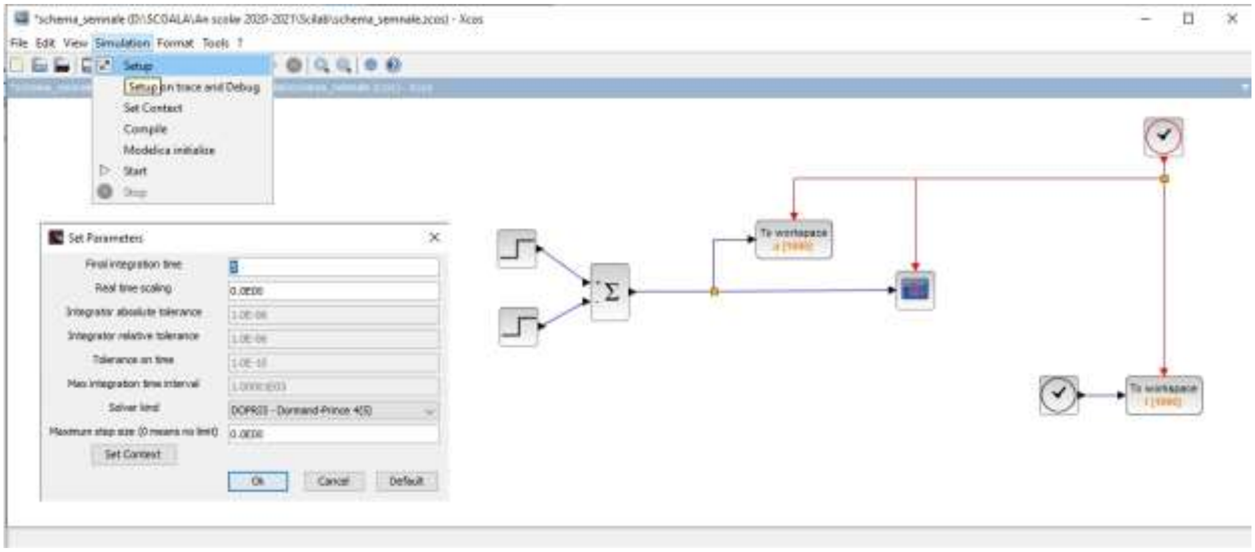
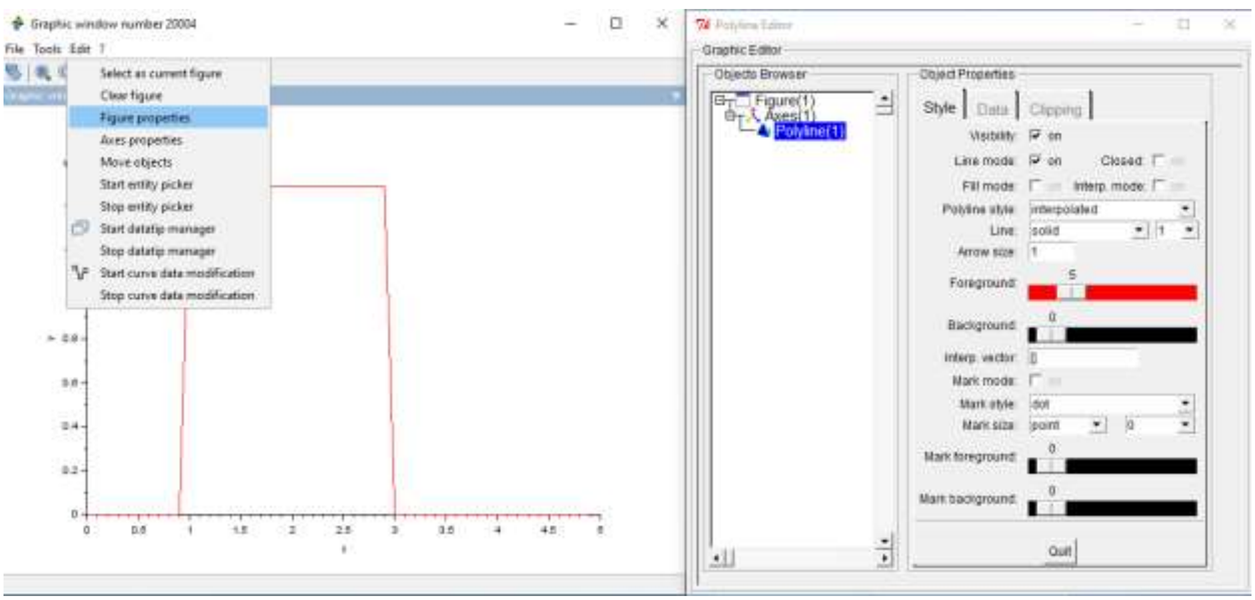
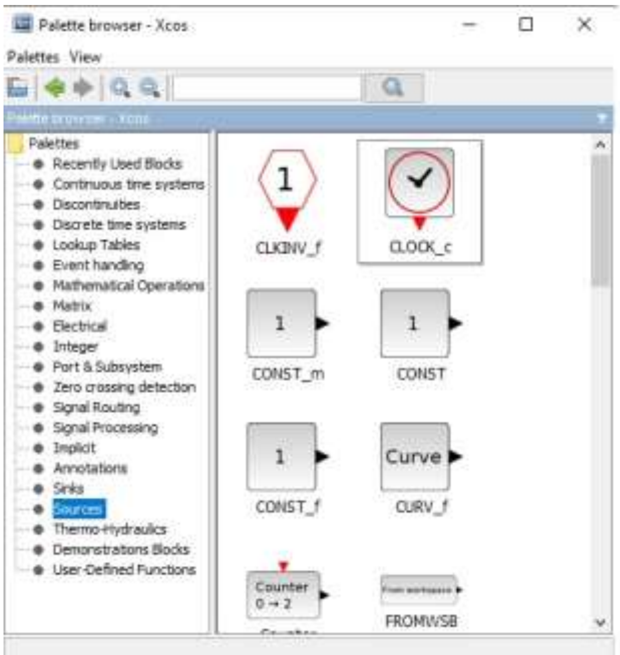
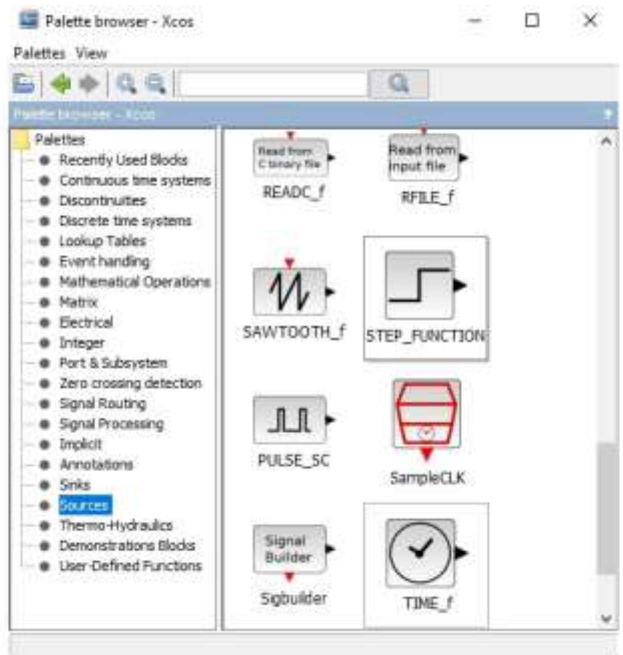


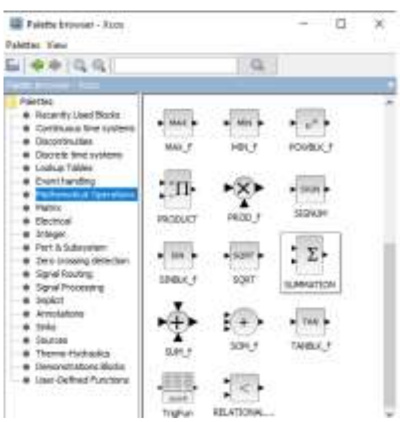

Figura ce urmează indică modul în care se poate prelucra reprezentarea grafică a semnalului, obținută în urma simulării în Xcos. Același grafic se poate obține în Scilab de la linia de comandă cu funcția plot(t.values,a.values).

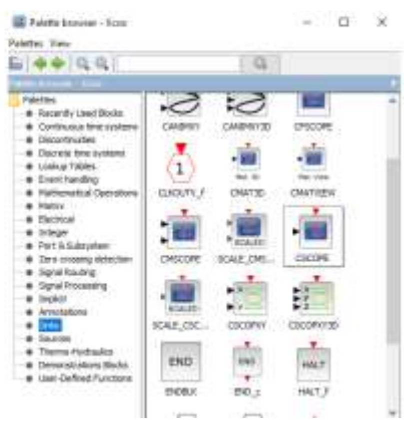


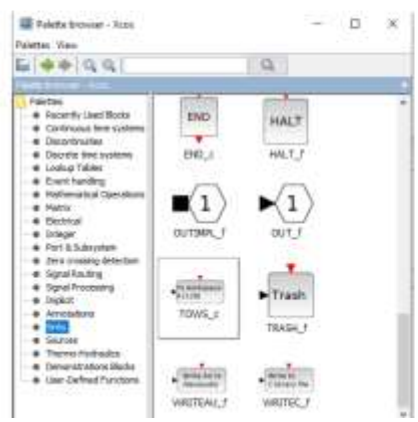

Cele 4 figuri, prezentate în continuare, detaliază componența librăriei „Sources”, din care au fost extrase blocurile TIME_f și STEP FUNCTION, utilizate pentru generarea semnalului, și CLOCK_c, utilizat pentru activarea blocurilor de afișare, a librăriei „Mathematical Operations”, din care s-a folosit blocul SUMMATION, și a librăriei „Sinks”, din care s-au folosit blocurile CSCOPE și TOWS_c.







## 7. Tema de casă Nr. 1[1]

| *Nume și prenume* | *Nr. matricol* | *Data completării formularului* |
|---|---|---|
| | | |

### ÎNTREBĂRI ȘI SOLUȚII - LUCRAREA DE LABORATOR NR. 1

(Formularul completat se depune în format pdf)

1.1. Imaginați câte un exemplu de semnal în timp continuu pentru cele 4 domenii precizate în tabel. Răspunsurile se vor formula potrivit relațiilor (1), (2) și exemplelor de la pag. 1 și 2 din Lucrarea de laborator nr. 1.

| | |
|---|---|
| Corpul omenesc | |
| Domeniul automotive | |

[1] Tema de casă este disponibilă în fișierul Tema_1.docx.

| | |
|---|---|
| Mediul înconjurător | |
| Domeniul audio-video | |

1.2. Calculați transformatele Laplace ale următoarelor semnale (*nu se cer demonstrații, ci doar rezultatele*):

| | |
|---|---|
| $u(t) = 230\cdot\sin(100\cdot\pi\cdot t)$, $t\in\boldsymbol{R_+}$ | |
| $i(t) = 1.3\sin(2\cdot\pi\cdot 50\cdot t-0.1)$, $t\in\boldsymbol{R_+}$ | |
| $x(t) = 10\cdot[\sigma(t-t_1) - [\sigma(t-t_2)]$, $t_1<t_2$, $t\in\boldsymbol{R_+}$ | |
| $v(t) = (2\cdot t+30)\cdot\sigma(t-4)$, $t\in\boldsymbol{R_+}$ | |

1.3. Pentru semnalul x(t), $t\in\boldsymbol{R_+}$ se obține, în urma unor calcule în domeniul operațional, expresia $x(s) = \frac{2s-1}{s^2(0.01s+1)}$. Să se arate că semnalul original este $x(t) = 2.01\cdot(1-e^{-100\cdot t}) - t$, $t\in\boldsymbol{R_+}$. *Indicație: Se va descompune expresia lui x(s) în termeni de forma celor din tabelele de transformare, apoi se vor aduce termenii la forma din tabel, iar în final se folosește teorema de liniaritate a transformatei Laplace.*

| |
|---|
| *Se inserează demonstrația.* |

1.4. Generați semnalele din tabelul de mai jos, adaptând și modificând modelul Simulink/Xcos din lucrarea de laborator. Pentru inserarea figurilor, puteți folosi Snipping Tool, Print Screen etc.

| |
|---|
| $x(t) = -1.5\cdot[\sigma(t-0.5) - \sigma(t-4.2)]$, $t\in[0, 6]$ |
| *a) Se inserează graficul lui x(t).* |
| $u(t) = 230\cdot\sin(100\cdot\pi\cdot t)+25\cdot[\sigma(t-0.005)-\sigma(t-0.0053)]$, $t\in[0, 0.06]$ |
| *b) Se inserează modelul Simulink/Xcos.* |