LUCRAREA DE LABORATOR NR.3

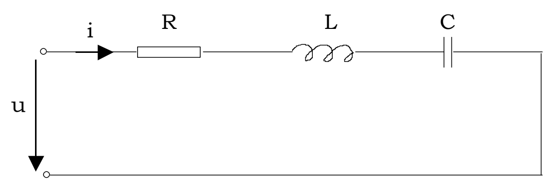
IMPEDANȚA OPERAȚIONALĂ. SEMNALE EȘANTIONATE. TRANSFORMATA z.

1. Obiective

- însușirea conceptului de „impedanță operațională” și folosirea lui la modelarea circuitelor electrice liniare,
- însușirea conceptului de „semnal eșantionat” și generarea de semnale eșantionate în mediul Simulink,
- efectuarea unor exerciții elementare cu transformata z.

2. Impedanța operațională și folosirea ei pentru modelarea circuitelor electrice liniare

- În lucrarea de laborator nr. 2 s-a arătat că pentru circuitul RLC din figură, considerat ca sistem cu orientarea u $\rightarrow$ i, este valabilă dependența intrare-ieșire:



$$R \cdot i(t) + L \cdot \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C} \cdot \int i(t) \cdot dt = u(t)\ . \quad (1)$$

În condiții inițiale nule, ei îi corespunde în domeniul operațional egalitatea:

$$R \cdot i(s) + L \cdot s \cdot i(s) + \frac{1}{C \cdot s} \cdot i(s) = u(s)\ , \quad (2)$$

din care deducem relația

$$u(s) = \left(R \cdot + L \cdot s \cdot + \frac{1}{C \cdot s} \right) \cdot i(s)\ . \qquad (3)$$

Notă: *În electrotehnică, pentru cazul circuitului din figura de mai sus, aflat în regim permanent sinusoidal cu semnale de pulsație ω (sau de frecvență $f = \omega/(2\pi)$), se operează cu așa-numita impedanță complexă*

$$Z(j\omega) = R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}\ ,$$

iar legătura dintre valorile eficace ale curentului (I) și tensiunii (U) se exprimă sub forma:

$$U = Z \cdot I\ ,$$

unde

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}$$

este impedanța circuitului.

Suma

$$Z(s) = R + s \cdot L + \frac{1}{s \cdot C}\ , \qquad (4)$$

din (3), se numește *impedanță operațională*. Cu ajutorul ei, relația (3) se rescrie în forma:

$$u(s) = Z(s) \cdot i(s)\ . \quad (5)$$

Relația (5) se aseamănă cu cea din legea lui Ohm, $u = R \cdot i$, astfel că o denumim *teorema Ohm în domeniul operațional*. În acest context, impedanța echivalentă pentru o conexiune serie este:

$$Z_e(s) = Z_1(s) + Z_2(s) + \ldots\ ,$$

iar pentru o conexiune derivație:

$$\frac{1}{Z_e(s)} = \frac{1}{Z_1(s)} + \frac{1}{Z_2(s)} + \cdots \ .$$

Dacă din circuitul din figura de mai sus lipsesc una sau două dintre componente, atunci vor lipsi și din (4) termenii corespunzători.

> *Notă: Impedanța complexă este particularizarea impedanței operaționale pentru regimul permanent sinusoidal (se consideră $s = j\cdot\omega$).*

Impedanța operațională permite modelarea facilă a circuitelor electrice liniare. Astfel, odată orientat circuitul, de exemplu $u \to y$, se parcurg următorii pași:

i) Se reprezintă schema electrică a circuitului, reducând fiecare latură la o impedanță operațională.

ii) Se aplică repetitiv teorema Ohm în domeniul operațional, sau teoremele lui Kirchhoff pentru schema de la punctul i). Rezultă un sistem de ecuații algebrice de gradul I, prin rezolvarea căruia se obține o relație de forma:

$$y(s) = H(s)\cdot u(s), \quad (6)$$

unde H(s) este o expresie de impedanțele operaționale ale laturilor circuitului.

iii) Se înlocuiesc, în expresia lui H(s), impedanțele potrivit relației (4) și se aduce rezultatul sub forma unei funcții raționale de s: $N_1(s)/N_2(s)$.

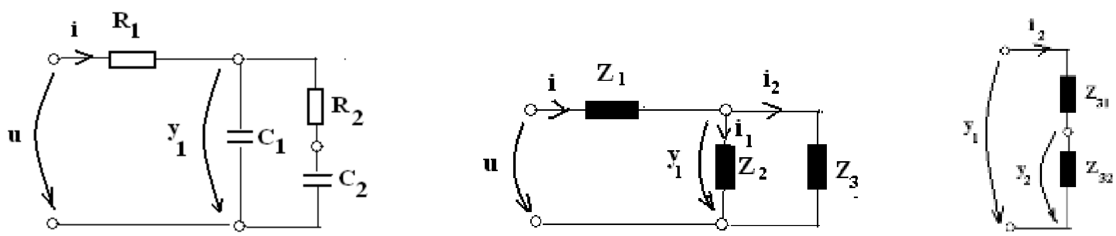
iv) Se determină MM-II în domenul timp prin următoarele operații:

$$y(s) = \frac{N_1(s)}{N_2(s)}\cdot u(s) \quad \to \quad N_2(s)\cdot y(s) = N_1(s)\cdot u(s)\,, \qquad (7)$$

$$N_2(s)\cdot y(s) = N_1(s)\cdot u(s) \quad \bullet\!-\!\circ \quad \text{MM}-\text{II in domeniul timp}\,. \qquad (8)$$

- **Exemplu**

1. Se consideră circuitul din figura -a- ca sistem cu orientarea $u \to y_1$ și arătăm modul în care determinăm MM-II al circuitului în domeniul timp urmând pașii i) – iv) de mai sus.



-a- -b- -c-

i) Reproducem circuitul din figura -a- prin schema electrică cu impedanțe operaționale din figura -b-

în care: $Z_1(s) = R\,,\ Z_2(s) = \dfrac{1}{C_1\cdot s}\,,\ Z_3(s) = R_2 + \dfrac{1}{C_2\cdot s}\,.$

ii) În raport cu bornele de intrare, la care se aplică tensiunea u, circuitul are impedanța echivalentă:

$$Z_e(s) = Z_1(s) + \underbrace{\left(Z_2(s)\|Z_3(s)\right)}_{Z_{23}(s)} = Z_1(s) + \underbrace{\frac{Z_2(s)\cdot Z_3(s)}{Z_2(s)+Z_3(s)}}_{Z_{23}(s)}\,.$$

$Z_{23}(s)$ este impedanța echivalentă a celor două laturi, conectate în paralel, la bornele cărora avem tensiunea y_1. Deci: $u(s)=i(s)\cdot Z_e(s)$, $y_1(s)=i(s)\cdot Z_{23}(s)$. Prin eliminarea curentului i(s) din aceste două relații, se obține:

$$y_1(s)=\frac{Z_{23}(s)}{Z_e(s)}\cdot u(s). \qquad (9)$$

Observăm că acest rezultat are forma (6).

iii) Înlocuim în (9) pe $Z_1(s)$, $Z_2(s)$ și $Z_3(s)$ cu expresiile detaliate, iar după efectuarea calculelor obținem:

$$y_1(s)=\frac{R_2\cdot C_2\cdot s+1}{R_1\cdot R_2\cdot C_1\cdot C_2\cdot s^2+(R_1\cdot C_1+R_1\cdot C_2+R_2\cdot C_2)\cdot s+1}\cdot u(s). \qquad (10)$$

iv) Prelucrând acest rezultat cu operațiile (7) și (8), se obține în final MM-II cunoscut din lucrarea de laborator nr. 2:

$$R_1\cdot R_2\cdot C_1\cdot C_2\cdot \ddot{y}_1(t)+(R_1\cdot C_1+R_1\cdot C_2+R_2\cdot C_2)\cdot \dot{y}_1(t)+y_1(t)=R_2\cdot C_2\cdot \dot{u}(t)+1\cdot u(t).$$

2. Modificăm orientarea circuitul din figura -a- în forma $u\rightarrow y_2$, unde y_2 este căderea de tensiune de pe capacitatea C_2 și determinăm MM-II al circuitului în domeniul timp asociat acestei noi orientări.

Pentru a obține MM-II în domeniul timp, detaliem latura din dreapta a circuitului sub forma din figura -c-, unde $Z_{31}(s)=R_2$, $Z_{32}(s)=\frac{1}{C_2\cdot s}$. Pentru latura din dreapta avem relațiile:

$$y_2(s)=Z_{32}(s)\cdot i_2(s),$$
$$y_1(s)=Z_3(s)\cdot i_2(s).$$

Eliminând pe $i_2(s)$ și folosindu-ne de relația (10), rezultă:

$$y_2(s)=\frac{Z_{32}(s)}{Z_3(s)}\cdot y_1(s)=\frac{\frac{1}{C_2\cdot s}}{R_2+\frac{1}{C_2\cdot s}}\cdot y_1(s)=\frac{1}{R_2C_2\cdot s+1}\cdot\frac{R_2C_2\cdot s+1}{R_1R_2C_1C_2\cdot s^2+(R_1C_1+R_1C_2+R_2C_2)\cdot s+1}\cdot u(s)=\cdots.$$

Rezolvarea se finalizează cu operațiile (7) și (8).

3. Semnale eșantionate

- În accepțiunea lecțiilor de curs și a definiției semnalului din Lucrarea de laborator nr. 1, un semnal eșantionat are forma

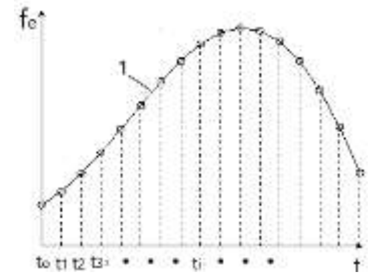
$$f:\mathscr{T}\rightarrow\mathscr{M}, \qquad (11)$$

în care $\mathscr{T}$ este o mulțime de timp discret (mulțimea momentelor de eșantionare), iar $\mathscr{M}$ un interval real. Exemple de mulțimi $\mathscr{T}$ și de expresii pentru f:

$\mathscr{T}=\{t_0, t_1, t_2, \ldots\}$, $\{f[t]\}_{t\in\{\cdot\}}=\{f[t_0], f[t_1], f[t_2], \ldots\}$;
$\mathscr{T}=\{t\}_{t\in N}$, $\{f[t]\}_{t\in N}$, $f[t]=2^{-t}$;
$\mathscr{T}=\{t\}_{t\in Z}$, $\{f[t]\}_{t\in Z}$, $f[t]=5^{-|t|}$;
$\mathscr{T}=\{5, 6, 7, 8\}$, $\{f[t]\}_{t\in\{\cdot\}}=\{f[5], f[6], f[7], f[8]\}$

Este important de reținut că $\mathscr{M}$ este o mulțime reală de forma interval compact și nu o mulțime de valori discrete.

- În figura alăturată, este ilustrat un exemplu de semnal eșantionat. Semnalul eșantionat este redat prin cerculețe. El se obține prin eșantionarea semnalului în timp continuu 1 reprezentat cu linie continuă. Eșantionarea se face la momentele t_0, t_1, t_2, t_3, ..., t_i, ...
- În figura de mai jos se prezintă un model Simulink folosit pentru generarea unui semnal eșantionat $\{x_e\}_{t\in \mathbf{N}}$, prin eșantionarea cu pasul h = 0.33 secunde a semnalului în timp continuu



$$x(t) = 3.5\cdot\sin(2\cdot\pi\cdot t+0.16),\ t \in \mathbf{R}_+ .\ (12)$$

Eșantionarea se realizează prin înmulțirea semnalului x(t) cu „funcția pieptene” $f_p(t)$, adică:

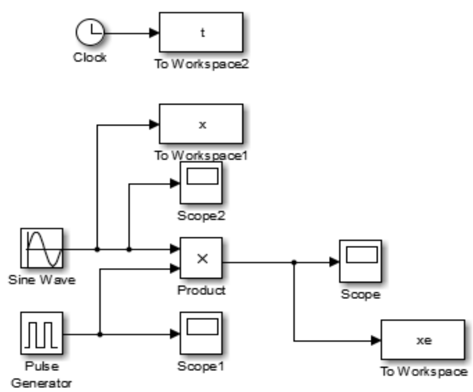
$$x_e(t) = x(t)\cdot f_p(t)\ , \qquad (13)$$

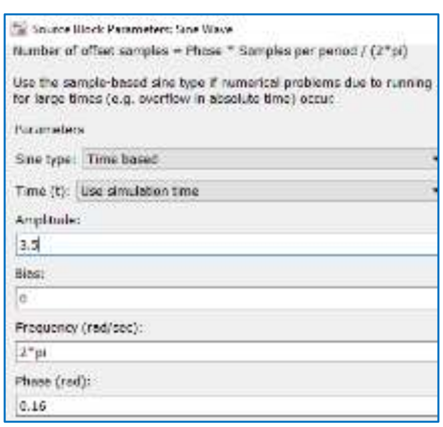
unde

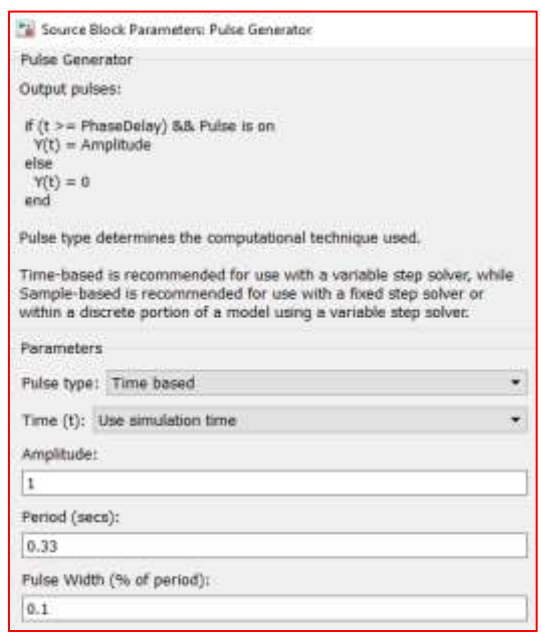
$$f_p(t) = \sum_{k\in N} \delta(t-k\cdot h)\ . \quad (14)$$

Notă: Prin definiție, funcția pieptene este o sumă de impulsuri unitare active la momentele k·h, unde h este pasul de eșantionare, iar k∈**N**.

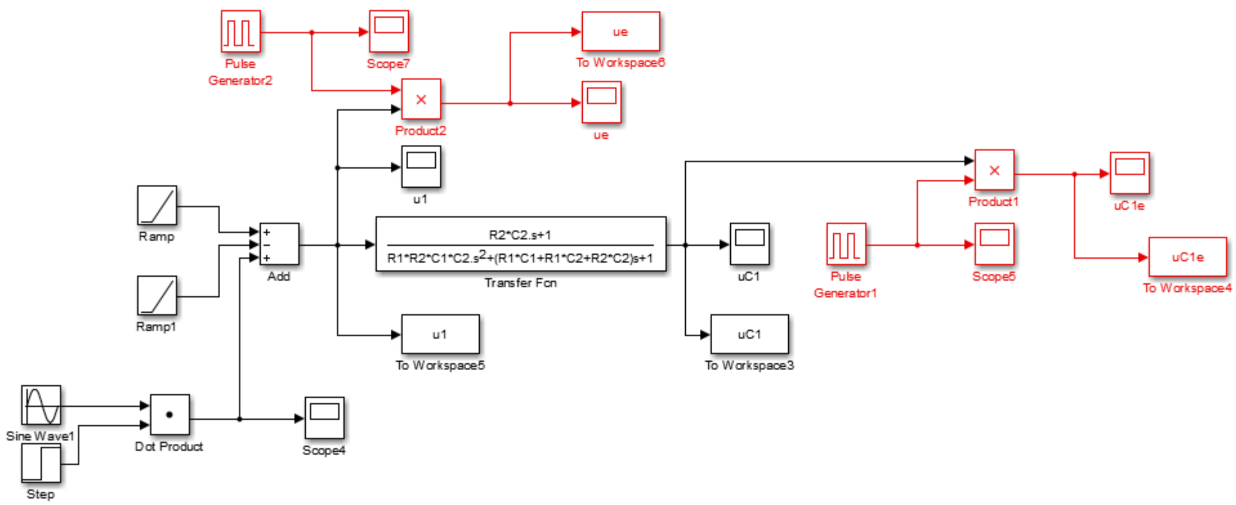
În modelul Simulink, funcția pieptene (14) este generată cu aproximație, deci nu în mod ideal, cu ajutorul blocului „Pulse Generator”, la ieșirea căruia se obțin impulsuri dreptunghiulare cu o lățime egală cu o cotă parte din h numită factor de umplere sau lățime a impulsului. Aproximarea este cu atât mai bună cu cât valoarea factorului de umplere este mai mică. În interfața blocului se setează valoarile amplitudinii (Amplitude = 1), pasului de discretizare h (Period = 0.33 secunde) și factorul de umplere (Pulse Width = 0.1 %).



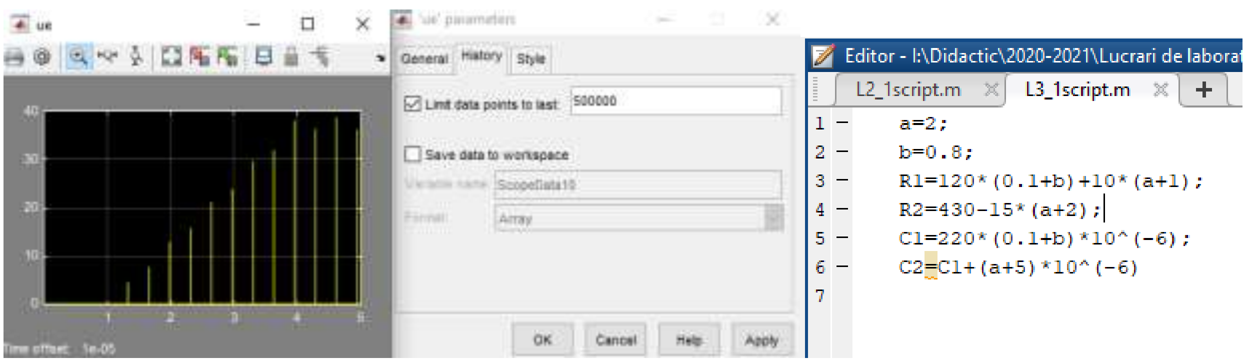




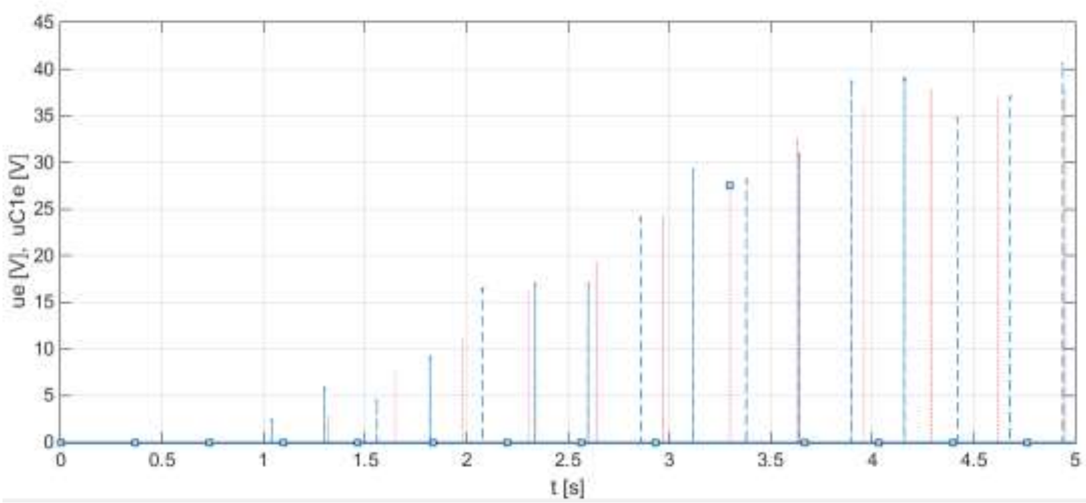
În următoarea figură este redat, în continuarea exemplului de la pag. 7 din lucrarea 2, un model Simulink care eșantionează semnalele de intrare și de ieșire ale circuitului cu doi cuadripoli. Semnalul de intrare este eșantionat cu pasul h_1=0.26 secunde (Pulse Generator 2), iar semnalul de ieșire cu pasul h_2 = 0,33 secunde (Pulse Generator 1). Completările făcute față de modelul din lucrarea precedentă apar în figură cu roșu.



Mai jos este redată imaginea de pe osciloscopul „ue”, o setare a acestuia, respectiv fișierul script atașat modelului Simulink.



Semnalele eșantionate $\{u_e[t]\}_{t\in N}$ și $\{u_{C1e}[t]\}_{t\in N}$ au aspectul din figură. S-a folosit comanda plot(t,ue,t,uC1e).



4. Transformata z

- *Transformata **z** se aplică semnalelor în timp discret şi operațiilor care se efectuează cu astfel de semnale, adică modelelor matematice ale sistemelor în timp discret*. Semnalele în timp discret sunt şiruri de valori definite pe mulţimea numerelor întregi sau naturale (sau pe altă mulţime discretă inclusă în acestea).

Fie semnalul unilateral în timp discret $\{f[t]\}_{t\in N} = \{f[0], f[1], f[2], \cdots, f[n], \cdots\}$, parametrul $z \in C$ și suma:

$$\sum_{f,n} = f[0] + f[1]\cdot z^{-1} + f[2]\cdot z^{-2} + \cdots + f[n]\cdot z^{-n} \,. \quad (15)$$

În caz de convergenţă, rezultatul este o funcţie de parametrul z. Ea se numeşte *transformată **z** a semnalului (şirului)* $\{f[t]\}_{t\in N}$ (*transformata **z** unilaterală*) și se obține prin trecere la limită în (15) pentru n→∞:

$$f(z) = \lim_{n\to\infty} \sum_{f,n} \,. \qquad (16)$$

Domeniul de valori al lui z pentru care limita există se numeşte *domeniu de convergenţă al transformatei* **z**.

Semnalelor (şirurilor) bilaterale ($\{f[t]\}_{t\in Z}$) li se asociază în mod asemănător *transformata **z** bilaterală*, ca limită a sumei:

$$\sum_{f,Z} = \sum_{k\in Z} f[k] z^{-k} \,. \quad (17)$$

Pentru operația de asociere a transformatei **z** funcție de timp $\{f[t]\}_{t\in N/Z}$ și invers, folosim simbolizarea $\{f[t]\}_{t\in N/Z}$ □—▮ *f*(*z*) (haltera cu discuri).

- Și în cazul transformatei **z** se folosesc, de asemenea, diferite proprietăţi ale acesteia pentru a înlocui calculul în domeniul timp discret cu calculul algebric în domeniul operațional. Teoremele folosite cel mai frecvent sunt următoarele:

1. *Teorema de liniaritate*:
   $c_1\{f_1[t]\} + c_2\{f_2[t]\}$ □—▮ $c_1 f_1(z) + c_2 f_2(z)$, $\forall \{f_1[t]\}, \{f_2[t]\}$ funcţii original, $\forall\, c_1, c_2 \in R$. (18)
2. *Teorema translatării (deplasării) la dreapta*: dacă $\{f[t]\}$ este o funcție original bilaterală dreapta sau unilaterală având asociate condiții inițiale nule (semnal cauzal), și f(z) este imaginea acesteia ($\{f[t]\}$ □—▮ *f(z)*), iar $\{\tilde{f}[t]\}_{t\in N} = \{f[t-n]\}_{t\in N}$ este translatata lui $\{f[t]\}$ cu n pași la dreapta (n întreg pozitiv), atunci:
   $\{f[t-n]\}$ □—▮ $z^{-n}\cdot f(z)$. (19)

În enunțul de mai sus, prin condiții inițiale se înțelege șirul de valori: *f*[-1], *f*[-2], …, *f*[-*n*].

3. *Teorema translatării (deplasării) la stânga*: dacă $\{f[t]\}$ este o funcție original (semnal cauzal) și f(z) este imaginea acesteia ($\{f[t]\}$□—▮ *f(z)*), iar $\{\tilde{f}[t]\}_{t\in N} = \{f[t+n]\}_{t\in N}$ este translatata lui $\{f[t]\}$ cu n pași la stânga (n întreg pozitiv), atunci:
   $\{f[t+n]\}$ □—▮ $z^{n}\cdot\{f(z) - f[0] - f[1]\cdot z^{-1} - f[2]\cdot z^{-2} - \ldots - f[n-1]\cdot z^{-(n-1)}\}$. (20)
4. *Teorema sumei de convoluție – se va discuta în cadrul altei lucrări.*

- În tehnică asociem de cele mai multe ori transformata **z** semnalelor în timp discret obţinute prin eşantionarea unor semnale în timp continuu, *f(t)*, cu pas constant, la momente de eşantionare $t_k = kh$. Pentru a surprinde ceea ce se întâmplă cu informația conținută de semnalele *f(t)* între momentele de eşantionare, se foloseşte ***transformata z modificată***. Ea este asociată prin formule similare cu (15) și (16) unor şiruri de eşantioane prelevate la momentele $t_{k,\vartheta} = kh + \vartheta h$, unde $\vartheta \in [0,1)$.
- În practică se lucrează cu transformate Laplace şi cu transformate **z** precalculate, disponibile în tabele de transformare (v. Lucrarea de laborator nr. 1). Asocierea de transformată Laplace sau **z** unui semnal din domeniul timp (semnal original) o denumim „operație directă”. Tabelele de transformare permit și operația inversă, adică obținerea funcției original, când se dă imaginea operațională. În cazul timp discret tabele ne permit obținerea expresiei termenului general *f*[*t*] atunci când se cunoaște transformata *f*(z).

Tabelele de transformare au structura de mai jos cunoscută din Lucrarea de laborator nr. 1.

(1)	(2)	(3)	(4)
$f(t),\ t \geq 0$	$f(s)$	$f(z) = \mathcal{Z}\{f(s)\}$	$f_\vartheta(z) = \mathcal{Z}_\vartheta\{f(s)\}$

- În coloana (3), apare transformata **z** a şirului care se obţine din funcția *f(t)*, din coloana (1), prin eşantionare la momentul *t=kh*, iar în coloana (4) transformata **z** modificată corespunzătoare eşantionării semnalului *f(t)* la momentele $t_{k,\vartheta} = kh + \vartheta h$. Prin notaţia $\mathcal{Z}\{\ f(s)\}$, $\mathcal{Z}_\vartheta\{f(s)\}$ facem următoarea asociaţie de idei: *f(z)*, respectiv $f_\vartheta(z)$ sunt transformatele **z** asociate şirurilor de valori care se obţin prin eşantionarea originalului lui *f(s)* la momentele $t_k=kh$, respectiv $t_{k,\vartheta} = kh + \vartheta h$.

5. Exemple:

A) Să se calculeze transformatele z ale șirurilor $\{f_1[t]\}_{t\in N} = \{f[t-2]\}_{t\in N}$ și $\{f_2[t]\}_{t\in N} = \{f[t+3]\}_{t\in N}$ cu ajutorul transformatei z a semnalului $\{f[t]\}_{t\in N} = \{1, 2, 0, 5, -3, 0, ..., 0, ...\}$, știind că $f[t] = 0,\ t\in Z\_$.

Soluție: Întrucât $f[t] = 0,\ t \geq 5$, nu mai este necesară trecerea la limită în (16). Transformata z este

$$f(z) = 1+2\cdot z^{-1}+5\cdot z^{-3}-3\cdot z^{-4}\ . \qquad (21)$$

Semnalul $\{f_1[t]\}_{t\in N}$ se obține prin translatarea la dreapta a semnalului $\{f[t]\}_{t\in N}$ cu 2 pași: $\{f_1[t]\}_{t\in N} = \{0, 0, 1, 2, 0, 5, -3, 0, ..., 0, ...\}$. Conform (19), rezultă

$$f_1(z) = z^{-2}f(z) = z^{-2}+2\cdot z^{-3}+5\cdot z^{-5}-3\cdot z^{-6}\ . \qquad (22)$$

Semnalul $\{f_2[t]\}_{t\in N}$ se obține prin translatarea la stânga a semnalului $\{f[t]\}_{t\in N}$ cu 3 pași: $\{f_2[t]\}_{t\in N} = \{5, -3, 0, ..., 0, ...\}$. Se observă că se pierde o parte din informația conținută de $\{f[t]\}_{t\in N}$. Potrivit formulei (20) avem:

$$f_2(z) = z^3\{f(z) -1 - 2\cdot z^{-1}\} = z^3\{5\cdot z^{-3}-3\cdot z^{-4}\} = 5-3\cdot z^{-1}\ . \qquad (23)$$

Evident, rezultatele (22) și (23) se pot obține aplicând direct formula (16).

B) Să se determine forma operațională a MM în timp discret cu orientarea $u\rightarrow y$:

$$y[t]-5\cdot y[t-1]+2\cdot y[t-2] = u[t-1]-0.2\cdot u[t-2], \qquad (24)$$

știind că ambele semnale au condiții inițiale nule.

Soluție: Modelul (24) leagă termeni de același rang din 5 șiruri: $\{y[t]\}_{t\in N}$, $\{y[t-1]\}_{t\in N}$, $\{y[t-2]\}_{t\in N}$, $\{u[t-1]\}_{t\in N}$ și $\{u[t-2]\}_{t\in N}$. Condițiile inițiale fiind nule, ținând seama de (19) avem:

$$(24) \longmapsto y(z)-5\cdot z^{-1}\cdot y(z)+2\cdot z^{-2}\cdot y(z) = z^{-1}\cdot u(z)-0.2\cdot z^{-2}\cdot u(z).$$

C) Să se determine forma operațională a MM în timp discret cu orientarea $u\rightarrow x$:

$$x[t+1] = A\cdot x[t] + B\cdot u[t]\ , \qquad (25)$$

în care $x\in R^n$, $u\in R^m$, iar A și B sunt matrice constante cu dimensiuni adecvate.

Soluție: Modelul (25) leagă termeni de același rang ai șirurilor: $\{x[t]\}_{t\in N}$, $\{x[t+1]\}_{t\in N}$ și $\{u[t]\}_{t\in N}$. Ținând seama de (20) avem:

$$(25) \longmapsto z\cdot(x(z) - x[0]) = A\cdot x(z) + B\cdot u(z). \qquad (26)$$

6. Tema de casă Nr. 3[1]

Nume și prenume	*Nr. matricol*	*S_1 = suma cifrelor numărului matricol* *S_2 = suma cifrelor impare din numărul matricol*	*a = S_1mod7* *b = S_2mod3*	*Data completării formularului*

TEMA DE CASĂ NR. 3

(Tema de casă se depune pe CV în săptămâna consecutivă celei în care s-a efectuat lucrarea de laborator. Formularul completat se depune în format pdf.)

1.1. Pentru circuitul din fig. -a- de la pag. 2 din lucrarea de laborator avem R_1 = 10 kΩ, C_1 = 420 μF, R_2 = (100+5a) kΩ, C_2 = (180+2b) μF. Să se particularizeze numeric modelul operațional (10).

R_1 = ..., C_1 = ..., R_2 = ..., C_2 = ...	*Se inserează rezultatul.*

1.2. Circuitul din figura -a- de la pag. 2 din lucrarea de laborator se consideră ca sistem orientat $u \rightarrow i_2$. Să se determine un MM-II în domeniul timp care leagă cele două semnale.

Se inserează calcul prin care se ajunge la MM-II cerut.

1.3. Se consideră modelul Simulink de la pag. 4 din lucrarea de laborator. Să se eșantioneze semnalul (12) cu pasul h = 0.2·(1+b) secunde pentru un interval de timp de 6 secunde.

Se inserează interfața generatorului de funcțe pieptene și imaginea semnalului eșantionat.

1.4. Reluați simularea cu modelul Simulink de la pag. 5 din lucrarea de laborator pentru valorile a și b personalizate.

Se inserează interfețele generatoarele de funcții pieptene și rezultatele conform figurii din lucrarea de laborator.

2.1. Soluțiile exemplelor A), B) și C) de la pag. 8 nu depind de pasul de discretizare h. Comentați acest fapt.

Se inserează comentariul.

2.2 Semnalul $x(t) = 3.5\cdot\sin(2\cdot\pi\cdot t+0.16)$, $t \geq 0$ se eșantionează cu pasul h = (0.1 + S_1 + S_2). Scrieți termenul general x[t] al semnalului $\{x[t]\}_{t\in N}$ și calculați transformata z a semnalului discretizat.

Se inserează calculul termenului general.
Se inserează calculul transformatei z.

[1] Formularul cu tema de casă este disponibil pentru completare în fișierul TS_II-CTI_TC_03.docx.