LUCRAREA DE LABORATOR NR.4

SISTEMUL MASĂ-RESORT-AMORTIZOR. REFACEREA SEMNALELOR. ELEMENTUL DE ÎNTÂRZIERE UNITARĂ

1. Obiective

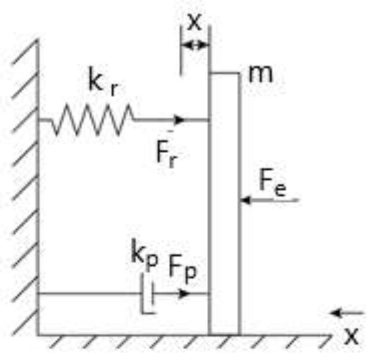
- modelarea și studierea dinamicii unui sistem mecanic de ordinul II,
- operarea cu MM-II,
- familiarizarea cu problema refacerii semnalelor din eșantioane,
- familiarizarea cu operația de întârziere unitară.

2. Sistemul mecanic masă-resort-amortizor

- Pentru sistemul masă-resort-amortizor din figura alăturată, orientat de la forța exterioară F_e la deplasarea x, este valabil MM-II în timp continuu [1]:

  $$m \cdot \ddot{x}(t) + k_p \cdot \dot{x}(t) + k_r \cdot x(t) = F_e(t) \,. \quad (1)$$

  Modelul a rezultat din bilanțul forțelor care se exercită asupra masei m, masă care se poate deplasa fără frecare, stânga-dreapta, pe orizontală. Modelul este dedus în condiții idealizate (masa este redusă la un punct material, iar resortul și pistonul dezvoltă forțe proporționale cu deplasarea x, respectiv cu viteza de deplasare dx/dt).



- Scopul urmărit în continuare este studierea, prin simulare cu modele Simulink, a comportării acestui sistem. Modelele se asociază diferitelor forme de rescriere a MM (1). Trei dintre acestea sunt:

  a) *Forma bazată pe folosirea de operații de integrare* cărora în domeniul operațional le corespunde înmulțirea cu 1/s a imaginii semnalului de integrat:

  $$\begin{cases} \dot{x}(t) = \int_0^t \ddot{x}(\tau)\cdot d\tau \,, & \dot{x}(0) = v0 \\ x(t) = \int_0^t \dot{x}(\tau)\cdot d\tau \,, & x(0) = x0 \\ \ddot{x}(t) = \dfrac{1}{m}\cdot\left(F_e(t) - k_p\cdot\dot{x}(t) - k_r\cdot x(t)\right) & \end{cases} \,. \quad (2)$$

  v0 și x0 sunt valorile inițiale ale vitezei $\dot{x}(t)$, respectiv deplasării x(t).

  b) *Forma bazată pe trecerea relației (1) în domeniul operațional* (model bazat pe funcție de transfer):

  $$x(s) = \frac{1}{m\cdot s^2 + k_p\cdot s + k_r}\cdot F_e(s) \,, \quad x(0) = x0 \,, \quad \dot{x}(0) = v0 \,. \qquad (3)$$

  c) *Forma bazată pe variabile de stare,* care se obține considerând poziția $x_1(t) = x(t)$ și viteza $x_2(t)$=dx(t)/dt ca variabile de stare ale sistemului. Rezultă:

[1] Modelul este stabilit în prima lecție de curs (Dragomir, T.L., Teoria sistemelor – curs pentru anul II CTI, 2021).

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t)\,, \quad x_1(0) = x0 \\ \dot{x}_2(t) = \dfrac{1}{m}\cdot\left(F_e(t) - k_p\cdot x_2(t) - k_r\cdot x_1(t)\right), \quad x_2(0) = v0 \end{cases} \tag{4}$$

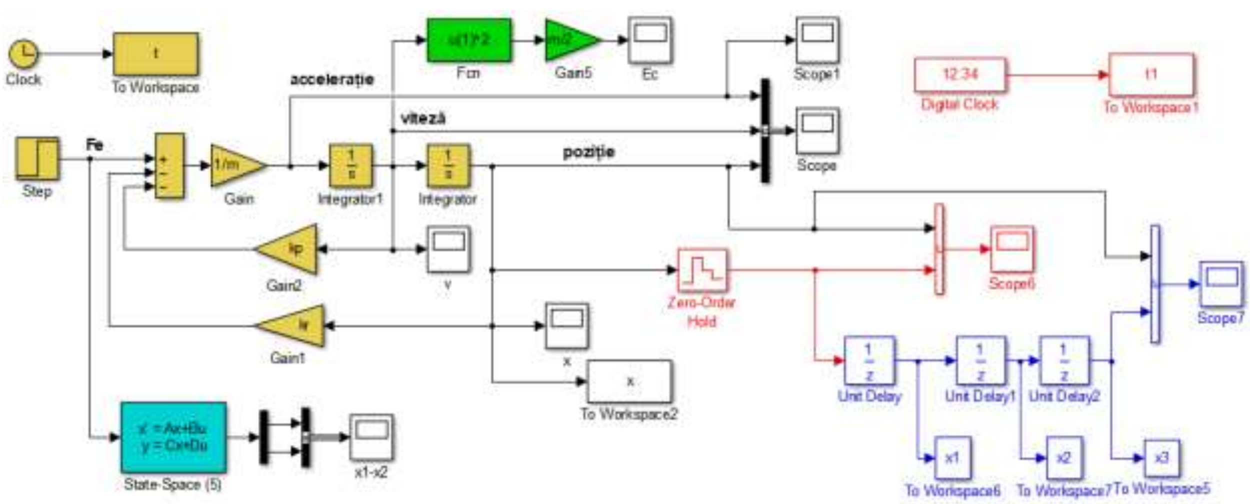
În ipoteza orientării $F_e \rightarrow \{x,\ \dot{x}\} = \{x_1, x_2\}$, din (4) obținem MM-ISI:

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\dfrac{k_r}{m} & -\dfrac{k_p}{m} \end{bmatrix} \cdot \left[\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}\right] + \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{m} \end{bmatrix} \cdot [F_e(t)] \\ \left[\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix}\right] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \left[\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}\right] \end{cases} . \tag{5}$$

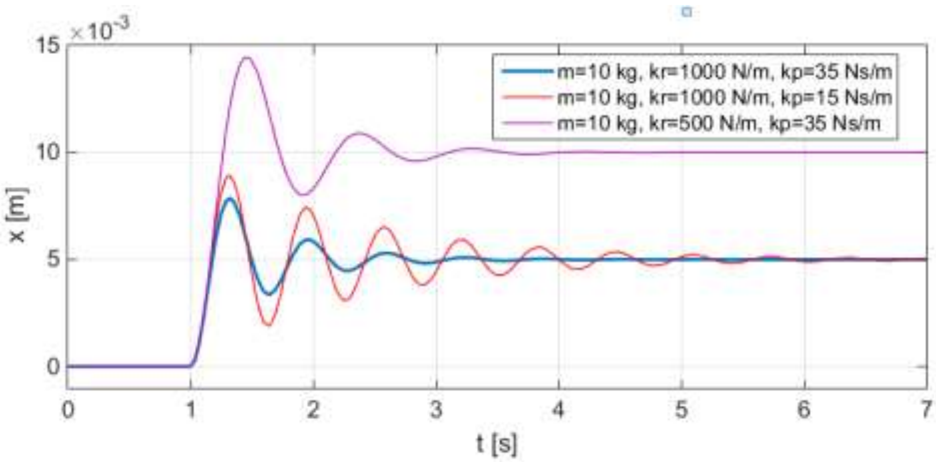
Cu modelele (2) și (4) putem calcula diferite alte mărimi de interes, de exemplu energia cinetică $E_c(t)$ înmagazinată în masa m aflată în mișcare, energia potențială $E_p(t)$ înmagazinată în resort și energia mecanică totală E(t):

$$E_c(t) = \frac{1}{2}\cdot m\cdot\dot{x}^2(t) = \frac{1}{2}\cdot m\cdot x_2^2(t)\ ,\ E_p(t) = \int_0^x \underbrace{k_r\cdot x}_{F_r}\cdot dx = \frac{k_r}{2}\cdot x^2(t) = \frac{k_r}{2}\cdot x_1^2(t),\ E(t) = E_c(t) + E_p(t).$$

- În figura de mai jos este redat modelul Simulink care implementează relațiile (2) – blocurile colorate cu galben- și (5) – blocul colorat cu cian. La aceste blocuri s-au adăugat blocurile colorate cu verde destinate calculării energiei cinetice. Totodată, facem abstracție de blocurile reprezentate cu roșu și albastru.



- O tema de studiu importantă, legată de dinamica sistemului, este stabilirea modului în care parametri k_r și k_p influențează comportarea sistemului. În acest sens, în figura de mai jos sunt redate 3 cazuri, ce corespund la trei perechi de valori $\{k_r,\ k_p\}$. Ele redau răspunsul sistemului la semnalul treaptă $F_e = 5\cdot\sigma(t\text{-}1)$. Se poate observa influența modificării coeficientului de elasticitate al resortului k_r, respectiv influența coeficientului k_p al amortizorului.



3. Operația de reconstrucție a semnalelor

- Operația de reconstrucție servește pentru formarea unui semnal în timp continuu dintr-un semnal eșantionat (semnal în timp discret). Există mai multe modalități de reconstrucție. În continuare, ne rezumăm la reconstrucția prin *extrapolare de ordinul zero*. Operația asociază unui semnal eșantionat cu pasul h un semnal scară cu trepte de durată h și amplitudini egale cu valorile semnalului eșantionat.

  În acest context, extrapolatorul de ordinul zero este o interfață care, la aplicarea unui semnal de intrare în timp discret, $\{u[k]\}_{k\in N}$ de pas h, răspunde cu un semnal de ieșire în timp continuu:

$$y(t) = \sum_{k\in N}\left[u[k]\cdot \mathrm{rect}\left(\frac{t-0.5\cdot h-k\cdot h}{h}\right)\right]. \qquad (6)$$

  În (6), rect(t) este așa-numita *funcție rectangulară*:

$$\mathrm{rect}(t) = \begin{cases} 0, & |t| > \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}, & |t| = \frac{1}{2} \\ 1, & |t| < \frac{1}{2} \end{cases} \quad . \ (7)$$

  Detaliind funcția rectangulară din (6), avem:

$$\mathrm{rect}\left(\frac{t-0.5\cdot h-k\cdot h}{h}\right) = \begin{cases} 0, & \left|\frac{t-0.5\cdot h-k\cdot h}{h}\right| > \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}, & \left|\frac{t-0.5\cdot h-k\cdot h}{h}\right| = \frac{1}{2} \\ 1, & \left|\frac{t-0.5\cdot h-k\cdot h}{h}\right| < \frac{1}{2} \end{cases} = \begin{cases} 0, & t\in(-\infty, k\cdot h)\cup(k+1)\cdot h, \infty) \\ \frac{1}{2}, & t\in\{k\cdot h, \ (k+1)\cdot h\} \\ 1, & k\cdot h < t < (k+1)\cdot h \end{cases} \quad .$$

- În utilitarul Simulink, operația de extrapolare este realizată cu blocul ZOH (Zero-Order Hold). Funcția blocului este mai complexă decât ceea ce exprimă relația (6). Astfel, dacă la intrarea blocului se aplică un semnal analogic f(t), $t \geq 0$, blocul ZOH realizează două operații: pe de-o parte eșantionează semnalul f(t) cu pasul h, setabil, reținând, secvențial, eșantioanele f[k] = k·h, k = 0, 1, 2, … , iar pe de altă parte prelucrează aceste eșantioane, succesiv, potrivit relației (6).

  Notă: Ansamblul celor două operații poate fi exprimat matematic asociind eșantioanelor rezultate în cursul primei operații de mai sus semnalul analogic format din impulsuri Dirac

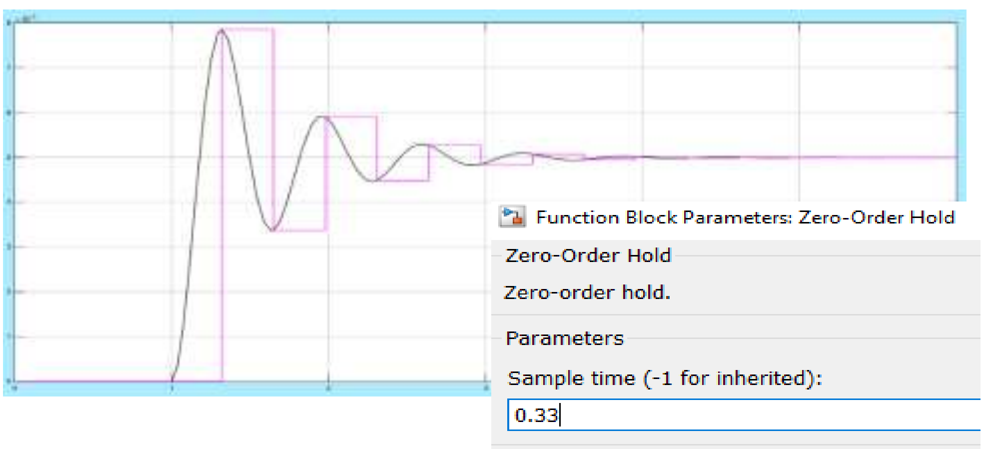
$$u(t) = f(t) \cdot \sum_{k \in N} \delta(t - k \cdot h)\,, \quad (8)$$

unde $\sum_{k \in N} \delta(t - k \cdot h)$ este restricția funcției pieptene $f_p(t)$ la mulțimea R_+, și extrapolând apoi valorile lui u(t) de la momentele t = k·h, pe subintervalele (k·h, (k+1)·h).

Întrucât blocul ZOH efectuează atât operații în timp continuu cât și operații în timp discret este necesară introducerea în modelul Simulink a ceasului de timp discret (Digital Clock) din libraria Sources.

Pentru a exemplifica utilizarea blocului ZOH, extindem modelul Simulink din secțiunea 2 cu blocurile reprezentate cu roșu. Ele realizează eșantionarea și refacerea semnalului de poziție. Parametri sistemului masă-resort-amortizor sunt m = 10 kg, $k_r = 10^3$ N/m, k_p = 35 Ns/m, x0 = 0 m, v0 = 0 m/s.

- În figura următoare este redată imaginea obținută cu osciloscopul 6. Cu negru apare semnalul „poziție” (deplasarea x(t)) iar cu violet semnalul „poziție” refăcut după o eșantionare cu pasul h = 0.33 secunde. Totodată, apar interfața blocului ZOH și modul de parametrizare a acestuia.



4. Elementul de întârziere unitară

- Elementul de întârziere unitară, numit și operator de întârziere cu un pas, are rolul de a translata cu un pas la dreapta semnalul în timp discret aplicat la intrare. Ca urmare, dacă la intrare i se aplică semnalul $\{u[t]\}_{t \in N}$, atunci la ieșire se obține semnalul $\{y[t]\}_{t \in N}$ = {y0, u[0], u[1], ...} conform modelului:

$$y[t+1] = u[t],\ t \in N, \quad y[0] = y0\,. \qquad (9)$$

Dacă y0 = 0 (condiție inițială nulă), atunci în domeniul operațional avem:

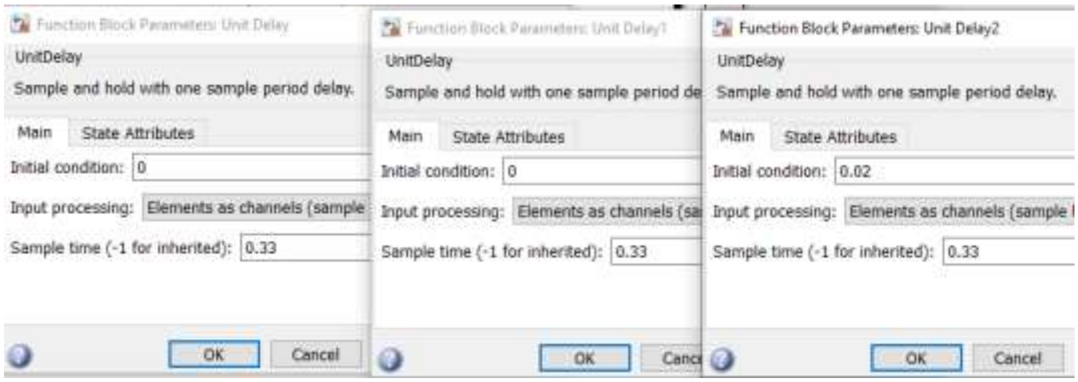
$$(9) \;\circ\!\!-\!\!\bullet\; z \cdot y(z) = u(z)$$

sau

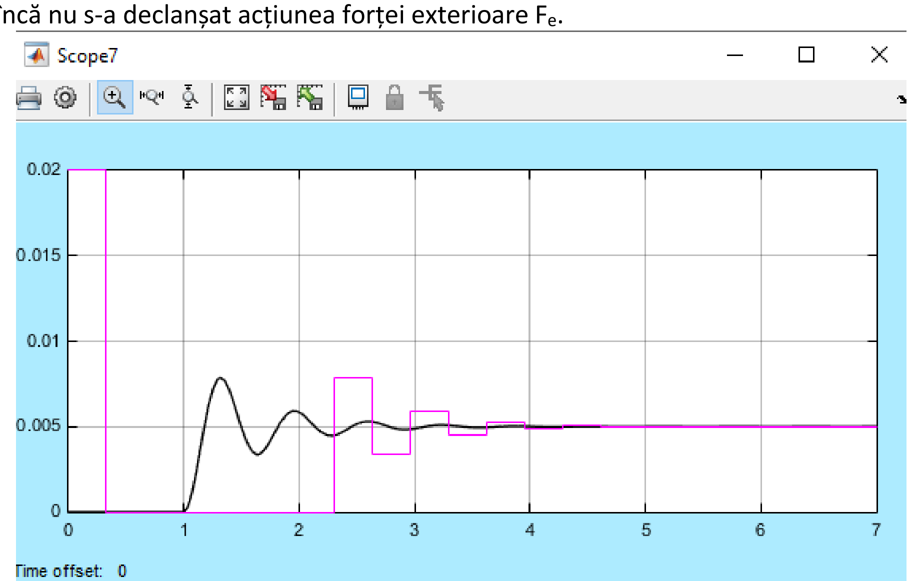
$$y(z) = z^{-1} \cdot u(z)\,. \qquad (10)$$

- În Simulink, operației (9) îi corespunde blocul „Unit Delay”, simbolizat prin „z^{-1}” (librăria Discrete). El reține și întârzie semnalul de intrare cu o perioadă h pe care o specifică utilizatorul în interfața blocului.

- Pentru ilustrarea funcționării blocului continuăm exemplul din secțiunile anterioare, adâugând blocurile reprezentate cu albastru. Figura cu interfețele celor trei blocuri de întârziere unitară ilustrează modul în care au fost setate condițiile inițiale și faptul că toate operează cu același pas de discretizare ca blocul ZOH, h = 0.33 secunde.



Următoarea figură conține imaginea care se obține pe osciloscopul 7. Ea ilustrează cu negru semnalul x(t) și cu violet semnalul care rezultă prin extrapolarea de ordin zero a semnalului de la ieșirea blocului ZOH, retardat cu trei pași de discretizare (3·h). Pentru a conștientiza efectul inițializării blocurilor Unit Delay, ultimul bloc a fost inițializat cu valoarea 0.02 m (2 cm). Ea apare pe oscilogramă la momentul t = 0, când încă nu s-a declanșat acțiunea forței exterioare F_e.



5. Tema de casă Nr. 4 [2]

Nume și prenume	*Nr. matricol*	*S_1 = suma cifrelor numărului matricol* *S_2 = suma cifrelor pare din numărul matricol*	*a = S_1mod7* *b = S_2mod3*	*Data completării formularului*

[2] Formularul cu tema de casă este disponibil pentru completare în fișierul TS_II-CTI_TC_04.docx.

TEMA DE CASĂ NR. 4

(Tema de casă se depune pe CV în săptămâna consecutivă celei în care s-a efectuat lucrarea de laborator. Formularul completat se depune în format pdf.)

Se consideră modelul Simulink de la pag. 2 și parametrii a și b din fișierul script setați cu valorile de mai sus. Pasul de discretizare a timpului rămâne cel din lucrare. Intervalul de timp de simulare va fi de $7+0.2\cdot(b+1)^a$ secunde.

1.1. Să se determine graficul de variație a energiei cinetice înmagazinate în corpul de masă m.

k_r = ... N/m, k_p = ... Ns/m	*Se inserează graficul $E_c(t)$.*
Comentariu	*Se interpretează fizic rezultatul obținut.*

1.2. Să se reprezinte și să se compare graficele x(t) obținute cu cele două modele (MM-II și MM-ISI).

Se inserează oscilogramele care conțin cele două semnale x(t) și se comentează rezultatul.

1.3. Să se adapteze modelul Simulink din lucrare, astfel încât să calculeze și să permită oscilografierea energiei potențiale înmagazinată în resort. Se va folosi formula din lucrare.

Se inserează o figură cu partea modificată a modelului (sau cu întreg modelul modificat) și graficul $E_p(t)$.

1.4. Să se vizualizeze semnalul de la ieșirea blocului „Unit Delay 1” și să se interpreteze rezultatul.

Se inserează o figură cu o oscilogramă sau un grafic. Se comentează semnalul din figură.

1.5. Dacă răspunsul de la punctul 1.2 este oscilant, modificați valoarea parametrului k_r, astfel încât răspunsul să nu mai fie oscilant, iar dacă răspunsul de la punctul 1.2 nu este oscilant, modificați valoarea parametrului k_r, astfel încât să răspunsul să fie oscilant. Explicați raționamentul făcut și arătați efectul modificării.

Se inserează explicația pentru modificarea făcută și se inserează o figură cu o oscilogramă sau un grafic al noului răspuns.

2. Să se aproximeze valoarea x(2) a sistemului de la punctul 1.2. de mai sus, pe baza valorilor conținute în vectorii t și x din fereastra „To work space”, sau pe altă cale.

Se inserează valoarea găsită și se explică cum s-a făcut aproximare (este posibil să se găsească și o valoare exactă).