ДЗ 1.

ПСМО

Сухма Диана, 182.

1) $$D_{KL}[f(y|\theta), f(y|\varphi)] = \frac{1}{2} I(\theta)(\varphi-\theta)^2 + O((\varphi-\theta)^3)$$

Знаем, что $D_{KL}(p||q) = CE(p,q) - H(p)$.

а) т.е. в нашем случае:

$$D_{KL}[f(y|\theta), f(y|\varphi)] = CE(f(y|\theta), f(y|\varphi)) - H(y|\theta)$$

Из подсказки в задании и лекций знаем:

$H(f) = -\mathbb{E}(\ln(f))$, $CE(f,g) = -\mathbb{E}_f(\ln g)$ (в тех е случаях)

Для удобства переобозначим

$$[f(y|\theta) = f_\theta, \; f(y|\varphi) = f_\varphi]$$

И будем решать задачу для случая функции плотности.

$$D_{KL} = -\left(\mathbb{E}_\theta \ln f_\varphi - \mathbb{E}_\theta \ln f_\theta\right) = \mathbb{E}_\theta \ln f_\theta - \mathbb{E}_\theta \ln f_\varphi$$

Отлично. Теперь поймем, что О большое в формуле могло получиться только из-за разложения в ряд Тейлора и разложим наши логарифмы в ряд Тейлора:

$$\ln f_\varphi \underset{\varphi\to\theta}{=} \ln f_\theta + (\ln f_\theta)'_\varphi(\varphi-\theta) + \frac{1}{2}(\ln f_\theta)''_{\varphi\varphi}(\varphi-\theta)^2 + \underline{O}((\varphi-\theta)^3)$$

Теперь возьмем матожидание по θ:

$$\mathbb{E}_\theta \ln f_\varphi = \mathbb{E}_\theta(\ln f_\theta) + \mathbb{E}_\theta((\ln f_\theta)'_\varphi\cdot(\varphi-\theta)) + \frac{1}{2}\mathbb{E}_\theta((\ln f_\theta)''_{\varphi\varphi}(\varphi-\theta)^2) + \mathbb{E}(\underline{O}((\varphi-\theta)^3))$$

т.к. выполнены условия регулярности

Заметим, что $\mathbb{E}_\theta((\ln f_\theta)'_\varphi(\varphi-\theta)) = (\varphi-\theta)\underbrace{\mathbb{E}((\ln f_\theta)'_\varphi)}_{} = 0$

(было на "0" лекции)

Заметим, что

$$\frac{1}{2}\mathbb{E}_\theta((\ln f_\theta)''_{\varphi\varphi}(\varphi-\theta)^2) = \frac{1}{2}(\varphi-\theta)^2\underbrace{\mathbb{E}((\ln f_\theta)''_{\varphi\varphi})}_{-I(\theta)}$$

$-I(\theta)$ (по определению)

~~и $\mathbb{E}(\underline{O}((\varphi-\theta)^3)) = \underline{O}((\varphi-\theta)^3)$~~

~~т.к. $\mathbb{E}$ const = const~~.

$\mathbb{E}\left(\underline{O}(|\varphi-\theta|^3)\right)=?$

Знаем, что остаточный член ряда Тейлора содержит $f'''(x_0)$.

т.е. в нашем случае

$$(\ln f_\theta)'''_{\varphi\varphi\varphi}$$

Т.к. выполнены условия регулярности, то

$$\left|\frac{\partial^3 \ln f_\theta}{\partial \varphi^3}\right| < H(y) \quad \text{(ссылка на источник приложена)}$$

$$\mathbb{E}_\theta(H(x)) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_\theta(y)\, H(y)\, dx \leq \varepsilon \text{ - не зависит от } y$$

$\Rightarrow O(|\varphi-\theta|^3)$ не зависит от y

$$\Rightarrow \mathbb{E}\left(\underline{O}(|\varphi-\theta|^3)\right) = \underline{O}(|\varphi-\theta|^3).$$

$$\Rightarrow \mathbb{E}_\theta \ln f_\varphi = \mathbb{E}_\theta \ln f_\theta - \frac{1}{2} I(\theta)|\varphi-\theta|^2 + \underline{O}(|\varphi-\theta|^3)$$

$$\Rightarrow \mathbb{E}_\theta \ln f_\theta - \mathbb{E}_\theta \ln f_\varphi = \frac{1}{2} I(\theta)|\varphi-\theta|^2 \underbrace{-\underline{O}(|\varphi-\theta|^3)}_{= +\underline{O}(|\varphi-\theta|^3)}$$

т.е. $D_{KL}(f_\theta, f_\varphi) = \frac{1}{2} I(\theta)|\varphi-\theta|^2 + \underline{O}(|\varphi-\theta|^3)$

b) Зафиксируем D_{KL}.

Если D_{KL} является константой, то получим:

$$\frac{1}{2} I(\theta)|\varphi-\theta|^2 + O(|\varphi-\theta|^3) = const$$

Таким образом понятно, что чем больше информация Фишера, тем меньше должно быть $|\varphi-\theta|$ и наоборот! Таким образом, при большей информации Фишера ML оценки лежат ближе к истинному параметру.

2]

$$f(x|q) = \begin{cases} \frac{2x}{q} e^{\frac{-x^2}{q}}, & x > 0 \\ 0 & , x \le 0 \end{cases} \qquad ! \; q > 0 \; !$$

$X_1 \dots X_N$ - выборка

a) $\hat{q}_{ML} = ?$

1) $p(x|q) = \frac{2x_1}{q} e^{\frac{-x_1^2}{q}} \cdot \frac{2x_2}{q} \cdot e^{\frac{-x_2^2}{q}} \cdot \dots \cdot \frac{2x_N}{q} e^{\frac{-x_N^2}{q}} =$

$= \left(\frac{2}{q}\right)^N (x_1 \cdot \dots \cdot x_N) \left(e^{\frac{-x_1^2}{q}} \cdot \dots \cdot e^{\frac{-x_N^2}{q}}\right)$

2) $L(x|q) = \ln(p(x|q)) = \ln\left(\frac{2}{q}\right)^N + \ln(x_1 \cdot \dots \cdot x_N) +$

$+ \ln\left(e^{\frac{-x_1^2}{q}} \cdot \dots \cdot e^{\frac{-x_N^2}{q}}\right) = N \ln\frac{2}{q} + \sum_{i=1}^{N} \ln x_i - \frac{1}{q}\sum_{i=1}^{N} x_i^2 =$

$= N \ln 2 - N \ln q + \sum_{i=1}^{N} \ln x_i - \frac{1}{q} \sum_{i=1}^{N} x_i^2$

3) $\frac{\partial L}{\partial q} = -\frac{N}{q} + \frac{1}{q^2} \sum_{i=1}^{N} x_i^2$

$\frac{\partial L}{\partial q} = 0 \iff -\frac{N}{\hat{q}} + \frac{1}{\hat{q}^2} \sum_{i=1}^{N} x_i^2 = 0$

$-\frac{1}{\hat{q}}\left(N - \frac{1}{\hat{q}} \sum x_i^2\right) = 0.$

$N - \frac{1}{\hat{q}} \sum x_i^2 = 0 \Rightarrow \hat{q}_{ML} = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i^2}{N}$

b) $(\hat{q}^2)_{ML} = ?$

По св-ву инвариантности оценок максимального правдоподобия (было на 2 курсе):

Если $\hat{\theta}$ - ML оценка для θ, то

$g(\hat{\theta})$ - ML оценка для $g(\theta)$.

Т.е. в нашем случае

$$(\hat{q}^2)_{ML} = \left((\hat{q})_{ML}\right)^2 = \frac{\left(\sum_{i=1} x_i^2\right)^2}{N^2}$$

c) Постройте 95% довер. интервал для q.

Знаем общий вид доверительного интервала:

$$P\left(-1{,}96 < \frac{\hat{\theta}_{ML} - \theta}{\sqrt{D(\hat{\theta}_{ML})}} < -1{,}96\right) = 95\%$$

Найдем $D(\hat{\theta}_{ML})$.

$$I(\theta) = -\mathbb{E}\left(\frac{\partial^2 L}{\partial \theta^2}\right), \quad D(\theta) = \frac{1}{I(\theta)}$$

$$\frac{\partial L}{\partial q} = -\frac{N}{q} + \frac{1}{q^2}\sum_{i=1}^{N} x_i^2 \Rightarrow \frac{\partial^2 L}{\partial q^2} = \frac{N}{q^2} - \frac{2q}{q^4}\sum_{i=1}^{N} x_i^2 =$$

$$= \frac{N}{q^2} - \frac{2}{q^3}\sum_{i=1}^{N} x_i^2$$

$$-\mathbb{E}\left(\frac{\partial^2 L}{\partial q^2}\right) = \mathbb{E}\left(-\frac{\partial^2 L}{\partial q^2}\right) = -\frac{N}{q^2} + \frac{2}{q^3}\sum_{i=1}^{N} x_i^2 = \mathbb{E}\left(-\frac{N}{q^2}\right) + \mathbb{E}\left(\frac{2}{q^3}\sum_{i=1}^{N} x_i^2\right)$$

$$\mathbb{E}\left(-\frac{N}{q^2}\right) = -\frac{N}{q^2}$$

$$\mathbb{E}\left(\frac{2}{q^3}\sum_{i=1}^{N} x_i^2\right) = \frac{2}{q^3}\,\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{N} x_i^2\right) = ?$$

$$\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{N} x_i^2\right) \underset{\text{т.к. независ. одинаково распред.}}{=} N\cdot \mathbb{E}x_1^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \frac{2x}{q} e^{-\frac{x^2}{q}}\,dx = N\cdot e^{-\frac{x^2}{q}}(q+x^2)$$

$$\Rightarrow -\mathbb{E}\left(\frac{\partial^2 L}{\partial q^2}\right) = -\frac{N}{q^2} + \frac{2}{q^3}\cdot N\cdot e^{-\frac{x^2}{q}}(q+x^2) = I(q)$$

$$I(\hat{q}_{ML}) = \frac{-Nq + 2Ne^{-\frac{x^2}{q}}(q+x^2)}{q^3}$$

$$\Rightarrow D(\hat{q}_{ML}) = \frac{q^3}{-Nq + 2Ne^{-\frac{x^2}{q}}(q+x^2)}.$$

$$D(\hat{q}_{ML}) = \left[\hat{q}_{ML} = \sum_{i=1}^{N} x_i^2 / N\right] =$$

$$= \frac{\dfrac{\left(\sum_{i=1}^{N} x_i^2\right)^3}{N^3}}{-\cancel{N}\cdot\dfrac{(\sum x_i^2)}{\cancel{N}} + 2N\cdot e^{-x^2\cdot\frac{N}{\sum x_i^2}}\cdot\left(\dfrac{\sum x_i^2}{N}+x^2\right)} = \underbrace{\frac{\left(\sum_{i=1}^{N} x_i^2\right)^3}{N^3\left(-\sum x_i^2 + 2Ne^{-\frac{x^2 N}{\sum x_i^2}}\left(\frac{\sum x_i^2}{N}+x^2\right)\right)}}_{D(\hat{q}_{ML})}.$$

$\Rightarrow$

$$\theta \in \left(\frac{\sum_{i=1}^{N} x_i^2}{N} - 1{,}96 \cdot \sqrt{D(\hat{q}_{ML})} ; \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i^2}{N} + 1{,}96 \cdot \sqrt{D(\hat{q}_{ML})} \right)$$

3)

y_i	Bu	D	Bl
$\# y_i$	75	30	45
$P(y=y_i)$	p_1	p_2	$1-p_1-p_2$.

a) $p = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}$ $\hat{p}_{ML} = ?$

1) $P(p_1, p_2) = \binom{150}{75,30,45} \cdot p_1^{75} \cdot p_2^{30} (1-p_1-p_2)^{45}$

2) $L(p_1, p_2) = \ln(p(p_1,p_2)) = \underbrace{\ln\left(\binom{150}{75,30,45}\right)}_{C} + \ln p_1^{75} + \ln p_2^{30} + \ln (1-p_1-p_2)^{45} =$

$= C + 75 \ln p_1 + 30 \ln p_2 + 45 \ln (1-p_1-p_2).$

3) $\frac{\partial L}{\partial p_1} = \frac{75}{p_1} - \frac{45}{1-p_1-p_2}$ $\frac{\partial L}{\partial p_2} = \frac{30}{p_2} - \frac{45}{1-p_1-p_2}$

$\frac{\partial L}{\partial p_1} = 0, \frac{\partial L}{\partial p_2} = 0 \Leftrightarrow \frac{75}{\hat{p}_1} - \frac{45}{1-\hat{p}_1-\hat{p}_2} = 0, \frac{30}{\hat{p}_2} - \frac{45}{1-\hat{p}_1-\hat{p}_2} = 0$

$$\Rightarrow \frac{75}{\hat{p}_1} = \frac{30}{\hat{p}_2}$$

$$75\hat{p}_2 = 30\hat{p}_1 \Rightarrow \hat{p}_1 = 0,5, \hat{p}_2 = 0,2$$

$$\Rightarrow \hat{p}_{ML} = \begin{pmatrix} 0,5 \\ 0,2 \end{pmatrix}$$

b) $H_0: p_1 = 0,7$ $\quad$ ур. зн. = 5%.

$H_1: p_1 \neq 0,7$

1) $LR = ?$

$$LR = 2(L(\hat{\theta}_{ML}) - L(\theta_{H_0}))$$

$$L(\hat{p}_{ML}) = C + 75\ln 0,5 + 30\ln 0,2 + 45\ln 0,3 \approx$$

$$\approx C - 154,45.$$

$L(p_{H_0}) = ?$

$p_1 = 0,7$ подставим в $L(p_1, p_2)$:

$$L(p_1, p_2) = C + 75\ln 0,7 + 30\ln p_2 + 45\ln(0,3 - p_2)$$

$$L'_{p_2} = \frac{30}{p_2} - \frac{45}{0,3 - p_2}.$$

$$\frac{\partial L}{\partial p_2} = 0 \Rightarrow \frac{30}{p_2} - \frac{45}{0,3 - p_2} = 0 \Rightarrow 30(0,3 - p_2) = 45p_2 \Rightarrow 9 - 30p_2 = 45p_2$$

$$\Rightarrow p_2 = \frac{9}{75} = 0,12$$

Значит $p_{H_0} = \begin{pmatrix} 0,7 \\ 0,12 \end{pmatrix}$

$$L(p_{H_0}) = C + 75 \ln 0,7 + 30 \ln 0,12 + 45 \ln 0,18 \approx$$

$$\approx C - 167,52$$

$$\Rightarrow LR = 2(\cancel{C} - 154,45 - \cancel{C} + 167,52) = 2 \cdot 13,07 = 26,14$$

$$LR = 26,14 > 4 = \chi^2_{1\,crit}$$

$\Rightarrow H_0$ не принимается.

2) LM

т.к. нам нада только p1, то мы будем рассматривать случай со скалярами, а не с векторами.

т.е. $LM = \frac{(L'(\theta_{H_0}))^2}{D(L'(\theta_{H_0}))} = S_{H_0}^2 \cdot D^{-1}(S_{H_0})$ часть вектора

$L'^2_{p1} = \left(\frac{75}{p1} - \frac{45}{1-p1-p2}\right)^2 \Rightarrow L'(\theta_{H_0}) = \left(\frac{75}{0{,}7} - \frac{45}{0{,}18}\right)^2 \approx 20408{,}16$

$D(L'(\theta_{H_0})) = ?$

$$I(\theta) = E(-H)$$

было на лекции

$$E(-H) = \begin{pmatrix} \dfrac{np_1}{p_1^2} + \dfrac{n(1-p_1-p_2)}{(1-p_1-p_2)^2} & \dfrac{n(1-p_1-p_2)}{(1-p_1-p_2)^2} \\ \dfrac{n(1-p_1-p_2)}{(1-p_1-p_2)^2} & \dfrac{np_2}{p_2^2} + \dfrac{n(1-p_1-p_2)}{(1-p_1-p_2)^2} \end{pmatrix} =$$

$$= n \begin{pmatrix} \dfrac{1}{p_1} + \dfrac{1}{1-p_1-p_2} & \dfrac{1}{1-p_1-p_2} \\ \dfrac{1}{1-p_1-p_2} & \dfrac{1}{p_2} + \dfrac{1}{1-p_1-p_2} \end{pmatrix} \underset{H_0}{=} 150 \begin{pmatrix} \dfrac{1}{0{,}7} + \dfrac{1}{0{,}18} & \dfrac{1}{0{,}18} \\ \dfrac{1}{0{,}18} & \dfrac{1}{0{,}12} + \dfrac{1}{0{,}18} \end{pmatrix} =$$

$$= 1500 \begin{pmatrix} \dfrac{1}{7} + \dfrac{10}{18} & \dfrac{10}{18} \\ \dfrac{1}{18} & \dfrac{10}{12} + \dfrac{10}{18} \end{pmatrix} = \frac{1500}{18} \begin{pmatrix} \dfrac{88}{7} & 10 \\ 10 & 25 \end{pmatrix}$$

$$I^{-1}(\theta) = \frac{\cancel{18}^{\,3}}{\cancel{1500}_{\,250}} \begin{pmatrix} \dfrac{7}{60} & -\dfrac{7}{150} \\ -\dfrac{7}{150} & \dfrac{22}{375} \end{pmatrix} = D^{-1}$$

$$\Rightarrow \quad D(L'(\theta_{H_0}))^{-1} = \frac{3}{250} \cdot \frac{7}{60} = \frac{21}{250 \cdot 60}.$$

$$LM = 20408{,}16 \cdot \frac{21}{250 \cdot 60} \approx 28{,}57 > \chi^2_{crit} = 4$$

$\Rightarrow$ H_0 не принимается.

c) $H_0: \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,4 \\ 0,6 \end{pmatrix}$

$H_1: \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0,4 \\ 0,6 \end{pmatrix}$ уз. зн. = 5%

$W = ?$

$$W = (\hat{\theta}_{ML} - \theta_{H_0})^T \cdot D(\hat{\theta}_{ML})^{-1} (\hat{\theta}_{ML} - \theta_{H_0})$$

$$p_{ML} = \begin{pmatrix} 0,5 \\ 0,2 \end{pmatrix} \quad p_{H_0} = \begin{pmatrix} 0,4 \\ 0,6 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow (p_{ML} - p_{H_0}) = \begin{pmatrix} 0,1 \\ -0,4 \end{pmatrix}$$

$D = ?$

$$D(\theta) = I(\theta)^{-1} \Rightarrow D(\theta)^{-1} = I(\theta)$$

$$I(\theta) = \mathbb{E}(-H)$$

В нашем случае (идентичный пр. был на лекции)

$$\mathbb{E}(-H) = 150 \begin{pmatrix} \frac{1}{p_1} + \frac{1}{1-p_1-p_2} & \frac{1}{1-p_1-p_2} \\ \frac{1}{1-p_1-p_2} & \frac{1}{p_2} + \frac{1}{1-p_1-p_2} \end{pmatrix} =$$

$$= 150 \begin{pmatrix} 5,33 & 3,33 \\ 3,33 & 8,33 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 799,5 & 499,5 \\ 499,5 & 1249,5 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow W = \begin{pmatrix} 0{,}1 & -0{,}4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 799{,}5 & 499{,}5 \\ 499{,}5 & 1249{,}5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0{,}1 \\ -0{,}4 \end{pmatrix}.$$

$$= \begin{pmatrix} -119{,}85 & -449{,}85 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0{,}1 \\ -0{,}4 \end{pmatrix} = 167{,}955$$

$$\Rightarrow W = 167{,}955 > 6 = \chi^2_{2\,crit}.$$

$\Rightarrow H_0$ не принимается.

d) Постройте 95% довер. интервал для $p1-p2$.

Знаем, что оценки, полученные ММП ассимптотически нормальны.

Также знаем, что если $\hat{\theta}$ - ML оценка θ, то $g(\hat{\theta})$ - ML оценка $g(\theta)$ (2.b)

Т.е. $\hat{p}_1 - \hat{p}_2 = \widehat{p1 - p2}$ ассимптотически нормальна.

т.е. ~~$\sqrt{n}(\hat{p}1 - \hat{p}2 - (p1 - p2)) \xrightarrow{d} N(0, \sigma^2)$~~

$\Rightarrow$

$$P\left(\hat{p}1 - \hat{p}2 - 1{,}96\frac{\sqrt{D(\hat{p}_1 - \hat{p}_2)}}{\cancel{\sqrt{n}}} < p1 - p2 < \hat{p}1 - \hat{p}2 + 1{,}96\frac{\sqrt{D(\hat{p}1 - \hat{p}2)}}{\cancel{\sqrt{n}}}\right) = 0{,}95.$$

$$\sqrt{D(\hat{p}1 - \hat{p}2)} = \sqrt{D(\hat{p}1) - 2\operatorname{cov}(\hat{p}1, \hat{p}2) + D(p_2)}$$

$$D^{-1}(\hat{\theta}_{ML}) = 150\begin{pmatrix} \frac{1}{0{,}5} + \frac{1}{0{,}3} & \frac{1}{0{,}3} \\ \frac{1}{0{,}3} & \frac{1}{0{,}2} + \frac{1}{0{,}3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 800 & 500 \\ 500 & 1250 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow D(\hat{\theta}_{ML}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{600} & -\frac{1}{1500} \\ -\frac{1}{1500} & \frac{2}{1875} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow D(\hat{p}_1) = \frac{1}{600} \Rightarrow \sqrt{D(\hat{p}_1)} = \sqrt{\frac{1}{600}}$$

$$D(\hat{p}_2) = \frac{2}{1875} \Rightarrow \sqrt{D(\hat{p}_2)} = \sqrt{\frac{2}{1875}}$$

$$\operatorname{cov}(\hat{p}_1, \hat{p}_2) = -\frac{1}{1500}$$

$$\Rightarrow \sqrt{D(\hat{p}_1 - \hat{p}_2)} = \sqrt{\frac{1}{600} + \frac{2}{1875} + \frac{2}{1500}} \approx$$

$$\approx 0{,}0638$$

$$\Rightarrow$$

$$P(0{,}3 - 1{,}96 \cdot 0{,}0638 \leq p_1 - p_2 < 0{,}3 + 1{,}96 \cdot 0{,}0638) = 0{,}95$$

$$\Rightarrow p_1 - p_2 \in (0{,}175 ; 0{,}425).$$

4)

$$y_i = \beta_1 e^{\beta_2 x_i} u_i$$

$\beta_1, \beta_2 \neq 0$, $\ln u_i \sim N(0,1)$

а) Является ли зависимость линейной по β_1, β_2.

1) По β_1 является.

$$\beta_1 = \frac{y_i}{e^{\beta_2 x_i} u_i}$$

2) По β_2 не является

б) $\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2 = ?$

Т.к. мы знаем распределение только $\ln u_i$, то выразим u_i из выражения (а потом и $\ln u_i$)

$$u_i = \frac{y_i}{\beta_1 e^{\beta_2 x_i}}$$

$$\Rightarrow \ln u_i = \ln\left(\frac{y_i}{\beta_1 e^{\beta_2 x_i}}\right) = \overbrace{\ln y_i - \ln \beta_1 - \beta_2 x_i}^{W_i} \sim N(0,1).$$

$$\Rightarrow p(\beta_1, \beta_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{W_1^2}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{W_2^2}{2}} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{W_N^2}{2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}^N} e^{-\frac{W_1^2}{2}} \cdot \ldots \cdot e^{-\frac{W_N^2}{2}}$$

Сканировано с CamScanner

$$L(\beta_1,\beta_2) = N \ln \frac{1}{\sqrt{2\pi}} - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} w_i^2 =$$

$$= \underbrace{N \ln \frac{1}{\sqrt{2\pi}}}_{=C} - \frac{1}{2}\sum (\ln y_i - \ln \beta_1 - \beta_2 x_i)^2 =$$

$$= C - \frac{1}{2}\sum \Big((\ln y_i)^2 + (\ln \beta_1)^2 + (\beta_2 x_i)^2 - 2(\ln y_i)\ln\beta_1 -$$

$$- 2\beta_2 x_i \ln y_i + 2\beta_2 x_i \ln \beta_1 \Big) =$$

$$= C - \frac{1}{2}\sum (\ln y_i)^2 - \frac{1}{2}\sum (\ln\beta_1)^2 - \frac{1}{2}\sum(\beta_2 x_i)^2$$

$$+ \sum \ln y_i \ln \beta_1 + \sum (\ln y_i)\beta_2 x_i - \sum \beta_2 x_i \ln \beta_1.$$

$$= C - \frac{1}{2}\sum(\ln y_i)^2 - \frac{1}{2}\cdot N(\ln\beta_1)^2 - \frac{1}{2}\beta_2^2 \sum x_i^2$$

$$+ \ln\beta_1 \sum \ln y_i + \beta_2 \sum x_i \ln y_i - \beta_2 \ln \beta_1 \sum x_i$$

$$\frac{\partial L}{\partial \beta_1} = -N\frac{\ln \beta_1}{\beta_1} + \frac{1}{\beta_1}\sum \ln y_i - \frac{\beta_2}{\beta_1}\sum x_i$$

$$\frac{\partial L}{\partial \beta_2} = -\beta_2 \sum x_i^2 + \sum x_i \ln y_i - \ln\beta_1 \sum x_i$$

$$\frac{\partial L}{\partial \hat{\beta}_1}, \frac{\partial L}{\partial \hat{\beta}_2} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} N \ln \beta_1 - \sum \ln y_i + \beta_2 \sum x_i = 0 \\ \sum x_i \ln y_i - \beta_2 \sum x_i^2 - \ln \beta_1 \sum x_i = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \hat{\beta}_1 = \exp\left(\frac{\sum \ln y_i - \hat{\beta}_2 \sum x_i}{N}\right)$$

Подставим:

$$\sum x_i \ln y_i - \beta_2 \sum x_i^2 - \frac{\sum \ln y_i - \beta_2 \sum x_i}{N} \cdot \sum x_i = 0$$

$$N \sum x_i \ln y_i - \underline{N \beta_2 \sum x_i^2} - \sum \ln y_i \cdot \sum x_i \underline{+ \beta_2 (\sum x_i)^2} = 0$$

$$\beta_2 \left((\sum x_i)^2 - N \sum x_i^2 \right) = \sum \ln y_i \sum x_i - N \sum x_i \ln y_i$$

$$\Rightarrow \hat{\beta}_2 = \frac{\sum \ln y_i \sum x_i - N \sum x_i \ln y_i}{(\sum x_i)^2 - N \sum x_i^2}$$

$- \hat{\beta}_2$

$$\Rightarrow \hat{\beta}_1 = \exp\left(\frac{\sum \ln y_i - \sum x_i \left(\frac{\sum \ln y_i \sum x_i - N \sum x_i \ln y_i}{(\sum x_i)^2 - N \sum x_i^2} \right)}{N} \right)$$

$$= e^{\left(\frac{\sum \ln y_i - \sum x_i \left(\frac{\sum \ln y_i \sum x_i - N \sum x_i \ln y_i}{(\sum x_i)^2 - N \sum x_i^2} \right)}{N} \right)}$$

$\hat{\beta}_1$