On utilise les définitions et notations de l'article.

Le système $\mathbf{LSJ'}$ a pour objectif de faire les mêmes calculs que **LSJ**, mais en manipulant des séquents qui contiennent un peu plus d'information, afin de pouvoir faire le "backtracking" nécessaire à l'algorithme de **LSJ** en n'ayant à tout moment en mémoire qu'un seul séquent.

Pour cela, on veut que les séquents de $\mathbf{LSJ'}$ représentent de manière exhaustive et pertinente ceux de **LSJ** : on montre qu'il existe une surjection de l'ensemble des séquents de $\mathbf{LSJ'}$ dans l'ensemble des séquents de **LSJ**, telle qu'un séquent de $\mathbf{LSJ'}$ est prouvable dans $\mathbf{LSJ'}$ si, et seulement si, son image est prouvable dans **LSJ**.

Le calcul $\mathbf{LSJ'}$

Un séquent de $\mathbf{LSJ'}$ est la donnée de deux multiensembles Γ et Δ de couples *entier* : $formule$, et d'un entier naturel n, tels que tous les entiers présents dans Γ sont $\leq n+1$ et tous ceux présents dans Δ sont $\leq n$; on écrit $\Gamma \Rightarrow_n \Delta$.

Les règles du calcul $\mathbf{LSJ'}$ sont les suivantes (chacune correspond à une règle de **LSJ**) :

n et parfois i désignent toujours des entiers naturels, avec $i \leq n$

$$\frac{}{i : \bot, \Gamma \Rightarrow_n \Delta} \bot L' \qquad \frac{}{i : A, \Gamma \Rightarrow_n n : A, \Delta} \mathrm{Id}'$$

$$\frac{i : A, i : B, \Gamma \Rightarrow_n \Delta}{i : A \wedge B, \Gamma \Rightarrow_n \Delta} \wedge L' \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow_n n : A, \Delta \qquad \Gamma \Rightarrow_n n : B, \Delta}{\Gamma \Rightarrow_n n : A \wedge B, \Delta} \wedge R'$$

$$\frac{i : A, \Gamma \Rightarrow_n \Delta \qquad i : B, \Gamma \Rightarrow_n \Delta}{i : A \vee B, \Gamma \Rightarrow_n \Delta} \vee L' \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow_n n : A, n : B, \Delta}{\Gamma \Rightarrow_n n : A \vee B, \Delta} \vee R'$$

$$\frac{i : B, \Gamma \Rightarrow_n \Delta \qquad n+1 : B, \Gamma \Rightarrow_n n : A, \Delta \qquad n+2 : B, \Gamma \Rightarrow_{n+1} n+1 : A, \Delta}{i : A \to B, \Gamma \Rightarrow_n \Delta} \to L'$$

$$\frac{0 : A, \Gamma \Rightarrow_n n : B, \Delta \qquad 0 : A, \Gamma \Rightarrow_{n+1} n+1 : B, \Delta}{\Gamma \Rightarrow_n n : A \to B, \Delta} \to R'$$

Équivalence avec LSJ

On note $\mathfrak{S}$ l'ensemble des séquents de **LSJ**, et $\mathfrak{S}'$ l'ensemble des séquents de $\mathbf{LSJ'}$.

Soit $\sigma \in \mathfrak{S}$, on note $\vdash \sigma$ si σ est prouvable dans **LSJ** ; soit $\sigma' \in \mathfrak{S}'$, on note $\vdash' \sigma'$ si σ' est prouvable dans $\mathbf{LSJ'}$.

Soit M un multiensemble de couples *entier* : $formule$, l'entier d'un couple étant appelé son indice. On note M_k le multiensemble obtenu à partir de M en ne gardant que les couples d'indice k, et $M_{\leq k}$ celui obtenu en ne gardant que les couples d'indice inférieur à k. On note $\mathsf{forget}(M)$ le multiensemble de formules obtenu en oubliant l'indice et ne gardant que la formule de chaque couple de M.

On définit l'application Φ de $\mathfrak{S}'$ dans $\mathfrak{S}$, qui à $\Gamma' \Rightarrow_n \Delta'$ associe $\Theta\,;\Gamma \Rightarrow \Delta$

où : $\begin{cases} \Theta = \mathsf{forget}(\Gamma'_{n+1}) \\ \Gamma = \mathsf{forget}(\Gamma'_{\leq n}) \\ \Delta = \mathsf{forget}(\Delta'_n) \end{cases}$.

C'est une application surjective : en effet tout séquent $\Theta\,;\Gamma \Rightarrow \Delta$ de **LSJ** a au moins pour antécédent le séquent $\Gamma' \Rightarrow_0 \Delta'$, où Γ' est l'union de $0 : \Gamma$ (le multiensemble de couples obtenu à partir de Γ en remplaçant chaque occurrence d'une formule A par une occurrence du couple $0 : A$) avec $1 : \Theta$, et où $\Delta' = 0 : \Delta$.

Soit $\mathcal{R}$ une règle de **LSJ**. On note $\mathcal{R}'$ la règle de **LSJ′** qui lui correspond. On écrit $\dfrac{\sigma_1 \quad \dots \quad \sigma_p}{\sigma}\,(\mathcal{R})$ et $\dfrac{\sigma'_1 \quad \dots \quad \sigma'_p}{\sigma'}\,(\mathcal{R}')$ des instances de ces règles.

Lemme. *Soit $\sigma \in \mathfrak{S}$ et $\sigma' \in \mathfrak{S}'$ tels que $\sigma = \Phi(\sigma')$ et soit $\mathcal{R}$ une règle de* **LSJ**.

1) Si $\dfrac{\sigma_1 \quad \dots \quad \sigma_p}{\sigma}\,(\mathcal{R})$ alors il existe $\sigma'_1, \dots, \sigma'_p$ tels que pour tout k, $\sigma_k = \Phi(\sigma'_k)$, et $\dfrac{\sigma'_1 \quad \dots \quad \sigma'_p}{\sigma'}\,(\mathcal{R}')$.

2) Si $\dfrac{\sigma'_1 \quad \dots \quad \sigma'_p}{\sigma'}\,(\mathcal{R}')$, posons pour tout k, $\sigma_k = \Phi(\sigma'_k)$, alors $\dfrac{\sigma_1 \quad \dots \quad \sigma_p}{\sigma}\,(\mathcal{R})$.
Pour un axiome $\mathcal{A}$, cela signifie simplement : $\dfrac{}{\sigma}\,(\mathcal{A})$ si et seulement si $\dfrac{}{\sigma'}\,(\mathcal{A}')$.

Preuve
On le montre pour chaque règle ; c'est une conséquence assez directe de la définition de Φ. Faisons-le par exemple pour Id, $\wedge R$ et $\rightarrow L$. À chaque fois, on se donne $\sigma = \Theta\,;\Gamma \Rightarrow \Delta$ et $\sigma' = \Gamma' \Rightarrow_n \Delta' \in \mathfrak{S}'$ tels que $\sigma = \Phi(\sigma')$.

Id : On a $\dfrac{}{\sigma}\,(\mathrm{Id})$ si et seulement s'il existe une formule A appartenant à la fois à Γ et Δ, ce qui équivaut, par définition de Φ, à : il existe A et $i \leq n$ tels que $n : A \in \Delta'$ et $i : A \in \Gamma'$, c'est-à-dire $\dfrac{}{\sigma'}\,(\mathrm{Id}')$.

$\wedge R$:

1) Si $\dfrac{\sigma_1 \quad \sigma_2}{\sigma}\,(\wedge R)$ alors il existe des formules A et B et un multiensemble $\widetilde{\Delta}$ tels que $\Delta = A \wedge B, \widetilde{\Delta}$ et $\sigma_1 = \Theta\,;\Gamma \Rightarrow A, \widetilde{\Delta}$ et $\sigma_2 = \Theta\,;\Gamma \Rightarrow B, \widetilde{\Delta}$. Posons $\widetilde{\Delta}' = \Delta' - n : A \wedge B$ le multiensemble obtenu en retirant une seule occurrence de $n : A \wedge B$ à Δ' (qui contient cet élément parce que Δ contient $A \wedge B$ et par définition de Φ), et $\sigma'_1 = \Gamma' \Rightarrow_n n : A, \widetilde{\Delta}'$ et $\sigma'_2 = \Gamma' \Rightarrow_n n : B, \widetilde{\Delta}'$. Alors on a bien $\sigma_1 = \Phi(\sigma'_1)$ et $\sigma_2 = \Phi(\sigma'_2)$ (en remarquant que $\widetilde{\Delta} = \mathsf{forget}(\widetilde{\Delta}'_n)$), et $\dfrac{\sigma'_1 \quad \sigma'_2}{\sigma'}\,(\wedge R')$ (en remarquant que $\sigma' = \Gamma' \Rightarrow_n n : A \wedge B, \widetilde{\Delta}'$).

2) Si $\dfrac{\sigma'_1 \quad \sigma'_2}{\sigma'}\,(\wedge R')$ alors il existe A, B et $\widetilde{\Delta}'$ tels que $\Delta' = n : A \wedge B, \widetilde{\Delta}'$ et $\sigma'_1 = \Gamma' \Rightarrow_n n : A, \widetilde{\Delta}'$ et $\sigma'_2 = \Gamma' \Rightarrow_n n : B, \widetilde{\Delta}'$; on pose $\widetilde{\Delta} = \Delta - A \wedge B$ le multiensemble obtenu en retirant une seule occurrence de $A \wedge B$ à Δ, et $\sigma_1 = \Phi(\sigma'_1)$ et $\sigma_2 = \Phi(\sigma'_2)$; on obtient $\sigma = \Theta\,;\Gamma \Rightarrow A \wedge B, \widetilde{\Delta}$ et $\sigma_1 = \Theta\,;\Gamma \Rightarrow A, \widetilde{\Delta}$ et $\sigma_2 = \Theta\,;\Gamma \Rightarrow B, \widetilde{\Delta}$ d'où $\dfrac{\sigma_1 \quad \sigma_2}{\sigma}\,(\wedge R)$.

$\rightarrow L$:

1) Si $\dfrac{\sigma_1 \quad \sigma_2 \quad \sigma_3}{\sigma}\,(\to L)$ alors il existe A, B et $\widetilde{\Gamma}$ tels que $\Gamma = A \to B, \widetilde{\Gamma}$ et $\sigma_1 = \Theta\,; B, \widetilde{\Gamma} \Rightarrow \Delta$ et $\sigma_2 = B, \Theta\,; \widetilde{\Gamma} \Rightarrow A, \Delta$ et $\sigma_3 = B\,; \Theta, \widetilde{\Gamma} \Rightarrow A$; et il existe $i \leq n$ tel que $i : A \to B \in \Gamma'$; on pose $\widetilde{\Gamma}' = \Gamma' - i : A \to B$ (on retire une seule occurrence de $i : A \to B$ de Γ') et $\sigma_1' = i : B, \widetilde{\Gamma}' \Rightarrow_n \Delta'$ et $\sigma_2' = n+1 : B, \widetilde{\Gamma}' \Rightarrow_n n : A, \Delta'$ et $\sigma_3' = n+2 : B, \widetilde{\Gamma}' \Rightarrow_{n+1} n+1 : A, \Delta'$ et on vérifie que cela convient.

2) Si $\dfrac{\sigma_1' \quad \sigma_2' \quad \sigma_3'}{\sigma'}\,(\to L')$ alors il existe i, A, B et $\widetilde{\Gamma}'$ tels que $\Gamma' = i : A \to B, \widetilde{\Gamma}'$ et σ_1', σ_2' et σ_3' ont la forme donnée ci-dessus ; on pose $\widetilde{\Gamma} = \Gamma - A \to B$ (on retire une seule occurrence de $A \to B$ de Γ), alors les images σ_1, σ_2 et σ_3 par Φ de σ_1', σ_2' et σ_3' respectivement s'écrivent comme ci-dessus et donc $\dfrac{\sigma_1 \quad \sigma_2 \quad \sigma_3}{\sigma}\,(\to L)$.

■

Théorème. *Soit $\sigma \in \mathfrak{S}$ et $\sigma' \in \mathfrak{S}'$ tels que $\sigma = \Phi(\sigma')$, alors $\vdash \sigma$ si et seulement si $\vdash' \sigma'$.*

Preuve
Par récurrence sur la *taille* de $\sigma \in \mathfrak{S}$, c'est-à-dire la somme des tailles des formules des trois multiensembles apparaissant dans σ.

On initialise pour tout $\sigma = \Theta\,; \Gamma \Rightarrow \Delta$ tel que toutes les formules dans Γ et dans Δ sont atomiques : soit $\sigma' = \Gamma' \Rightarrow_n \Delta' \in \mathfrak{S}'$ tel que $\sigma = \Phi(\sigma')$. Alors toutes les formules associées à un $i \leq n$ dans Γ' et toutes les formules associées à n dans Δ' sont aussi atomiques. En étudiant la forme des conclusions des règles non axiomatiques de **LSJ** comme de **LSJ′**, on remarque que si σ (resp. σ') est la conclusion d'une règle de **LSJ** (resp. **LSJ′**), alors la règle est un axiome. L'initialisation est donc un cas particulier de ce qui suit avec $p = 0$ (ce qui entraîne qu'on n'utilise en fait pas l'hypothèse de récurrence).

Soit $\sigma = \Theta\,; \Gamma \Rightarrow \Delta \in \mathfrak{S}$. Soit $\sigma' = \Gamma' \Rightarrow_n \Delta' \in \mathfrak{S}'$ tel que $\sigma = \Phi(\sigma')$.

On suppose $\vdash \sigma$. Alors il existe une règle $\mathcal{R}$ de **LSJ** et $\sigma_1, \ldots, \sigma_p \in \mathfrak{S}$ (avec éventuellement p nul) tels que $\vdash \sigma_k$ pour tout k et $\dfrac{\sigma_1 \quad \ldots \quad \sigma_p}{\sigma}\,(\mathcal{R})$. D'après le lemme, il existe $\sigma_1', \ldots, \sigma_p' \in \mathfrak{S}'$ tels que $\sigma_k = \Phi(\sigma_k')$ pour tout k et $\dfrac{\sigma_1' \quad \ldots \quad \sigma_p'}{\sigma'}\,(\mathcal{R}')$. Pour tout k, on applique l'hypothèse de récurrence à σ_k qui a une *taille* strictement inférieure à celle de σ, et on obtient $\vdash' \sigma_k'$. On en déduit $\vdash' \sigma'$.

On suppose $\vdash' \sigma'$. Alors il existe une règle $\mathcal{R}'$ de **LSJ′** et $\sigma_1', \ldots, \sigma_p' \in \mathfrak{S}'$ tels que $\vdash' \sigma_k'$ pour tout k et $\dfrac{\sigma_1' \quad \ldots \quad \sigma_p'}{\sigma'}\,(\mathcal{R}')$. On pose $\sigma_k = \Phi(\sigma_k')$ pour tout k. D'après le lemme on a $\dfrac{\sigma_1 \quad \ldots \quad \sigma_p}{\sigma}\,(\mathcal{R})$, en particulier on peut appliquer l'hypothèse de récurrence aux σ_k donc $\vdash \sigma_k$ pour tout k, d'où $\vdash \sigma$.

■