Table des matières

1 Introduction aux calculs de séquents à travers LK pour la logique classique et LJ pour la logique intuitionniste

2 Logique linéaire (CLL) et logique linéaire intuitionniste (ILL)

La logique linéaire (CLL) est une extension de la logique classique. Elle présente un grand un intérêt des points de vue logique aussi bien qu'informatique, notamment parce qu'elle contient une notion de "ressources" qui ne peuvent pas être utilisées inconsidérément. On peut considérer qu'elle est obtenue à partir de la logique classique en limitant l'usage des règles structurelles, si bien que de nouvelles nuances apparaissent, pour lesquelles sont introduits de nouveaux connecteurs.

Voici un calcul de séquents pour la logique linéaire. Les séquents sont les mêmes que ceux de **LK**. Les connecteurs, différents, sont donnés dans la figure **??**. Les règles sont données dans la figure **??**. Des explications sur ces connecteurs et ces règles sont proposées dans la sous-section **??**, puis une interprétation en terme de "ressources" dans la sous-section **??**. Enfin, on présente la logique linéaire intuitionniste (ILL).

2.1 Limitation des règles structurelles, nouveaux connecteurs, modalités

L'usage des règles structurelles est restreint à certains types de formules qu'on verra plus loin. Une conséquence importante est qu'on n'a plus l'équivalence entre les deux écritures

Symbole	Nom	Élément neutre Symbole	Élément neutre Nom
$\otimes$	*tenseur / produit tensoriel*	$\mathbf{1}$	*un*
$\&$	*avec*	$\top$	*top*
$\oplus$	*plus*	$\mathbf{0}$	*zéro*
$⅋$	*produit parallèle*	$\perp$	*bot*
$\multimap$	*implication linéaire*	pas d'élément neutre	

Connecteurs binaires

Symbole	Nom
$\neg$	*non*
$!$	*bang*
$?$	*why not*

Connecteurs unaires

FIGURE 1 – Les connecteurs de la logique linéaire

possibles des règles liées à $\wedge$, vues en **??**. C'est pourquoi on introduit deux connecteurs distincts $\otimes$ et $\&$, qui pourraient tous deux se lire "et" en première approximation, correspondant chacun à une définition possible de $\wedge$ dans **LK** : voir la figure **??**. De même, le $\vee$ de logique classique est séparé en deux connecteurs $\oplus$ et $⅋$. On souhaite tout de même garder des règles structurelles, dont l'usage est seulement limité. On introduit pour cela des connecteurs unaires *modaux*, ou *modalités*, ! et ?. Les règles structurelles peuvent seulement être appliquées à des formules comportant un de ces connecteurs : ! si la formule est à gauche, ? si elle est à droite. On a aussi des règles d'introduction de ces connecteurs, où par exemple $!\Gamma$ représente une liste dont toutes les formules sont de la forme $!A$. On retrouve des relations entre $\otimes$ et $\&$ grâce à ces modalités : par exemple $(!A) \otimes (!B) =!(A\&B)$, qu'on discute dans la prochaine sous-section.

2.2 Interprétation : une idée de "ressources"

La logique linéaire est une logique de "ressources". L'implication linéaire $A \multimap B$ peut en effet se comprendre comme "on peut dépenser un objet de type A pour obtenir un objet de type B". Ici, "type" est simplement un mot du langage courant et non un terme mathématique ou informatique.La formule $A \otimes B$ représente la possession à la fois d'un objet de type A et d'un autre objet de type B. On comprend alors la notion de "dépense" en remarquant que, si on a $A \multimap B$ et $A \multimap C$, on n'obtient pas pour autant $A \multimap B \otimes C$ car un seul objet de type A ne peut pas être dépensé deux fois ; en revanche on obtient bien $A \otimes A \multimap B \otimes C$. On n'obtient pas non plus $A \otimes A \otimes A \multimap B \otimes C$ car un objet de type A ne serait pas dépensé ; cela est lié au fait que la formule $A \multimap \mathbf{1}$ n'est pas universellement valide, où $\mathbf{1}$ est l'élément neutre pour $\otimes$. Une analogie courante et pertinente compare ce fragment de la logique linéaire aux équations de réaction en chimie, avec la maxime de Lavoisier bien connue "Rien ne se perd, rien ne se crée, tout se transforme". Par exemple, l'équation $CH_4 + 2O_2 \longrightarrow CO_2 + 2H_2O$ peut être fidèlement représentée par la formule $!(CH_4 \otimes O_2 \otimes O_2 \multimap CO_2 \otimes H_2O \otimes H_2O)$, où CH_4 etc. sont considérés comme des constantes ; la modalité !, discutée plus loin, signifie qu'on peut appliquer cette réaction autant de fois qu'on le souhaite.

Intéressons-nous maintenant à $\&$, l'autre connecteur issu du $\wedge$ du logique classique. La formule $A\&B$ représente la possession, au choix, d'un objet de type A ou d'un objet de type B. À partir de $A \multimap B$ et $A \multimap C$, on obtient bien $A \multimap B\&C$: on a le choix de la façon dont on dépense l'objet de type A. Le fait qu'on ne possède finalement qu'un seul objet, de type A ou de type B, peut donner l'impression qu'il s'agit d'une disjonction. Le point important est la possibilité de choisir soi-même le type parmi A et B. Cela entraîne qu'on peut prouver

$\dfrac{}{A \Rightarrow A}\ (id)$	$\dfrac{\Gamma_1 \Rightarrow A, \Delta \qquad \Gamma', A \Rightarrow \Delta'}{\Gamma, \Gamma' \Rightarrow \Delta, \Delta'}\ (cut)$
$\dfrac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma, \neg A \Rightarrow \Delta}\ (\neg L)$	$\dfrac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma \Rightarrow \neg A, \Delta}\ (\neg R)$
$\dfrac{\Gamma, A, B \Rightarrow \Delta}{\Gamma, A \otimes B \Rightarrow \Delta}\ (\otimes L)$	$\dfrac{\Gamma \Rightarrow A, \Delta \qquad \Gamma' \Rightarrow B, \Delta'}{\Gamma \Rightarrow A \otimes B, \Delta, \Delta'}\ (\otimes R)$
$\dfrac{\Gamma, A \Rightarrow \Delta}{\Gamma, A\&B \Rightarrow \Delta}\ (\&L_1) \qquad \dfrac{\Gamma, B \Rightarrow \Delta}{\Gamma, A\&B \Rightarrow \Delta}\ (\&L_2)$	$\dfrac{\Gamma \Rightarrow A, \Delta \qquad \Gamma \Rightarrow B, \Delta}{\Gamma \Rightarrow A\&B, \Delta}\ (\&R)$
$\dfrac{\Gamma, A \Rightarrow \Delta \qquad \Gamma, B \Rightarrow \Delta}{\Gamma, A \oplus B \Rightarrow \Delta}\ (\oplus L)$	$\dfrac{\Gamma \Rightarrow A, \Delta}{\Gamma \Rightarrow A \oplus B, \Delta}\ (\oplus R_1) \qquad \dfrac{\Gamma \Rightarrow B, \Delta}{\Gamma \Rightarrow A \oplus B, \Delta}\ (\oplus R_2)$
$\dfrac{\Gamma, A \Rightarrow \Delta \qquad \Gamma', B \Rightarrow \Delta'}{\Gamma, \Gamma', A \parr B \Rightarrow \Delta, \Delta'}\ (\parr L)$	$\dfrac{\Gamma \Rightarrow A, B, \Delta}{\Gamma \Rightarrow A \parr B, \Delta}\ (\parr R)$
$\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \mathbf{1} \Rightarrow \Delta}\ (\mathbf{1}L) \qquad \dfrac{}{\mathbf{0} \Rightarrow}\ (\mathbf{0}L)$	$\dfrac{}{\Rightarrow \mathbf{1}}\ (\mathbf{1}R) \qquad \dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \mathbf{0}, \Delta}\ (\mathbf{0}R)$
$\dfrac{}{\Gamma, \perp \Rightarrow \Delta}\ (\perp L)$	$\dfrac{}{\Gamma \Rightarrow \top, \Delta}\ (\top R)$
$\dfrac{\Gamma, A \Rightarrow \Delta}{\Gamma, !A \Rightarrow \Delta}\ (!L) \qquad \dfrac{!\Gamma, A \Rightarrow ?\Delta}{!\Gamma, ?A \Rightarrow ?\Delta}\ (?L)$	$\dfrac{!\Gamma \Rightarrow A, ?\Delta}{!\Gamma \Rightarrow !A, !\Delta}\ (!R) \qquad \dfrac{\Gamma \Rightarrow A, \Delta}{\Gamma \Rightarrow ?A, \Delta}\ (?R)$
$\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma, !A \Rightarrow \Delta}\ (weakening\ L)$	$\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow ?A, \Delta}\ (weakening\ R)$
$\dfrac{\Gamma, !A, !A \Rightarrow \Delta}{\Gamma, !A \Rightarrow \Delta}\ (contraction\ L)$	$\dfrac{\Gamma \Rightarrow ?A, ?A, \Delta}{\Gamma \Rightarrow ?A, \Delta}\ (contraction\ R)$
+echange	

FIGURE 2 – Les règles

$A\&B \multimap A$ et $A\&B \multimap B$, mais pas $A \multimap A\&B$, donc il s'agit bien d'une conjonction. C'est $A \oplus B$ qui représente la possession d'un objet dont le type est A ou B, sans possibilité de choisir. Il s'agit cette fois d'une disjonction : on peut prouver $A \multimap A \oplus B$ mais pas $A \oplus B \multimap A$.

La modalité $!A$ signifie qu'on peut posséder un objet de type A autant de fois qu'on le souhaite, y compris zéro. Un exemple significatif est l'égalité $(!A) \otimes (!B) = !(A\&B)$: posséder simultanément autant d'objets qu'on veut de type A et autant d'objets qu'on veut de type B, revient à avoir autant de fois qu'on veut la possibilité de choisir de posséder un objet de type A ou un objet de type B.

2.3 Logique linéaire intuitionniste

Les séquents de la logique linéaire intuitionniste sont les mêmes que ceux de **LJ**.

La logique linéaire intuitionniste (ILL) est obtenue à partir de la logique linéaire de la même manière que la logique intuitionniste est obtenue à partir de la logique classique : en se restreignant aux séquents avec une unique formule à droite. Le connecteur de logique linéaire $\parr$ disparaît alors, puisque les règles liées nécessitent des séquents avec plusieurs formules à droite. Le connecteur $\oplus$ peut être conservé, mais traditionnellement, il est absent de ce qu'on appelle la *logique linéaire intuitionniste*, qui devient la *logique linéaire intuitionniste à* *produits finis* lorsqu'on le rajoute.

3 Le procédé d'élimination de la coupure (p.é.c.) pour ILL

4

(On suppose qu'on a présenté la logique linéaire et son calcul de séquents, et le procédé d'élimination de la coupure (qu'on abrège pour l'instant parfois en p.é.c., mais cela peut changer). On distingue le p.é.c. "strict" avec seulement les transformations nécessaires pour le théorème d'élimination de la coupure, du p.é.c. "large" où on a rajouté les transformations qui font que alpha, lambda, rho deviennent des isomorphismes et donc permettent d'obtenir vraiment une catégorie monoïdale.)

4.1 Invariant modulaire et catégorie

Notation. Soit p une preuve du séquent σ. On écrit $\begin{array}{c} p \\ \cdots\cdots \\ \sigma \end{array}$ car souvent, il est intéressant d'expliciter σ pour prolonger p en une preuve plus complexe d'un autre séquent.

À chaque preuve p, on associe une ***dénotation*** $[p]$. On veut que cela constitue un invariant selon l'élimination de la coupure : deux preuves on la même dénotation si, et seulement si, une peut être obtenue en appliquant à l'autre des transformations autorisée par la procédure d'élimination de la coupure. Ceci est motivé par une analogie avec la théorie des nœuds, où les invariants sont relatifs aux transformations de Reidemeister. (expliquer ? ne pas en parler ?)

On demande également la propriété suivante. Soit A, B, C des formules, et p_1 et p_2 des preuves de $A \vdash B$ et $B \vdash C$ respectivement. La règle de coupure fournit immédiatement la preuve p de $A \vdash C$ ci-contre. On veut que sa dénotation $[p]$ se déduise à partir de $[p_1]$ et $[p_2]$. On introduit pour cela la **loi de composition** $\circ$ telle que $[p] = [p_2] \circ [p_1]$. On dit alors que l'invariant est *modulaire*.

$$\begin{array}{c} \dfrac{\begin{array}{c} p_1 \\ \cdots\cdots \\ A \vdash B \end{array} \qquad \begin{array}{c} p_2 \\ \cdots\cdots \\ B \vdash C \end{array}}{A \vdash C}\,(cut) \\ p \end{array}$$

On remarque que la loi de composition $\circ$ est **associative** et présente pour chaque formule une **identité** à gauche et à droite. En effet, soit A, B, C, D des formules, et p_1, p_2, p_3 des preuves respectives de $A \vdash B$, $B \vdash C$, $C \vdash D$. On peut en déduire deux preuves de $A \vdash D$:

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c} p_1 \\ \cdots\cdots \\ A \vdash B \end{array} \qquad \begin{array}{c} p_2 \\ \cdots\cdots \\ B \vdash C \end{array}}{A \vdash C}\,(cut) \qquad \begin{array}{c} p_3 \\ \cdots\cdots \\ C \vdash D \end{array}}{A \vdash D}\,(cut) \qquad \text{et} \qquad \dfrac{\begin{array}{c} p_1 \\ \cdots\cdots \\ A \vdash B \end{array} \qquad \dfrac{\begin{array}{c} p_2 \\ \cdots\cdots \\ B \vdash C \end{array} \qquad \begin{array}{c} p_3 \\ \cdots\cdots \\ C \vdash D \end{array}}{B \vdash D}\,(cut)}{A \vdash D}\,(cut)$$

qui sont équivalentes d'après le procédé d'élimination de la coupure. Cela signifie précisément que $([p_1] \circ [p_2]) \circ [p_3] = [p_1] \circ ([p_2] \circ [p_3])$. L'identité pour une formule A est la dénotation de la preuve $\dfrac{}{A \vdash A}\,(id)$; on note cette dénotation id_A. Soit p une preuve de $A \vdash B$, les deux preuves $\dfrac{\dfrac{}{A \vdash A}\,(id) \qquad \begin{array}{c} p \\ \cdots\cdots \\ A \vdash B \end{array}}{A \vdash B}\,(cut)$ et $\begin{array}{c} p \\ \cdots\cdots \\ A \vdash B \end{array}$ sont équivalentes selon l'élimination de la coupure, ce qui signifie que $[p] \circ id_A = [p]$. De même, pour p une preuve de $B \vdash A$, on a $id_A \circ [p] = [p]$.

Ces propriétés sur les dénotations permettent d'utiliser le formalisme des catégories.

Définition 1. *Une* **catégorie** *consiste en une collection d'*objets *et une collection de* morphismes*, cette dernière munie d'une opérations binaire partielle* $\circ$ *appelée* composition*, avec les propriétés suivantes.*

- *À chaque morphisme f est associé un couple d'objets (A, B) ; on écrit $f : A \to B$. On dit que $A \to B$ est le* type *de f, et que f est un morphisme* de A vers B*, et encore que A est le* domaine *ou la* source *de f, et B le* codomaine *ou la* cible *de f.*
- *Pour tous objets A, B, C et morphismes f, g tels que $f : A \to B$ et $g : B \to C$, le morphisme $g \circ f$ existe et $g \circ f : A \to C$.*
- ***Identité.*** *Pour tout objet A, il existe un morphisme particulier $id_A : A \to A$ appelé* identitié sur A*, tel que pour tout objet B, pour tout $f : B \to A$, $id_A \circ f = f$ et pour tout $g : A \to B$, $g \circ id_A = g$.*
- ***Associativité.*** *Pour tous $f : A \to B$, $g : B \to C$, $h : C \to D$, on a $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.*

Notations. *Soit $\mathcal{C}$ une catégorie, on note $Obj(\mathcal{C})$ la classe de ses objets et $Hom(\mathcal{C})$ celle de ses morphismes. Pour des objets A et B, on note $Hom_{A \to B}(\mathcal{C})$ la classe des morphismes de type $A \to B$. On peut omettre l'argument $\mathcal{C}$ s'il n'y a pas d'ambiguïté, par exemple si on travaille sur une seule catégorie.*

Les dénotations des preuves s'organisent sous la forme de la catégorie suivante, qu'on appellera $\mathcal{CP}$. (choix du nom ?) À chaque formule A on associe une dénotation $[A]$. Les dénotations des formules, deux à deux distinctes, constituent les objets de la catégorie. Les morphismes sont des dénotations de preuves. Les morphismes de $[A]$ vers $[B]$ sont les dénotations des preuves de $A \vdash B$; si ce séquent n'est pas prouvable, il n'y en a pas. La composition $\circ$ est bien associative, et l'identité sur $[A]$ est le morphisme id_A. On notera aussi A la dénotation de la formule A, sauf lorsqu'on souhaite insister sur le fait qu'il s'agit d'une dénotation. Cela permet d'alléger l'écriture et de retrouver la notation employée dans les définitions sur les catégories.

Cette définition ne tient compte que des dénotations de preuves où le séquent prouvé a une unique formule à gauche et une unique formule à droite ; les autres séquents des preuves peuvent avoir n'importe quelle forme. Cette restriction est conservée dans (quelques sous-sections ? tout le reste de la partie ? toujours ? Est-ce qu'on peut étendre ce formalisme à n'importe quelle preuve de la logique intuitionniste linéaire grâce au théorème de MacLane, cf. mail ?)

4.2 Produit tensoriel et bifoncteur

Le connecteur de logique linéaire $\otimes$, appelé *produit tensoriel*, induit un opérateur sur les dénotations de formules, aussi noté $\otimes$: on pose $[A] \otimes [B] = [A \otimes B]$. On souhaite étendre cet opérateur aux dénotations de preuves. Pour cela, on remarque qu'à partir de preuves p_1 de $A_1 \vdash B_1$ et p_2 de $A_2 \vdash B_2$, on peut déduire la preuve p ci-contre de $A_1 \otimes A_2 \vdash B_1 \otimes B_2$. On définit alors $[p_1] \otimes [p_2] = [p]$.

$$\cfrac{\cfrac{\overset{p_1}{\cdots\cdots}\quad\overset{p_2}{\cdots\cdots}}{A_1 \vdash B_1 \quad A_2 \vdash B_2}}{\cfrac{A_1, A_2 \vdash B_1 \otimes B_2}{A_1 \otimes A_2 \vdash B_1 \otimes B_2}\,(\otimes L)}\,(\otimes R)$$
$$p$$

L'opérateur est bien défini : si on a deux autres preuves p'_1 et p'_2 telles que $[p'_1] = [p_1]$ et $[p'_2] = [p_2]$, et si p' est la preuve obtenue à partir de p'_1 et p'_2 selon le procédé utilisé pour construire p, alors $[p'] = [p]$. En effet, le procédé d'élimination de la coupure autorise évidemment à remplacer la preuve p_1 apparaissant dans la preuve p par une preuve p'_1 qui lui est équivalente.

Intéressons-nous à la compatibilité de $\otimes$ avec $\circ$. Soit des morphismes de $f_1 : A_1 \to B_1$, $f_2 : A_2 \to B_2$, $g_1 : B_1 \to C_1$, $g_2 : B_2 \to C_2$. Pour chaque morphisme f, soit $p(f)$ une preuve de dénotation f. Les deux preuves suivantes sont équivalentes selon le p.é.c., ce qui signifie que $(g_1 \otimes g_2) \circ (f_1 \otimes f_2) = (g_1 \circ f_1) \otimes (g_2 \circ f_2)$.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{p(f_1)}{A_1 \vdash B_1} \quad \dfrac{p(f_2)}{A_2 \vdash B_2}}{A_1, A_2 \vdash B_1 \otimes B_2}\,(\otimes R)}{A_1 \otimes A_2 \vdash B_1 \otimes B_2}\,(\otimes L) \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{p(g_1)}{B_1 \vdash C_1} \quad \dfrac{p(g_2)}{B_2 \vdash C_2}}{B_1, B_2 \vdash C_1 \otimes C_2}\,(\otimes R)}{B_1 \otimes B_2 \vdash C_1 \otimes C_2}\,(\otimes L)}{A_1 \otimes A_2 \vdash C_1 \otimes C_2}\,(cut) \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{p(f_1)}{A_1 \vdash B_1} \quad \dfrac{p(g_1)}{B_1 \vdash C_1}}{A_1 \vdash C_1}\,(cut) \quad \dfrac{\dfrac{p(f_2)}{A_2 \vdash B_2} \quad \dfrac{p(g_2)}{B_2 \vdash C_2}}{A_2 \vdash C_2}\,(cut)}{A_1, A_2 \vdash C_1 \otimes C_2}\,(\otimes R)}{A_1 \otimes A_2 \vdash C_1 \otimes C_2}\,(\otimes L)$$

On a également l'égalité $id_{[A]\otimes[B]} = id_{[A]} \otimes id_{[B]}$ en raison de l'équivalence des preuves

$$\dfrac{}{A \otimes B \vdash A \otimes B}\,(id) \quad \text{et} \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{A \vdash A}\,(id) \quad \dfrac{}{B \vdash B}\,(id)}{A, B \vdash A \otimes B}\,(\otimes R)}{A \otimes B \vdash A \otimes B}\,(\otimes L) \quad .$$

Ces propriétés signifient que l'opérateur $\otimes$ constitue un **bifoncteur** sur $\mathcal{CP}$, c'est-à-dire un foncteur de $\mathcal{CP} \times \mathcal{CP}$ vers $\mathcal{CP}$, avec les définitions suivantes.

Définition 2. *Soit $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ des catégories. Un* **foncteur** *$F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ de $\mathcal{C}$ vers $\mathcal{D}$ consiste en une application des objets de $\mathcal{C}$ vers les objets de $\mathcal{D}$ et une application des morphismes de $\mathcal{C}$ vers les morphismes de $\mathcal{D}$, notées toutes deux F par abus d'écriture, tel que*

- *Pour tous objets A, B et morphisme $f : A \to B$ de $\mathcal{C}$, on a $F(f) : F(A) \to F(B)$.*
- *Pour tous morphismes $f : A \to B$ et $g : B \to C$ de $\mathcal{C}$, on a $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$.*
- *Pour tout objet A de $\mathcal{C}$, on a $F(id_A) = id_{F(A)}$.*

Définition 3. *Soit $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ des catégories. On définit la* **catégorie produit** *$\mathcal{C} \times \mathcal{D}$, où $Obj(\mathcal{C} \times \mathcal{D}) = Obj(\mathcal{C}) \times Obj(\mathcal{D})$ et $Hom_{(A,A')\to(B,B')} = Hom_{A\to B}(\mathcal{C}) \times Hom_{A'\to B'}(\mathcal{D})$.*

4.3 Catégorie monoïdale

La catégorie $\mathcal{CP}$ ayant été munie du bifoncteur $\otimes$, on se demande s'il s'agit d'une catégorie monoïdale, dont la définition est donnée après deux définitions auxiliaires.

Définition 4. *Soit $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ des catégories. Soit $F, G : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ des foncteurs de $\mathcal{C}$ vers $\mathcal{D}$. Une* **transformation naturelle** *θ de F vers G est une famille $\big(\ \theta_A : F(A) \to G(A)\ \big)_{A \in Obj(\mathcal{C})}$ de morphismes de $\mathcal{D}$, indexée par les objets de $\mathcal{C}$, telle que le diagramme suivant commute dans $\mathcal{D}$ pour tout morphisme $f : A \to B$ de $\mathcal{C}$*

$$\begin{tikzcd} F(A) \arrow[r, "\theta_A"] \arrow[d, "F(f)"] & G(A) \arrow[d, "G(f)"] \\ F(B) \arrow[r, "\theta_B"] & G(B) \end{tikzcd}$$

On note $\theta : F \Rightarrow G$, voire $\theta : F \Rightarrow G : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$.

Définition 5. *Soit une catégorie, un morphisme $f : A \to B$ est un* **isomorphisme** *s'il existe un morphisme $f^{-1} : B \to A$ tel que $f^{-1} \circ f = id_A$ et $f \circ f^{-1} = id_B$.*

Définition 6. *Une* **catégorie monoïdale** *est une catégorie $\mathcal{C}$ munie d'un bifoncteur $\otimes : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$ (pour lequel on utilise une notation infixe) avec d'un objet particulier e, telle qu'il existe des* ***isomorphismes naturels***

- *$\alpha_{A,B,C} : (A \otimes B) \otimes C \to A \otimes (B \otimes C)$, permettant de parler d'associativité ;*

- $\lambda_A : e \otimes A \to A$ *;*
- $\rho_A : A \otimes e \to A$*, permettant avec le précédent d'appeler* e *l'objet* ***unité*** *;*

et tel que les diagrammes suivants commutent pour tous objets A*,* B*,* C*,* D*.*

$$\begin{tikzcd}
 & (A\otimes B)\otimes(C\otimes D) \arrow[dr, "\alpha_{A,B,C\otimes D}"] & \\
((A\otimes B)\otimes C)\otimes D \arrow[ur, "\alpha_{A\otimes B,C,D}"] \arrow[d, "\alpha_{A,B,C}\otimes id_D"] & & A\otimes(B\otimes(C\otimes D)) \\
(A\otimes(B\otimes C)\otimes D \arrow[rr, "\alpha_{A,B\otimes C,D}"] & & A\otimes((B\otimes C)\otimes D) \arrow[u, "id_A\otimes\alpha_{B,C,D}"']
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
(A\otimes e)\otimes B \arrow[rr, "\alpha_{A,e,B}"] \arrow[dr, "\rho_A\otimes id_B"] & & A\otimes(e\otimes B) \arrow[dl, "id_A\otimes\lambda_B"] \\
 & A\otimes B &
\end{tikzcd}$$

Ces diagrammes sont appelés diagrammes pentagonal *et* triangulaire*. Leur commutativité est la* propriété de cohérence.

Précision. *On parle d'isomorphismes naturels car il y a bien des transformations naturelles associées. En fait la condition sur* α *est* $\alpha : F \Rightarrow G : \mathcal{C}\times\mathcal{C}\times\mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$ *avec* $F : (x,y,z) \mapsto (x\otimes y)\otimes z$ *et* $G : (x,y,z)\mapsto x\otimes(y\otimes z)$ *où* x*,* y*,* z *sont trois objets ou trois morphismes de* $\mathcal{C}$*. On écrit* $\alpha_{A,B,C}$ *pour* $\alpha_{(A,B,C)}$*. Les* $\alpha_{A,B,C}$ *sont bien des morphismes de* $\mathcal{C}$*, qui est la catégorie d'arrivée de* F *et* G*. On veut aussi* $\lambda : (e\otimes\bullet) \Rightarrow Id_{\mathcal{C}} : \mathcal{C}\longrightarrow\mathcal{C}$ *où* $(e\otimes\bullet) : \left\{\begin{array}{l} A\mapsto e\otimes A \\ f\mapsto id_e\otimes f\end{array}\right.$ *et où* $Id_{\mathcal{C}}$ *est le foncteur identité sur* $\mathcal{C}$*. Il y a une condition similaire pour* ρ*.*

On munit la catégorie $\mathcal{CP}$ du bifoncteur $\otimes$ et on choisit comme objet unité $[\mathbf{1}]$, la dénotation de la formule $\mathbf{1}$, élément neutre pour le connecteur $\otimes$. On obtient une **catégorie monoïdale**, ou presque une catégorie monoïdale, selon les choix effectués pour définir le procédé d'élimination de la coupure. En effet, on peut définir des morphismes $\alpha_{A,B,C}$, λ_A, ρ_A comme les dénotations des preuves suivantes

$$\alpha_{A,B,C} : \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{A\vdash A}(id) \quad \dfrac{\dfrac{}{B\vdash B}(id) \quad \dfrac{}{C\vdash C}(id)}{B,C\vdash B\otimes C}(\otimes R)}{A,B,C\vdash A\otimes(B\otimes C)}(\otimes R)}{A\otimes B,C\vdash A\otimes(B\otimes C)}(\otimes L)}{(A\otimes B)\otimes C\vdash A\otimes(B\otimes C)}(\otimes L) \qquad \lambda_A : \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{A\vdash A}(id)}{\mathbf{1},A\vdash A}(\mathbf{1}L)}{\mathbf{1}\otimes A\vdash A}(\otimes L) \qquad \rho_A : \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{A\vdash A}(id)}{A,\mathbf{1}\vdash A}(\mathbf{1}L)}{A\otimes\mathbf{1}\vdash A}(\otimes L)$$

Il s'agit bien de transformations naturelles, et on a bien la propriété de cohérence. (démonstrations, ou au moins explications, exemples de preuves équivalentes ?) La définition d'une *catégorie monoïdale* exige que ces morphismes α, λ, ρ soient des isomorphismes. On n'écrit plus les indices, qui sont toujours les mêmes. On peut définir des morphismes naturels $\bar\alpha_{A,B,C} : A\circ(B\circ C) \to (A\circ B)\circ C$, $\bar\lambda_A : A \to e\circ A$, $\bar\rho_A : A\to A\circ e$, par exemple $\bar\lambda_A$ est la dénotation de $\dfrac{\dfrac{}{\vdash\mathbf{1}}(\mathbf{1}R) \quad \dfrac{}{A\vdash A}(id)}{A\vdash\mathbf{1}\otimes A}(\otimes R)$. On pense naturellement à ces morphismes quand on cherche des inverses de α, λ et ρ. On a bien $\lambda\circ\bar\lambda = id_A$ et $\rho\circ\bar\rho = id_A$. En revanche, si on considère un p.é.c. "strict", on n'a aucune des égalités suivantes : $\bar\lambda\circ\lambda = id_{e\circ A}$, $\bar\rho\circ\rho = id_{A\circ e}$, $\bar\alpha\circ\alpha = id_{(A\circ B)\circ C}$, $\alpha\circ\bar\alpha = id_{A\circ(B\circ C)}$. Si on considère au contraire la version plus "large" du p.é.c., on a bien toutes ces égalités. Les transformations autorisées qui ont été ajoutées au p.é.c. strict pour obtenir cette version large sont d'ailleurs expressément choisies pour satisfaire ces égalités. Dans la suite, on suppose toujours qu'on a choisi la version "large" du p.é.c., donc $\mathcal{CP}$ est bien une catégorie monoïdale.

4.4 Échange et catégorie monoïdale symétrique

La logique linéaire est commutative : la règle d'échange ... permet de construire la preuve canonique de $A \otimes B \vdash B \otimes A$ ci-contre. On peut alors ajouter un nouvel isomorphisme naturel à $\mathcal{CP}$ pour en faire une catégorie monoïdale symétrique. Des variantes "non commutatives" ont été étudiées dans la littérature, où la règle d'échange est supprimée ou affaiblie. Dans ce dernier cas, on peut parfois obtenir quand même une catégorie monoïdale tressée.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{B \vdash B}\,(id) \qquad \dfrac{}{A \vdash A}\,(id)}{B, A \vdash B \otimes A}\,(\otimes R)}{A, B \vdash B \otimes A}\,(exchange)}{A \otimes B \vdash B \otimes A}\,(\otimes L)$$

Définition 7. *Soit $\mathcal{C}$ une catégorie monoïdale, avec les notations précédentes. C'est une* **catégorie monoïdale tressée** *s'il existe un **isomorphisme naturel** $\gamma_{A,B} : A \otimes B \to B \otimes A$ tel que les* diagrammes hexagonaux *suivants commutent.*

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & A \otimes (B \otimes C) \arrow[r, "\gamma"] & (B \otimes C) \otimes A \arrow[dr, bend left, "\alpha"] & \\
(A \otimes B) \otimes C \arrow[ur, bend left, "\alpha"] \arrow[dr, bend right, "\gamma \otimes C"'] & & & B \otimes (C \otimes A) \\
 & (B \otimes A) \otimes C \arrow[r, "\alpha"] & B \otimes (A \otimes C) \arrow[ur, bend right, "B \otimes \gamma"'] &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & (A \otimes B) \otimes C \arrow[r, "\gamma"] & C \otimes (A \otimes B) \arrow[dr, bend left, "\alpha^{-1}"] & \\
A \otimes (B \otimes C) \arrow[ur, bend left, "\alpha^{-1}"] \arrow[dr, bend right, "A \otimes \gamma"'] & & & (C \otimes A) \otimes B \\
 & A \otimes (C \otimes B) \arrow[r, "\alpha^{-1}"] & (A \otimes C) \otimes B \arrow[ur, bend right, "\gamma \otimes B"'] &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
 & A \otimes (B \otimes C) \arrow[r, "\alpha_{A,e,B}"] & (B \otimes C) \otimes A & \\
(A \otimes B) \otimes C \arrow[ur, "\alpha_{A,e,B}"] & & & B \otimes (C \otimes A)
\end{tikzcd}$$

Définition 8. *Soit $\mathcal{C}$ une catégorie monoïdale tressée, avec les notations précédentes. C'est une* **catégorie monoïdale symétrique** *si pour tous objets A, B, on a $\gamma_{B,A} = \gamma_{A,B}^{-1}$. Dans ce cas, on n'a pas besoin de vérifier la commutativité du second diagramme de la définition précédente, qui est entraînée par la commutativité du premier diagramme appliquée à $\gamma_{B,A}$.*

Dans $\mathcal{C}$, on définit $\gamma_{A,B}$ comme la dénotation de la preuve canonique de $A \otimes B \vdash B \otimes A$ donnée précédemment. On obtient alors une **catégorie monoïdale symétrique**. (vrai ? démonstrations, explications, exemples ?)

4.5 Implication linéaire et catégorie monoïdale fermée

Intéressons-nous maintenant à l'implication linéaire $\multimap$. Ce connecteur logique induit encore une fois un opérateur sur les dénotations de formules, qui a un sens en théorie des catégories.

Définition 9. *Soit $\mathcal{C}$ une catégorie monoïdale, toujours avec les mêmes notations. Une* **structure fermée à gauche** *sur $\mathcal{C}$ consiste en un opérateur $\multimap$ sur les objets et pour tous objets A, B, un morphisme $eval_{A,B} : A \otimes (A \multimap B) \to B$, vérifiant la propriété d'universalité suivante : pour tout objet X et tout morphisme $f : A \otimes X \to B$, il existe un unique morphisme $h : X \to A \multimap B$ tel que le diagramme suivant commute.*

$$\begin{tikzcd}
A \otimes X \arrow[d, "A \otimes h"'] \arrow[dr, "f"] & \\
A \otimes (A \multimap B) \arrow[r, "eval_{A,B}"'] & B
\end{tikzcd}$$

On dit alors que $\mathcal{C}$ est une **catégorie monoïdale fermée***.*

On munit $\mathcal{CP}$ de l'opérateur $\multimap$ sur les dénotations de formules correspondant à l'implication linéaire. On définit $eval_{A,B}$ comme la dénotation de la preuve ci-contre. On obtient alors une **catégorie monoïdale fermée**. (Est-ce vrai ? Est-ce qu'on peut expliquer facilement comment obtenir h à partir de f ?)