Table des matières

1 Calcul de séquents : exemple de la logique classique

2 La logique linéaire

3 Élimination de la coupure

4 Catégories

4.1 Invariant modulaire et catégorie

Notation. Soit p une preuve du séquent σ. On écrit $\underset{\sigma}{\overset{p}{\cdots}}$ car souvent, il est intéressant d'expliciter σ pour prolonger p en une preuve plus complexe d'un autre séquent.

À chaque preuve p, on associe une ***dénotation*** $[p]$. On veut que cela constitue un invariant selon l'élimination de la coupure : deux preuves on la même dénotation si, et seulement si, une peut être obtenue en appliquant à l'autre des transformations autorisée par la procédure d'élimination de la coupure. Ceci est motivé par une analogie avec la théorie des nœuds, où les invariants sont relatifs aux transformations de Reidemeister (?).

On demande également la propriété suivante. Soit A, B, C des formules, et p_1 et p_2 des preuves de $A \vdash B$ et $B \vdash C$ respectivement. La règle de coupure fournit immédiatement la preuve p de $A \vdash C$ ci-contre. On veut que sa dénotation $[p]$ se déduise à partir de $[p_1]$ et $[p_2]$. On introduit pour cela la **loi de composition** $\circ$ telle que $[p] = [p_2] \circ [p_1]$. On dit alors que l'invariant est *modulaire*.

$$\underset{\displaystyle p}{\dfrac{\begin{array}{c}p_1\\ \cdots\cdots\\ A\vdash B\end{array}\qquad \begin{array}{c}p_2\\ \cdots\cdots\\ B\vdash C\end{array}}{A\vdash C}\,(cut)}$$

On remarque que la loi de composition $\circ$ est **associative** et présente pour chaque formule une **identité** à gauche et à droite. En effet, soit A, B, C, D des formules, et p_1, p_2, p_3 des preuves respectives de $A \vdash B$, $B \vdash C$, $C \vdash D$. On peut en déduire deux preuves de $A \vdash D$:

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c} p_1 \\ \cdots\cdots \\ A \vdash B \end{array} \qquad \begin{array}{c} p_2 \\ \cdots\cdots \\ B \vdash C \end{array}}{A \vdash C}\,(cut) \qquad \begin{array}{c} p_3 \\ \cdots\cdots \\ C \vdash D \end{array}}{A \vdash D}\,(cut) \qquad \text{et} \qquad \dfrac{\begin{array}{c} p_1 \\ \cdots\cdots \\ A \vdash B \end{array} \qquad \dfrac{\begin{array}{c} p_2 \\ \cdots\cdots \\ B \vdash C \end{array} \qquad \begin{array}{c} p_3 \\ \cdots\cdots \\ C \vdash D \end{array}}{B \vdash D}\,(cut)}{A \vdash D}\,(cut)$$

qui sont équivalentes d'après le procédé d'élimination de la coupure. Cela signifie précisément que $([p_1] \circ [p_2]) \circ [p_3] = [p_1] \circ ([p_2] \circ [p_3])$. L'identité pour une formule A est la dénotation de la preuve $\dfrac{}{A \vdash A}\,(id)$; on note cette dénotation id_A. Soit p une preuve de $A \vdash B$, les deux preuves $\dfrac{\dfrac{}{A \vdash A}\,(id) \quad \begin{array}{c} p \\ \cdots\cdots \\ A \vdash B \end{array}}{A \vdash B}\,(cut)$ et $\begin{array}{c} p \\ \cdots\cdots \\ A \vdash B \end{array}$ sont équivalentes selon l'élimination de la coupure, ce qui signifie que $[p] \circ id_A = [p]$. De même, pour p une preuve de $B \vdash A$, on a $id_A \circ [p] = [p]$.

Ces propriétés sur les dénotations permettent d'utiliser le formalisme des catégories.

Définition 1. *Une* **catégorie** *consiste en une collection d'*objets *et une collection de* morphismes*, cette dernière munie d'une opérations binaire partielle* $\circ$ *appelée* composition*, avec les propriétés suivantes.*

- *À chaque morphisme f est associé un couple d'objets (A, B) ; on écrit $f : A \to B$. On dit que $A \to B$ est le* type *de f, et que f est un morphisme* de A vers B*, et encore que A est le* domaine *ou la* source *de f, et B le* codomaine *ou la* cible *de f.*
- *Pour tous objets A, B, C et morphismes f, g tels que $f : A \to B$ et $g : B \to C$, le morphisme $g \circ f$ existe et $g \circ f : A \to C$.*
- ***Identité.*** *Pour tout objet A, il existe un morphisme particulier $id_A : A \to A$ appelé* identitié sur A*, tel que pour tout objet B, pour tout $f : B \to A$, $id_A \circ f = f$ et pour tout $g : A \to B$, $g \circ id_A = g$.*
- ***Associativité.*** *Pour tous $f : A \to B$, $g : B \to C$, $h : C \to D$, on a $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.*

Notations. *Soit $\mathcal{C}$ une catégorie, on note $Obj(\mathcal{C})$ la classe de ses objets et $Hom(\mathcal{C})$ celle de ses morphismes. Pour des objets A et B, on note $Hom_{A \to B}(\mathcal{C})$ la classe des morphismes de type $A \to B$. On peut omettre l'argument $\mathcal{C}$ s'il n'y a pas d'ambiguïté, par exemple si on travaille sur une seule catégorie.*

Les dénotations des preuves s'organisent sous la forme de la catégorie suivante, qu'on appellera ?$\mathcal{C}$?. À chaque formule A on associe une dénotation $[A]$. Les dénotations des formules, deux à deux distinctes, constituent les objets de la catégorie. Les morphismes sont des dénotations de preuves. Les morphismes de $[A]$ vers $[B]$ sont les dénotations des preuves de $A \vdash B$; si ce séquent n'est pas prouvable, il n'y en a pas. La composition $\circ$ est bien associative, et l'identité sur $[A]$ est le morphisme id_A.

Cette définition ne tient compte que des dénotations de preuves où le séquent prouvé a une unique formule à gauche et une unique formule à droite ; les autres séquents des preuves peuvent avoir n'importe quelle forme. Cette restriction est conservée dans les quelques sous-section qui suivent, où on enrichit notre catégorie. ... Enfin, on étend ce formalisme à toutes les preuves de logique linéaire intuitionniste, c'est-à-dire avec des séquents qui ont un nombre quelconque de formules à gauche et exactement une formule à droite.

4.2 Produit tensoriel et catégorie monoïdale

Le connecteur de logique linéaire $\otimes$ permet de définir un produit tensoriel sur les dénotations de formules, aussi noté $\otimes$: on pose $[A] \otimes [B] = [A \otimes B]$. On souhaite étendre cet opérateur aux dénotations de preuves. Pour cela, on remarque qu'à partir de preuves p_1 de $A_1 \vdash B_1$ et

p_2 de $A_2 \vdash B_2$, on peut déduire la preuve p ci-contre de $A_1 \otimes A_2 \vdash B_1 \otimes B_2$. On définit alors $[p_1] \otimes [p_2] = [p]$. On admet que l'opérateur est bien défini : si on a deux autres preuves p'_1 et p'_2 telles que $[p'_1] = [p_1]$ et $[p'_2] = [p_2]$, et si p' est la preuve obtenue à partir de p'_1 et p'_2 selon le procédé utilisé pour construire p, alors $[p'] = [p]$.

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c} p_1 \\ \vdots \\ A_1 \vdash B_1 \end{array} \qquad \begin{array}{c} p_2 \\ \vdots \\ A_2 \vdash B_2 \end{array}}{A_1, A_2 \vdash B_1 \otimes B_2}\,(\otimes R)}{A_1 \otimes A_2 \vdash B_1 \otimes B_2}\,(\otimes L)$$
$$p$$

On verra que munir la catégorie ?$\mathcal{C}$? de $\otimes$ en fait une catégorie monoïdale. Mais pour définir ce qu'est une catégorie monoïdale, il faut plusieurs autres définitions sur les catégories.

Définition 2. *Soit $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ des catégories. Un* **foncteur** $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ *de $\mathcal{C}$ vers $\mathcal{D}$ consiste en une application des objets de $\mathcal{C}$ vers les objets de $\mathcal{D}$ et une application des morphismes de $\mathcal{C}$ vers les morphismes de $\mathcal{D}$, notées toutes deux F par abus d'écriture, tel que*
- *Pour tous objets A, B et morphisme $f : A \to B$ de $\mathcal{C}$, on a $F(f) : F(A) \to F(B)$.*
- *Pour tous morphismes $f : A \to B$ et $g : B \to C$ de $\mathcal{C}$, on a $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$.*
- *Pour tout objet A de $\mathcal{C}$, on a $F(id_A) = id_{F(A)}$.*

Définition 3. *Soit $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ des catégories. Soit $F, G : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ des foncteurs de $\mathcal{C}$ vers $\mathcal{D}$. Une* **transformation naturelle** *θ de F vers G est une famille $\big(\, \theta_A : F(A) \to G(A) \,\big)_{A \in Obj(\mathcal{C})}$ de morphismes de $\mathcal{D}$, indexée par les objets de $\mathcal{C}$, telle que le diagramme suivant commute dans $\mathcal{D}$ pour tout morphisme $f : A \to B$ de $\mathcal{C}$*

$$\begin{tikzcd} FA \arrow[r, "\theta_A"] \arrow[d, "Ff"'] & GA \arrow[d, "Gf"] \\ FB \arrow[r, "\theta_B"] & GB \end{tikzcd}$$

On note $\theta : F \Rightarrow G$, voire $\theta : F \Rightarrow G : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$.

Définition 4. *Soit $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ des catégories. On définit la* **catégorie produit** *$\mathcal{C} \times \mathcal{D}$, où $Obj(\mathcal{C} \times \mathcal{D}) = Obj(\mathcal{C}) \times Obj(\mathcal{D})$ et $Hom_{(A,A') \to (B,B')} = Hom_{A \to B}(\mathcal{C}) \times Hom_{A' \to B'}(\mathcal{D})$.*

Définition 5. *Soit une catégorie, un morphisme $f : A \to B$ est un* **isomorphisme** *s'il existe un morphisme $f^{-1} : B \to A$ tel que $f^{-1} \circ f = id_A$ et $f \circ f^{-1} = id_B$.*

Définition 6. *Une* **catégorie monoïdale** *est une catégorie $\mathcal{C}$ munie d'un bifoncteur $\otimes : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$ (pour lequel on utilise une notation infixe) et d'un objet particulier e, telle qu'il existe des* ***isomorphismes naturels***
- *$\alpha_{A,B,C} : (A \otimes B) \otimes C \to A \otimes (B \otimes C)$, permettant de parler d'associativité ;*
- *$\lambda_A : e \otimes A \to A$;*
- *$\rho_A : A \otimes e \to A$, permettant avec le précédent d'appeler e l'objet* ***unité*** *;*

et tel que les diagrammes suivants commutent pour tous objets A, B, C, D.

$$\begin{tikzcd}
& (A\otimes B)\otimes(C\otimes D) \arrow[dr, "\alpha"] & \\
((A\otimes B)\otimes C)\otimes D \arrow[ur, "\alpha"] \arrow[d, "\alpha\otimes D"'] & & A\otimes(B\otimes(C\otimes D)) \\
(A\otimes(B\otimes C))\otimes D \arrow[rr, "\alpha"] & & A\otimes((B\otimes C)\otimes D) \arrow[u, "A\otimes\alpha"']
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
(A\otimes e)\otimes B \arrow[rr, "\alpha"] \arrow[dr, "\rho\otimes B"'] & & A\otimes(e\otimes B) \arrow[dl, "A\otimes\lambda"] \\
& A\otimes B &
\end{tikzcd}$$

Ces diagrammes sont appelés diagrammes pentagonal *et* triangulaire*. Leur commutativité est la* propriété de cohérence*. On omet souvent les indices de α, λ, ρ lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté. Ici, on écrit aussi A pour id_A : par exemple, comprendre $\alpha\otimes D$ comme $\alpha_{A,B,C}\otimes id_A$.*

Précision. *On parle d'isomorphismes naturels car il y a bien des transformations naturelles associées. En fait la condition sur α est $\alpha : F \Rightarrow G : \mathcal{C}\times\mathcal{C}\times\mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$ avec $F : (x,y,z) \mapsto (x\otimes y)\otimes z$ et $G : (x,y,z)\mapsto x\otimes(y\otimes z)$ où x, y, z sont trois objets ou trois morphismes de $\mathcal{C}$. On écrit $\alpha_{A,B,C}$ pour $\alpha_{(A,B,C)}$. Les $\alpha_{A,B,C}$ sont bien des morphismes de $\mathcal{C}$, qui est la catégorie d'arrivée de F et G. On veut aussi $\lambda : (e\otimes\bullet) \Rightarrow Id_{\mathcal{C}} : \mathcal{C}\longrightarrow\mathcal{C}$ où $(e\otimes\bullet) : \begin{cases} A\mapsto e\otimes A \\ f\mapsto id_e\otimes f\end{cases}$ et où $Id_{\mathcal{C}}$ est le foncteur identité sur $\mathcal{C}$. Il y a une condition similaire pour ρ.*

L'opérateur $\otimes$ qu'on a définit sur les dénotations de formules puis sur les dénotations de preuves constitue un *bifoncteur* de la catégorie ?$\mathcal{C}$?, c'est-à-dire un foncteur $\otimes : \mathcal{C}\times\mathcal{C}\longrightarrow\mathcal{C}$. $\mathcal{C}$ munie de $\otimes$ est presque une **catégorie monoïdale** avec comme objet unité $[\mathbf{1}]$, la dénotation de la formule $\mathbf{1}$, élément neutre pour le connecteur $\otimes$. En effet, on peut définir des morphismes $\alpha_{A,B,C}$, λ_A, ρ_A comme les dénotations des preuves suivantes

$$\alpha_{A,B,C} : \dfrac{\dfrac{\dfrac{\overline{A\vdash A}\,(id) \qquad \dfrac{\overline{B\vdash B}\,(id) \quad \overline{C\vdash C}\,(id)}{B,C\vdash B\otimes C}\,(\otimes R)}{A,B,C\vdash A\otimes(B\otimes C)}\,(\otimes R)}{A\otimes B,C\vdash A\otimes(B\otimes C)}\,(\otimes L)}{(A\otimes B)\otimes C\vdash A\otimes(B\otimes C)}\,(\otimes L) \qquad \lambda_A : \dfrac{\dfrac{\overline{A\vdash A}\,(id)}{\mathbf{1},A\vdash A}\,(\mathbf{1}L)}{\mathbf{1}\otimes A\vdash A}\,(\otimes L) \qquad \rho_A : \dfrac{\dfrac{\overline{A\vdash A}\,(id)}{A,\mathbf{1}\vdash A}\,(\mathbf{1}L)}{A\otimes\mathbf{1}\vdash A}\,(\otimes L)$$

Il s'agit bien de transformations naturelles, et on a bien la propriété de cohérence. ...

En revanche, ces morphismes α, λ, ρ ne sont pas des isomorphismes. On n'écrit plus les indices, qui sont toujours les mêmes. On peut définir des morphismes naturels $\bar\alpha_{A,B,C} : A\circ(B\circ C)\to(A\circ B)\circ C$, $\bar\lambda_A : A\to e\circ A$, $\bar\rho_A : A\to A\circ e$, par exemple $\bar\lambda_A$ est la dénotation de $\dfrac{\overline{\vdash\mathbf{1}}\,(\mathbf{1}R) \quad \overline{A\vdash A}\,(id)}{A\vdash\mathbf{1}\otimes A}\,(\otimes R)$. On pense naturellement à ces morphismes quand on cherche des inverses de α, λ et ρ. On a bien $\lambda\circ\bar\lambda = id_A$ et $\rho\circ\bar\rho = id_A$, en revanche on n'a aucune des égalités suivantes : $\bar\lambda\circ\lambda = id_{e\circ A}$, $\bar\rho\circ\rho = id_{A\circ e}$, $\bar\alpha\circ\alpha = id_{(A\circ B)\circ C}$, $\alpha\circ\bar\alpha = id_{A\circ(B\circ C)}$.

Cependant en ajoutant des transformations ...

4.3 Catégorie fermée

4.4 Symétrie

4.5 Catégorie libre

Définition 7. *Une* **catégorie** *consiste en une collection d'*objets *et une collection de* morphismes*, cette dernière munie d'une opérations binaire partielle* $\circ$ *appelée* composition*, avec les propriétés suivantes.*

- *À chaque morphisme f est associé un couple d'objets (A, B) ; on écrit $f : A \to B$. On dit que $A \to B$ est le* type *de f, et que f est un* morphisme *de A* vers *B, et encore que A est le* domaine *ou la* source *de f, et B le* codomaine *ou la* cible *de f.*
- *Pour tous objets A, B, C et morphismes f, g tels que $f : A \to B$ et $g : B \to C$, le morphisme $g \circ f$ existe et $g \circ f : A \to C$.*
- ***Identité.*** *Pour tout objet A, il existe un morphisme particulier $id_A : A \to A$ appelé* identitié sur *A, tel que pour tout objet B, pour tout $f : B \to A$, $id_A \circ f = f$ et pour tout $g : A \to B$, $g \circ id_A = g$.*
- ***Associativité.*** *Pour tous $f : A \to B$, $g : B \to C$, $h : C \to D$, on a $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.*

On désigne souvent une catégorie par la collection de ses objets.

Définition 8. *Une* **catégorie monoïdale** *est une catégorie $\mathcal{C}$ munie d'un bifoncteur $\otimes : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$ et d'un objet e, tel que les morphismes suivants existent*

- *pour tous objets A, B, C, un isomorphisme $\alpha_{A,B,C} : (A \otimes B) \otimes C \to A \otimes (B \otimes C)$ permettant de parler d'associativité ;*
- *pour tout objet A, des isomorphismes $\lambda_A : e \otimes A \to A$ et $\rho_A : A \otimes e \to A$ justifiant le nom d'**unité** pour e ;*

et tel que les diagrammes suivants commutent pour tous objets A, B, C, D. On a omis les indices de α, λ, ρ et écrit A pour id_A : par exemple, comprendre $\alpha \otimes D$ comme $\alpha_{A,B,C} \otimes id_A$.

$$\begin{tikzcd}
 & (A \otimes B) \otimes (C \otimes D) \arrow[dr, "\alpha"] & \\
((A \otimes B) \otimes C) \otimes D \arrow[ur, "\alpha"] \arrow[d, "\alpha \otimes D"'] & & A \otimes (B \otimes (C \otimes D)) \\
(A \otimes (B \otimes C)) \otimes D \arrow[rr, "\alpha"] & & A \otimes ((B \otimes C) \otimes D) \arrow[u, "A \otimes \alpha"']
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
(A \otimes e) \otimes B \arrow[rr, "\alpha"] \arrow[dr, "\rho \otimes B"'] & & A \otimes (e \otimes B) \arrow[dl, "A \otimes \lambda"] \\
 & A \otimes B &
\end{tikzcd}$$

À chaque preuve π on associe une *dénotation* $[\pi]$, qu'on veut invariante par élimination de la coupure.

Les objets sont les formules et les morphismes sont des dénotations de preuves. Les morphismes d'une formule A vers une formule B sont les dénotations des différentes preuves du séquent $A \vdash B$ (si le séquent n'est pas prouvable, il n'y en a pas).

Soit A, B, C des formules, π_1 une preuve de $A \vdash B$ et π_2 une preuve de $B \vdash C$. On définit $[\pi_2] \circ [\pi_1]$ comme la dénotation de la preuve suivante de $A \vdash C$

$$\dfrac{\begin{array}{c}\pi_1\\ A \vdash B\end{array} \qquad \begin{array}{c}\pi_2\\ B \vdash C\end{array}}{A \vdash C}\,(cut)$$

L'identité id_A sur une formule A est la dénotation de la preuve $\dfrac{}{A \vdash A}\,(Id)$. Soit π une preuve de $A \vdash B$, l'élimination de la coupure transforme la preuve

$$\dfrac{\dfrac{}{A \vdash A}\,(Id) \qquad \begin{array}{c}\pi\\ A \vdash B\end{array}}{A \vdash B}\,(cut) \qquad\qquad \text{en} \qquad\qquad \begin{array}{c}\pi\\ A \vdash B\end{array}$$

donc on a bien $[\pi] \circ id_A = [\pi]$. De même pour π une preuve de $B \vdash A$, on a $id_A \circ [\pi] = [\pi]$.

L'associativité vient de ce que les preuves

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\pi_1\\ A \vdash B\end{array} \qquad \begin{array}{c}\pi_2\\ B \vdash C\end{array}}{A \vdash C}\,(cut) \qquad \begin{array}{c}\pi_3\\ C \vdash D\end{array}}{A \vdash D}\,(cut) \qquad \text{et} \qquad \dfrac{\begin{array}{c}\pi_1\\ A \vdash B\end{array} \qquad \dfrac{\begin{array}{c}\pi_2\\ B \vdash C\end{array} \qquad \begin{array}{c}\pi_3\\ C \vdash D\end{array}}{B \vdash D}\,(cut)}{A \vdash D}\,(cut)$$

sont équivalentes à élimination de la coupure près.