Calcul des séquents

Diane Gallois-Wong

2014

Introduction

Logiques propositionnelles

Formule :

Les séquents

Chaque calcul des séquents a sa propre définition d'un *séquent*.

Définition

Un **séquent** *de* **LK** *consiste en deux listes de formules* Γ *et* Δ.
On le note $\Gamma \vdash \Delta$.

Formules de Γ : "hypothèses"   Formules de Δ : "conclusions"

Un séquent $\Gamma \vdash \Delta$ correspond à la formule $\left(\bigwedge_{G \in \Gamma} G\right) \rightarrow \left(\bigvee_{D \in \Delta} D\right)$ en logique classique.

Les règles

Règles de la forme : $\dfrac{\textit{prémisses}}{\textit{conclusion}}\,(\textit{nom de la règle})$

Si les prémisses sont valides, alors la conclusion est aussi valide.

Exemples de règles de **LK** :

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta \qquad \Gamma \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \wedge B, \Delta}\,(\wedge R) \qquad\qquad \frac{}{A \vdash A}\,(id)$$

Familles de règles

Identité : $\dfrac{}{A \vdash A}\,(id)$

Coupure : $\dfrac{\Gamma \vdash A, \Delta \qquad \Gamma', A \vdash \Delta'}{\Gamma, \Gamma' \vdash \Delta, \Delta'}\,(cut)$

Règles logiques

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta \qquad \Gamma \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \wedge B, \Delta}\,(\wedge R)$$

$$\frac{}{\Gamma, \bot \vdash \Delta}\,(\bot L)$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \rightarrow B, \Delta}\,(\rightarrow R)$$

Introduction dans la conclusion d'une constante ou d'un connecteur n'apparaissant pas dans les prémisses.

Règles structurelles

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma, A \vdash \Delta}\,(weakening\ L)$$

$$\frac{\Gamma \vdash A, A, \Delta}{\Gamma \vdash A, \Delta}\,(contraction\ R)$$

$$\frac{\Gamma_1, A, B, \Gamma_2 \vdash \Delta}{\Gamma_1, B, A, \Gamma_2 \vdash \Delta}\,(exchange\ L)$$

Modification du nombre d'occurrences ou déplacement de formules dont on ne connaît pas la structure.

Une *preuve*, ou *arbre de preuve*, est un arbre dont chaque nœud est étiqueté par un séquent et une règle, tel que les séquents associés à un nœud et à ses fils forment une application de la règle associée au nœud.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{A \vdash A}\,(id)}{A, B \vdash A}\,(weakening\ L) \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{B \vdash B}\,(id)}{B, A \vdash A}\,(weakening\ L)}{A, B \vdash A}\,(exchange\ L)}{}}{A, B \vdash A \wedge B}\,(\wedge R)$$

Définition

Un séquent est **prouvable dans un calcul** *s'il existe un arbre de preuve dont la racine est étiquetée par ce séquent. On dit alors que l'arbre est une* **preuve de ce séquent**.

Proposition

Une formule A est valide en logique classique si, et seulement si, le séquent $\vdash A$ est prouvable dans **LK**.

Calcul **LJ** et logique intuitionniste

On obtient le calcul **LJ** à partir de **LK** en se restreignant à des séquents avec exactement une formule à droite.

Définition

Un **séquent** *de* **LJ** *consiste en une liste de formules* Γ *et une formule* D. *On le note* $\Gamma \vdash D$.

Un séquent $\Gamma \vdash D$ correspond à la formule $\left(\bigwedge_{G \in \Gamma} G\right) \rightarrow D$ en logique intuitionniste.

Les règles sont adaptées en conséquence :

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta \qquad \Gamma \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \wedge B, \Delta}\,(\wedge R) \quad \dashrightarrow \quad \frac{\Gamma \vdash A \qquad \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \wedge B}\,(\wedge R)$$

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta \qquad \Gamma', A \vdash \Delta'}{\Gamma, \Gamma' \vdash \Delta, \Delta'}\,(cut) \quad \dashrightarrow \quad \frac{\Gamma \vdash A \qquad \Gamma', A \vdash D}{\Gamma, \Gamma' \vdash D}\,(cut)$$

Calcul **LJ** et logique intuitionniste

Les règles structurelles à droite disparaissent : $\dfrac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash A, \Delta}$ (*weakening R*)

$$\frac{\Gamma \vdash A, A, \Delta}{\Gamma \vdash A, \Delta}\ (\textit{contraction } R) \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta_1, A, B, \Delta_2}{\Gamma \vdash \Delta_1, B, A, \Delta_2}\ (\textit{exchange } R)$$

Définition / Proposition

Une formule A est **prouvable en logique intuitionniste** *si, et seulement si, le séquent $\vdash A$ est prouvable dans* **LJ**.

Cette restriction à des séquents avec exactement une formule à droite explique qu'il existe des formules vraies en logique classique mais non prouvables en logique intuitionniste, par exemple le principe du tiers exclu $A \vee \neg A$: pour prouver le séquent $\vdash A \vee \neg A$ dans **LK**, on passe par un séquent $\vdash A, \neg A$ qui n'existe pas dans **LJ**.

Élimination de la coupure

Règle de coupure : $$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta \qquad \Gamma', A \vdash \Delta'}{\Gamma, \Gamma' \vdash \Delta, \Delta'}\,(cut) \quad \text{dans } \mathbf{LK}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A \qquad \Gamma', A \vdash D}{\Gamma, \Gamma' \vdash D}\,(cut) \quad \text{dans } \mathbf{LJ}$$

Signification importante : si on prouve A, on peut ensuite se servir de A comme hypothèse.

*Un calcul des séquents comportant une règle de coupure vérifie la propriété d'*__élimination de la coupure__ *si, lorsqu'on enlève la règle de coupure, on obtient un calcul des séquents équivalent, c'est-à-dire que les séquents prouvables sont les mêmes.*

Théorème

LK *et* **LJ** *vérifient la propriété d'élimination de la coupure.*

Élimination de la coupure

Formulation équivalente :

*Un calcul des séquents comportant une règle de coupure vérifie la propriété d'***élimination de la coupure** *si, pour toute preuve d'un séquent, il existe une preuve du même séquent dans laquelle la règle de coupure n'apparaît pas.*

Il existe des preuves constructives qui proposent un procédé précis pour transformer une preuve donnée d'un séquent en une preuve du même séquent sans la règle de coupure.

Relation binaire sur les preuves : $p \triangleright p'$ si le procédé permet de transformer p en p'.

La clôture symétrique et transitive de $\triangleright$ définit une relation d'équivalence appelée *équivalence selon le procédé d'élimination de la coupure*.

Catégorie : définition

Définition

Une **catégorie** *consiste en des* **objets** *(notés A,B,...) et des* **morphismes** *(notés f ,g,...), avec une loi binaire partielle* $\circ$ *sur les morphismes, tels que*

- *à chaque morphisme* f *est associé un couple d'objets* (A, B) *; on note* $f : A \to B$*.*
- *si* $f : A \to B$ *et* $g : B \to C$*, il existe un morphisme* $g \circ f : A \to C$*.*
- *pour tout A, il existe une* **identité** $id_A : A \to A$ *vérifiant* $id_A \circ f = f$ *si* $f : B \to A$ *et* $g \circ id_A = g$ *si* $g : A \to B$*.*
- *la loi* $\circ$ *est* **associative** *: si* $f : A \to B$ *et* $g : B \to C$ *et* $h : C \to D$*, alors* $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$*.*

Exemples :

objets : ensembles, morphismes : fonctions

objets : sommets, morphismes : arêtes d'un graphe orienté

Preuves et catégorie

Cadre : un calcul des séquents vérifiant la propriété d'élimination de la coupure, avec une preuve constructive définissant un procédé d'élimination de la coupure et donc une relation d'équivalence.

À chaque preuve p on associe une *dénotation* $[p]$ telle que, pour toutes preuves p et p' qui sont équivalentes selon le procédé d'élimination de la coupure, $[p] = [p']$. On associe aussi une dénotation $[A]$ à chaque formule A.

On définit alors une catégorie $\mathcal{CP}$:

- objets : les dénotations des formules
- morphismes : les dénotations des preuves de séquents avec exactement une formule de chaque côté. Si p est une preuve de $A \vdash B$, alors $[p] : [A] \to [B]$.

Preuves et catégorie

On définit alors une catégorie $\mathcal{CP}$:

- objets : les dénotations des formules
- morphismes : les dénotations des preuves de séquents avec exactement une formule de chaque côté. Si p est une preuve de $A \vdash B$, alors $[p] : [A] \to [B]$.
- composition $\circ$ sur les morphismes : si p_1 est une preuve de $A \vdash B$ et p_2 une preuve de $B \vdash C$, donc $[p_1] : [A] \to [B]$ et $[p_2] : [B] \to [C]$, alors on définit $[p_2] \circ [p_1] = [p] : [A] \to [C]$ où p est la preuve de $A \vdash C$ suivante : $$p \ : \quad \dfrac{\dfrac{\vdots\, p_1}{A \vdash B} \qquad \dfrac{\vdots\, p_2}{B \vdash C}}{A \vdash C}\,(cut)$$
- identité sur $[A]$: dénotation de $\dfrac{}{A \vdash A}\,(id)$

Tenseur et catégorie monoïdale ?

sans donner le détail des définitions, dire qu'on veut des morphismes α, λ, ρ de type donné vérifiant certaines propriétés, et qu'on les obtient comme dénotations de preuves explicites

Algorithme de recherche de preuve

Prouveur

Règle de coupure

Règle de contraction

Inversibilité

Localité

LSJ

séquents

exemples de règles

LSJℓ

Priorités

Indexation

Efficacité 1

ILTP, tableau avec quelques temps

Efficacité 2

SYJ209

Langage T

Compilation de fonctions adaptées à la formule

Différents prouveurs

où mettre la structure du code avec le nombre de lignes

Pistes d'amélioration