Table des matières

Définition 1. *Une* **catégorie** *consiste en une collection d'*objets *et une collection de* morphismes*, cette dernière munie d'une opérations binaire partielle* $\circ$ *appelée* composition*, avec les propriétés suivantes.*

- *À chaque morphisme f est associé un couple d'objets (A, B) ; on écrit $f : A \to B$. On dit que $A \to B$ est le* type *de f, et que f est un morphisme* de A vers B*, et encore que A est le* domaine *ou la* source *de f, et B le* codomaine *ou la* cible *de f.*
- *Pour tous objets A, B, C et morphismes f, g tels que $f : A \to B$ et $g : B \to C$, le morphisme $g \circ f$ existe et $g \circ f : A \to C$.*
- ***Identité.*** *Pour tout objet A, il existe un morphisme particulier $id_A : A \to A$ appelé* identitié sur A*, tel que pour tout objet B, pour tout $f : B \to A$, $id_A \circ f = f$ et pour tout $g : A \to B$, $g \circ id_A = g$.*
- ***Associativité.*** *Pour tous $f : A \to B$, $g : B \to C$, $h : C \to D$, on a $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.*

On désigne souvent une catégorie par la collection de ses objets.

Définition 2. *Une* **catégorie monoïdale** *est une catégorie $\mathbb{C}$ munie d'un bifoncteur $\otimes : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ et d'un objet e, tel que les morphismes suivants existent*

- *pour tous objets A, B, C, un isomorphisme $\alpha_{A,B,C} : (A \otimes B) \otimes C \to A \otimes (B \otimes C)$ permettant de parler d'associativité ;*
- *pour tout objet A, des isomorphismes $\lambda_A : e \otimes A \to A$ et $\rho_A : A \otimes e \to A$ justifiant le nom d'**unité** pour e ;*

et tel que les diagrammes suivants commutent pour tous objets A, B, C, D. On a omis les indices de α, λ, ρ et écrit A pour id_A : par exemple, comprendre $\alpha \otimes D$ comme $\alpha_{A,B,C} \otimes id_A$.

$$
\begin{tikzcd}
 & (A \otimes B) \otimes (C \otimes D) \arrow[dr, "\alpha"] & \\
((A \otimes B) \otimes C) \otimes D \arrow[ur, "\alpha"] \arrow[d, "\alpha \otimes D"'] & & A \otimes (B \otimes (C \otimes D)) \\
(A \otimes (B \otimes C)) \otimes D \arrow[rr, "\alpha"] & & A \otimes ((B \otimes C) \otimes D) \arrow[u, "A \otimes \alpha"']
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
(A \otimes e) \otimes B \arrow[rr, "\alpha"] \arrow[dr, "\rho \otimes B"'] & & A \otimes (e \otimes B) \arrow[dl, "A \otimes \lambda"] \\
 & A \otimes B &
\end{tikzcd}
$$

À chaque preuve π on associe une *dénotation* $[\pi]$, qu'on veut invariante par élimination de la coupure.

Les objets sont les formules et les morphismes sont des dénotations de preuves. Les morphismes d'une formule A vers une formule B sont les dénotations des différentes preuves du séquent $A \vdash B$ (si le séquent n'est pas prouvable, il n'y en a pas).

Soit A, B, C des formules, π_1 une preuve de $A \vdash B$ et π_2 une preuve de $B \vdash C$. On définit $[\pi_2] \circ [\pi_1]$ comme la dénotation de la preuve suivante de $A \vdash C$

$$\dfrac{\begin{array}{c}\pi_1\\ A \vdash B\end{array} \qquad \begin{array}{c}\pi_2\\ B \vdash C\end{array}}{A \vdash C}\ (cut)$$

L'identité id_A sur une formule A est la dénotation de la preuve $\dfrac{}{A \vdash A}\ (Id)$. Soit π une preuve de $A \vdash B$, l'élimination de la coupure transforme la preuve

$$\dfrac{\dfrac{}{A \vdash A}\ (Id) \qquad \begin{array}{c}\pi\\ A \vdash B\end{array}}{A \vdash B}\ (cut) \qquad\qquad \text{en} \qquad\qquad \begin{array}{c}\pi\\ A \vdash B\end{array}$$

donc on a bien $[\pi] \circ id_A = [\pi]$. De même pour π une preuve de $B \vdash A$, on a $id_A \circ [\pi] = [\pi]$.

L'associativité vient de ce que les preuves

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\pi_1\\ A \vdash B\end{array} \qquad \begin{array}{c}\pi_2\\ B \vdash C\end{array}}{A \vdash C}\ (cut) \qquad \begin{array}{c}\pi_3\\ C \vdash D\end{array}}{A \vdash D}\ (cut) \qquad \text{et} \qquad \dfrac{\begin{array}{c}\pi_1\\ A \vdash B\end{array} \qquad \dfrac{\begin{array}{c}\pi_2\\ B \vdash C\end{array} \qquad \begin{array}{c}\pi_3\\ C \vdash D\end{array}}{B \vdash D}\ (cut)}{A \vdash D}\ (cut)$$

sont équivalentes à élimination de la coupure près.