définition formule

1 Le calcul LSJ

L'article [] définit un calcul de séquent qu'il appelle **LSJ**. Les séquents ont une sémantique naturelle (?) définie à l'aide des modèles de Kripke. Nous ne referons pas les démonstrations de l'article.

1.1 Les séquents

On s'intéresse à des *multiensembles*, c'est-à-dire des collections où le nombre d'occurrence est pris en compte, mais non l'ordre des éléments. Cela permettra de ne pas avoir besoin de règles explicites d'échange.

Un **séquent** est la donnée de trois multiensembles Θ, Γ et Δ de formules ; on écrit alors $\Theta \ ; \ \Gamma \ \Rightarrow \ \Delta$.

Une définition d'un séquent **réfutable** est donnée dans l'article à l'aide des modèles de Kripke. Nous ne la détaillons pas ici, car ce qui nous intéresse surtout est la propriété suivante qui en découle, démontrée dans l'article. La définition de **prouvable** sera donnée plus tard car elle est liée aux règles du calcul, mais ceci illustre son intérêt.

Proposition 1. *Un séquent $\emptyset \ ; \ \Gamma \ \Rightarrow \ \Delta$ est **réfutable** si, et seulement si, la formule $\bigwedge_{A \in \Gamma} A \ \rightarrow \ \bigvee_{B \in \Delta} B$ n'est pas valide en logique intuitionniste. Un séquent est **prouvable** dans* **LSJ** *si, et seulement si, il n'est pas réfutable.*

Corollaire 2. *Soit A une formule, elle est valide en logique intuitionniste si et seulement si le séquent $\emptyset;\emptyset \Rightarrow A$ est prouvable dans* **LSJ**.

Les multiensembles Γ et Δ, et leur signification dans la propriété 1 sont des éléments habituels en calcul des séquents. En revanche, Θ est propre à **LSJ**, et est difficile à interpréter car contrairement au cas où Θ est vide, un séquent avec Θ quelconque ne peut pas être représenté par une formule. Ce qu'on peut dire est que Θ représente des formules gardées en réserve, non visibles directement dans le séquent (les formules de Θ ne peuvent pas être formule principale), mais qui peuvent être transférées dans Γ et devenir visibles. On verra que les seules règles qui agissent sur Θ sont celles qui concernent le connecteur $\rightarrow$.

Pour un séquent $\Theta \ ; \ \Gamma \ \Rightarrow \ \Delta$, on appellera les formules de Γ les **formules de gauche**, celles de Δ les **formules de droite**, et celles de Θ les **formules de réserve** du séquent (appellations non conventionnelles).

1.2 Les règles

Les règles du calcul **LSJ** sont données dans la figure **??**. La notation A, Γ représente le multiensemble obtenu à partir de Γ en ajoutant une occurrence de A. Pour une règle $\dfrac{prem_1 \quad ... \quad prem_p}{concl}$ $(\mathcal{R})$, $\mathcal{R}$ est le nom de la règle, $prem_1$, ... , $prem_p$ sont les (resp. première, ... , p-ième) **prémisses**, et *concl* la **conclusion**. Les **axiomes** sont les règles sans prémisse. Pour toutes les autres règles, une unique formule apparaît de manière explicite dans la conclusion : c'est la **formule principale**. Les règles dites de gauche, ou d'introduction à gauche, contenant un L dans leur nom, sont celles où la formule principale se trouve à gauche dans la conclusion, de même pour les règles de droite.

Une **instance** d'une règle $\mathcal{R}$ a la même forme que la règle : $\dfrac{\sigma_1 \quad \dots \quad \sigma_p}{\sigma}\ (\mathcal{R})$, mais ici les σ_i et σ sont des séquents connus explicitement ; bien entendu il faut qu'il s'agisse de séquents qui ont bien la forme donnée par la définition de la règle. Par exemple $\dfrac{\Theta; A, B, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\Theta; A \wedge B, \Gamma \Rightarrow \Delta}\ \wedge L$ devient une instance de la règle $\wedge L$ (qui a la même écriture que la règle) lorsqu'on connaît les formules A et B et toutes les formules de Θ, Γ, Δ.

définitions de l'article, pseudo-code
définitions : instance, formule principale

On voit immédiatement que l'algorithme nécessite de pouvoir déduire d'un séquent, d'une règle et d'une formule principale contenue dans le séquent et sur laquelle la règle peut agir, les séquents correspondant aux différentes prémisses. Ce n'est pas difficile : pour les axiomes il n'y a rien à faire ; pour les autres règles, la formule principale H étant de la forme A 'connecteur' B, il suffit d'enlever H du séquent et, selon le connecteur et le côté où se trouvait H, d'ajouter A ou B à Θ, Γ, Δ ou nulle part.

Mais ce n'est pas tout. Lorsqu'on essaie d'appliquer une règle $\dfrac{\sigma_1 \quad \sigma_2}{\sigma}$ au séquent σ, on lance une recherche de preuve sur σ_1 qu'on a obtenu comme décrit ci-dessus. Si on obtient que σ_1 est prouvable, on lance alors la recherche de preuve sur σ_2. On doit donc déterminer σ_2. On a vu qu'on sait le faire à partir de σ. Une solution consiste donc à retenir σ pendant qu'on effectue la recherche de preuve sur σ_1, mais cela peut être coûteux en mémoire. Une autre solution, que nous avons privilégiée, consiste à être capable de retrouver σ à partir de σ_1 ainsi que de la formule principale, de la règle et du numéro de la prémisse (ici 1). On a dans ce cas besoin de pouvoir retrouver la conclusion à partir de n'importe laquelle des prémisses, pas seulement par exemple de la première prémisse pour une règle qui n'en a que deux. En effet, utiliser σ_1 pour retrouver σ suppose qu'à la fin de la recherche de preuve pour σ_1, on connaît σ_1. Or, l'idée ici est de n'avoir vraiment qu'un seul séquent en mémoire à tout moment. Ainsi, à la fin de la recherche de preuve pour σ, on doit connaître σ, donc on doit aussi pouvoir déduire σ de σ_2 en connaissant la formule principale et le fait qu'on est en train de s'intéresser à la deuxième prémisse.

En résumé, on aimerait (bien que ce ne soit pas nécessaire) que toutes les règles soient **locales**, avec la définition suivante.

Définition 3. *Une règle est* ***locale*** *si pour toute instance* $\dfrac{\sigma_1 \quad \dots \quad \sigma_p}{\sigma}$ *de cette règle et pour tout* i *entre* 1 *et* p*, on peut déduire* σ *à partir de* σ_i *et de la formule principale et de* i*.*

On remarque que $\wedge L$, $\wedge R$, $\vee L$ et $\vee R$ sont locales. Les axiomes sont également locaux, la définition n'ayant pas grand intérêt pour eux. En revanche, les règles $\to L$ et $\to R$ ne sont pas locales : pour chacune, les formules représentées par Δ dans la conclusion n'apparaissent nulle part dans la dernière prémisse, il n'est donc pas possible de retrouver la conclusion en connaissant uniquement cette prémisse, la formule principale et le numéro de la prémisse, puisqu'il n'y a aucun moyen d'en déduire ce qui se trouve dans Δ.

C'est pour cette raison qu'on introduit le calcul $\mathbf{LSJ'}$, dans lequel toutes les règles sont locales.

Présentation de LSJ′ et équivalence avec LSJ

On utilise les définitions et notations de l'article.

Le système $\mathbf{LSJ'}$ a pour objectif de faire les mêmes calculs que **LSJ**, mais en manipulant des séquents qui contiennent un peu plus d'information, afin de pouvoir faire le "backtracking" nécessaire à l'algorithme de **LSJ** en n'ayant à tout moment en mémoire qu'un seul séquent.

Pour cela, on veut que les séquents de $\mathbf{LSJ'}$ représentent de manière exhaustive et pertinente ceux de **LSJ** : on montre qu'il existe une surjection de l'ensemble des séquents de $\mathbf{LSJ'}$ dans l'ensemble des séquents de **LSJ**, telle qu'un séquent de $\mathbf{LSJ'}$ est prouvable dans $\mathbf{LSJ'}$ si, et seulement si, son image est prouvable dans **LSJ**.

Le calcul LSJ′

Un séquent de $\mathbf{LSJ'}$ est la donnée de deux multiensembles Γ et Δ de couples *entier* : $formule$, et d'un entier naturel n, tels que tous les entiers présents dans Γ sont $\leq n+1$ et tous ceux présents dans Δ sont $\leq n$; on écrit $\Gamma \Rightarrow_n \Delta$.

Les règles du calcul $\mathbf{LSJ'}$ sont les suivantes (chacune correspond à une règle de **LSJ**) :

n et parfois i désignent toujours des entiers naturels, avec $i \leq n$

$$\frac{}{i : \bot, \Gamma \Rightarrow_n \Delta} \bot L' \qquad \frac{}{i : A, \Gamma \Rightarrow_n n : A, \Delta} \mathrm{Id}'$$

$$\frac{i : A, i : B, \Gamma \Rightarrow_n \Delta}{i : A \wedge B, \Gamma \Rightarrow_n \Delta} \wedge L' \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow_n n : A, \Delta \quad \Gamma \Rightarrow_n n : B, \Delta}{\Gamma \Rightarrow_n n : A \wedge B, \Delta} \wedge R'$$

$$\frac{i : A, \Gamma \Rightarrow_n \Delta \quad i : B, \Gamma \Rightarrow_n \Delta}{i : A \vee B, \Gamma \Rightarrow_n \Delta} \vee L' \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow_n n : A, n : B, \Delta}{\Gamma \Rightarrow_n n : A \vee B, \Delta} \vee R'$$

$$\frac{i : B, \Gamma \Rightarrow_n \Delta \quad n+1 : B, \Gamma \Rightarrow_n n : A, \Delta \quad n+2 : B, \Gamma \Rightarrow_{n+1} n+1 : A, \Delta}{i : A \to B, \Gamma \Rightarrow_n \Delta} \to L'$$

$$\frac{0 : A, \Gamma \Rightarrow_n n : B, \Delta \quad 0 : A, \Gamma \Rightarrow_{n+1} n+1 : B, \Delta}{\Gamma \Rightarrow_n n : A \to B, \Delta} \to R'$$

Équivalence avec LSJ

On note $\mathfrak{S}$ l'ensemble des séquents de **LSJ**, et $\mathfrak{S}'$ l'ensemble des séquents de $\mathbf{LSJ'}$.

Soit $\sigma \in \mathfrak{S}$, on note $\vdash \sigma$ si σ est prouvable dans **LSJ** ; soit $\sigma' \in \mathfrak{S}'$, on note $\vdash' \sigma'$ si σ' est prouvable dans $\mathbf{LSJ'}$.

Soit M un multiensemble de couples *entier* : $formule$, l'entier d'un couple étant appelé son indice. On note M_k le multiensemble obtenu à partir de M en ne gardant que les couples d'indice k, et $M_{\leq k}$ celui obtenu en ne gardant que les couples d'indice inférieur à k. On note $\mathsf{forget}(M)$ le multiensemble de formules obtenu en oubliant l'indice et ne gardant que la formule de chaque couple de M.

On définit l'application Φ de $\mathfrak{S}'$ dans $\mathfrak{S}$, qui à $\Gamma' \Rightarrow_n \Delta'$ associe $\Theta\,;\Gamma \Rightarrow \Delta$

où : $\begin{cases} \Theta = \mathsf{forget}(\Gamma'_{n+1}) \\ \Gamma = \mathsf{forget}(\Gamma'_{\leq n}) \\ \Delta = \mathsf{forget}(\Delta'_n) \end{cases}$.

C'est une application surjective : en effet tout séquent $\Theta\,;\Gamma \Rightarrow \Delta$ de **LSJ** a au moins pour antécédent le séquent $\Gamma' \Rightarrow_0 \Delta'$, où Γ' est l'union de $0 : \Gamma$ (le multiensemble de couples obtenu à partir de Γ en remplaçant chaque occurrence d'une formule A par une occurrence du couple $0 : A$) avec $1 : \Theta$, et où $\Delta' = 0 : \Delta$.

Soit $\mathcal{R}$ une règle de **LSJ**. On note $\mathcal{R}'$ la règle de **LSJ′** qui lui correspond. On écrit $\dfrac{\sigma_1 \quad \ldots \quad \sigma_p}{\sigma}\,(\mathcal{R})$ et $\dfrac{\sigma'_1 \quad \ldots \quad \sigma'_p}{\sigma'}\,(\mathcal{R}')$ des instances de ces règles.

Lemme. *Soit $\sigma \in \mathfrak{S}$ et $\sigma' \in \mathfrak{S}'$ tels que $\sigma = \Phi(\sigma')$ et soit $\mathcal{R}$ une règle de* **LSJ**.

1) Si $\dfrac{\sigma_1 \quad \ldots \quad \sigma_p}{\sigma}\,(\mathcal{R})$ alors il existe $\sigma'_1, \ldots, \sigma'_p$ tels que pour tout k, $\sigma_k = \Phi(\sigma'_k)$, et $\dfrac{\sigma'_1 \quad \ldots \quad \sigma'_p}{\sigma'}\,(\mathcal{R}')$.

2) Si $\dfrac{\sigma'_1 \quad \ldots \quad \sigma'_p}{\sigma'}\,(\mathcal{R}')$, posons pour tout k, $\sigma_k = \Phi(\sigma'_k)$, alors $\dfrac{\sigma_1 \quad \ldots \quad \sigma_p}{\sigma}\,(\mathcal{R})$.
Pour un axiome $\mathcal{A}$, cela signifie simplement : $\dfrac{}{\sigma}\,(\mathcal{A})$ si et seulement si $\dfrac{}{\sigma'}\,(\mathcal{A}')$.

Preuve
On le montre pour chaque règle ; c'est une conséquence assez directe de la définition de Φ. Faisons-le par exemple pour Id, $\wedge R$ et $\to L$. À chaque fois, on se donne $\sigma = \Theta\,;\Gamma \Rightarrow \Delta$ et $\sigma' = \Gamma' \Rightarrow_n \Delta' \in \mathfrak{S}'$ tels que $\sigma = \Phi(\sigma')$.

Id : On a $\dfrac{}{\sigma}\,(\mathrm{Id})$ si et seulement s'il existe une formule A appartenant à la fois à Γ et Δ, ce qui équivaut, par définition de Φ, à : il existe A et $i \leq n$ tels que $n : A \in \Delta'$ et $i : A \in \Gamma'$, c'est-à-dire $\dfrac{}{\sigma'}\,(\mathrm{Id}')$.

$\wedge R$:

1) Si $\dfrac{\sigma_1 \quad \sigma_2}{\sigma}\,(\wedge R)$ alors il existe des formules A et B et un multiensemble $\widetilde{\Delta}$ tels que $\Delta = A \wedge B, \widetilde{\Delta}$ et $\sigma_1 = \Theta\,;\Gamma \Rightarrow A, \widetilde{\Delta}$ et $\sigma_2 = \Theta\,;\Gamma \Rightarrow B, \widetilde{\Delta}$. Posons $\widetilde{\Delta}' = \Delta' - n : A \wedge B$ le multiensemble obtenu en retirant une seule occurrence de $n : A \wedge B$ à Δ' (qui contient cet élément parce que Δ contient $A \wedge B$ et par définition de Φ), et $\sigma'_1 = \Gamma' \Rightarrow_n n : A, \widetilde{\Delta}'$ et $\sigma'_2 = \Gamma' \Rightarrow_n n : B, \widetilde{\Delta}'$. Alors on a bien $\sigma_1 = \Phi(\sigma'_1)$ et $\sigma_2 = \Phi(\sigma'_2)$ (en remarquant que $\widetilde{\Delta} = \mathsf{forget}(\widetilde{\Delta}'_n)$), et $\dfrac{\sigma'_1 \quad \sigma'_2}{\sigma'}\,(\wedge R')$ (en remarquant que $\sigma' = \Gamma' \Rightarrow_n n : A \wedge B, \widetilde{\Delta}'$).

2) Si $\dfrac{\sigma'_1 \quad \sigma'_2}{\sigma'}\,(\wedge R')$ alors il existe A, B et $\widetilde{\Delta}'$ tels que $\Delta' = n : A \wedge B, \widetilde{\Delta}'$ et $\sigma'_1 = \Gamma' \Rightarrow_n n : A, \widetilde{\Delta}'$ et $\sigma'_2 = \Gamma' \Rightarrow_n n : B, \widetilde{\Delta}'$; on pose $\widetilde{\Delta} = \Delta - A \wedge B$ le multiensemble obtenu en retirant une seule occurrence de $A \wedge B$ à Δ, et $\sigma_1 = \Phi(\sigma'_1)$ et $\sigma_2 = \Phi(\sigma'_2)$; on obtient $\sigma = \Theta\,;\Gamma \Rightarrow A \wedge B, \widetilde{\Delta}$ et $\sigma_1 = \Theta\,;\Gamma \Rightarrow A, \widetilde{\Delta}$ et $\sigma_2 = \Theta\,;\Gamma \Rightarrow B, \widetilde{\Delta}$ d'où $\dfrac{\sigma_1 \quad \sigma_2}{\sigma}\,(\wedge R)$.

$\to L$:

1) Si $\dfrac{\sigma_1 \quad \sigma_2 \quad \sigma_3}{\sigma}\,(\rightarrow L)$ alors il existe A, B et $\widetilde{\Gamma}$ tels que $\Gamma = A \rightarrow B, \widetilde{\Gamma}$ et $\sigma_1 = \Theta\,; B, \widetilde{\Gamma} \Rightarrow \Delta$ et $\sigma_2 = B, \Theta\,; \widetilde{\Gamma} \Rightarrow A, \Delta$ et $\sigma_3 = B\,; \Theta, \widetilde{\Gamma} \Rightarrow A$; et il existe $i \leq n$ tel que $i : A \rightarrow B \in \Gamma'$; on pose $\widetilde{\Gamma}' = \Gamma' - i : A \rightarrow B$ (on retire une seule occurrence de $i : A \rightarrow B$ de Γ') et $\sigma_1' = i : B, \widetilde{\Gamma}' \Rightarrow_n \Delta'$ et $\sigma_2' = n+1 : B, \widetilde{\Gamma}' \Rightarrow_n n : A, \Delta'$ et $\sigma_3' = n+2 : B, \widetilde{\Gamma}' \Rightarrow_{n+1} n+1 : A, \Delta'$ et on vérifie que cela convient.

2) Si $\dfrac{\sigma_1' \quad \sigma_2' \quad \sigma_3'}{\sigma'}\,(\rightarrow L')$ alors il existe i, A, B et $\widetilde{\Gamma}'$ tels que $\Gamma' = i : A \rightarrow B, \widetilde{\Gamma}'$ et σ_1', σ_2' et σ_3' ont la forme donnée ci-dessus ; on pose $\widetilde{\Gamma} = \Gamma - A \rightarrow B$ (on retire une seule occurrence de $A \rightarrow B$ de Γ), alors les images σ_1, σ_2 et σ_3 par Φ de σ_1', σ_2' et σ_3' respectivement s'écrivent comme ci-dessus et donc $\dfrac{\sigma_1 \quad \sigma_2 \quad \sigma_3}{\sigma}\,(\rightarrow L)$.

■

Théorème. *Soit $\sigma \in \mathfrak{S}$ et $\sigma' \in \mathfrak{S}'$ tels que $\sigma = \Phi(\sigma')$, alors $\vdash \sigma$ si et seulement si $\vdash' \sigma'$.*

Preuve
Par récurrence sur la *taille* de $\sigma \in \mathfrak{S}$, c'est-à-dire la somme des tailles des formules des trois multiensembles apparaissant dans σ.

On initialise pour tout $\sigma = \Theta\,; \Gamma \Rightarrow \Delta$ tel que toutes les formules dans Γ et dans Δ sont atomiques : soit $\sigma' = \Gamma' \Rightarrow_n \Delta' \in \mathfrak{S}'$ tel que $\sigma = \Phi(\sigma')$. Alors toutes les formules associées à un $i \leq n$ dans Γ' et toutes les formules associées à n dans Δ' sont aussi atomiques. En étudiant la forme des conclusions des règles non axiomatiques de **LSJ** comme de **LSJ′**, on remarque que si σ (resp. σ') est la conclusion d'une règle de **LSJ** (resp. **LSJ′**), alors la règle est un axiome. L'initialisation est donc un cas particulier de ce qui suit avec $p = 0$ (ce qui entraîne qu'on n'utilise en fait pas l'hypothèse de récurrence).

Soit $\sigma = \Theta\,; \Gamma \Rightarrow \Delta \in \mathfrak{S}$. Soit $\sigma' = \Gamma' \Rightarrow_n \Delta' \in \mathfrak{S}'$ tel que $\sigma = \Phi(\sigma')$.

On suppose $\vdash \sigma$. Alors il existe une règle $\mathcal{R}$ de **LSJ** et $\sigma_1, \ldots, \sigma_p \in \mathfrak{S}$ (avec éventuellement p nul) tels que $\vdash \sigma_k$ pour tout k et $\dfrac{\sigma_1 \quad \ldots \quad \sigma_p}{\sigma}\,(\mathcal{R})$. D'après le lemme, il existe $\sigma_1', \ldots, \sigma_p' \in \mathfrak{S}'$ tels que $\sigma_k = \Phi(\sigma_k')$ pour tout k et $\dfrac{\sigma_1' \quad \ldots \quad \sigma_p'}{\sigma'}\,(\mathcal{R}')$. Pour tout k, on applique l'hypothèse de récurrence à σ_k qui a une *taille* strictement inférieure à celle de σ, et on obtient $\vdash' \sigma_k'$. On en déduit $\vdash' \sigma'$.

On suppose $\vdash' \sigma'$. Alors il existe une règle $\mathcal{R}'$ de **LSJ′** et $\sigma_1', \ldots, \sigma_p' \in \mathfrak{S}'$ tels que $\vdash' \sigma_k'$ pour tout k et $\dfrac{\sigma_1' \quad \ldots \quad \sigma_p'}{\sigma'}\,(\mathcal{R}')$. On pose $\sigma_k = \Phi(\sigma_k')$ pour tout k. D'après le lemme on a $\dfrac{\sigma_1 \quad \ldots \quad \sigma_p}{\sigma}\,(\mathcal{R})$, en particulier on peut appliquer l'hypothèse de récurrence aux σ_k donc $\vdash \sigma_k$ pour tout k, d'où $\vdash \sigma$.

■