Table des matières

**Définition 1.** Une catégorie consiste en une collection d'objets et une collection de morphismes, cette dernière munie d'une opérations binaire partielle o appelée composition, avec les propriétés suivantes.

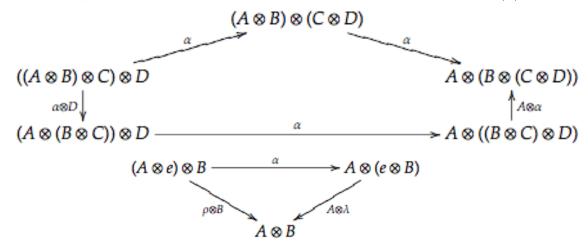
- À chaque morphisme f est associé un couple d'objets (A, B); on écrit f: A → B. On dit que A → B est le type de f, et que f est un morphisme de A vers B, et encore que A est le domaine ou la source de f, et B le codomaine ou la cible de f.
- Pour tous objets A, B, C et morphismes f, g tels que  $f: A \to B$  et  $g: B \to C$ , le morphisme  $g \circ f$  existe et  $g \circ f: A \to C$ .
- Identité. Pour tout objet A, il existe un morphisme particulier  $id_A: A \to A$  appelé identitié sur A, tel que pour tout objet B, pour tout  $f: B \to A$ ,  $id_A \circ f = f$  et pour tout  $g: A \to B$ ,  $g \circ id_A = g$ .
- Associativité. Pour tous  $f: A \to B$ ,  $g: B \to C$ ,  $h: C \to D$ , on a  $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$ .

On désigne souvent une catégorie par la collection de ses objets.

**Définition 2.** Une catégorie monoïdale est une catégorie  $\mathbb{C}$  munie d'un bifoncteur  $\otimes : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$  et d'un objet e, tel que les morphismes suivants existent

- pour tous objets A, B, C, un isomorphisme  $\alpha_{A,B,C}: (A \otimes B) \otimes C \to A \otimes (B \otimes C)$  permettant de parler d'associativité;
- pour tout objet A, des isomorphismes  $\lambda_A : e \otimes A \to A$  et  $\rho_A : A \otimes e \to A$  justifiant le nom d'**unité** pour e;

et tel que les diagrammes suivants commutent pour tous objets A, B, C, D. On a omis les indices de  $\alpha$ ,  $\lambda$ ,  $\rho$  et écrit A pour  $id_A$ : par exemple, comprendre  $\alpha \otimes D$  comme  $\alpha_{A,B,C} \otimes id_A$ .



À chaque preuve  $\pi$  on associe une dénotation  $[\pi]$ , qu'on veut invariante par élimination de la coupure.

Les objets sont les formules et les morphismes sont des dénotations de preuves. Les morphismes d'une formule A vers une formule B sont les dénotations des différentes preuves du séquent  $A \vdash B$  (si le séquent n'est pas prouvable, il n'y en a pas).

Soit A, B, C des formules,  $\pi_1$  une preuve de  $A \vdash B$  et  $\pi_2$  une preuve de  $B \vdash C$ . On définit  $[\pi_2] \circ [\pi_1]$  comme la dénotation de la preuve suivante de  $A \vdash C$ 

$$\frac{\pi_1}{A \vdash B} \frac{\pi_2}{B \vdash C} (cut)$$

L'identité  $id_A$  sur une formule A est la dénotation de la preuve  $\overline{A \vdash A}$  (Id). Soit  $\pi$  une preuve de  $A \vdash B$ , l'élimination de la coupure transforme la preuve

$$\frac{A \vdash A}{A \vdash B} (Id) \qquad \begin{array}{c} \pi \\ A \vdash B \end{array} (cut) \qquad \text{en} \qquad A \vdash B$$

donc on a bien  $[\pi] \circ id_A = [\pi]$ . De même pour  $\pi$  une preuve de  $B \vdash A$ , on a  $id_A \circ [\pi] = [\pi]$ . L'associativité vient de ce que les preuves

$$\frac{A \vdash B \quad B \vdash C}{A \vdash C} (cut) \quad \frac{\pi_3}{C \vdash D} (cut) \quad \text{et} \quad \frac{\pi_1}{A \vdash B} \quad \frac{B \vdash C \quad C \vdash D}{B \vdash D} (cut) (cut)$$

sont équivalentes à élimination de la coupure près.