

ÍNDICE

1.- Introducción	2
2.- Clasificación de los Filtros	2
3.- Filtros Pasivos y Filtros Activos	2
3.1.- Ventajas e Inconvenientes de los Filtros Activos	3
3.2.- Campo de Utilización	3
4.- Filtros Ideales y Reales	4
5.- Filtros Pasivos	6
5.1.- Función de Butterworth	6
5.2.- Función de Chebyshev	8
5.3.- Realización de Filtros Pasivos de Paso-Bajo (LP)	10
5.4.- Realización de Filtros Pasivos de Paso-Alto (HP)	11
5.5.- Realización de Filtros Pasivos de Paso-Banda (BP)	13
6.- Adaptación de Impedancias	15
7.- Filtros Activos	16
7.1.- Estructura VCVS	17
7.2.- Estructura Bicuadrática.	18
7.3.- Escalado	18
7.4.- Diseño de Filtro Paso-Bajo Activo (LP)	19
7.5.- Diseño de Filtro Paso-Alto Activo (HP)	22
7.6.- Diseño de Filtro de Paso-Banda Activo (BP)	23
8.- Sensibilidad	28
9.- Filtros de capacidades Conmutadas	29
10.- Ejercicios	30

1. **Introducción.-**

Un filtro eléctrico es un cuadripolo capaz de atenuar determinadas frecuencias del espectro de la señal de entrada y permitir el paso de las demás. Se denomina espectro de una señal a su descomposición en una escala de amplitudes y fases respecto de la frecuencia. Obsérvese que mientras el osciloscopio es un instrumento que analiza la señal en relación con el tiempo, el analizador de espectro lo hace por medio de la Transformada de Fourier.

Entonces llamaremos filtros a los circuitos que se encarguen de separar o rechazar diferentes tipos de señales, distinguiendo entre estos filtros analógicos y filtros digitales. Los filtros analógicos son los que se encargan de trabajar con señales de tipo analógicas (continuas), y los digitales los que se encargan de trabajar con señales de tipo discretas, cuya implementación generalmente se realiza vía software. Nosotros analizaremos los filtros analógicos.

2. **Clasificación de los filtros .-**

Los filtros se pueden clasificar de la siguiente forma:

- Según su Función
 - Filtros de radiocomunicación.
 - Filtros de modulación y demodulación
 - Filtros de análisis de espectro.
 - Filtros que mejoran la relación señal-ruido.
 - Multiplicadores de frecuencia.
 - Filtros correctores.
- Según la Gama de Frecuencias
 - Audiofrecuencias.
 - Hiperfrecuencias
 - Etc...
- Según su Tecnología.
 - Filtros Pasivos.
 - Filtros Activos.

3. **Filtros Pasivos y Filtros Activos.-**

a) Filtros Pasivos:

Están contruidos exclusivamente por elementos pasivos como resistencias, condensadores y bobinas. Estos filtros generalmente son inviables en bajas frecuencias al exigir inductancias muy grandes.

b) Filtros Activos:

Constan de elementos pasivos asociados a otros activos (válvulas, transistores o amplificadores operacionales).

La primera generación de estos filtros utilizaba las válvulas, por lo que tenían un consumo de potencia muy alto, ruidos, baja ganancia, etc..

La segunda empleaba transistores como elementos activos y, aunque tenía más ventajas que la anterior, no tenía unas características enteramente satisfactorias.

La **tercera generación**, objeto de nuestro estudio, utilizaba los amplificadores operacionales. La alta resistencia de entrada y la baja resistencia de salida de los OPAMPS, además de otras características, permiten la realización de filtros con cualidades óptimas.

Los filtros pasivos no requieren fuentes externas de energía, y funcionan sin alimentación. En cambio los filtros activos se componen generalmente por circuitos RC y amplificadores, los cuales necesitan alimentación externa para su funcionamiento.

3.1. Ventajas e Inconvenientes de los filtros activos.-

En comparación con los pasivos, los filtros activos poseen una serie de ventajas:

- Permiten eliminar las inductancias que, en bajas frecuencia, son voluminosas pesadas y caras.
- Facilitan el diseño de filtros complejos mediante la asociación de etapas simples.
- Proporcionan una gran amplificación de la señal de entrada (ganancia), lo que es importante al trabajar con señales de niveles muy bajos.
- Facilidad en los ajustes, actuando simplemente sobre el elemento activo.

Por otro lado tiene una serie de inconvenientes:

- Exige una fuente de alimentación
- Su respuesta de frecuencia esta limitada por la capacidad de los A.O utilizados.
- Es imposible su aplicación en sistemas de media y alta potencia.

Los circuitos resonantes activos pueden tener un coeficiente de sobretensión (factor de calidad Q que se verá más adelante) tan grande como se desee. Por consiguiente, teóricamente se pueden realizar filtros activos con las características que se quieran; pero esto no es posible en la práctica, ya que cuanto mayor sea el coeficiente de sobretensión mayor será también el riesgo de oscilación espontánea, es decir, su inestabilidad. El riesgo de inestabilidad es el principal inconveniente de los filtros activos, y también es el factor que limita sus características y su aplicación.

3.2. Campo de utilización.-

Los filtros activos son los que resultan más convenientes en el campo de las frecuencias muy bajas. Como son poco voluminosos y, a menudo, de reducido coste, pueden compararse con ventaja a los filtros pasivos en el campo de las audiofrecuencias.

Estas cualidades les hacen también estimables para ciertas aplicaciones en frecuencias de hasta algunos centenares de KHz, cuando el volumen y el precio de coste son factores determinantes y cuando los coeficientes de sobretensión que se precisan no son demasiado elevados.

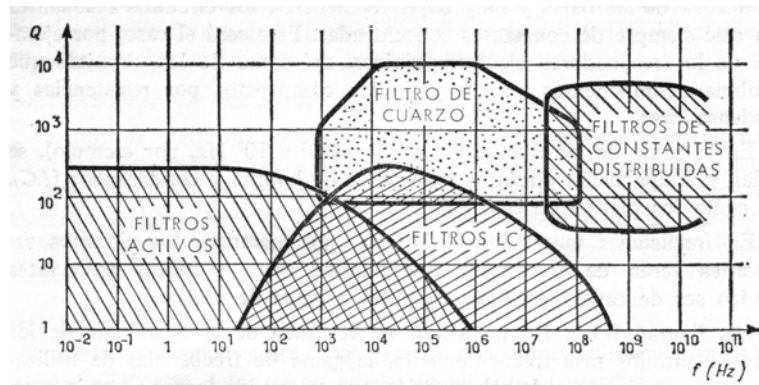


FIG. 1 Campo de aplicación de los principales filtros. En ordenadas figura el coeficiente de sobretenación de los circuitos resonantes que se utilizan

4. Filtros ideales y reales.

Como se mencionó anteriormente, los filtros constituyen tipos de circuitos diseñados para obtener características específicas de selectividad respecto a la frecuencia. Dejan pasar unas frecuencias sin apenas afectarlas (en la banda de paso) y eliminan otras (en las bandas de atenuación). Idealmente, en la banda de paso, $|\mathbf{H}(\omega)| = 1$, y en la banda de atenuación $\mathbf{H}(\omega) = 0$.

En la figura podemos observar filtros pasa-bajos (a), pasa-altos (b), pasa-banda (c) y rechazo-banda (d).

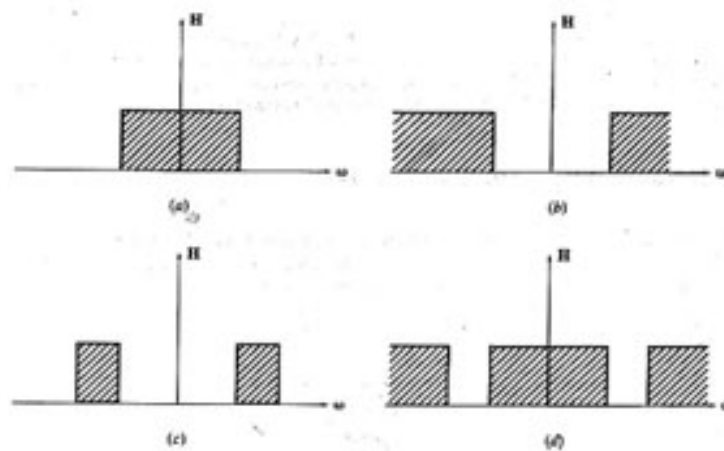


figura 2

Los filtros ideales no son físicamente realizables, atentan contra el **principio de causalidad** ($h(t)=0 \forall t<0$), pero se pueden diseñar y construir filtros reales tan cercanos a los ideales como se desee. Cuanto más se aproxime a la característica ideal, más complejo será el circuito real. La respuesta en frecuencia se puede aproximar a la de los filtros ideales si se incrementa el orden del filtro.

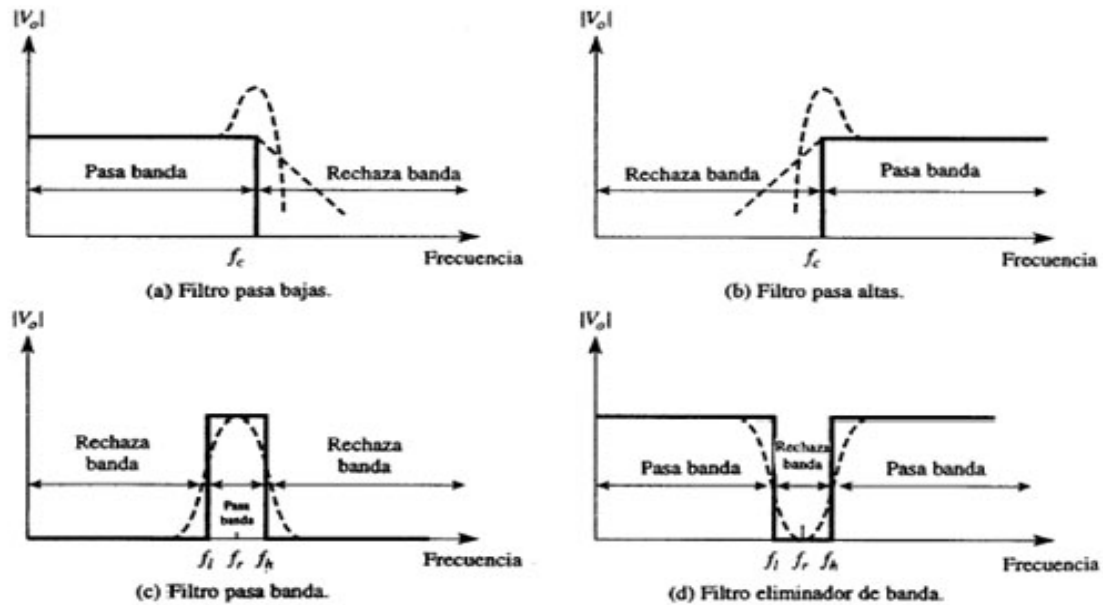


FIGURA 2.2 Respuesta a la frecuencia de cuatro tipos de filtros.

Tiempo de propagación de grupo (o retraso de grupo) de un filtro

Una red eléctrica transmite una señal sin deformación si ésta sufre un retardo constante $\tau \geq 0$. Para una componente de la señal cuya pulsación sea ω , este retardo se traduce en un desfase: $\theta = \omega\tau$, o sea, $\frac{\theta}{\omega} = \tau = cte$. ($\theta = \angle H(\omega)$)

En general, para que un filtro transmita una señal sin deformación es suficiente que en toda la banda de paso se cumpla la relación:

$$\frac{d\theta}{d\omega} = cte$$

La magnitud τ se llama tiempo de propagación de grupo (o retraso de grupo). La regularidad de este tiempo de propagación de grupo de un filtro a lo largo de la banda de paso refleja su aptitud para transmitir señales transitorias sin deformación. Así, un filtro ideal tiene un tiempo de propagación de grupo constante en toda la banda de paso (fig.3).

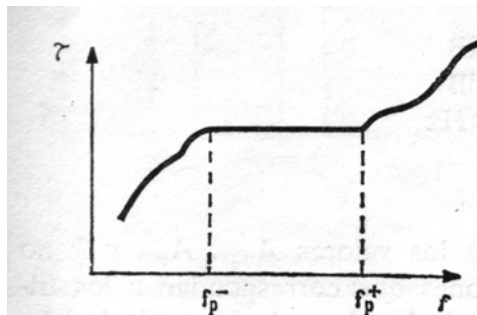


FIG. 3 Tiempo de propagación de grupo de un filtro de paso de banda ideal.

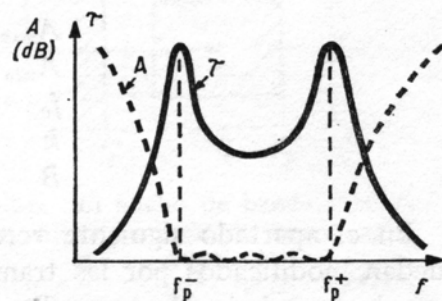
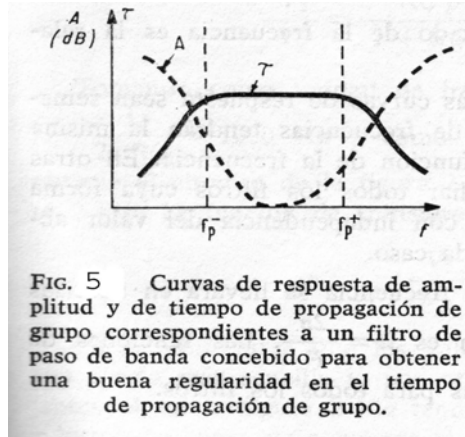


FIG. 4 Curvas de respuesta de amplitud y de tiempo de propagación de grupo correspondientes a un filtro de paso de banda real, de corte abrupto.

Desafortunadamente no se conoce la forma de concebir de modo sencillo un filtro que se acerque al ideal en lo que se concierne a la atenuación y que se presente, a la vez, un tiempo regular de propagación de grupo. El filtro real, o bien tiene una buena respuesta de amplitud pero una mala regularidad del tiempo de propagación de grupo (fig 4), o bien presenta un tiempo de propagación de grupo regular pero su curva de respuesta de amplitud se aleja mucho de la del filtro ideal (fig. 5).



5. Filtros Pasivos.-

5.1. Función de Butterworth.-

Los filtros de Butterworth poseen la propiedad de tener una curva de respuesta lo más plana posible en el origen, es decir, para la frecuencia cero.

La función de Butterworth viene definida por la ecuaciones:

$$\frac{|H(\omega)|^2}{|H(0)|^2} = \frac{1}{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^{2n}} \quad \rightarrow \quad \frac{|H(\omega)|}{|H(0)|} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^{2n}}}$$

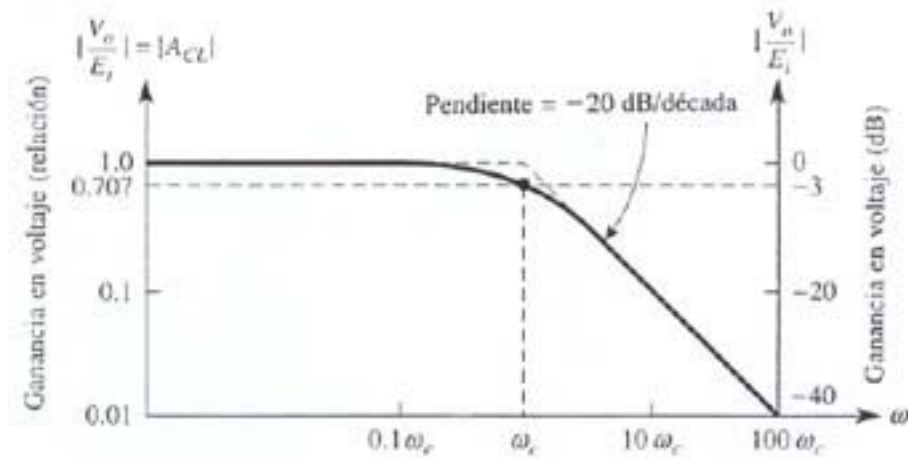
también por:

$$\frac{|H(f)|^2}{|H(0)|^2} = \frac{1}{1 + \left(\frac{f}{f_c}\right)^{2n}} \quad \rightarrow \quad \frac{|H(f)|}{|H(0)|} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{f}{f_c}\right)^{2n}}}$$

donde:

$\omega_c = 2\pi f_c \rightarrow$ Frecuencia de corte (aquella a la que $|H(\omega)|$ cae -3dB respecto a DC en filtros LP)

n = orden del filtro (a mayor n mayor pendiente)

Ejercicio 1:

Se desea atenuar en 60 dB una interferencia de 50Hz , empleando un filtro Butterworth con una frecuencia de corte $f_c=10$ Hz.

La atenuación de un filtro viene determinada por la ecuación :

$$A_{dB} = -20 \log \frac{|H(f)|}{|H(0)|}$$

Operando sobre la función de Butterworth

$$\frac{|H(f)|^2}{|H(0)|^2} = \frac{1}{1 + \left(\frac{f}{f_c}\right)^{2n}} \Rightarrow 2 \log \left[\frac{|H(f)|}{|H(0)|} \right] = -\log \left[1 + \left(\frac{f}{f_c}\right)^{2n} \right]$$

$$-20 \log \left[\frac{|H(f)|}{|H(0)|} \right] = 10 \log \left[1 + \left(\frac{f}{f_c}\right)^{2n} \right] \rightarrow \text{como } A_{dB} = -20 \log \left[\frac{|H(f)|}{|H(0)|} \right]$$

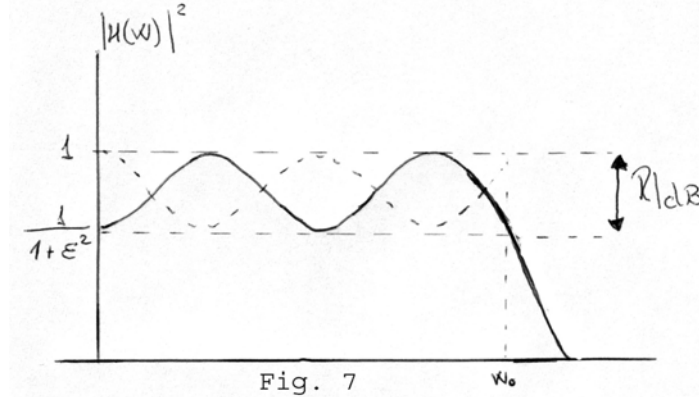
$$\frac{A_{dB}}{10} = \log \left[1 + \left(\frac{f}{f_c}\right)^{2n} \right] \Rightarrow 10^{\frac{A_{dB}}{10}} - 1 = \left(\frac{f}{f_c}\right)^{2n} \Rightarrow \log \left[10^{\frac{A_{dB}}{10}} - 1 \right] = 2n \log \left(\frac{f}{f_c}\right)$$

$$n = \frac{\log \left[10^{\frac{A_{dB}}{10}} - 1 \right]}{2 \log \left(\frac{f}{f_c}\right)} = \frac{\log \left[10^{\frac{60}{10}} - 1 \right]}{2 \log \left(\frac{50}{10}\right)} = \frac{6}{2 \log 5} = \frac{3}{\log 5} = 4.29$$

el orden sería **n=5**, no es 4 porque se debe construir el mejor filtro posible y cumplir todas las especificaciones.

5.2. Función de Chebyshev (Tchebyscheff).

Los filtros de Chebyshev tienen una transición más abrupta que las funciones de Butterworth entre la banda de paso y la banda atenuada (pero a frecuencias altas, ya muy inmersos en la banda atenuada, todo filtro LP de orden n tiene una atenuación de $20 \cdot n$ dB/dec). Por el contrario la banda de paso no es plana, esto es, presenta rizado.



Es más eficiente repartir el error de aproximación de una forma continua a lo largo de la banda pasante, lo que podemos conseguir escogiendo:

$$|K(j\omega)|^2 = \varepsilon^2 \cdot C_n^2(\omega)$$

donde $C_n(\omega)$ (polinomio de Chebychev de 1ª especie y de orden n) es un polinomio que oscila entre -1 y 1 para $0 \leq |\omega| \leq 1$.

$$\frac{|H(f)|^2}{|H(0)|^2} = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 \cdot C_n^2\left\{\frac{f}{f_0}\right\}}$$

De manera general tenemos que:

$$C_n \begin{cases} \cos\left[n \cdot \arccos\left(\frac{f}{f_0}\right)\right] & ; \quad 0 \leq \left|\frac{f}{f_0}\right| \leq 1 \\ \cosh\left[n \cdot \operatorname{arccosh}\left(\frac{f}{f_0}\right)\right] & ; \quad \left|\frac{f}{f_0}\right| > 1 \end{cases}$$

coseno hiperbólico $\rightarrow \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

ε es el denominado factor de rizado ($\varepsilon^2 \leq 1$). Se especifica mediante el valor pico a pico en decibelios $R_{dB} = 10 \cdot \log(1 + \varepsilon^2)$. Si n es par el rizado será positivo y si es impar negativo (ver figura 7).

f_0 es la frecuencia natural (donde acaba el rizado), por tanto $\omega_0 = 2\pi f_0$.

$$n = \frac{\operatorname{arccosh} \left[\varepsilon^{-1} \left(10^{\frac{A_{dB}}{10}} - 1 \right)^{\frac{1}{2}} \right]}{\operatorname{arccosh} \left(\frac{f}{f_0} \right)}$$

¿Qué relación existe entre f_c (frecuencia de corte (-3dB)) y f_0 ?

$$\frac{|H(f_c)|^2}{|H(0)|^2} = \frac{1}{2} \quad \text{Luego} \quad 1 + \varepsilon^2 \cdot C_n^2 \left\{ \frac{f_c}{f_0} \right\} = 2 \quad \rightarrow \quad \varepsilon^2 \cdot C_n^2 \left\{ \frac{f_c}{f_0} \right\} = 1 \quad \rightarrow$$

$$\varepsilon \cdot C_n \left\{ \frac{f_c}{f_0} \right\} = 1 \quad \rightarrow \quad C_n \left\{ \frac{f_c}{f_0} \right\} = \frac{1}{\varepsilon}$$

$$f_c = f_0 \cdot \cosh \left[\frac{\operatorname{arccosh} \left(\frac{1}{\varepsilon} \right)}{n} \right]$$

Ejercicio 2:

Se desea atenuar en 60 dB una interferencia de 50 Hz empleando un rizo de Chebyshev de 0.1 dB y una frecuencia natural (f_0) de 5 Hz.

$$R_{dB} = 10 \log [1 + \varepsilon^2] \rightarrow 0.1_{dB} = 10 \log [1 + \varepsilon^2] \rightarrow \varepsilon = 0.1526$$

$$\underbrace{-20 \log |H(f)|}_{A_{dB} = 10 \log [1 + \varepsilon^2 \cdot C_n^2]} = 10 \log [1 + \varepsilon^2 \cdot C_n^2]$$

$$\frac{\left(10^{\frac{A_{dB}}{10}} - 1 \right)^{\frac{1}{2}}}{\varepsilon} = C_n \rightarrow C_n = 6553.0$$

$$C_n = \cosh \left(n \cdot \operatorname{arccosh} \left(\frac{50}{5} \right) \right) \rightarrow n = \frac{\operatorname{arccosh}(C_n)}{\operatorname{arccosh}(10)} = 3.16 \rightarrow \mathbf{n=4}$$

$$f_c = f_0 \cdot \cosh \left[\frac{\operatorname{arccosh} \left(\frac{1}{\varepsilon} \right)}{n} \right] = \dots = 6.06$$

5.3. Realización de Filtros Pasivos de paso bajo (LP).-

- Redes (Filtros) terminados si $R_s = R_c$
- Redes (Filtros) no terminados si $R_c = \infty$ (impedancia de carga infinita)

Siendo R_s la impedancia de fuente y R_c la impedancia de carga.

Metodología.-

- Se calcula el orden.
- Se construye el filtro LP normalizado consultando la tabla 8.

$$\text{Filtro Normalizado} \left\{ \begin{array}{l} \omega_c = 1 \text{ rad/seg} \\ R_s = 1 \Omega \end{array} \right.$$

- Se desnormaliza.

- Se dividen L y C entre la ω_c real.
- Se multiplican las impedancias por la R_s real.

$$\left\{ \begin{array}{l} L \rightarrow L \cdot R_s \\ C \rightarrow \frac{C}{R_s} \\ R \rightarrow R \cdot R_s \end{array} \right.$$

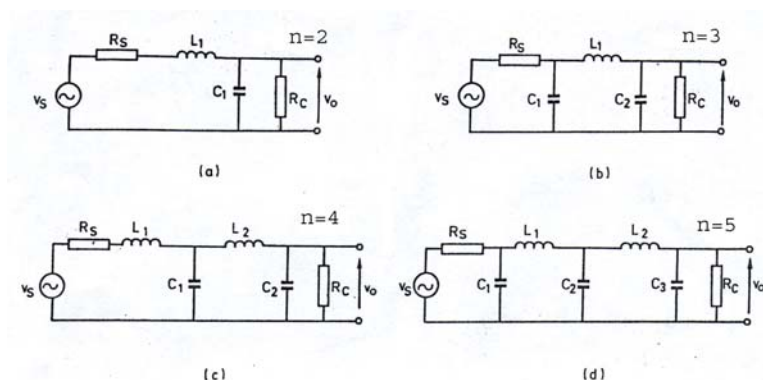


Figura 8 Filtros de Butterworth pasivos de paso bajo, orden 2 a 5; observar que el orden coincide con el número de elementos independientes que almacenan energía. Los valores normalizados de los componentes están en la tabla 3.6.

Tabla 8 Valores normalizados para los componentes de los filtros de Butterworth de la figura 8, para el caso en que están terminados ($R_s = 1 \Omega$, $R_c = 1 \Omega$) y para el caso en que no lo están ($R_s = 1 \Omega$, $R_c = \infty$).

Orden	$R_c(\Omega)$	$L_1(H)$	$C_1(F)$	$L_2(H)$	$C_2(F)$	$C_3(F)$
2	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	—	—	—
	∞	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}$	—	—	—
3	1	2	1	—	1	—
	∞	$4/3$	$1/2$	—	$3/2$	—
4	1	0,7654	1,8478	1,8478	0,7654	—
	∞	0,3827	1,0824	1,5772	1,5307	—
5	1	1,6180	0,6180	1,6180	2	0,6180
	∞	0,8944	0,3090	1,6944	1,3820	1,5451

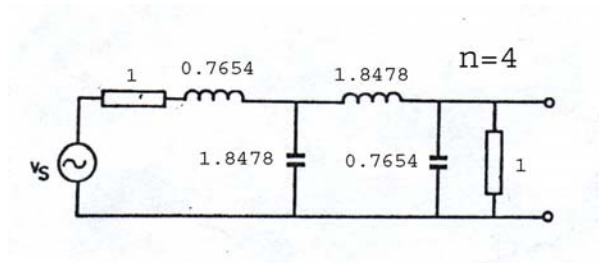
Ejercicio.-

Realizar un filtro LP Butterworth a disponer entre una fuente de 600Ω (R_s) y una carga de 600Ω , cuya frecuencia de corte sea de 5KHz y que atenúe los 20KHz al menos 40dB por debajo del nivel de continua.

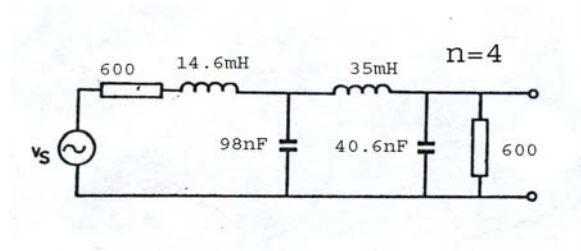
Primero calculamos el orden del filtro:

$$N = \frac{\text{Log}\left[10^{\frac{A_{dB}}{10}} - 1\right]}{2 \cdot \text{Log}\left(\frac{f}{f_c}\right)} = \frac{\text{Log}[10^4 - 1]}{2 \cdot \text{Log}\left(\frac{20K}{5K}\right)} = 3.3 \rightarrow n = 4$$

Construimos el filtro normalizado ($\omega_c=1\text{ rad/seg}$, $R_s=1\Omega$)



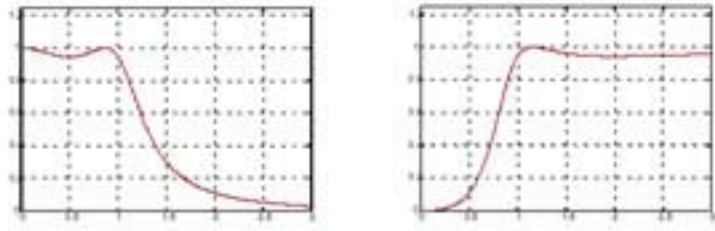
Ahora desnormalizamos el circuito y queda de la siguiente forma:



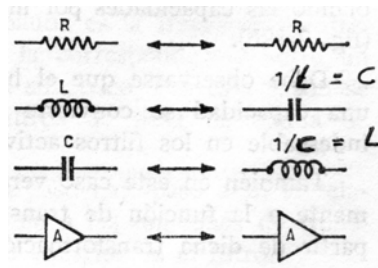
5.4. Realización de Filtros Pasivos de paso alto (HP).-

A partir del diseño de un filtro paso-bajo, pueden obtenerse filtros paso-alto, paso-banda y rechazo-banda que cumpla similares especificaciones, mediante el uso de transformaciones. Denotemos ω y s la frecuencia y la variable del filtro paso-bajo prototipo normalizado en $\omega_c = 1\text{ rad/seg}$

$$\omega \rightarrow \frac{1}{\omega} \quad s \rightarrow \frac{1}{s}$$



Transformación de filtro paso-bajo del ejemplo en filtro paso-alto.

TransformacionesProceso

- Construimos un LP normalizado consultando la tabla 8.
- Cambiamos L y C según las reglas de transformación.
- Desnormalizamos.

Ejemplo.-

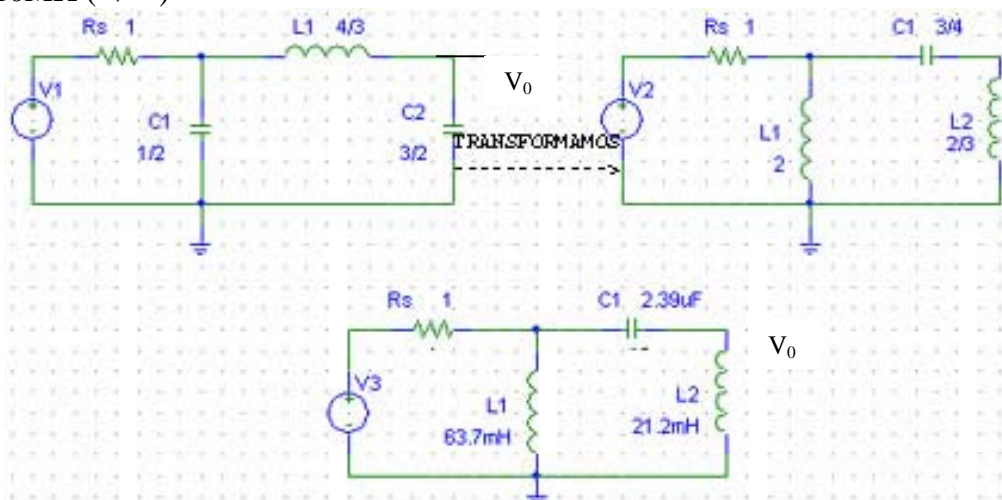
Diseñar un filtro Butterworth paso alto de tercer orden con una f_c de 500Hz y que trabaje con $R_s=100\Omega$ y $R_c=10\text{ M}\Omega$.

Se puede considerar como una red no terminada al ser R_c muy alta (en realidad si queremos ser exactos debemos hacerlo de otra forma, pero se explicará más adelante en adaptación de impedancias).

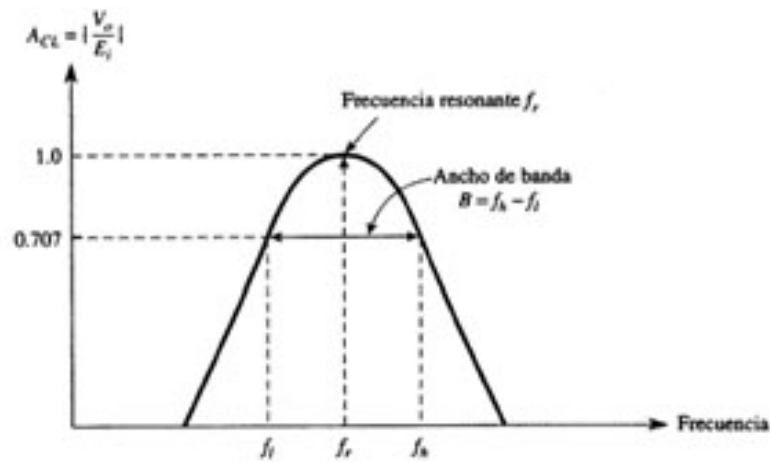
$$\omega_c = 2\pi \cdot 500 = 1000\pi$$

$$R_s = 100\Omega$$

$$R_c = 10\text{ M}\Omega (\rightarrow \infty)$$



5.5. Realización de Filtros Pasivos de paso banda (BP).-

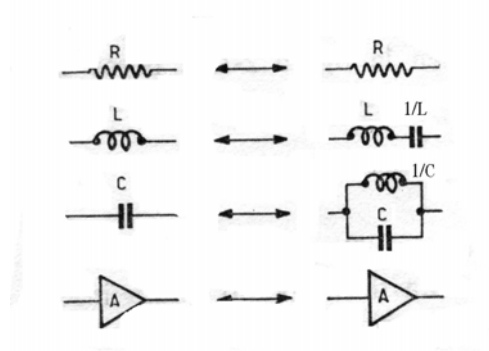


El factor de calidad de un filtro paso de banda viene determinado por la ecuación:

$$Q = \frac{W_0}{BW(\text{rad/s})} = \frac{f_0}{BW(\text{Hz})}$$

A partir del diseño de un LP podemos construir un filtro BP mediante las siguientes transformaciones:

$$S \rightarrow S + \frac{1}{S}$$



Proceso

- Se construye un LP con $R_s=1\Omega$ y $\omega_c=1/Q$.
- Transformamos L y C siguiendo las reglas de transformación.
- Se desnormaliza

$$R \rightarrow R \cdot R_s$$

$$L \rightarrow L \cdot R_s$$

$$C \rightarrow \frac{C}{R_s}$$

- Se desnormaliza a la frecuencia central ω_0 .

$$L \rightarrow \frac{L}{\omega_0}$$

$$C \rightarrow \frac{C}{\omega_0}$$

Ejercicio.-

Diseñar un filtro paso-banda pasivo de tercer orden con frecuencia central 1Khz y ancho de banda 100hz para disponer entre una fuente de señal de 100Ω y una amplificador de entrada muy alto.

$$f_0 = 1 \text{ KHz}$$

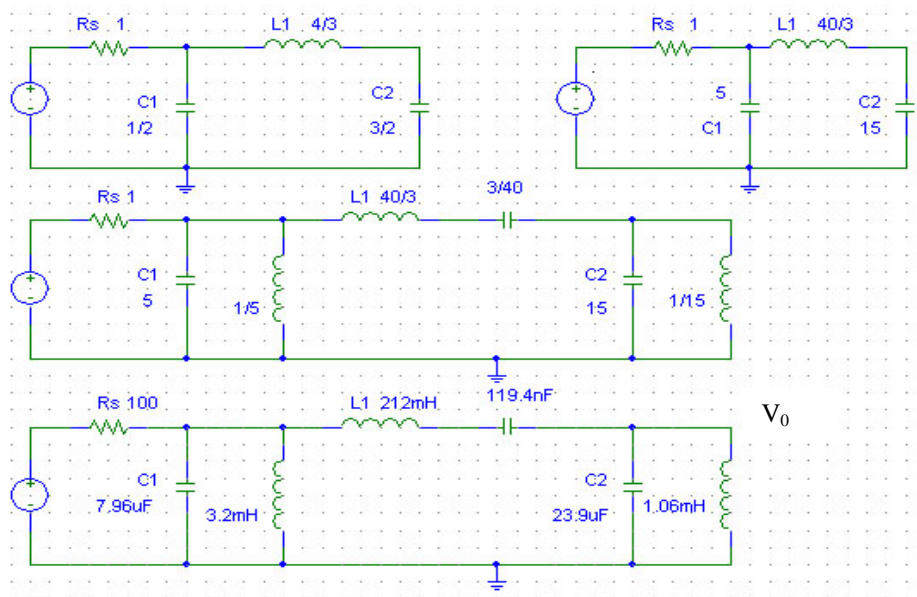
$$BW = 100 \text{ Hz}$$

$$R_s = 100\Omega$$

$$R_c = \infty \rightarrow \text{Filtro no terminado}$$

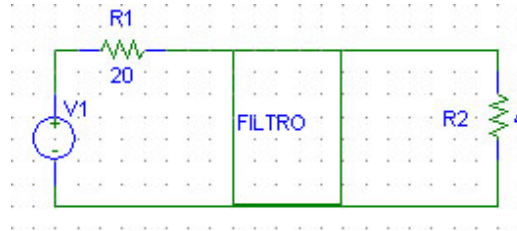
$$Q = \frac{1K}{100} = 10 \rightarrow \omega_c = \frac{1}{Q} = 0.1 \text{ rad/seg}$$

Construimos un filtro LP con $R_s = 100\Omega$ y $\omega_c = 0.1 \text{ rad/seg}$, realizamos las transformaciones y desnormalizamos a la frecuencia central con $R_s = 100\Omega$ y $\omega_0 = 2\pi \cdot 1K = 2000\pi$.



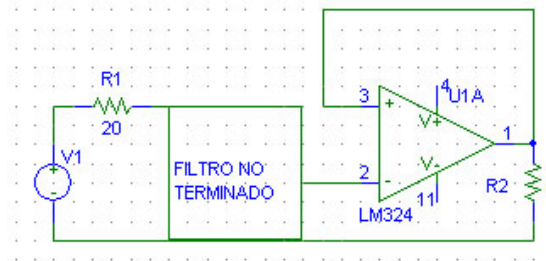
6. Adaptación de Impedancias.-Ejercicio:

Diseñar un filtro para este circuito:



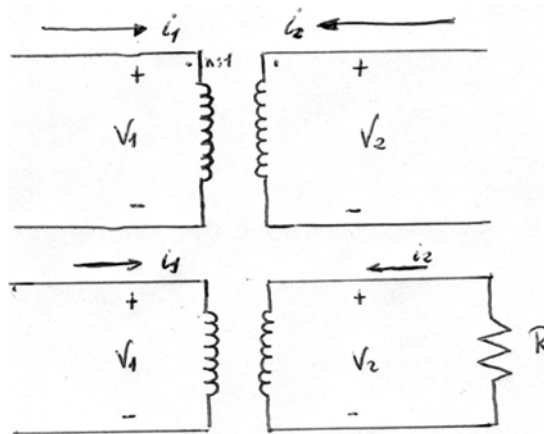
Vemos que no es un filtro terminado porque la resistencia $R_c \neq R_s$, pero tampoco es un filtro no terminado porque $R_c \neq \infty$.

1ª Solución (no muy aceptable) es insertar un seguidor de tensión



2º Solución es usando un transformador .

Un transformador es una bipuerta definida por $V_1 = n \cdot V_2$ y $i_2 = -n \cdot i_1$ donde n es el llamado *URNS RATIO*.



$$V_1 = n \cdot V_2 = n(-i_2) \cdot R = n \cdot n \cdot i_1 \cdot R = \underbrace{n^2 \cdot R}_{R_{eq}} \cdot i_1$$

el ejercicio anterior lo podríamos realizar de la siguiente forma:



7. Filtros Activos.-

Los filtros activos se componen generalmente por circuitos RC y amplificadores (OPAMP's), los cuales necesitan alimentación externa para su funcionamiento, es por esto que además de filtrar los filtros activos pueden amplificar la señal.

La ecuación de transferencia de un filtro de LP de 2º orden viene definida por:

$$H(s) = \frac{K \cdot \omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n \cdot s + \omega_n^2}$$

Donde:

$H(0)=K \rightarrow$ Ganancia en DC

$\xi = \frac{1}{2Q} \rightarrow$ Factor de Amortiguamiento

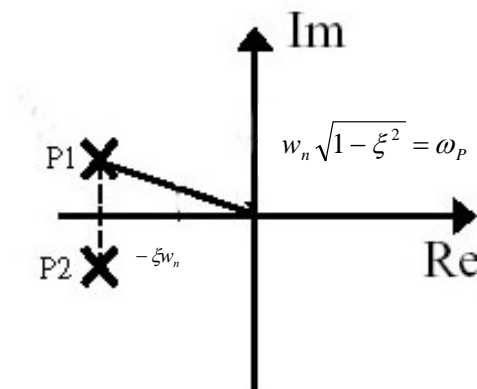
$\omega_n \rightarrow$ Frecuencia Natural.

Si igualamos el denominador a cero y resolvemos en s obtenemos los dos polos del sistema.

$$s^2 + 2\xi\omega_n \cdot s + \omega_n^2 = 0$$

$$P_1 = -\xi\omega_n + j \cdot \underbrace{\omega_n \sqrt{1-\xi^2}}_{\omega_p} \quad P_2 = -\xi\omega_n - j \cdot \underbrace{\omega_n \sqrt{1-\xi^2}}_{\omega_p}$$

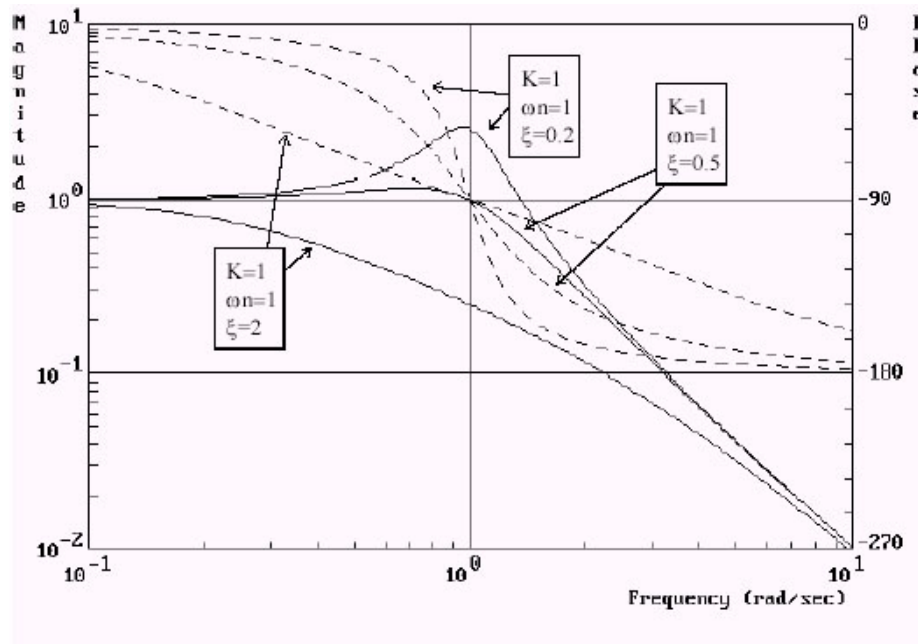
$$H(s) = \frac{K \cdot \omega_n}{(s - P_1) \cdot (s - P_2)}$$



Se produce pico de resonancia (ver figura siguiente) para valores de $\xi < 0.7071 = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

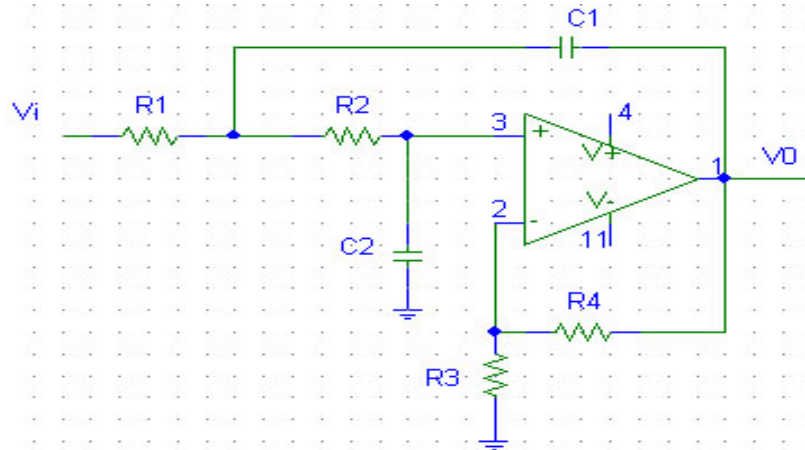
Existe siempre una relación entre la frecuencia natural (ω_n) y la de corte (ω_c), que depende del valor de ξ . Para un LP de segundo orden, se puede demostrar que:

$$BW = \omega_c = \omega_n \cdot \sqrt{(1-2\xi^2) + \sqrt{4\xi^4 - 4\xi^2 + 2}}$$



Para el diseño de filtros activos utilizaremos en nuestro caso, dos tipos de estructuras que, por su simplicidad y estabilidad están especialmente indicadas.

7.1. Estructura VCVS (fuente de tensión controlada por tensión).

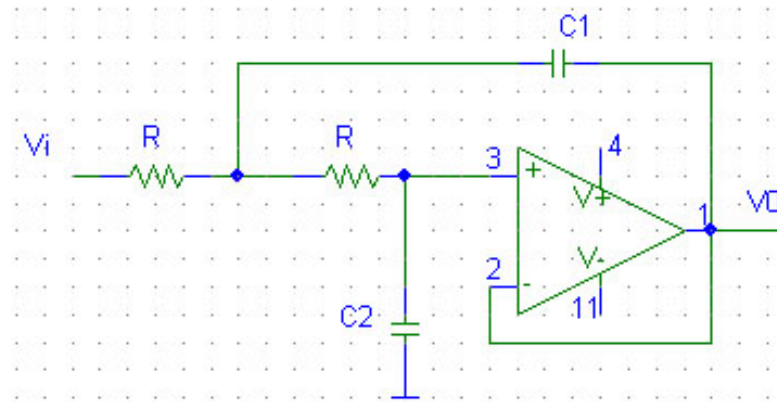


$$K = 1 + \frac{R_4}{R_3} \quad \omega_n^2 = \frac{1}{R_1 \cdot C_1 \cdot R_2 \cdot C_2}$$

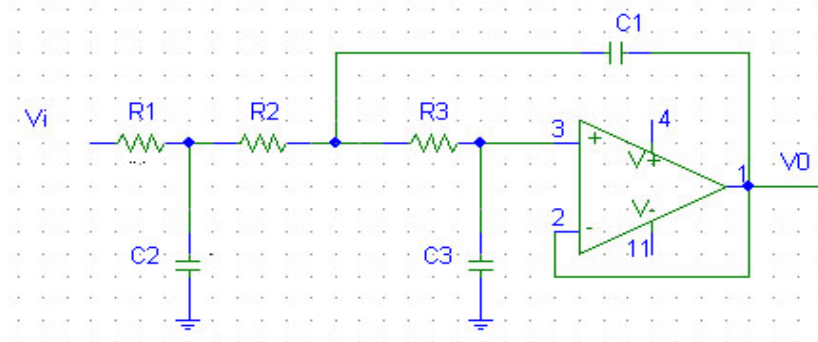
$$2\xi \cdot \omega_n = -\frac{R_4/R_3}{R_2 \cdot C_2} + \frac{1}{R_1 \cdot C_1} + \frac{1}{R_2 \cdot C_1}$$

7.4.- Diseño de Filtro Paso-Bajo activo (LP).

Filtro LP con $K = 1$ y orden $n = 2$.



Filtro LP con $K = 1$ y orden $n = 3$



a) Construimos un filtro normalizado con:

$$W_{cn} = 1 \text{ rad/seg}$$

$$R_n = 1 \Omega$$

$C_n \rightarrow$ consultando la tabla 9

b) Escalamos los condensadores, teniendo en cuenta la W_c y R real.

$$w \cdot R \cdot C = \underbrace{w_{cn}}_1 \cdot \underbrace{R_n}_1 \cdot C_n$$

$$C_i = \frac{C_n}{w_c \cdot R}$$

Tabla 9 Valores de los componentes para diversos filtros de paso bajo normalizados, basados en la estructura VCVS. Los valores de los condensadores están dados en faradios, en forma de mantisa y exponente.

Orden	2	3	4	5	6
Función Bessel					
C_1	9,066 - 1	1,243 +0	7,351 - 1 1,012 + 0	1,009 + 0 1,041 + 0	6,352 - 1 7,225 - 1 1,073 + 0
C_2	6,799 - 1	9,880 - 1	6,746 - 1 3,900 - 1	8,712 - 1 3,098 - 1	6,098 - 1 4,835 - 1 2,561 - 1
C_3		2,538 - 1		3,095 - 1	
Butterworth					
C_1	1,414 + 0	3,546 + 0	1,082 + 0 2,613 + 0	1,753 +0 3,235 +0	1,035 + 0 1,414 + 0 3,863 + 0
C_2	7,071 -1	1,392 + 0	9,241 - 1 3,825 - 1	1,354 + 0 3,089 - 1	9,660 - 1 7,071 - 1 2,588 - 1
C_3		2,024 - 1		4,214 - 1	
Chebyshev 2 dB					
C_1	2,672 +0	2,782 + 0	4,021 + 0 9,707 + 0	1,240 +1 1,499 + 1	5,750 + 0 7,853 + 0 2,146 + 1
C_2	5,246 -1	3,113 + 0	1,163 + 0 1,150 - 1	4,953 + 0 7,169 - 2	1,769 + 0 2,426 - 1 4,902 - 2
C_3		3,892 - 2		1,963 - 1	
Chebyshev 1 dB					
C_1	2,218 + 0	1,618 + 1	3,125 + 0 7,546 + 0	8,884 + 0 1,155 + 1	4,410 + 0 6,024 + 0 1,646 + 1
C_2	6,061 - 1	2,567 + 0	1,269 + 0 1,489 - 1	3,935 + 0 9,355 - 2	1,904 + 0 3,117 - 1 6,425 - 2
C_3		6,428 - 2		2,540 - 1	
Chebyshev 0,25 dB					
C_1	1,778 + 0	8,551 + 0	2,221 + 0 5,363 + 0	5,543 + 0 8,061 + 0	3,044 + 0 4,159 + 0 1,136 +1
C_2	6,789 - 1	2,018 + 0	1,285 + 0 2,084 - 1	2,898 + 0 1,341 - 1	1,875 + 0 4,296 - 1 9,323 - 2
C_3		1,109 - 1		3,425 - 1	
Chebyshev 0,1 dB					
C_1	1,638 + 0	6,653 + 0	1,901 + 0 4,592 + 0	4,446 + 0 6,810 + 0	2,553 + 0 3,487 + 0 9,531 + 0

Ejercicios.-

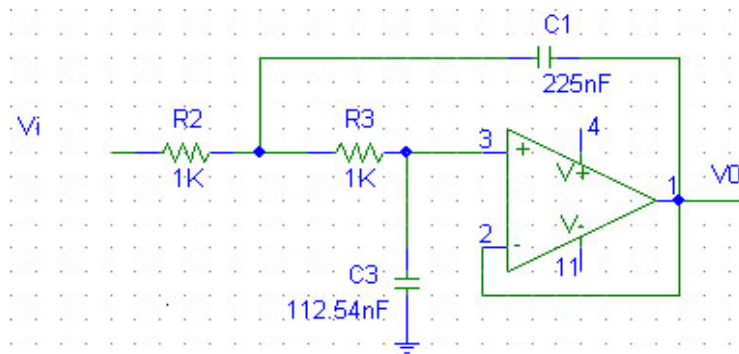
1.- Construir un filtro LP activo Butterworth de 2º orden con $f_c = 1\text{KHz}$, utilizando resistencias de $1\text{K}\Omega$.

Según la tabla 9. $C_1 = 1.414\text{ F}$ $C_2 = 0.7071\text{ F}$

$$W_c = 2\pi \cdot 1\text{K} = 2000\pi$$

$$R = 1\text{K}$$

$$C_1 = \frac{1.414}{(2000\pi) \cdot 1000} = 225\text{nF} \quad C_2 = \frac{0.7071}{(2000\pi) \cdot 1000} = 112.54\text{nF}$$



2.- Diseñar un filtro Butterworth paso-bajo de orden 5 con $f_c = 5\text{KHz}$ y resistencia $100\text{K}\Omega$. Utilizar estructura VCVS.

Cuando el filtro es de orden 4 o superior debemos utilizar dos etapas, en este caso el filtro de orden 5 estará formado por una primera etapa de orden 3 y una segunda de orden 2 en serie.

$$W_c = 2\pi \cdot 5000 = 10000\pi = \pi \cdot 10^4$$

$$R = 100\text{K} = 1 \cdot 10^5$$

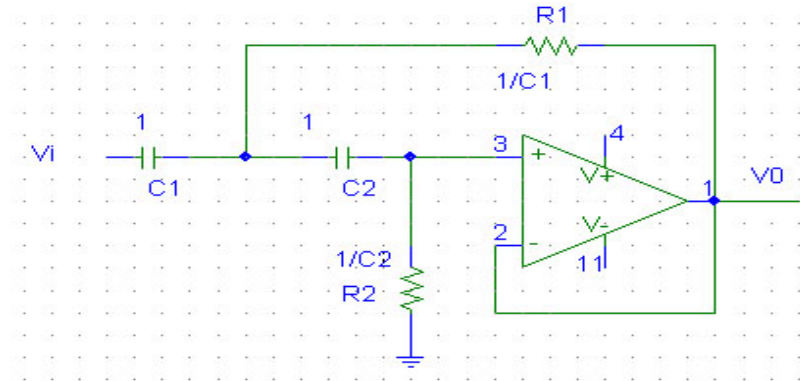
$$\begin{aligned} \text{Etap\aa de orden 3.} \quad & \begin{cases} C_1 = \frac{C_{n1}}{w \cdot R} = \frac{1.753}{\pi \cdot 10^9} = 558\text{pF} \\ C_2 = \frac{C_{n2}}{w \cdot R} = \frac{1.354}{\pi \cdot 10^9} = 431\text{pF} \\ C_3 = \frac{C_{n3}}{w \cdot R} = \frac{0.421}{\pi \cdot 10^9} = 134\text{pF} \end{cases} \\ \text{Etap\aa de orden 2.} \quad & \begin{cases} C_1 = \frac{C_{n1}}{w \cdot R} = \frac{3.235}{\pi \cdot 10^9} = 51.03\text{nF} \\ C_2 = \frac{C_{n2}}{w \cdot R} = \frac{0.309}{\pi \cdot 10^9} = 98\text{pF} \end{cases} \end{aligned}$$

7.5.- Diseño de Filtro Paso-Alto activo(HP).-

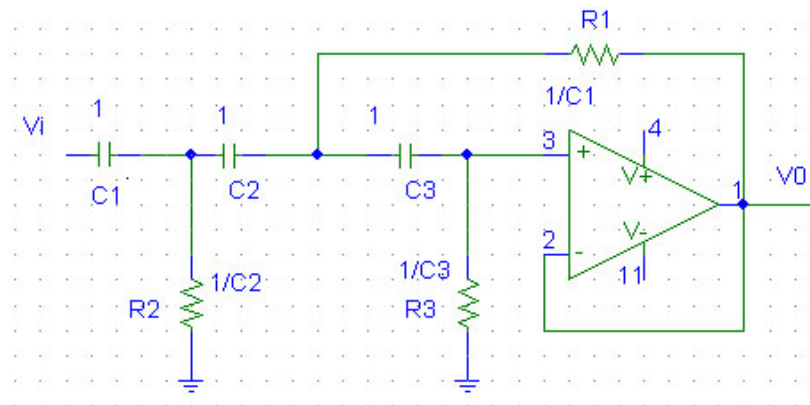
La función de transferencia de un filtro de HP de 2º orden viene definida por:

$$H(s) = \frac{K \cdot s^2}{s^2 + 2\xi\omega_n \cdot s + \omega_n^2}$$

La estructura VCVS de un filtro HP con K=1 y orden 2, normalizado $\omega_c=1$ rad/seg es:



La estructura VCVS de un filtro HP con K=1 y orden 3, normalizado $\omega_c=1$ rad/seg es:



Método de diseño

- Fijamos ω_c y C
- Construimos HP normalizado

$$\omega_{cn} = 1 \text{ rad/seg}$$

$$C = 1 \text{ F}$$

$$R_n = 1/\omega_{cn} \text{ consultando la tabla 9.}$$

- Desnormalizamos.

$$\omega \cdot R \cdot C = \underbrace{\omega_{cn}}_1 \cdot \frac{1}{C_n} \cdot \underbrace{C}_1 \Rightarrow R_i = \frac{1}{\omega \cdot C \cdot C_n}$$

Ejercicios.-

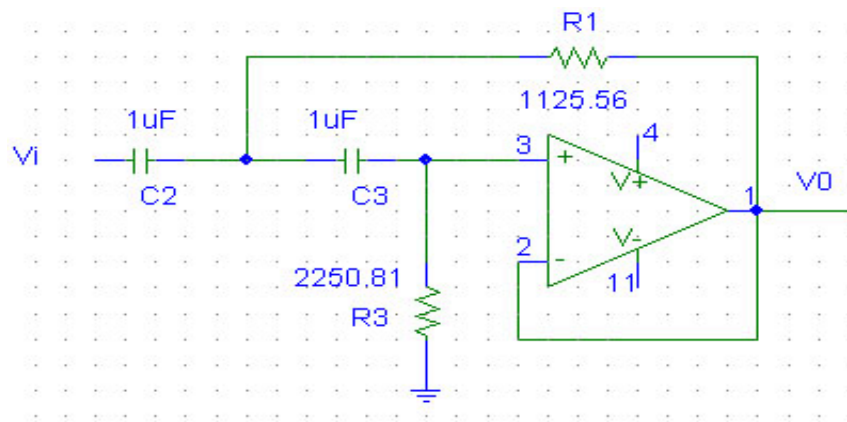
Construir un filtro HP Butterworth activo con $f_c = 100\text{Hz}$ utilizando condensadores de $1\mu\text{F}$ y de orden 2.

$$\omega_c = 2\pi \cdot 100 = 200\pi \text{ rad/seg}$$

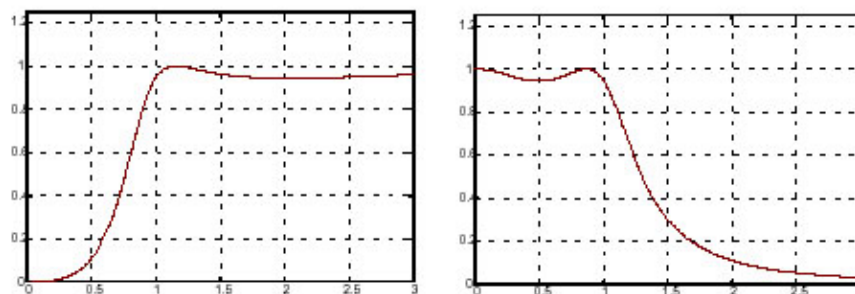
$$C = 1\mu\text{F}$$

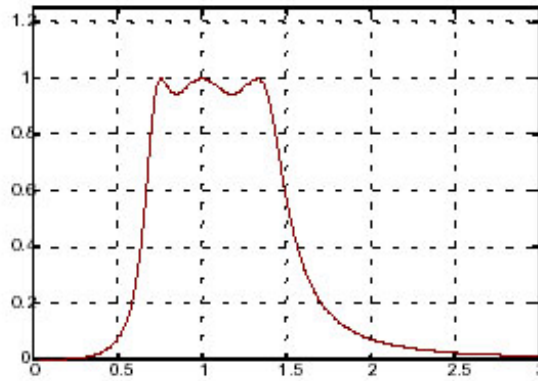
$$R_1 = \frac{1}{\omega_c \cdot C \cdot C_1} = \frac{1}{(200\pi) \cdot (1 \cdot 10^{-6}) \cdot (1.414)} = 1125.56\Omega$$

$$R_2 = \frac{1}{\omega_c \cdot C \cdot C_2} = \frac{1}{(200\pi) \cdot (1 \cdot 10^{-6}) \cdot (0.7071)} = 2250.81\Omega$$

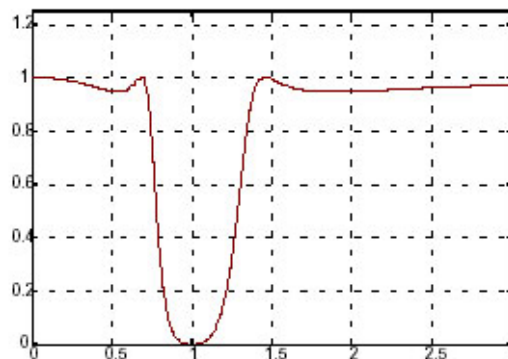
**7.6.- Diseño de Filtro Paso-Banda activo(BP).**

Existen varias formas de obtener un filtro paso banda. Podemos conseguir un BP mediante conexión serie un filtro HP y otro LP. Podemos también usar estructuras básicas VCVS o biquadrática. La elección de una u otra vendrá determinada por el factor de calidad del filtro como veremos más adelante.

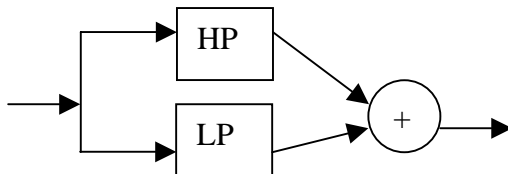




La curva de respuesta a la frecuencia de un filtro Rechazo-Banda de banda es la siguiente:



Para diseñar un filtro de este tipo podemos tomar un HP y un LP en paralelo y sumarlos.



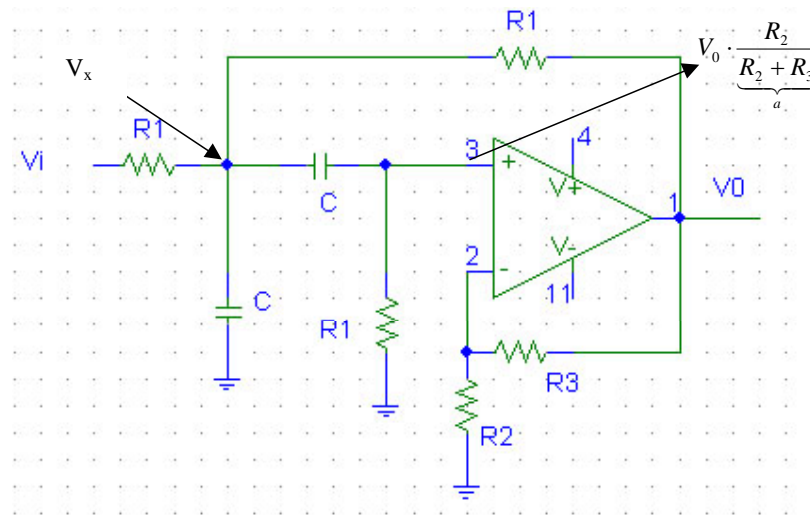
La función de transferencia de un filtro Paso-Banda de orden 2 es la siguiente

$$H(s) = \frac{K \cdot w_0 s}{s^2 + Bs + w_0}$$

donde $B=BW$ (en rad/seg) y $w_0 \rightarrow$ frecuencia central.

$$H(jw_0) = \frac{K \cdot w_0 \cdot jw_0}{-w_0^2 + jw_0 \cdot B + w_0^2} = \frac{K \cdot w_0}{B} = K \cdot \frac{w_0}{B} = K \cdot Q$$

donde Q es el llamado factor de calidad.

➤ Estructura VCVS

$$a = \frac{R_2}{R_2 + R_3}$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{V_{in} - V_x}{R_1} + \frac{V_0 - V_x}{R_1} &= \frac{V_x}{Z_C} + \frac{V_x - a \cdot V_0}{Z_C} \\ \frac{V_x - a \cdot V_0}{Z_C} &= \frac{a \cdot V_0}{R_1} \end{aligned} \right\} \rightarrow \left\{ \begin{aligned} \frac{V_{in} + V_0 - 2V_x}{R_1} &= \frac{2V_x - a \cdot V_0}{Z_C} \\ \frac{V_x - a \cdot V_0}{Z_C} &= \frac{a \cdot V_0}{R_1} \end{aligned} \right.$$

$$\begin{aligned} H(s) &= \frac{V_0(s)}{V_1(s)} = \frac{1}{\frac{2 \cdot a Z_C}{R_1} + (4a - 1) + \frac{a \cdot R_1}{Z_C}} = \frac{1}{\frac{2 \cdot a}{R_1 \cdot Cs} + (4a - 1) + \frac{a \cdot R_1 \cdot Cs}{Z_C}} = \\ &= \frac{R_1 \cdot Cs}{2a + (4a - 1)R_1 \cdot Cs + aR_1^2 C^2 s^2} = \frac{\frac{s}{a \cdot R_1 Cs}}{\frac{2}{R_1^2 C^2} + \frac{(4a - 1)s}{a \cdot R_1 C} + s^2} \end{aligned}$$

Comparando con la función de transferencia de un filtro BP de 2º orden tenemos que:

$$K \cdot w_0 = \frac{1}{a \cdot R_1 C} \quad w_0^2 = \frac{2}{R_1^2 C^2} \quad B = \frac{4a - 1}{a \cdot R_1 C}$$

$$w_0 = \frac{\sqrt{2}}{R_1 C} \rightarrow K \cdot \frac{\sqrt{2}}{R_1 C} = \frac{1}{a \cdot R_1 C} \rightarrow K = \frac{1}{a\sqrt{2}}$$

$$K = \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{R_2 + R_3}{R_2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1 + R_3/R_2}{\sqrt{2}}$$

$$B = \frac{4a-1}{a \cdot R_1 C} = \frac{4 \cdot \frac{R_2}{R_2 + R_3} - 1}{\frac{R_2}{R_2 + R_3} \cdot R_1 C} = \frac{4R_2 - R_2 - R_3}{R_2 R_1 C} = \frac{3R_2 - R_3}{R_2 R_1 C} = \frac{3R_2 - R_3}{R_2} \cdot \frac{w_0}{\sqrt{2}} = [2\sqrt{2} - K] \cdot w_0$$

Resumiendo:

$$K = \frac{1 + R_3/R_2}{\sqrt{2}}; \quad B = [2\sqrt{2} - K] \cdot w_0; \quad w_0 = \frac{\sqrt{2}}{R_1 C}$$

Suponemos un filtro con un factor de calidad muy alto.

$$Q = \frac{w_0}{B} \rightarrow \rightarrow Q \gg \gg \rightarrow \rightarrow 3 \cdot R_2 - R_3 \approx 0 \Leftrightarrow \frac{R_3}{R_2} \approx 3$$

Esto nos lleva a que este tipo de filtros se usan para **factores de calidad Q < 4**.

Ejercicio.-

Diseñar un filtro activo paso de banda con $f_0 = 10\text{Khz}$ y ancho de banda (BW) de 5 Khz.

$$\begin{aligned} w_0 &= 2\pi \cdot f_0 = 2\pi \cdot 10K \\ B &= 2\pi \cdot 5K = \pi \cdot 10K \end{aligned} \quad Q = \frac{w_0}{B} = \frac{2\pi \cdot 10K}{2\pi \cdot 5K} = 2 < 3 \rightarrow \text{Estructura VCVS}$$

$$\begin{aligned} B &= [2\sqrt{2} - K] \cdot w_0 \\ 2\pi \cdot 5 \cdot 10^3 &= [2\sqrt{2} - K] \cdot 2\pi \cdot 10 \cdot 10^3 \\ \frac{1}{2} &= [2\sqrt{2} - K] \Rightarrow K = \frac{4\sqrt{2} - 1}{2} = 2.328 \end{aligned}$$

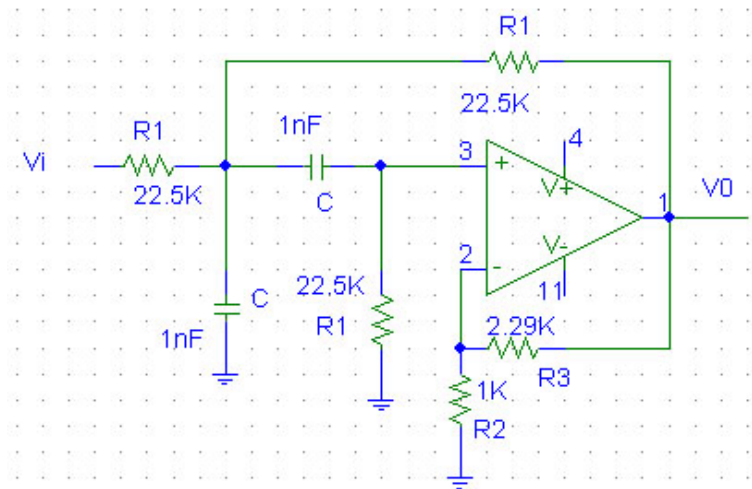
$$K = \frac{1 + R_3/R_2}{\sqrt{2}} = 2.328 \Rightarrow \frac{R_3}{R_2} = 2.29$$

Luego si tomo $R_2 = 1K$ $R_3 = 2.29K$

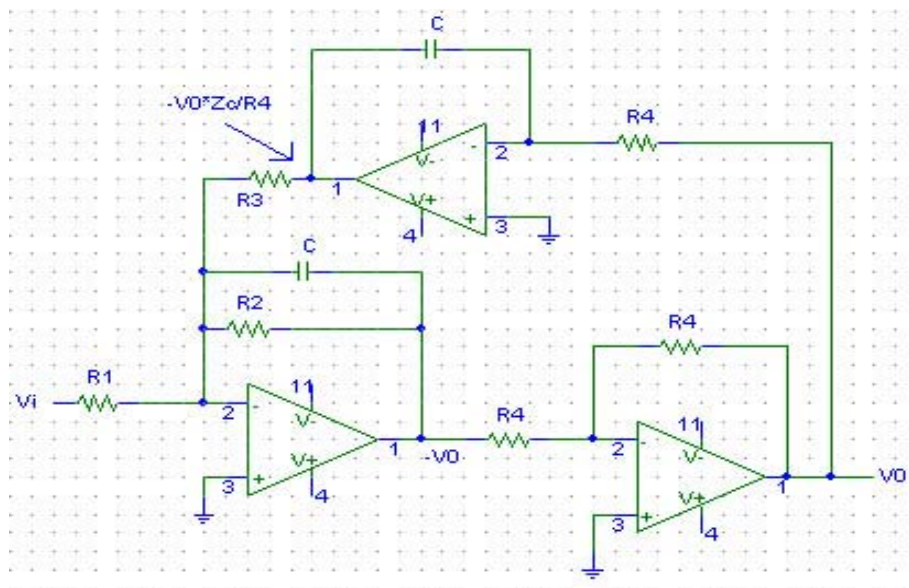
$$W_0 = \frac{\sqrt{2}}{R_1 C} \quad \text{si } C = 1nF \rightarrow R_1 = \frac{\sqrt{2}}{w_0 \cdot C} = \frac{\sqrt{2}}{2\pi \cdot 10 \cdot 10^3 \cdot 1 \cdot 10^{-9}} = 22.5K\Omega$$

Ganancia en frecuencia central

$$|H(w_0)| = K \cdot Q = 2.323 \cdot 2 = 4.656$$



➤ Estructura Bicuadrática. (2º orden)



Ecuaciones:

$$K = \frac{\sqrt{R_3 R_4}}{R_1}; \quad B = \frac{1}{R_2 C}; \quad w_0^2 = \frac{1}{R_3 R_4 C^2}$$

Esta estructura se utiliza para factores de calidad altos, **hasta 100**.

Ejercicio:

Diseñar un filtro activo paso de banda de orden 2, centrado en 1Khz y de ancho de banda 100Hz.

$$BW = 100\text{Hz} ; f_0 = 1\text{KHz}$$

$$Q = \frac{f_0}{BW} = \frac{1000}{100} = 10 > 4 \Rightarrow \text{Bicuadrática}$$

$$K = \frac{\sqrt{R_3 R_4}}{R_1}; \quad B = \frac{1}{R_2 C}; \quad w_0^2 = \frac{1}{R_3 R_4 C^2}$$

Por comodidad puedo hacer.

$$K = 1 \Rightarrow R_3 = R_4 = R_1 \rightarrow w_0^2 = \frac{1}{R_1^2 C^2} \Rightarrow w_0 = \frac{1}{R_1 C}$$

$$\left. \begin{aligned} 2\pi \cdot f_0 &= \frac{1}{R_1 C} \\ 2\pi \cdot BW &= \frac{1}{R_2 C} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} 2\pi \cdot 1000 &= \frac{1}{R_1 C} \\ 2\pi \cdot 100 &= \frac{1}{R_2 C} \end{aligned} \left\{ \begin{aligned} 10 &= \frac{R_2}{R_1} \Rightarrow R_2 = 10 \cdot R_1 \end{aligned} \right.$$

$$\text{Tomo } R_3 = R_4 = R_1 = 1\text{K}\Omega \rightarrow R_2 = 10\text{K}\Omega$$

$$2\pi \cdot 100 = \frac{1}{1 \cdot 10^4 \cdot C} \Rightarrow C = \frac{1}{1 \cdot 10^4 \cdot 2\pi \cdot 100} = 159.15\text{nF}$$

$$|H(w_0)| = K \cdot Q = 1 \cdot 10 = 10$$

8. **Sensibilidad.**-

Se define la sensibilidad como la variación de una propiedad del sistema cuando varía un parámetro. Para un parámetro P, su sensibilidad normalizada a un factor F, se define como:

$$S_F^P = \frac{dP/P}{dF/F} = \frac{d(\ln P)}{d(\ln F)}$$

Por ejemplo, si cambia R_1 en un filtro ¿en qué medida se verá afectada la frecuencia de corte?

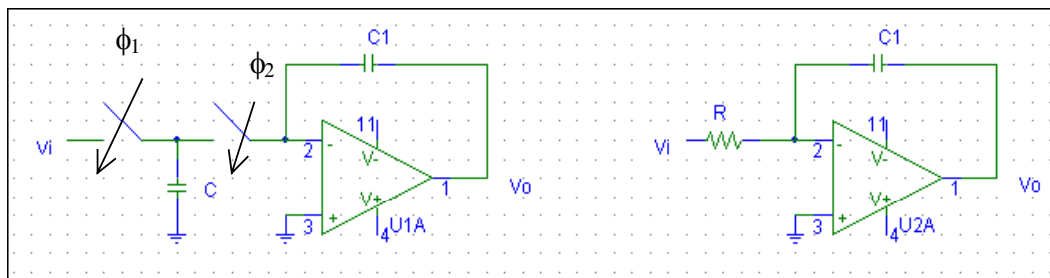
$$S_{R_1}^{w_c} = \frac{d(\ln w_c)}{d(\ln R_1)} = \frac{\frac{dw_c}{w_c}}{\frac{dR_1}{R_1}} = -1/2. \text{ Esto significa que si la resistencia nominal } R_1 = 100\Omega$$

crece hasta 110Ω (un 10%), la w_c decrecerá un 5%.

9. Filtros de capacidades Conmutadas.-

Los filtros de capacidades conmutadas (SC, switched capacitor) son una clase particular de filtros activos que no emplean resistencias, sino solamente A.O., condensadores e interruptores (transistores), por lo que son especialmente indicados para la integración monolítica (las resistencias ocupan mucho espacio en los C.I., y su calidad es mediocre).

Veamos como ejemplo la célula integradora básica y su equivalente analógico.



ϕ_1 y ϕ_2 son la señales de control de los interruptores gobernadas por una señal de reloj. Esta señal de reloj conmuta alternativamente los dos interruptores de modo que si el periodo es $T=1/f_r$ ($f_r \equiv$ frecuencia de la señal de reloj) la corriente de entrada queda: $I_m=Q/T=V_i \cdot C/T=V_i \cdot C \cdot f_r$
por tanto: $V_i=I_m \cdot (C \cdot f_r)^{-1}=I_m \cdot R_{eq}$; con $R_{eq}=(C \cdot f_r)^{-1}$.

Obviamente f_r debe tener un valor alto.

VENTAJAS:

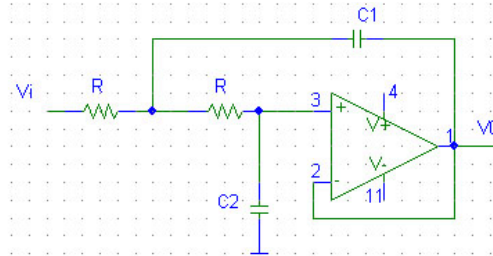
- Reducido tamaño.
- Alta precisión (bajas derivas)
- Estabilidad
- Fácil ajuste (mediante f_r)
- Reducido coste.

INCONVENIENTES:

- Útiles sólo a bajas frecuencias (200Khz) debido a la aparición de interferencias y ruidos.
- Bajo rango dinámico.

10.- Ejercicios:

1. Determinar la sensibilidad de la frecuencia natural del filtro de la figura a las variaciones en la resistencia R_1 .



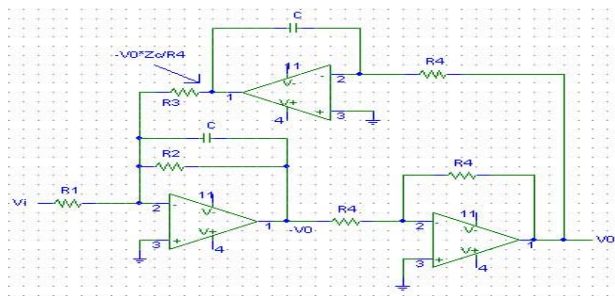
$$\omega_n^2 = \frac{1}{R_1 C_1 R_2 C_2}$$

$$2\omega_n d\omega_n = \frac{1}{C_1 R_2 C_2} \cdot \frac{-1}{R_1^2} dR_1 \rightarrow 2\omega_n d\omega_n = \frac{-1}{R_1 C_1 R_2 C_2} \cdot \frac{dR_1}{R_1}$$

$$2\omega_n d\omega_n = -\omega_n^2 \cdot \frac{dR_1}{R_1} \rightarrow \frac{d\omega_n}{\omega_n} = \frac{-1}{2} \cdot \frac{dR_1}{R_1}$$

$$S_{R_1}^{\omega_n} = \frac{d\omega_n / \omega_n}{dR_1 / R_1} = -\frac{1}{2}$$

2. En la estructura Bicuadrática BP calcular:



$$K = \frac{\sqrt{R_3 R_4}}{R_1}; \quad B = \frac{1}{R_2 C}; \quad \omega_n^2 = \frac{1}{R_3 R_4 C^2}$$

a) $S_{R_2}^B$

$$dB = \frac{1}{C} \cdot \frac{-1}{R_2^2} dR_2 \rightarrow dB = -\frac{1}{CR_2} \cdot \frac{dR_2}{R_2} \rightarrow \frac{dB}{B} = -1 \cdot \frac{dR_2}{R_2}$$

$$S_{R_2}^B = \frac{dB/B}{dR_2/R_2} = -1$$

b) S_C^B

Partiendo de la misma ecuación que en caso a) $B = \frac{1}{R_2 C}$, obtenemos

$$S_C^B = \frac{dB/B}{dC/C} = -1$$

c) $S_{R_4}^K$

$$K = \frac{\sqrt{R_3 R_4}}{R_1} \rightarrow K^2 = \frac{R_3 R_4}{R_1^2} \rightarrow 2K \cdot dK = \frac{R_3}{R_1^2} \cdot R_4 \cdot \frac{dR_4}{R_4}$$

$$\frac{dK}{K} = \frac{1}{2} \cdot \frac{dR_4}{R_4} \rightarrow S_{R_4}^K = 1/2$$

d) $S_{R_1}^K$

$$K = \frac{\sqrt{R_3 R_4}}{R_1} \rightarrow K^2 = \frac{R_3 R_4}{R_1^2} = R_3 R_4 \cdot \frac{1}{R_1^2} \rightarrow 2K \cdot dK = R_3 R_4 \cdot \frac{(-2R_1 \cdot dR_1)}{R_1^4}$$

$$2K \cdot dK = -\frac{R_3 R_4}{R_1^2} \cdot 2 \frac{dR_1}{R_1} \rightarrow S_{R_1}^K = \frac{dK/K}{dR_1/R_1} = -1$$

e) $S_{R_3}^K$

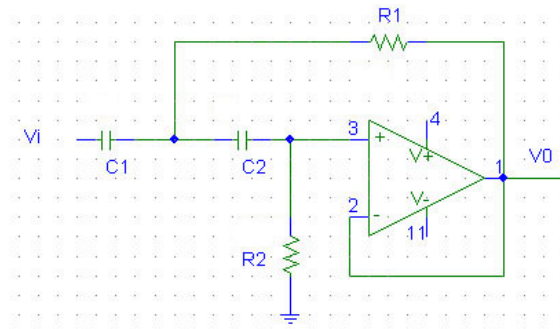
Partiendo de la misma ecuación que en caso c) $K = \frac{\sqrt{R_3 R_4}}{R_1}$, obtenemos

$$S_{R_3}^K = \frac{dK/K}{dR_3/R_3} = \frac{1}{2}$$

3. Para el filtro activo HP calcular:

a) $S_{R_1}^{w_C}$

b) $S_{R_2}^{w_C}$



$$w_c \cdot R \cdot C = cte.$$

Para los dos casos tomo la misma ecuación.

$$[dw_c R_i + w_c dR_i]C = 0 \rightarrow dw_c R_i + w_c dR_i = 0 \rightarrow dw_c R_i = -w_c dR_i$$

$$\frac{dw_c}{w_c} = -\frac{dR_i}{R_i} \rightarrow S_{R_i}^{w_c} = -1$$

Luego para los dos casos a y b vale -1.

4. Determinar el orden y la f_c de un filtro Butterworth paso-bajo tal que a 2Khz la atenuación sea de 1dB y a 16Khz como mínimo de 40dB.

$$|H(f)|^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{f}{f_c}\right)^{2n}} \rightarrow 2\text{Log}|H(f)| = -\text{Log}\left[1 + \left(\frac{f}{f_c}\right)^{2n}\right]$$

$$-20\text{Log}|H(f)| = 10\text{Log}\left[1 + \left(\frac{f}{f_c}\right)^{2n}\right] \rightarrow \frac{A_{dB}}{10} = \text{Log}\left[1 + \left(\frac{f}{f_c}\right)^{2n}\right]$$

Entonces:

$$\begin{aligned} 0.1 &= \text{Log}\left[1 + \left(\frac{2K}{f_c}\right)^{2n}\right] \\ 4 &= \text{Log}\left[1 + \left(\frac{16K}{f_c}\right)^{2n}\right] \end{aligned} \rightarrow \begin{cases} 10^{0.1} = 1 + \left(\frac{2K}{f_c}\right)^{2n} \\ 10^4 = 1 + \left(\frac{16K}{f_c}\right)^{2n} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 10^{0.1} - 1 = \left(\frac{2K}{f_c}\right)^{2n} \\ 10^4 - 1 = \left(\frac{16K}{f_c}\right)^{2n} \end{cases}$$

Dividiendo:

$$\frac{10^{0.1} - 1}{10^4 - 1} = \left(\frac{2}{16}\right)^{2n} = \left(\frac{1}{8}\right)^{2n} \Rightarrow \frac{10^4 - 1}{10^{0.1} - 1} = 8^{2n} \Rightarrow n = \frac{\text{Log}\left(\frac{10^4 - 1}{10^{0.1} - 1}\right)}{2 \cdot \text{Log}(8)} = 2.53 \rightarrow \mathbf{n = 3}$$

¿Y la f_c ?

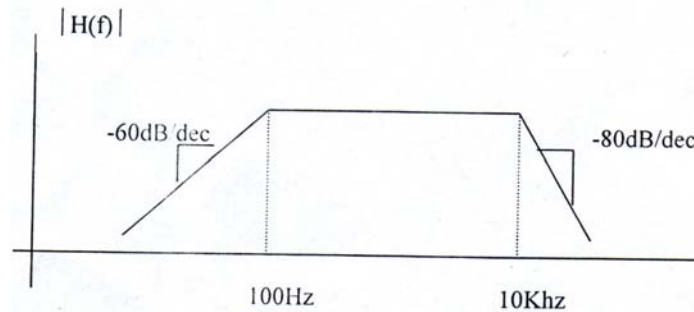
$$10^4 - 1 = \left(\frac{16K}{f_c}\right)^{2n} \Rightarrow \text{Log}(10^4 - 1) = 2n \cdot \text{Log}\left(\frac{16K}{f_c}\right) \Rightarrow -\frac{\text{Log}(10^4 - 1)}{2n} = \text{Log}\left(\frac{f_c}{16K}\right)$$

$$f_c = 16K \cdot 10^{\frac{\text{Log}(10^4 - 1)}{2n}}$$

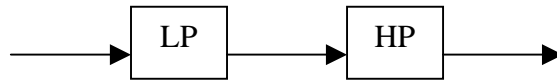
$$\text{Si } n = 2.53 \rightarrow f_c = 2.59\text{Khz}$$

$$\text{Si } n = 3 \rightarrow f_c = 3.447\text{Khz}$$

5. Diseñar (con elementos activos) un circuito con la siguiente función de transferencia.



Este Problema se reduce haciendo un filtro de paso-bajo con $f_c=10\text{Khz}$ de orden 4 ya que según la ecuación $-20 \cdot n = \frac{dB}{dec} \rightarrow -20 \cdot n = -80 \rightarrow n = 4$, es un butterworth pues no tiene rizado. Y un filtro paso-alto con $f_c = 100\text{hz}$ de orden 3 ($-20 \cdot n = -60$) y se conectan en cascada.



a) Diseño del LP

$$f_c = 10\text{Khz} \rightarrow \omega_c = 2\pi \cdot 10\text{K}$$

$$C_i = \frac{C_n}{\omega \cdot R} \quad \text{Tomamos } R=1\text{K}$$

Al ser de orden 4 debemos hacerlo en dos etapas:

1ª etapa:

$$C_1 = \frac{1.082}{(2\pi) \cdot 10\text{K} \cdot 1\text{K}} = 17.22\text{nF} \quad C_2 = \frac{0.9241}{(2\pi) \cdot 10\text{K} \cdot 1\text{K}} = 14.71\text{nF}$$

2ª etapa:

$$C_1 = \frac{2.613}{(2\pi) \cdot 10\text{K} \cdot 1\text{K}} = 41.59\text{nF} \quad C_2 = \frac{0.3825}{(2\pi) \cdot 10\text{K} \cdot 1\text{K}} = 6.09\text{nF}$$

b) Diseño del HP orden 3

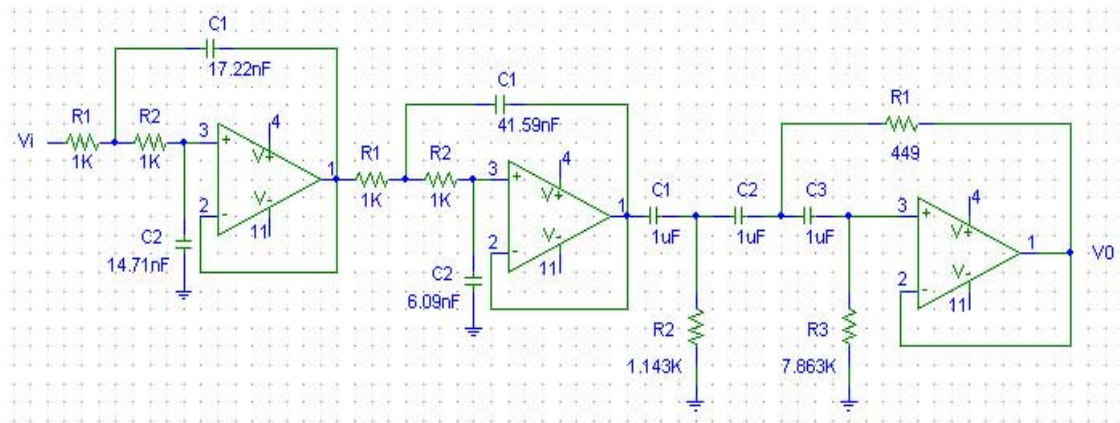
$$f_c = 100\text{hz} \rightarrow \omega_c = 2\pi \cdot 100 = 200\pi$$

$$R_i = \frac{1}{\omega \cdot C \cdot C_n} \quad \text{Tomamos } C = 1\mu\text{F}$$

$$R_1 = \frac{1}{\omega \cdot C \cdot C_1} = \frac{1}{(200\pi) \cdot (1 \cdot 10^{-6}) \cdot (3.546)} = 449\Omega$$

$$R_2 = \frac{1}{\omega \cdot C \cdot C_2} = \frac{1}{(200\pi) \cdot (1 \cdot 10^{-6}) \cdot (1.392)} = 1.143 K\Omega$$

$$R_3 = \frac{1}{\omega \cdot C \cdot C_3} = \frac{1}{(200\pi) \cdot (1 \cdot 10^{-6}) \cdot (2.024 \cdot 10^{-1})} = 7.863 K\Omega$$



6. Calcule la respuesta impulsiva $h(t)$ para un filtro paso bajo de orden 2.

$$H(s) = \frac{k \cdot \omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

b) Respuesta del filtro anterior a la entrada escalón.

Busquemos los polos del sistema:

$$s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2 = 0$$

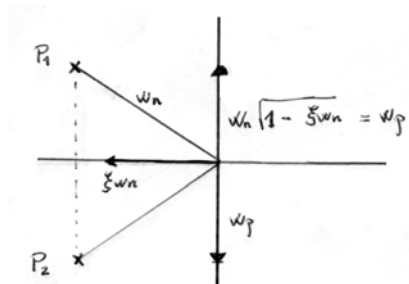
$$s = \frac{-2\xi\omega_n \pm \sqrt{4\xi^2\omega_n^2 - 4\omega_n^2}}{2} = -\xi\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\xi^2 - 1} = -\xi\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1 - \xi^2}$$

Entonces :

$$P_1 = -\xi\omega_n + j\omega_n\sqrt{1 - \xi^2}$$

$$P_2 = -\xi\omega_n - j\omega_n\sqrt{1 - \xi^2}$$

Por comodidad llamaremos $\omega_n\sqrt{1 - \xi^2} = \omega_p$



$$P_1 = -\xi\omega_n + j\omega_p$$

$$P_2 = -\xi\omega_n - j\omega_p$$

Vemos que $|P_1| = |P_2| = \sqrt{\xi^2 w_n^2 + w_n^2(1 - \xi^2)} = w_n$

Por tanto podemos escribir:

$$H(s) = \frac{k \cdot w_n^2}{(s - P_1) \cdot (s - P_2)} = \frac{k \cdot w_n^2}{(s + \xi w_n - j w_p) \cdot (s + \xi w_n + j w_p)} = \frac{A}{s - P_1} + \frac{B}{s - P_2} =$$

$$\frac{As - AP_2 + Bs - BP_1}{(s - P_1) \cdot (s - P_2)} = \frac{(A + B)s - AP_2 - BP_1}{(s - P_1) \cdot (s - P_2)}$$

Entonces:

$$A + B = 0 \Rightarrow A = -B$$

$$-AP_2 - BP_1 = k \cdot w_n^2 \Rightarrow -AP_2 + AP_1 = k \cdot w_n^2 \Rightarrow A(P_1 - P_2) = k \cdot w_n^2$$

$$A = \frac{k \cdot w_n^2}{P_1 - P_2} = \frac{k \cdot w_n^2}{-\xi w_n + j w_p + \xi w_n + j w_p} = \frac{k \cdot w_n^2}{2j w_p} = \frac{k \cdot w_n^2}{2j \cdot w_n \sqrt{1 - \xi^2}} = \frac{k \cdot w_n}{2j \cdot \sqrt{1 - \xi^2}}$$

$$A = -j \cdot \frac{k \cdot w_n}{2\sqrt{1 - \xi^2}}$$

$$B = -A = j \cdot \frac{k \cdot w_n}{2\sqrt{1 - \xi^2}}$$

Por tanto tenemos:

$$H(s) = \frac{A}{s - P_1} + \frac{B}{s - P_2} = \frac{A}{s - P_1} - \frac{A}{s - P_2} = A \left[\frac{1}{s - P_1} - \frac{1}{s - P_2} \right] = -j \frac{k \cdot w_n}{2\sqrt{1 - \xi^2}} \left[\frac{1}{s - P_1} - \frac{1}{s - P_2} \right] =$$

$$\xrightarrow{\ell^{-1}} = -j \cdot \frac{k \cdot w_n}{2\sqrt{1 - \xi^2}} \cdot [e^{P_1 t} - e^{P_2 t}] \cdot u(t) =$$

$$= -j \cdot \frac{k \cdot w_n}{2\sqrt{1 - \xi^2}} \cdot [e^{-\xi w_n t} \cdot e^{j w_p t} - e^{-\xi w_n t} \cdot e^{-j w_p t}] \cdot u(t) =$$

$$= -j \cdot \frac{k \cdot w_n}{2\sqrt{1 - \xi^2}} \cdot e^{-\xi w_n t} [e^{j w_p t} - e^{-j w_p t}] \cdot u(t) = \frac{k \cdot w_n}{\sqrt{1 - \xi^2}} \cdot e^{-\xi w_n t} \cdot \frac{1}{2j} [e^{j w_p t} - e^{-j w_p t}] \cdot u(t) =$$

$$= \frac{k \cdot w_n}{\sqrt{1 - \xi^2}} \cdot e^{-\xi w_n t} \cdot \text{sen}(w_p t)$$

$$h(t) = \frac{k \cdot w_n}{\sqrt{1 - \xi^2}} \cdot e^{-\xi w_n t} \cdot \text{sen}[w_n \sqrt{1 - \xi^2} \cdot t] \cdot u(t)$$

b)

$$Y(s) = H(s) \cdot U(s) = \frac{k \cdot w_n^2}{(s - P_1) \cdot (s - P_2)} \cdot \frac{1}{s} = \frac{A}{s - P_1} + \frac{B}{s - P_2} + \frac{C}{s} =$$

$$= \frac{A \cdot (s - P_2) \cdot s + B \cdot (s - P_1) \cdot s + C \cdot (s - P_1) \cdot (s - P_2)}{(s - P_1) \cdot (s - P_2) \cdot s} =$$

Para $s = P_2$

$$B \cdot (P_2 - P_1) \cdot P_2 = k \cdot w_n^2 \Rightarrow B = \frac{k \cdot w_n^2}{P_2(P_2 - P_1)}$$

Para $s = P_1$

$$A \cdot (P_1 - P_2) \cdot P_1 = k \cdot w_n^2 \Rightarrow A = \frac{k \cdot w_n^2}{P_1(P_1 - P_2)}$$

Para $s = 0$

$$C \cdot P_1 \cdot P_2 = k \cdot w_n^2 \Rightarrow C = \frac{k \cdot w_n^2}{P_1 P_2}$$

Luego

$$y(t) = [A \cdot e^{P_1 t} + B \cdot e^{P_2 t} + C] \cdot u(t) = \left[\frac{k \cdot w_n^2}{P_1(P_1 - P_2)} \cdot e^{P_1 t} + \frac{k \cdot w_n^2}{P_2(P_2 - P_1)} \cdot e^{P_2 t} + \frac{k \cdot w_n^2}{P_1 P_2} \right] \cdot u(t)$$

Vemos que:

$$P_1 \cdot P_2 = P_1 \cdot P_1^* = |P_1|^2 = w_n^2$$

$$(P_1 - P_2) = -\xi w_n + jw_p + \xi w_n + jw_p = 2jw_p = 2j \cdot w_n \sqrt{1 - \xi^2}$$

$$P_1(P_1 - P_2) = (-\xi w_n + jw_p) \cdot (2j \cdot w_p) = -2j \cdot \xi w_p w_n - 2w_p^2 = -2w_p^2 - 2j\xi w_p w_n$$

$$P_2(P_2 - P_1) = (-\xi w_n - jw_p) \cdot (-2jw_p) = 2j\xi w_n w_p - 2jw_p^2 = -2w_p^2 + 2j\xi w_p w_n$$

Entonces:

$$y(t) = k \cdot w_n^2 \left[\frac{e^{P_1 t}}{-2w_p^2 - 2j\xi w_p w_n} + \frac{e^{P_2 t}}{-2w_p^2 + 2j\xi w_p w_n} + \frac{1}{w_n^2} \right] \cdot u(t) =$$

$$= k \cdot w_n^2 \left[\frac{e^{P_1 t}}{-2w_n^2(1 - \xi^2) - 2j\xi w_n^2 \sqrt{1 - \xi^2}} + \frac{e^{P_2 t}}{-2w_n^2(1 - \xi^2) + 2j\xi w_n^2 \sqrt{1 - \xi^2}} + \frac{1}{w_n^2} \right] \cdot u(t)$$

Tenemos por tanto que:

$$y(t) = k \cdot \left[\frac{-e^{P_1 t}}{2(1 - \xi^2) + 2j\xi \sqrt{1 - \xi^2}} - \frac{e^{P_2 t}}{2(1 - \xi^2) - 2j\xi \sqrt{1 - \xi^2}} + 1 \right] \cdot u(t)$$

Veamos que:

$$\left| 2(1 - \xi^2) + 2j\xi\sqrt{1 - \xi^2} \right| = \sqrt{4(1 - \xi^2)^2 + 4\xi^2(1 - \xi^2)} = 2\sqrt{1 + 0^4 - 2\xi^2 + \xi^2 - \xi^4} = 2\sqrt{1 - \xi^2}$$

Luego:

$$\left. \begin{aligned} 2(1 - \xi^2) + 2j\xi\sqrt{1 - \xi^2} &= 2\sqrt{1 - \xi^2} \cdot e^{j\phi} \\ 2(1 - \xi^2) - 2j\xi\sqrt{1 - \xi^2} &= 2\sqrt{1 - \xi^2} \cdot e^{-j\phi} \end{aligned} \right\} \text{Complejas - Conjugadas}$$

$$\text{con } \phi = \arctan \frac{2\xi\sqrt{1 - \xi^2}}{2(1 - \xi^2)} = \arctan \frac{\xi}{\sqrt{1 - \xi^2}}$$

Luego

$$\begin{aligned} y(t) &= k \cdot \left[\frac{-e^{P_1 t}}{2\sqrt{1 - \xi^2}} \cdot e^{-j\phi} - \frac{e^{P_2 t}}{2\sqrt{1 - \xi^2}} \cdot e^{j\phi} + 1 \right] \cdot u(t) = \\ &= k \cdot \left[\frac{-1}{2\sqrt{1 - \xi^2}} \left[e^{-\xi w_n t} \cdot e^{jw_p t} \cdot e^{-j\phi} + e^{-\xi w_n t} \cdot e^{-jw_p t} \cdot e^{j\phi} \right] + 1 \right] \cdot u(t) = \\ &= k \cdot \left[-\frac{e^{-\xi w_n t}}{\sqrt{1 - \xi^2}} \cdot \left[\frac{e^{j(w_p t - \phi)} + e^{-j(w_p t - \phi)}}{2} \right] + 1 \right] \cdot u(t) = \\ &= k \cdot \left[-\frac{e^{-\xi w_n t}}{\sqrt{1 - \xi^2}} \cdot \cos(w_p t - \phi) + 1 \right] \cdot u(t) = k \cdot \left[1 - \frac{e^{-\xi w_n t}}{\sqrt{1 - \xi^2}} \cdot \cos(w_p t - \phi) \right] \cdot u(t) = \\ &= k \cdot \left[1 - \frac{e^{-\xi w_n t}}{\sqrt{1 - \xi^2}} \cdot \cos\left(w_n \left(\sqrt{1 - \xi^2}\right) \cdot t - \phi\right) \right] \cdot u(t) \end{aligned}$$

Si queremos podemos continuar teniendo en cuenta que:

$$\text{tag}(-\phi) = -\text{tag}(\phi);$$

$$\text{tag}\left(\phi + \frac{\pi}{2}\right) = \text{tag}\left(\phi - \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{\text{tag}\phi}$$

$$\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = \text{sen}\alpha$$

Si transformamos el $\cos(w_p t - \phi)$

$$\cos\left(w_p t - \phi + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\right) = \text{sen}\left(w_p t - \phi + \frac{\pi}{2}\right) = \text{sen}(w_p t + \phi')$$

$$\phi' = -\phi + \pi/2$$

Veamos que $\tan \phi' = -\frac{1}{\tan(-\phi)} = \frac{1}{\tan \phi} = \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}$

Por tanto:

$$y(t) = k \cdot \left[1 - \frac{e^{-\xi \omega_n t}}{\sqrt{1-\xi^2}} \cdot \sin\left(\omega_n \left(\sqrt{1-\xi^2}\right) \cdot t + \phi'\right) \right] \cdot u(t)$$

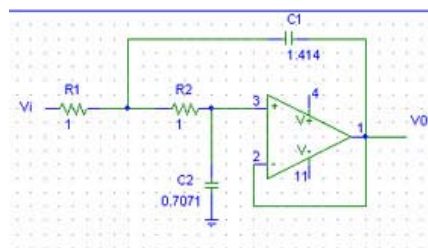
$$\phi' = \arctan\left[\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}\right]$$

que es como aparece en las tablas.

7.- Construir un filtro LP activo Butterworth de 2º orden con $f_c=1\text{KHz}$ utilizando resistencias de $1\text{K}\Omega$.

Usaremos una estructura VCVS.

- 1) Construimos filtro normalizado con
 - $\omega_n=1 \text{ rad/seg}$
 - $R_n=1\Omega$
 - C_n consultando las tablas.

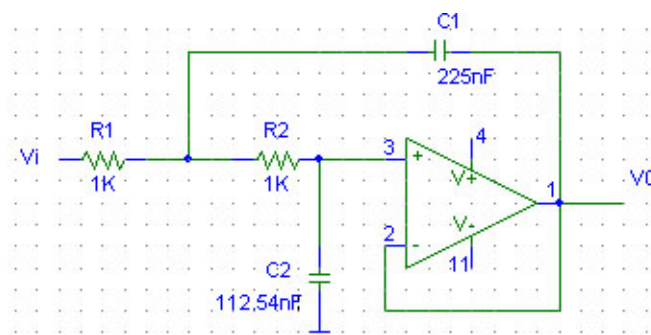


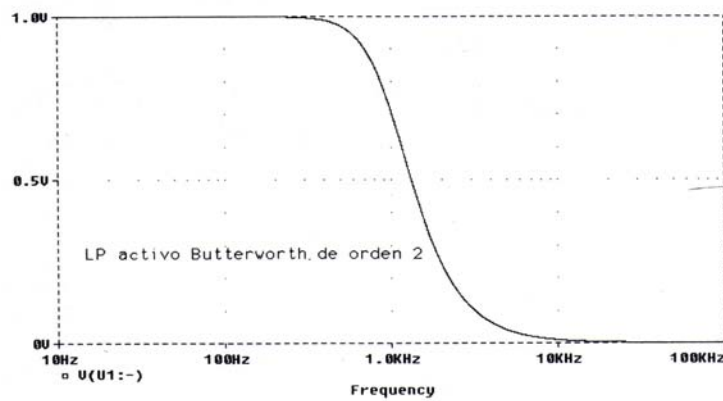
Escalamos $WRC = \omega_n R_n C_n \rightarrow C_i = \frac{C_{ni}}{WR}$

Por tanto:

$$C_1 = \frac{C_{n1}}{WR} = \frac{1.414}{(2\pi * 1000) * (1000)} = 225\text{nF}$$

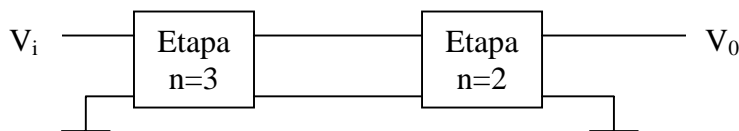
$$C_2 = \frac{C_{n2}}{WR} = \frac{0.7071}{(2\pi * 1000) * (1000)} = 112.54\text{nF}$$





8.- Diseña un filtro LP Butterworth de 5º orden con $f_c=5\text{KHz}$ y una impedancia de entrada de $100\text{K}\Omega$. Utiliza una estructura VCVS.

Cuando un filtro es de orden 4 o superior se construye en dos etapas. Este lo construiremos con una etapa de orden 3 seguida de otra de orden 2.



Construimos filtro normalizado con

$$W_n = 1 \text{ rad/seg}$$

$$R_n = 1\Omega$$

C_n consultando las tablas.

Escalamos $WRC = W_n R_n C_n \rightarrow C_i = \frac{C_{ni}}{WR}$

- Etapa de orden 3:

$$C_1 = \frac{C_{n1}}{WR} = \frac{1.753}{(2\pi * 5000) * (100K)} = 558 pF$$

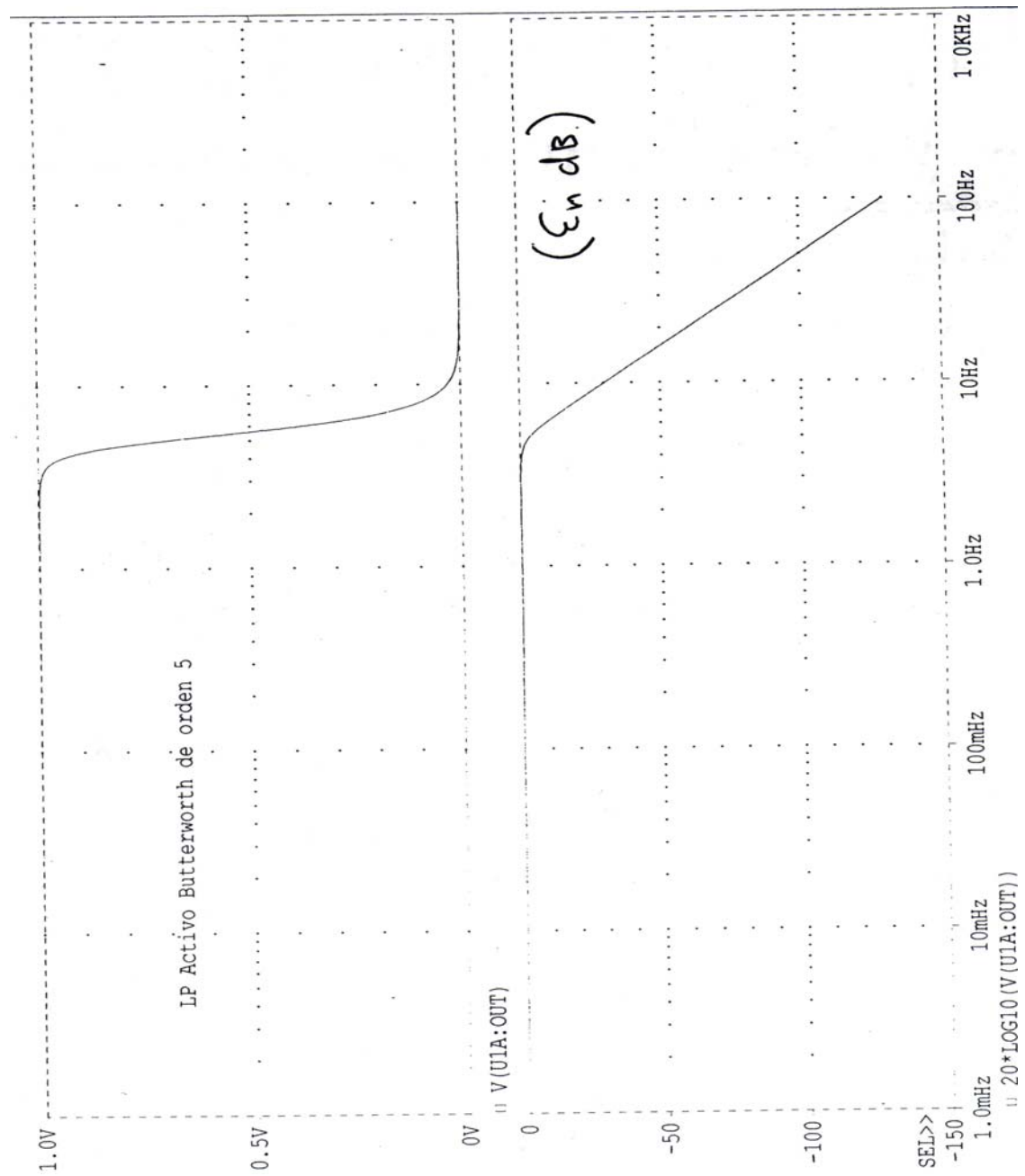
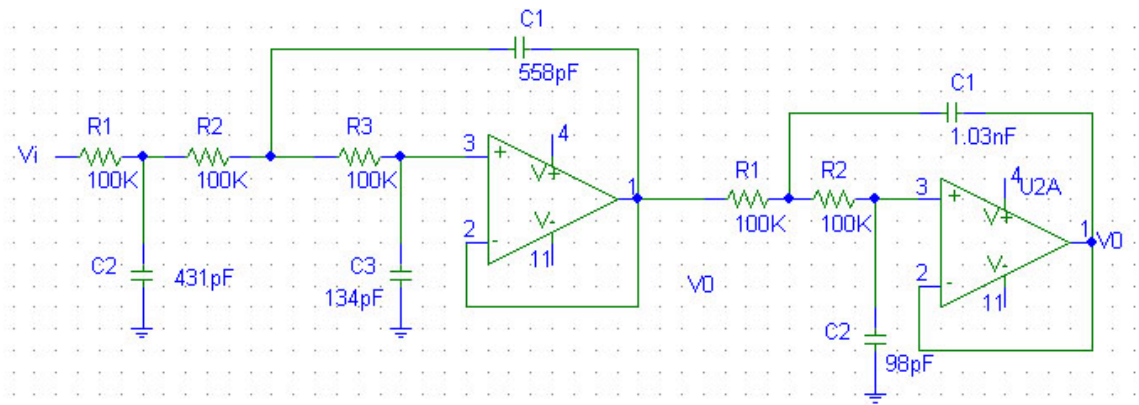
$$C_2 = \frac{C_{n2}}{WR} = \frac{1.354}{(2\pi * 5000) * (100K)} = 431 pF$$

$$C_2 = \frac{C_{n2}}{WR} = \frac{0.421}{(2\pi * 5000) * (100K)} = 134 pF$$

- Etapa de orden 2:

$$C_1 = \frac{C_{n1}}{WR} = \frac{3.235}{(2\pi * 5000) * (100K)} = 1.03 nF$$

$$C_2 = \frac{C_{n2}}{WR} = \frac{0.309}{(2\pi * 5000) * (100K)} = 98 pF$$



9.- Diseña un filtro paso alta (HP) Butterworth de 2º orden con $f_c=100\text{Hz}$ utilizando condensadores de $1\mu\text{F}$.

Utilizaremos una estructura VCVS

1) Fijamos

$$W_c = (2\pi * 100) \text{ rad/seg}$$

$$C = 1\mu\text{F}$$

2) Construimos HP normalizado

$$W_c = 1 \text{ rad/seg}$$

$$C = 1\text{F}$$

$$R_n = 1/C_n$$

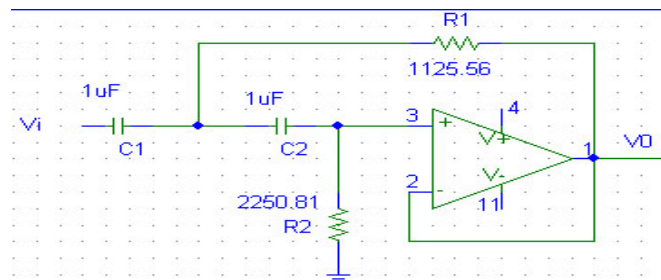
3) Desnormalizamos

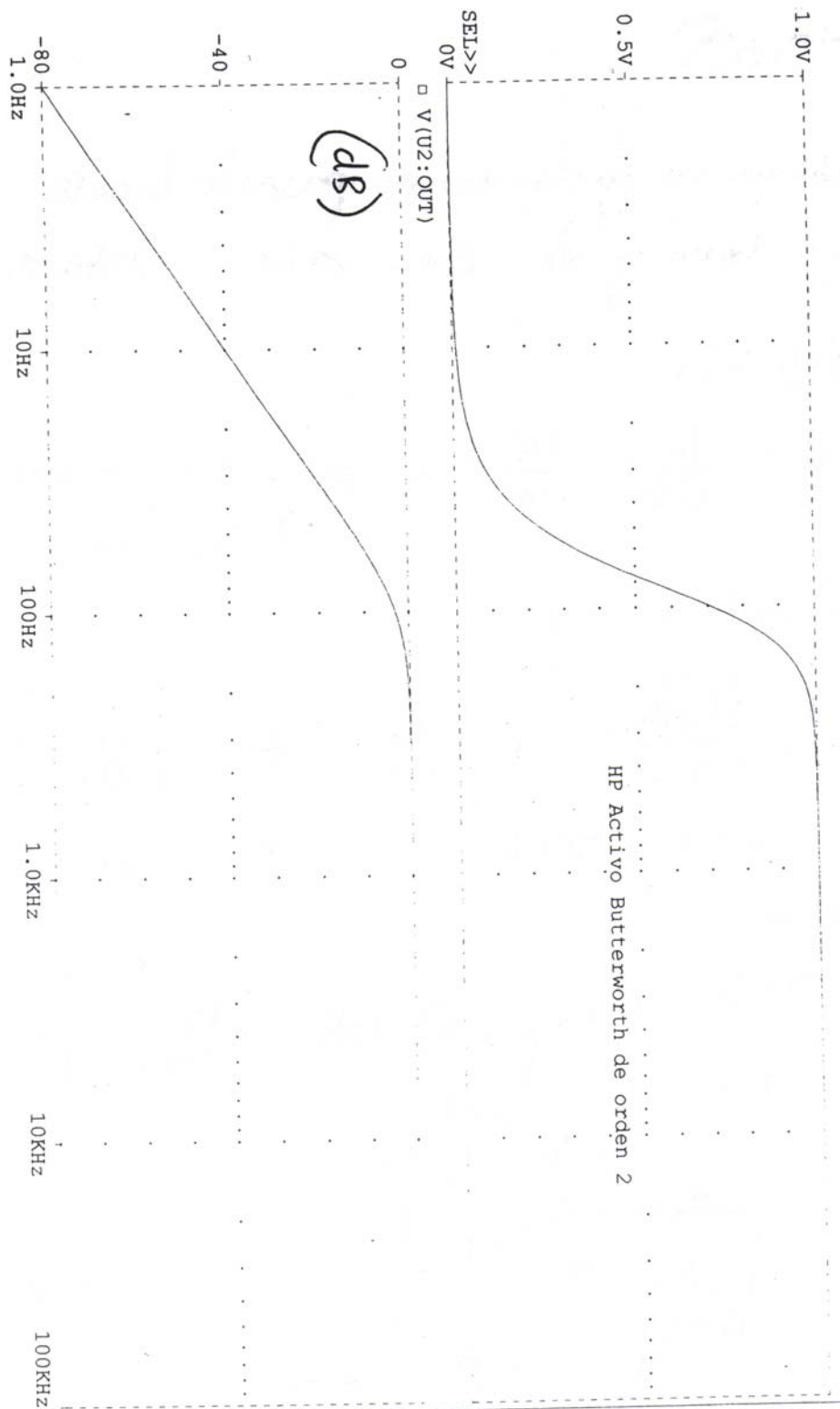
$$WRC = W_n R_n C_n \rightarrow R_i = \frac{1}{W * C * C_n}$$

Entonces:

$$R_1 = \frac{1}{W * C * C_1} = \frac{1}{(2\pi * 100) * (1 * 10^{-6}) * 1.414} = 1125.56\Omega$$

$$R_2 = \frac{1}{W * C * C_1} = \frac{1}{(2\pi * 100) * (1 * 10^{-6}) * 0.7071} = 2250.81\Omega$$





10.- Diseña un filtro activo paso de banda (BP) de orden 2 centrado en 1KHz y de BW=100Hz.

$$Q = \frac{f_0}{BW} = \frac{1KHz}{100Hz} = 10 \rightarrow \text{Mayor a 4 utilizaremos una estructura Bicuadrática}$$

Recordemos que:

$$K = \frac{\sqrt{R_3 R_4}}{R_1} \quad B = \frac{1}{R_2 C} \quad W_0^2 = \frac{1}{R_3 R_4 C^2}$$

$$\text{si hacemos } K=1 \rightarrow R_3=R_4=R_1 \rightarrow W_0^2 = \frac{1}{R_3 R_4 C^2} = \frac{1}{R_1^2 C^2} \rightarrow W_0 = \frac{1}{R C}$$

$$\left. \begin{aligned} 2\pi * f_0 &= \frac{1}{R_1 C} \rightarrow 2\pi * 100 = \frac{1}{R_1 C} \\ 2\pi * BW &= \frac{1}{R_2 C} \rightarrow 2\pi * 1000 = \frac{1}{R_2 C} \end{aligned} \right\} R_2 = 10 * R_1$$

Tomamos $R_3=R_4=R_1= 1K\Omega$

$R_2=10K\Omega$

$$2\pi * 100 = \frac{1}{1 * 10^4 * C} \rightarrow C = \frac{1}{1 * 10^4 * 2\pi * 100} = 159.15nF$$

$$|H(W_0)| = K * Q = 1 * 10 = 10$$

