



2.1 Antecedentes

Un filtro es un elemento que tiene como función separar componentes que se encuentran mezclados, ser capaz de rechazar los indeseables y así darnos como resultado únicamente los deseados.

Desde tiempos pasados los filtros han sido de gran utilidad para las diferentes necesidades del ser humano, Por ejemplo: los sistemas de filtrado de agua, que tienen como función principal separar los contaminantes y dejar pasar el agua ya purificada. Un filtro electrónico tiene como principal utilidad, separar señales de diferentes frecuencias que empleamos para poder sintonizar la estación deseada del radio de audio.

2.2 Filtros electrónicos

Un filtro electrónico es un sistema que tiene como función manipular y modificar el espectro de frecuencia de la señal de entrada para obtener en la salida la función que se requiera aplicar a los diferentes sistemas, entre sus diversas aplicaciones podemos mencionar:

- Demodular señales.
- Ecuilizar y así obtener una calidad de audio con mejor fidelidad.
- Eliminar ruidos en los diferentes sistemas de comunicación.
- Convertir señales muestreadas en señales continuas.
- Detectar señales, como la de la T.V o la radio.

En resumen, los filtros son sistemas de dos puertos, uno de entrada y otro de salida, que funcionan en el dominio de la frecuencia. El espectro de frecuencia de la señal de salida tiene relación directa con respecto a la señal de entrada.



2.3 Historia

Los filtros electrónicos que se fabricaban con resistencias, capacitores e inductores, tienen cálculos son muy complejos y por lo tanto muy laboriosos, por otro lado la ventaja de estos dispositivos es que tienen una muy baja sensibilidad, donde su aproximación es excelente cuando el valor real de cada elemento es diferente al valor ideal. El cambio entre la respuesta esperada del filtro y su respuesta real es muy similar, por lo tanto el filtro se aproxima mucho a la respuesta esperada por el sistema. Estos tipos de filtros que se fabricaban con los dispositivos previamente ya mencionados, fueron introducidos en 1915 tanto en Alemania como en E.U.A. por Wagner y Campbell, respectivamente.

En 1955 los investigadores R. P. Sallen y E. L. Key diseñaron otro tipo de filtros conocidos como Sallen-Key, donde los cálculos matemáticos se simplificaron usando resistencias, capacitores y amplificadores operacionales. La desventaja que presentan es que el valor de la sensibilidad es mucho mayor.

En el transcurso del tiempo la tecnología y la ciencia han avanzado muy rápido y como consecuencia se han inventado mejores métodos para diseñar filtros electrónicos.

2.4 Filtros Pasivos

Aquellos circuitos que utilizan capacitores, inductores y resistencias se les conoce como filtros pasivos, la ventaja de estos filtros como antes lo mencionamos es la baja sensibilidad y su poca disipación de energía.

2.5 Filtros activos

Se les llama filtros activos a los diseños donde se usan amplificadores operacionales. La ventaja de diseñar este tipo de filtro es la eliminación de inductancias, ya que el circuito se reduce tanto en tamaño como en costo.

2.6 Tipos de filtros

Para diseñar el filtro, se debe partir de una serie de especificaciones (debemos tener claro qué función deberá cumplir el filtro).

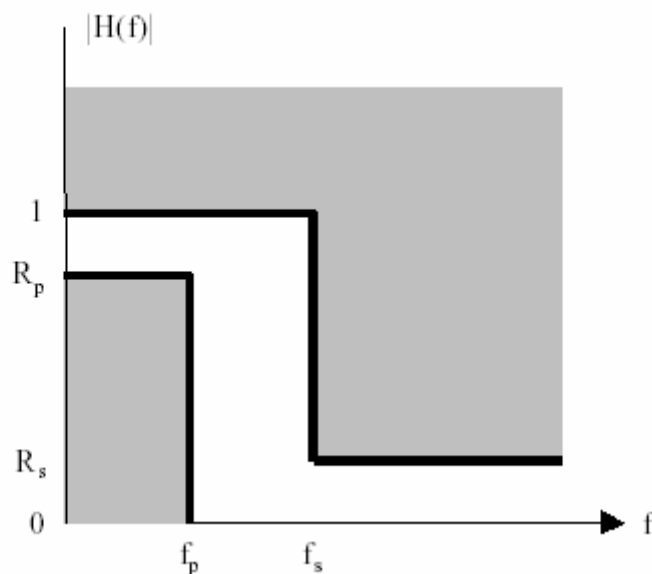


Figura 2.1.a – Especificaciones Generales para un filtro Pasa - Bajas.

En la figura 2.1.a podemos distinguir los cuatro parámetros de interés:

- * f_p Frecuencia final de la banda de paso
- * f_s Frecuencia de inicio de la banda atenuada
- * R_p Rizado máximo que vamos a permitir en la banda de paso (en dB)
- * R_s Atenuación mínima que deseamos en la banda atenuada (en dB)

Nota: La zona entre f_p y f_s es la banda de transición del filtro.

2.6.1 Filtro Pasa - Baja

Este diseño se caracteriza por dejar pasar frecuencias bajas en su banda de paso y rechazar frecuencias altas en la banda de rechazo determinadas por una frecuencia de paso f_p . Así podemos decir que;

- Banda de paso: desde $f = 0$ hasta $f = f_p$
- Banda de rechazo: desde $f = f_s$ hasta $f = \infty$

Donde f_p = frecuencia de paso y f_s = frecuencia de rechazo.

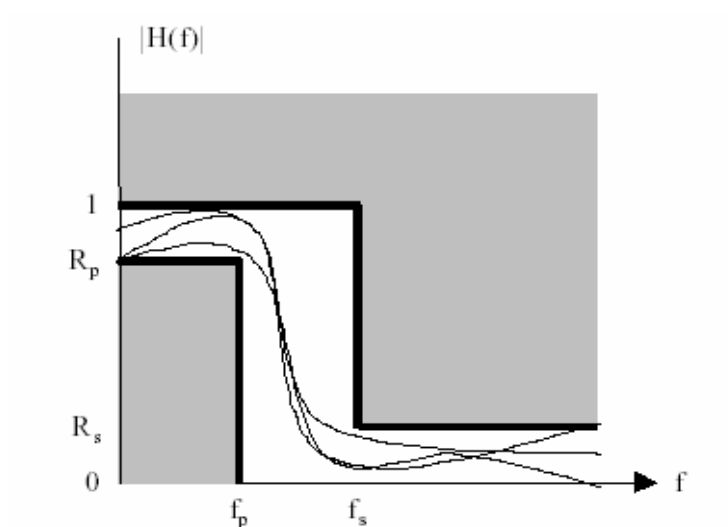


Figura 2.1.b – Especificaciones para un filtro Pasa - Bajas.

2.6.2 Filtro Pasa - Alta

A diferencia del Filtro Pasa – Baja este diseño deja pasar frecuencias altas en su banda de paso y rechaza frecuencias bajas en su banda de rechazo;

- Banda de paso: desde $f = f_p$ hasta $f = \infty$
- Banda de rechazo: desde $f = 0$ hasta $f = f_s$

Donde; $f_s < f_p$

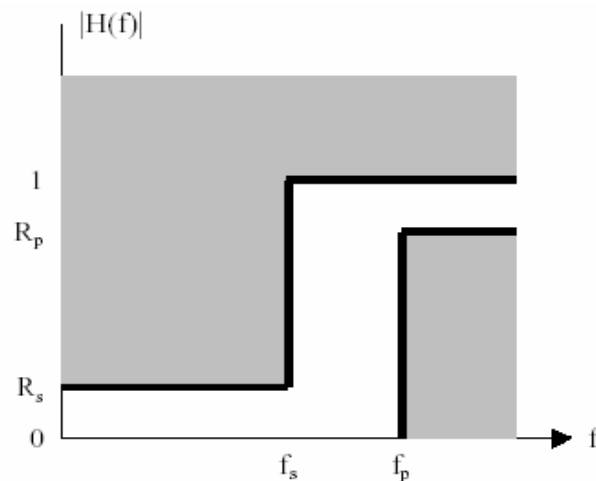


Figura 2.1.c – Especificaciones para un filtro Pasa - Altas.

2.6.3 Filtro Pasa - Banda

En este diseño encontramos dos bandas de rechazo, una superior y otra inferior que define la banda de paso.

- Banda de paso: desde $f = f_{p1}$ hasta $f = f_{p2}$
- Banda de rechazo: desde $f = 0$ hasta $f = f_{s1}$

Desde $f = f_{s2}$ hasta $f = \infty$

$$f_{s1} < f_{p1} < f_{p2} < f_{s2}$$

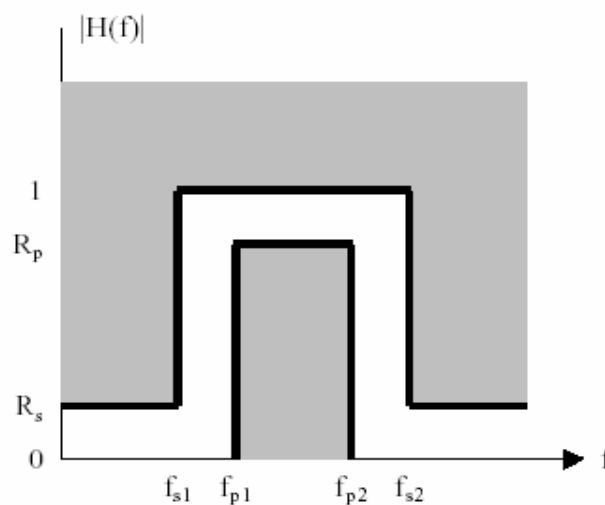


Figura 2.1.d – Especificaciones para un filtro Pasa - Banda.

2.6.4 Filtro Rechaza - Banda

El filtro Rechaza – Banda tiene una banda de paso inferior, una banda de rechazo y otra banda de paso superior.

- Banda de paso: desde $f = 0$ hasta $f = f_{p1}$

Desde $f = f_{p2}$ hasta $f = \infty$

- Banda de rechazo: $f = f_{s1}$ hasta $f = f_{s2}$

Donde f_p = frecuencia de paso y f_s = frecuencia de rechazo

$f_{p1} < f_{s1} < f_{s2} < f_{p2}$

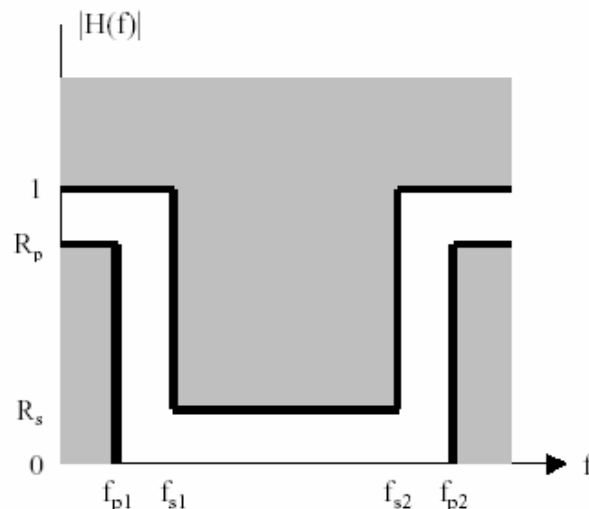


Figura 2.1.e – Especificaciones para un filtro Rechaza - Banda.

2.7 Selección de la técnica de diseño

En las figuras anteriores se mostró la magnitud de cada tipo de filtro. El problema es que esas representaciones son ideales y en la realidad tenemos variaciones de acuerdo a la aproximación utilizada para diseñar el filtro. A continuación veremos las diferentes aproximaciones que existen:

- Aproximación Butterworth

- Aproximación Chebychev

- Aproximación Chebychev inversa
- Aproximación Cauer

2.7.1 Aproximación Butterworth

La aproximación Butterworth se caracteriza por disminuir o aumentar la frecuencia, tiene magnitud plana en $f = 0$, donde los polos se encuentran alrededor del círculo unitario en el plano imaginario y todos sus ceros están en el infinito.

Si se desea una banda pasante máximamente plana, entonces forzamos a que $K(j\omega)$ y sus primeras derivadas sean nulas en el origen:

$$|K(j0)| = 0 \quad y \quad \frac{d^i}{(d\omega^2)^i} \left[\frac{|K(j\omega)|^2}{1 + |K(j\omega)|^2} \right]_{\omega=0} = 0 \quad i = 1, 2, \dots \quad (2.1.a)$$

Derivando e igualando a cero en el origen, se deduce que para cumplir la Ec.2.1.a, todos los ceros de reflexión deben estar en el origen, por tanto:

$$|H(j\omega)|^2 = \frac{1}{1 + |K(j\omega)|^2} = \frac{|N(j\omega)|^2}{|N(j\omega)|^2 + \varepsilon^2 \omega^{2n}} \quad (2.1.b)$$

Un caso especial que da lugar a los denominados *filtros de Butterworth* se tiene para $|N(j\omega)| = 1$, entonces:

$$|H(j\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 \omega^{2n}} \quad \begin{aligned} \varepsilon^2 &= 10^{0.1A_p} - 1 \\ A_s &= -10 \log_{10}(1 + \varepsilon^2 \omega_s^{2n}) \end{aligned} \quad (2.1.c)$$

Despejando n de la Ec.2.1.c se obtiene el orden del filtro

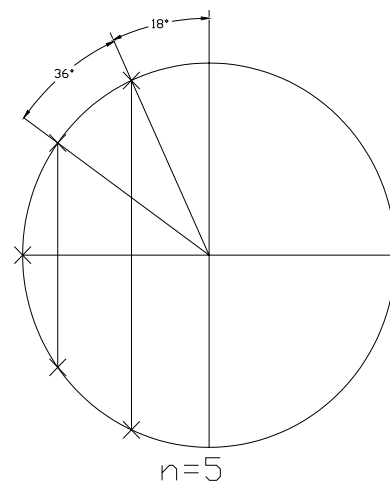
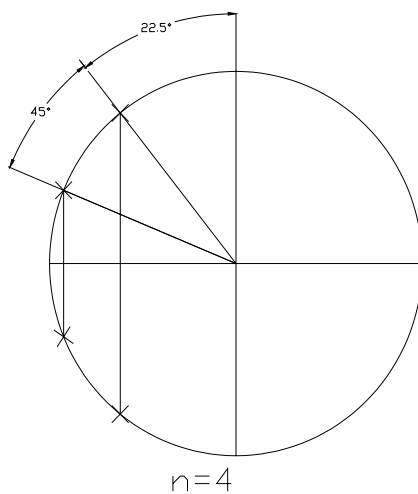
$$n \geq \frac{\log_{10} [\varepsilon^{-2} (10^{0.1A_s} - 1)]}{2 \log_{10} \omega_s} \quad (2.1.d)$$

Capítulo 2. Filtros.

Factorizando $H(j\omega)$ y reteniendo sólo los polos del semiplano real negativo queda:

$$P_k = \varepsilon^{1/n} e^{j \frac{2k+n-1}{2n} \pi} \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (2.1.e)$$

Es decir, los polos están uniformemente espaciados en la circunferencia de radio $\varepsilon^{1/n}$ separados $180^\circ/n$.



$$\pi/8 = 22.5^\circ \quad \pi/4 = 45^\circ$$

$$\pi/5 = 36^\circ \quad \pi/10 = 18^\circ$$

Figura 2.2. Posición de los polos en un filtro de Butterworth.

a) número par de polos, b) número impar de polos.

2.7.2 Aproximación Chebyshev

Esta aproximación tiene como función de transferencia una magnitud con máximos y mínimos en la banda de paso, esto produce que el orden del filtro se reduzca en comparación con un filtro Butterworth. En la banda de rechazo ésta función es monótona y en la banda de paso tiene un número de rizados dependientes del orden del filtro. Así mismo los polos Chebyshev están más cerca del eje $j\omega$ que los polos de funciones Butterworth y se encuentran en una elipse.

Es más eficiente repartir el error de aproximación de una forma continua a lo largo de la banda pasante, lo que se consigue escogiendo:

$$|K(j\omega)|^2 = \varepsilon^2 C_n^2(\omega) \quad (2.2.a)$$

donde $C_n^2(\omega)$ es un polinomio que oscila entre -1 y 1 para $0 \leq |\omega| \leq 1$, llamando polinomio Chebyshev.

Si escogemos $C(\omega) = \cos(n\Phi(\omega))$ con $\Phi(\omega) = \arccos \omega$, tenemos los filtros de Chebyshev.

$$|H(j\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 C_n^2(\omega)} \quad (2.2.b)$$

De una manera general:

$$C_n(\omega) = \begin{cases} \cos(n \cdot \arccos \omega) & |\omega| \leq 1 \\ \cosh(n \cdot \arccos h\omega) & |\omega| > 1 \end{cases} \quad (2.2.c)$$

Los polinomios denominadores de los filtros de Chebyshev y sus ceros se encuentran tabulados para diferentes valores de ε y n .

Para determinar ε y n , de las especificaciones del filtro y de la Ec.2.2.c:

$$\varepsilon = \sqrt{10^{0.1A_p} - 1} \quad \text{y} \quad 10 \log_{10} \frac{1}{1 + \varepsilon^2 C_n^2(\omega_s)} = A_s \text{ en dB} \quad (2.2.d)$$

que se transforma en

$$n \geq \frac{\arccos h \left(\sqrt{\frac{(10^{0.1A_s} - 1)}{\varepsilon^2}} \right)}{\arccos h(\omega_s)} \quad (2.2.f)$$

También se puede determinar n a partir de gráficas normalizadas obtenidas por diferentes valores de ε .

2.7.3 Aproximación Chebyshev inversa

A diferencia de la característica de Chebyshev, ésta aproximación es monótona en la banda de paso, tiene rizados en la banda de rechazo y ceros finitos sobre el eje $j\omega$ lo que provoca que sus realizaciones sean más complicadas que las de una función Chebyshev. Este tipo de aproximación también se conoce como Chebyshev II.

Si se desea una banda pasante monótona y una banda de atenuación con rizado constante, entonces usaremos los denominados *Filtros Inversos de Chebyshev*, cuya función característica viene dada por:

$$|H(j\omega)|^2 = \frac{\varepsilon^2 C_n^2\left(\frac{1}{\omega}\right)}{1 + \varepsilon^2 C_n^2\left(\frac{1}{\omega}\right)} \quad (2.3.a)$$

donde se supone el filtro normalizado de manera que $\omega = 1$ rad/s es el borde de la banda de atenuación. Los filtros inversos de Chebyshev tienen una banda pasante máximamente monótona y ceros de transmisión finita localizados en $C_n\left(\frac{1}{\omega}\right) = 0$

Los filtros inversos de Chebyshev son tan eficientes como los filtros directos de Chebyshev en aproximar unas especificaciones de magnitud, pero su comportamiento en fase y retraso es muy diferente. En general, los filtros inversos de Chebyshev tienen factores de calidad de los polos menores que los filtros directos, por lo que tienen un retraso más uniforme. Esto los hace preferibles en la realización de filtros de video y/o datos en los que es importante obtener un retraso uniforme. Si las especificaciones de retraso no son importantes se prefieren normalmente los filtros directos de Chebyshev.

2.7.4 Funciones Racionales Chebyshev

La función de magnitud al cuadrado general está dada por

$$|N(j\omega)|^2 = \frac{H^2}{1 + \varepsilon^2 P_n^2(\omega)} \quad (2.4.a)$$

donde la función $P_n(\omega)$ es un polinomio de grado n para filtros Butterworth, Chebyshev y una función racional para filtros Chebyshev Inverso. Para el caso de filtros elípticos, esta función también es racional ya que esta es la única forma de $P_n(\omega)$ que nos daría ceros de transmisión. En este capítulo denotaremos a dicha función racional $R_n(\omega)$. De esta manera la Ec.2.4.a se escribe como

$$|N(j\omega)|^2 = \frac{H^2}{1 + \varepsilon^2 R_n^2(\omega)} \quad (2.4.b)$$

La forma de la función racional se debe escoger de tal manera que satisfaga las propiedades de rizo igual en las bandas de paso y de rechazo. Una función que satisface esto se conoce como *función Chebyshev racional* y tiene la forma general

$$R_n(\omega) = M \prod_{i=1}^{\frac{n}{2}} \frac{\omega^2 - \Omega_{Pi}^2}{\omega^2 - \Omega_{Ci}^2} \quad n \text{ par}$$

$$R_n(\omega) = M \omega \prod_{i=1}^{\frac{n-1}{2}} \frac{\omega^2 - \Omega_{Pi}^2}{\omega^2 - \Omega_{Ci}^2} \quad n \text{ impar} \quad (2.4.c)$$

En el cual Ω_{Pi} son los valores de ω donde la función racional vale cero y de la Ec.2.4.b son los valores en lo que la magnitud obtiene un máximo. Las cantidades Ω_{Ci} son los valores de ω cuando la función racional se hace infinita y de la Ec.2.4.b son los valores de ω donde la magnitud se hace cero, es decir, los valores Ω_{Ci} corresponden a los ceros de la función de transferencia. Estos parámetros se determinan mediante el uso de funciones elípticas de Jacobi y le dan el nombre a este tipo de filtros por lo cual se les conoce como *Filtros Elípticos*.

2.7.5 Funciones Elípticas

Para determinar las funciones de magnitud con característica elíptica realizamos una continuación analítica en la magnitud al cuadrado de la Ec.2.4.b usando la forma necesaria de $R_n(\omega)$ según sea el orden par o impar y dada por las Ecs.2.4.c. Este procedimiento nos lleva a una función $N(s)$ dada para n impar por

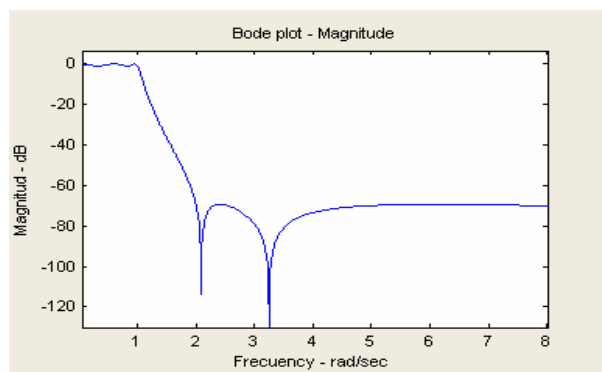
$$N_I(s) = H_0 \frac{\prod_{i=1}^{\frac{n-1}{2}} (s^2 + \Omega_{Ci}^2)}{a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + \dots + s^n} \quad (2.5.a)$$

y para n par

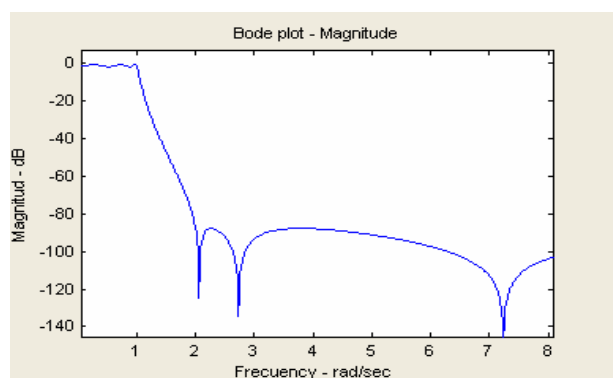
$$N_P(s) = H_0 \frac{\prod_{i=1}^{\frac{n}{2}} (s^2 + \Omega_{ai}^2)}{a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + \dots + s^n} \quad (2.5.b)$$

Gráficas de $|N(j\omega)|$ para funciones de quinto y sexto orden se muestran en la Fig. 2.3.a. De estas figuras observamos que la regla para determinar el orden de una función elíptica a partir de su gráfica es la misma que para el caso Chebyshev, es decir, solo es necesario contar el número de máximos en la banda de paso y multiplicar este número por dos. Para el caso impar el máximo en $\omega=0$ se cuenta como medio máximo, en el mismo caso existen $(n-1)/2$ ceros de transmisión más un cero en el infinito, mientras que para el caso par existen $n/2$ ceros de transmisión y no hay ceros en el infinito.

Para los filtros elípticos existe una realización pasiva escalera, estos circuitos pasivos se pueden obtener a partir de la información de las funciones de transferencia y característica. Para el caso de orden impar es posible obtener una realización pasiva escalera con inductores positivos y capacitores positivos y con doble terminación resistiva del mismo valor.



a)



b)

Fig.2.3.a Filtro elíptico .a) orden impar (orden 5) , (b) orden par (orden 6).

Para orden par esto no es posible, es decir, algunos de los inductores serán negativos obligando al uso de inductancias mutuas que se realizan con transformadores. Evidentemente el uso de transformadores es indeseable ya que son más costosos y voluminosos que los inductores, por lo tanto este tipo de función de transferencia sólo es adecuado para realizaciones activas. Esta desventaja de los filtros elípticos de orden par se debe a que la función de transferencia no tiene un cero en el infinito como es el caso del orden impar; para corregir ésta del orden par y tener una realización pasiva con inductores positivos se realiza una transformación de la variable s , que modifica la función de transferencia de tal manera que el cero de mayor magnitud se corre hasta el infinito.

La nueva función $R_n(\omega)$ se modifica a

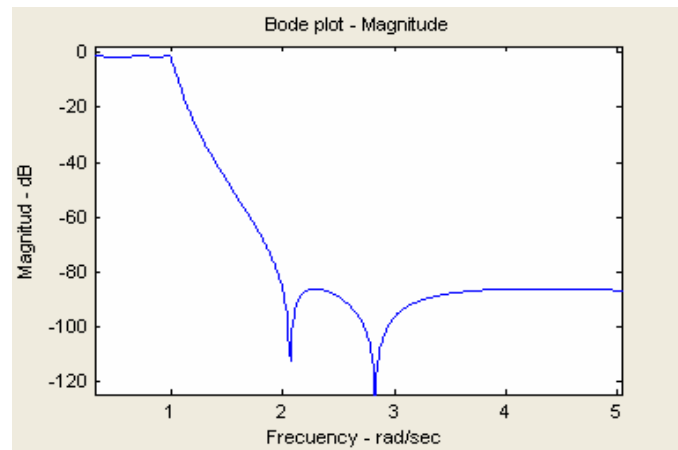
$$R_{nB}(\omega) = M \frac{\prod_{i=1}^{\frac{n}{2}} (\omega^2 - \Omega_{p_i}^2)}{\prod_{i=1}^{\frac{n}{2}} (\omega^2 - \Omega_{z_i}^2)} \quad (2.5.c)$$

que a su vez cambia la función de transferencia a

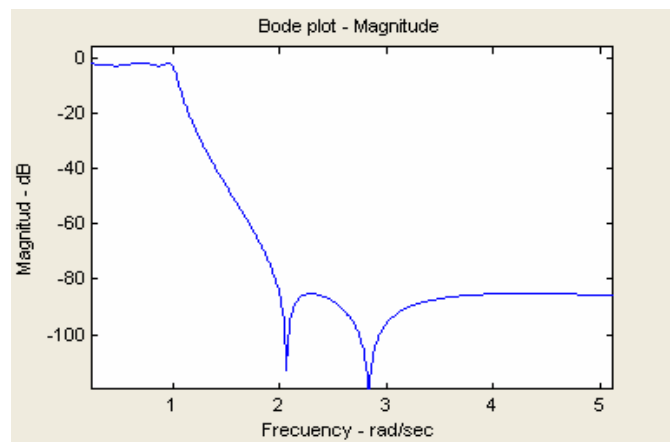
$$N_B(s) = H_B \frac{\prod_{i=1}^{\frac{n-1}{2}} (s^2 + \Omega_{bi}^2)}{b_0 + b_1 s + b_2 s^2 + \dots + s^n} \quad (2.5.d)$$

Para distinguir los dos tipos de funciones de transferencia, a este último caso le llamamos *tipo B* y al primer caso, donde se obtienen elementos negativos le llamamos *tipo A*. Una gráfica de una función de transferencia tipo *B* se muestra en la Fig.2.3.b para $n=6$, en donde observamos que la banda de paso tiene el mismo número de máximos y mínimos para los dos tipos de funciones, mientras que en la banda de rechazo observamos que la nueva

función tiene un doble cero en el infinito. (Nótese que el numerador es de grado $n-2$). El precio que hay que pagar para este nuevo tipo *B* de funciones de transferencia es que el valor de la frecuencia donde empieza la banda de rechazo ω_s se incrementa ligeramente a un valor $\omega_{sB} > \omega_{sA}$.



a)



(b)

Fig. 2.3.b) Filtro de orden par tipo B, b) Filtro de orden par tipo C.

Para la realización pasiva ya podremos obtener un circuito con todos sus elementos positivos, sin embargo, las resistencias terminales tendrán que ser distintas, lo cual es una consecuencia de que para frecuencia cero la función de transferencia no obtiene un máximo. Al obtener una realización con resistencias terminales iguales, como es el caso de filtros de orden impar, es

Capítulo 2. Filtros.

necesario que la función de transferencia tenga un máximo en $\omega=0$. Para lograr esto realizamos otra transformación que realice un corrimiento del primer máximo hacia el origen, una vez realizada esta transformación la función racional resultante tendrá la forma

$$R_{nC}(\omega) = M_C \frac{\omega^2 \prod_{i=1}^{\frac{n-1}{2}} (\omega^2 - \Omega_{pi}^2)}{\prod_{i=1}^{\frac{n-1}{2}} (\omega^2 - \Omega_{zi}^2)} \quad (2.5.e)$$

y la función de transferencia será

$$N_C(s) = H_C \frac{\prod_{i=2}^{\frac{n}{2}} (s^2 + \Omega_{ci}^2)}{c_0 + c_1 s + c_2 s^2 + \dots + s^n} \quad (2.5.f)$$

A esta nueva clase de funciones de transferencia se les denomina *tipo C*.

Determinación del Orden

Para determinar el orden necesario de una función elíptica que satisfaga un conjunto de especificaciones, no podemos proceder como en el caso de las aproximaciones Butterworth o Chebyshev por que no estamos obteniendo expresiones analíticas de los parámetros elípticos, sin embargo, existe un procedimiento para determinar el orden el cual empieza calculando los siguientes parámetros:

$$\Omega = \frac{\omega_s}{\omega_p} = \frac{f_s}{f_p} \quad M = \sqrt{\frac{10^{0.1A_{min}} - 1}{10^{0.1A_{max}} - 1}} \quad (2.5.f)$$

El orden del filtro elíptico necesita primero calcular las cantidades

$$C(M) = \frac{1}{16M^2} \left(1 + \frac{1}{2M^2} \right) \quad (2.5.i)$$

$$D(\Omega) = \frac{\sqrt{\Omega} - 1}{2(\sqrt{\Omega} + 1)} \quad (2.5.h)$$

El orden está dado por

$$n_E = F_E(C) F_E(D) \quad (2.5.i)$$

donde

$$F_E(x) = \frac{1}{\pi} \ln(x + 2x^5 + 15x^9) \quad (2.5.j)$$

Realizaciones pasivas para Filtros Elípticos

De la misma forma que con las otras clases de aproximaciones para los filtros elípticos existe una realización pasiva escalera. Dado que las funciones de transferencia elípticas tienen ceros complejos conjugados, los circuitos tendrán ramas de inductor y capacitor en paralelo. La Fig.2.3.c muestra los circuitos elípticos para ordenes par e impar.

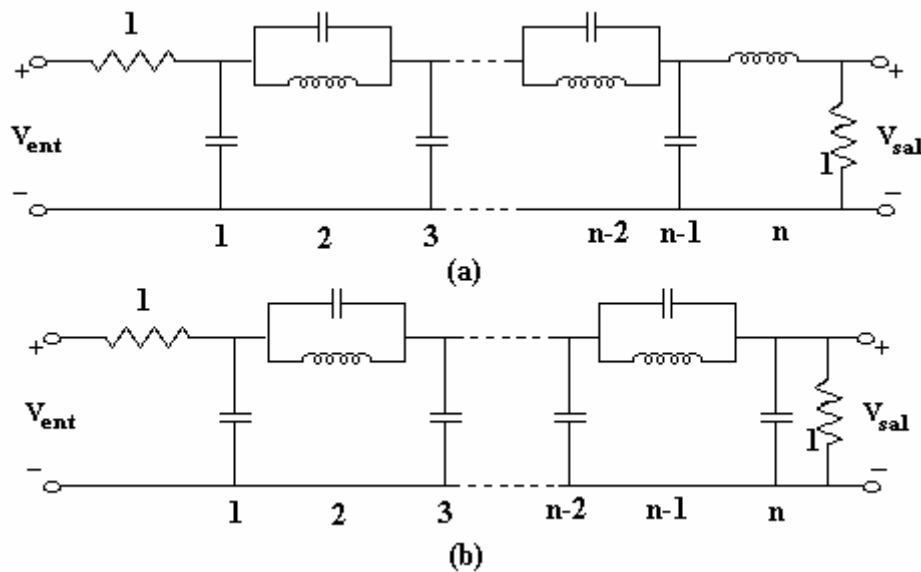


Fig. 2.3c Circuitos pasivos para filtros elípticos. a) orden par, b) orden impar.

Método para realizar el circuito Tipo Escalera

La síntesis de redes LC con resistencia de salida son importantes en el diseño de redes. Para simplificar sólo se va a generar impedancias normalizadas a la unidad. Únicamente para el orden impar y caso 3 para el orden par, la realización pasiva escalera van a tener resistencias iguales y el caso 2 para el orden par la resistencia de salida es diferente a la resistencia de entrada, estos se forman a partir de los siguientes parámetros:

$E(s)$ = Polinomio del denominador de la función de transferencia.

$E(s) = E_e(s) + E_o(s)$

$E_e(s)$ = Parte Par

$E_o(s)$ = Parte Impar

$F(s)$ = Polinomio que se forma a partir con los máximos de la banda de paso.

$F(s) = F_e(s) + F_o(s)$

$F_e(s)$ = Parte Par

$F_o(s)$ = Parte Impar

$$z_{11} = \frac{E_e - F_e}{E_o + F_o} \quad (2.6.a)$$

$$z_{22} = \frac{E_e + F_e}{E_o + F_o} R_2 \quad (2.6.b)$$

$$y_{11} = \frac{E_e + F_e}{E_o - F_o} \quad (2.6.c)$$

$$y_{22} = \frac{E_e - F_e}{E_o - F_o} \frac{1}{R_2} \quad (2.6.d)$$

$$z_1 = \frac{E - F}{E + F} \quad (2.6.e)$$

2.8 Sensitividad

Teóricamente existen filtros ideales al analizar y calcular sus especificaciones, sin embargo en la vida real esto no es posible, ya que siempre habrá pérdidas por ello al realizar los diseños requeridos dependiendo de su operación, hacemos aproximaciones al más cercano del comportamiento ideal.

Los elementos electrónicos tienen una cierta tolerancia, es decir no tienen su valor ideal. Esto crea fallas en el comportamiento del circuito, a mayor fallas la sensibilidad es mayor y entre menos fallas existan habrá una sensibilidad menor como en los elementos pasivos. Para conocer los cambios de comportamiento de un circuito es necesario hacer un análisis de sensibilidad que se realiza con la siguiente fórmula.

$$\frac{\Delta F}{F} = S_x^F \frac{\Delta x}{x} \quad (2.7)$$

2.8 Orden de un Filtro

Cuando las aproximaciones explicadas anteriormente son realizadas dependiendo del número de componentes empleados, pueden saber el orden del circuito. Entre mayor sea el orden el filtro se comportará de una forma más próxima a la ideal. Se puede apreciar en la figura 2.4.a una aproximación Butterworth con diferentes órdenes, cuando el orden llega hasta 6, la

frecuencia de corte se realiza de una manera rápida con una pendiente más pronunciada.

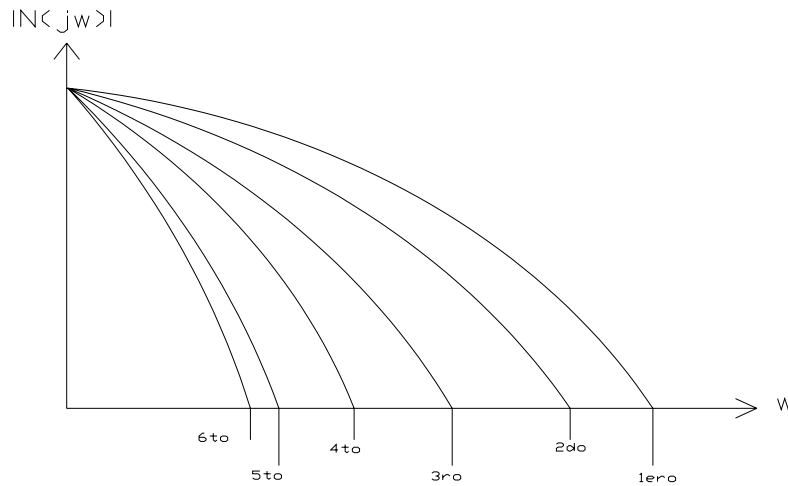


Figura 2.4 Aproximación Butterworth para diferentes órdenes

2.9 Transformación de frecuencia.

A partir del diseño de un filtro paso - bajo, pueden obtenerse filtros paso-alto, paso-banda y rechazo-banda que cumplan especificaciones similares mediante el uso de transformaciones. Denotemos ω y s , donde s es la frecuencia y la variable del filtro paso-bajo prototipo normalizado en $\omega_p = 1 \text{ rad/s}$.

2.9.1 Paso-Bajo a Paso-Alto (LP \rightarrow HP).

$$\omega \rightarrow \frac{1}{\omega} \quad s \rightarrow \frac{1}{s} \quad (2.8)$$

Ejemplo: Filtro de tercer orden de Chebyshev con 0.5 dB de rizado en la banda pasante.

$$H_{LP}(s) = \frac{0.716}{s^3 + 1.25s^2 + 1.535s + 0.716}; \quad s \rightarrow \frac{1}{s}$$

$$H_{LP}(s) = \frac{0.716s^3}{0.716s^3 + 1.535s^2 + 1.253s + 1}$$

Claramente, una frecuencia característica que originalmente estaba en ω_a ahora pasa a estar en $\omega_a = 1/\omega_a$

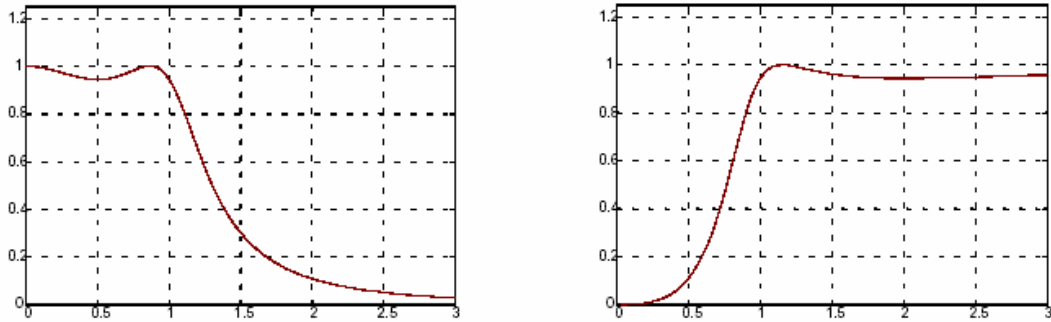


Fig. 2.5.a Transformación de filtro paso-bajo del ejemplo en filtro paso-alto.

2.9.2 Paso-Bajo a Paso-Banda ($LP \rightarrow BP$)

En este caso se duplica el orden del filtro. Si

$$\Omega_0 = \sqrt{\Omega_{CH}\Omega_{CL}} \quad (2.9.a)$$

es la frecuencia central del filtro, la transformación viene dada por:

$$\omega \rightarrow \frac{\Omega_0}{B} \cdot \frac{\omega^2 - 1}{\omega}; \quad \bar{s} \rightarrow \frac{\Omega_0}{B} \cdot \frac{s^2 + 1}{s}; \quad B = \Omega_{CH} - \Omega_{CL} \quad (2.9.b)$$

donde $Q = \frac{\Omega_0}{B}$ es el factor de calidad. Haciendo la transformación al filtro pasa-baja nos queda:

$$H_{BP}(s) = \frac{0.716s^3}{Q^3s^6 + 1.25Q^2s^5 + (3Q^3 + 1.535Q)s^4 + (2.506Q^2 + 0.716)s^3 + (3Q^3 - 1.535Q)s^2 + 1.253Q^2s - Q^3}$$

Capítulo 2. Filtros.

Una frecuencia característica que estaba originalmente en $\bar{\omega}_a$ ahora se desdobra en dos frecuencias ω_{a1}, ω_{a2} tal que

$$\omega_a = \frac{\Omega_0}{B} \frac{\omega^2 - 1}{\omega} \rightarrow \omega_{a1}, \omega_{a2} = \frac{\omega_a}{2Q} \pm \sqrt{\left(\frac{\omega_a}{2Q}\right)^2 - 1} \quad (2.9.c)$$

2.9.3 Paso-Bajo a Rechazo-Banda ($LP \rightarrow BR$).

Nuevamente se duplica el orden del filtro. La transformación viene dada por:

$$\omega = \frac{B}{\Omega_0} \cdot \frac{\omega}{\omega^2 - 1}; \quad s = \frac{1}{\varphi} \cdot \frac{s}{s^2 - 1} \quad \text{con} \quad Q = \frac{\Omega_0}{B} \quad (2.10.a)$$

El filtro queda centrado en:

$$\Omega_0 = \sqrt{\Omega_{CH} \Omega_{CL}} \quad \text{rechazo de banda una con } B = \Omega_{CH} - \Omega_{CL} \quad (2.10.b)$$

Una frecuencia característica $\bar{\omega}_a$ pasa a convertirse en un par ω_{1a}, ω_{2a} , tal que:

$$\omega_{1a}, \omega_{2a} = \frac{1}{2Q\omega_a} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2Q\omega_a}\right)^2 - 1} \quad (2.10.c)$$

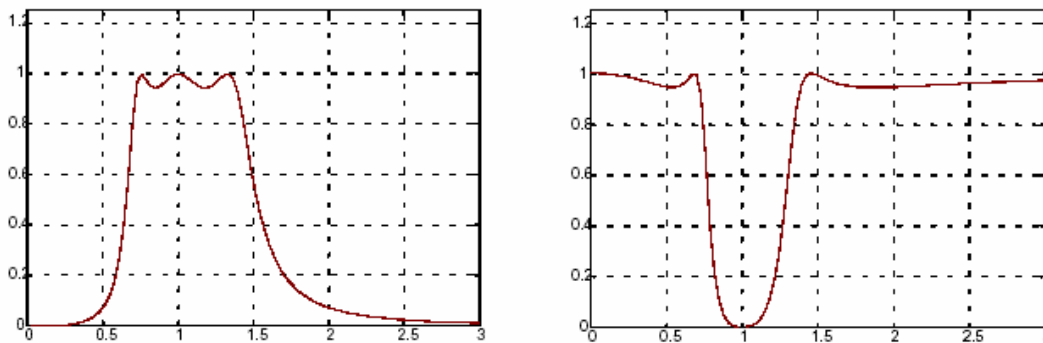


Figura 2.5.b Transformación del filtro paso-bajo del ejemplo en filtro
paso-banda y rechazo-banda con $1 \Omega_0 = 1$ y $Q = 1.5$

2.9.4 Tipos de transformaciones

El diseño de filtros pasa - alta se puede realizar usando como prototipo un filtro pasa - baja y realizando un cambio de variable o transformación. La transformación para convertir un filtro pasa -baja a pasa - alta está dada por

$$s = \frac{1}{p} \quad (10.11.a)$$

Si ahora la transformación pasa - baja a pasa - alta se la aplicamos a los elementos de un circuito, sólo serán afectados aquellos parámetros que dependen de la variable s . Ya que todo elemento está caracterizado por su impedancia, únicamente serán afectados los capacitores y los inductores. Si $Z_C(s)=1/sC$ y $Z_L(s)=sL$ son las impedancias de interés, estas se modificarán de la siguiente manera:

$$Z_C(s) = Z_C\left(\frac{1}{p}\right) = \frac{p}{C} = p\left(\frac{1}{C}\right) \quad (10.11.B)$$

$$Z_L(s) = Z_L\left(\frac{1}{p}\right) = \frac{1}{p}L = \frac{1}{p\left(\frac{1}{L}\right)} \quad (10.11.C)$$

De estas ecuaciones, vemos que las impedancias del capacitor e inductor se convierten en impedancias de inductor y capacitor, respectivamente, al aplicar la transformación pasabajas a pasaltos. La Fig. 2.6.a ilustra este cambio.

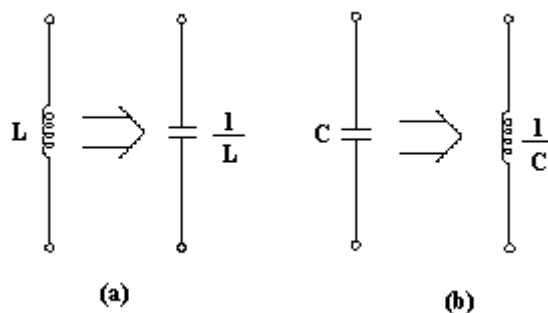


Fig.2.6.a Transformación de elementos de filtro pasabajas a filtro pasaltos.

Para encontrar como se cambian los elementos de un circuito al aplicar la transformación pasa - bajas a pasa - banda, procedemos de manera similar al caso pasa - altas realizando el cambio de variable en las impedancias de los elementos. Para el inductor obtenemos que

$$Z_L(s) = sL = Z_L \left(\frac{p}{B} + \frac{\omega_0^2}{pB} \right) = \frac{pL}{B} + \frac{\omega_0^2 L}{pB} \quad (10.11.d)$$

de donde vemos que el primer término del lado derecho corresponde a un inductor de valor L/B y el segundo término corresponde a un capacitor de valor $B / L\omega_0^2$, con estos dos elementos conectados en serie. La Fig.2.6.b ilustra esta transformación del inductor. Para el capacitor consideremos su admitancia realizando el cambio de variable y así obtenemos

$$Y_C(s) = sC = Y_C \left(\frac{p}{B} + \frac{\omega_0^2}{pB} \right) = \frac{pC}{B} + \frac{\omega_0^2 C}{pB} \quad (10.11.e)$$

En este caso el primer término del lado derecho corresponde a un capacitor de valor C/B y el segundo término corresponde a un inductor de valor $B / C\omega_0^2$. Por tratarse de una admitancia, los nuevos elementos están conectados en paralelo como se aprecia en la Fig.2.6.b.

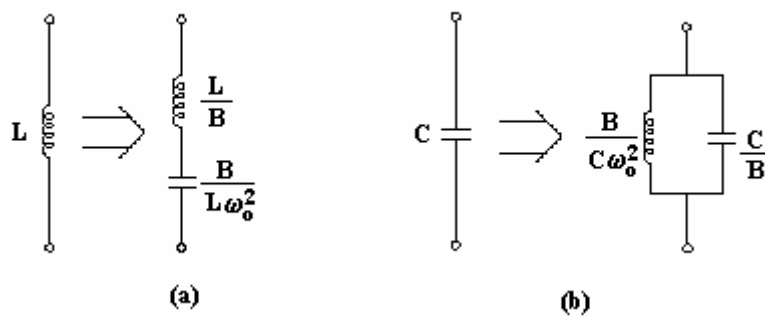


Fig.2.6.b Transformación de elementos bajo la transformación pasabajas a pasabanda.

Los elementos L y C del circuito pasivo también serán transformados. Para el inductor tenemos que su impedancia $Z_L(s)=sL$ se transformará en

$$Z_L(s) = sL \Rightarrow \frac{pBL}{p^2 + \omega_o^2} = \frac{1}{\frac{p}{BL} + \frac{\omega_o^2}{pBL}} = \frac{1}{p\left(\frac{1}{BL}\right) + \frac{1}{p\frac{BL}{\omega_o^2}}} = Z(p) \quad (1.11.f)$$

que corresponde a un inductor de valor BL/ω_o^2 en paralelo con un capacitor de valor $1/BL$. Para el caso del capacitor su admitancia $Y_C(s)=sC$ se transforma en

$$Y_C(s) = sC \Rightarrow \frac{pBC}{p^2 + \omega_o^2} = \frac{1}{\frac{p}{BC} + \frac{\omega_o^2}{pBC}} = \frac{1}{p\left(\frac{1}{BC}\right) + \frac{1}{p\frac{BC}{\omega_o^2}}} = Y(p) \quad (10.11.g)$$

que corresponde a un capacitor de valor BC/ω_o^2 en serie con un inductor de valor $1/BC$. La Fig. 2.6.c presenta la transformación de elementos para la transformación pasa - bajas a rechaza - banda.

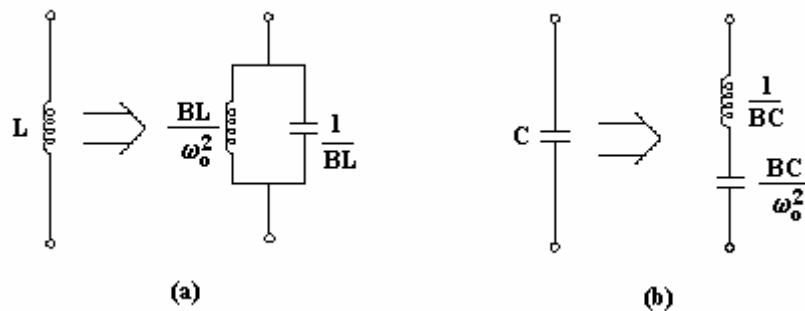


Fig.2.6.c Transformación de elementos bajo la transformación pasabajas a rechazabanda.

a) Para el inductor, b) Para el capacitor.