Dian Retno Anggraini EP

10219093

PR 02 SPSF

16 September 2022

Diketahui :

Sebuah partikel bermuatan q bergerak dengan kecepatan $\vec{v}(t) = v_x(t)\hat{\imath} + v_y(t)\hat{\jmath}$ dalam ruang bermedan magnetic konstan $\vec{B} = -B_z\hat{k}$

Ditanyakan :

Tentukan gerak partikel

a. Tuliskan Hukum Newtonnya!
b. Tuliskan persamaan diferensial terkopel antara kecepatan pada kedua arah!
c. Selesaikan kedua persamaan diferensial sehingga dapat diperoleh $v_x(t), v_y(t), x(t), dan\ y(t)$. Lakukan secara teori!
d. Perolehkan solusi numeriknya!
e. Bandingkan hasil kedua pendekatan: teori dan numerik!

Penyelesaian :

a. Dalam kasus ini, memenuhi hukum II Newton. Dirumuskan sebagai berikut:
$$\sum \vec{F} = m\vec{a}$$
Gaya yang bekerja pada muatan partikel dipengaruhi oleh medan magnetic yang dirumuskan:
$$\vec{F}_B = q\vec{v} \times \vec{B}$$
Diperoleh,
$$\vec{F}_B = q\vec{v} \times \vec{B} = m\vec{a}$$
$$q\left(v_x(t)\hat{\imath} + v_y(t)\hat{\jmath}\right) \times \left(-B_z\hat{k}\right) = m\frac{d\vec{v}(t)}{dt}$$
$$q\left(v_x(t)B_z\hat{\jmath} - v_y(t)B_z\hat{\imath}\right) = m\frac{d\vec{v}(t)}{dt}$$

b. Dari persoalan (a), didapatkan persamaan diferensial terkopel pada arah horizontal dan vertical

Arah Horizontal

$$q\left(-v_y(t)B_z\hat{\imath}\right) = m\frac{dv_x(t)}{dt}$$

$$-\frac{qB_z\left(v_y(t)\right)}{m} = \frac{dv_x(t)}{dt}$$

Arah Vertical

$$q(v_x(t)B_z\hat{\jmath}) = m\frac{dv_y(t)}{dt}$$

$$\frac{qB_z\left(v_x(t)\right)}{m} = \frac{dv_y(t)}{dt}$$

c. Pada arah horizontal akan didiferensialkan sehingga:

$$\frac{d^2\left(v_x(t)\right)}{dt^2} = -\frac{qB_z}{m}\frac{dv_y(t)}{dt}$$

Pada arah vertikal akan didiferensialkan sehingga:

$$\frac{d^2\left(v_y(t)\right)}{dt^2} = \frac{qB_z}{m}\frac{dv_x(t)}{dt}$$

Substitusi nilai yang diperoleh dari jawaban b ke jawaban c yang telah didiferensialkan sehingga diperoleh

Pada arah horizontal

$$\frac{d^2\left(v_x(t)\right)}{dt^2} = -\left(\frac{qB_z}{m}\right)^2 v_x(t)$$

$$\frac{d^2\left(v_x(t)\right)}{dt^2} + \left(\frac{qB_z}{m}\right)^2 v_x(t) = 0$$

Misalkan $k = \left(\frac{qB_z}{m}\right)$, maka

$$\frac{d^2\left(v_x(t)\right)}{dt^2} + k^2 v_x(t) = 0$$

Pada arah vertical

$$\frac{d^2\left(v_y(t)\right)}{dt^2} = -\left(\frac{qB_z}{m}\right)^2 v_y(t)$$

$$\frac{d^2\left(v_y(t)\right)}{dt^2} + \left(\frac{qB_z}{m}\right)^2 v_y(t) = 0$$

Misalkan $k = \left(\frac{qB_z}{m}\right)$, maka

$$\frac{d^2\left(v_y(t)\right)}{dt^2} + k^2 v_y(t) = 0$$

Solusi dari persamaan pada arah horizontal

$$v_x(t) = Asin\left(\frac{qB_z}{m}t\right) + Bcos\left(\frac{qB_z}{m}t\right)$$

Solusi dari persamaan pada arah vertikal

$$v_y(t) = Csin\left(\frac{qB_z}{m}t\right) + Dcos\left(\frac{qB_z}{m}t\right)$$

Solusi dapat dituliskan juga sebagai berikut

$$v_x(t) = Asin\left(\frac{qB_z}{m}t + \phi\right)$$

$$v_y(t) = -Acos\left(\frac{qB_z}{m}t + \phi\right)$$

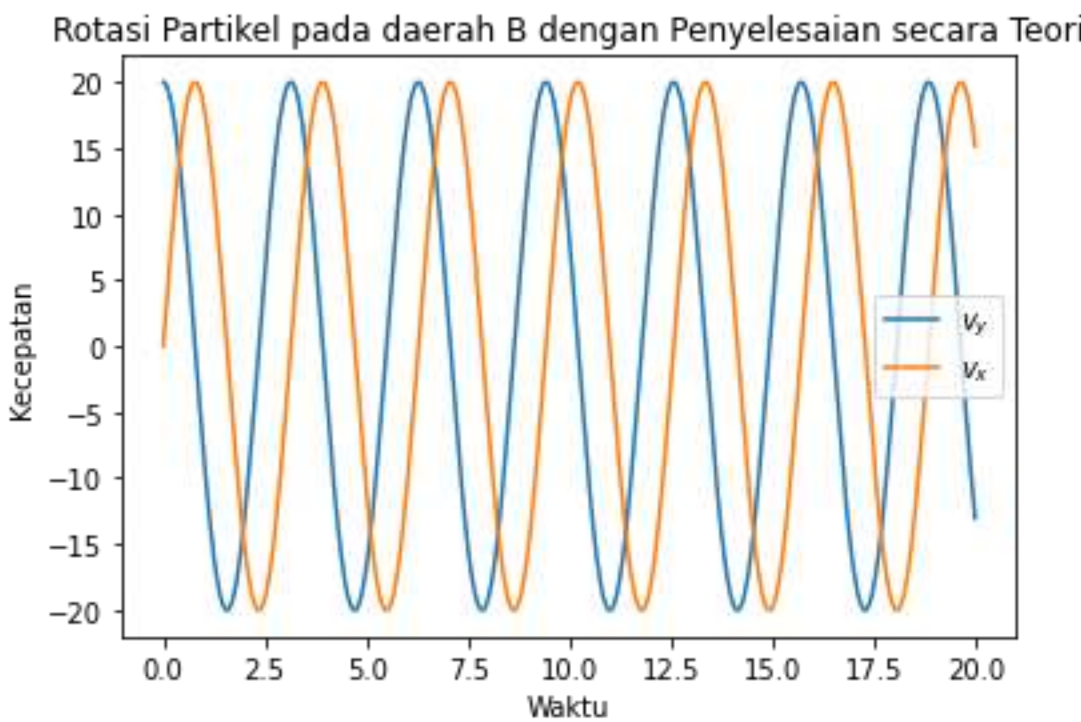
Dimana A adalah amplitudo dan ϕ adalah beda fasa

Selanjutnya, besarnya nilai A akan sama dengan kecepatan tangensial rotasi partikel jika ditinjau

$${v_x}^2 + {v_y}^2 = A^2$$

Sedangkan besarnya $v_z = 0$

Jika diasumsikan besarnya nilai A=20, $\phi = 0$, q=1, $B_z = 1$, m=1, maka akan diperoleh grafik $v_x = 20\sin(t)$ dan $v_y = -20\cos(t)$. Adapun visualisasinya sebagai berikut



d. Asumsikan q = 1, m = 1, dan $B_z = 1$ dan dengan menggunakan persamaan berikut

Arah Horizontal

$$q\left(-v_y(t)B_z\hat{\imath}\right) = m\frac{dv_x(t)}{dt}$$

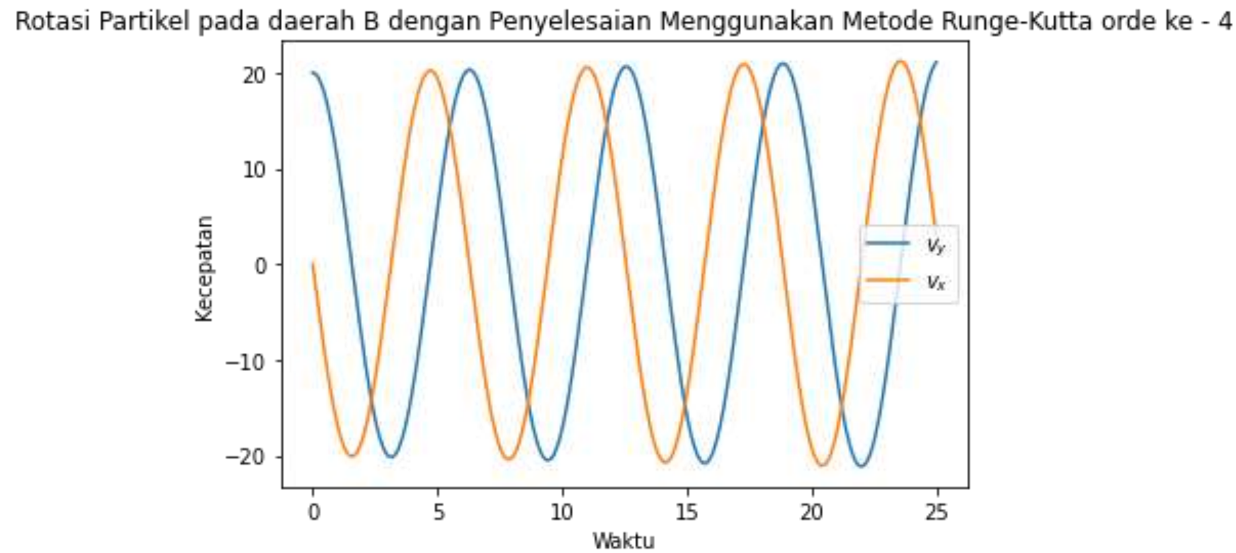
$$-\frac{qB_z\left(v_y(t)\right)}{m} = \frac{dv_x(t)}{dt}$$

Arah Vertical

$$q\left(v_x(t)B_z\hat{\jmath}\right) = m\frac{dv_y(t)}{dt}$$

$$\frac{qB_z\left(v_x(t)\right)}{m} = \frac{dv_y(t)}{dt}$$

Dapat diperoleh solusi numeric dengan menggunakan Runge-Kutta orde ke-4 sebagai berikut



e. Dari hasil yang diperoleh baik secara teori maupun pendekatan dengan menggunakan metode Runge-Kutta orde ke-4 dapat disimpulkan bahwa kedua pendekatan tersebut akan diperoleh hasil yang sama tetapi dengan metode numeric hasilnya berupa diskrit sedangkan teori hasilnya berupa kontinu