

# 初学者如何理解射影平面

第 27 卷增刊第 1 期

2007 年 8 月

河池学院

JOURNAL OF HECHI UNIVERSITY

Vol. 27 Supplementary Issue No. 1

Aug. 2007

初学者如何理解射影平面

李彩凤

(河池学院数学系, 广西宜州 546300)

[摘要]对射影平面的理解是从局部到整体的扩展过程.先从无穷远元素,射影直线的理解入手,再到射影平面定义的理解,最后利用射影平面的模型来揭示射影平面的结构,想象它的形状,帮助初学者更好地理解射影平面的结构与性质.

[关键词]射影几何;射影平面;理解

[中图分类号]0185.1 [文献标识码]A [文章编号]1672—9021(2007)ZJO1—0101—03

[作者简介]李彩凤(1973—),女,广西合浦人,河池学院数学系讲师,主要研究方向为函数论.

在射影几何的基本内容中,初学者对射影平面尤感兴趣,但又觉得其极为抽象,难以理解,这主要是与我们的直观认识不

—

致引起的.因此,本文从射影平面上的无穷远点,无穷远直线,射影直线的理解入手,在理解这些抽象概念的同时,即理解

射影平面上元素的特点,接着理解射影平面的定义,最后给出射影平面的模型以帮助理解射影平面的形象.

## 1 理解射影平面上的元素

对射影平面的理解建立在对无穷远元素以及射影直线的透彻理解的基础上,射影平面上元素的特点决定了射影平面的性质.

### 1.1 理解无穷远元素的约定

在射影平面上有约定:在平面内对于任何一组平行线引入唯一一点叫无穷远点,此点在组中每一直线上而不在此组外的

任何直线上.一平面内一切无穷远点的集合组成一条直线叫无穷远直线....我们应对这约定有深刻的理解:这约定的途径

是给平行直线添加交点,而且不破坏点与直线的两个基本关系,即两条不同直线确定唯一交点,两个不同的点确定唯一一条

直线;对应于平面上的每一个方向,有唯一无穷远点;每一条直线上有且仅有一个无穷远点;平面上添加的无穷远点的个数等

于过原点的直线数,平面上任意两条直线有且仅有一个交点;无穷远直线上的点均为无穷远点;平面上任何无穷远点均在无

穷远直线上;每一条普通直线与无穷远直线有且仅有一个交点为该直线上的无穷远点;每一个平面上有且仅有一条无穷远直线.

## 1.2 理解射影直线的定义

射影直线是指射影平面上的直线.射影直线的定义是:在欧氏直线上添加一个无穷远点后得到仿射直线,在仿射直线

上,如果把普通点与无穷远点同等看待而不加区分,那么这条直线就叫做射影直线....根据上述约定以及射影直线的定义,

我们通过区别欧氏直线与射影直线来理解射影直线的形象,比如:欧氏直线是不封闭的,一点分直线为两部分,三点排成唯一

顺序,如图 1.射影直线是封闭的,一点不能分直线为两部分,三点不能排成唯一顺序,所以,可以选取圆作为射影直线的模

型,如图 2.

A8C

图 1 欧氏直线

A

图 2 射影直线的模型

101

## 2 理解射影平面的定义

射影平面的定义比较抽象,它在射影平面的理解中是必不可少的一个环节.射影平面的定义是:欧氏平面上添加一条无

www.docin.com



穷远直线即可得仿射平面,在仿射平面上,如果对普通元素与无穷远元素不加区分,即可得射影平面....结合射影直线的定

义可得出对射影平面的如下理解:射影平面上的直线是封闭的,且任意两条直线有一个交点,每一条直线上有唯一一个无穷

远点,射影平面上有唯一一条无穷远直线.根据上述的理解,还可得出射影平

面与欧氏平面的不同,如:在欧氏平面上一条直线可以把平面分为两个区域,

两条相交直线可以把平面分为四个区域;而在射影平面上,一条直线并不能把

该平面分为两个区域,因为连接两个点的线段有两个,其中只有一个线段与另

一直线相交,而另一线段一定不与此直线相交.两直线只能把射影平面分为

两个区域,如图 3,I 的两部分和 II 的两部分都是相通的,而 I,II 两部分是不

相通的.因为在射影平面上,直线是封闭的,且两直线有且仅有一个交点.

### 3 用射影平面的模型来理解射影平面的形象

#### 图 3 射影平面上的两直线

在上述理解的基础上,为了进一步理解射影平面的整体性质,给出射

影平面以下的几种模型.

### 3.1 模型 1

我们知道,默比乌斯带的特点是具有单侧性,即沿着这带子上任一处出发涂一种颜色,则可以不越过边界将它全部涂遍

(即原纸带的两面都涂上同样的颜色).我们从下面这模型出发,借助于默比乌斯带的单侧性来说明射影平面也是单侧的.

我们可以作一个默比乌斯带,它是射影平面的一部份.如果把默比乌斯带的两个同样的边界都粘和起来,就可以得到射

影平面.我们可以想象得出射影平面的单侧性和封闭性.在欧氏空间里,我们只能看到射影平面的一部分.

### 3.2 模型 2

射影平面的模型还可以如下方式给出,设在欧氏空间中给定一个原点  $O$  为球心的球面,当把球面上对径点粘和为一点,

视为射影点,并把对径点粘和为一点的球面上的大圆视为射影直线,则得到的图形即为射影平面的一个模型.

在这模型中,射影直线都是封闭的,并且任意两条射影直线都相交于一点.而且,是为了使得中心射影成为一一对应,才

给平行线添加交点,引进了无穷远点.从而由欧氏直线得到仿射直线,由仿射直线得到射影直线,而由欧氏平面得到仿射平

面,由仿射平面得到射影平面.在这里,此射影平面的模型还可以与仿射平面建立一一对应关系.事实上,取定与给定球面

相切于一点的仿射平面,以球心  $O$  为射影中心建立此模型  $n$  到仿射平

面的中心射影,在此中心射影下,对于  $n$  上的  $A$

点,即球面上的一对对径点  $A$  和  $B$ ,从球心  $O$  作通过  $A$  和  $B$  两点的直线交仿射平面于点  $c$ ,则点  $A$  与  $c$  对应,而由位于过球心

$O$ ,平行于的欧氏平面上的球面大圆所决定的射影直线,则对应于仿射平面上的无穷远直线.这样,就可以建立上的点与

$n$  上的点之间的一一对应.如图 4.

若把上述的模型 2 称为球面模型,则下面的这半球面模型(如图 5)与球面模型很相似.当把赤道大圆的对径点看为模型

$n$  上的一点,则仿射平面与  $n$  的点类似于球面模型与仿射平面建立了一一对应.

从这两个模型中可以看出射影平面上的直线是封闭的.

图 4 球面模型

### 3.3 模型 3

图 5 半球面模型图 6 直线把模型

射影平面还可以有其它的模型.取过空间一点  $O$  的全部直线和平面,称为一个把.对于仿射平面上任一点,对应于把

上的一条直线  $O/t$ ,上的任意一条直线  $z$  对应于把里的一个平面.把的每一条直线称为一个“点”,其中每一个平面称为一

条直线,则这个把也是射影平面的一个模型】 ,可把这模型称为直线把模型,如图 6.在这个模型里,满足两直线交于一个点.

对于上述所讨论的模型,是从通常空间加以改造而得出的,这有助于我们理解射影平面的结构与性质.

综上所述,在射影平面上,直线是封闭的,每一条直线上都有一个无穷远点,两条直线有且仅有一个交点,射影平面从局

部上看与欧氏平面相同,而从整体看,它是一个具有单侧性的封闭曲面.

(下转第 106 页)

102

总之,新教材中向量内容的增加,为初等数学的研究性学习带来了活力,也为高等数学中空间解析几何奠定了基础,为初

等几何问题的解决开拓了一条全新的思路,是近年来高考数学的一个热点,应引起数学教师和学生的重视.

参考文献:

- [1]王勇.品味平面向量的“交汇性”[J].中学数学研究,2005,(4).
- [2]张卓.浅议向量运算在立体几何中的应用[J].中学数学研究,2006,(6).
- [3]曾安雄.透视 2005 年高考数学中向量创新交汇题[J].中学数学研究,2005,(9)
- [4]刘明.例谈平面向量的综合运用[J].中学数学研究,2003,(11/12).
- [5]陈高明.平面向量解题例谈[J].数学教学通讯,2004,(8).
- [6]虞关寿.利用向量“双重身份”拓宽解题思路[J].中学数学研究,2004,(3).

[7]朱丽强.应用平面向量解决轨迹问题[J].数学教学,2004,(7).

A Discussion On the Application of Vector in the Math Examination for College Entrance

LI Shao-bo, QIN Luo-jiang

(Department of Mathematics, Hechi University, Y~hou, Guangxi 546300, China)

[Abstract] Vector is a fresh content added to mathematics of high school after the new reform of curriculum.

It has become a hot point in the math examination for college entrance. This paper discusses the application of

vector to seek solution to questions in function, complex number, derivative, plane geometry, solid geometry and plane analytic geometry in the math examination for college entrance.

[Keywords] vector; high school mathematics; college entrance examination; application

收稿日期 2007—07—06

[责任编辑刘景平]

(上接第 102 页)

参考文献:

[1]梅向明,刘增贤,王汇淳,等.高等几何[M].北京:高等教育出版社,2000.



[2]曾彩云.射影平面的结构与整体性质[J].陕西教育学院,2002,(4):68

[3]方德植,陈弈培.射影几何[M].北京:高等教育出版社.1983.

[4]郑崇友,王智秋,王汇淳.几何学引论[M].北京:高等教育出版社,2001.

HowtoHelpNewLearnersUnderstandtheProjectivePlane

LiCai?feng

(DepartmentofMathematics,HecbiUniversity,Yizhou,Gaangxi546300,China)

[Abstract]Theauthor'sUnderstandingoftheprojectiveplaneinthispaperisatrendoftheprocessfrom

parttowhole.Thispaperbeginswiththeunderstandingofinfiniteelementandprojectiveline,thendiscusses

thedefinitionoftheprojectiveplane,andlastrevealsthestructureofprojectiveplaneandimagesitsentireformby

itsmodels.Thiswillhelpnewlearnerstohaveabetterunderstandingofthestructureandcharacteroftheprojective

plane.

[Keywords]projectivegeometry;projectiveplane;understanding

106

收稿日期 2007—07—06

[责任编辑刘景平]

[www.docin.com](http://www.docin.com)