Occupancy Map概率模型

2019-9-17

“点云PCL”微信公众号

Occupancy Map基本概念

贝叶斯理论和马尔科夫链

Occupancy Map概率模型

Occupancy Map模型推导

举例demo演示

结论

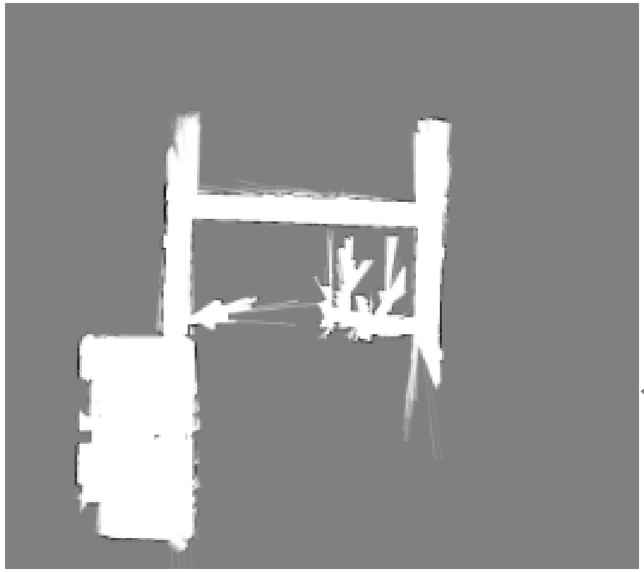
Occupancy Map基本概念

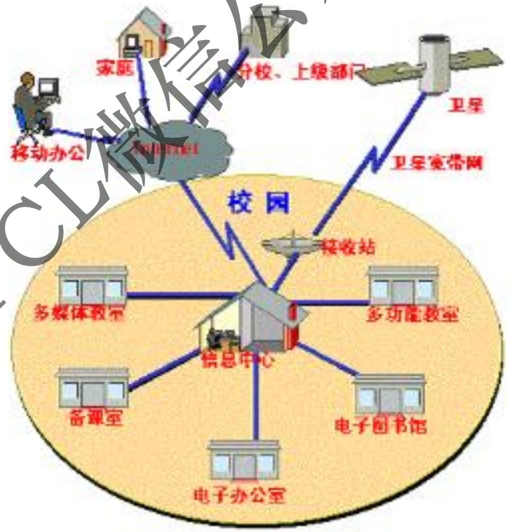
- **地图的表示方式有以下几种**

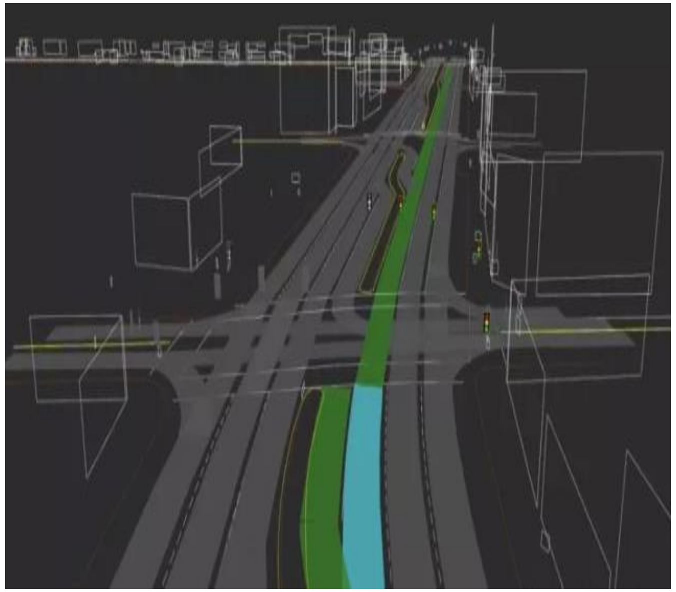
  度量（尺度）地图（Metric Map）:地点用坐标来表示，例如使用经纬度表示地点的世界地图

  拓扑地图（Topological Map）：表示地点之间的逻辑关系，就比如图论中图的概念

  语义地图（Semantic Map）：用标签描述的地图，通过位置关系描述标记的地点







Occupancy Map基本概念

栅格地图也是尺度地图中的一类，在wiki上的定义是：

Occupancy Grid Mapping[1] refers to a family of computer algorithms in probabilistic robotics for mobile robots which address the problem of generating maps from noisy and uncertain sensor measurement data, with the assumption that the robot pose is known.

为什么要引入这种概率模型地图?

- 首先，无论是激光雷达还是超声波还是其他传感器都是有噪声数据的，假如用传感器检测到前方障碍物距离机器人有多远，不可能检测到一个准确的数值。需要建立概率模型来处理传感器的不确定性。
- 其次传感器的数据是本地坐标系的而机器人是要构建一个全局的地图，最后机器人会运动，运动也是有噪声，总结起来就是如何处理传感器以及运动的噪声？
- 之前我们已经对如何对传感器的噪声建模已近有一定的了解了，一般是使用概率分布（高斯分布）

[1]Péter Fankhauser, Hutter M . A Universal Grid Map Library: Implementation and Use Case for Rough Terrain Navigation[M]// Robot Operating System (ROS) – The Complete Reference (Volume 1). Springer International Publishing, 2016.

贝叶斯理论和马尔科夫链

- **贝叶斯决策理论定义：**它是主观贝叶斯派归纳理论的重要组成部分。贝叶斯决策就是在不完全情报下，对部分未知的状态用主观概率估计，然后用贝叶斯公式对发生概率进行修正，最后再利用期望值和修正概率做出最优决策。

- **基本思想**

  贝叶斯决策理论方法是统计模型决策中的一个基本方法，基本思想：

★已知类条件概率密度参数表达式和先验概率

★利用贝叶斯公式转换成后验概率

★根据后验概率大小进行决策分类

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)}$$

贝叶斯理论和马尔科夫链

概率的核心技术**就是要通过传感器的数据来估计状态的问题**，可以是机器人的状态，也可以是地图的状态。首先需要熟悉一些基本概率相关的概念（基础概念就不在一一说明，比如正态分布，联合分布，条件概率，全概率公式等）：

（1）先验概率分布：如果x是希望由y推测出来的数值，则概率P(x)称之为先验概率分布（prior probability distribution）。其中y就是传感器的测量值。

（2）后验概率分布：概率P(x)在综合了y在当前时刻之前所有已经有的关于x的信息，得到的概率P(x|y)称为在X上的后验概率分布（posterior probability distribution ）.

(3)置信分布：置信分布为每一个可能的假设分配一个概念，可以理解为以历史信息为条件获得的状态变量的后验概率。

贝叶斯理论和马尔科夫链

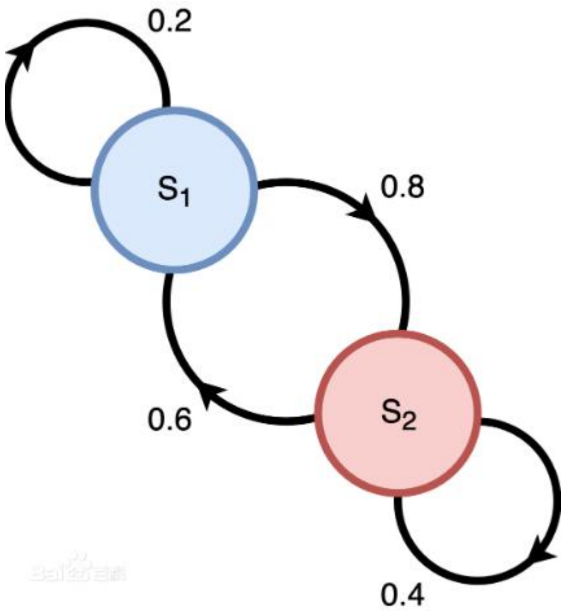
- **马尔科夫链的基本概念**

在机器学习算法中，马尔科夫链（markov chain）又称之为离散时间马尔科夫链（Discrete-time Markov chain）主要描述的是状态空间中经过一个状态到另一个状态的转换的随机过程，该过程是要求具备无记忆的性质，表示下一状态的概率分布只能由当前的状态决定，在时间序列中它与前面的事件无关，这种特定的“无记忆性”称之为马尔科夫性质。概括“某一时刻状态转移的概率只依赖于它的前一个状态”

- **数学公式**

假设状态序列为 ,,,x_{t-1}, x_t, x_{t+1}, x_{t+2} ,,,那么由马尔科夫链定义可知，时刻x_{t+1} 的状态只与x_t有关，用数学公式来描述就是：

$$P(x_{t\_1} \mid \ldots x_{t-2}, x_{t-1}, x_t) = P(x_{t+1}|x_t)$$



Occupancy Map概率模型

- 首先解释一下占据率（Occupancy）怎么理解?

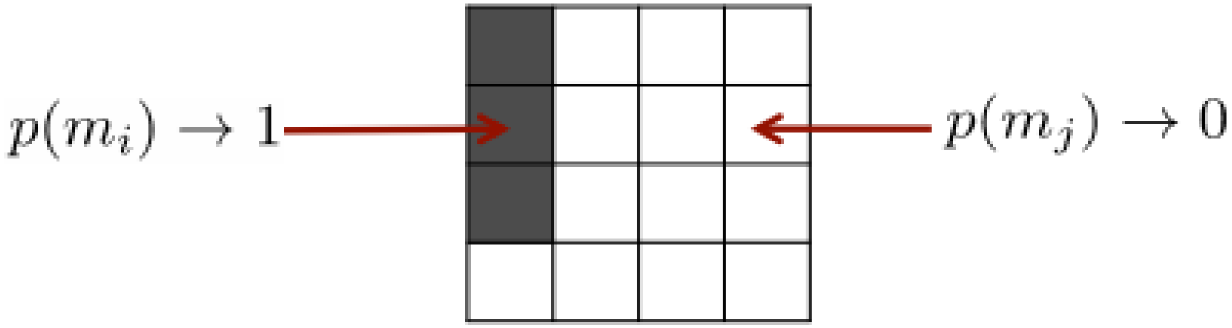
  在占据栅格地图中，对于一个点，我们用 P(s=0) 来表示它是Free状态的概率，用P(s=1)来表示它是Occupied状态的概率，当然两者的和为1。

- 这里引入两者的比值来作为点的状态：Odd(s) =p(s=1)/p(s=0) 。**至于为什么这样表示，这也是为了解决后面数学推导的问题。**

- 对于一个栅格，新来一个测量值（Measurement ）z，这里不涉及机器人或者车辆的位姿x，但现实中是不可避免的，这里只是为了便于理解，我们需要更新后的栅格概率，所以结合测量z的栅格概率表达式：$\mathrm{Odd}(s|z) = \frac{P(s=1|z)}{P(s=0|z)}$

  这种表达方式类似于条件概率，

  表示在z发生的条件下s的状态。



Occupancy Map概率模型

- 根据贝叶斯公式将该栅格的表达式$\mathrm{Odd(s|z)} = \frac{P(s=1|z)}{P(s=0|z)}$　（1）进行分解求解

$$\mathrm{P(s = 1|z)} = \frac{P(z|s = 1)P(s = 1)}{P(z)}$$

$$\mathrm{P(s = 0|z)} = \frac{P(z|s = 0)P(s = 0)}{P(z)}$$

带入（1）得到

$$\mathrm{Odd(s|z)} = \frac{P(s=1|z)}{P(s=0|z)} = \frac{P(z|s=1)p(s=1)/P(z)}{P(z|s=0)p(s=0)/p(z)} = \frac{P(z|s=1)}{P(z|s=0)} * Odd(s)$$

两边取对数（取log是为了避免概率接近0或者1引起的截断问题，使置信度在(-∞,+∞)范围里）

$$\log \mathrm{Odd(s|z)} = \log \frac{P(z|s=1)}{P(z|s=0)} + \log Odd(s)$$

从这个式子可以得出含有测试量的项只有$\log \frac{P(z|s=1)}{P(z|s=0)}$

Occupancy Map概率模型

那么含有测试量的项可知，测量值的模型只有两种，就是被传感器检测hit或者miss，也就是测量模型有以下两种：

栅格被测量为空闲的模型：$\mathrm{lofree} = \log\frac{p(z=0|s=1)}{p(z=0|s=0)}$

栅格被测量为占有的模型：$\mathrm{looccu} = \log\frac{p(z=1|s=1)}{p(z=1|s=0)}$

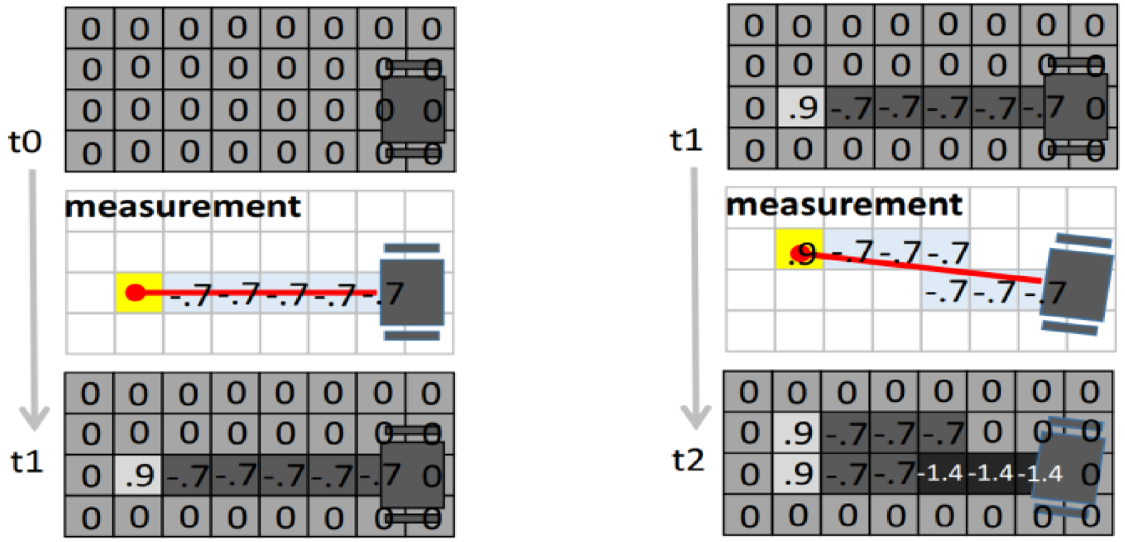
从这个公式得出概率的大小与占有状态的关系是正比关系。

在没有测量值的初始状态下，该栅格的状态为 $\log Odd(s) = \log\frac{p(s=1)}{p(s=0)} = log\,\frac{0.5}{0.5}$=0

右图就展示了用激光传感器的数据更新地图的过程

一个栅格颜色越深表示越肯定它是Free的，

颜色越浅表示越肯定它是Occupied的。



Occupancy Map概率模型

举个栗子：假设已知格子x被hit一次，格子occupied的概率是Po(x) = 0.9,free的概率是Pf(x)= 1 - Po(x) = 0.1；格子x被miss一次，格子occupied的概率是Po(x) = 0.2,free的概率是Pf(x)= 1 - Po(x) = 0.8。以上就是我们给出的先验概率，如果格子x被连续hit三次，miss一次，那么格子x的概率Po(x)该如何计算？

$$\log \mathrm{Odd}(s|z) = \log \frac{P(z|s=1)}{P(z|s=0)} + \log Odd(s)$$

首先该栅格x的初值L0 = log(0.5/(1-0.5)) =0;

第一次hit ,z=1 计算: L1 = $\log \frac{P(z=1|s=1)}{P(z=1|s=0)} + \log Odd(s) = \log \frac{0.9}{0.1} + L0 = \log 9$

第二次hit ,z=1 计算: L2 = $\log \frac{P(z=1|s=1)}{P(z=1|s=0)} + \log Odd(s) = \log \frac{0.9}{0.1} + L1 = log9 + log9$

第三次hit ,z=1 计算: L3 = $\log \frac{P(z=1|s=1)}{P(z=1|s=0)} + \log Odd(s) = \log \frac{0.9}{0.1} + L2 = log9 + log9 + \log 9$

第四次hit ,z=0 计算: L4= $\log \frac{P(z=0|s=1)}{P(z=0|s=0)} + \log Odd(s) = \log \frac{0.2}{0.8} + L3 = -\log 4 + log9 + log9 + \log 9$

所以我们又：Odd(s) =p(s=1)/p(s=0) → log Odd(s) =log {p(s=1)/p(s=0)} =L4

~log(9*9*9/4)~5.2

得到格子x被连续hit三次，miss一次 Po(x=1) = $1 - \frac{1}{(1+\exp\{L4\})}$ = 1-1/(1+e^5.2)=0.9945

Occupancy Map模型推导

以上的概率模型是仅仅根据测量值来计算栅格的概率的一种简单模型，实际场景中需要测量值还需要车辆或者机器人的位姿x之间的概率模型。

所以占有栅格地图需要构建的问题变成了：已知机器人的位姿序列$x_{1:t}$和测量序列$z_{1:t}$,求解环境地图m表达的概率问题，称之为求解地图的后验概率：

$$P(m|x_{1:t}, z_{1:t}) \qquad (1)$$

因为我们求解是栅格地图，所以这里将占用栅格地图将环境分成有限多个栅格，那么总的地图表达为$\mathrm{m} = \{m_1, m_2 \dots m_n\}$,所以公式（1）可以表达为(这里是假设每个栅格是独立同分布的)

$$P(m|x_{1:t}, z_{1:t}) = p(m_1, m_2 \dots m_n|x_{1:t}, z_{1:t}) = \prod_{i=1}^{n} p(m_i|x_{1:t}, z_{1:t})) \qquad (2)$$

最终变成求解每个栅格的占有概率的问题

Occupancy Map模型推导

- 每个栅格的概率值又称之为置信度$bel(m_i) = p(m_i|x_{1:t}, z_{1:t})$,最终我们可以设置一个阈值来确定这些栅格是否被占有。
- 那么如何求解$bel(m_i)$？？？

$$\mathrm{bel}_t(m_i) = p(m_i|x_{1:t}, z_{1:t})$$

贝叶斯规则

$$= \frac{p(z_t|m_i, x_{1:t}, z_{1:t-1})\,p(m_i|x_{1:t}, z_{1:t-1})}{p(z_t|x_{1:t}, z_{1:t-1})}$$

马尔科夫链

$$= \frac{p(z_t|m_i, x_t)\,p(m_i|x_{1:t-1}, z_{1:t-1})}{p(z_t|x_{1:t}, z_{1:t-1})}$$

其中$p(z_t|m_i, x_t)$根据贝叶斯规则有 $p(z_t|m_i, x_t) = \frac{p(m_i|z_t, x_t)\,p(z_t|x_t)}{p(m_i|x_i)}$

Occupancy Map模型推导

将$p(z_t|m_i,x_t\ ) = \frac{p(m_i|z_t,x_t)p(z_t|x_t)}{p(m_i|x_i)}$代入

$$=\frac{p(m_i|z_t,x_t)p(z_t|x_t)p(m_i|x_{1:t-1},z_{1:t-1})}{p(m_i|x_i)p(z_t|x_{1:t},z_{1:t-1})}$$

markov Chain $$=\frac{p(m_i|z_t,x_t)p(z_t|x_t)p(m_i|x_{1:t-1},z_{1:t-1})}{p(m_i)p(z_t|x_{1:t},z_{1:t-1})}$$

$$=\frac{p(m_i|z_t,x_t)p(z_t|x_t)\mathrm{bel}_{t-1}(m_i)}{p(m_i)p(z_t|x_{1:t},z_{1:t-1})}$$

$p(m_i|z_t,x_t)$是观测模型，$\mathrm{bel}_{t-1}(m_i)$是上一时刻栅格概率，其他项怎么求呢？这里仍然沿用两者的比值来作为点的状态：Odd(s) =p(s=1)/p(s=0)，所以该栅格空闲的概率

$$\mathrm{bel}_t(\overline{m_i}) = p(\overline{m_i}|x_{1:t},z_{1:t}) = \ =\frac{p(\overline{m_i}|z_t,x_t)p(z_t|x_t)\mathrm{bel}_{t-1}(\overline{m_i})}{p(\overline{m_i})p(z_t|x_{1:t},z_{1:t-1})}$$

Occupancy Map模型推导

Odd(s) =p(s=1)/p(s=0)

$$=\frac{\mathrm{bel}_t(m_i)}{\mathrm{bel}_t(\overline{m_i})}=\frac{\mathrm{bel}_t(\overline{m_i})}{1-\mathrm{bel}_t(\overline{m_i})}=\frac{\frac{p(m_i|z_t,x_t)p(z_t|x_t)\mathrm{bel}_{t-1}(m_i)}{p(m_i)p(z_t|x_{1:t},z_{1:t-1})}}{\frac{p(\overline{m_i}|z_t,x_t)p(z_t|x_t)\mathrm{bel}_{t-1}(\overline{m_i})}{p(\overline{m_i})p(z_t|x_{1:t},z_{1:t-1})}}$$

$$=\frac{p(m_i|z_t,x_t)\mathrm{bel}_{t-1}(m_i)p(\overline{m_i})}{p(\overline{m_i}|z_t,x_t)\mathrm{bel}_{t-1}(\overline{m_i})p(m_i)}=\frac{p(m_i|z_t,x_t)\mathrm{bel}_{t-1}(m_i)[1-p(m_i)]}{[1-p(m_i|z_t,x_t)][1-\mathrm{bel}_{t-1}(m_i)]\,p(m_i)}$$

$$=\frac{p(m_i|z_t,x_t)}{[1-p(m_i|z_t,x_t)]}\frac{\mathrm{bel}_{t-1}(m_i)}{1-\mathrm{bel}_{t-1}(m_i)}\frac{1-p(m_i)}{p(m_i)}$$

Occupancy Map模型推导

取对数关系有

$$\log\frac{\mathrm{bel}_t(m_i)}{\mathrm{bel}_t(\overline{m_i})}=\log\frac{p(m_i|z_t,x_t)}{[1-p(m_i|z_t,x_t)]}\frac{\mathrm{bel}_{t-1}(m_i)}{1-\mathrm{bel}_{t-1}(m_i)}\frac{1-p(m_i)}{p(m_i)}$$

分解$\log\frac{\mathrm{bel}_t(m_i)}{\mathrm{bel}_t(\overline{m_i})}$左边有 $l_{t,i}=log\frac{\mathrm{bel}_{t-1}(m_i)}{1-\mathrm{bel}_{t-1}(m_i)}=\log\frac{p(m_i|x_{1:t},z_{1:t})}{1-p(m_i|x_{1:t},z_{1:t})}$

右边第一项反演观测模型：$l_{inv,i}=log\frac{p(m_i|z_t,x_t)}{[1-p(m_i|z_t,x_t)]}$

右边第二项为上一时刻占有率：$l_{t-1,i}=\log\frac{\mathrm{bel}_{t-1}(m_i)}{1-\mathrm{bel}_{t-1}(m_i)}$

右边第三项为先验概率： $l_0=\log\frac{1-p(m_i)}{p(m_i)}$

Occupancy Map模型推导

综合以上得到该栅格的地图后验：

$$\log\frac{\mathrm{bel}_t(m_i)}{\mathrm{bel}_t(\overline{m_i})}=l_{t,i}=l_{inv,i}+l_{t-1,i}+l_0$$

根据对数形式该栅格的置信度为：

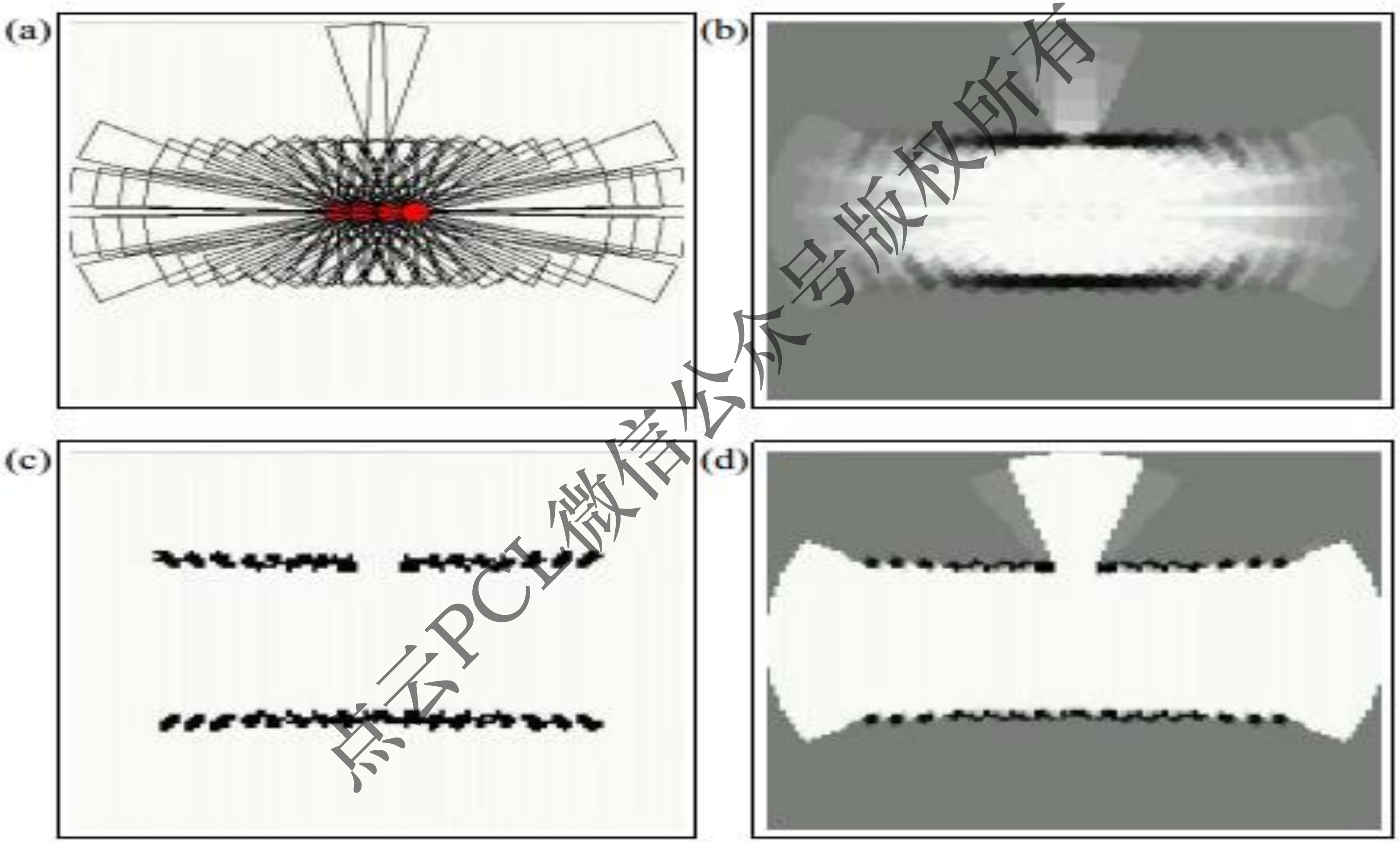
$$\mathrm{bel}_t(m_i)=1-\frac{1}{1+\exp(l_{t,i})}$$

一般情况下栅格占有的初始状态是未知的所以

$$\mathrm{bel}_0(m_i)=0.5\text{，所以}l_0=log\frac{0.5}{1-0.5}=0$$

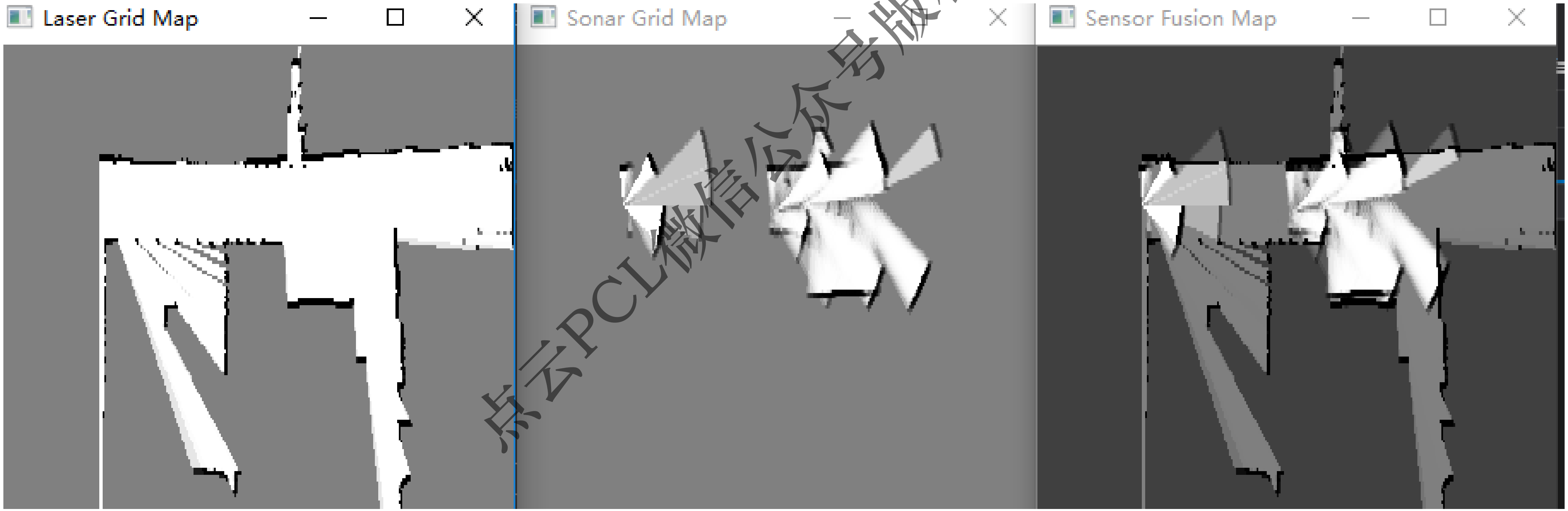
举例demo演示

举例demo演示



融合demo演示

- 依据以上的理论，如果仅仅是构建一层的障碍物地图，不考虑动态障碍物以及障碍物更新，以下是一个简单的激光雷达和超声波融合版的地图。



结论

- 理论证明结束，以上构建地图的前提是已知车辆的位姿，然而真实的情况是我们无法知道机器人或者车辆在地图中的位姿，所以实际应用中还需要加入定位算法，EKF，PF定位算法。

- 在实际场景中构建地图，机器人来回经过同一个地方，地图更新将是一个难点。

- 动态障碍物层地图的构建是另外一个问题。

- 地图的构建的效率与实际场景的大小有一定的关系。