Chapitre 3 : Variables Aléatoires et Fonction de variables aléatoires

École Supérieure Polytechnique de Dakar
(ESP-UCAD)

DIC 1 : Informatique et Réseaux-Télécommunication

Année Scolaire : 2020-2021

Professeur Amadou T. GAYE

Définitions

Dans une épreuve, une variable aléatoire (v.a.) X est une quantité dont la valeur, a priori aléatoire, est déterminée à l'issue d'un tirage.

Elle est donc représentée comme une application X définie sur l'ensemble Ω des résultats possibles de l'épreuve.

Si X(Ω) a un nombre *fini ou infini* dénombrable d'éléments, X est une v.a. discrète

Si X(Ω) a un nombre *infini* non dénombrable d'éléments, X est une v.a. continue

Fonction de répartition

Soit A_x un ensemble d'événements

L'application $x \rightarrow P[Ax]$ est la fonction de répartition, F(x).

$$F(x) = P(X < x)$$

F(x) est la proba de l'événement « la valeur de X est inférieure ou égale à x ».

Propriétés

1. $F(x)$ *est positive et non décroissante* :
$$x_2 \geq x_1 \rightarrow F(x_2) \geq F(x_1)$$

2. $F(x) \rightarrow 1 \;\; ; \; lorsque \; x \rightarrow +\infty$

3. $F(x) \rightarrow 0 \;\; ; \; lorsque \; x \rightarrow -\infty$

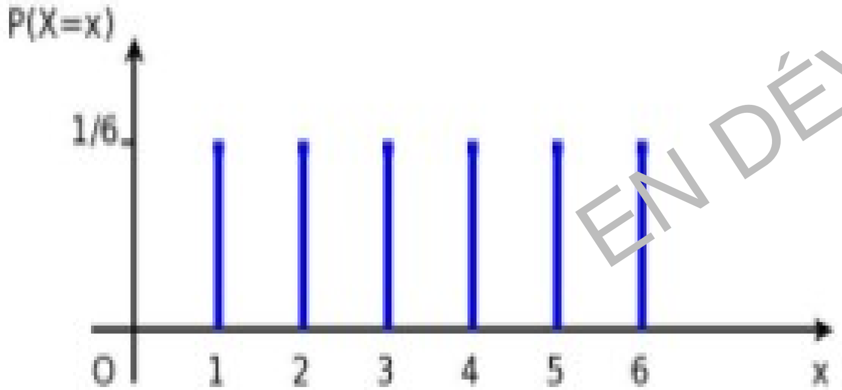
4. $P(x_1 \leq x < x_2) = F(x_2) - F(x_1)$

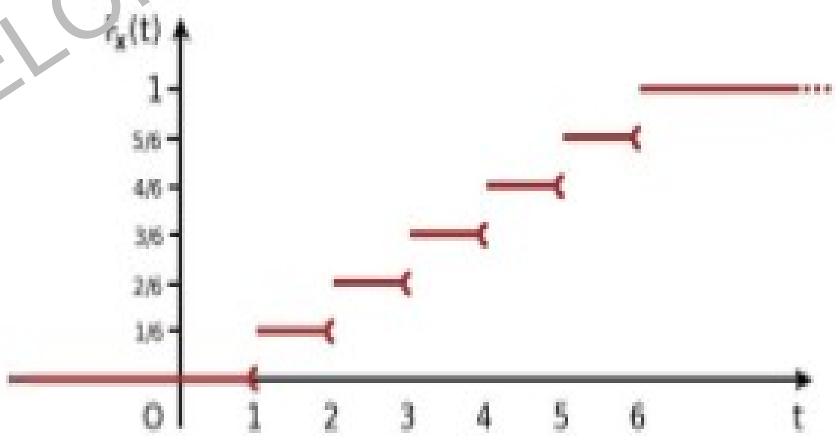
5. $F(x) = P(X < x)$

Fonction de répartition

Exemple 1 : X est le résultat du lancer d'un dé à 6 faces.

x	1	2	3	4	5	6
$\mathbb{P}(X = x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$





V.A. discrète

V.A. dont les différentes valeurs possibles sont finies ou infinies dénombrables

Exemple 2 : Jet d'une pièce.
Soit X le nombre de jets successifs nécessaires pour obtenir 'Pile' la $i^{ème}$ fois.

$$E = \{1,\ 2,\ 3,\ \ldots\ldots\}$$

$$P(X=x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^{x}$$

Face : x-1 fois

Pile : au x^e lancer

<u>Loi de Probabilité</u>

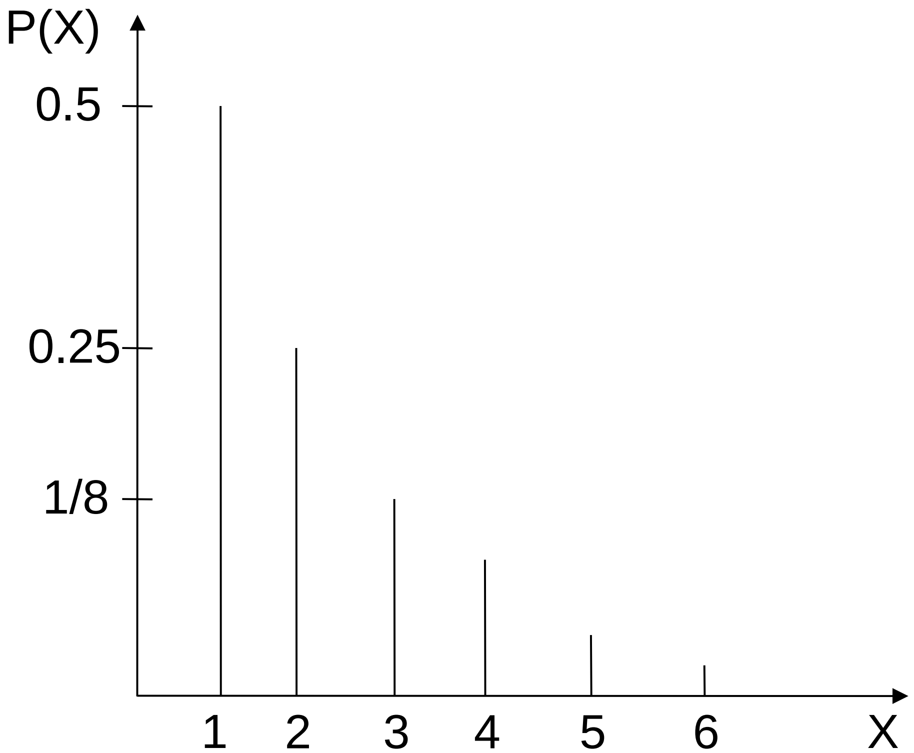
x	1	2	3	...	...	...	x	Somme
P(X = x)	1/2	1/4	1/8	...	...	...	$1/2^x$	1

Suite géométrique de raison q = 1/2 et de premier terme a = 1/2

$$\sum_{x \to \infty} P(X=x) = \frac{a}{1-q}$$

$$\sum_{x=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{x} = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 1$$

V.A. discrète



x	1	2	3	...	...	...	x
P(X = x)	1/2	1/4	1/8	...	...	...	$1/2^x$
F(x)	0	1/2	3/4	7/8	...	...	

V.A. continue

Soit X une v.a qui peut prendre n'importe quelle valeur de l'ensemble de définition

$$\exists f(x)\, telle\ que \quad \begin{cases} 1.\ f(x) \geq 0 \\ 2.\ \int_{-\infty}^{+\infty} f(x).dx = 1 \end{cases}$$

$$P(a < x < b) = \int_a^b f(x).dx$$

f(x) est appelée ***fonction distribution de probabilité*** ou ***fonction densité de probabilité***

Exemple 3 : trouver c

$$f(x) = \begin{cases} c.x^2;\ 0 < x < 3 \\ 0\ ;ailleurs \end{cases}$$

a) en utilisant la définition de la fonction de densité de probabilité

b) calculer P(1 < x < 2)

V.A. continue

a) $$\int_{-\infty}^{+\infty} c\,.\,x^2.\,dx = \left[\frac{cx^3}{3}\right]_0^3 = 9\,c \rightarrow c = \frac{1}{9}$$

b) $$P(1 < x < 2) = \int_1^2 \frac{1}{9}x^2\,dx = \frac{8}{27} - \frac{1}{27} = \frac{7}{27}$$

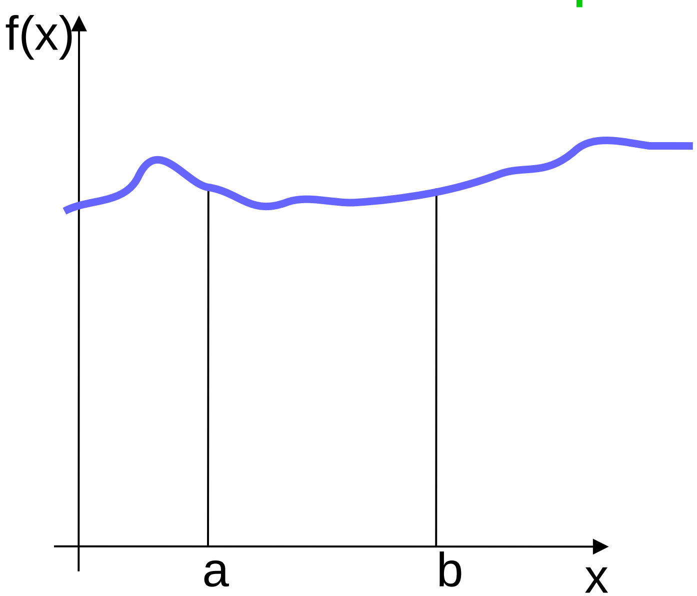
Déterminer F(x) dans l'exemple précédent : $F(x) = P(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\,.\,dx$

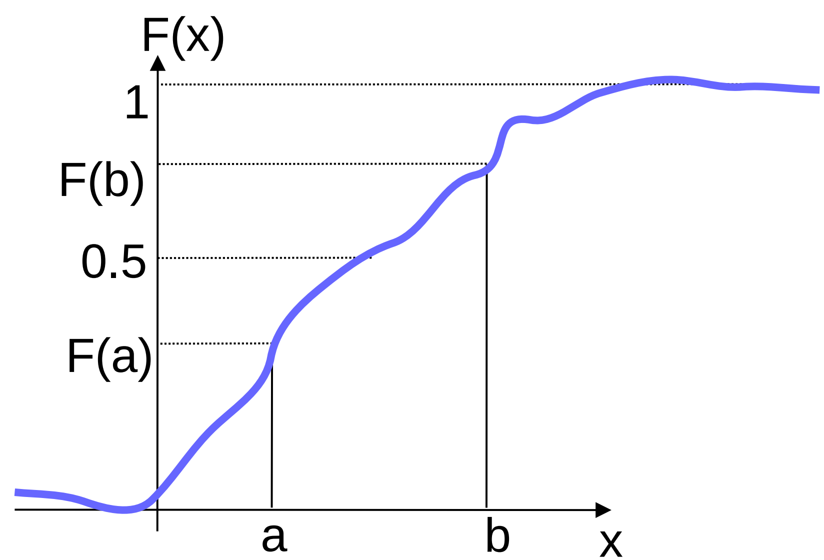
1) $x < 0 \;; \rightarrow F(x) = \int_{-\infty}^{0} f(x)dx = 0$

2) $0 \le x < 3 \;; F(x) = \int_{-\infty}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{x} f(x)dx = \int_{0}^{x} \frac{1}{9}x^2 dx = \frac{x^3}{27}$

3) $x \ge 3 \;; F(x) = \int_{-\infty}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{3} f(x)dx + \int_{3}^{x} f(x)dx = 1$

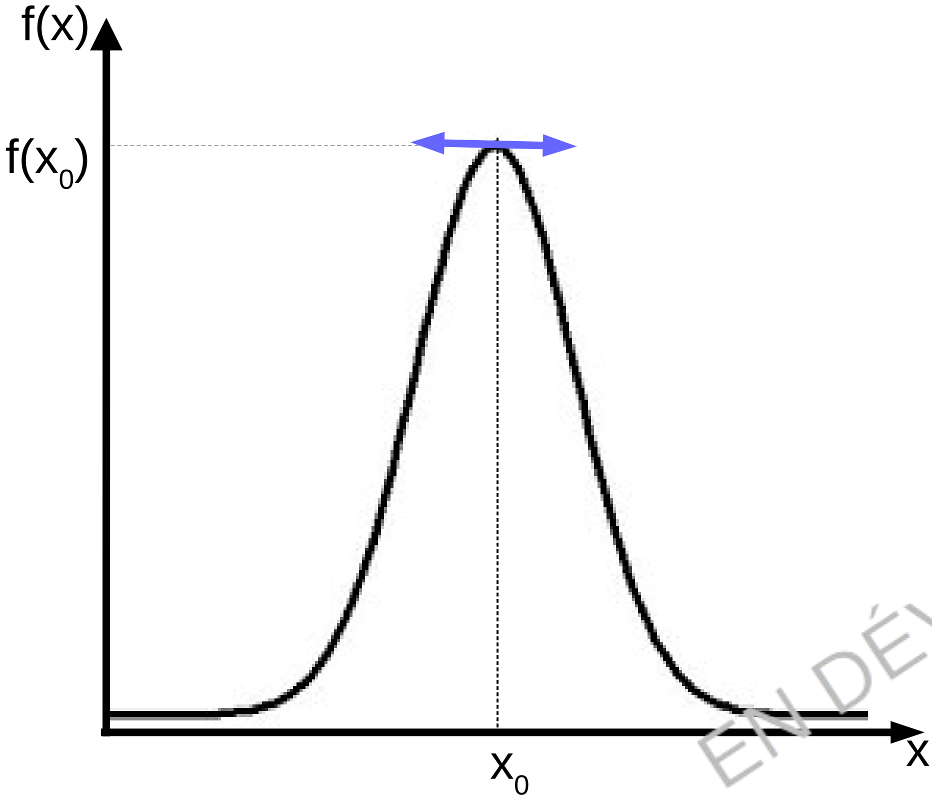
Représentation graphique

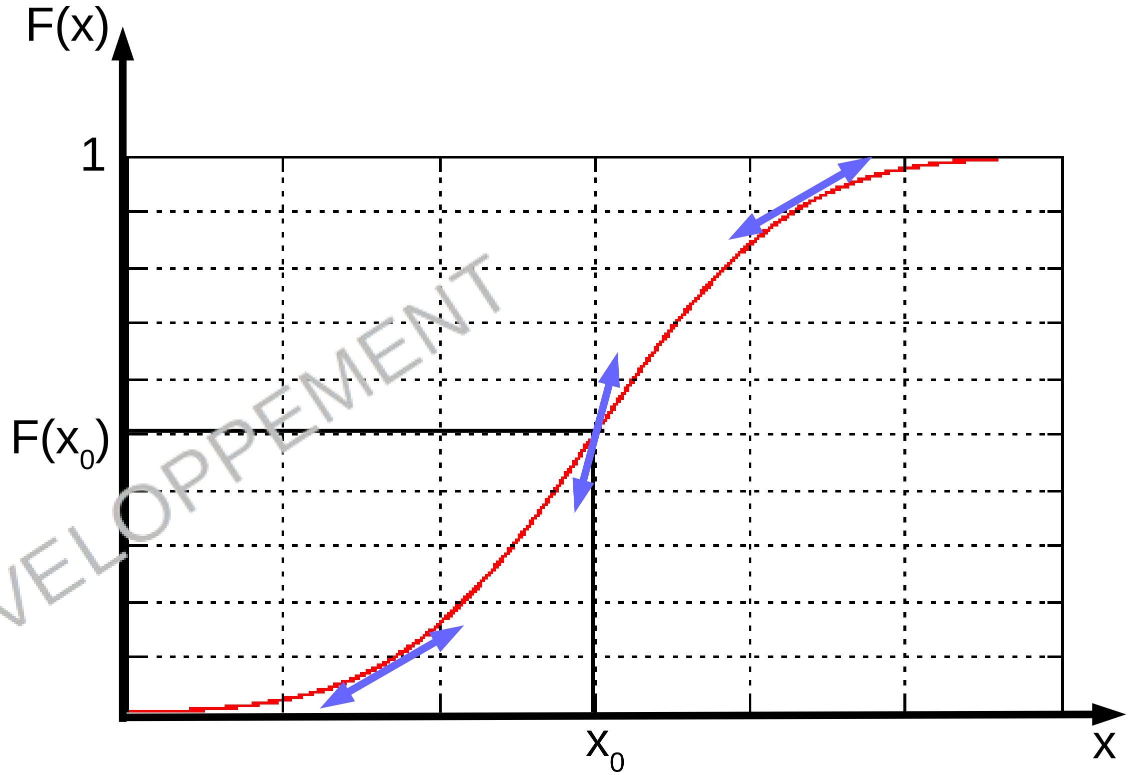




Relation F(x) et la fonction densité de probabilité en x_0

$$F(x_0) = \int_{-\infty}^{x_0} f(x).dx$$





$$f'(x_0) = 0 \; ; \; f''(x_0) < 0 \qquad\qquad F''(x_0) = 0 \; ; \; F'''(x_0) < 0$$

M$_0$ point d'inflexion

Cas discret

Si X et Y sont 2 v.a. discrètes, on définit la fonction de probabilité conjointe de X et Y par

$$P(X=x,\ Y=y) = f(x,y)$$

Avec

1°) $f(x,y) \geq 0$

2°) $\sum_x \sum_y f(x,y) = 1$

Si $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *et* $Y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$

$$P(X=x_i, Y=y_j) = f(x_i, y_j)$$

Fonction de probabilité conjointe

v.a. discrètes

$$X = (x_i)_{i \in I} \quad et \quad Y = (y_j)_{j \in J} \qquad\qquad P_{ij} = P(X = x_i, Y = y_j)$$

Lois marginales

$$P(X = x_i) = \sum_{j \in J} P(X = x_i, Y = y_j) = \sum_{j \in J} P_{ij} = P_{i.}$$

$$P(Y = y_j) = \sum_{i \in I} P(X = x_i, Y = y_j) = \sum_{i \in I} P_{ij} = P_{.j}$$

Loi conditionnelle

$$P(X = x_i / Y = y_j) = \frac{P(X = x_i, Y = y_j)}{P(Y = y_j)} = \frac{P_{ij}}{P_{.j}} = P_i^j$$

Indépendance

$$P(X = x_i, Y = y_j) = P(X = x_i) . P(Y = y_j)$$

Tableau de contingence théorique

Cas discret

Considérons 2 familles complètes d'événements (A_1, A_2, ….., A_n) et (B_1, B_2, ……, B_n)

$$P(A_i \cap B_j) = P_{ij}$$

Tableau de contingence

$$P(A_i) = P_{i.} \quad \text{et} \quad P(B_j) = P_{.j}$$

Image du tableau

$$P(A_i) = P\left(\coprod_{j=1}^{n} (A_i \cap B_j)\right) = \sum_{j=1}^{n} P(A_i \cap B_j)$$

Par conséquent $P_{i.} = \sum_{j=1}^{n} P_{ij}$ *et de même* $P_{.j} = \sum_{i=1}^{n} P_{ij}$

Définition des probabilités conditionnelles

$$P(A_i / B_j) = \frac{P(A_i \cap B_j)}{P(B_j)} = \frac{P_{ij}}{P_{.j}} \qquad P(B_j / A_i) = \frac{P(A_i \cap B_j)}{P(A_i)} = \frac{P_{ij}}{P_{i.}}$$

Tableau de contingence théorique

Cas discret

Loi des probabilités totales
$$P(A_i) = \sum_j P(B_j) P(A_i / B_j)$$

A_i et B_j indépendants
$$P(A_i \cap B_j) = P(A_i) . P(B_j)$$

$$P_{ij} = P_{i.} P_{.j}$$

A \ B	B_1	B_2	
A_1	P_{11}	P_{12}	$P_{1.}$
A_2	P_{21}	P_{22}	$P_{2.}$
A_3	P_{31}	P_{32}	$P_{3.}$
	$P_{.1}$	$P_{.2}$	1

Tableau de probabilité conjointe

X \ Y	y_1	y_2	...	y_j	...	y_n	Total
x_1	f_{11}	f_{12}				f_{1n}	$f_1(x_1)$
x_2	f_{21}	f_{22}				f_{2n}	$f_1(x_2)$
$\vdots$	$\vdots$						
x_i	f_{i1}	f_{i2}		f_{ij}			$f_1(x_i)$
$\vdots$							
X_n	f_{n1}	f_{n2}				f_{nn}	$f_1(x_n)$
Total	$f_2(y_1)$	$f_2(y_2)$		$f_2(y_j)$		$f_2(y_n)$	1

Tableau de probabilité conjointe

Les probabilités

$$P(X=x_i) = f_1(x_i) = \sum_j^n f(x_i, y_j) = p_{i.}$$

$$P(Y=y_j) = f_2(y_j) = \sum_i^n f(x_i, y_j) = p_{.j}$$

Sont les fonctions de probabilité marginales de X et Y, respectivement.

On note $\sum_i^n f_1(x_i) = 1$ et $\sum_j^n f_2(y_j) = 1$

$$\sum_i^n \sum_j^n f(x_i, y_j) = 1$$

Fonction de répartition conjointe de X et Y

$$F(x,y) = P(X \leq x,\ Y \leq y) = \sum_{u \leq x} \sum_{v \leq y} f(u,v)$$

Tableau de probabilité conjointe

Exemple 4 : jet de 2 dés. On définit la v.a. X comme le nombre de points amenés par le premier dé et la v.a. Y la somme des points donnée par les deux dés.

Loi de probabilité

X \ Y	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	Loi marginale de X
1	**1/36**	**1/36**	**1/36**	**1/36**	**1/36**	**1/36**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**1/6**
2	**0**	**1/36**	**1/36**	**1/36**	**1/36**	**1/36**	**1/36**	**0**	**0**	**0**	**0**	**1/6**
3	**0**	**0**	**1/36**	**1/36**	**1/36**	**1/36**	**1/36**	**1/36**	**0**	**0**	**0**	**1/6**
4	**0**	**0**	**0**	**1/36**	**1/36**	**1/36**	**1/36**	**1/36**	**1/36**	**0**	**0**	**1/6**
5	**0**	**0**	**0**	**0**	**1/36**	**1/36**	**1/36**	**1/36**	**1/36**	**1/36**	**0**	**1/6**
6	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**1/36**	**1/36**	**1/36**	**1/36**	**1/36**	**1/36**	**1/6**
Loi marginale de Y	**1/36**	**1/18**	**1/12**	**1/9**	**5/26**	**1/6**	**5/26**	**1/9**	**1/12**	**1/18**	**1/36**	**1**

Tableau de probabilité conjointe

Formule des Probabilités conditionnelles

Si $$P_{i.} \neq 0 \quad P\left(Y=y_j / X=x_i\right) = P_{j/i} = \frac{P_{ij}}{P_{i.}}$$

De même, si $$P_{j.} \neq 0 \quad P\left(X=x_i / Y=y_j\right) = P_{j/i} = \frac{P_{ij}}{P_{.j}}$$

Formule des probabilités composées

$$P_{ij} \neq P_{i.} P_{j} / i = P_{.j} P_{ij}$$

v.a. continues

$$F(x,y) = P(X<x, Y<y)$$

$$f(x,y) = \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y}$$

Lois marginales

$$F_X(x) = P(X<x) = F(x,+\infty)$$

$$F_Y(y) = P(Y<y) = F(+\infty,y)$$

Densités marginales

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx$$

Lois Conditionnelles

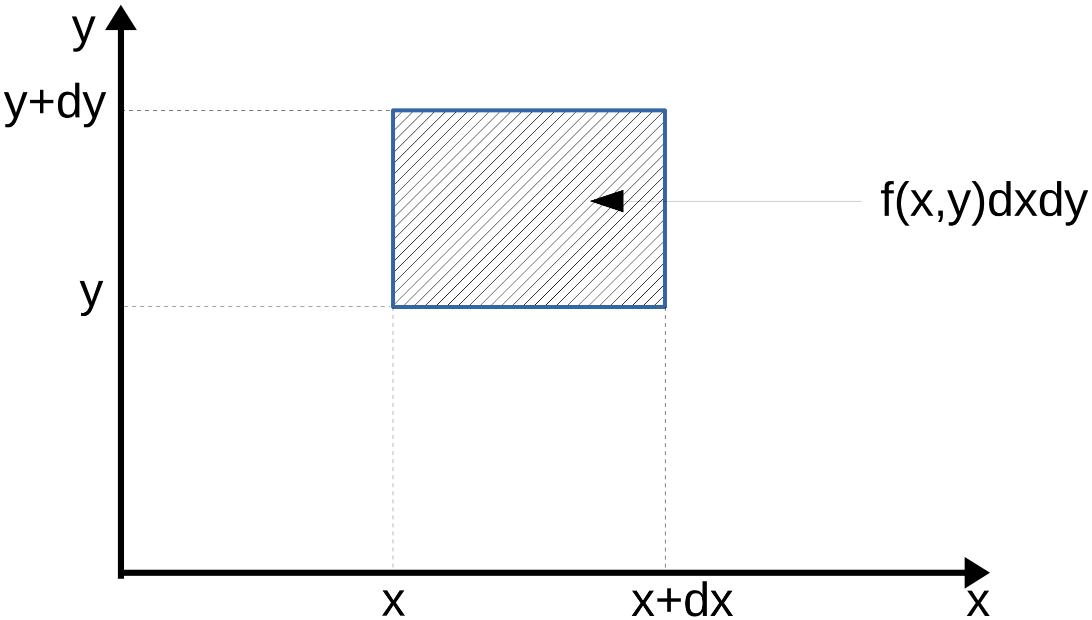
$$f_X(x/Y=y) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)}$$

et

$$f_Y(y/X=x) = \frac{f(x,y)}{f_X(x)}$$

Indépendance

$$f(x,y) = f_X(x) f_Y(y)$$



Par analogie avec le cas discret, en remplaçant les sommes par des intégrales, la fonction densité de probabilité conjointe X et Y est définie :

1°) $f(x,y) \geq 0$

2°) $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx\,dy = 1$

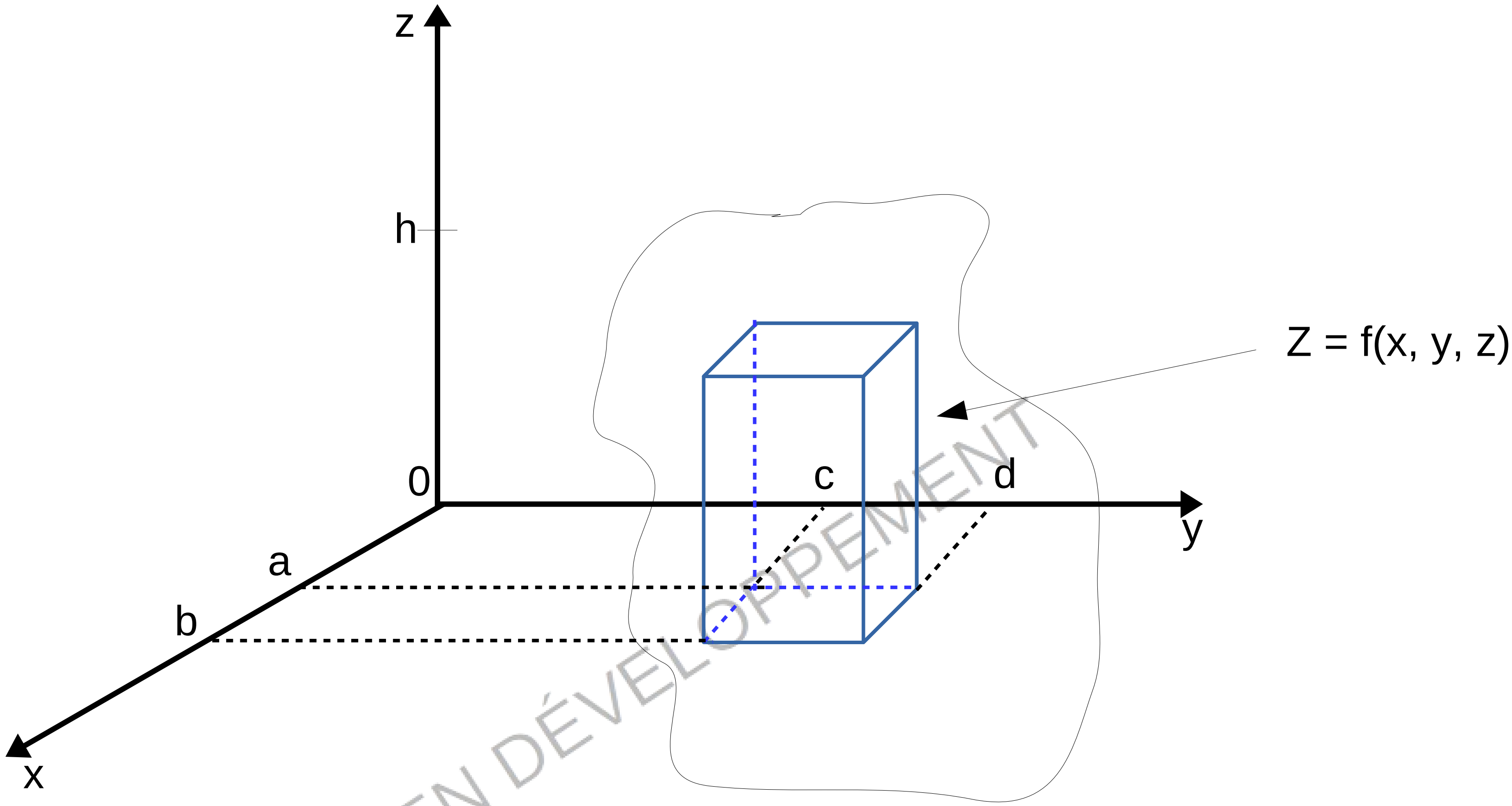
$$P(x \leq X \leq x+dx,\ y \leq Y \leq y+dy) = f(x,y)\,dx\,dy$$

Densités marginales

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy = f(x) \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx = f(y)$$

$z = f(x,y)$ Probabilité de surface

v.a. continues



Volume total limité par la surface formée par le plan (x, y) est égal à 1

$$P(a \le x \le b, c \le y \le d, 0 \le z \le h) = \int_{x=a}^{b} \int_{y=c}^{d} \int_{z=0}^{h} f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz$$

Z = f(x, y, z) : Probabilité de volume

Fonction de distribution conjointe de X et Y est :

$$F(x,y) = P(X \leq x, Y \leq y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f(u,v)\,du\,dv$$

donc $$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = f(x,y)$$

Fonction de distributions marginales

$$P(X \leq x) = F_1(x) = \int_{u=-\infty}^{x} \int_{v=-\infty}^{+\infty} f(u,v)\,du\,dv$$

$$P(Y \leq y) = F_2(y) = \int_{u=-\infty}^{+\infty} \int_{v=-\infty}^{y} f(u,v)\,du\,dv$$

v.a. indépendantes

Soient 2 v.a. X et Y discrètes. Si les événements X = x et Y = y sont indépendants pour tout x et y, on dit que X et Y sont 2 v.a. indépendantes.

Dans ce cas : $$P(X=x,\ Y=y) = P(X=x)P(Y=y)$$

ou $$f(x,y) = f_1(x)f_2(y)$$

Réciproquement, si pour tout x et y la fonction de probabilité conjointe $f(x,y) = f_1(x)f_2(y)$

alors X et Y sont indépendantes

Soient X et Y sont 2 v.a. continues
Si les événements X ≤ x et Y ≤ y sont indépendantes ont dit que les 2 v.a. X et Y sont indépendantes

$$P(X\leq x, Y\leq y) = P(X\leq x)P(Y\leq y)$$
$$F(x,y) = F_1(x)F_2(y)$$

Où $F_1(x)$ et $F_2(y)$ sont les fonctions de distributions marginales de X et Y respectivement

Inversement X et Y sont indépendants si pour tout x et y leur fonction de distribution conjointe F(x,y) peut être exprimée comme un point $F(x,y) = F_1(x).F_2(y)$

Distributions conditionnelles

La densité de probabilité conditionnelle de y liée par X = x est :

$$z(y/x) = \frac{f(x,y)}{f(x)} = \frac{f(x,y)}{\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy}$$

De même la densité de proba conditionnelle de X liée par Y = y est :

$$z(x/y) = \frac{f(x,y)}{f(y)} = \frac{f(x,y)}{\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx}$$

X et Y sont indépendantes si pour tout couple (x, y) : f(x, y) = f(x).f(y)

Loi de densité : v.a. à densité

(x, y) est dite à densité, ∃ f(x, y),

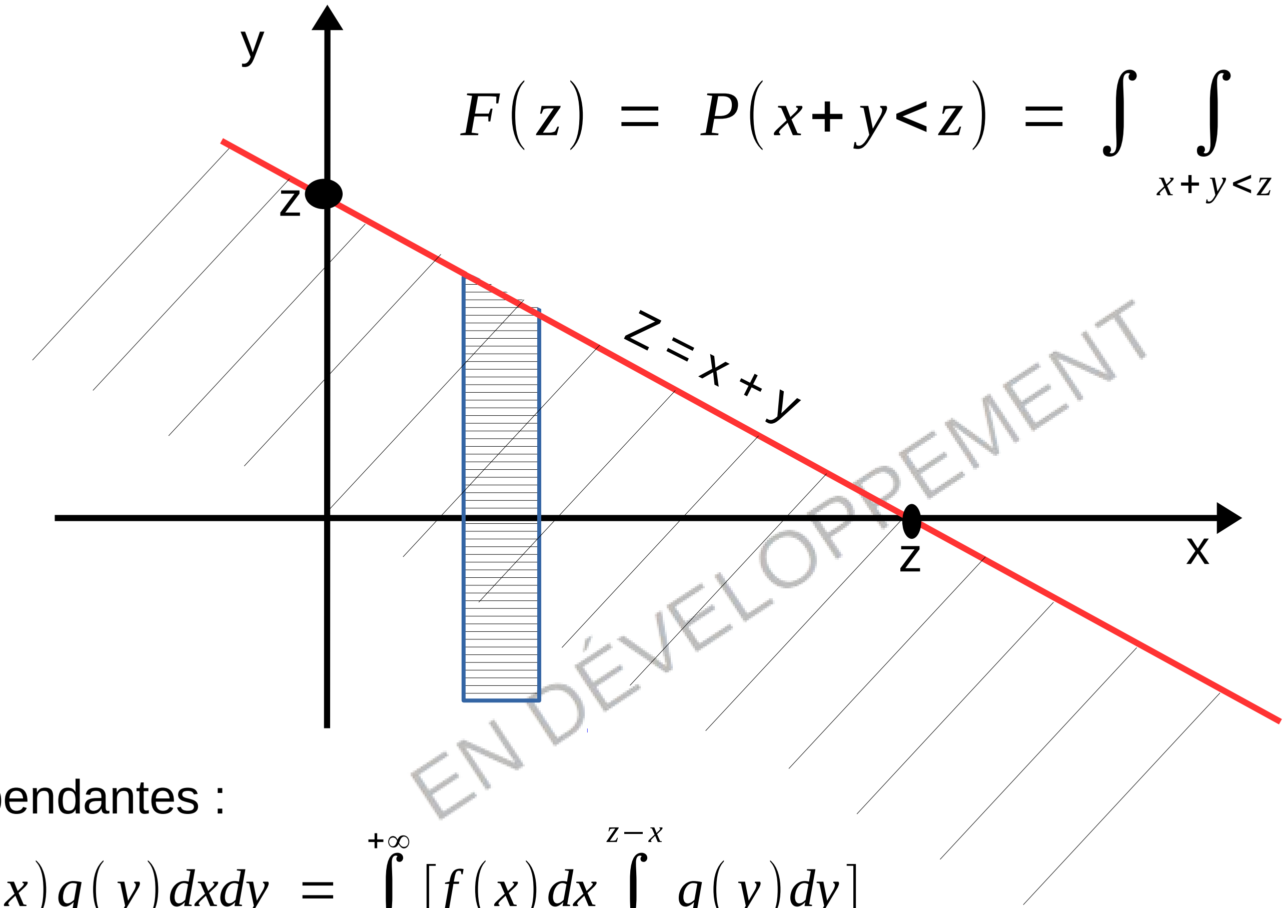
$$F_{X,Y}(x,y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(u,v)du.dv$$

1°) $f(x,y) \geq 0 \quad \forall \quad (x,y) \in \Re^2$

2°) $\int\int_{\Re^2} f_{X,Y}(x,y)dx\,dy = 1$

Z = x + y

F(z) = P(Z < z)



$$F(z) = P(x+y<z) = \int\int_{x+y<z} f(x,y)\,dxdy$$

si X et Y sont indépendantes :

$$F(z) = \int\int_{x+y<z} f(x)g(y)\,dxdy = \int_{-\infty}^{+\infty} [f(x)dx \int_{-\infty}^{z-x} g(y)dy]$$

$$F(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(z-x)f(x)\,dx$$ De même $$F(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(z-y)g(y)\,dy$$

D'où $$f(z) = \frac{d}{dz}\int_{-\infty}^{+\infty} F(z-y)g(y)\,dy$$

$$\boxed{f(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(z-y)g(y)\,dy = \int_{-\infty}^{+\infty} g(z-x)f(x)\,dx}$$

Produit de convolution

Notion de moment pour v.a. et une fonction de v.a.

Théorie de la moyenne

Soit une fonction g(X), X = v.a. discrète ou continue. La moyenne de g(X) est définie par :

$$E[g(X)] = \sum_i P_i g(x_i)$$ X = v.a. discrète

$$E[g(X)] = \int_D f(x) g(x) dx$$ X = v.a. continue

Si $g(X)$ est l'espérance mathématique, alors $E[g(X)] = E(X)$

Moment d'ordre 1

$$m_1 = E(X) = \sum_i P_i x_i$$ Cas discret

$$= \int_D x f(x) dx$$ Cas continu

La variable est centrée si : $\overline{X} = E(X) = 0$

Moment d'ordre k

$$m_k = E(X^k) = \sum_i P_i x_i^k$$ Cas discret

$$= \int_D x^k f(x) dx$$ Cas continu

Variance et Écart-type

Variance $\sigma_X^2 = E[(X-\overline{X})^2] = E[(X-E(X))^2]$

Cas discret : $\sigma_X^2 = \sum_i P_i (x_i - m_1)^2$ Cas continu : $\sigma_X^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x_i - m)^2 f(x)\, dx$

Théorique $\sigma_X^2 = E(X^2 - 2XE(X) + E^2(X)) = E(X^2) - m_1^2$

Changement de variable

Translation $\sigma_{X+a}^2 = E[X+a-\overline{(X+a)}]^2 = E(X-\overline{(X)})^2 = \sigma_X^2$

Conclusion : il y a une **invariance** lorsque x → x + a

Homothétie : $\sigma_{aX}^2 = E[aX - E(aX)]^2 = a^2[E(X^2) - (E(X))^2]$

$$\sigma_{aX}^2 = a^2(m_2 - m_1^2) = a^2 \sigma_X^2$$

On a donc : X → aX $\sigma_{aX}^2 = a^2 \sigma_X^2$

Exemple 5 : soit X une v.a. discrète

X	1	2	3	...	n
P(X)	p	qp	q^2p	...	$q^{n-1}p$

Avec p +q = 1

a) Vérifier que la limite p, qp, …, $q^{n-1}p$ a une

b) Déterminer E(X) et σ(X)

a) $p \geq 0$ $q \geq 0$ $p < 1$ $q < 1$

$$\sum_i P_i = p(1 + q + q^2 + \ldots\ldots) = p\frac{1}{1-q} = 1$$

b) $$E(X) = p + 2qp + 3q^2p + \ldots\ldots. = p(1 + 2q + 3q^2 + \ldots)$$

$$= p\frac{d}{dq}(q + q^2 + q^3 + \ldots) = p\frac{d}{dq}(\frac{q}{1-q}) = p(\frac{1 - q + q}{(1 - q)^2})$$

$$= p(\frac{1}{(1 - q)^2}) \rightarrow E(X) = \frac{1}{p} = m_1$$

Variance et Écart-type

$$E(X^2) = p(1 + q2^2 + q^2 3^2 + ...) = p(1 + 4q + 9q^2 + ...)$$

$$= p\frac{d}{dq}(q + 2q^2 + 3q^3 + ...) = p\frac{d}{dq}(\frac{d}{dq}(\frac{q}{1-q}))$$

$$E(X^2) = p\frac{d}{dq}(\frac{q}{(1-q)^2}) = p\frac{1+q}{(1-q)^3} = \frac{1+q}{p^2}$$

$$\sigma_X^2 = m_2 - m_1^2 = \frac{1+q}{p^2} - \frac{1}{p^2} = \frac{q}{p^2}$$

$$\boxed{\sigma_X^2 = \frac{q}{p^2} \rightarrow \sigma_X = \frac{\sqrt{q}}{p}}$$

Inégalités de Bienaymé–Tchebychefv

Une v.a. X admet une valeur moyenne ($\overline{X}$) et un écart-type σ

Si la somme des nombres positifs arbitraire, on a :

i) $P\left(\left|X - \overline{X}\right| \geq \epsilon\right) \leq \dfrac{\sigma^2}{\epsilon^2}$

$$\epsilon = k\sigma$$

$$P\left(\left|X - \overline{X}\right| \geq k\sigma\right) \leq \frac{1}{k^2}$$

ii) $P\left(\left|X - \overline{X}\right| < k\sigma\right) \geq 1 - \dfrac{1}{k^2}$

<u>c-a-d</u>

Dans l'intervalle $\left[\bar{x} - k\sigma \text{ , } \bar{x} + k\sigma\right]$ contient au moins la fonction $1 - \dfrac{1}{k^2}$ des données

Hors de l'intervalle $\dfrac{1}{k^2}$

Fonction caractéristique d'une variable aléatoire

Définition générale

Si X est une v.a. et g(X) une fonction de cette variable

$$E(g(X)) = \sum_i P_i g(x_i)$$

Cas discret

$$E(g(X)) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) g(x) dx$$

Cas continu

On peut choisir g(x) par la fonction e^{jtx} avec t paramètre réel non aléatoire :

$$e^{jtx} = \cos(tx) + j\sin(tx)$$

φ la fonction caractéristique : $X \rightarrow \phi(t) = E(e^{jtx})$

1ere FC

$$\phi(t) = \sum_{k=0} p_k e^{jtx_k}$$

$$\phi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{jtx} f(x) dx$$

2eme FC

$$\ln(\phi(t)) = \psi(t)$$

Fonction caractéristique d'une variable aléatoire

Propriétés

a) La fonction caractéristique Φ(t) est une fonction continue

b) $\phi(0) = 1$

c) $|\phi(t)| \leq 1$

d) $\phi(t) = 1 + jtm_1 + \dfrac{(jt)^2}{2!}m_2 + \ldots + \dfrac{(jt)^k}{k!}m_k + \ldots..$

$$\phi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(jt)^k}{k!} m_k$$

Avec

$$m_k = \frac{1}{j^k} \cdot \frac{d^k \phi(t)}{dt^k}$$

e) La continuité de Φ(t) permet de passer d'une loi discrète à une loi continue

Fonction caractéristique d'une variable aléatoire

Exemple 6 : $x \geq 0$ $\quad f(x) = e^{-x}$ la fonction densité de probabilité de x

Déterminer sa Φ(t) ? En déduire les moments d'ordre 1, 2, 3 et l'écart-type.

$$\phi(t) = \int_0^\infty e^{-x} e^{jtx} dx = \int_0^\infty e^{-(1-jt)x} dx$$

$$= -\frac{1}{1-jt}\left[e^{-(1-jt)x}\right]_0^\infty = \frac{1}{1-jt}$$

Dérivé en série de $\dfrac{1}{1-jt}$

$$\phi(t) = 1 + jt + (jt)^2 + \ldots + (jt)^n + \ldots = 1 + jt + 2!\frac{(jt)^2}{2!} + \ldots + n!\frac{(jt)^n}{n!} + \ldots$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} n!\frac{(jt)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(jt)^n}{n!} m_n$$

Donc $m_1 = 1 \quad m_2 = 2! \quad m_3 = 3! \quad avec \quad m_n = n!$

$$\sigma^2 = m_2 - m_1^2 = 2 - 1 = 1 \rightarrow \sigma = 1$$

Développement de Φ(t)

Les coefficients du développement de Φ(t) correspondent aux divers moments de la v.a. X

On démontre que : $\phi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(jt)^k}{k!} m_k = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(jt)^k}{k!} m_k$ Avec $m_0 = 1$

Les m_k sont déterminés par identification

X continu

$$\phi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{jtx} f(x)\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(jt)^k}{k!} x^k\right) f(x)\, dx \qquad \phi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(jt)^k}{k!} \int_{-\infty}^{+\infty} x^k f(x)\, dx$$

On a bien $\boxed{\phi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(jt)^k}{k!} m_k}$

X discret

$$\phi(t) = \sum_{i}^{\infty} P_i e^{jtx_i} = \sum_{i=1}^{\infty} P_i \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(jt)^k}{k!} x_i^k\right) \qquad \phi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(jt)^k}{k!} \sum_{i=1}^{\infty} P_i x_i^k$$

On a bien $\boxed{\phi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(jt)^k}{k!} m_k}$

Propriétés des dérivées de Φ(t)

$$\phi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{jtx} f(x)\,dx$$

$$\phi'(t) = j\int_{-\infty}^{+\infty} e^{jtx}\, x f(x)\,dx \qquad \phi'(0) = j\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,dx$$

$$\phi''(t) = j^2\int_{-\infty}^{+\infty} e^{jtx}\, x^2 f(x)\,dx \qquad \phi''(0) = -\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\,dx = -\overline{x^2}$$

Donc $\phi(0) = 1 \qquad \phi'(0) = jE(x) \qquad \phi''(0) = -E(x^2)$

Exemple 7 : X une v.a.

$$f(x) = 1 \qquad 0 \le x \le 1$$

$$f(x) = 0 \qquad ailleurs$$

$$\phi(t) = \int_0^1 e^{jtx}\,dx = \frac{e^{jt}-1}{jt}$$

$$\phi(t) = \frac{1}{jt}\left[\left(1 + jt + \frac{(jt)^2}{2!} + \ldots..\right) - 1\right] = 1 + \frac{(jt)}{2!} + \frac{(jt)^2}{3!} + \ldots.. + \frac{(jt)^k}{(k+1)!} + \ldots..$$

$$= 1 + \frac{(jt)^1}{1!}\cdot\frac{1}{2} + \frac{(jt)^2}{2!}\cdot\frac{1}{3} + \ldots.. + \frac{(jt)^k}{k!}\cdot\frac{1}{k+1} + \ldots..$$

$$\boxed{m_k = \frac{1}{k+1}}$$

Covariance et coefficient de corrélation linéaire

X et Y 2 v.a. $$V(X+Y) = V(X)+V(Y)+2E[(X-E(X))(Y-E(Y))]$$

On pose par définition $$Cov(X,Y) = E[(X-E(X))(Y-E(Y))]$$

Propriétés :

$$Cov(X,Y) = Cov(Y,X)$$

$$Cov(X,Y+Z) = Cov(X,Z)+Cov(X,Y)$$

$$Cov(X,\lambda Y) = \lambda Cov(Y,X)$$

$$Cov(X,Y) = E(XY)-E(X)E(Y)$$

<u>Cas particulier :</u> X et Y 2 v.a. indépendantes $Cov(X,Y) = 0$ La réciproque est fausse

Mesure de la dépendance entre 2 v.a. :

$$\rho = \frac{Cov(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y} \; ; \quad -1 \leq \rho \leq +1$$

<u>Coefficient de corrélation linéaire</u>

Inégalité de Schwarz

$$[E(XY)]^2 \leq E(X^2).E(Y^2)$$

Soit $E[(X+\lambda Y)^2] = E(X^2)+2\lambda E(XY)+\lambda^2 E(Y^2)$

$$\Delta' \leq 0 \;; \qquad \Delta' = (E(XY))^2 - E(X^2)E(Y^2) \leq 0$$

Puisque l'inégalité ≥ 0 est toujours vraie quelque soit λ réel

Condition nécessaire et suffisante

Pour que l'inégalité de Schwarz soit une égalité, il faut et il suffit que les 2 variables soient proportionnelles.

$$E(XY) = \sqrt{E(X^2)E(Y^2)} \;\rightarrow\; X = aY$$

Variables liées

Covariance et coefficient de corrélation linéaire

Application au coefficient de corrélation linéaire

$$\rho = \frac{Cov(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y}$$

$$\rho = \pm 1 \quad si \ |Cov(X,Y)| = \sigma_X \sigma_Y$$

Donc si $(X-E(X))$ et $(Y-E(Y))$ sont proportionnelles

Soit $X-E(X) = a[Y-E(Y)]$

$$\rho = \pm 1 \quad si \ \exists \ \text{relation linéaire entre } X \text{ et } Y$$

$\rho = 0$ Pas de relation linéaire mais possibilité de relation fonctionnelle $(E_X, X \text{ et } X^2)$: X et Y non corrélées

$\rho > 0$ X et Y positivement corrélées

$\rho < 0$ X et Y négativement corrélées


Merci pour votre attention
Des questions?