École Supérieure Polytechnique **2024 - 2025**
Département Génie Informatique

TD 2-Bis : Variables Aléatoires Continues

----0----

Exercice 1

Soit la fonction de répartition F d'une variable aléatoire X définie par :

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq x_0 \ (x_0 > 0) \\ 1 - \left(\frac{x_0}{x}\right)^2, & x > x_0 \end{cases}$$

1) Représenter graphiquement F et donner l'expression de sa densité de probabilité.
2) Calculer l'espérance mathématique de X, E(X).
3) Calculer la probabilité $P([2x_0, 3x_0])$.

Exercice 2

Une entreprise d'autocars dessert une région montagneuse. En chemin, les véhicules peuvent être bloqués par des incidents extérieurs comme des chutes de pierres, des troupeaux sur la route, etc. Un autocar part de son entrepôt. On note D la variable aléatoire qui mesure la distance en kilomètres que l'autocar va parcourir jusqu'à ce qu'il survienne un incident. On admet que la variable D suit une loi de densité :

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ Ae^{-\frac{x}{82}}, & x \geq 0 \end{cases}$$

1) Déterminer la probabilité de A pour que la fonction f soit une densité de probabilité.
2) Calculer la probabilité pour que la distance parcourue sans incident soit comprise entre 50 et 100 Km, soit supérieure à 25 Km.
3) Sachant que l'autocar a déjà parcouru 350 Km sans incident, quelle est la probabilité qu'il n'en subisse pas non plus au cours des 25 prochains Km ? Comparez avec le résultat précédent.
4) On veut déterminer la distance moyenne parcourue sans incident. L'entreprise possède n autocars. Les distances parcourues par chacun des autocars entre l'entrepôt et le lieu où survient un incident sont des variables aléatoires deux à deux indépendantes et de même loi exponentielle donné par la densité f. On note X_d la variable aléatoire égale au nombre d'autocars n'ayant subi aucun incident après avoir parcouru d km. Montrer que X_d suit une loi binomiale et déterminez les paramètres. En déduire le nombre moyen d'autocars n'ayant subi aucun incident après avoir parcouru d km.

Exercice 3

Soit la fonction f définie par :

$$f(x,y) = \begin{cases} a(x + y^2), & si\ x \in [0,1]\ et\ y \in [0,1] \\ 0, & sinon \end{cases}$$

1) Calculer a pour que f soit une densité de probabilité.
2) Calculer les densités marginales de X et de Y.
3) X et Y sont-elles indépendantes ?
4) Calculer E(X), E(Y), V(X) et V(Y).
5) Calculer la covariance de X et Y.
6) Calculer la densité de la loi conditionnelle de Y sachant que X = x.
7) Calculer la densité de la loi conditionnelle de X sachant que Y = y.

Exercice 5

Soit la fonction f définie par :

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{3}{5}(xy + x^2), & si\ x \in [0,1]\ et\ y \in [0,2] \\ 0, & sinon \end{cases}$$

1) Montrer que f est une densité de probabilité.
2) Calculer les densités marginales de X et de Y.
3) Calculer E(X), E(Y), V(X), V(Y), Cov(X,Y).
4) X et Y sont-elles indépendantes ?