7 * : Vindkastet

En aprildag med varma sydvindar tränar Pelle bollkast på sportplanen. Han kastar i väg bollen österut med utkastvinkeln (i vertikalplanet) 30°, hastigheten 25 m/s och höjden 1.4 m. Pelle har fötterna i origo i ett koordinatsystem med horisontella x- och y-axlar, x åt öster, y åt norr (i vindens riktning). Differentialekvationerna för bollbanan blir

$$\ddot{x} = -q\,\dot{x},\;\; \ddot{y} = -q\,(\dot{y} - a(z)),\;\; \ddot{z} = -9.81 - q\,\dot{z},\;\; \text{där}\;\; q = c\,\sqrt{\dot{x}^2 + (\dot{y} - a(z))^2 + \dot{z}^2}.$$

Pricken över funktionen betyder derivering med avseende på tiden, dvs $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$, $\ddot{y} = \frac{d^2y}{dt^2}$, etc

Luftmotståndskoefficienten c beror av bollradien och massan och är för Pelles boll $c = 0.070$. Vindstyrkan är 7 m/s vid marken och ökar den här aprildagen med höjden enligt: $a(z) = 7 + 0.35z$.

Visa hur differentialekvationerna kan skrivas om på vektorform till ett system av första ordningens differentialekvationer och ange startvektorns komponenter.

(a) Använd en effektiv algoritm som bestämmer kastbanan tills bollen nått mark och beräknar nedslagsplatsen noggrant. Någon form av interpolation kan behövas eftersom räkningarna inte ska utföras med ett onödigt kort tidssteg. Bedöm noggrannheten i resultatet.

Rita kastbanan — plotkommandot för att rita en kurva i 3D är `plot3(x,y,z)` där `x`, `y` och `z` är vektorer som innehåller kurvpunkternas koordinater.

(b) Pelle vill att bollen trots vinden ska slå ned rakt österut, alltså på x-axeln. Hur ska han vända sig i kastögonblicket för att åstadkomma det? Hans utkastvinkel i vertikalplanet är fortfarande 30°. Utvidga programmet med en effektiv algoritm för detta.

"Effektiv algoritm" betyder här att en algoritm i denna kurs. Att testa sig fram räcker inte (för att få hög noggrannhet).

(c) Pelles boll studsar faktiskt när den slår ner på marken. Bollens hastighetskomponenter blir vid studsen samma i x- och y-led som de var just vid nedslaget, medan hastigheten i z-led byter tecken.

Lägg på en lagom dämpning, till exempel en dämpningsfaktor på 0.80 vid varje studs. Visa en bild över bankurvan för den studsande bollens fem första studsar, när Pelle kastar i väg bollen så att första nedslaget hamnar på x-axeln.

(d) **Utvidgning.** Nu vill Pelle prova bollträff mot en liten grej på toppen av en 3.5 meter hög stolpe, 6 m österut och 2 m åt norr, alltsa vid $x_{pryl} = 6.0, y_{pryl} = 2.0, z_{pryl} = 3.5$. Differentialekvationerna är oförändrade, samma boll och samma blåst). Pelle har samma position som förut men han är lite försiktigare, utkasthastigheten är 15 m/s. Pelles första försök görs med utkastvinkeln 60^o i vertikalplanet och vridning 15^o medurs så att näsan pekar ungefär ostsydost. Skriv en algoritm som beräknar bollbanan och med god precision (viss interpolation behövs!) anger y- och z-koordinaterna när bollen finns vid $x = x_{pryl}$. Tänk ut en smart algoritm for att hjälpa Pelle att med så få försok som mojligt träffa grejen på stolpen. Det är två villkor att uppfylla vid

$x = x_{pryl}$: rätt värden på y och z och två obekanta vinklar att bestämma. Det leder till ett icke-linjärt ekvationssystem som ska ställas upp och lösas numeriskt. Lös det icke-linjära ekvationssystemet med Newtons metod. Rita upp stolpen och Pelles lyckade bollkast som slår ned grejen från stolpen.

Skriftlig redovisning:

7.1 Differentialekvationen på standardform med (vektorer), dvs på formen

$$\dot{\mathbf{v}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{v}(t)).$$

där $\mathbf{v}(t) \in \mathbb{R}^6$.

7.2 a) Nedslagsplatsens x och y koordinater med absolutfel mindre än 10^{-4}.

7.3 a) En tredimensionell figur med kastbanan

7.4 b) Den vinkel (med absolutfel mindre än 10^{-4}) som gör att bollen landar på x-axeln

7.5 c) En figur med studs, med dämpningsfaktor 0.8.

7.6 d) Startvärde för iterativ metod

7.7 d) Figur med medl lösningen

7.8 d) Vinklarna som ger det korrekta kastet (med absolutfel mindre än 10^{-4})

version: EJ 2017-04-23
Vissa projekt baserade på material från GE, JE, OR, mfl