Travaux Pratiques (à rendre)

Exercice 1. Déterminer les extrema locaux des fonctions suivantes sur $\mathbb{R}^2$:

$$f_1(x,y) = x^3+3xy^2-15x-12y, \qquad f_2(x,y) = 3x^3+xy^2-xy,$$
$$f_3(x,y) = x^4+\tfrac{1}{3}y^3-4y-2, \qquad f_4(x,y) = x^3+xy^2-x^2y-y^3.$$

Pour chaque fonction, montrer que les extrema locaux ne sont pas globaux.

Exercice 2

On fait les rappels suivants :

Algorithme du gradient à pas fixe

L'algorithme du gradient à pas fixe est une méthode de descente utilisant un pas fixe et la stratégie de Cauchy pour le choix de la direction de descente :

GradFix(f, x_0, pas, tolerance)
$x \leftarrow x_0$
Tant que : $\| \nabla f(x) \| >$ tolerance
  $x \leftarrow x - \text{pas} \star \nabla f(x)$
Retourner x

Algorithme du gradient à pas optimal

L'algorithme du gradient à pas optimal combine la stratégie de Cauchy pour la détermination de la direction de descente avec, à chaque étape, une recherche du pas optimal minimisant : $\varphi(t) = f(x+t\,u)$, où : $u = -\nabla f(x)$ est la direction de descente au point x :

GradOpt(f, x_0, pas, tolerance)
$x \leftarrow x_0$
Tant que : $\| \nabla f(x) \| >$ tolerance
  $u = -\nabla f(x)$
  Calculer le pas optimal $t^\star$
  $x \leftarrow x + t^\star \star u$
Retourner x

On considère la fonction $f: R^2 \to R$ définie par $f(x_1,x_2) = 2x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2 - 3x_1 - x_2 + 4$.

1. Monter qu'il existe un unique $\bar{x} \in R^2$ tel que $\bar{x} = \min_{x\in R^2} f(x)$ et le calculer.

2. Calculer le premier itéré donné par l'algorithme du gradient à pas fixe (GPF) et du gradient à pas optimal (GPO), en partant de $(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}) = (0,0)$, pour un pas de $\alpha = 0.5$ dans le cas de GPF.

Travail à rendre :

Il est demandé de rendre un rapport à l'enseignant dans **un délai de deux (2) semaine**s au plus tard.

Ce rapport doit répondre aux questions du TP.