

# Independensi



Ali Akbar Septiandri

Universitas Al Azhar Indonesia

April 22, 2019

# Ulasan

# Probabilitas Bersyarat

---

Probabilitas bersyarat  $P(E|F)$  adalah probabilitas  $E$  terjadi, **jika diketahui** bahwa  $F$  telah terjadi. Dengan kata lain,  $F$  menjadi ruang sampel yang baru.

$$P(E|F) = \frac{P(E, F)}{P(F)}$$

## Aturan Rantai Probabilitas

---

$$P(E, F, G, \dots) = P(E)P(F|E)P(G|E, F)\dots$$

## Contoh

---

*Linda is 31 years old, single, outspoken and very bright. She majored in philosophy. As a student, she was deeply concerned with issues of discrimination and social justice, and also participated in anti-nuclear demonstrations. (Tversky & Kahneman, 1993)*

Which one is more probable?

1. Linda is active in the feminist movement.
2. Linda is a bank teller.
3. Linda is a bank teller and is active in the feminist movement.

# Teorema Bayes

---

$$\underbrace{P(C|M)}_{\text{posterior}} = \frac{\overbrace{P(M|C)}^{\text{likelihood}} \overbrace{P(C)}^{\text{prior}}}{\underbrace{P(M)}_{\text{normalizing constant}}}$$

# Independensi

# Independensi

---

Dua kejadian dikatakan **independen** jika kita dapat mengalikan probabilitas keduanya untuk mendapatkan probabilitas keduanya terjadi.

$$P(E, F) = P(E)P(F) \Leftrightarrow E \perp F$$



## Contoh Pelemparan Dua Dadu (1)

---

$$P(D_1 = 1, D_2 = 1) = ?$$

## Contoh Pelemparan Dua Dadu (1)

---

$$P(D_1 = 1, D_2 = 1) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$$

## Contoh Pelemparan Dua Dadu (2)

---

$$P(D_1 = 1, D_1 + D_2 = 4) = \dots$$

## Contoh Pelemparan Dua Dadu (2)

---

$$P(D_1 = 1, D_1 + D_2 = 4) = \dots$$

Apakah perhitungan di bawah ini benar?

$$P(D_1 = 1) \cdot P(D_1 + D_2 = 4) = \frac{1}{6} \cdot \frac{3}{36}$$

## Contoh Pelemparan Dua Dadu (2)

---

$$\begin{aligned}P(D_1 = 1, D_1 + D_2 = 4) &= P(D_1 = 1|D_1 + D_2 = 4)P(D_1 + D_2 = 4) \\&= P(D_1 + D_2 = 4|D_1 = 1)P(D_1 = 1) \\&= \frac{1}{36}\end{aligned}$$

## Independensi pada Probabilitas Bersyarat

---

$P(E|F) = P(E)$  jika dan hanya jika  $E, F$  independen.

## Independensi pada Probabilitas Bersyarat

---

$P(E|F) = P(E)$  jika dan hanya jika  $E, F$  independen.

Dampaknya

Jika  $E \perp F$ , maka  $P(E|F) = P(E|F')$ .

## Tiga Kejadian

---

$E, F, G$  independen jika:

$$P(E, F, G) = P(E)P(F)P(G)$$

dan

$$P(E, F) = P(E)P(F)$$

dan

$$P(E, G) = P(E)P(G)$$

dan

$$P(F, G) = P(F)P(G)$$



## Independensi dan Hubungan Sebab-Akibat

---

Jika dua kejadian **tidak saling memengaruhi**, dan **tidak ada faktor yang tidak diketahui** yang dapat berdampak pada keduanya, maka dua kejadian tersebut kemungkinan besar independen.

# Independensi dan Hubungan Sebab-Akibat

---

Jika dua kejadian **tidak saling memengaruhi**, dan **tidak ada faktor yang tidak diketahui** yang dapat berdampak pada keduanya, maka dua kejadian tersebut kemungkinan besar independen.

## Peringatan

Akan tetapi, jika dua kejadian bersifat independen, **bukan berarti** bahwa mereka **tidak memengaruhi satu sama lain**.

Artinya adalah setelah kita tahu suatu kejadian terjadi, **tidak** akan **memberi informasi tambahan** tentang kejadian yang lainnya.

## Melempar Dadu (Lagi!)

---

**E:** Kejadian  $D_1 = 1$

**F:** Kejadian  $D_2 = 6$

**G:** Kejadian  $D_1 + D_2 = 7$

Apakah ketiganya independen?

## Melempar Koin (Bias)

---

Sebuah koin akan dilempar sebanyak  $n$  kali, dengan peluang muncul angka adalah  $\theta$  dan peluang muncul gambar adalah  $(1 - \theta)$ . Berapa peluang munculnya:

1.  $E$ :  $n$  angka

## Melempar Koin (Bias)

---

Sebuah koin akan dilempar sebanyak  $n$  kali, dengan peluang muncul angka adalah  $\theta$  dan peluang muncul gambar adalah  $(1 - \theta)$ . Berapa peluang munculnya:

1.  $E$ :  $n$  angka
2.  $F$ :  $n$  gambar

## Melempar Koin (Bias)

---

Sebuah koin akan dilempar sebanyak  $n$  kali, dengan peluang muncul angka adalah  $\theta$  dan peluang muncul gambar adalah  $(1 - \theta)$ . Berapa peluang munculnya:

1. **E**:  $n$  angka
2. **F**:  $n$  gambar
3. **G**:  $k$  angka terlebih dahulu, lalu  $n - k$  gambar

## Melempar Koin (Bias)

---

Sebuah koin akan dilempar sebanyak  $n$  kali, dengan peluang muncul angka adalah  $\theta$  dan peluang muncul gambar adalah  $(1 - \theta)$ . Berapa peluang munculnya:

1. **E**:  $n$  angka
2. **F**:  $n$  gambar
3. **G**:  $k$  angka terlebih dahulu, lalu  $n - k$  gambar
4. **H**: sejumlah  $k$  angka

## Melempar Koin (Bias)

---

Sebuah koin akan dilempar sebanyak  $n$  kali, dengan peluang muncul angka adalah  $\theta$  dan peluang muncul gambar adalah  $(1 - \theta)$ . Berapa peluang munculnya:

1.  $n$  angka,  $P(E) = \theta^n$
2.  $n$  gambar,  $P(F) = (1 - \theta)^n$
3.  $k$  angka terlebih dahulu, lalu  $n - k$  gambar,  $P(G) = \theta^k(1 - \theta)^{n-k}$
4. sejumlah  $k$  angka,  $P(H) = \binom{n}{k}\theta^k(1 - \theta)^{n-k}$



## Independensi Bersyarat

## Independensi Bersyarat

---

Dua kejadian dikatakan **independen bersyarat** jika kita dapat mengalikan probabilitas bersyarat keduanya untuk mendapatkan probabilitas bersyarat keduanya terjadi.

$$P(E, F|G) = P(E|G)P(F|G) \Leftrightarrow (E \perp F)|G$$

## Catatan

---

Secara umum,

$$E \perp F$$

tidak berimplikasi pada

$$(E \perp F) | G$$

atau sebaliknya.

## Melempar Dadu (Lagi!)

---

**E:** Kejadian  $D_1 = 1$

**F:** Kejadian  $D_2 = 6$

**G:** Kejadian  $D_1 + D_2 = 7$

Bandingkan:

1.  $P(E, F)$
2.  $P(E, F|G)$

# Menyiram Kebun

---

**E:** Kejadian bahwa hari ini hujan

**F:** Kejadian bahwa penyiram tanaman hidup

Katakanlah  $E$  dan  $F$  independen.

**G:** Kejadian bahwa rumput basah

Anda mengobservasi bahwa rumputnya basah. Peluang bahwa terjadi hujan atau penyiram tanaman hidup menjadi lebih tinggi!

$$P(E|G) > P(E)$$

$$P(F|G) > P(F)$$

# Menyiram Kebun

---

**E:** Kejadian bahwa hari ini hujan

**F:** Kejadian bahwa penyiram tanaman hidup

Katakanlah  $E$  dan  $F$  independen.

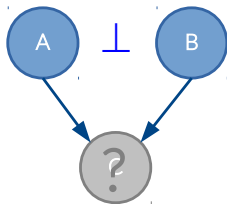
**G:** Kejadian bahwa rumput basah

Kalau Anda tahu bahwa penyiram tanamannya menyala, apakah keyakinan Anda akan berubah?

$$P(E|F, G) < P(E|G)$$

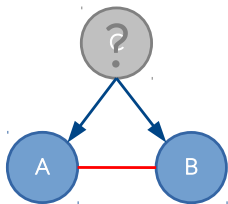
# A graphical representation

A, B independent!

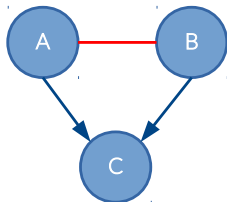


C is unknown

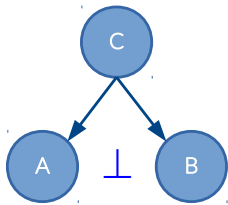
A, B **not** independent



Condition on C



A, B **not** conditionally independent



A, B conditionally independent!

Materi kuliah ini diadaptasi dari:

CS109: Probability for Computer Scientists

5 - Independence by Will Monroe



Pekan depan:

# Peubah Acak

Terima kasih