Peubah Acak

Ali Akbar Septiandri

Universitas Al Azhar Indonesia

April 22, 2019

Ulasan

Independensi

Dua kejadian dikatakan **independen** jika kita dapat mengalikan probabilitas keduanya untuk mendapatkan probabilitas keduanya terjadi.

$$P(E, F) = P(E)P(F) \Leftrightarrow E \perp F$$

Independensi Bersyarat

Dua kejadian dikatakan **independen bersyarat** jika kita dapat mengalikan probabilitas bersyarat keduanya untuk mendapatkan probabilitas bersyarat keduanya terjadi.

$$P(E, F|G) = P(E|G)P(F|G) \Leftrightarrow (E \perp F)|G$$

Peubah Acak

Peubah Acak

Sebuah peubah acak akan mengambil suatu nilai secara probabilistik.

Peubah Acak

Sebuah peubah acak akan mengambil suatu nilai secara probabilistik.

Example

Dua dadu dilempar. Berapa peluang munculnya jumlah muka kedua dadu adalah 2?

$$P(X = 2) = \frac{1}{36}$$

Dalam kasus ini, jumlah muka kedua dadu direpresentasikan dalam satu variabel X.

Peubah acak

$$\neq$$

Kejadian

$$P(\underbrace{Y = 1}_{kejadian}) = \frac{3}{8}$$

Lemparan Koin

n lemparan, peluang keluarnya angka adalah θ, peluang keluarnya gambar adalah $(1-\theta)$

Peluang keluarnya tepat k angka adalah

$$P(X=k)=\binom{n}{k}\theta^k(1-\theta)^{n-k}$$

Kalian akan mengenal rumus ini nanti dengan nama distribusi Binomial

Penggunaan Distribusi Binomial

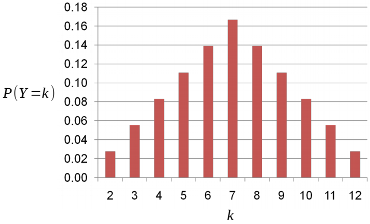
Selain digunakan untuk pelemparan koin, distribusi Binomial juga dapat digunakan untuk menggambarkan:

1. Menjalankan n program, dengan peluang ada program yang *crash* θ
2. Menunjukkan iklan ke n orang, dengan peluang diklik θ
3. *Exit poll* pemilu presiden dari n responden, dengan peluang memilih calon A θ

Probability mass function

The **probability mass function** (PMF) of a random variable is a function from values of the variable to probabilities.

$$p_Y(k) = P(Y = k)$$



Probability mass function

$$P(Y = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

value of
random
variable

probability

(function
of *k*)

Probability mass function

$$p_Y(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

value of random variable

probability

(function of *k*)

Probability mass function

$$p(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

value of random variable

probability

(function of *k*)

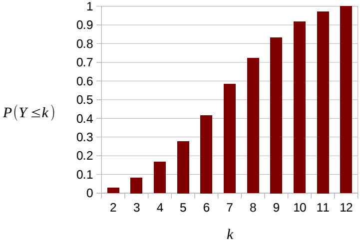
Bagaimana diagram batang dari PMF untuk pelemparan satu dadu?

Bagaimana dengan dua dadu?

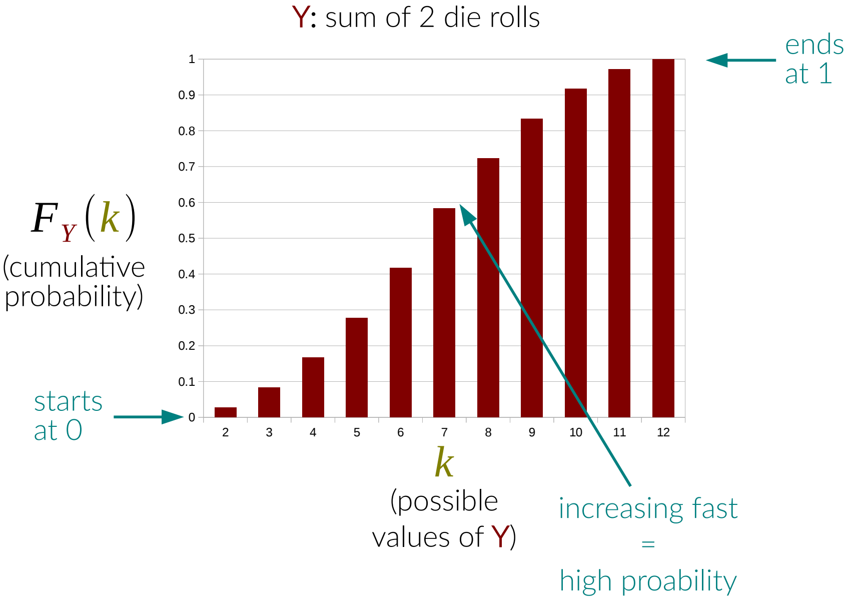
Cumulative distribution function

The **cumulative distribution function** (CDF) of a random variable is a function giving the probability that the random variable is **less than or equal to** a value.

$$F_Y(k) = P(Y \le k)$$



CDF for sum of two dice

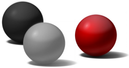


Ekspektasi

Ekspektasi dari sebuah peubah acak adalah "rata-rata" dari nilai variabel dengan bobot probabilitasnya.

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{x:p(x)>0} p(x) \cdot x$$

Drawing from a hat



11 balls in a hat:

3 red –\$1

5 white \$0

3 black +\$1

Draw 3.

W: total winnings

E[W] = ?

$$P(W=0)=\frac{55}{165}\cdot 0= 0 \ +$$

$$P(W=-1)=\frac{39}{165}\cdot -1= \frac{-39}{165}+ \qquad P(W=1)=\frac{39}{165}\cdot 1= \frac{39}{165}+$$

$$P(W=-2)=\frac{15}{165}\cdot -2= \frac{-30}{165}+ \qquad P(W=2)=\frac{15}{165}\cdot 2= \frac{30}{165}+$$

$$P(W=-3)=\frac{1}{165}\cdot -3= \frac{-3}{165}+ \qquad P(W=3)=\frac{1}{165}\cdot 3= \frac{3}{165}= \quad 0$$

Ekspektasi

Ekspektasi dikenal juga dengan nama:

- harga harapan (*expected value*)
- *mean*
- *weighted average*
- pusat massa (*center of mass*)
- *first moment*

Ekspektasi dari Fungsi dari RV

$$\mathbb{E}[g(X)] = \sum_{x} p(x) \cdot g(x)$$

contohnya

$$\mathbb{E}[X^2] = \sum_{x} p(x) \cdot x^2$$

Linearitas Ekspektasi

$$\mathbb{E}[aX + bY + c] = a\mathbb{E}[X] + b\mathbb{E}[Y] + c$$

Bermain Blackjack yang Dimodifikasi

Asumsikan Anda sedang bermain *blackjack* dengan jumlah kartu tak terhingga dengan komposisi kartu seperti dek standar dan kartu as selalu bernilai 1. Berapa ekspektasi dari jumlah dua kartu yang Anda dapat?

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[C_1 + C_2] &= \mathbb{E}[C_1] + \mathbb{E}[C_2] \\
&= 2\left(\frac{10+10+10+10}{13} + \frac{1}{13}\sum_{i=1}^{9} x_i\right) \\
&= 2\left(\frac{85}{13}\right) \approx 13.08
\end{aligned}
$$

Variansi

Variansi adalah rata-rata kuadrat dari jarak sebuah variabel dari ekspektasinya. Variansi mengukur seberapa "tersebar" variabelnya.

$$\begin{aligned} Var(X) &= \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2] \\ &= \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2 \end{aligned}$$

Variansi

Variansi adalah rata-rata kuadrat dari jarak sebuah variabel dari ekspektasinya. Variansi mengukur seberapa "tersebar" variabelnya.

$$\begin{aligned} Var(X) &= \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2] \\ &= \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2 \end{aligned}$$

Buktikan!

Variansi dari Fungsi Linear

$$
\begin{aligned}
Var(aX + b) &= \mathbb{E}[(aX + b)^2] - (\mathbb{E}[(aX + b)])^2 \\
&= a^2 Var(X)
\end{aligned}
$$

Standar Deviasi

Standar deviasi atau simpangan baku adalah rata-rata dari jarak variabel dengan ekspektasinya.

$$
\begin{aligned}
SD(X) &= \sqrt{Var(X)} \\
&= \sqrt{\mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2]}
\end{aligned}
$$

Materi kuliah ini diadaptasi dari:

CS109: Probability for Computer Scientists

6 - Random Variables by Will Monroe

Pekan depan:

Peubah Acak

Terima kasih