2022

EJERCICIOS DEL CURSO METODOS NUMERICOS

Yamil Armando Cerquera Rojas
Universidad Surcolombiana
5-3-2022

RAICES DE ECUACIONES

Aplicación Raíces de Ecuaciones

Nota: Como los ejercicios se pueden desarrollar en grupo de 2 personas. El valor de $\boldsymbol{a}$ y el valor de $\boldsymbol{b}$ corresponderán al último dígito del código estudiantil de cada uno de los integrantes. El valor de $\boldsymbol{a}$ será mayor al valor de $\boldsymbol{b}$. Si los dos últimos dígitos son iguales, se debe escoger de cualquiera de los códigos el digito anterior. Si algún ejercicio plantea un valor de $5.ab$ y los dos últimos dígitos corresponden a 5 y 3 entonces el valor al cual se hace referencia será de 5.53. Si en algún ejercicio se plantea 1ab.25 entonces el valor será 153.25.

Cálculo

1. El movimiento de una partícula en el plano se encuentra representado por las ecuaciones paramétricas:

$$x(t) = 3.ab * sen^3(t) - 1;\ y(t) = 4.ba * sen(t) * cos(t);\ t \geq 0$$

Donde x, y son las coordenadas de la posición expresadas en cm, t se expresa en seg.

a. Demuestre que existe un instante $t \in [0, \pi/2]$ tal que sus coordenadas x e y coinciden.
b. Aproxime con una precisión de 10^{-5} en qué instante de tiempo las dos coordenadas serán iguales en el intervalo dado en a.

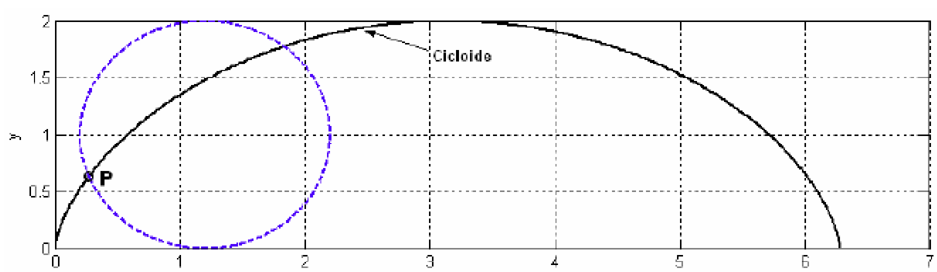
2011_Analisis Numérico Básico P.47

2. Si un círculo de radio a rueda en el plano a lo largo del eje horizontal, un punto P de la circunferencia trazará una curva denominada cicloide. Esta curva puede expresarse mediante las siguientes ecuaciones paramétricas:

$$x(t) = a(t - \sin(t)), \qquad y(t) = a(1 - \cos(t))$$

Suponga que el radio es **1.ab** metro, si $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ se miden en metros y **t** representa tiempo en segundos, determine el primer instante en el que la magnitud de la velocidad es 0.5 m/s.

Gráfico de la cicloide



Su trayectoria:

$$u(t) = (x(t), y(t)) = (t - sin(t), (1 - cos(t))$$

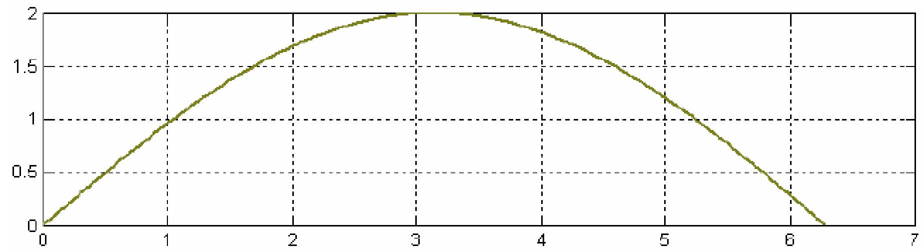
Su velocidad:

$$u'(t) = (1 - cos(t), sin(t))$$

Magnitud de la velocidad:

$$u'(t) = \sqrt{(1 - cos(t))^2 + (sin(t))^2}$$

Figura 1. Magnitud de la velocidad



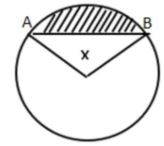
Dato especificado:

$$\sqrt{(1 - cos(t))^2 + (sin(t))^2} = 0.5 \Rightarrow f(t) = (1 - cos(t))^2 + (sin(t))^2 - 0.25 = 0$$

Encontrar el t con un error de $1e - 6$

2011_Analisis Numérico Básico. P38

3. La figura muestra un segmento de un círculo delimitado por la cuerda AB. Determinar el valor del ángulo para que el área sombreada sea $0.25ab$ del área del círculo. Usar cualquier método de resolución.



Termodinámica – Transferencia de Calor

4. Los ingenieros mecánicos, así como los de otras especialidades, utilizan mucho la termodinámica para realizar su trabajo. El polinomio de la Ecuación 1 se emplea para relacionar el calor específico a presión cero del aire seco, $cp\ kJ/(kg\ °K)$, a temperatura $(°K)$:

Ecuación 1

$$cp = 0.99403 + 1.671 + 10^{-4}T + 9.7215 * 10^{-8}T2 - 9.5838 * 10^{-11}T3 + 1.9520 * 10^{-14}T^4$$

Determine la temperatura que corresponda a un calor específico de $1.1ab\ kJ/(kg\ °K)$.

Fuente: Chapra pág. 223

5. La variación de temperatura T en el interior de un material con una fuente de calor interna satisface la ecuación

$$e^{t/2} = \cosh\left(\sqrt{0.5ba * Lcr} * e^{t/2}\right)$$

Encontrar el valor de T con un $error = 10^{-5}$ cuando $L_{cr} = 0{,}094ab$.

6. Considere la pared de un horno, de $\Delta x = 0.08ab\ mt$ de espesor, la temperatura del lado interno es 642 K, si las pérdidas de calor desde la superficie externa se producen por convección y radiación, determine la temperatura del lado externo de la pared (T_1). La ecuación que rige esta situación problemática es:

$$\frac{k}{\Delta x}(T_1 - T_0) + \epsilon * \sigma * (T_1^4 - T_f^4) + h * (T_1 - T_f) = 0$$

Los datos son: Conductividad térmica, $k = 1.33\ W/m°K$; Emisividad, $\varepsilon = 0.8b$; Temperatura del lado interno de la pared, $T_0 = 6ab\ °K$; Temperatura del lado externo de la pared, T_1;Temperatura del aire, $T_f = 299°K$; Coeficiente convectivo de transferencia calórica, $h = 18\frac{W}{m^2}°K$; Constante de Stefan-Boltzmann, $\sigma = 5.67ab * 10^{-8}\ W/m^2K^4$; Espesor de la pared, $\Delta x = 0.08ab\ mt$.

2008 Calculo Numeric Lucrecia Chaillou. P38

7. Imagine una pared de tabique con un espesor de $\Delta x = 0.05ab\ mt$. La temperatura en el lado interior de la pared $T_0 = 62a\ °K$, pero se desconoce la temperatura del lado exterior. La pérdida de calor de la superficie exterior se efectúa por convección y por radiación. La temperatura T_1 está determinada por la ecuación:

$$f(T_1) = \frac{k}{\Delta x}(T_1 - T_0) + \varepsilon\sigma(T_1^4 - T_\infty^4) + h(T_1 - T_f) = 0$$

Donde

K: conductividad térmica de la pared =1.2W/m°K
ε : conductividad o emisividad = 0.8
T_0 : temperatura del lado interior de la pared = 62a °K
T_1 = temperatura del lado exterior de la pared=(desconocida)
T_∞= temperatura del entorno = 298°K
T_f= temperatura del aire = 298°K
h= coeficiente de transferencia de calor = $20W/m^2°K^4$
σ = constante de Stefan-Boltzmann= $5.67x10^{-8}W/m^2°K^4$
Δx= espesor de la pared = 0.05ab m

Determine T_1 por cualquier método para hallar raíces de ecuaciones no lineales.
Fuente: file:///C:/Users/57300/Downloads/372212762-Trabajo-2metnum.pdf

8. Suponga que el fenómeno de la transmisión de calor en un cierto material obedece en forma aproximada al modelo

$$T = T_o + \frac{q}{k}\left(\beta\left(\frac{\alpha T}{\pi}\right)e^{-\frac{x^2}{4\alpha t}}\right)$$

Calcule el tiempo requerido para que la temperatura a la distancia x alcance un valor dado. Use la siguiente información:
$T_o = 25.ab°C$
q =300BTU/h ft^2 °F
$\alpha = 0.04ft^2/h$
X=1.ba ft
K=1.ab BTU/h ft^2
T=12a °F
$\beta = 2\frac{°Fft}{h^{1/2}} * °C^{1/2}$

Física - Mecánica

9. El ángulo de fase f entre la vibración forzada que ocasiona el camino rugoso y el movimiento del carro, está dada por la ecuación:

$$tan(\phi) = \frac{2(c/cc) * (\omega/p)}{1 - (\frac{\omega}{p})^2}$$

Como ingeniero mecánico, le gustaría saber si existen casos en que $\phi = \frac{\omega}{3} - 1$. Utilice los otros parámetros de la sección con objeto de plantear la ecuación como un problema de cálculo de raíces, y resuélvala para ω.
Fuente: Pag 214 Chapra

10. Una partícula parte del reposo en un plano inclinado liso, cuyo ángulo θ va aumentando a una razón constante de

$$d\theta/_{dt} = \omega * dt$$

Al final de t segundos, la posición del objeto está dada por:

Ecuación 2

$$x(t) = \frac{g}{2w^2}\left(\frac{e^{wt} - e^{-wt}}{2} - sin(\,wt)\right)$$

Se supone que la partícula se ha movido 0.5 metros en un segundo. Encontrar con un error menor que 10^{-5}, la razón w a la cual varia θ si $\omega_0 = -0.5ab$ y $\omega_1 = -0.1$. Considere a $g = -9.8m/sg^2$.

11. Para simular la trayectoria de un cohete se usará el siguiente modelo:

$$y(t) = 6 + 2.ba * t^2 - 0.00ba * t^4$$

En donde y es la altura alcanzada, en metros y t es tiempo en segundos. El cohete está colocado verticalmente sobre la tierra.

a. Encuentre el tiempo de vuelo.
b. Encuentre la altura máxima del recorrido.

12. Se supone que la partícula del ejercicio anterior se ha movido 1.7ab metros en un segundo. Encontrar con un error menor que 10^{-5}, la velocidad w a la que cambia θ empleando $g = -9.8m/sg^2$.
Chapra: Ed5 P.219

13. Para simular la trayectoria de un cohete se usará el siguiente modelo:

$$y(t) = 6 + 2.ba * t^2 - 0.00ba * t^4$$

En donde y es la altura alcanzada, en metros y t es tiempo en segundos. El cohete está colocado verticalmente sobre la tierra.

a. Encuentre el tiempo de vuelo.
b. Encuentre la altura máxima del recorrido.

14. El Número de Mach se refiere al cociente de la velocidad de un avión entre la velocidad del sonido. Los aviones subsónicos experimentan flujo de aire acelerado sobre la superficie de las alas. El Número de Mach crítico es el Número de Mach de vuelo al que el flujo en algún punto del ala alcanza la velocidad del sonido.

El coeficiente de presión mínimo C_p sobre una superficie aerodinámica se define de modo que sea negativo y corresponda a la máxima velocidad del flujo sobre la superficie aerodinámica. Al número de Mach crítico M, la expresión para C_p es:

$$C_p = \frac{\left(\frac{2+0.4M^2}{2.4}\right)^{3.5} - 1}{0.7M^2}$$

Para una superficie aerodinámica se pueden efectuar pruebas preliminares a bajas velocidades, cuando los efectos de la compresibilidad son insignificantes. Se supondrá que el coeficiente de presión mínimo C_{pi} se obtiene para flujo incompresible y se relacionará con C_p mediante la relación de Karman-Tsien:

$$\frac{C_p}{C_{pi}} = \left[\frac{\sqrt{1-M^2} + \left(M^2 * C_{pi}/2\right)}{1+\sqrt{1-M^2}}\right]^{-1}$$

Para determinar M, la expresión para C_p se sustituye en la relación de Karman-Tsien y con la ecuación resultante se evalúa M. La ecuación a resolver es:

$$f(M) = \frac{\left(\frac{2+0.4M^2}{2.4}\right)^{3.5} - 1}{0.7M^2 C_{pi}} - \left[\frac{\sqrt{1-M^2} + \left(\frac{M^2 * C_{pi}}{2}\right)}{1+\sqrt{1-M^2}}\right]^{-1} = 0$$

Teoría y Ejercicios-Raices

15. La velocidad vertical de un cohete se calcula con la fórmula que sigue:

$$v = \mu * ln\left(\frac{m_0}{m_0 - q * t}\right) - g * t$$

donde v es la velocidad vertical, μ es la velocidad con la que se expele el combustible, en relación con el cohete, m_0 es la masa inicial del cohete en el momento $t = 0$, q=tasa de consumo de combustible, y g = aceleración de la gravedad hacia abajo (se supone constante e igual a $9.81 m/s^2$). Si $\mu = 2000$ m/s, $m_0 = 150\ 000\ kg$, y $q = 2700\ kg/s$, calcule el momento en que v es igual a 750 m/s. (Sugerencia: El valor de t se encuentra entre 10 y 50 s.) Calcule el resultado de modo que esté dentro de 1% del valor verdadero. Compruebe su respuesta.

16. Un proyectil de 2 gramos de masa ha sido lanzado verticalmente al aire y está descendiendo a su velocidad terminal. La velocidad terminal se puede escribir, después de evaluar todas las constantes, como:

$$(0.002ab) * (9.81) = 1.4a * 10^{-5} v^{1.5} + 1.15 * 10^{-5} v^2$$

Donde v es la velocidad terminal en m/s. El primer término del lado derecho representa la fuerza de fricción y el segundo término representa la fuerza de presión.

a. Se sabe por una estimación, que la velocidad terminal es v (30m/s). Estudia si los intervalos [20, 30], [30, 40] contienen una raíz. Verifica el resultado construyendo un gráfico.
b. Calcula el valor de la velocidad terminal con un lenguaje de programación.

17. El rango de un objeto que se lanza en un ángulo θ con respecto al eje x y una velocidad inicial v_0 esta dado por la Ecuación 3:

Ecuación 3. Rango del objeto

$$R(\theta) = \frac{v^2}{g} * \sin(2 * \theta)$$

Para $0 \leq \theta \leq \pi/2$, (Sin considerar la resistencia del aire).

Calcule el rango para valores de theta 0≤θ≤ π/2 en incrementos de 0.05 y represéntelos en una gráfica (Rango vs θ). Use g=9.9 $m/s2$ y una velocidad inicial de $100.ab\ m/s$.

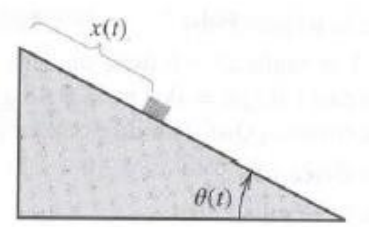
Fuente: 2021_12_Taller

18. Un objeto cayendo verticalmente a través del aire está sujeto tanto a resistencia viscosa como a la fuerza de gravedad. Suponiendo que un objeto con masa m es dejado caer desde una altura y_0 , y que la altura del objeto después de t segundos es:

$$y(t) = y_0 + \frac{mg}{k}t - \frac{m^2 g}{k^2}\left(1 - e^{\frac{-kt}{m}}\right)$$

Donde $g = -32.17 ft/s^2$ y k representa el coeficiente de resistencia del aire en $lb - s/ft$. Suponga $y_0 = 300.ab$ ft, $m = 0.2ab$ lb, y $k = 0.1ba$ lb y $k = 0.1\ lb - s/ft$. Encuentre, con un error de hasta 0.01s, el tiempo que le toma a esta masa tocar el suelo.

19. Una partícula parte del reposo y se desliza por un plano inclinado cuyo ángulo de inclinación θ $cambia\ con\ respecto\ al\ tiempo\ t$ con velocidad constante ω, es decir



$$\frac{d\theta}{dt} = \omega$$

Se sabe que después de t segundos la partícula ha recorrido una distancia $x = x(t)$ dada por

$$x(t) = \frac{g}{2w^2}\left(\frac{e^{\omega t} - e^{-\omega t}}{2} - \sin(\omega t)\right)$$

Donde g es la fuerza de la gravedad que se supone constante e igual a 9,8 mt/seg^2. Si la partícula recorre 1,7ab mt en 1 seg, determine con una precisión de 10^{-5} la velocidad ω.

20. La posición del ángulo central θ en el día t de la luna alrededor de un planeta si su período de revolución es P días y su excentricidad es e, se describe con la ecuación de Kepler:

$$2\pi t - P\theta + P * e * \sin(\theta) = 0$$

Encuentre la posición de la luna (ángulo central) en el día 30, sabiendo que el período de revolución es 100 días y la excentricidad 0.5a.

21. Una partícula se mueve en el plano XY (la escala está en metros) con una trayectoria descrita por la función

$$u(t) = (x(t), y(t)) = (2 * t * e^t + \sqrt[4]{t} * 2 * t^3\ ), t \in [0,1]$$

t medido en horas.

a. Grafique la trayectoria u(t)
b. Encuentre la posición de la partícula cuando $x = 3.ab$

c. En que el instante la partícula se encuentra a una distancia de 4 metros del origen.

22. Un corredor especialista en los 1ab metros planos, puede desarrollar una velocidad en función del tiempo desde su arranque ($t = 0$), de acuerdo con la siguiente fórmula:

$$v = \frac{dx}{dt} = 10.ab * (1 - e^{-3*t})$$

Que distancia x recorrerá en los primeros $1a$ segundos y en los primeros $2b$ segundos.

23. Los metales compuestos de pequeños cristales son más fuertes que los metales compuestos de menos cristales grandes. Una fórmula que relaciona la resistencia a la compresión con el diámetro de grano promedio se llama ecuación Hall-Petch:

Ecuación 4. Hall-Petch

$$\sigma = \sigma_0 + Kd^{-1/2}.$$

Donde σ_0 y K representan constantes que son diferentes para cada metal. Determine la resistencia a la compresión de un trozo de metal con $\sigma_0 = 12000\ Psi$ y K= $9600\ Psi/\sqrt{mm}$ para valores de d desde 0.1 hasta 10 mm y realice una gráfica de resistencia a la compresión contra diámetro de grano.

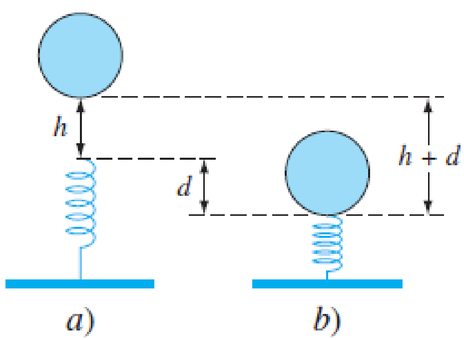
Fuente: 2021_12_Taller

24. La rotación de un cuerpo sujeto a un mecanismo amortiguador. Siendo $\boldsymbol{D}$ el desplazamiento, x el ángulo de rotación que produce dicho desplazamiento

$$r(x) = 0.5ab + 0.5ba * e^{\frac{-x}{2*\pi}} * sin(x), \quad 0 \leq x \leq 2\pi$$

$$f(x) = r(x) - D = 0$$

25. Los sistemas mecánicos reales involucran la deflexión de resortes no lineales. En la figura se ilustra una masa m que se libera por una distancia h sobre un resorte no lineal.



La fuerza de resistencia F del resorte está dada por la ecuación

$$F = -(k_1 d + k_2 d^{3/2})$$

Es posible usar la conservación de la energía para demostrar que

$$0 = \frac{2k_2 d^{5/2}}{5} + \frac{1}{2}k_1 d^2 - mgd - mgh$$

Resuelva cuál sería el valor de d, dados los valores siguientes de los parámetros: k_1=50000 g/s^2, k_2=40.ab $g/(s^2\, m^{0.5})$, m=90 g, g=9.81 m/s^2, y h=0.45a m.

Chapra pág. 223

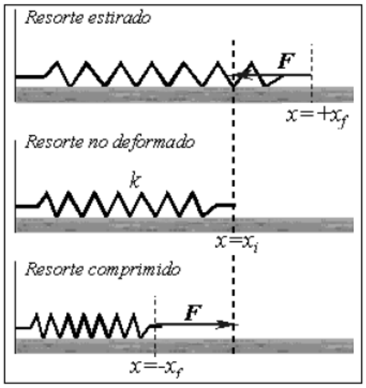
26. En el análisis de sistemas de control, se desarrollan funciones de transferencia que relacionan en forma matemática la dinámica de la entrada de un sistema con su salida. La función de transferencia para un sistema de posicionamiento robotizado está dada por:

$$G(s) = \frac{C(s)}{N(s)} = \frac{s^3 + 12.5s^2 + 50.5s + 66}{s^4 + 19s^3 + 122s^2 + 296s + 192}$$

donde $G(s)$ es la ganancia del sistema, $C(s)$ es la salida del sistema, $N(s)$ es la entrada del sistema y s = frecuencia compleja de la transformada de Laplace. Utilice una técnica numérica para obtener las raíces del numerador y el denominador.

Chapra Ed5 pag. 198

27. Una masa sujeta al extremo de un resorte, con la masa moviéndose libremente sobre una superficie horizontal sin fricción o verticalmente en el aire, oscilará si se la aparta de su posición de equilibrio $x = 0$ donde el resorte se encuentra sin deformar, con un movimiento armónico simple. Cuando la masa se desplaza una pequeña distancia x desde su posición de equilibrio, el resorte ejerce una fuerza dada por la Ley de Hooke, $F = -kx$. Aplicando la segunda ley de Newton, suponiendo que esta es la única fuerza que actúa sobre la masa m, se obtiene:



$F = -kx = m * \alpha \rightarrow \alpha = -\frac{k}{m}x$

Como la aceleración (α) es la segunda derivada de la posición, y definiendo el cociente $k/m = \omega^2$, se puede escribir $\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x$. La solución de la ecuación diferencial es la que describe el movimiento armónico simple y tiene la forma

$$x = A * cos(\omega * t + \delta)$$

Donde A, ω, y δ son constantes del movimiento. Esto se puede generalizar para afirmar que cualquier fuerza que actúe sobre una partícula, que sea linealmente proporcional al desplazamiento y de dirección opuesta, le producirá a la partícula un movimiento armónico simple. Para la masa sujeta al resorte, el período y la frecuencia del sistema es:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

Y

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$$

Si la velocidad está dada por:

$$v = -\omega * A * sen(\omega t)$$

y la aceleración por:

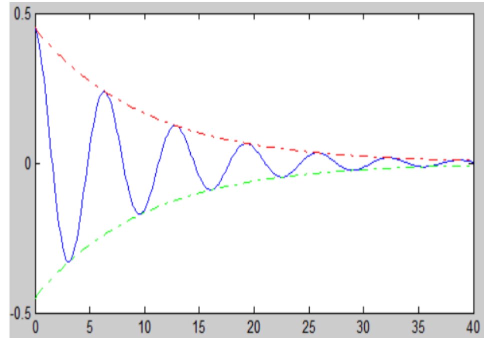
$$\alpha = -\omega^2 * A * cos(\omega t)$$

Encontrar el valor de v en rad/seg, T y f, para $t = 2.ab * \pi\ seg$, si la aceleración $\alpha = 1.ba\ m/seg^2$ y la masa $m = 200.a\ gr$, se desplaza $A = 5.b\ cm$ del equilibrio.

28. Los movimientos oscilatorios generalmente se refieren a sistemas ideales, que oscilan indefinidamente por la acción de una fuerza lineal de restitución, de la forma

$$F = -kx$$

Pero en los sistemas reales están presentes fuerzas disipativas, como la fricción, las cuales retardan el movimiento del sistema. Por lo tanto la energía mecánica del sistema se va perdiendo conforme transcurre el tiempo, lo que hace que la amplitud del sistema disminuya con el tiempo, y se dice que el movimiento es amortiguado.



Un tipo común de fuerza de fricción es proporcional a la rapidez y actúa en dirección opuesta al movimiento. Estas fuerzas se producen frecuentemente en los fluidos, principalmente en líquidos y gases, aquí se llaman fuerzas de viscosidad, donde actúan cuando un cuerpo se mueve, por ejemplo en el agua o en el aire. Se expresan en la forma

$$F = -\beta v$$

donde β es una constante que mide el grado de viscosidad del fluido. Aplicando la segunda ley de Newton a un sistema amortiguado, donde sobre el cuerpo en movimiento oscilatorio actúan las fuerzas de restitución y de amortiguamiento o de viscosidad, se obtiene:

$$-kx - \beta v = ma \Rightarrow -kx - \beta\frac{dx}{dt} = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

Cuando la fuerza de viscosidad es pequeña comparada con kx, es decir, cuando β es pequeña, la solución es:

$$x = Ae^{-\frac{\beta}{2m}t}\cos(\omega t + \delta)$$

donde la frecuencia del movimiento es:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{\beta}{2m}\right)^2}.$$

Si se tiene valores para

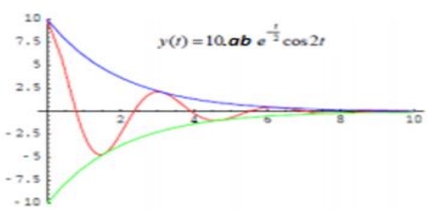
$A = 0.45, m = 0.5\text{b}, \omega = 0.95, \beta = 0.1\text{a}\ y\ \delta = 0.05;$

encuentre los diferentes t para $x = 0.05$.

La línea de trazos en la figura es la envolvente de la curva de oscilación, representa el factor exponencial y corresponde a la amplitud decreciente en el tiempo.

$$\pm A * exp(-\beta * t)/(2 * m)$$

29. Suponga que la oscilacion de una estructura, dotada de un sistema de amortiguacion, ante un movimiento oscilatorio, viene dada por la funcion:



$$y(t) = 10.ab * e^{\frac{t}{2}}\cos(2.ba * t).$$

Encuentre el valor de t para

$$y(t) = 4.ab$$

30. Un oscilador forzado se puede obtener cuando un oscilador amortiguado es impulsado por una fuerza externa que varia armónicamente en el tiempo, de la forma

$$F = F_o * cos(\omega * t)$$

Donde ω es la frecuencia angular de la fuerza y F_o es una constante. Agregando esta fuerza a la ecuación diferencial del oscilador amortiguado, se obtiene:

$$F_o \cos(\omega t) - kx - \beta\frac{dx}{dt} = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

La solución de la ecuación diferencial es:

$$x = A * cos(\omega * t + \delta)$$

Donde la amplitud es:

$$A = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \left(\frac{\beta\omega}{m}\right)^2}}$$

Con

$$\omega_o^2 = k/m$$

La frecuencia del coscilador no amortiguado $\beta = 0$. Calcule el valor de ω para $m = 0.4ab$, $A = 15$, $w_o = 0.05b$, $\delta = 0.05a$, $\beta = 0.1$ y $F_o = 5.5$.

Ambiental

31. En la ingeniería ambiental (una especialidad de la ingeniería civil), la ecuación siguiente se emplea para calcular el nivel de oxígeno c (mg/L) en un río aguas abajo de la descarga de un drenaje:

$$c = 10 - 20(e^{-0.15x} - e^{-0.5x})$$

donde x es la distancia aguas abajo en kilómetros.

a. Determine la distancia aguas abajo de la corriente, a la cual el nivel de oxígeno cae hasta una lectura de 5 mg/L. (Recomendación: está dentro de 2 km de la descarga.) Encuentre la respuesta con un error de 1%. Obsérvese que los niveles de oxígeno por debajo de 5 mg/L por lo general son dañinos para ciertas especies de pesca deportiva, como la trucha y el salmón.
b. Calcule la distancia aguas abajo a la cual el oxígeno se encuentra al mínimo. ¿Cuál es la concentración en dicha ubicación?

Estadística

32. En un cultivo de laboratorio, el número de bacterias (medido en millones) durante las primeras 200.ab horas viene dado por:

$$N(t) = 35 + t * e^{-t/(10*(a+b))}$$

Determinar los tiempos para el cual la cantidad de bacteria ha alcanzado el valor de 55.ba millones de bacterias.

33. Si la cantidad de elementos de una población c, varia en los primeros seis meses de cada año según la Ecuación 5

Ecuación 5. Variación cantidad de elementos

$$c(t) = \frac{\left(\frac{0.5ab}{(0.9*t-1.5)^2+0.1} + \frac{1.5ba}{(t-2.9)^2+0.04}\right)}{2*t+0.7} + 1$$

Determine los tiempos para cuando la población alcanza un valor de 5.ab elementos .

34. Para determinar la constante de nacimientos de una población se necesita calcular el valor de la constante λ $(0.1 < \lambda < 0.9)$ en la Ecuación 6:

Ecuación 6

$$1.5ab * 10^6 = 10^6 * e^{\lambda} + \frac{0.4ba * 10^6}{\lambda}(e^{\lambda} - 1)$$

35. Un investigador médico estima que t horas después de introducirse una toxina, la población (en miles) de cierta colonia de bacterias será:

Ecuación 7. Población de bacterias

$$P(t) = \frac{600.ab}{4 - e^{-0.01t} + e^{0.003t}}$$

Para que valores de t la población es de 103.0ab.

36. La concentración de la bacteria contaminante C en un lago decrece de acuerdo con la relación:

$$Cb = 80e^{-2t} + 20e^{-0.1t}$$

Determine el tiempo requerido para que la bacteria se reduzca a $10.ab$

37. Un medicamento administrado a un paciente produce una concentración en el torrente sanguíneo dada por

$$c(t) = A * t * e^{-\frac{1}{3}} mg/ml$$

t horas después de que le fueron inyectadas A unidades del medicamento. La concentración máxima segura de medicamento es de $1mg/ml$. Donde sea necesario, utilice un método numérico apropiado para responder las siguientes preguntas:

a. Qué cantidad de medicamento debe ser inyectada para alcanzar la concentración máxima segura y cuándo ocurrirá ese último.
b. Una dosis adicional de este fármaco le será administrada al paciente después de que la concentración decaiga a $0.25ab\ mg/ml$. Determine, con un error máximo de un minuto, cuándo debe ser proporcionada la segunda inyección.
c. Suponiendo que la concentración de las inyecciones consecutivas es aditiva y que el 75% de la dosis inyectada originalmente se administra en la segunda inyección, ¿cuándo se presenta el momento para la tercera inyección?

38. Un medicamento produce una concentración en sangre dada por $c(t)$, siendo t el tiempo, en horas, transcurrido desde su administración al enfermo. Si se debe administrar una segunda dosis cuando la cantidad de concentración llega a 0.25ab, ¿cuánto tiempo deberá transcurrir?

$$c(t) = \frac{1}{3} * t * e^{1-\frac{t}{3}}$$

39. Una determinada sustancia se desintegra según la ecuación

$$A = P * e^{-0.0248t}$$

donde P es la cantidad inicial en el tiempo $t = 0$ y A la cantidad resultante después de t años. Si inicialmente se depositan 500.ab miligramos de dicha sustancia, ¿cuánto tiempo habrá de transcurrir para que quede el 1.ba% de esta?

40. Se introduce una población de 500.ab bacterias en un cultivo, creciendo en número, de acuerdo con la función:

$$P(t) = 500.ab * (1 + \frac{4 * t}{50 + t^2})$$

Donde t se mide en horas. Calcular el número de horas para que la población alcance el valor de 615.ba

41. La población de cierta especie que vive en un hábitat protegido sigue la siguiente función:

$$P(t) = A + 2\left(\frac{t + 1}{t^2 + 24}\right)$$

donde P(t) es el número de individuos de la población (medido en miles) y t es el tiempo (medido en años).

Se pide:

a. Si inicialmente hay 29ab individuos, cual es el tiempo para que el numero d individuos alcance los 32ba.
b. ¿En qué momento la población alcanza su valor máximo? ¿Cuál es el valor de dicho máximo?
c. ¿A qué tiende la población en el futuro? ¿En algún momento la población desciende por debajo de la población inicial?
d. Esboza la gráfica de la función.

Ref: _Colección ejercicios.pdf pág. 9

42. La dinámica de una determinada población de mamíferos (xn medida en miles) que habita un parque natural viene dada por el modelo de Ricker (Ecuación 8):

Ecuación 8: Modelo de Ricker

$$x_n = x_{n-1} e^{r*(1-\frac{x_{n-1}}{K})}$$

Para n≥1, con parámetro de crecimiento r=0.4 y capacidad de alojamiento K=5 (miles). Se pide:
Calcular la población anterior para una población actual xn=$429a$ y 3.94b elementos

Ref: _Colección ejercicios.pdf pág. 16

43. La población de una especie de insectos, tras la eclosión de los huevos puestos, sigue la siguiente función

$$P(t) = t^2 e^{-at};$$

donde $t > 0$ (t=0 es el momento de la eclosión), siendo $P(t)$ el número de individuos de la población (medida en miles) y t el tiempo (medido en días), se pide calcular el número de días después de la eclosión si a=0.4ab y la población de insectos es de 2000.
Ref: _Colección ejercicios.pdf pág. 10

44. La dinámica de una población de peces sometidos a una pesca severa sigue el siguiente modelo discreto

$$x_{n+1} = x_n + 2x_n\left(1 - \frac{x_n}{4}\right)$$

Donde x_n es el número de peces (medido en miles) en el año n.
Calcular el número de peces en el segundo año si para el año cuatro hay 43ab peces.
Ref: _Colección ejercicios.pdf pag. 17

45. El tamaño de una población de insectos (medida en millones) sigue una dinámica dada por la curva de reclutamiento de Beverton-Holt:

$$x_n = \frac{R * x_{n-1}}{1 + \frac{R-1}{K} x_{n-1}}$$

Con constante de crecimiento $R = 1.4$ y capacidad de alojamiento $K = 10$ (millones). Se pide:
Si la población al cabo de 2 periodos de reproducción es de $x_2 = 6.15ab$ individuos, cual es la población inicial.
Ref: _Colección ejercicios.pdf pag.

46. Si la cantidad de elementos de una población c, varia en los primeros seis meses de cada año según Ecuación 9.

Ecuación 9. Cantidad de individuos en función del tiempo

$$c(t) = \frac{\left(\frac{0.5ab}{(0.9*t-1.5)^2+0.1} + \frac{1.5ba}{(t-2.9)^2+0.04}\right)}{2*t+0.7} + 1$$

Determine los tiempos para cuando la población alcanza un valor de 5.ab elementos.

47. Según el modelo desarrollado por Malthus, el crecimiento de una población a partir del instante inicial $t = 0$ con inmigración a tasa constante puede escribirse por la función:

$$C(t) = C_o e^{k\,t} + \frac{V}{k}(e^{k\,t} - 1)$$

Donde: C_o es la población inicial, k es la tasa de crecimiento y V tasa de inmigración. Suponga que una cierta población tiene inicialmente $1'000.000$ de individuos, durante el primer año han inmigrado $435.0ab$ individuos y al cabo de un año hay $1'564.0ba$ individuos.

a. Determine la tasa de crecimiento de dicha población con cuatro decimales correctos.
b. Hacer una provisión de la población al cabo de tres años

48. Un modelo de crecimiento poblacional está dado por:

$$f(t) = 5t + 2e^{0.1t}$$

En donde n es el número de habitantes, t es tiempo en años.

a. Calcule el número de habitantes que habrá en el año 25.ab
b. Encuentre el tiempo para el cual la población es 2ab

49. Un modelo de crecimiento poblacional está dado por.

$$f(x) = kx + 2e^{0.1x}$$

Siendo k una constante que debe determinarse y x tiempo en años. Se conoce que $f(10) = 5a$.

a. Determine la población en el año 25
b. Determine el año en el que la población alcanzará el valor 10ba.

50. Un modelo de crecimiento poblacional está dado por

$$f(t) = k_1 t + k_2 e^{0.1t}$$

Siendo k_1 y k_2 constantes, y t tiempo en años. Se conoce que

$$f(10) = 2a, \qquad f(20) = 6ab$$

a. Determine la población en el año 2ª
b. Determine el año en el que la población alcanzará el valor 50ab.

51. Bajo hipótesis restrictivas, el crecimiento de una población puede ser simulado durante pequeños periodos de tiempo $[0, \delta t]$ asumiendo que la población crece continuamente en el tiempo (despreciando la mortalidad) en razón proporcional al número de individuos existentes en un momento dado $N(t)$ según el problema de valor inicial:

$$\frac{dN}{dt}(t) = \lambda * N(t) + v$$
$$N(0) = N_o$$

Siendo λ la tasa de crecimiento, v un coeficiente que simula la inmigración en un momento dado y N0 la población existente al comienzo del periodo de simulación. La solución del problema de valor inicial anterior viene dada por:

$$N(t) = N_o * e^{\lambda * t} + v * \frac{e^{\lambda * t} - 1}{\lambda}$$

Suponiendo que una determinada población tiene inicialmente $N_0 = 1000000$ individuos, que a ella emigran $v = 435.000$ individuos más cada año y que tras el primer año la población ha ascendido a $N(1) = 1'564.000$ individuos, determínese la tasa de crecimiento (λ) anual de dicha población.

2000 SF_Met Num Ecuac_no_Lineal P115

52. Se estima que dentro de t años, la población de cierta comunidad suburbana en miles de personas será:

$$p(t) = 10 - \frac{20}{(t+1)^2}$$

Un estudio ambiental revela que el nivel medio diario de monóxido de carbono en el aire en Unidades, cuando la población sea de p miles será:

$$c(p) = 0.8 * \sqrt{p^2 + p + 1}$$

En qué tiempo el nivel medio de monóxido de carbono diario será de 7.98a Unidades

53. Encuentre una aproximación para λ con un error menor a 10^{-4}, para la ecuación de población:

$$1.564.000 = 1.000.000 * e^{\lambda} + \frac{435.000}{\lambda} * \left(e^{\lambda} - 1\right)$$

que resulta de la ecuación diferencial de crecimiento de población con inmigración constante

$$\gamma : \ \frac{d\,N(t)}{dt} = \lambda\, N(t) + \gamma$$

Utilice este valor para predecir la población al final del segundo año, asumiendo que la tasa de inmigración se mantiene en 435.000 individuos/año.

54. En un modelo de probabilidad se usa la siguiente fórmula para calcular la probabilidad $f(k)$, que en el intento número k se obtenga el primer resultado favorable:

$$f(k) = p(1-p)^{k-1}, 0 \leq p \leq 1, k = 0, 1, 2, 3, \ldots.$$

a. Si en una prueba se obtuvo que $f(5) = 0.0733$, encuentre cuales son los dos posibles valores de p posibles en la fórmula.
b. Con el menor valor obtenido para p encuentre el menor valor de k para el que $f(k) < 0.1$

55. En una región se instalan 100 personas y su tasa de crecimiento es $e^{0.2abx}$, en donde x es tiempo en años. La cantidad inicial de recursos disponibles abastece a 120 personas. El incremento de recursos disponibles puede abastecer a una tasa de $10 * x$ personas, en donde x es tiempo en años. Se desea conocer cuando los recursos no serán suficientes para abastecer a toda la población. Calcule la solución con cuatro dígitos de precisión y determine el año, mes y día en que se producirá este evento.

56. Suponga que el precio de un producto $p(t)$ depende del tiempo t en el que se lo ofrece al mercado con la siguiente relación $f(t) = 25 * t * e^{-0.1a*t}, 0 \leq x \leq 12$, en donde t es tiempo en meses. Se desea determinar el día en el que el precio sube a $80.ab$

a. Evalúe p con t en meses hasta que localice una raíz real (cambio de signo) y trace la forma aproximada de p(t)
b. Calcule la respuesta (mes) con $E = 0.0001$. Exprese esta respuesta en días (1mes=30 días)
c. Encuentre el día en el cual el precio será máximo. E=10-4

Eléctrica – Electrónica – Energía Solar

57. La corriente *i* (en microamperios, μA) sobre un diodo está relacionada con el voltaje v (en voltios) por la Ecuación 10

Ecuación 10. Corriente sobre un Diodo

$$i = I_s(e^{\frac{v}{q}} - 1.ab)$$

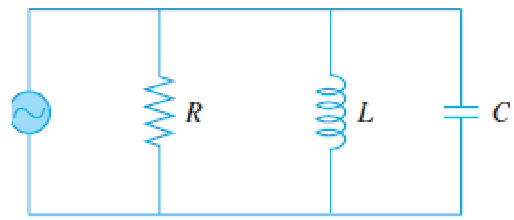
Donde I_s es la corriente de saturación (en μA) y q la variable del diodo. Un diodo de unión para el cual $I_s = 20.ba$ y $\theta = 0.05ab$ es conectado a un circuito en el que v e i deben satisfacer también $v + 10^4 i = 4$. Encontrar la corriente (en μA) en el diodo. Obtener una aproximación inicial aproximando la Ecuación 10 por $i = I_s v/\theta$.

58. En la figura se muestra un circuito con una resistencia, un inductor y un capacitor en paralelo. Para expresar la impedancia del sistema se emplean las leyes de Kirchhoff, así:

$$\frac{1}{Z} = \sqrt{\frac{1}{R^2} + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)^2}$$

Donde: Z=impedancia (Ω) y ω=frecuencia angular.

Encuentre la ω que da como resultado una impedancia de 75Ω, con el uso de un método, con valores iniciales de 1 y 1000 y los parámetros siguientes: R=225Ω, C=$0.6\times10{-}6F$, y L=$0.5H$. Determine cuántas iteraciones son necesarias con cada técnica a fin de encontrar la respuesta con es =0.1%. Utilice el enfoque gráfico para explicar cualesquiera dificultades que surjan.



Chapra pág. 222

59. La carga en un circuito RLC serie está dada por:

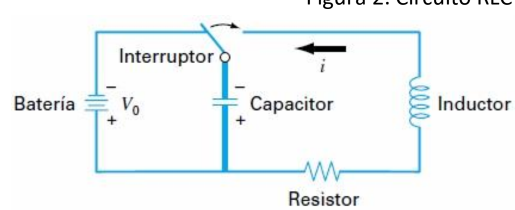
$$q(t) = q_0 * e^{-Rt/2L} * \cos\left(\sqrt{\left(\frac{1}{L*C} - \left(\frac{R}{2*L}\right)^2\right)} * t\right)$$

Suponga: $(q/q_0 = 0.01)$ en $t = 0.05ab$ seg, con $L = 5.ba\ H$ y $C = 10^{-4}\ F$.
Encuentre el valor de la resistencia R.

60. Teniendo la Ecuación 11 anterior, un problema de diseño típico en Ingeniería Eléctrica puede necesitar que se determine el valor de L en H apropiado para disipar energía a una velocidad constante, con los valores de C y R conocidos. En este caso se supone que la carga se debe disipar al 10% de su valor original, es decir $(q/q_0 = 0.1)$ en $t = 0.7ab\ seg$, con $C = 10^{-4}F$ y $R = 100\Omega$.

61. Los ingenieros eléctricos emplean las leyes de Kirchhoff para estudiar el comportamiento de los circuitos eléctricos en estado estacionario (que no varía con el tiempo). Un problema importante tiene que ver con circuitos de naturaleza transitoria, donde súbitamente ocurren cambios temporales. Esta situación se presenta cuando se cierra el interruptor como en la Figura 2. En tal caso, existe un periodo de ajuste al cerrar el interruptor hasta que se alcance un nuevo estado estacionario. La longitud de este periodo de ajuste está íntimamente relacionada con las propiedades de almacenamiento de energía, tanto del capacitor como del inductor. La energía almacenada puede oscilar entre estos dos elementos durante un periodo transitorio. Sin embargo, la resistencia en el circuito disipará la magnitud de las oscilaciones.

Figura 2. Circuito RLC



El flujo de corriente a través del resistor provoca una caída de voltaje (V_R), dada por $V_R = iR$. De manera semejante, un inductor se opone a cambios de corriente tales que la caída del voltaje a través del inductor V_L es $V_L = L\frac{di}{dt}$. La caída del voltaje a través del capacitor (V_C) depende de la carga (q) sobre éste: $V_c = \frac{q}{C}$. La segunda ley de Kirchhoff establece que la suma algebraica de las caídas de voltaje alrededor de un circuito cerrado es cero. Así que, después de cerrar el interruptor se tiene:

$$L\frac{di}{dt} + Ri + \frac{q}{C} = 0$$

Sin embargo, como la corriente se relaciona con la carga de acuerdo con $i = \frac{dq}{dt}$, (valor i de la intensidad instantánea) Por lo tanto:

$$L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}q = 0$$

Ésta es una ecuación diferencial ordinaria lineal de segundo orden que se resuelve usando los métodos de cálculo. Esta solución que describe la variación de carga en el capacitador es:

Ecuación 11. Carga en un Circuito RLC

$$q(t) = q_0 * e^{-Rt/2L} * \cos\left(\sqrt{\left(\frac{1}{L*C} - \left(\frac{R}{2*L}\right)^2\right)} * t\right)$$

Un problema de diseño típico en ingeniería eléctrica consistiría en la determinación del resistor apropiado para disipar energía a una razón especificada, con valores conocidos de L y C. En este problema, suponga que la carga se debe disipar a 1% de su valor original $(q/q_0 = 0.01)$ en $t = 0.05ab\ s$eg, con $L = 5.ba\ H$ y $C = 10^{-4}\ F$. Con los datos dados la ecuación quedaría así:

$$f(R) = e^{-0.05ab*R} * cos\left(\sqrt{\left(\frac{1}{L*C} - \left(\frac{R}{2*L}\right)^2\right)} * (0.05ab)\right) - 0.01$$

Un examen de esta ecuación sugiere que un rango inicial razonable para R es 0 a 440Ω (ya que $2000 - 0.01R^2$ debe ser mayor que cero).

62. Una corriente oscilatoria en un circuito eléctrico se describe mediante la ecuación:

$$I(t) = 10 * e^{-t} * \sin(2 * \pi * t).$$

Determinar todos los valores de t, para cuando la corriente (I) es de $2.ab$ amperios.

63. Determine el coeficiente de rozamiento c necesario para que un paracaidista de masa $m = 68.ab\ kg$ tenga una velocidad v de $40.ba\ mt/seg$ después de una caída libre de $t = 10.ab\ s$eg, utilizando la Ecuación 12. Nota: La aceleración de la gravedad es $g = 9.8\ m/s2$.

Ecuación 12. Ecuación de caída libre

$$f(c) = \frac{g*m}{c}(1 - e^{-\left(\frac{c}{m}\right)*t}) - v$$

64. Considere la siguiente ecuación relativa a un conector de energía solar:

$$c = \frac{2*f*h^2*\sec(\alpha)}{d^2*(1+\sin(\alpha) - 0.5*\cos(\alpha))}$$

En donde $f = 0.7ba$, $d = 9.ab$ es el diámetro del colector, $h = 220.b$ es la altura del colector, $c = 1350$ es el factor de concentración geométrica y "α" es el ángulo del borde del campo de espejos planos que se enfocan sobre un colector central. Determine el ángulo α con 5 dígitos significativos, compruebe sus resultados.

Química – Bioquímica - Medicina

65. Una droga administrada a un paciente produce una concentración en la sangre dada por $c(t) = 0.9ab * A * t * e^{-t/3}$ mg/ml, $\boldsymbol{t}$ horas después de que $\boldsymbol{A}$ unidades han sido inyectadas. La máxima concentración sin peligro es 1 mg/ml.
    a. ¿Qué cantidad debe ser inyectada para alcanzar esta máxima concentración de seguridad y cuando se alcanza este máximo?
    b. Una cantidad adicional de esta droga se tiene que administrar al paciente cuando la concentración decae a 0.25 mg/ml. Determinar, al minuto más próximo, cuando debe darse esta segunda inyección.
    c. Suponiendo que la concentración de inyecciones consecutivas es aditiva y que el 75% de la cantidad inyectada originalmente es administrada en la segunda inyección, ¿cuándo es tiempo para la tercera inyección?

66. La concentración de saturación de oxígeno disuelto en agua dulce se calcula con la ecuación (APHA, 1992)

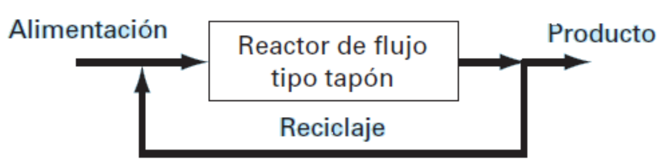
$$ln\left(O_{sf} = -139.34411 + \frac{1.575701 * 10^5}{T_a} - \frac{6.642308 + 10^7}{{T_a}^2} + \frac{1.2438 + 10^{10}}{{T_a}^3} - \frac{8.621949 + 10^{11}}{{T_a}^4}\right)$$

donde O_{sf} es la concentración de saturación de oxígeno disuelto en agua dulce a 1 atm (mg/L) y Ta es la temperatura absoluta (K). Recuerde que $Ta = T + 273.15$, donde T es la temperatura (°C). De acuerdo con esta ecuación, la saturación disminuye con el incremento de la temperatura. Para aguas naturales comunes en climas templados, la ecuación se usa para determinar que la concentración de oxígeno varía de 14.621 mg/L a 0°C a 6.413 mg/L a 40°C. Dado un valor de concentración de oxígeno, puede emplearse esta fórmula y un modelo de Raíces para resolver para la termperatura en °C
Fuente: Chapra Ed5 Pag 141

67. En ingeniería química, los reactores de flujo tipo tapón (es decir, aquellos en que el fluido va de un extremo al otro con una mezcla mínima a lo largo del eje longitudinal) se usan para convertir reactantes en productos. Se ha determinado que la eficiencia de la conversión algunas veces se mejora recirculando una porción de la corriente del producto, de tal forma que regrese a la entrada para un paso adicional a través del reactor (Figura 3). La razón de recirculando se define como:

$$R = \frac{volumen\ de\ fluido\ que\ regresa\ a\ la\ entrada}{volumen\ que\ sale\ del\ sistema}$$

Figura 3. Representación esquemática de un reactor de flujo tipo tapón con recirculación



Suponga que se está procesando una sustancia química A para generar un producto B. Para el caso en que A forma a B de acuerdo con una reacción auto catalítica (es decir, en la cual uno de los productos actúa como catalizador o estimulante en la reacción), es posible demostrar que una razón óptima de recirculación debe satisfacer:

$$ln\left(\frac{1+R\left(1-X_{af}\right)}{R\left(1-X_{af}\right)}\right)=\frac{R+1}{R\left[1+R\left(1-X_{af}\right)\right]}$$

donde X_{af} es la fracción del reactante A que se convierte en el producto B. La razón óptima de recirculación corresponde a un reactor de tamaño mínimo necesario para alcanzar el nivel deseado de conversión. Utilice un método numérico para determinar la razón de recirculación necesaria, de manera que se minimice el tamaño del reactor para una conversión fraccional de $X_{af}=0.9ab$.

68. La resistividad r de un lubricante de sílice se basa en la carga q en un electrón, la densidad del electrón n, y la movilidad del electrón m. La densidad del electrón está dada en términos de la densidad del lubricante N, y la densidad intrínseca de acarreo n_i. La movilidad del electrón está descrita por la temperatura T, la temperatura de referencia T_0, y la movilidad de referencia μ_0. Las ecuaciones que se requieren para calcular la resistividad son las siguientes:

$$\rho=\frac{1}{qn\mu}$$

Donde

$$n=\frac{1}{2}\left(N+\sqrt{N^2+4n_i^2}\right)$$

y

$$\mu=\mu_0\left(\frac{T}{T_0}\right)^{-2.42}$$

Determine N, dado que $T_0=300°K, T=1000°K, \mu_0=1350\ cm^2, (V\ s)^{-1}, q=1.7\times10^{-19}$ C, $ni=6.21\times109\ cm^{-3}$, y un valor deseable de $r=6.5\times10^6\ V\ s\ cm/C$.

69. La temperatura (∘kelvin) de un sistema, varía durante el día de acuerdo con:

$$T=400+200*cos\left(\frac{2\pi t}{1440}\right)$$

en donde t se expresa en minutos. La presión sobre el sistema está dada por: $p=e^{-t/1440}$. Calcule el volumen molal del oxígeno en intervalos de un minuto a lo largo del día. Tome como referencia para las fórmulas el ejercicio anterior.

70. En un proceso químico, el vapor de agua H_2O se calienta a una temperatura lo suficientemente alta para que una porción significativa del agua se disocie o se rompa en partes para formar oxígeno (O_2) e hidrógeno (H_2): $H_2=H_2+1/2O_2$, Se supone que es la única reacción que se lleva a cabo, la fracción molal x, de H_2O que se separa puede representarse como:

$$k_p=\frac{x}{1-x}\sqrt{\frac{2p_t}{2+x}}$$

En donde k_p es la constante de equilibrio de la reacción y p_t es la presión total de la mezcla. Si $p=2.ab$ Atm y $k_p=0.04568$, determínese el valor de x que satisfaga la ecuación anterior.

71. El tamaño crítico de un reactor nuclear se determina resolviendo una ecuación de criticalidad 2. Un ejemplo simple de este tipo de ecuaciones es

$$tan(0.1ab * x) = 9.2 * e^{-x}$$

La solución físicamente significativa es la menor raíz positiva. Se sabe, por experiencia, que la raíz se encuentra en el intervalo [3, 4].

a. Demuestra que, efectivamente, la ecuación tiene una raíz en [3, 4] y que tal raíz es única.
b. Aproxima el valor de la raíz con 5 decimales usando el método de la bisección.
c. Verifica el resultado sustituyendo en la ecuación.

Calcula la solución con 5 decimales exactos para un $x_0 = 3.5$.

72. En un proceso de ingeniería química el vapor de agua (H2O) se calienta a temperaturas lo suficientemente altas para que una porción significativa del agua se disocie, o se rompa, para formar oxígeno (O2) e hidrógeno (H2):

$$H_2O \rightleftharpoons H_2 + \frac{1}{2}O_2$$

Si se asume que ésta es la única reacción que se lleva a cabo, la fracción molar x de H_2O que se disocia se representa por:

Ecuación 13

$$K = \frac{x}{1-x}\sqrt{\frac{2 * p_1}{2+x}}$$

donde K es la constante de equilibrio de la reacción y p_t es la presión total de la mezcla. Si $pt = 3.5ab\ atm$ y $K = 0.04b$, determine el valor de x que satisfaga la Ecuación 13.

Chapra Ed5 P217

73. Una reacción química reversible $2A + B \rightleftharpoons C$ Se caracteriza por la relación de equilibrio:

$$K = \frac{C_c}{C_a^2 C_b}$$

Donde la nomenclatura C_n representa la concentración del componente N. Suponga que se define una variable x que representa el número de moles de C producido. La conservación de la masa se utiliza para reformular la relación de equilibrio como:

$$K = \frac{C_{c,o} + x}{\left(C_{a,o} - 2x\right)^2 \left(C_{b,0} - x\right)}$$

donde el subíndice $_0$ indica la concentración inicial de cada componente. Si $K = 0.016ab$, $C_{a,o} = 42.b$, $C_{b,o} = 28.a$ y $C_{c,o} = 4.b$, calcule x.

Chapra Ed5 P. 217

74. La ecuación de estado de Redlich-Kwong está dada por

Ecuación 14 estado de Redlich-Kwong

$$P = \frac{RT}{v-\beta} - \left(\frac{\alpha}{v(v+b)\sqrt{T}}\right)$$

Donde R es la constante universal de los gases [R= 0.518 kJ/(kg K)], T es la temperatura absoluta (K), P es la presión absoluta (kPa) y v es el volumen de un kg de gas (m3/kg). Los parámetros $\alpha\ y\ \beta$ se calculan mediante

$$\alpha = 0.427ba * \left(\frac{R^2 T_c^{2.a}}{P_c}\right)$$

$$\beta = 0.0866b * \left(\frac{RT_c}{P_c}\right)$$

Donde: P_c=4580 kPa y $T_c = 191\ K.$

Como ingeniero químico, se le pide determinar la cantidad de combustible metano que se puede almacenar en un tanque de 3 m^3 a una temperatura de –50°C con una presión de 65000 kPa. Emplee el método de localización de raíces de su elección para calcular v y luego determine la masa de metano contenida en el tanque.

Chapra Ed5 P. 218

75. Determinar la presión de saturación para el etano, a una temperatura de 90 K, empleando la ecuación de estado de Soave-Redlich-Kwong:

$$P = \frac{R * T}{V - \beta} - \left(\frac{\alpha}{V(V + \beta)}\right)$$

Donde

$$\alpha = \frac{0.4278 * R^2 * T_c^2}{P_c}\left[1 + (0.48a + 1.574b * \omega - 0.176ba * \omega^2)\left(1 - \sqrt{\frac{T}{T_c}}\right)\right]^2$$

$$\beta = \frac{0.08664 * R * T_c}{P_c}$$

$$R = 83.14\ \frac{bar\ cm^3}{mol\ °K}$$

Las propiedades del etano son:

$$T_c = 305.3\ °K, P_c = 48.72\ bas\ \omega = 0.1$$

2014 métodos numéricos aplicados a ing. Nieves. P144

76. La ecuación de estado de Redlich-Kwong está dada por

$$P + \left(\frac{\alpha}{v(v + b)\sqrt{T}}\right) * (v - \beta) = RT$$

Donde:

P es a presión en atm

T es la temperatura en °K

V = volumen molar en L/gmol

R = Constante universal de los gases en atm L/(gmol K)

$$\alpha = 0.427ba * \left(\frac{R^2 T_c^{2.a}}{P_c}\right)$$

$$\beta = 0.0866b * \left(\frac{RT_c}{P_c}\right)$$

Calcule el volumen molar V a 50 atm y 100 °C para los siguientes gases:

Gas	P_c(Atm)	$T_c(°K)$
He	2.26	5.26
H_2	12.80	33.30
O_2	49.70	154.40

2014 Métodos numéricos aplicados a ing. Nieves P.138

77. La ecuación de estado de Beattie–Bridgeman en su forma virial es:

$$PV = RT + \frac{\beta}{V} + \frac{\gamma}{V^2} + \frac{\delta}{V^3}$$

Donde

P es a presión en atm

T es la temperatura en °K

V = volumen molar en L/gmol

R = Constante universal de los gases en atm L/(gmol K)

$$\beta = R * T * B_o - A_0 - R_c/T^2$$
$$\gamma = -R * T * B_o * \beta + A_0 * \alpha - R * B_o * \epsilon/T^2$$
$$\delta = R * B_o * \beta * \epsilon/T^2$$

$A_0, B_o, \alpha, \beta, \epsilon$ constantes particulares para cada caso

Calcule el volumen molar V a 50 atm y 100 °C para los siguientes gases

Gas	A_0	α	B_o	β	$\epsilon * 10^{-4}$
He	0.0216	0.05984	0.01400	0.000000	0.0040
H_2	0.1975	–0.00506	0.02096	–0.43590	0.0504
O_2	1.4911	0.02562	0.04624	0.004208	4.8000
CO_2	5.0065	0.07132	0.10476	0.07235	$66 * 10^4$

2014 Métodos numéricos aplicados a ing. Nieves P.138

78. Para obtener la temperatura de burbuja de una solución líquida de CCl4 y CF4 en equilibrio con su vapor, se llegó a la ecuación

$$760 = 0.75\left[10^{6.898-1221.8/(T+227.4)} + 0.25[10^{6.195-376.71/(T+241.2)}\right]$$

Encuentre la temperatura de la burbuja T.

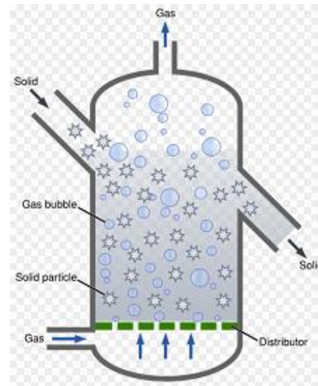
79. La siguiente ecuación permite calcular la concentración de un químico en un reactor (Figura 4), donde se tiene una mezcla completa.

$$c(t) = c_{ent}(1 - e^{-0.04t}) + c_o e^{-0.03t}$$

Si la concentración inicial es $c_o = 4.b$ y la concentración de entrada es $c_{ent} = 10.ba$, use un modelo de Raíces con $t_0 = 0$, para aproximar el tiempo requerido para que el valor de C sea 9b% de c_{ent}.
Fuente: http://blog.espol.edu.ec/analisisnumerico/s1eva_iit2019_t4-concentracion-de-quimico/

80. La Ecuación 15 permite calcular la concentración de un químico en un reactor donde se tiene una mezcla completa.

Figura 4



Ecuación 15. Concentración de Químico

$$c(t) = c_{ent}(1 - e^{-0.04t}) + c_o e^{-0.04t}$$

Si la concentración inicial es $c_o = 4.ab$ y la concentración de entrada es $c_{ent} = 10.a$, calcule con un error de 10^{-8} el tiempo requerido para que c sea el 9a% de c_{ent}

Fuente: http://blog.espol.edu.ec/analisisnumerico/s1eva_iit2019_t4-concentracion-de-quimico/

81. La presión de vapor del n-hexano y del n-octano se puede relacionar con la temperatura mediante las siguientes expresiones:

$$log\left(P_{C_6}^0 = 15.8737 - \frac{2697.55}{T - 48.784}\right) \text{ y } log\left(P_{C_8}^0 = 15.9798 - \frac{3127.60}{T - 63.633}\right)$$

Donde la presión $P_{C_i}^0$, está dada en milímetros de mercurio y la temperatura T en grados Kelvin. Ello nos permite estimar la temperatura de ebullición del n-hexano a 2 atmósferas (1520 mm Hg) en 364.39ºK y la del n-octano a la misma presión en 425.07 ºK. Se desea conocer, también a la presión de 2 atmósferas, la temperatura de ebullición de una mezcla liquida que contenga un 50% en moles de ambos componentes.

Para ello, denotando por x_1 a la fracción molar en la fase liquida de n-hexano C_6 y por x_2 a la fracción molar del n-octano C_8 se tendrá que $x_1 = x_2 = 0{,}5$. Puesto que el vapor estará en equilibrio, siendo P su presión total (1520 mm-Hg) y designando por y_1 e y_2 a las fracciones de cada componente en el vapor se tendrá que:

$$y_1 = \frac{P_1^0}{P} x_1 = \frac{P_1^0}{2P}$$

Y

$$y_2 = \frac{P_2^0}{P} x_1 = \frac{P_2^0}{2P}$$

verificarse que:

$$y_1 + y_2 = 1 \ \Rightarrow \ \frac{P_1^0}{2P} + \frac{P_2^0}{2P} = 1$$

lo que, remplazando P_1^0 y P_2^0 por sus expresiones en función de la temperatura, nos conduce a la ecuación no lineal:

$$f(T) = \frac{e^{15.8737 - \frac{2697.55}{T - 48.784}}}{3040} + \frac{e^{15.9798 - \frac{3127.60}{T - 63.633}}}{3040} - 1 = 0$$

La temperatura de ebullición T^* de la mezcla será superior a la temperatura de ebullición del n-hexano puro (364.39ºK) e inferior a la del n-octano puro (425.07ºK). Por ello el intervalo de búsqueda de la solución puede ser tomado como $[364,425]$. En este intervalo se verifica que $f(T)$ es una función continua (es suma de exponenciales cuyos exponentes están bien definidos en el intervalo de trabajo) y además es estrictamente monótona creciente (pues es la suma de funciones estrictamente monótonas crecientes).

Si en la ecuación anterior a T se le da el valor $T = 364°K$ se tendrá que $f(364) < 0$. Análogamente si a T se le da el valor $T = 425°K$ se tendrá que $f(425) > 0$. Por todo ello existirá una única solución de la ecuación en dicho intervalo.

Fuente: 2016_10_03_Raices_Ecuaciones.pdf

82. En este ejercicio se dan 6 ecuaciones de estado de gases: Una ecuación de estado es una ecuación $f(P,T,V) = 0$ que liga la variables macroscópicas del gas: La presión P, La temperatura T y el Volumen del gas V. Las ecuaciones están referidas a un mol de gas. Se pide determinar el volumen molar del dióxido de carbono a una temperatura de 300°K y sometido a una presión de 100atm. La determinación del volumen molar debe de realizarse por cada ecuación de estado. Para calcular el volumen molar se utilizará como intervalo de búsqueda $V_{min} = 0.01$ y $V_{max} = 1$. Finalmente comparar el volumen molar obtenido en cada caso con el correspondiente a los gases perfectos:

1. Ecuación de los gases perfectos

$$P * V = R * T$$

Donde P es la presión en atmosferas, V es el volumen molar en $L/g - mol$, T es la temperatura en $°K$, R es la constante de los gases $R = 0.08206\ L\ atm/g - mol\ K$.

2. Ecuación de Van der Waals

$$f(v) = \left(P + \frac{a}{v^2}\right) * (v - b) - R * T$$

$$\left(P + \frac{a}{v^2}\right) * (v - b) = R * T$$

Donde

$$a = \frac{27 *}{64}\left(\frac{R^2 * T_c^2}{P_c}\right)$$

$$b = \frac{R * T_c}{8 * P_c}$$

P_c y T_c son la presión y la temperatura crítica. Para el dióxido de carbono $P_c = 72.9\ atm$ y $T_c = 304.2°K$

3. Ecuación de Soave-Redlich-Kwong

$$P = \frac{R * T}{V - \beta} - \left(\frac{\alpha}{V * (V + \beta)}\right)$$

Donde

$$\alpha = 0.42747ba * \left(\frac{R^2 * T_c^2}{P_c}\right)$$
$$\beta = 0.08664ab * \left(\frac{R * T_c}{P_c}\right)$$
$$\alpha(T) = \left[1 + m\left(1 - \sqrt{(T/T_c)}\right)\right]^2$$
$$m = 0.48508 + 1.55171\omega - 0.1561\omega^2$$

Donde $\omega = 0.225$ para el dióxido de carbono

4. Ecuación de Soave-Redlich-Kwong

$$P = \frac{R * T}{V - \beta} - \left(\frac{\alpha}{V * (V + \beta)}\right)$$

Donde

Z es el Factor de compresibilidad

$$Z = \frac{P * V}{R * T}$$
$$A = \frac{\alpha * P}{(R * T)^2}, \qquad B = \frac{\beta * P}{R * T}$$
$$0 = Z^3 - Z^2 + (A - B - B^2) * Z - A * B$$

Polinomio de 3 orden

Calcular el volumen especifico de un gas puro a una dada presión y temperatura utilizando la ecuación de estado Save-Redlich-Kwong.

Las constantes α y β de la Ecuación se obtienen de la siguiente manera

$$\alpha = \frac{0.4278ab * R^2 * T_c^2}{P_c} \ \ y \ \ \beta = \frac{0.08664ba * R * T_c}{P_c}$$

Donde T_c y P_c representan la temperatura crítica y presión critica respectivamente. La variable alfa es una función empírica de la temperatura.

$$\alpha = \left[1 + s\left(1 - \sqrt{\frac{t}{T_c}}\right)\right]^2$$

El valor de S es función del factor acéntrico, ω, del gas.

$$S = 0.48508 + 1.5517\omega - 0.15613\omega^2$$

Las propiedades físicas de n-butano son:

$$T_c = 425.2°K, P_c = 3797kPa \ \ y \ \omega = 0.1931$$

La constante general de los gases es:

$$R = 8314J/kool.°K.$$

Calcular el volumen específico del vapor de n-butano a 500°k y a presiones de 1 a 40Atm.

Comparar los resultados gráficamente con aquellos obtenidos utilizando la ley de gases ideales.

Que conclusión saca de esta comparación

5. Ecuación de Pen-Roobinson

$$P = \frac{R * T}{V - \beta} - \left(\frac{\alpha(T)}{V * (V + \beta) + \beta * (V - \beta)}\right)$$

Donde

$$\beta = \frac{0.07780 * RT_c}{P_c}$$

- $a(T) = 0.45724 \frac{R^2 T_C^2}{P_C} \alpha(T).$
- $\alpha(T) = [1 + k(1 - (T/T_C)^0.5)]^2..$
- $k = 0.37464 + 1.54226\omega - 0.26992\omega^2.$

6. Ecuación de Beattie-Bridgeman

$$PV = RT + \frac{\beta}{V} + \frac{\gamma}{V^2} + \frac{\delta}{V^3}$$

Donde
P es a presión en atm
T es la temperatura en °K
V = volumen molar en L/gmol
R = Constante universal de los gases en atm L/(gmol K)
$\beta = R * T * B_o - A_0 - R_c/T^2$
$\gamma = -R * T * B_o\beta + A_0 * \alpha - R * B_o\varepsilon/T^2$
$\delta = R * B_o * \beta * \varepsilon/T^2$
A_0, B_o, α , β, ε constantes particulares para cada caso

83. Una masa de 1 Kg de CO está contenida en un recipiente a $T = 215°K$ y $p = 70b$ars.
Calcule el volumen del gas (v) utilizando la ecuación de estado de Van Der Waals, para un gas no ideal, dada por [Moran/Shapiro]:

$$\left(P + \frac{a'}{v^2}\right) * (v - b') = k * T,$$

donde:

P es la presión del fluido, medido en atmósferas,
v es el volumen en el que se encuentran las partículas dividido por el número de partículas (en litros),
k es la constante de Boltzmann,
T es la temperatura, en kelvin,
a’ es un término que tiene que ver con la atracción entre partículas,
b' es el volumen medio excluido de v por cada partícula.

Si se introducen el número de Avogadro (NA), el número de moles (n) y, consecuentemente, el número total de partículas $(n * NA)$, la ecuación queda en la forma siguiente:

$$\left(P + \frac{n^2 a}{v^2}\right)(v - nb) = nRT$$

donde:

p es la presión del fluido,
V es el volumen total del recipiente en que se encuentra el fluido,
a mide la atracción entre las partículas
b es el volumen disponible de un mol de partículas
n es el número de moles,
R es la constante universal de los gases ideales
T es la temperatura, en kelvin.

Si R=0.08314bar m^3/(Kg mol K), a=1.463 bar m^6/(Kg mol)^2 y b=0.0394 m^3/Kg.
Determine el volumen especifico v(en m^3/Kg) y compare el resultado con el volumen calculado por la ecuación del gas ideal.

$$Pv = RT$$

Constantes de van der Waals para varias substancias.

sustancia	a/dm^6 bar mol^{-2}	a/dm^6 atm mol^{-2}	b/dm^3 mol^{-1}
Helio	0.034598	0.034145	0.23733
Neón	0.21666	0.21382	0.17383
Argón	1.3483	1.3307	0.031830
Kriptón	2.2836	2.2537	0.038650
Hidrógeno	0.24646	0.24324	0.026665
Nitrógeno	1.3361	1.3483	0.038577
Oxígeno	1.3820	1.3639	0.031860
Monóxido de carbono	1.4734	1.4541	0.039523
Dióxido de carbono	3.6551	3.6073	0.042816
Amoniaco	4.3044	4.2481	0.037847

84. Un proyecto de Ingeniería Química requiere que se calcule exactamente el volumen molal (v) del bióxido de carbono y del oxígeno para combinaciones de diferentes condiciones de temperaturas y de la presión, de tal forma que se pueda seleccionar una vasija apropiada que los contenga. Asimismo, es importante examinar que tan bien se apega cada gas a ley de los gases ideales comparando los volúmenes molales.

Los datos para el bióxido de carbono son los siguientes:

R = 0.082054 L . atm / (mol. K)
a = 3.592
b = 0.04267
p = 1 atm
T = 300 K
Las ecuación aplicada es la de Van der Waals.

$$f(v) = \left(P + \frac{a}{v^2}\right)(v - b) - RT$$

su derivada:

$$f'(v) = p - \frac{a}{v^2} + \frac{2ab}{v^3}$$

Aplicar el método de Newton Raphson para resolver el problema usando el valor inicial de $x_0 = 10$

85. Una mezcla equimolar de monóxido de carbono y oxígeno alcanza el equilibrio a 300°K y a una presión de 5 atm. La reacción teórica es: $CO + \frac{1}{2}O_2 \leftrightarrow CO_2$

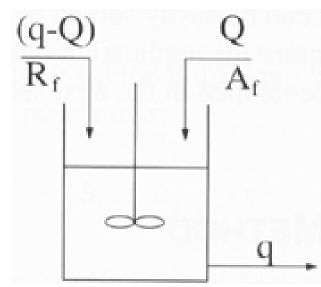
La reacción química real de escribe como: $CO + O_2 \rightarrow xCO + \frac{1}{2}(1 + x)O_2 + (1 - x)CO_2$,

La ecuación de equilibrio químico para determinar la fracción del CO restante, x, se escribe como

$$K_p = \frac{(1 - x) * (3 + x)^{1/2}}{x * (x + 1)^{1/2} P^{1/2}}, \qquad 0 < x < 1$$

Donde $K_p = 3.06a$ es la constante de equilibrio para CO+1/2O^2=CO$_2$ a 3000ºK y $P = 5.ab$ es la presión. Determine el valor de x.

86. Considere el reactor isotérmico continuo tanque agitado (CSTR) como el mostrado en la siguiente figura.



Las componentes A y R alimentan al reactor a tasas Q y (q-Q), respectivamente. En el reactor se desarrolla el siguiente esquema de reacción.

$$A + R \rightarrow B$$
$$B + R \rightarrow C$$
$$C + R \rightarrow D$$
$$D + R \rightarrow E$$

Este problema fue analizado por Douglas para ilustrar las diferentes técnicas de diseño de sistemas de control simple con retroalimentación. En su análisis Douglas hizo las siguientes hipótesis:

a. La componente r está presente en el reactor en exceso de manera que las velocidades de reacción pueden aproximarse por expresiones de primer orden.
b. Las componentes B,C, D y E de la alimentación son cero.
c. Se elige un conjunto particular de valores de velocidades y de concentraciones de la alimentación, constantes cinéticas y volumen del reactor.
d. La perturbaciones se deben a cambios en la composición de la componente R en el recipiente.

El objetivo del control es mantener la composición de la componente C tan próxima como será posible al valor de diseño de estado estacionario, a pesar del hecho que ingresen perturbaciones al sistema.

Este objetivo se alcanza mediante la medición de la composición real de C utilizando la diferencia entre el valor deseado y el valor medido para manipular el caudal de entrada Q de la componente A. Douglas desarrolló la siguiente función de transferencia para el reactor con un sistema de control proporcional.

$$K_c * \frac{2.98 * (s + 2.25)}{(s + 1.45)(s + 2.85)^2(s + 4.35)} = -1$$

K_c es la ganancia del controlador proporcuional

Este sistema de control les estable para valores de K_c que suministran raíces de la función de transferencia con parte real negativa. Utilizando el método de Newton Raphson determine las raíces de la función de transferencia para un rango de valores K_c.

Obsérvese lo siguiente:

$$\frac{2.98 * (s + 2.25) * K_c}{(s + 1.45)(s + 2.85)^2(s + 4.35)} = -1$$

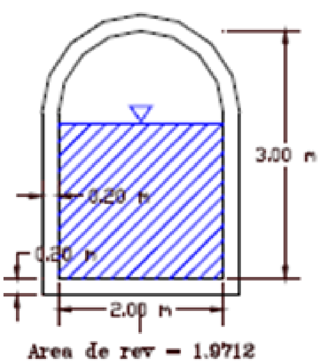
$$\frac{2.98 * (s + 2.25) * K_c}{(s^4 + 11.5s^3 + 47.49s^2 + 83.063s + 51.2327} = -1$$

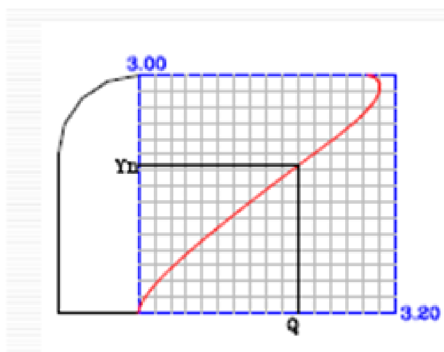
$$(s^4 + 11.5s^3 + 47.49s^2 + 83.063s + 51.2327 + 2.98 * (s + 2.25) * K_c = 0$$

Si $K_c = 0$ entonces s que valores toma: (open-loop stable)

Civil

87. En el gráfico se muestra una sección típica de tipo “BAUL”, en la cual se desea determinar el tirante normal o calado “Y” que tiene para los datos mostrados en la tabla adjunta. Además, es necesario hallar el gráfico de la variación tirante (Y) vs Caudal (Q), conocida como curva de descarga. Para determinar “Y” puede utilizar cualquier método para hallar raíces de ecuaciones no lineales.





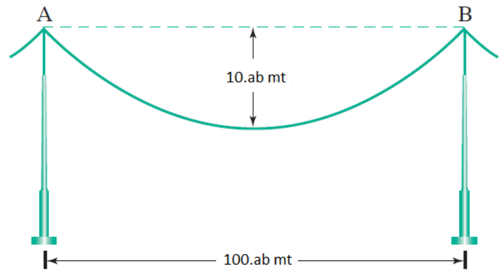
Seccion Tipica	
Progresiva inicial: 0+000	
Progresiva final: 0+100	
Caudal (m3/s)	2.0000
Pendiente	0.0001
n Manning	0.0140
Base (m)	2.0000
Altura (m)	3.0000
Tirante (m)	
Ancho superficial (m)	
Area (m2)	
Velocidad (m/s)	
Perimetro Mojado (m)	
Radio hidraulico (m)	
Energia (m)	
Tirante Critico (m)	
Nro. de Froude	

1. $$g(z + R) = \frac{u^2}{2}$$

Donde u es la velocidad, z es el nivel del agua medido desde el centro de la esfera, R es el radio del tanque y g es la aceleración de la gravedad igual a $9.81 m/s^2$.

El primer término del miembro derecho de la energía cinética del agua que sale del tubo y el segundo termino es el efecto de la perdida por fricción. Utilice 20 intervalos.

88. Un cable eléctrico está sujeto a dos torres (A-B) separadas 100.ab metros, con una carga vertical distribuida con intensidad constante γ_l a lo largo del cable. La intensidad de carga γ_l se mide en unidades de fuerza por unidad de longitud.



Un cable que cuelga bajo la acción de su propio peso soporta una carga de este tipo, y la curva que adopta corresponde el nombre de *Catenaria o Coseno Hiperbolico.*

Si se hace pasar el eje Y por el punto más bajo del cable, esta curva tiene por ecuación

$$y = \lambda * \cosh\left(\frac{x}{\lambda}\right)$$

Donde λ es un parámetro para determinar. Si se supone que el cable desciende $10.ba$ metros en el punto más bajo, determinar el valor de λ y la longitud del cable.

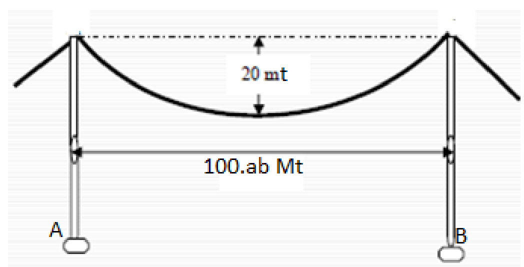
Para calcular c se coloca el origen de coordenadas en el punto mínimo y en la ecuación de la catenaria se sustituyen los valores de x e y correspondientes a uno de los extremos del alambre, por ejemplo, el B.

$$10.ab = c * \cosh\left(\frac{(100.ab)/2}{c}\right)$$

Calcular el valor de c.

2014 métodos numéricos aplicados a la Ing. Nieves P.114

89. Considere el cable AB de la figura adjunta que muestra un cable de transmisión suspendido por acción de su peso; con una carga vertical distribuida con intensidad constante "YL" a lo largo del cable. La intensidad de carga "YL" se mide en unidades de fuerza por unidad de longitud. Un Cable Que cuelga bajo la acción de su propio peso soporta una carga de este tipo y la curva que adopta corresponde a un coseno hiperbólico o catenaria. La solución de la catenaria para "c" es un resultado intermedio para calcular la tensión máxima y mínima en el cable y la longitud "s" del mismo.



$$y = c * \left(\cos\left(\frac{x}{c}\right) - 1\right)$$

Calcular el valor de la constante "c" de tal forma que pueda determinar el valor de la longitud "s" del cable usando la expresión:

$$s = c * sinh\left(\frac{x}{c}\right)$$

90. Un ingeniero civil diseña un tanque de agua en forma de balón de fútbol (tanque esférico) con radio de $5\ mt$, encontrándose lleno hasta el tope. Se va a drenar por un agujero de radio $b = 0.1abmt$ en el fondo, comenzando en $t = 0\ seg$. Si no hay fricción. ¿Cuánto tiempo tardará el nivel de agua en llegar a $0.5bamt$, medido desde el fondo?

Sugerencia: La velocidad de agua que drena por el agujero está determinada por la ecuación de la energía:

$$g(z + R) = \frac{u^2}{2}$$

Donde u es la velocidad, z es el nivel del agua medido desde el centro de la esfera, R es el radio del tanque y g es la aceleración de la gravedad igual a $9.81m/s^2$.

El primer término del miembro derecho de la energía cinética del agua que sale del tubo y el segundo termino es el efecto de la perdida por fricción. Utilice 20 intervalos.

91. El desplazamiento de una estructura está definido por la Ecuación 16 para una oscilación amortiguada:

Ecuación 16

$$y = 9 * e^{-k*t} * \cos(w * t)$$

donde $k = 0.7ba$ y $w = 4.ab$. Utilice un modelo numérico para realizar una estimación del tiempo que se requiere para que el desplazamiento disminuya a 3.5.
Fuente: Chapra pág. 219

92. El movimiento de una determinada estructura para una oscilación amortiguada está descrito por la siguiente ecuación:

$$y = 10 * e^{-k*t} * cos(w * t)$$

Donde $k = 0.5ab$ y $w = 2.ba$, Determinar el tiempo necesario, con un error de 10^{-5}, para que el desplazamiento baje hasta 4.ab.

$$f(t) = 10e^{-0.5ab*t}\cos(2.ba * t) - 4.ab = 0$$

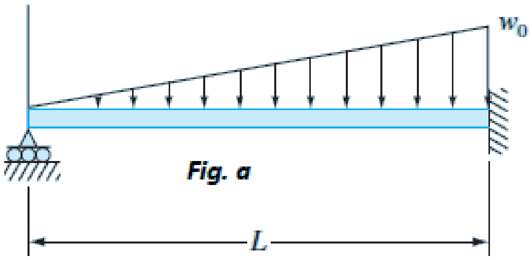
93. En ingeniería estructural, la fórmula de la secante define la fuerza por unidad de área, P/A, que ocasiona la tensión máxima σm en una columna que tiene una razón de esbeltez L/k dada es:

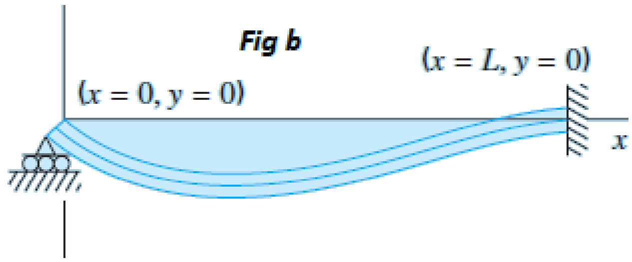
Ecuación 17

$$\frac{P}{A} = \frac{\sigma_m}{1 + \left(\frac{ec}{k^2}\right) sec\left(0.5\sqrt{\frac{P}{EA}}\right)(LK)}$$

donde $\frac{ec}{k^2}$ es la razón de excentricidad, y E es el módulo de elasticidad. Si para una viga de acero, $E = 200000\ MPa$, $\frac{ec}{k^2} = 0.4ab$ y σ_m=250 MPa, calcule P/A para L/k=50. Recuerde que $sec(x)$ =$1/cos(x)$.
Fuente: Chapra pág. 219

94. En la figura a se muestra una viga uniforme sujeta a una carga distribuida uniformemente que crece en forma lineal. La ecuación para la curva elástica resultante es la siguiente (véase la figura b)





$$y = \frac{\omega_o}{120EIL}(-x^5 + 2L^2x^3 - L^4x)$$

Utilice un modelo matemático para determinar el punto de máxima deflexión (es decir, el valor de x donde dy/dx=0). Después, sustituya este valor en la Ecuación 5 a fin de determinar el valor de la deflexión máxima. En sus cálculos, utilice los valores siguientes para los parámetros: L=600cm, E=50000kN/cm^2, I=30000cm^4 y ωo=2.5 kN/cm.

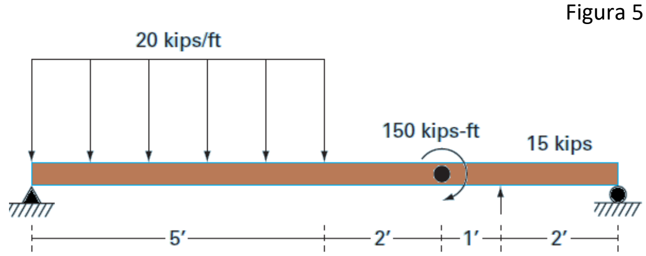
Chapra: Ed5 P.220

95. Para la viga con apoyo simple de la Figura 5, el desplazamiento a lo largo de ella está dado por la ecuación:

$$u_y(x) = \frac{-5}{6}[(x-0)^4 - (x-5)^4] + \frac{15}{6}(x-8)^3 + 75(x-7)^2 + \frac{57}{6}(x)^3 - 238.25x$$

a. Calcule el (los) punto(s) donde el desplazamiento es igual a cero.
b. ¿Cómo se usaría una técnica de localización de raíces para determinar la ubicación del desplazamiento mínimo?

Figura 5



96. Las frecuencias naturales de vibración de una varilla uniforme sujetada por un extremo y libre por el otro son soluciones de:

$$cos(\beta * l) * cosh(\beta * l) + 1 = 0$$

Donde

$$\beta = \frac{\rho\omega^2}{EI}$$

l =1 (longitud de la varilla en metros)

ω =frecuencia en seg^{-1}

EI=rapidez de flexión (Byares/Snyder/Plants)

ρ =densidad del material de la varilla (ρ hierro puro=7874, Acero=7850, Aluminio=2700) Kg/m^3.

Determine tres valores más pequeños de β que satisfagan la ecuación planteadas mediante el método de newton raspón.

97. La ecuación de factor de intensidad de esfuerzos K, para una placa de ancho w y espesor t con una grieta en el borde, de largo a es: K= $\sigma Y\sqrt{a}$, Donde Y es un factor geométrico que depende del ancho de la placa (w) y el tamaño de grieta, siendo:

$$Y = \left[1.99 - 0.41\left(\frac{a}{w}\right) + 18.70\left(\frac{a}{w}\right)^2 - 38.48\left(\frac{a}{w}\right)^3 + 53.85\left(\frac{a}{w}\right)^4\right]$$

La falla catastrófica de la placa se produce cuando el factor de intensidad de esfuerzos K igual a_0, supera a la tenacidad a la fractura K_{ic}, entonces el tamaño de grieta crítica es:

$$a_f = \left(\frac{K_{ic}}{\sigma Y}\right)^2$$

Como el factor geométrico Y depende de a_f, la ecuación puede resolverse por el método de punto fijo.

$$a_f = \left(\frac{K_{ic}}{\sigma\left[1.99 - 0.41\left(\frac{a}{w}\right) + 18.70\left(\frac{a}{w}\right)^2 - 38.48\left(\frac{a}{w}\right)^3 + 53.85\left(\frac{a}{w}\right)^4\right]}\right)^2$$

Se tiene un caso de una placa sujeta a tensión donde $w = 2.5in$, $\sigma = 24.89ksi$, $K_{Ic} = 52ksi\sqrt{in}$. Se elige como aproximación inicial $a_0 = 0.250in$.

Fuente: metodos_numericos_basicos_para_ingen_Carlos Armando De Castro

98. En problemas de la ingeniería civil aparecen ecuaciones algebraicas que no se pueden resolver analíticamente. Un caso particular de esta situación corresponde a la ecuación de Manning. Esta ecuación es muy importante en hidráulica ya que permite realizar la descripción del flujo en un canal abierto.

Ecuación 18. Manning

$$Q = \frac{1}{n}AR^{2/3}S^{1/2}$$

Donde: Q=caudal, A=Área sección, R=es el radio hidráulico, S=es la pendiente y n=es el coeficiente de Manning.

El radio hidráulico se define como $R = \frac{A}{P}$, donde A=área de la sección y P=perímetro de la misma. La ecuación de Manning (**Ecuación 18**) queda:

$$Q = \frac{1}{n}A\left(\frac{A}{P}\right)^{(2/3)}S^{1/2}$$

Para el caso de un canal cuya sección tiene forma rectangular, el perímetro mojado está dado por: $P = b + 2 * h$, donde b es la base y h es la profundidad del canal respectivamente, y el área: $A = b * h$

Esto hace que la ecuación de Manning para un canal de sección rectangular se pueda expresar como:

$$Q = \frac{1}{n} * \frac{A^{\frac{5}{3}}}{P^{\frac{2}{3}}} * S^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{n} * \frac{\sqrt[3]{(b*h)^5}}{\sqrt[3]{(b+2*h)^2}} * \sqrt{S}$$

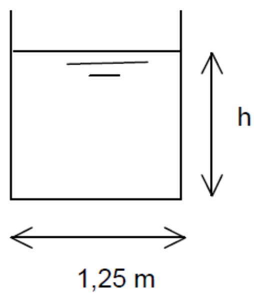
Un problema común en el diseño de estructuras hidráulicas consiste en determinar la profundidad h de un canal que pueda conducir un caudal dado Q.

Fuente: 2007_Analisis Numérico para Ingenieros_Civiles_Oscar_Garcia_Otros.pdf pag 60

99. Se tiene un canal rectangular de hormigón (Coeficiente de rugosidad n=0,014) de 1,25 m de ancho, cuya pendiente es de 0,5ab%, y que portea un caudal de Q=5.ab m^3/s.

Calcule las alturas normal hn. La altura normal (escurrimiento uniforme) se calcula empleando la ecuación de Manning:

$$V = \frac{1}{n} R^{2/3} i^{1/2}$$



Donde:
n es el coeficiente de rugosidad
R es el radio hidráulico
i es la pendiente del canal
Por lo tanto:
Área:

$$A = 1.25 * hn$$

Perímetro:

$$P = 1.25 + 2 * hn$$

Radio Hidráulico:

$$R = A/P = \frac{(1.25 * hn)}{(1.25 + 2 * hn)}$$

Reemplazando en la ecuación de Manning se tiene: $Q{=}V{*}A$ (ecuación de continuidad)

$$Q = \frac{1}{n} R^{2/3} i^{1/2} * A$$

$$Q = \frac{1}{n}\left(\frac{(1.25 * hn)}{(1.25 + 2 * hn)}\right)^{2/3} i^{1/2} * (1.25 * hn)$$

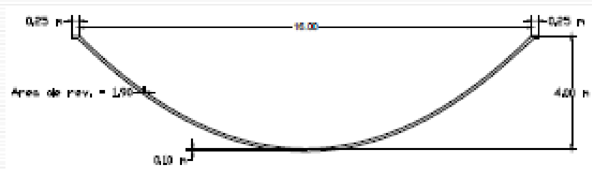
$$Q = \frac{1}{n}\left(\frac{(1.25 * hn)}{(1.25 + 2 * hn)}\right)^{5/3} i^{1/2}$$

100. La profundidad moral "y" del flujo en un canal de sección parabólica abierto de ancho "T" está relacionada con el caudal "Q", la pendiente del canal "S" y el coeficiente de fricción de Manning "n" mediante las ecuaciones:

$$Q = \frac{1}{n} A R^{(2/3)} S^{1/2} \rightarrow \frac{Q_n}{S^{1/2}} = A^{5/3} P^{-2/3}$$

Determinar "y" para el conjunto de datos.

Caudal (Q)	100.0 m3/s
Coeficiente (n)	0.050
Pendiente (S)	0.0045
Espejo de agua (T)	16.00 m
Foco (K)	8.00 m



Economía - Financiera

101. Una empresa produce semanalmente una cantidad de artículos. El costo de producción semanal tiene un costo fijo de 250.ab y un costo de 2.5ba por cada artículo producido. El ingreso semanal por venta tiene un valor de 3.5ab por cada artículo vendido, más un costo de oportunidad que se ha estimado directamente proporcional a la cantidad de artículos producidos, multiplicado por el logaritmo natural. Encuentre el punto de equilibrio para este modelo económico.
 2011_Analisis Numérico Básico P.45

102. Una empresa vende un vehículo en $P = 50$ millones con una cuota inicial E de 15 millones y pagos mensuales de $M = 1$ millón a cinco años. Determine el interés mensual x que la empresa está cobrando. Use la siguiente fórmula:
$$P = E + \frac{M}{x}\left(1 - \frac{1}{(1+x)^n}\right)$$
 en donde **n** es el número total de pagos mensuales
 2011_Analisis Numérico Básico P.45

103. En una empresa de fertilizantes en cada mes, el ingreso por ventas en miles de dólares se describe con el modelo
$$v(x) = 0.4ab * x * (30 - x)$$
 mientras que el costo de producción en miles de dólares es
$$c(x) = 5 + 10 * \ ln(x)$$
 siendo x la cantidad producida en toneladas, $1 < x < 30$. ¿Qué cantidad mensual debe producir para obtener el máximo beneficio económico?
 2011_Analisis Numérico Básico P.45

104. El costo semanal fijo por uso de un local para venta de cierto tipo de artículo es \$50.ab. Producir cada Kg. del artículo cuesta \$2.5ba. El ingreso por venta es $3 * x + 2 * ln(x)$ en donde x representa la cantidad de kg vendidos en cada semana. Determine la cantidad de Kg. que se debe vender semanalmente a partir de la cual la empresa obtiene ganancias.
 2011_Analisis Numérico Básico P.45

105. Los problemas relativos al dinero necesario para pagar una hipoteca de una casa durante un periodo fijo de tiempo requieren la Ecuación 19

Ecuación 19. *de la anualidad ordinaria*
$$A = P * \left(\frac{1-(1+i)^n}{i}\right)$$

En esta ecuación, A es el valor total de la hipoteca, P es el valor de cada pago e i es la tasa de interés por periodo para n periodos. Suponga que se necesita una hipoteca de $350 millones por una casa a 30 años y que los pagos máximos que puede realizar el cliente son de $2.ab millón mensual. ¿Cuál será el interés más alto que podrá pagar?

106. Un ingeniero desea tener una cantidad de dólares acumulada en su cuenta de ahorros para su retiro luego de una cantidad de años de trabajo. Para este objetivo planea depositar un valor mensualmente. Suponga que el banco acumula el capital mensualmente mediante la siguiente fórmula:

$$A = P * \left(\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right)$$

A: Valor acumulado, P: Valor de cada depósito mensual, n: Cantidad de depósitos mensuales, i: Tasa de interés mensual. ¿Determine la tasa de interés anual que debe pagarle el banco si desea reunir 2’000.000 en 25 años depositando cuotas mensuales de 8.500,ab?

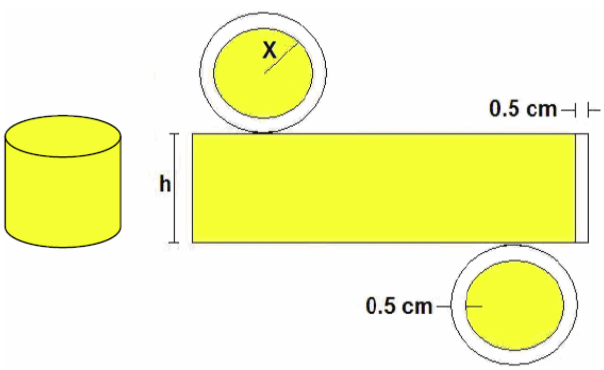
107. Para un periodo de 6 meses, se propone el siguiente modelo para describir la demanda de un producto d, en donde x es tiempo en días, $m = 270$ y k es una constante que depende del número de propagandas que se realicen diarias en medios de TV de la región para promocionar el producto, siendo máximo 1 propaganda por hora.

$$d(x) = 3 * k + k * x^{1+\frac{1}{\sqrt{x}}} * e^{-\frac{k}{m}x}$$

Encuentre el valor de x para el cual la demanda alcanza el valor de 200.ab unidades.
Determine el valor de k, y el x, para obtener el máximo número de producto demandado y los valores de k para obtener máxima ganancia en los seis meses, sabiendo que cada propaganda tiene un costo de 100.000 pesos y cada producto se vende a razón de 10.000,ab pesos.

108. Un empresario desea producir recipientes cilíndricos de aluminio de un litro de capacidad. Cada recipiente debe tener un borde de 0.5a cm. adicionales para sellarlo. Determine las dimensiones del recipiente para que la cantidad de material utilizado en la fabricación sea mínima.

Para formular el modelo matemático del problema, debe entenderse detalladamente. En este ejemplo el dibujo facilita visualizar sus componentes. Sean: x, h: radio y altura del cilindro, respectivamente



Ecuación 20. Área Total

$$s = 2\pi(x+0.5)^2 + (2\pi x + 0.5)h\ cm^2$$

Ecuación 21. Volumen requerido

$$v = \pi x^2 h = 1000\ cm^3$$

De Ecuación 21 se obtiene h:

$$h = \frac{1000}{\pi x^2}$$

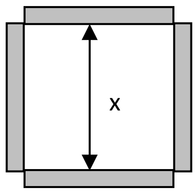
Se sustituye en Ecuación 20:

$$s(x) = 2\pi(x+0.5)^2 + \frac{1000(2\pi x + 0.5)}{\pi x^2}$$

Se obtiene una función para la que debe determinarse el valor de la variable x que minimice s. El Cálculo Diferencial nos proporciona un procedimiento para obtener la respuesta. Se debe resolver la ecuación: $s'(x) = 0$. Este es el modelo matemático del cual se obtendrá la solución.

Fuente: 2011_analisis Numerico_Luis Ojeda.pdf pag 5

109. Se desea diseñar un tanque de combustible según la siguiente figura. La forma del tanque es la de un



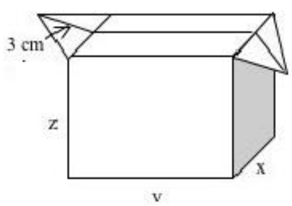
cubo y será fabricado con placas de acero de espesor $e = 3\ mm$ Se requiere que la masa total del tanque lleno (combustible + acero) sea de $0.05\ ton$. La densidad del acero es

2. 7.85a t / mt^3
3. y la del combustible

0.83b t / mt^3

Usar cualquier método para hallar el valor de x.

110. Un fabricante de envases de zumo se dispone a optimizar las dimensiones de sus envases con el



objetivo de minimizar el coste de fabricación (proporcional al material usado). Teniendo en cuenta que la capacidad de los envases debe ser de $1.5ab\ litros$, calcula las dimensiones óptimas de los mismos (usa los datos de la figura).

Para facilitar la resolución sigue las etapas siguientes:

a. define la función a optimizar (minimizar en este caso);
b. busca la(s) relación(es) que hay entre las variables del problema;
c. úsalas para reducir el número de variables de la función inicial;
d. escribe el sistema asociado a la búsqueda de extremos de una función de 2 variables.
e. Para resolver el sistema anterior elimina una de las variables y expresa la ecuación resultante en forma de ecuación polinómica;
f. estima la solución (será una de las magnitudes del envase) de la ecuación polinómica aplicando 3-veces el método N–R con aproximación inicial 10 cm;
g. por último, usando el valor obtenido en el apartado anterior, estima el resto de las magnitudes del envase.

111. Una empresa compra una máquina en 20.000,ba dólares pagando 5.000,ab dólares cada año durante los próximos 5 años. La siguiente fórmula relaciona el costo de la máquina P, el pago anual A, el número de años n y el interés anual i:

$$A = P * \left(\frac{i * (1 + i)^n}{(1 + i)^n - 1} \right)$$

¿Determine la tasa de interés anual i que se debe pagar?

112. Los problemas relacionados con la cantidad de dinero requerida para pagar una hipoteca en un periodo fijo (n), involucran la fórmula:

$$A = (1 - (1 + i)^{-n}) * \left(\frac{p}{i}\right)$$

Donde:
A: monto de hipoteca
P: Cuota
I: Tasa de interés
Suponga que necesita una hipoteca a 30 años para una casa, por $250.000.000 y que el deudor puede pagar a lo sumo $725.000 al mes. Cuál será la tasa de interés máxima que el deudor puede pagar.

113. Una empresa vende un vehículo en P=34.000,ab Dólares con una entrada de E=7.000,ba dólares y pagos mensuales de M=800,ab dólares durante 5 años. Determine el interés mensual i que la empresa está cobrando. Use la siguiente fórmula:

$$P = E + \frac{M}{i}\left(1 - \frac{1}{(1 + i)^n}\right)$$

En donde n es el número total de pagos mensuales

114. Si se compra un Osciloscopio cuyo costo es $3.500.000,ab de pesos para pagarlo a cuotas, cancelando $535.ab0 pesos mensuales durante 7 meses. ¿Qué tasa de interés se está pagando? La fórmula que relaciona el costo actual (P), los pagos mensuales (A), el número de meses (n) y la tasa de interés (i) es:

$$A = P * \left(\frac{i * (1 + i)^n}{(1 + i)^n - 1}\right)$$

115. Un nuevo centro de diversiones cuesta (P) $10.000.000,ab millones de pesos y produce una ganancia de (A) $2.000.000,ba millones. Si la deuda se debe pagar en 10 años ¿a qué tasa de interés debe hacerse el préstamo? El costo actual (P), el pago anual (A) y la tasa de interés (i) se relacionan entre sí mediante la siguiente fórmula:

$$\frac{P}{A} = \frac{(1 + i)^n - 1}{i * (1 + i)^n}$$

116. El capital *A* acumulado en una cuenta de ahorro en la que se ingresa periódicamente una cantidad *P* viene dado por la fórmula

$$A = \frac{P}{i} * ((1 + i)^n - 1)$$

donde *i* es el interés en cada periodo y *n* el número de periodos transcurridos. Un empresario desearía jubilarse dentro de 20 años con un capital acumulado de 7.050.000 Pesos haciendo depósitos mensuales de 10.5ab Pesos, ¿cuál es el interés mínimo que debe tener la cuenta de ahorro en la que invierta sus ahorros?

117. Calcular la tasa interna de retorno para el flujo de caja {-2, 1, 1, 1}. Para calcular la $TIR = (1/c) - 1$, se debe hallar primero el valor de c, resolviendo la ecuación: $c^3 + c^2 + c - 2$, proveniente de los valores de flujo de caja.

118. Se define la T.I.R. como la tasa de descuento que anula la fórmula del Valor Capital (o Valor Actual Neto, VAN). Su nombre es “tasa (o tipo o tanto) interna de rentabilidad (o de retorno o de rendimiento)” y se expresa como porcentaje anual.

Ecuación 22

$$VNA = -Q_0 + \sum_{j=1}^{n} \frac{Q_j}{(1+tir)^j}$$

El método tir puede usarse para calcular una rentabilidad o bien un coste. Si se extrae de la fórmula del VAN, se trata de una medida de rentabilidad relativa y anual. Si se aplicase un método similar a un dimensión financiera de un proyecto de financiación, el resultado sería un interés efectivo.
Igualando a cero la Ecuación 22, se obtiene la fórmula de la T.I.R.

Ecuación 23

$$-Q_0 + \sum_{j=1}^{n} \frac{Q_j}{(1+tir)^j} = 0$$

Suponga que una inversión de 1.000 unidades monetarias genera una renta de 400 durante cuatro años. Lógicamente, al tratarse de una renta constante, el procedimiento de prueba y error sólo necesita ser practicado con dos sustituciones cada vez en la fórmula.

$$\frac{Q_0}{Q} = \frac{1-(1+tir)^{-n}}{tir}$$

Se ha despejado de Ecuación 23, introduciendo en aquélla el término general de la renta constante Q. En este caso.

$$\frac{1000}{400} = \frac{1-(1+tir)^{-4}}{tir}$$

119. **Préstamos con cuota creciente en progresión aritmética:** Esta modalidad de préstamos es utilizada en las operaciones de financiación para la adquisición de viviendas protegidas. Se caracteriza porque su cuota es creciente debido a una cantidad fija que se incrementa en cada anualidad o período de liquidación. Esto hace que lógicamente la cuota no sólo varíe en función del tipo de interés devengado en cada momento, sino que además año a año su importe se incrementa en función de la diferencia de la progresión. Cabe destacar que, si bien financieramente es equivalente a un préstamo calculado según el procedimiento de cuota constante, el montante de intereses devengados durante la vida del préstamo es claramente superior.

Fórmulas de cálculo

Cálculo del capital amortizado en cada cuota:

$$Cuota = \frac{(Principal * i) + dn}{1-(1+i)^{-n}} - \frac{d}{i} - dn$$

Siendo:

- $\boldsymbol{n}$= duración de la operación en meses, trimestres, semestres, años.
- $\boldsymbol{i}$= tipo de interés efectivo correspondiente al período considerado (misma periodicidad que la duración $\boldsymbol{n}$).

- $\boldsymbol{d}$= es la diferencia de la progresión. Observamos que si $\boldsymbol{d} = 0$ se obtiene la fórmula de cálculo del sistema francés.

Cálculo de los intereses devengados en cada cuota:

$$Intereses = \frac{Capital\ Pendiente * i * dias}{360}$$

Hay que tener en cuenta que en función de la diferencia con la que se trabaje en la progresión la diferencia existente entre la cuota inicial y final puede crecer sustancialmente, pudiéndose llegar en casos extremos a que las cuotas iniciales sean inferiores al importe de los intereses devengados en ese período. Si esto último sucediera, nos podríamos encontrar con que durante los primeros períodos nuestra deuda con la entidad financiera crece.

Si p=$1.000.ab0; i=1.35%; n=24 meses; cual sería la diferencia de progresión para pagar una cuota c=$49.000
Si p=$1.000.ba0; d=1.05; n=24 meses; cual sería el interés mensual i, para pagar una cuota c=$49.000

120. Préstamo en progresión geométrica – cuota creciente. Son préstamos donde la cuota crece en progresión geométrica, de tal modo que dependiendo de la razón de la progresión la cuota inicial puede ser muy distinta de la cuota final. Pueden existir dos modalidades con variación de cuota periódica o anual.

Fórmula

$$Cuota\ Amortización\ Préstamo = a_1 = C * \frac{1 + i - q}{1 - q^n * (1 + i)^{-n}}$$

Siendo:

$\boldsymbol{C}$ = Cantidad nominal del préstamo,
$\boldsymbol{n}$ = duración de la operación en meses, trimestres, semestres, años,
$\boldsymbol{i}$ = tipo de interés efectivo correspondiente al período considerado,
a_1= primera cuota que se paga para amortizar el préstamo,
$\boldsymbol{q}$ = razón de la progresión geométrica que sirve para determinar las cuotas al multiplicar la primera de ellas por dicha razón y así sucesivamente.

Si p=$1.000.ab0; i=1.35%; n=24, cual es el valor de q para cancelar la primera cuota de $50.000,oo
Si p=$1.000.ba0; d=0.975; n=24, cual es el valor de i en porcentaje para cancelar la primera cuota de $51.000,oo

121. La valoración de contratos de futuros determina el precio justo que se debe pagar para recibir en una fecha futura un activo a un precio pactado, teniendo en cuenta el precio actual del activo, sus rentas futuras y el tipo de interés libre de riesgo.

$$F_r(t) = e^{-r(T-t)}(S(T) - E) = S(t) - Ee^{-r(T-t)}$$

Donde:
E: precio pactado
T: fecha de vencimiento del contrato de futuros
S(t): precio del subyacente en el instante t
R: tipo de interés compuesto y continuo

122. La Universidad Surcolombiana está interesada en adquirir un moderno Laboratorio de Electrónica. Hay tres compañías que le cotizan los equipos requeridos con las siguientes condiciones:

Compañía 1: Valor de contado 49’000.000, a crédito; cuota inicial de 30’000.000 y 5 cuotas mensuales de 5´000.000 cada una.
Compañía 2: Valor de contado 45’000.000, valor a crédito; cuota inicial de 25’.000.000 y 8 cuotas de 4´000.000 cada una
Compañía 3: Valor de contado 50’000.000. Valor a crédito; Cuota inicial de 40’000.000 y 4 cuotas de 3’000.000 cada una.

La Universidad cuenta en estos momentos con 20’000.000 para dicha compra. Cada una de las empresas manifiesta financiar el resto al mismo interés de la propuesta. A cuál de las tres (3) empresas la universidad debe comprarle de tal forma que salga favorecida económicamente. Los equipos cotizados son idénticos en las tres empresas.

123. Análisis de punto de equilibrio: En la práctica de la Ingeniería óptima se requiere que los proyectos, productos y la planificación de estos sean enfocados de tal manera que resulten económicos. Por lo tanto, a un Ingeniero con experiencia deben serle familiares los análisis de costos. El problema que se trata en esta sección se conoce como “Problemas de punto de equilibrio”. Se usa para determinar el punto en el cual dos alternativas tienen valores equivalentes. Estos problemas se encuentran en todos los campos de la ingeniería. Aunque el problema se enfoca en términos personales, se puede tomar como prototipo de otros problemas de análisis de punto de equilibrio, que se encuentran a menudo en la vida profesional. Se está considerando la compra de una de dos microcomputadores: “La microcomputadora uno y la microcomputadora dos”. En el cuadro 1 se encuentra resumidas algunas de las características, los costos aproximados y los beneficios de cada una de ellas. Si se puede pedir un préstamo con un interés del 20% (y=0.20). ¿Cuánto tiempo se deberá poseer las máquinas, de manera que tengan un valor equivalente? En otras palabras ¿Cuál es el punto de equilibrio medido en años?

Cuadro 1. Costos y beneficios de dos microcomputadores. Los signos negativos indican un costo o una pérdida mientras que un signo positivo indica una ganancia.

C O M P U T A D O R A S		
	MICRO 1	MICRO 2
Costos de compra	-3000	-10000
Incremento en el mantenimiento costo año	-200	-50

Ganancias y beneficios anuales	1000	4000

124. En una inspección de los sistemas de seguridad de una empresa se ha detectado una irregularidad en las alarmas contra incendios. El mecanismo se basa en sendos indicadores, que dependen de la concentración de humo x y la temperatura ambiente t, de modo que:
 1. El indicador de humo marca: $\frac{e^{x/10}-e^{-x/10}}{100}$
 2. El indicador de temperatura marca: t^3+t^2+t.

 Se pide:
 a. Trabajando con un intervalo de extremos enteros y amplitud 1, determinar con una precisión de dos cifras decimales la concentración de humo que se registraba si el indicador correspondiente hizo saltar la alarma al tomar el valor 4.
 b. Trabajando con un intervalo de extremos enteros y amplitud 1, determinar con una precisión de dos cifras decimales la temperatura que hacía si el indicador correspondiente hizo saltar la alarma al tomar el valor 12000.
 c. Sabiendo que los indicadores trabajan con una precisión de dos cifras decimales, ¿a qué valores habría que ajustar los indicadores para que saltaran a una concentración de humo del 30% y a una temperatura de 50, respectivamente?

Hidráulica – Mecánica de fluidos

125. En una planta de abastecimiento de combustible se tiene un tanque de forma esférica. El volumen del líquido almacenado en el tanque se puede calcular mediante la siguiente fórmula:

$$v(h)=\pi*h^2(R-h/3)$$

donde h representa la altura del líquido dentro del tanque medida desde la parte inferior del tanque y R su radio ($0\le h\le 2R$). Suponga que el tanque tiene un radio de $2.ab$ mt. Calcule la altura que debe tener el líquido para que el tanque contenga 27.ba m^3. Calcule el resultado con una tolerancia $E=10^{-4}$.
2011_Analisis numérico básico

126. En el cálculo hidráulico de tuberías se utiliza la fórmula DARCY-PRANDTL-COLEBROOK que proporciona las pérdidas debidas a la fricción, en función de los coeficientes de fricción:

$$h=\lambda*L*\frac{V^2}{2*g*D}$$

Donde D: Diámetro de tubería en metros, L: Longitud de la conducción en metros, V: Velocidad media de flujo (m/seg), g: Aceleración de la gravedad (m/seg^2), y el valor de Lambda λ puede obtenerse a partir de la ecuación de COLEBROOK:

$$\lambda^{-1/2}=-2*ln\left(\frac{2.51}{Re*\lambda^{1/2}}+\frac{K}{3.71*D}\right)$$

Siendo ahora Re: Número de Reynolds, μ: Viscosidad cinemática (m^2/s); K: Altura de rugosidad.
Es conocido que para colectores tubulares rectos y sin acometida K=0.25ab mm, D=300.ba mm y $Re=200.000$. El problema consiste por tanto en: Determinar el valor de Lambda de la ecuación:

$$\lambda^{-1/2}=-2*ln\left(\frac{2.51}{2*10^5*\lambda^{1/2}}+\frac{25.ab*10^{-5}}{3.71*0.3ba}\right)$$

El valor de Lambda (λ) es del orden de milésimas.

Fuente: 2016_09_20_Raices_Derive.pdf 2000_SF_Mwet_numericos_ecuaciones no lineales. P115

127. El factor de fricción para flujo turbulento a través de una tubería de un fluido incompresible esta dado por la ecuación:

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -0.86\ln\left(\frac{e/D}{3.7} + \frac{2.51}{R_e\sqrt{f}}\right)$$

Donde R_e es el número de Reynolds, e es la rugosidad de la superficie del tubo y D es el diámetro del tubo. Determinar el valor de f para los datos

a. D = 0.1ba mt, e = 0.0025ab, $Re = 3 * 10^4 = 3e4$

b. D = 0.1ba mt, e = 0.0001ab, $Re = 3 * 10^6 = 3e6$.

Fuente: 2016_09_20_Ecuaciobnes_no_Lineales_en_IQ_MSA.pdf

128. El coeficiente de fricción f para el flujo turbulento en un tubo está dado por la Ecuación 24:

Ecuación 24. Correlación de Colebrook

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 1.14 - 2log_{10}\left(\frac{e}{D} + \frac{9.35}{R_e\sqrt{f}}\right),$$

Donde R_e es el número de Reynolds, e es la rugosidad de la superficie del tubo y D es el diámetro del tubo. Determinar el valor de f para los datos

D = 0.1ba mt, e = 0.0025ab, $Re = 3 * 10^4 = 3e4$

Indicación: El orden de magnitud de f es 10^{-2} ; además es recomendable reescribir la ecuación en la forma si se desea aplicar el modelo de punto fijo o aproximaciones sucesivas:

Ecuación 25. Coeficiente de fricción para flujo turbulento

$$f = \left[1.14 - 2log_{10}\left(\frac{e}{D} + \frac{9.35}{R_e\sqrt{f}}\right)\right]^{-2}$$

129. El factor de fricción f para fluidos pseudoplásticos que siguen el modelo de Ostwald-DeWaele se calcula mediante la siguiente ecuación

$$\frac{1}{f} = \frac{4}{n^{0.75}}log(Re * f^{1-0.5n}) - \frac{0.4}{n^{0.5}}$$

Encuentre el factor de fricción f, si se tiene un número de Reynolds (Re) de 60ba y un valor de n=0.4ab.

2014. Métodos numéricos aplicados a ing. Nieves P141

130. En una sección de tubo, la caída de presión se calcula así:

$$\Delta p = f\frac{L * \rho * V^2}{2D}$$

donde Δp es la caída de presión (Pa), f es el factor de fricción, L es la longitud del tubo [m], ρ es la densidad (kg/m3), V = velocidad (m/s), y D = diámetro (m). Para el flujo turbulento, la ecuación de Colebrook proporciona un medio para calcular el factor de fricción,

$$\frac{1}{f} = -2log_{10}\left(\frac{\epsilon}{3.7 * D} + \frac{2.51}{R_e\sqrt{f}}\right)$$

Donde e es la rugosidad (m), y Re = número de Reynolds,

$$R_e = \frac{\rho * V * D}{\mu}$$

Donde μ es la viscosidad dinámica en $N * s/m^2$.

a. Determine Δp para un tramo horizontal de tubo liso de 0.2ab mt de longitud, dadas r=1.23b kg/m^3, $m = 1.79a * 10^{-5}\ N * s/m^2$, $D = 0.005b\ m$t, $V = 40\ mt/s$, y $\epsilon = 0.0015b\ mm$. Utilice un método numérico para determinar el factor de fricción.

   Obsérvese que los tubos lisos tienen $Re < 105$, un valor inicial apropiado se obtiene con el uso de la fórmula de Blasius, $f = 0.316/Re^{0.25}$.

b. Repita el cálculo, pero para un tubo de acero comercial más rugoso (ϵ =0.045ab mm).

Chapra Ed5 P.218

131. En ingeniería marítima, la ecuación de una ola estacionaria reflejada en un puerto está dada por:

$$h(x) = \left[sin(\frac{2\pi x}{\lambda}) * cos(\frac{2\pi tv}{\lambda}) + e^{-x}\right]$$

si λ=16, t=12, v=48, hallar el menor valor positivo de x tal que $h(x)$=0.4ab

132. Para flujo turbulento para todas las tuberías, el Instituto de Hidráulica de Estados Unidos y la mayoría de los ingenieros consideran la ecuación de Colebrook como la más aceptable para calcular *f*. La ecuación es:

Ecuación 26. Colebrook-White

$$\frac{1}{\lambda} = -2 * log_{10}\left(\frac{k/D}{3.7} + \frac{2.51}{Re\sqrt{\lambda}}\right)$$

k/*D* = rugosidad relativa total
Re = <u>Número de Reynolds</u>
λ = factor de fricción
D = diámetro interno de la cañería

Determinar el valor de λ para los datos: D=0.1ba mt, e=0.0025ab, $Re = 3 * 10^4 = 3e4$

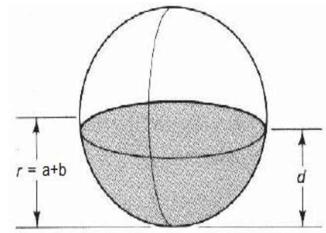
133. Utilizando la Ecuación 27 de Chen, un alumno de Ingeniería química obtuvo un factor de fricción (f) de 0.01 para una tubería con rugosidad relativa (ε) 0.006. Si por la tubería circulaba agua con un caudal de 0.01 m3 /s. ¿Cuál era el diámetro de la tubería? (Utilice diferentes métodos numéricos para calcularlo).

Ecuación 27. Ecuación de Chen

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -4 * log\left(\frac{\varepsilon}{3.7065} - \frac{5.0452}{Re} log\left(\frac{\varepsilon^{1.1098}}{2.8257}\right) + \frac{5.8506}{Re^{0.898}}\right)$$

Rta: D = 0.3869 m

134. La densidad de una sustancia o material es el cociente entre la masa y el volumen: Densidad = Masa/Volumen ($d = m/V$). El Principio de Arquímedes establece que el empuje a que está sometido un cuerpo sumergido en un líquido es igual al peso del fluido desplazado. Al plantear esta condición de equilibrio para una esfera de radio $r = 1\ cm$ y densidad $\rho = 0.75ab\ gr/cm^3$, se consigue la ecuación $h^3 - 3 * h^2 + 3 = 0$, donde h es la altura de la parte de la esfera que está sumergida.



Considérese el problema físico que implica una esfera de radio *r* sumergida hasta una altura $\boldsymbol{d}$ en agua. Supóngase que la esfera está construida en material madera, cuya densidad es $\boldsymbol{\rho_i}$ y que el valor numérico del radio es $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$ cms. ¿Hasta qué altura $\boldsymbol{d}$ alcanza el líquido cuando la esfera se sumerge en agua.

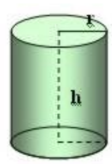
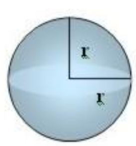
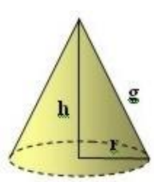
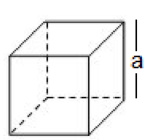
La masa de agua ($\boldsymbol{Ma}$) desplazada cuando la esfera se sumerge en agua y ésta alcanza la altura $\boldsymbol{d}$ está dada por la siguiente ecuación:

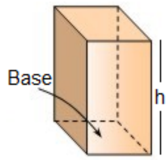
$$Ma = \rho_a \int_0^d \pi(r^2 - (x - r)^2)dx = \rho_a \frac{\pi d^2(3r - d)}{3}$$

y la masa de la esfera es: $Me = 4\pi r^3 \rho_e/3$. Aplicar la ley de Arquímedes para la cual $Ma = Me$. Encuentre todos los valores de raíces posibles y de una interpretación a cada resultado. Cuál sería el valor de d?.

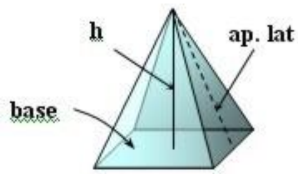
Material Densidad (gr/cm^3)

Material	Densidad (gr/cm^3)	Material	Densidad(gr/cm^3)	Material	Densidad (gr/cm^3)	Material	Densidad(gr/cm^3)		
Acero	7.83	Agua	0.998	Polietileno	0.98	Abeto	0.38	Cedro	0.53
Oro	19.30	Aire	0.0012	Poliuretano	0.05	Corcho	0.24	Guayabo	0.90
Aluminio	2.7	Petróleo	0.87	Roble	0.65	Pino	0.42	Nogal	0.64
Magnesio	1.74	Polipropileno	0.90	Pino Blanco	0.37	Comino	0.492	Limoncillo	0.86

Figura	Esquema	Área	Volumen
Cilindro		$A_{total} = 2\pi r(h + r)$	$v = \pi r^2 h$
Esfera		$A_{total} = 4\pi r^2$	$v = \frac{4}{3} * \pi * r^3$
Cono		$A_{total} = \pi r^2 + \pi rg$	$v = \frac{\pi r^2 h}{3}$
Cubo		$A = 6a^2$	$V = a^3$

Prisma 

$A = (perim\_base * h) + 2 * área\_base \qquad V = área\_base * h$

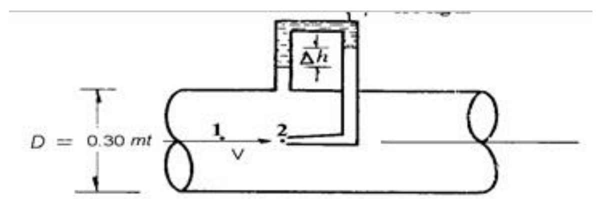


Pirámide

$$A = \frac{\text{perim.base} \times \text{ap.lat}}{2} + \text{area base} \qquad V = \frac{\text{area base} \times \text{h}}{3}$$

135. En una tubería de diámetro $d = 30\ cm$ escurre agua; para medir la velocidad se ha instalado un tubo de Pitot -como se muestra en la figura- donde el líquido empleado el la medición tiene un $\gamma_{hg} = 850.ab\ Kg/m^3$, el $\Delta h = 0.25ab\ mt$.

Se plantea una Ecuación de Bernoulli entre los puntos 1 y 2 para conocer el gasto, donde el punto 1 se selecciona debajo del manómetro y sobre del eje del tubo, y el punto 2 se selecciona en la entrada del tubo de pitot.



$$\frac{P_1}{\gamma} + Z_1 + \frac{V_1^2}{2g} = \frac{P_2}{\gamma} + Z_2 + \frac{V_2^2}{2g} + h_{12}$$

Dónde: $Z_1 = Z_2$; $V_2 = 0$ ya que es una zona de estancamiento y las $h_{12} \cong 0$, por lo tanto nos queda la ecuación de la siguiente manera: Por otra parte se tiene que la diferencia de presiones se calculará por la regla de los manómetros así:

$$P_1 - \gamma h_1 - \gamma_{hg}\Delta h + \gamma h_2 = P_2$$

$$P_2 - P_1 = \gamma(h_2 - h_1) - \gamma_{hg}\Delta h = \gamma\Delta h - \gamma_{hg}\Delta h$$

$$\frac{P_2 - P_1}{\gamma} = \frac{\Delta h(\gamma - \gamma_{hg})}{\gamma}$$

Resultando:

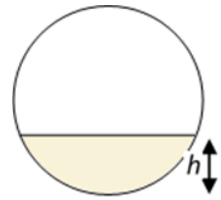
$$\frac{V_1^2}{2g} = \frac{P_2 - P_1}{\gamma}$$

Entonces

$$\frac{V_1^2}{2g} = \frac{\Delta h(\gamma - \gamma_{hg})}{\gamma}$$

Si $V_1 = 1\ mt/seg$, calcular el γ del líquido que circula por la tubería.

136. En la figura se muestra la sección de un tanque esférico con diámetro interior $D = 2.ab$ mt. El tanque se llena con agua salada con densidad 1.025 t/mt^3 hasta una altura h. Calcular el valor de h para que la masa total de agua sea 2.ba ton.

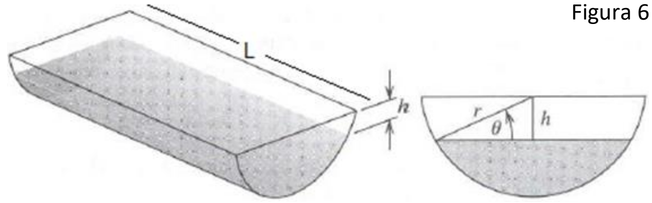


Nota: El volumen del casquete esférico es

$$V = \pi h^2(3r - h)/3$$

137. El perfil de un abrevadero de longitud L es un semicírculo de radio r (**¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.**). Cuando está lleno hasta una distancia h del borde superior el volumen V de agua que contiene viene dado por $V = L\left[\frac{\pi r^2}{2} - r^2 arcsen(\frac{h}{r}) - h\sqrt{r^2 - h^2}\right]$ Si $L = 10.ab\ mt$, $r = 1\ mt$ y $V = 12.4ba$ m^3 determine la profundidad de agua que hay en el abrevadero con un error máximo de 1 cm.

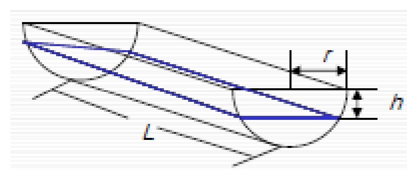
Figura 6



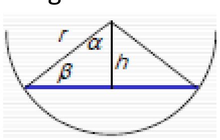
138. Un abrevadero de longitud L tiene una sección transversal en forma de semicírculo con radio r, Cuando se llena de agua hasta una distancia h de la parte superior, el volumen V de agua es:

$$V = L\left[0.5 * \pi * r^2 - r^2 * \operatorname{asin}\left(\frac{h}{r}\right) - h * (r^2 - h^2)^{1/2}\right]$$

Determine la profundidad h del abrevadero. Use cualquier modelo para encontrar la solución.



Tenga en cuenta lo siguiente:



Área sector: $r^2 * \alpha$

$$\sin(\beta) = \left(\frac{h}{r}\right)$$

$$\alpha = \frac{\pi}{2} - \beta = \frac{\pi}{2} - sin^{-1}\left(\frac{h}{r}\right)$$

Área sector:

$$r^2 * \alpha = r^2 * \left(\frac{\pi}{2} - sin^{-1}\left(\frac{h}{r}\right)\right)$$

Área triangular:

$$2 * \frac{base * altura}{2} = h * \sqrt{r^2 - h^2}$$

A=Área sector – Área triangular:

$$r^2 * \left(\frac{\pi}{2} - sin^{-1}\left(\frac{h}{r}\right)\right) - h * \sqrt{r^2 - h^2}$$

V=L*A: $L * \left[r^2 * \left(\frac{\pi}{2} - sin^{-1}\left(\frac{h}{r}\right)\right) - h * \sqrt{r^2 - h^2}\right]$

139. Para un flujo incompresible a régimen permanente con profundidad constante en un canal prismático abierto, se usa la fórmula de Manning:

$$V = \frac{C_m}{n} * R^{2/3} * S^{1/2}$$

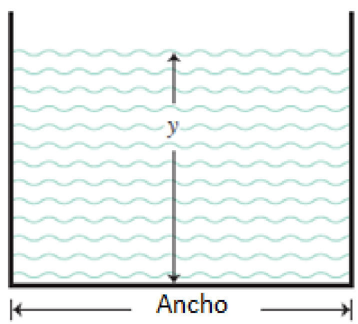
El valor de C_m es 1.49 y 1.0 para unidades del sistema inglés (USC) y del SI, respectivamente. Si:

V es la velocidad promedio en la sección transversal
R es el radio hidráulico (área/perímetro mojado, ambos de la sección transversal)
S son las pérdidas por unidad de peso y unidad de longitud del canal, o la inclinación en el fondo del canal
n es el factor de rugosidad de Manning.

Al multiplicar la ecuación de Manning por el área de la sección transversal A, queda:

Ecuación 28

$$Q = \frac{C_m}{n} A * R^{2/3} * S^{1/2}$$



Lo anterior, si se conoce el área de la sección transversal, cualquier otra cantidad se puede obtener a partir de la ecuación anterior. Por otro lado, cuando se desconoce el área de la sección transversal se requiere un proceso iterativo. Por ejemplo, si se desea saber qué profundidad se requiere para un flujo de $Q = 4.ab\ mt^3/s$ en un canal rectangular de concreto acabado ($n = 0.012$) de $Ancho = 2mt$ de ancho y una inclinación del fondo (pendiente del canal) de $S = 0.002$, se tendría:

El área de la sección transversal es

$$A = b * y = 2 * y$$

El perímetro mojado P(perímetro de la sección transversal en contacto con el líquido) es:

$$P = Ancho + 2 * y = Ancho + 2 * y$$

El radio hidráulico queda entonces

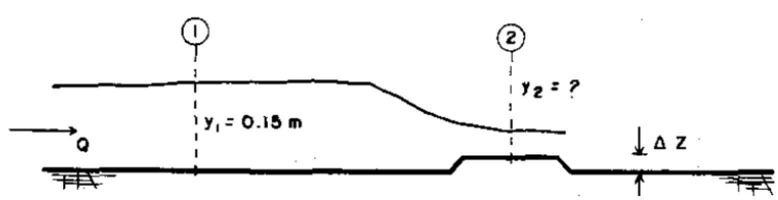
$$R = \frac{A}{P} = \frac{Ancho * y}{Ancho + 2 * y}$$

Sustituyendo valores en la Ecuación 28

$$4.ab = \frac{1}{0.012} 2 * y * \left(\frac{Ancho * y}{Ancho + 2 * y}\right)^{2/3} * 0.02^{1/2}$$

Encuentre el valor de y para un Ancho de 2.ab metros.
2014 Métodos Numéricos aplicados a la ingeniería P128

140. Se desea calcular el tirante en un escalón en un canal, por medio de la aplicación de la ecuación de la energía especifica. Se tiene un flujo como el que se indica en la



figura, del que se conoce el gasto ($Q = 0.5ab\ mt^3/sg$) y el tirante en la sección 1 ($y = 0.15a\ mt$), aguas arriba del escalón, y se desea conocer el correspondiente tirante sobre el escalón, en la sección 2. La altura del escalón es de $0.1ab\ mt$ y el ancho del canal, de sección rectangular, de $An = 1.5b\ mt$.

Aplicando el principio de conservación de la energía entre ambas secciones, se obtiene:

Ecuación 29

$$E_1 \approx E_2 + \Delta z$$

donde $E_1\ y\ E_2$ son las energías específicas en la secciones 1 y 2, y Δz es la altura del escalón. La energía específica se define como:

$$E = y + \frac{V^2}{2 * g}$$

Aplicando el principio de continuidad, y definiendo el gasto unitario como

$$q = \frac{Q}{An}$$

donde b es el ancho del canal, la energía específica para un canal de sección rectangular se puede expresar de la siguiente manera:

Ecuación 30. Energía específica

$$E = y + \frac{q^2}{2 * g * y^2}$$

Con esta ecuación, conocido el tirante en cualquier sección, se calcula la correspondiente energía específica. Escribiendo la Ecuación 30 en lugar de E en la Ecuación 29, se obtiene

$$E_1 = y_2 + \frac{q^2}{2 * g * y_2^2} + \Delta z$$

Haciendo operaciones y agrupando se obtiene finalmente

$$y_2^3 + (\Delta z - E_1) * y_2^2 + \frac{q^2}{2 * g} = 0$$

La solución de la ecuación anterior proporciona el tirante y_2 buscado. Se conocen Δz y q, y E_1 se puede calcular, dado y_1, por medio de la Ecuación 30.

Se tienen los siguientes datos:

$$Q = 0.5ab\ \frac{m^3}{s}, An = 1.5b\ m, y = 0.15a\ m\ y\ \Delta z = 0.1ab\ m$$

Calcular el valor de y_2

1988 Métodos numéricos aplicaos a hidráulica. IMTA. P16

141. Calcular el tirante normal de un canal trapecial; para un gasto de $Q = 0.75ab\ m^3/s$, que tiene un ancho de plantilla $Ap = 1.7ab\ m$, talud $k = 2$, pendiente $S = 0.0001ab$ $y\ coeficiente\ de\ rugosidad\ n = 0.1ba$.

De la ecuación de Manning

Ecuación 31

$$V = \frac{1}{n} * R^{2/3} S^{1/2}$$

Donde R es el radio hidráulico y V la velocidad media del flujo. De la ecuación de continuidad

Ecuación 32

$$V = \frac{Q}{A}$$

y el radio hidráulico se define como

Ecuación 33

$$R = \frac{A}{P}$$

Donde A es el área hidráulica y P el perímetro mojado. Para un canal sección trapecial:

$$A = (Ap + k * y)\ y$$

$$P = Ap + 2 * y * \sqrt{1 + k^2}$$

Sustituyendo las ecuaciones Ecuación 32 y Ecuación 33 en la Ecuación 31 y ordenando

$$\frac{Q_n}{S_0^{1/2}} = \frac{A^{5/3}}{P^{2/3}}$$

es decir, que la función a resolver es

$$f(y) = \frac{A^{5/3}}{P^{2/3}} - \frac{Q_n}{S_0^{1/2}}$$

En la cual A y P son funciones del tirante "y". Para

1988 Métodos numéricos aplicaos a hidráulica. IMTA. P21

142. Calcular el tirante crítico en un canal de sección trapecial. El tirante crítico ocurre cuando el número de Froude es igual a la unidad, condición que puede escribirse como:

Ecuación 34

$$\frac{Q^2}{g * \frac{A^3}{T}} = 1$$

Donde T es el ancho de la superficie libre, que para un canal de sección trapecial está determinada por la ecuación:

$$T = Ap + 2 * k * y$$

La Ecuación 34 se puede escribir de la siguiente forma:

$$\frac{A^3}{T}\frac{Q^2}{g} = 0$$

y sustituyendo las expresiones para A y T:

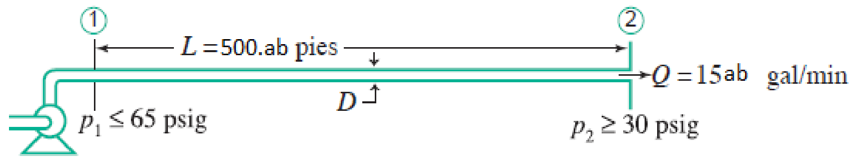
$$f(y) = \frac{[(Ap + k * y) * y]^3}{Ap + 2 * k * y} - \frac{Q^2}{g}$$

Esta ecuación es la que debe resolverse para encontrar el tirante crítico. Calcular el tirante crítico; para un gasto de $Q = 0.75ab\ m^3/s$, que tiene un ancho de plantilla $Ap = 1.7ab\ m$, talud $k = 2$, pendiente $S = 0.0001ab$ $y\ coeficiente\ de\ rugosidad\ n = 0.1ba.$

1988 Métodos numéricos aplicaos a hidráulica. IMTA. P26

Agrícola

143. Las puntas del aspersor de un sistema de riego agrícola se alimentan con agua mediante conductos de aluminio de $500.ab\ pies$ desde una bomba operada por un motor de combustión interna. En el intervalo de operación de mayor rendimiento, la descarga de la bomba es de $15ab\ gal/min$ a una presión que no excede 65 libras por pulgada cuadrada manométrica (psig). Para una operación satisfactoria, los aspersores deben operar a 30 psig o a una presión mayor. Las pérdidas menores y los cambios de nivel se pueden despreciar.



Determine el diámetro de tubería más pequeño que se puede utilizar. La caída máxima permitida es

$$\Delta p_{máx} = p_{2máx} - p_{1máx} = (65 - 30)psi = 35psi$$

El balance de Bernoulli para este sistema es

$$\left(\frac{p_1}{\rho} + \alpha_1\frac{\bar{V}_1^2}{2} + gz_1\right) - \left(\frac{p_2}{\rho} + \alpha_2\frac{\bar{V}_2^2}{2} + gz_2\right) = h_{l_t}$$

Suposiciones: flujo estacionario e incompresible, $h_{l_t} = h_l + h_{l_m} = 0$; es decir $h_{l_m} = 0$,. $z_1 = z_2$ y, por último $\bar{V}_1^2 = \bar{V}_2^2$, $\alpha_1 = \alpha_2$.

Por lo anterior

$$h_{l_t} = h_l + h_{l_m} = f * \frac{L}{D} * \frac{\bar{V}_2^2}{2}$$

$$\Delta_p = p_1 - p_2 = f * \frac{L}{D} * \frac{\bar{V}_2^2}{2}$$

Como la incógnita es D, resulta conveniente usar

$$\bar{V} = \frac{Q}{A} = \frac{4Q}{\pi D}$$

De modo que

Ecuación 35

$$\Delta_p = f * \frac{L}{D} * \frac{\rho}{2}\left(\frac{4Q}{\pi D^2}\right)^2 = \frac{8fL\rho Q^2}{\pi^2 D^5}$$

Se requiere expresar el número de Reynolds en términos de Q y D para determinar f

$$R_e = \frac{\rho \bar{V} D}{\mu} = \frac{\bar{V} D}{v} = \frac{\bar{V} A D}{A v} = \frac{4Q}{\pi D^2}\frac{D}{v} = 12\frac{4Q}{\pi v D}$$

Donde 12 es el factor de conversión de pulgadas a pies y convirtiendo el gasto a m^3/s queda $Q = 3.34\ m^3/s$. Conocido el número de Reynolds, el factor de fricción f se puede obtener del diagrama de Moody. (Victor L. Streeter y E. Benjamin Wylie, *Mecanica de los fluidos*, McGraw-Hill, 3a. ed. en espanol, México, p. 222.). También es posible usar una ecuación de regresión obtenida a partir de datos leídos de dicho nomograma. En este caso se obtuvo, para tubos lisos:

$$ln(f) = C_0 + C_1\, ln\,(Re) + C_2\,(lnRe)^2 + C_3(lnRe)^3$$

$$C_0 = 1.0536354$$
$$C_1 = -0.78606851$$
$$C_2 = 0.03968408$$
$$C_3 = -8.40665476 * 10^{-4}$$

Donde

$$f = e^{C_0 + C_1 \, ln\,(Re) + C_2\,(lnRe)^2 + C_3 (lnRe)^3}$$

Este resultado se sustituye en la Ecuación 35:

$$\Delta_p = \frac{8fL\rho Q^2}{\pi^2 D^5}$$

2014 Métodos numéricos aplicados a la ingeniería Nieves P106

Varios

144. El producto de dos números reales positivos es **5.ab**. Mientras que al sumar el cubo del primero más el cuadrado del segundo se obtiene **40.ba**. Encuentre estos dos números.

145. El producto de las edades en años de dos personas es 677.ab y si se suman los cubos de ambas edades se obtiene 36594.ba Encuentre cuales son estas edades.

146. Para calcular $\sqrt{3}$ se propone el método:

$$x_{n+1} = \frac{2x_n^3 + \alpha}{\beta x_n^2 - 3}$$

   a. Encontrar α y β para que la convergencia local sea al menos cuadrática. ¿Hay convergencia cúbica en este caso?
   b. Se considera el método de Newton–Raphson para $f(x) = x^2 - 3$. ¿Convergería más rápidamente que el método anterior?
   c. Tomando $x_0 = 2$ y operando con seis cifras decimales, calcular $\sqrt{3}$ con cuatro cifras decimales exactas aplicando los dos métodos anteriores. Comparar con lo observado en (b).
   d. Si se aplica el método de bisección a la ecuación $x^2 - 3 = 0$ en $[1,2]$, ¿cuantas iteraciones serán necesarias para alcanzar la misma precisión que en el apartado (c)?

147. Una máquina que infla botellas de plástico necesarias para envasar líquidos aplica aire comprimido a una pequeña porción de material plástico. Encuentre el número de botellas que se inflan por segundo, si está en función a la ecuación: $x^3 + 3 * x^2 - 4.ab$

   a. Utilice los valores iniciales de 2, 3, 4 con una tolerancia al error de 0.01 y utilice 6 decimales para sus cálculos.
   b. Evalúe el criterio de convergencia para los tres valores iniciales especificados y seleccione el adecuado.
   c. Calcule al menos 4 valores para X.

INTEGRALES DEFINIDAS

Ejercicios de Aplicación de Integrales

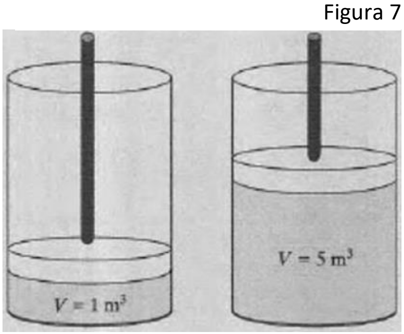
http://www.wikimatematica.org/index.php?title=Integrales_de_l%C3%ADnea
http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/hbasees/intare.html

Ejercicios de integración aplicados

Física

1. Encuentre el trabajo producido por el pistón que se muestra en la Figura 7 , el cual contiene 1 mol de gas a una temperatura constante de 300 °K, mediante la Ecuación 36

Figura 7



Ecuación 36

$$W = \int_a^b P dv$$

En base a:

$$Pv = nRT$$

$$P = \frac{n * R * T}{v}$$

Donde:

P=Presión, Kpa,
v=Volumen, m^3
n=Número de moles,$kmol$,
R=Constante universal del gas,$8.314 \frac{kPa*m^3}{kmol*K}$, y
T=Temperatura,K.

2. Encuentre la masa y el momento de inercia con respecto al eje x de un alambre homogéneo cuya forma corresponde con el arco del cicloide:

$$r(t) = (t - \sin(t), 1 - \cos(t), \quad 0 \leq t \leq 2\pi)$$

Solución:

Paso 1. Cálculo de la rapidez

$$r(t) = (t - \sin(t), 1 - \cos(t)) \Longrightarrow r'(t) = (1 - \cos(t), \sin(t)) \Longrightarrow \|r'(t)\| = 2\left|sin^2\left(\frac{t}{2}\right)\right|$$

Paso 2. Cálculo de la masa

$$m = K\int_c ds = 2K\int_0^{2\pi}\left|sin\left(\frac{t}{2}\right)\right|dt = 8K$$

Paso 3. Cálculo del momento de inercia respecto al eje x

$$I_x = K\int_c y^2 ds = 2K\int_0^{2\pi}(1 - cos(t))^2\left|sin\left(\frac{t}{2}\right)\right|dt = 8K\int_0^{2\pi} sin^5\left(\frac{t}{2}\right)dt = 8K\int_0^{2\pi}\left(1 - cos^2\left(\frac{t}{2}\right)\right)^2 \sin\left(\frac{t}{2}\right)dt$$

$$= 8K - 2\cos\left(\frac{t}{2}\right) + \frac{4}{3}cos^3\left(\frac{t}{2}\right) - \frac{2}{5}cos^5\left(\frac{t}{2}\right)\Big|_0^{2\pi} = 8K\left(4 - \frac{8}{3} + \frac{4}{5}\right) = \frac{256}{15}K$$

3. Se ha determinado que la fuerza que ejerce un soporte de una mesa vibradora sobre el piso está dada por la siguiente expresión:

$$F_s = \int_0^{\pi/4} \frac{\sin(2.a * x) - \cos(2.b * x)}{2x} dx$$

Fuente: 1984_Ejercicios_Metodos_Numericos_Rafael_Iriarte

4. Suponga que la fuerza hacia arriba de la resistencia del aire sobre un objeto que cae es proporcional al cuadrado de la velocidad. Para este caso, la velocidad se calcula con:

$$v(t) = \sqrt{\frac{g * m}{c_d}} * \ tanh\left(\sqrt{\frac{g * c_d}{m}}t\right)$$

Donde c_d es el coeficiente de arrastre de segundo orden. *a*) Si $g = 9.8\, m/s^2$, $m = 68.ab$ kg y $c_d = 0.2ba$ kg/m, use integración analítica para determinar qué tan lejos cae el objeto en $10.ab$ segundos. *b*) Haga lo mismo, pero evalúe la integral con un modelo de integración. Use una *n* suficientemente grande para obtener tres dígitos significativos de exactitud.
Chapra. Ed5 P646

5. Al viajar por un camino secundario un motociclista anota la velocidad (Vel) en Kilómetros por hora de su vehículo cada 4 minutos, obteniendo los siguientes valores:

Si el odómetro del coche no funciona, estimar la distancia recorrida dada por la integral: $d = \int vdt$

Aplicar una de las reglas de Simpson, Trapecial y Romberg teniendo en cuenta:
a) Lecturas cada 4 minutos;
b) Lecturas cada 8 minutos;
c) Lecturas cada 12 minutos.
d) Lecturas cada 24 minutos.

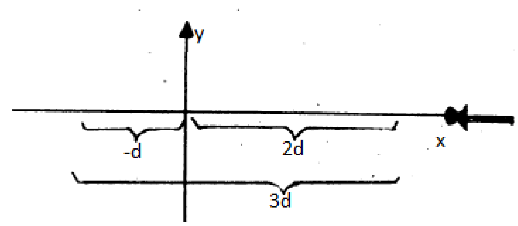
a= Último digito mayor de los dos
b= Último digito menor de los dos

hora	Vel	hora	Vel	hora	Vel	hora	Vel
9:00	40+a	9:56	70	10:52	15+a	11:48	65-b
9:04	65+b	10:00	65	10:56	45+b	11:52	60-a
9:08	70-a	10:04	50	11:00	50+a	11:56	60+b
9:12	80-b	10:08	60	11:04	50+b	12:00	55-a
9:16	60+a	10:12	70	11:08	55+a	12:04	55+b
9:20	55+b	10:16	80	11:12	55+b	12:08	50+a
9:24	40+a	10:20	90	11:16	60+a	12:12	40+b
9:28	40+b	10:24	85	11:20	60+b	12:16	45+a
9:32	35+a	10:28	75	11:24	65+a	12:20	40+b
9:36	40+b	10:32	65	11:28	65+b	12:24	30+a
9:40	45+a	10:36	80	11:32	70+a	12:28	40+b
9:44	50+b	10:40	50	11:36	70-a	12:32	50+a
9:48	55+a	10:44	40+a	11:40	70-b	12:36	55+b
9:52	65+b	10:48	40+b	11:44	65-a	12:40	60+a

6. Una partícula sobre el eje x es atraída por una fuerza hacia el origen, la magnitud de la fuerza es:

$$F = \frac{k * x}{(p^2 + x^2)^{3/2}} Newton$$

Hallar el trabajo realizado por la fuerza si mueve a la partícula de una distancia $2d$ a una distancia $-d$ del origen. Con $k = 1.ab$ y $d = 1.ba\ mt$. Recuerde que $W = Fdx$



Fuente: 1984_Ejercicios_Metodos_Numericos_Rafael_Iriarte. Pag 129. Sol: 0.63469 Joules si k=1 y d=1

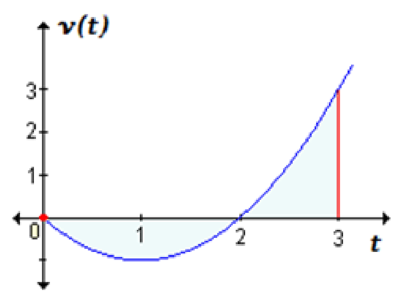
7. Un objeto se mueve con movimiento rectilíneo de modo tal que su velocidad en el instante t es

$$v(t) = 0.9ab * t^2 - 2.ba * t\ metros\ por\ segundo$$

Hallar:

a) El desplazamiento del objeto durante los tres primeros segundos.
b) La distancia recorrida durante ese tiempo.

Figura 8. Recorrido de un objeto



Si $v(t)$ fuera igual a $t^2 - 2 * t$ con raíz obviamente en $t = 2$

La velocidad puede escribirse como $v(t) = t * (t - 2)$ de modo que $v(t) \geq 0$ si $2 \leq t \leq 3$ y la velocidad es negativa si $0 \leq t \leq 2$.

La distancia recorrida es: $d = \int_0^3 |v(t)| dt = -\int_0^2 (t^2 - 2 * t)dt + \int_2^3 (t^2 - 2 * t)dt$

8. La velocidad del paracaidista está dada con la siguiente función en términos del tiempo:

$$v(t) = \frac{gm}{c}\left(1 - e^{-(c/m)t}\right)$$

Donde $v = velocidad\ (m/s)$, g = constante gravitacional de $9.8 m/s^2$, m = masa del paracaidista igual a $68.1ab\ kg$ y c = coeficiente de arrastre de $12.5a\ kg/s$. El modelo predice la velocidad del paracaidista como una función del tiempo. Tenga en cuenta que a y b son los dos últimos dígitos del código diferentes de cero y diferentes entre sí.

Suponga que desea saber qué tan lejos ha caído el paracaidista después de cierto tiempo $t = (10 * a + b)$ Seg. Tal distancia está determinada por: $d = \int_0^t v(t)dt$

Donde d es la distancia en metros. Sustituyendo en la ecuación:

$$d = \frac{gm}{c} \int_o^t \left(1 - e^{-(c/m)t}\right) dt$$

Fuente: https://sites.google.com/site/g03metodosnumericos2012/unidad-ii
Chapra 5 Ed. Pag 140.

9. Las velocidades de dos objetos que caen por efecto de la gravedad vienen dadas por $f(t) =-40-32*t$ pies/s y $g(t) =-30-32*t$ pies/s. Si los dos objetos parten de la misma altura en $t = 0$, calcular e interpretar el área entre las curvas para $0 \leq t \leq 10$.

10. Las velocidades de dos atletas vienen dadas por $f(t) = 10.ab$ mph y $g(t) = 10.ba-sin(t)$ mph. Evaluar e interpretar las integrales:
$\int_0^{\pi}(f(t) - g(t))dt\ y\ \int_0^{2\pi}(f(t) - g(t))dt$
Vol1 Unidad 5 Integracion P346

11. Las velocidades de dos automóviles A y B vienen dadas por $f(t) = 40.ab*(1-e^{-t})$ mph y $g(t) = 20.ba*t$ mph, respectivamente. Ambos arrancan en t=0 desde el mismo lugar. Estimar (a) la máxima ventaja de A, (b) el instante en que B le alcanza.
Vol1 Unidad 5 Integracion P346

12. La Tabla 1 tabla muestra el comportamiento de cierta máquina térmica en la cual se comprime cierto gas desde 100 pul^3 hasta 40 pul^3
Halle el trabajo realizado por esta máquina, procurando que el error con la respuesta exacta no sea mayor de 0.71%.

Tabla 1. Comportamiento de Máquina Térmica

$V = pul^3$	40	60	80	100
$P = lb/pul^3$	288.5ab	163.5ba	109.33ab	80.ab

Recuerde que el trabajo realizado, es el área bajo la curva definida por los puntos de la tabla.
Nota:. 1 pie = 12 pulgadas.
Fuente: 1984_Ejercicios_Metodos_Numericos_Rafael_Iriarte_Pag 129. Sol: 736 lb-Pie

13. La masa total de una barra de densidad variable está dada por:

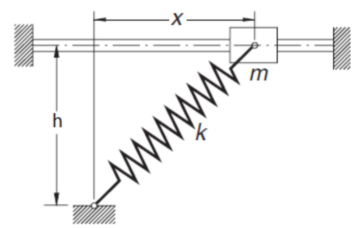
$$m = \int_0^L \rho(x) A_c(x) dx$$

Donde $m = masa, r(x) = densidad, Ac(x) =$área de la sección transversal, $x =$ distancia a lo largo de la barra y $L =$ longitud total de la barra. Se midieron los datos siguientes para una barra de 10 m de longitud. Determine la masa en kilogramos con la exactitud mejor posible.

$X(Metros)$	0	2	3	4	6	8	10	12	14
$\rho\ (g/cm^3)$	4	3.9a	3.8b	3.8a	3.6b	3.4a	3.3b	3.2a	3.1b
$Ac(x)$	100	103	106	110	120	133	150	170	190

14. La masa m está unida a un resorte de longitud h y rigidez k. el coeficiente de fricción entre la masa y la barra horizontal es μ. La aceleración de la masa se puede determinar así: (quizás desee probar esto) $\ddot{x} = -f(x)$, donde

$$f(x) = \mu * g + \frac{k}{m}(\mu * b + x)\left(1 - \frac{b}{\sqrt{b^2 + x^2}}\right)$$



Si la masa se suelta desde el reposo en $x = h$, su velocidad en $x = 0$ viene dada por:

$$v_0 = \sqrt{2\int_0^b f(x)dx}$$

Calcule v_0 por algún modelo de integración con los datos: $m = 0.8ab\ Kg$, $h = 0.4ab\ mt$, $\mu = 0.3$, $k = 80N/mt$ y $g = 9.81\ m/sg^2$

2005 Numerical Methods MatLab Jaan Kiusalaas P217

15. Cuando un péndulo ideal es apartado de su posición de equilibrio y es soltado sin velocidad inicial en un medio que no ofrece resistencia, adquiere un movimiento periódico descrito por el siguiente modelo matemático, en el cual la evolución del ángulo ϕ (que forma la varilla del péndulo con la vertical del punto de sujeción) se obtiene integrando el siguiente problema de valor inicial no-lineal

$$\frac{d^2\phi}{dt^2} + \frac{g}{L}\sin(\phi) = 0$$

Con

$$\phi_{(0)} = A$$

Y

$$\left.\frac{d\phi}{dt}\right|_{(0)} = 0$$

donde g es la aceleración gravitatoria, L es la longitud del péndulo y A la amplitud angular del movimiento. El periodo (*T*) está dado por la siguiente integral definida1:

$$T = 4\sqrt{L/g}\int_0^{\pi/2}\sqrt{\left(sin^2\left(\frac{A}{2}\right) * sin^2(\phi)\right)}\,d\phi$$

Si

$$0 \leq A \leq \pi$$

Si *A* es pequeña es admisible linealizar $\sin(\phi) = \phi$ el problema, en cuyo caso

$$T_L = 2 * \pi\sqrt{L/g}$$

Calcular en valor de T si L es $0.9ab$ mt y $A = 0.8ab$

16. Un automóvil con masa $M = (5200 + a * b)$ Kg, se mueve a una velocidad en metros/seg de $(30 + a + b)$ El motor se apaga súbitamente a los $t = 0\ seg$. Suponga que la ecuación de movimiento después de $t = 0$ está dada por:

$$M * v\frac{dv}{dx} = -8.355v^2 - 2100$$

Donde $v = v(t)$ es la velocidad (m/s) del automóvil al tiempo t

El lado izquierdo representa $M * v(dv/dx)$. El primer término del lado derecho es la fuerza aerodinámica y el segundo término es la resistencia de las llantas de rodaje. Calcule la distancia que recorre el automóvil hasta que la velocidad se reduce a $(15 + a)\ m/s$.

Recuerde que la ecuación de movimiento se puede integrar como:

$$\int_{15+a}^{30+a+b} \frac{(M * v)dv}{8.355v^2 + 2100} = \int dx = x$$

17. Según la teoría de Kepler, el recorrido de los planetas es una elipse con el Sol en uno de sus focos. La longitud del recorrido total de la órbita está dada por

$$s = 4\int_0^{\pi/2} a\sqrt{1 - k^2 sin^2(t)}dt$$

Siendo k la excentricidad de la órbita y a la longitud del semieje mayor Calcule el recorrido del planeta Mercurio sabiendo que $k = 0.206$, $a = 0.387$ UA (1 UA=150 millones de km). Use la fórmula de Simpson con $m = 4$ (cantidad de franjas)

2011 Cálculo Numérico Luis Ojeda P182

Ambiental

18. Supongamos que el consumo de madera en un país sigue el modelo $76e^{0,03t}\ m3/año$ y el crecimiento de árboles nuevos produce $50 - 6e^{0,09t}\ m3/año$. Calcular e interpretar el área entre las curvas en $0 \le t \le 10$.

Vol1 Unid 5 Integración P346

Estadística

19. Suponga que:

$$f(x) = \frac{0.4b}{\sqrt{2 * \pi}} * e^{-0,08ab*(x-68)^2}$$

Es la función de probabilidad de las alturas de los varones en Estados Unidos.

a. Hallar la probabilidad de que un varón, elegido al azar, mida entre 68 y 69 pulgadas.
b. Ídem entre 74 y 76 pulgadas

Tenga en cuenta que la probabilidad de que esté entre 68 y 69 pulgadas será:

$$P(68 \le X \le 69) = \int_{68}^{69} \frac{0.4b}{\sqrt{2 * \pi}} * e^{-0,08ab*(x-68)^2}dx$$

Vol1 Unidad5 Integración P398

20. Se proyecta que dentro de t años, la población de cierta comunidad estará creciendo a razón de:

$$\frac{dP}{dt} = \frac{6}{(t+1)^2}, \qquad por\ año$$

Si después de un año la población es de $17.5ab$ personas, hallar la proyección cuando pase una cantidad muy grande de años.

21. Cuando una persona comienza por primera vez a estudiar un tema, quizás no sea muy hábil, pero con el tiempo se aproximará a los límites de su habilidad. Sea T el tiempo necesario (en días) para que una persona aprenda una cantidad L de temas. Se sabe que la razón de cambio del tiempo respecto a la cantidad de temas es:

$$\frac{dT}{dL} = \mathrm{p} * \sqrt{L + \mathrm{q}} + \frac{p * L}{2\sqrt{L + \mathrm{q}}}$$

Donde p y q son constantes positivas. Si para aprender tres temas se necesita un tiempo de $3 * p * \sqrt{3+q} + 1$ dias. ¿Cuántos días se necesitan para aprender 4 temas? Suponga para $p = 2.a$ y $q = 4.b$.

Solución Analítica: Se usa propiedades de la integral indefinida y con la sustitutición $u = L + b$, se obtiene que $du = dL$ y

$$T(L) = \int a\sqrt{L+b} + \frac{aL}{2\sqrt{L+b}} dL$$

$$T(L) = a\int \sqrt{L+b}dL + \frac{a}{2}\int \frac{L}{\sqrt{L+b}} dL$$

$$T(L) = a\int \sqrt{u}du + \frac{a}{2}\int \frac{u-b}{\sqrt{u}} dL$$

$$T(L) = a\int \left(u^{1/2}\right)du + \frac{a}{2}\int \left(u^{1/2} - bu^{-1/2}\right)dL$$

Integrando y volviendo a la variable L, se tiene

$$T(L) = \frac{2}{3}a(L+b)^{3/2} + \frac{1}{3}a(L+b)^{3/2} - b(L+b)^{\frac{1}{2}} + C$$

Reduciendo terminos y factorizando se sigue que

$$T(L) = aL\sqrt{L+b} + C$$

Como

$$T(3) = 3a\sqrt{3+b} + 1 = 3a\sqrt{3+b} + C$$

De esto se tiene que $C = 1$ y la función T es:

$$T(L) = aL\sqrt{L+b} + 1$$

Para aprender 4 temas se necesitan, por tanto:

$$T(4) = 4a\sqrt{4+b} + 1 \; dias$$

Apuntes Medicina_Veronica Poblete P107

22. Una enfermedad se propaga en el tiempo a razón de

$$\frac{dN}{dt} = 4 * t^2 * (6-t) \; personas \; por \; dia: \quad 0 \le t \le 8$$

Si cuando comienza la enfermedad hay 5 enfermos, encuentre la función N(t) y descríbala usando la información del problema. Determine el número de enfermos al cabo de $(10 - a)$ días.

23. Suponga que la concentración $c(t)$ de una fármaco en la corriente sanguínea en el instante t satisface la igualdad

$$\frac{dc}{dt} = -0.1 * e^{-0.3*t}$$

Para $t \ge 0$. Cuál será la concentración c al cabo de 3a para t. Se sabe que $\lim_{t\to\infty} c(t) = 0$

24. Suponga que la longitud de cierto organismo a la edad x está dada por $L(x)$, que satisface:

$$\frac{dL}{dx} = e^{-0.1ab*x}, para \; x \ge 0$$

Calcule $L(x)$ si

$$\lim_{x \to \infty} L(x) = 25$$

25. Suponga que la velocidad de crecimiento de una población en el instante t sufre variaciones estacionales en su tamaño de acuerdo con la ecuación:

$$\frac{dN}{dt} = 3.ab * sin(2 * \pi * t)$$

Donde t se mide en años e indica el tamaño de la población en el instante t. Si $N(0) = 10$ (en unidades de miles, calcule una expresión de $N(t)$. ¿Como se reflejan las variaciones estacionales de la velocidad de crecimiento en el tamaño de la población?

26. En una población hay $b(t) = 2 * e^{0.04b*t}$ millones de nacimientos al año y $d(t) = 2 * e^{0.02a*t}$ millones de defunciones. Probar que $b(t) \geq d(t)$ para $t \geq 0$ y explicar por qué el área entre las dos curvas representa el incremento de la población. Calcular ese incremento en el período $0 \leq t \leq 10$.
Vol1 Unid 5 Integración P346

27. En una población hay $b(t) = 2 * e^{0.04a*t}$ millones de nacimientos al año y $d(t) = 3 * e^{0.02b*t}$ millones de defunciones. Hallar la intersección T de las curvas ($T > 0$). Interpretar el área entre las curvas en $0 \leq t \leq T$ y en $T \leq t \leq 30$. Calcular el cambio neto de población en $0 \leq t \leq 30$.
Vol1 Unid 5 Integración P346

28. Suponga que la cantidad de agua que contiene una planta en el instante t se denomina $V(t)$. Debido a la evaporación $V(t)$ cambia con el tiempo. Suponga que el cambio de volumen en el instante t, medido en un periodo de 24 horas, es proporcional a $t(24 - t)$ medido en gramos por hora. Para compensar la perdida de agua, se riega la planta a una velocidad constante de 4 gramos de agua por hora.
    a. Explique por qué:

$$\frac{dV}{dt} = -\alpha * t * (24 - t) + 4$$

Con $0 \leq t \leq 24$, para alguna constante positiva α, describe esta situación.
    b. Determine $V(t)$ si $V(0) = 2$

29. El ritmo aeróbico de una persona de x años es una función $A(x)$. Se sabe que este ritmo aeróbico cambia según la Ecuación 37.

Ecuación 37

$$\frac{dA}{dx} = 110 \frac{3 - \ln(x)}{x^2} \quad para\ x \geq 2$$

Hallar la función $A(x)$. Calcule el ritmo aeróbico para $2a$ años.

30. Un estudio requiere del cálculo del número total de automóviles que pasan a través de una intersección en un periodo de 24 horas. Un individuo visita la intersección cada media hora durante el día y cuenta el número de automóviles que pasan a través de ella en un minuto. Los datos se resumen en la tabla siguiente. Calcule el número total de automóviles que pasa por la intersección durante el día.

Tiempo	Automóviles/Min	Tiempo	Automóviles/Min	Tiempo	Automóviles/Min
00:00	10+a	08:30	70+b	16:30	40
00:30	8+b	09:00	80+a	17:00	35
01:00	5+a	09:30	40+b	17:30	45
01:30	6+b	10:00	45+a	18:00	77
02:00	4+a	10:30	35+b	18:30	90
02:30	8+b	11:00	25+a	19:00	40
03:00	12+a	11:30	15+b	19:30	35
03:30	15+b	12:00	20+a	20:00	30
04:00	10+a	12:30	10	20:30	25
04:30	20+b	13:00	18	21:00	31
05:00	14+a	13:30	22	21:30	25
05:30	20+b	14:00	15	22:00	30
06:00	25+a	14:30	25	22:30	25
06:30	60+b	15:00	17	23:00	22
07:00	40+a	15:30	15	23:30	20
07:30	50+b	16:00	28	24:00	15
08:00	60+a				

Calcular el valor usando uno de los métodos de Simpson con 2, 3, 4, 6, y 8 Subáreas.
Calcular el valor usando el método de trapecios con 2, 4, 8 y 16 subáreas y aplique con estos valores el método de Romberg.

Mecánica de fluidos – Hidráulica

31. La cantidad de masa transportada por un tubo durante cierto periodo de tiempo se calcula con: tur

$$M = \int_{t1}^{t2} Q(t)c(t)dt$$

Donde M=masa (mg), $t1$= tiempo inicial (min), $t2 =$ tiempo final (min), $Q(t) =$ tasa de flujo (m3/min), y $c(t) =$ concentración (mg/m^3). Las representaciones funcionales siguientes definen las variaciones temporales en el flujo y la concentración:

$$Q(t) = 9 + 4cos^2(0.4t)$$

$$c(t) = 5e^{-0.5a*t} + 2e^{-0.15b*t}$$

Determine la masa transportada entre $t1 = 2$ min y $t2 = 8$ min.

32. El arrastre es una fuerza que se genera conforme un objeto se mueve a través de un fluido. El arrastre se puede calcular como:

$$arrastre = C_d \frac{\rho * V^2 * A}{2}$$

Donde:
Cd=coeficiente de arrastre experimental
ρ = densidad del aire $\frac{kg}{m^3}$

V = velocidad del objeto $\frac{mt}{seg}$

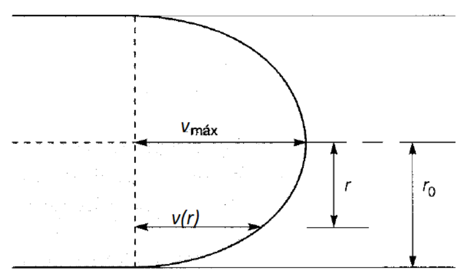
A = Área superficial m^2

Suponga que se midieron los siguientes datos en un túnel de viento:

$arrastre$ = 20000N, ρ = 1∗10−6$k\frac{kg}{m^3}$,V = 44,7 $\frac{mt}{seg}$, A = 1m^2.

Realice una función que calcule el coeficiente de arrastre, con este coeficiente determine cuanto sería el arrastre cuando la velocidad varia de 0 a 20 (m/s). Para representar este resultado realice una figura de V vs arrastre.

33. El flujo de petróleo en un oleoducto, pero el análisis del flujo de un líquido en un tubo circular se aplica a muchos sistemas distintos, como son las venas y arterias del cuerpo humano, el sistema de suministro de agua de una ciudad, el sistema de irrigación de una granja, el sistema de tuberías que transporta fluidos en una fábrica, las líneas hidráulicas de un avión y el chorro de tinta de una impresora para computadora.



La fricción en una tubería circular origina un perfil de velocidades en el petróleo al fluir. El petróleo que está en contacto con las paredes del tubo no se está moviendo, mientras que el petróleo que está en el centro del flujo se está moviendo con velocidad máxima. El diagrama de la figura muestra cómo varía la velocidad del petróleo a lo ancho del diámetro de la tubería y define las variables empleadas en este análisis. La siguiente ecuación describe este perfil de velocidad:

$$v(r) = v_{max}\left(1 - \frac{r}{r_0}\right)^{1/n}$$

La variable n es un entero entre 5 y 10 que define la forma del flujo de petróleo hacia adelante. La velocidad de flujo media en el tubo es la integral de área del perfil de velocidad, la cual se puede demostrar que es:

$$v_{med} = \frac{\int_0^{r_0} v(r) * 2 * \pi * r * dr}{\pi * r_0^2} = \frac{2v_{max}}{r_0^2}\int_0^{r_0}\left(1 - \frac{r}{r_0}\right)^{1/n} dr$$

Los valores de v_{max} y n se pueden medir experimentalmente, y el valor de r_0, es el radio del tubo. Integre el perfil de velocidad para determinar la velocidad de flujo media en el tubo. Suponga $r_0 = 0.5ab\ m$ y un valor de $n = 8$.

1998 Solución de problemas de ing. Delores Etter. P190

34. Se recabaron datos de la velocidad del aire en radios diferentes desde la línea central de un tubo circular de 16 cm de diámetro, como se muestra a continuación:

$r_i\ cm$	0	1.6a	3.23	4.8b	6.4a	7.47	7.87	7.95	8.ab
$v_i\ m/s$	10.a	9.69	9.3b	8.77	7.95	6.79	5.57	4.89	0.ab

Utilice integración numérica para determinar la tasa de flujo de masa, que se calcula como:

$$\int_0^R (\rho v 2\pi r)dr$$

donde ρ es la densidad (ρ= 1.2 kg/m3). Exprese sus resultados en kg/s.

35. La distribución de velocidad de un fluido cerca de la superficie está dada por la siguiente tabla.

I	$v_i(m)$	$u_i(m/s)$
0	0.0	0.000000
1	0.002	0.006180
2	0.004	0.011756
3	0.006	0.016480
4	0.008	0.019021

La ley de newton para la tensión superficial está dada por:

$$\tau = \mu \frac{d\mu}{dy}$$

Donde μ es la viscosidad $(\mu = 0.001Ns/m^2)$
Calcule la tensión superficial en $y = 0$, mediante aproximación por diferencias. Empleando:
$i = 0$ e $i = 1$ y b) $i = 0.1$ y 2

36. Si se conoce la distribución de la velocidad de un fluido a través de una tubería, es posible calcular la rapidez del flujo Q (es decir, el volumen de agua que pasa a través de la tubería por unidad de tiempo) mediante

$$Q = \int vdA$$

Donde v es la velocidad y A es el área de la sección transversal de la tubería. En un tubo circular. $A = \pi r^2$ y $dA = 2\pi r dr$. Por tanto

$$Q = \int_0^{r_0} v(2\pi r)dr$$

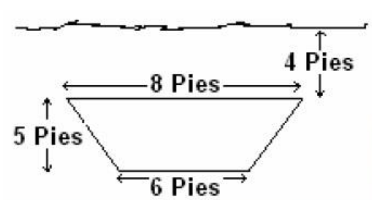
Donde r es la distancia radial medido desde el centro de la tubería. Si la distribución de la velocidad está dada por:

$$v = 2.0(1 - \frac{r}{r_0})^{1/6}$$

Donde r_0 es el radio total (en este caso, 2cm)

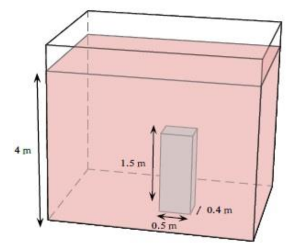
a. Determinar Q utilizando el método de Simpson para N=10, 20 y 30 intervalos.
b. Determinar el error máximo cometido en el ítem anterior.
c. Cuantas particiones se requieren como mínimo para que se obtenga el valor de la integral con un error inferior a 0.001

37. Una compuerta de presa vertical en un dique tiene la forma de un trapecio con 8 pies en la parte superior y 6 pies en el fondo con una altura de 5 pies, como se muestra en la figura



a. Utilizar el método de cuadratura gaussiana con 3 puntos (este resultado tendrá 3 c.d.e) para calcular la fuerza del fluido en la compuerta cuando la parte superior está a 4 pies debajo de la superficie.
b. Cuantos intervalos serán necesarios para alcanzar la misma precisión usando el método de Simpson 1/3
c. Estime el error contenido en cada caso.
d. Coincide sus cálculos con el valor exacto.
e. Implementar rutinas en MatLab o Scilab para obtener sus resultados.

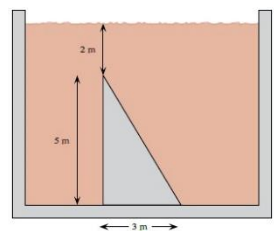
38. Un sólido rectangular, cuyas dimensiones se muestran en la figura, se encuentra sumergido en un recipiente que contiene agua.



Determinar la fuerza total del fluido sobre cada una de las superficies verticales del sólido si el nivel del fluido es de 4 m con respecto del fondo del recipiente.

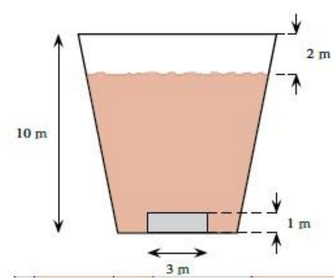
Rta: 23.89 kN, 19.11 kN.

39. Una placa delgada vertical está sumergida en un contenedor con agua como se ve en la siguiente figura.



Encontrar la fuerza total del fluido sobre la superficie de la placa.
Rta: 392 kN.

40. ¿Cuál es la fuerza hidrostática que actúa sobre una compuerta rectangular situada en la parte inferior de la cortina vertical de una presa?.

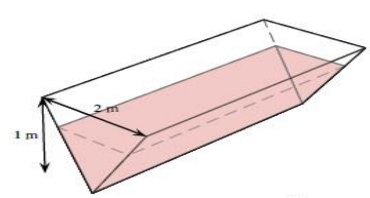


Rta: 220.5 kN.

41. Una portilla vertical de un submarino es circular con un radio de 40 cm. Si el submarino se encuentra sumergido en agua de mar y la distancia entre el centro de la portilla y el nivel superior del fluido es de 5 m.

Calcular la fuerza total del fluido sobre la portilla.
Rta: 25.37 kN.

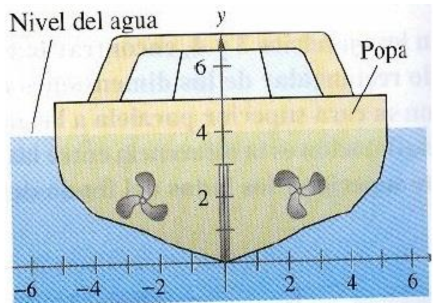
42. Tal como se muestra en la figura, las paredes verticales de un tanque que almacena agua tienen la forma de un triángulo equilátero con longitud de 2 m cada lado.



Encuentre la fuerza del fluido sobre una de estas superficies cuando la altura del fluido es de 1 m. Rta: 60.28 kN.

43. La pompa de un barco con un sistema de coordenadas sobrepuesto se ilustra en la figura. La tabla muestra la anchura w de la pompa en los valores indicados de y.

Y	0	1/2	1	3/2	2	5/2	3	7/2	4
W	0	3	5	8	9	10	10.25	10.5	10.5



a. Escriba una fórmula Gaussiana para calcular fuerza del fluido contra la popa.
b. Implementar un programa que calcule los errores obtenidos al aplicar el modelo para N=5, 6, 7,8 puntos con respecto al valor exacto.
c. Determinar el número mínimo N para alcanzar una precisión de 2c.d.e.
d. Implementar rutinas para obtener sus resultados.

44. Se tiene un tanque esférico de radio $r = 5$ metros, la velocidad de salida por el orificio del fondo es $v = 4.895\sqrt{h}\ m/s$, el diámetro de dicho orificio es 10 cm. Si el tanque tiene inicialmente un nivel de agua de $h = 4$ metros, calcular el tiempo requerido para que el nivel de agua sea h=3 metros.
Este problema se puede resolver a partir de la Ecuación 38.

Ecuación 38

$$\frac{dh}{dt} = -\frac{0.122375\sqrt{h}}{10h - h^2}$$

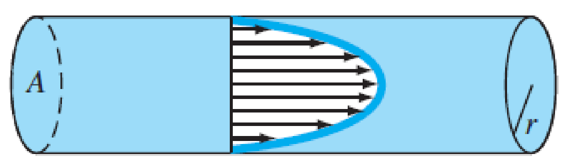
Resolver mediante:

a. La cuadratura de Romberg con una precisión de 8 c.d.e.
b. El método del Trapecio con una precisión de 3 c.d.e.
c. El método del Simpson 1/3 con una precisión de 8 c.d.e.
d. La cuadratura de Gauss-Legendre con n= 4, 5 y 6.

45. Si se conoce la distribución de la velocidad de un fluido a través de un tubo, la tasa de flujo Q (es decir, el volumen de agua que pasa por el tubo por unidad de tiempo) se calcula por medio de:

$$Q = \int v dA$$

Donde v es la velocidad y A es el área de la sección transversal del tubo. (Para entender el significado físico de esta relación, recuerde la estrecha conexión que hay entre la suma y la integración.)



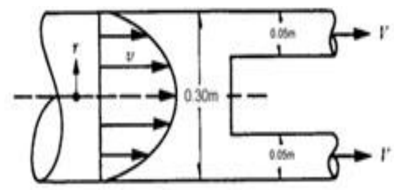
Para un tubo circular, $A = pr^2$ y $dA = 2prdr$. Por lo tanto:

$$Q = \int_0^r v(2\pi r)dr$$

Donde r es la distancia radial medida hacia fuera del centro del tubo. Si la distribución de la velocidad está dada por:

$$v = 2\left(1 - \frac{r}{r_0}\right)^{1/6}$$

Donde r_0 es el radio total (en este caso, 3 cm), calcule Q. Analice los resultados.



46. La ecuación de Rosin-Rammler-Bennet (RRB) se emplea para describir la distribución de los tamaños del polvo fino. $F(x)$ representa la masa acumulada de las partículas de polvo de diámetro x y más pequeñas. x' y n' son constantes iguales a 30 µm y 1.44, respectivamente. La distribución de la densidad de masa $f(x)$ o masa de las partículas de polvo de un diámetro x, se encuentra con la derivada de la distribución acumulada.

$$F(x) = 1 - e^{-(x/x')^{n'}}$$

a. Calcule en forma numérica la distribución de la densidad de masa $f(x)$, y grafique tanto $f(x)$ como la distribución acumulada $F(x)$.
b. Con sus resultados del inciso a), calcule la moda del tamaño de la distribución de la densidad de masa —es decir, el tamaño en que la derivada de $f(x)$ es igual a cero.
c. Encuentre el área superficial por masa de polvo $S_m(cm^2/g)$, por medio de:

$$S_m = \frac{6}{\rho}\int_{d_{min}}^{\infty} \frac{f(x)}{x}\,dx$$

La ecuación es válida sólo para partículas esféricas. Suponga una densidad $\rho = 1.ba\ g\ cm^{-3}$ y un diámetro mínimo, d_{min}, de polvo incluido en la distribución, de 1.a µm.

Chapra: Ed5 P. 702.

47. Por el interior de un gran conducto circular de 0.3 m de diámetro fluye agua con velocidad que sigue la distribución señalada en la figura, según la ley $V = 0.0225 - r^2$ (en m/seg.). Determinar la velocidad media con que el agua sale por las tuberías de 0.05 m de diámetro.

Si se tiene que

$$V = 0.0225 - r^2$$

Y

$$dA = (2 * \pi * r)dr$$

entonces Q será:

$$Q = \int_0^r v dA = \int_0^r (0.0225 - r^2) * (2 * \pi * r)dr$$

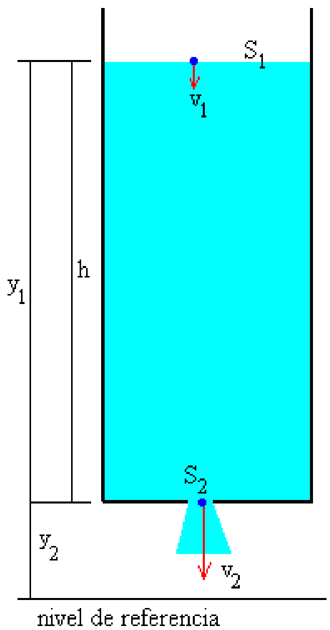
Calcular el valor de Q por los métodos de Simpson. Tenga en cuenta que, dado que la tubería se bifurca en dos, el gasto equivale: $Q = 2V * A$

48. Un depósito cilíndrico, de sección S_1 tiene un orificio muy pequeño en el fondo de sección S_2 mucho más pequeña que S_1. Se Aplica el teorema de Bernoulli a los puntos (1) y (2) situados en la superficie libre del fluido y en el centro del orificio inferior.

$$p_1 + \rho g y_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2 + \rho g y_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2$$

suponiendo que la velocidad del fluido en la sección mayor S_1 es despreciable $v_1 \approx 0$ comparada con la velocidad del fluido v_2 en la sección menor S_2.

Por otra parte, el elemento de fluido delimitado por las secciones S_1 y S_2 está en contacto con el aire a la misma presión. Luego, $p_1 = p_2 = p_0$.



La diferencia de alturas es $y_1 - y_2 = h$. Siendo h la altura de la columna de fluido.

Con estos datos la ecuación de Bernoulli se escribe

$$gh = \frac{1}{2}v_2^2 \qquad v_2 = \sqrt{2gh}$$

En la deducción del teorema de Torricelli se ha supuesto que la velocidad del fluido en la sección mayor S_1 es despreciable $v_1 \approx 0$ comparada con la velocidad del fluido v_2 en la sección menor S_2. Para el presente ejercicio se supondrá, que v_1 no es despreciable frente a v_2.

La ecuación de continuidad se escribe $v_1 S_1 = v_2 S_2$, y la ecuación de Bernoulli

$$\rho gh + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = \frac{1}{2}\rho v_2^2$$

De estas dos ecuaciones obtenemos v_1 y v_2

$$v_2 = S_1\sqrt{\frac{2gh}{S_1^2 - S_2^2}}$$

Si $S_1 >> S_2$ se obtiene el resultado de Torricelli. El volumen de fluido que sale del depósito en la unidad de tiempo es $S_2 V_2$ y en el tiempo dt será $S_2 V_2 dt$. Como consecuencia disminuirá la altura h del depósito

$$-S_1 dh = S_2 V_2 dt$$

Si la altura inicial del depósito en el instante $t = 0$ es H. Integrando esta ecuación diferencial, obtenemos la expresión de la altura h en función del tiempo.

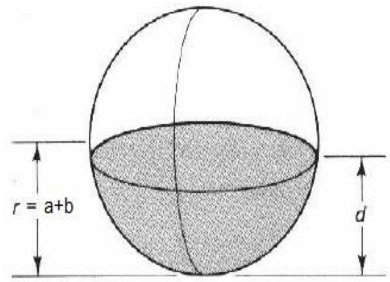
$$-\int_H^h \frac{dh}{\sqrt{h}} = S_2\sqrt{\frac{2g}{S_1^2 - S_2^2}}\int_0^t dt$$

Si se tiene que:

Radio del depósito 10 cm, Radio del orificio 0.8 cm y la Altura inicial 45 cm, H=0.45 m. Determine el tiempo para que la altura haya disminuido a la mitad.

Fuente: http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica3/fluidos/vaciado/vaciado.html

49. Considérese el problema físico que implica una esfera de radio *r* sumergida hasta una altura ***d*** en agua. Supóngase que la esfera está construida en madera, de una variedad de madera, cuya densidad es $\boldsymbol{\rho} = 0.638$ y que el valor numérico del radio es $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$ cms. ¿Hasta qué altura ***d*** alcanza el líquido cuando la esfera se sumerge en agua?



La masa ***Ma*** de agua desplazada cuando la esfera se sumerge en agua y ésta alcanza la altura ***d*** está dada por la siguiente ecuación:

$$Ma = \int_0^d \pi(r^2 - (x-r)^2)dx = \frac{\pi d^2(3r-d)}{3}$$

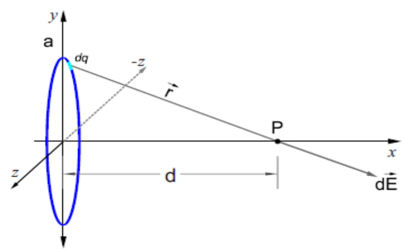
y la masa de la esfera es:

$$Me = 4\pi r^3 \rho/3$$

Aplicar la ley de Arquímedes para la cual $Ma = Me$. Encuentre todos los valores de raíces posibles y de una interpretación a cada resultado. Cuál sería el valor de d?.

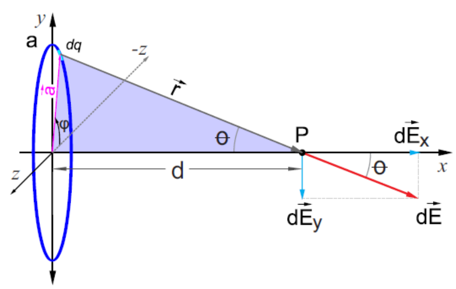
Electricidad – Electrónica

50. Halle el campo eléctrico que genera un anillo de radio a coaxial al eje x, cargado con densidad de carga lineal λ, en un punto genérico P situado sobre el eje del mismo y a una distancia d. Encontrar expresiones para los casos extremos:



Punto P ubicado en el centro del anillo $d = 0$
Punto P muy lejano, sobre el eje, $d \gg a$
Primeramente, se analiza algunos puntos a tener en cuenta:
Radio del anillo cargado: a
Carga total del anillo: Q
Densidad lineal de carga del anillo: $\lambda = \frac{Q}{perimetro} = \frac{Q}{2} * \pi * a$
$dQ = \lambda * d(2 * \pi * a) = \lambda * a * d\varphi \; con \; 0 \leq \varphi \leq 2$

Nótese que el vector $\vec{r}$ no varía su módulo al recorrer el anillo, ni tampoco el ángulo que forma con el eje x, siendo el mismo θ.



Por otra parte, el vector $\vec{a}$ no varía su módulo al avanzar sobre la circunferencia del anillo, pero sí lo hace su ángulo de fase con respecto al eje z, siendo e mismo φ. Dicho ángulo φ será entonces nuestra variable de integración, ya que un diferencial de carga dQ se traduce en una variación angular en base a $dQ = \lambda * a * d\varphi$
Dicho esto, cabe mencionar que las condiciones de simetría del problema, debidas a que el anillo es coaxial al eje x, provocan que el campo total resultante tenga componentes únicamente sobre este eje. Cualquier componente diferencial de carga que genere un diferencial de campo eléctrico con

componente sobre eje y tendrá un elemento de carga opuesto, simétricamente hablando, que generará otro diferencial de campo eléctrico que anulará dicha componente, quedando solamente las componentes sobre el eje x, que se sumarán. Un lector atento observará que, durante el análisis de cada elemento diferencial de carga, lo mismo ocurre con las componentes que inevitablemente se generan sobre el eje z, que al recorrer la circunferencia completa resultarán en una componente nula en este eje. Por lo tanto, el campo eléctrico total de esta distribución de cargas en forma de anillo no es otra cosa que el campo total sobre el eje x.

$$dE_x = \frac{1}{4*\pi*\epsilon_0} * \frac{dQ}{r^2} * \cos(\theta)$$

$$r^2 = d^2 + a^2$$

$$\cos(\theta) = \frac{d}{\sqrt{d^2 + a^2}}$$

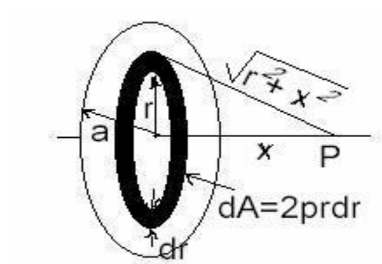
$$dQ = \lambda * a * d\varphi$$

$$dE_x = \frac{1}{4*\pi*\epsilon_0} * \frac{\lambda * a * d\varphi}{d^2 + a^2} * \frac{d}{\sqrt{d^2 + a^2}} = \frac{1}{4*\pi*\epsilon_0} * \frac{\lambda * a * d}{(d^2 + a^2)^{3/2}} d\varphi$$

$$E = E_x = \frac{1}{4*\pi*\epsilon_0} * \frac{\lambda * a * d}{(d^2 + a^2)^{3/2}} \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} d\varphi$$

Guía de ejercicios Unidad 5 P4.7

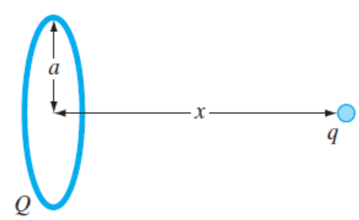
51. Encuentre el potencial eléctrico (V) a lo largo del eje de un disco uniformemente cargado de radio a y carga por unidad de área σ .



El cálculo del potencial en un punto axial P ubicado a una distancia x del disco, se simplifica al dividir el disco en anillos de área $(2*\pi*r)dr$. La carga sobre dicho anillo es $dq = \sigma$; $A = (\sigma * 2 * \pi * r)dr$. Por lo que el potencial en el punto P debido a este anillo está dado por:

$$dV = \frac{kdq}{\sqrt{r^2 + x^2}} = \frac{k\sigma 2\pi r dr}{\sqrt{r^2 + x^2}}$$

52. Una carga total Q se encuentra distribuida en forma uniforme alrededor de un conductor en forma de anillo con radio a. Una carga q se localiza a una distancia x del centro del anillo (véase la figura). La fuerza que el anillo ejerce sobre la carga está dada por la ecuación.



$$F = \frac{1}{4\pi e_0} \frac{qQx}{(x^2 + a^2)^{3/2}}$$

Donde $e_0 = 8.85 * 10^{-12}\ C^2/(N\ m^2)$. Encuentre la distancia x donde la fuerza es de 1.25N, si q y Q son $2 \times 10^{-5}\ C$ para un anillo con un radio de 0.9 m.

Chapra: Ed5 P- 222

53. Considere el problema de calcular la intensidad de corriente RMS

$$I_{RMS} = \frac{1}{T}\left(\int_0^T i^2(t)dt\right)^{1/2}$$

En que la intensidad de corriente está dada por:

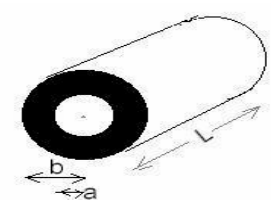
$$i(t) = \begin{cases} 10e^{-t/T} Sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right) & 0 \le t \le \frac{T}{2} \\ 0 & \frac{T}{2} < t \le 1 \end{cases}$$

Con $T = 1$ seg

Escriba una formula Gaussiana para calcular la integral $IRMS$; Construya el programa donde lea desde un archivo los datos de los pesos y los ceros de Legendre hasta 10 puntos, o desarrollar una rutina para crear los ceros de Legendre y los pesos respectivos de esta cuadratura. Investigue el número de puntos necesarios para alcanzar una precisión de 6 c.d.e.

Asumiendo cota para $f^{(4)}$ en $[0,1]$ es $M = 10^6$, donde $f(T) = i^2(t)$, estime el paso de integración o el número de sub-intervalos para calcular la integral en IMRS con una precisión de 5 decimales, usando la regla compuesta de Simpson (1/3).

54. El espacio entre un par de tubos coaxiales se llena completamente con silicon como muestra la figura. El radio del tubo interior es $a = 0.5p$ cm, el radio del tubo exterior es $b = 1.7q$ cm y la longitud de los tubos es de L=15.pq cm. Calcule la resistencia total del silicón cuando es medida entre el tubo interior y el exterior.



$$dR = \frac{\rho}{2\pi r L}dr \text{, donde } R = \int_a^b dr$$

dR es la resistencia de la sección del conductor de espesor dl y de área *A.* ρ para el silicon es de $640\ \Omega * m$. Si una diferencia de potencial de 12 Voltios se aplica entre los tubos de cobre interior y exterior, calcule la corriente que pasa a través de ellos. P y q 2 últimos dígitos código.

55. El valor promedio de una corriente eléctrica oscilante durante un período puede ser cero. Por ejemplo, supongamos que la corriente se describe mediante una senoidal simple

$$i(t) = \sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right)$$

Donde *T* es el período. El valor promedio de esta función resulta ser

$$I = \frac{\int_0^T \sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right)dt}{T} = \frac{-\cos(2\pi) + \cos(0)}{T} = 0$$

A pesar de que, en promedio, la corriente es nula, esta corriente es capaz de realizar un trabajo y generar calor.

Por tanto, los ingenieros eléctricos, a menudo consideran como promedio la corriente RMS (raíz cuadrada media),

$$I = \sqrt{\frac{\int_0^T i^2(t)dt}{T}}$$

Para evitar este resultado nulo.

Suponga que la corriente de un circuito viene dada por:

$$i(t) = e^{-t/T} \sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right), \; para \;\; 0 \le t \le T/2$$

$$i(t) = 0 \;\; \text{para} \;\; T/2 \le t \le T$$

Y que $T = 1$. Se pide:

a. Determinar el valor necesario de puntos que hay que tomar en el intervalo [0,1/2] para aproximar la Integral

Ecuación 39

$$\int_0^{1/2} i^2(t)dt$$

Por la regla de los trapecios compuesta y la regla de Simpson compuesta con una precisión de 10^{-5}

b. Determinar una fórmula que aproxime la corriente RMS en términos de la estimación de la integral de la Ecuación 39 .

56. Para un dipolo de media longitud de onda, se requiere generalmente integrar la función

$$f(\theta) = \frac{cos^2\left(\frac{\pi}{2}\cos(\theta)\right)}{\sin(\theta)}$$

Evalúe la integral de esta función entre cero y π.

2014 Métodos numéricos aplicados a la ingeniería Nieves. P514

57. Un pico de potencia en un circuito eléctrico resulta en la corriente.

$$i(t) = i_0 * e^{-t/t_0} \sin(2 * t/t_0)$$

A través de una resistencia. La energía E disipada por el resistor es:

$$E = \int_0^\infty R[i(t)]^2 dt$$

Encontrar E usando los datos $i_0 = 100A$, $R = 0.5a\Omega$ y $t_0 = 0.01b\ Sg$

2005 Numerical Methos Matkab Jaan Kiusalaas P218

Transferencia de Calor - Química - Medicina

58. Las tasas de reacción química son proporcionales a una constante de tasa k que cambia con la temperatura de acuerdo con la ecuación de Arrhenius:

$$k = k_0 * e^{\frac{-Q}{R*T}}$$

Para una reacción se tienen los siguientes datos, Q = 8000 cal/mol, R=1.987$cal/mol*K$, k0=1200min^{-1}

Realice una función que encuentre los valores de k para temperaturas desde 100K hasta 500K, en incrementos de 50K. Cree una figura con los resultados.

59. Considérese la condensación de un vapor puro en la superficie exterior de un tubo refrigerado horizontal. De acuerdo con la teoría de la condensación de capas de Nusselt, el coeficiente medio de transmisión de calor, h viene dado por:

$$h = \left(\frac{k^3 \rho g \lambda}{v r \Delta T}\right)^{1/4} \left(\frac{2^{3/2}}{3\pi}\right) I^{3/4}$$

Donde:

$$I = \int_0^{\pi} (Sen\beta)^{1/3} d\beta$$

Aquí $k, \rho, y\ v$ son respectivamente la conductiva térmica, la densidad y la viscosidad cinemática de la película de líquido condensada, r es el radio del tubo, λ es el calor latente del vapor condensado. g es la aceleración de la gravedad, ΔT es la diferencia de temperatura de saturación del vapor (T_V) y la temperatura de la pared del tubo (T_W), y todas estas cantidades vienen dadas en unidades consistentes.

Para el agua, el grupo

$$\emptyset = \left(\frac{k^3 \rho g \lambda}{v}\right) en\ \frac{BTU^4}{hr^4} {}^{\circ}F^3 ft^7$$

Varia con la temperatura $T(°F)$, Como sigue:

T:	100	110	120	130	140	150	160	170	180	190	200	210	220	230	240	250
$\phi X10^{-14}$	0.481	0.536	0.606	0.67	0.748	0.82	0.892	0.976	1.051	1.130	1.218	1.280	1.327	1.376	1.43	1.503

Cuando utilicé la formula anterior de $h, \emptyset$, debe calcularse a la temperatura media de la capa condensada

$$\bar{T} = \frac{T_V + T_W}{2}$$

Escribir un programa que utilice las ecuaciones anteriores para hallar h.Los datos deben incluir los valores de T_V, T_W (°F) y d(diámetro del tubo en pulgadas); estos valores deben también aparecer impresos en os resultados.

El programa debe calcular y escribir los valores de la integral Iy el número de intervalos utilizando según consta en **Nota**. La temperatura media de la capa condensada $\bar{T}$. El valor correspondiente Ø y el coeficiente h de transmisión de calor resultante ¿Indique con que precisión se está calculando el valor del coeficiente de transmisión resultante?. Se sugiere los cuatro conjuntos de datos.

T_v	T_w	d
212	208	0.75
212	208	2.00

212	210	0.75
120	116	0.75

Nota: Use las reglas de Trapecio y Simpson 3/8 o 1/3. Analice y compare los resultados para obtener un valor de $\Delta\beta$ adecuado de tal forma que la integral tenga 4 c.s.e. En cada caso reporte el valor de $\Delta\beta$ o el número de intervalos requeridos.

60. Se tiene un volumen V_0 de un gas ideal diatómico a una presión p_0 y una temperatura T_0 encerrado en un recipiente con un pistón móvil. Este gas se comprime reversiblemente según la ley.

$$p = 3 * p_0 - \frac{2 * p_0 * V}{V_0}$$

reduciéndose el volumen hasta $\frac{V_0}{2}$. Calcule el trabajo neto realizado sobre el gas, conociendo que el trabajo realizado sobre el gas en un proceso reversible es igual a la integral

$$W = -\int_{V_i}^{V_f} p dV$$

Asuma valores para V_0, p_0 y T_0

Fuente: http://laplace.us.es/wiki/index.php/Compresi%C3%B3n_lineal

61. El comportamiento del gas butano se ajusta, dentro de ciertos límites, a la ecuación de estado de Van der Waals:

$$\left(P + \frac{\alpha}{V^2}\right) * (V - \beta) = n * R * T$$

Siendo en este caso $\alpha = 14.5ab$ atm·l² y $\beta = 0.12b$ l. Calcule el trabajo realizado por un mol de gas butano, considerándolo como un gas de Van der Waals, al expansionarse cuasi estáticamente desde 2 l hasta 3 l a la temperatura constante de $t = 27°C$. Compare con el resultado que daría la ecuación de los gases ideales.

Por tratarse de un proceso cuasi estático, se puede calcular el trabajo realizado sobre el gas mediante la integral:

$$W = -\int_{v_1}^{v_2} p * dV$$

Despejando la presión de la ecuación de Van der Waals

$$p = \frac{n * R * T}{V - \beta} - \frac{\alpha}{V^2}$$

y sustituyendo e integrando

$$W_{VdW} = -\int_{v_1}^{v_2} \left(\frac{n * R * T}{V - \beta} - \frac{\alpha}{V^2}\right) dV$$

Resolviendo analíticamente la integral su resultado será:

$$-n * R * T * ln\left(\frac{v_2 - \beta}{v_1 - \beta}\right) + \alpha\left(\frac{1}{v_2} - \frac{1}{v_1}\right)$$

Sustituyendo los valores del enunciado tenemos, para la ecuación de estado de Van der Waals

$$W_{\text{Vdw}} = -(1\,\text{mol})\left(0.082\frac{\text{atm}\cdot\text{l}}{\text{K}\cdot\text{mol}}\right)(300\,\text{K})\ln\left(\frac{3-0.122}{2-0.122}\right) + 14.5\,\text{atm}\cdot\text{l}^2\left(\frac{1}{31} - \frac{1}{21}\right) = -8.085\,\text{atm}\cdot\text{l} = -820\,\text{J}$$

Siguiendo el convenio habitual, este es el trabajo realizado *sobre* el gas. Si se quiere el trabajo realizado *por* el gas, se debe cambiar el signo, quedando +820 J, que es positivo, como corresponde a una expansión contra una presión exterior.

El trabajo realizado *sobre* un gas ideal, para la misma expansión será

$$W_{\text{ideal}} = -(1\,\text{mol})\left(0.082\,\frac{\text{atm}\cdot\text{l}}{\text{K}\cdot\text{mol}}\right)(300\,\text{K})\ln\left(\frac{3}{2}\right) = -9.974\,\text{atm·l} = -1011\,\text{J}$$

De nuevo, el trabajo realizado *por* el gas será igual, con el signo cambiado.

El error que se comete al aproximar este gas de Van der Waals por uno ideal será

$$\epsilon = \frac{|W_{\text{VdW}} - W_{\text{ideal}}|}{|W_{\text{VdW}}|} = 23.4\%$$

Para estos valores de los parámetros, el error cometido es sustancial, y el modelo de gas ideal será una pobre aproximación.

Fuente: http://laplace.us.es/wiki/index.php/Ecuaci%C3%B3n_de_Van_der_Waals

62. Se ha determinado que el flujo sanguíneo de una arteria a una vaso capilar pequeño está dado por una función F que depende del diámetro del vaso capilar D, de la presión de la arteria A, de la presión del vaso capilar E. Si el cambio del flujo F respecto a la presión E es:

$$\frac{dF}{dE} = -\frac{kD^2}{\sqrt{A-E}}$$

Donde k es una constante positiva. Hallar la función $F(E)$.
Si el cambio de flujo F respecto a la presión de la arteria A es:

$$\frac{dF}{dA} = -\frac{kD^2}{\sqrt{A-E}}$$

Hallar la función $F(A)$

63. En la tomografía computarizada o en la IRM se toman numerosas medidas y se procesan en un ordenador para producir una imagen tridimensional del tejido que el médico desea analizar. Es un proceso parecido al de las rodajas que hemos utilizado para calcular el volumen de un sólido. Sin embargo, en este caso las representaciones matemáticas de varias capas del tejido se combinan para producir una imagen tridimensional que pueda ser analizada por el médico. Supongamos que un barrido de IRM da los siguientes valores del área de las secciones de un tumor.

$x\ (cm)$	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
$A(x)\ cm^2$	0.0a	0.1b	0.4a	0.3b	0.6a	0.9b	1.2a	0.8b	0.6a	0.2b	0.1a

Estimar el volumen del tumor
Vol 1 Unidad5 Integración P350

64. Un problema que se encuentra a menudo en Ingeniería es calcular la cantidad de calor necesaria para elevar la temperatura de un material. La característica necesaria para realizar este cálculo es la capacidad calórica C. Este parámetro representa la cantidad de calor necesaria para elevar una unidad de masa a una unidad de temperatura. Si C es la constante sobre el rango de temperaturas que se van a examinar, el calor necesario ΔH se calcula como $\Delta H = m * c * \Delta T$, en donde c tiene unidades de calorías por gramo por grado centígrado, m es la masa en gramos (gr) y ΔT es el cambio de

temperatura en (ºC)- Ej. La cantidad de calor necesaria para elevar 20gr de agua de 5ºC a 10ºC es igual a $\Delta H = (209 * (1) * (10 - 5) = 100$ Calorías. Tal valor es adecuado para ΔT pequeños, en rangos mayores de temperatura, la capacidad calórica no es constante. Ej. La capacidad calórica de un material aumenta de acuerdo con relaciones tales como:

$$C(t) = 0.132 + 1.56 * 10^{-4}t + 2.64 * 10^{-7}t^2$$

Calcular el calor necesario para elevar 1005 gr de material de –105ºC a 190ºC.

$$\bar{C}(t) = \int_{t_1}^{t_2} \frac{C(t)}{t_2 - t_1} dt \Rightarrow \Delta H = m * \int_{t_1}^{t_2} C(t)dt$$

Resolver aplicando dos de métodos descritos con un error menor a 0.001.

65. La fórmula de Debye para la capacidad calorífica C_V de un sólido es $C_V = 9NKg(u)$, donde;

$$g(u) = u^3 \int_0^{1/u} \frac{x^4 * e^x}{(e^x - 1)^2} dx$$

Los términos en esta ecuación son:
N = número de partículas en el solido
k = constante de Boltzmann
$u = T/\Xi_D$
T = temperatura absoluta
Ξ_D = temperatura Debye
Calcular g(u) para u=0 a 1.0 en intervalos de 0.05 y plotee los resultados
2005 Numerical Methods MatLab Jaan Kiusalaas P.217

Civil

66. En una columna rectangular con base cuadrada de un metro de lado, la densidad del aire ρ (en kilogramo / metro) depende de la altura h y está dada por la fórmula:

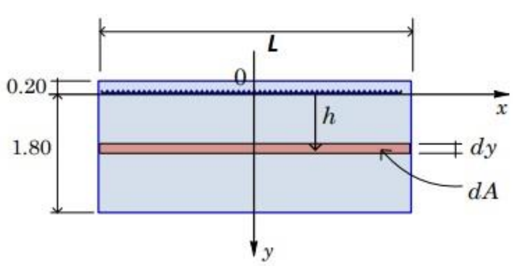
$$\rho(h) = \frac{1.28}{h^2 + 1}$$

Calcular la masa de la columna de aire de 10.ab metros de altura. puedes utilizar la siguiente integral

$$\int f(h)dh = \int \frac{1.28}{h^2 + 1} dh$$

2009 Las EDO Hernandez P57

67. La pared vertical de una piscina tiene forma rectangular de L metros de ancho en la parte superior y 2 metros de profundidad. Si el nivel del agua se encuentra 20 centímetros por debajo de la parte superior de la pared. Determine la fuerza debida a la presión del agua ejercida sobre la pared.



La figura muestra la compuerta situada en un sistema de coordenadas rectangulares, con el eje y positivo hacia abajo y el eje x en la parte superior de la compuerta.

La fuerza en la pared está dada por la Ecuación 40

Ecuación 40

$$F = \int_a^b \rho * h * dA$$

Como la superficie del agua coincide con el eje x se tiene que $h = y$, el diferencial de área tiene un ancho constante de L metros y una altura dy

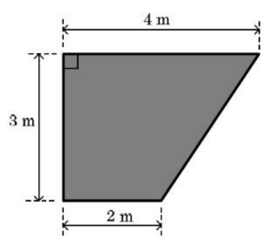
$$dA = L * dy$$

Para establecer los límites de integración hay que observar que valor tiene y donde se inicia la presión sobre la compuerta y que valor tiene y donde finaliza la presión sobre la misma. Para este problema la presión inicia en la parte superior del agua donde $y = 0$ y termina en el fondo de la piscina, donde $y = 1.8$

El peso específico del agua (ρ) es una constante y se puede sustituir al finalizar los cálculos. Siendo este $\rho\ = 1000\ kg/m^3$ o 9,800 N/m^3. Cual es La fuerza ejercida sobre la pared es si $L = 1a.b\ mt$.

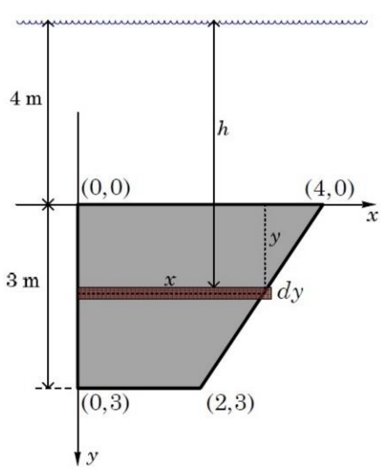
Fuente: https://matematicaenlinea.com/recursos/wp-content/uploads/2020/11/3.3-Fuerza-hidrostatica.pdf

68. La compuerta para evacuar el agua en una presa vertical tiene la forma mostrada en la figura. Si la parte superior de la compuerta se encuentra a una profundidad de 4 metros de la superficie del agua. Calcule la fuerza que ejerce el agua sobre la compuerta.



Solución

La siguiente figura muestra la compuerta. Se ha establecido el origen del sistema de coordenadas en la parte superior izquierda de la compuerta, con el eje y positivo hacia abajo. En la figura también se indican las coordenadas de los puntos en las esquinas de la compuerta, que corresponden a la posición del sistema de coordenadas establecido.



La fuerza hidrostática está dada por

$$F = \rho \int_a^b hdA$$

Para calcular esta integral se sebe expresar la altura h y el diferencial de área dA en términos de la variable de integración y.

La expresión para la altura es

$$h = y + 4$$

El diferencial de área es un rectángulo de base x y altura dy

$$dA = xdy$$

Como la variable de integración es y, hay que expresar x en términos de y; para ello se puede utilizar semejanza de triángulos o bien la ecuación de la recta que pasa por los puntos (4,0) y (2,3). Para este ejemplo se utilizará la ecuación de la recta.

La pendiente es:

$$m = \frac{3-0}{2-4} = -\frac{3}{2}$$

La ecuación de la recta es

$$y - y_0 = m(x - x_0) \Longrightarrow y - 0 = -\frac{3}{2}(x-4) \Longrightarrow 2y = -3(x-4) \Longrightarrow 2y = -3x + 12$$

Despejando x en términos de y

$$x = \frac{12 - 2y}{3}$$

Entonces

$$dA = xdy \Longrightarrow dA = \left(\frac{12-2y}{3}\right) dy$$

La fuerza sobre la compuerta es

$$F = \rho \int_a^b h dA = \rho \int_a^b (y+4)\left(\frac{12-2y}{3}\right) dy$$

Asuma los siguientes límites para resolver la integral:
$a = 0 \;\; y \; b = 2.9ab$. Cuál es el valor de F si $\rho = 1000 \ \mathrm{kg/m^3}$

Fuente: https://matematicaenlinea.com/recursos/wp-content/uploads/2020/11/3.3-Fuerza-hidrostatica.pdf

69. Una placa circular de 4 pies de radio se sumerge verticalmente de modo que el centro de la placa está a 10.ab pies por debajo de la superficie del agua. Calcule la fuerza que el agua ejerce sobre un lado de la placa.

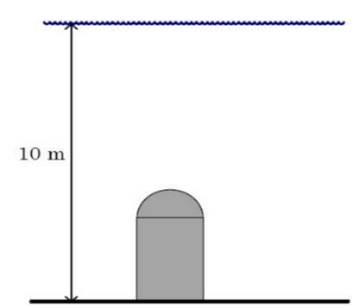
Fuente: https://matematicaenlinea.com/recursos/wp-content/uploads/2020/11/3.3-Fuerza-hidrostatica.pdf

70. Una placa tiene la forma de una región limitada por la parábola $x^2 = 6 * y$ y la recta $2 * y = 3.ab$, se coloca dentro de un tanque que contiene agua con su vértice en la parte de abajo y la recta en la superficie del agua. Determine la fuerza ejercida por la presión del agua sobre la cara de la placa si la distancia se mide en metros.

Fuente: https://matematicaenlinea.com/recursos/wp-content/uploads/2020/11/3.3-Fuerza-hidrostatica.pdf

71. Una presa vertical de 20.ab m de profundidad tiene una compuerta en forma de un triángulo isósceles de 15 m de ancho en su parte superior y 10 m de altura en el centro, colocada a 10 m de profundidad desde la superficie de agua a la parte superior de la compuerta. Plantee una integral para la fuerza total ejercida por la presión de agua en la cara de la presa.

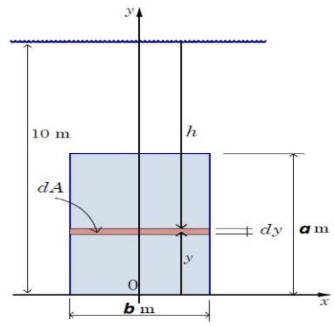
72. Una compuerta tiene forma de un rectángulo con un semicírculo sobrepuesto, como se muestra en la figura. La base del rectángulo es de b metros y la altura es a metros. Si la parte inferior de la compuesta está a una profundidad de 10 metros. Calcule la fuerza debida a la presión que el agua ejerce sobre la misma.



Para resolver este problema será necesario descomponer la compuerta en dos partes, la primera de ellas será la parte rectangular y la segunda será la parte en forma de semicírculo. La fuerza total sobre la compuerta será la suma de las dos fuerzas.

Por otro lado, para la solución de este problema se tomará el origen del sistema de coordenadas en la parte inferior de cada compuerta.

Para la primera parte se tiene la figura siguiente

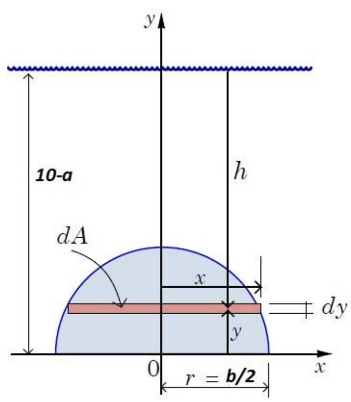


La fuerza hidrostática es: $F_1 = \rho \int_{li}^{ls} hdA$
Donde $h = 10 - y,\ dA = b * dy$

Entonces

$$F_1 = \rho \int_{li}^{ls} hdA = \rho \int_{0}^{a} (10 - y)(b * y)$$

Para la segunda parte si tiene la siguiente figura



Como la compuerta tiene forma circular de radio b/2, con el centro de la circunferencia en el origen del sistema de coordenadas, la ecuación es:

$$x^2 + y^2 = (b/2)^2$$

Como la variable de integración es *y* hay que despejar *x*

$$x = \sqrt{(b/2)^2 - y^2}$$

En este caso la fuerza hidrostática es

$$F_2 = \rho \int_{li}^{ls} hdA$$

En donde

$$h = \big((10 - a) - y\big)$$

$$dA = 2xdy = 2\sqrt{(b/2)^2 - y^2}dy$$

Para calcular el diferencial de área se ha utilizado la simetría de la figura, razón por la cual el ancho en la base es 2*x*.

Al sustituir en la integral de fuerza se tiene:

$$F_2 = \rho \int_{li}^{ls} \big((10 - a) - y\big) * 2 * \sqrt{(b/2)^2 - y^2}dy$$

Si se toma como valores de los límites:

$$li = 0\ y\ ls = b/2$$

Cual es finalmente el valor de F.

Fuente: https://matematicaenlinea.com/recursos/wp-content/uploads/2020/11/3.3-Fuerza-hidrostatica.pdf

73. El crecimiento de una grieta en el borde de una placa por ciclo de esfuerzos viene dado por la ecuación de Paris:

Ecuación 41

$$\frac{da}{dN} = A\left(\Delta\sigma Y\sqrt{a}\right)^m.$$

Donde N es el número de ciclos, A y m son constantes del material, $\Delta\sigma$ es la diferencia de esfuerzos a tensión sobre la pieza y Y viene dado por la Ecuación 42. Cuando se observa una grieta de tamaño a_0, el número de ciclos restante para fractura catastrófica de la pieza se obtiene separando las variables e integrando la Ecuación 41:

Ecuación 42

$$Y = \left[1.99 - 0.41\left(\frac{a}{w}\right) + 18.70\left(\frac{a}{w}\right)^2 - 38.48\left(\frac{a}{w}\right)^3 + 53.85\left(\frac{a}{w}\right)^4\right]$$

$$N_f = \int_{a_0}^{a_f} \frac{da}{A\left(\Delta\sigma Y\sqrt{a}\right)^m}$$

Supóngase que se tiene la placa del ejemplo de mecánica de fractura con $\Delta\sigma = 17.78\ ksi,\ A = 6.6 * 10^{-9},\ m = 2.25, w = 2.5$, con una grieta inicial de $a_0 = 0.25\ in$. El número de ciclos restante para falla es:

$$N_f = \int_{0.25}^{0.62} \frac{da}{6.6 * 10^{-9}\left(17.78\left[1.99 - 0.41\left(\frac{a}{2.5}\right) + 18.70\left(\frac{a}{2.5}\right)^2 - 38.48\left(\frac{a}{2.5}\right)^3 + 53.85\left(\frac{a}{2.5}\right)^4\right]\sqrt{a}\right)^{2.25}}$$

Fuente: 2010_Met_Num_Para_Ing_Carlos_de_Castro_p 27

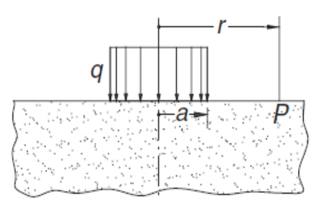
74. Las profundidades de un río H se miden a distancias espaciadas iguales a través de un canal como se muestra en la tabla siguiente. El área de la sección transversal del río se determina por integración con:

$$A_c = \int_0^x H(x)dx$$

Emplee integración de Romberg para llevar a cabo la integración con un criterio de detención de 1%.

$x(mt)$	0	2	4	6	8	10	12	14	16
$H(mt)$	0	1.9a	2.ab	2.0b	2.4a	2.6b	2.2a	1.1b	0

75. La figura muestra un semiespacio elástico que soporta una carga uniforme de intensidad q sobre un área circular de radio $a = 1.ab\ mt$. El desplazamiento vertical de la superficie en el punto P, se puede demostrar así:



$$w(r) = w_0 \int_0^{\pi/2} \frac{cos^2(\theta)}{\sqrt{(r/a)^2 - sin^2(\theta)}} d\theta,\ \ r \geq a$$

Donde w_0 es el desplazamiento en $r = a$. Utilice la integración numérica para determinar w/w_0 en $r = 2a$. Numerical methods MatLab Jaan Kiusalaas. P217

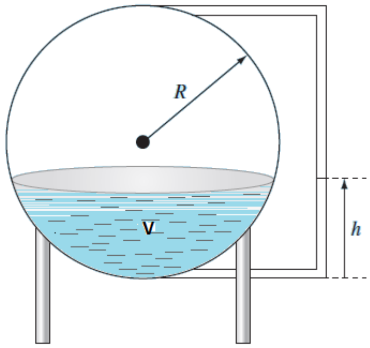
76. Suponga que usted está diseñando un tanque esférico como el mostrado en la Figura 9 para almacenar agua para un poblado pequeño en un país en desarrollo. El volumen de líquido que puede contener se calcula con.

$$V = \pi * h^2 \frac{3R - h}{3}$$

donde V = volumen [m3], h = profundidad del agua en el tanque [m], y R = radio del tanque [m].

Si $R = 3.ab\ m$, ¿a qué profundidad debe llenarse el tanque de modo que contenga $30.ba\ m^3$? Realice 5 iteraciones con unos de los modelos a fin de obtener la respuesta.

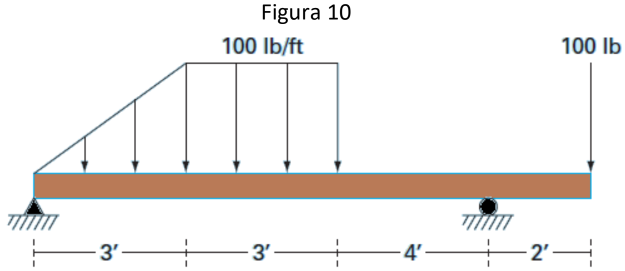
Figura 9



Fuente: Chapra Ed.5 Pag. 141

77. Se carga una viga de la manera que se aprecia en la Figura 10. Emplee un modelos de raices para resolver la posición dentro de la viga donde no hay momento.

Figura 10



78. Una viga de $11.ab$ mt está sujeta a una carga, y la fuerza cortante sigue la ecuación:

$$V(x) = 5 + 0.25x^2$$

Donde *V* es la fuerza cortante y *x* es la distancia a lo largo de la viga. Se sabe que

$$V = dM/dx$$

y *M* es el momento flexionante. La integración conduce a la relación:

$$M = M_0 + \int_0^x V dx$$

Si $M_0 = 0$ y $x = 11.ab$, calcule *M* con el empleo de

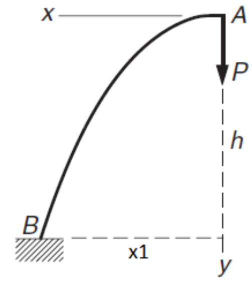
a) integración analítica,

b) aplicación de un modelo de integración

79. Una viga uniforme forma el arco en voladizo semiparabólico AB. El desplazamiento vertical de A debido a la fuerza P puede demostrarse que es

$$\delta_A = \frac{P * x1^3}{EI} C\left(\frac{h}{x1}\right)$$

Donde EI es la rigidez a la flexión de la viga y

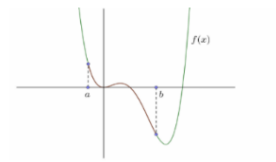


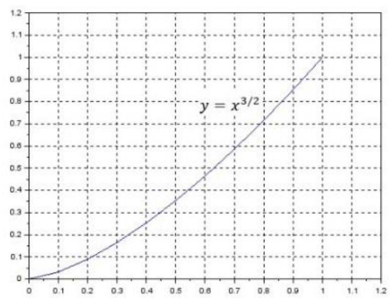
$$C\left(\frac{h}{x1}\right) = \int_0^1 z^2 \sqrt{1 + \left(\frac{2h}{x1} * z\right)^2}\, dz$$

Escriba un programa que calcule $C(h/x1)$ para cualquier valor dado de $h/x1$ con cuatro decimales lugares. Use el programa para calcular $C(0.5a), C(1.ba)\ y\ C(2.ab)$.
2005 Numerical Methods MatLab jann Kiusalaas P235

Calculo

80. Si tiene una función $f(x)$ derivable en un intervalo $[a, b]$, entonces se puede medir la longitud de la gráfica en este intervalo. Esta longitud se conoce como la longitud del arco de la curva $f(x)$.





Para encontrar la longitud de arco se emplea la siguiente fórmula que viene dada por la integral definida:

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx$$

Como ejemplo tome el arco de la función $y = x^{3/2}$ en el intervalo [0, 1].

Se deriva la fucnión: $y' = \frac{3}{2}\sqrt{x}$

Se sustituye dicha derivada en la formula de longitud del arco.

$$L = \int_0^1 \sqrt{1 + \left(\frac{3}{2}\sqrt{x}\right)^2}\, dx$$

Se resuelve la integral:

$$\int_0^1 \sqrt{1 + \left(\frac{3}{2}\sqrt{x}\right)^2}\, dx = \int_0^1 \sqrt{1 + \frac{9}{4}x dx} = \int_0^1 \left(1 + \frac{9}{4}x\right)^{1/2} dx$$

Se completa la integral:

$$\int_0^1 \left(1 + \frac{9}{4}x\right)^{1/2} dx = \frac{4}{9}\int_0^1 \left(1 + \frac{9}{4}x\right)^{1/2} * \frac{9}{4} dx$$

Se cambia $u = 1 + \frac{9}{4}x$, luego la derivada es $u' = \frac{9}{4}$.

Se resuelve la integral de la función potencia:

$$\frac{4}{9}\int_0^1 \left(1 + \frac{9}{4}x\right)^{1/2} * \frac{9}{4} dx = \frac{4}{9} * \frac{2}{3}\left(1 + \frac{9}{4}x\right)^{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^1 = \frac{8}{27}\left(1 + \frac{9}{4}x\right)^{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^1$$

$$\frac{8}{27}\left(1 + \frac{9}{4}x\right)^{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^1 = \frac{8}{27}\left(1 + \frac{9}{4}(1)\right)^{\frac{3}{2}} - \frac{8}{27}\left(1 + \frac{9}{4}(0)\right)^{\frac{3}{2}} = \frac{13\sqrt{13} - 8}{27}$$

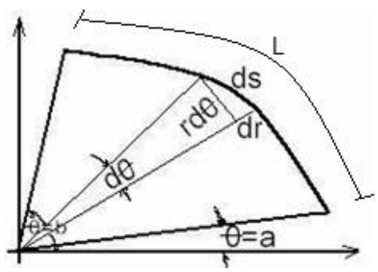
Asi la longitud del arco es:

$$L = \frac{13\sqrt{13} - 8}{27}$$

Calcule la longitud del arco para la sección del dominio entre $0.b$ y $1.a$ y la función $y = x^{1.5ab}$

Fuente: https://www.superprof.es/apuntes/escolar/matematicas/calculo/integrales/longitud-del-arco.html

81. La longitud de arco (L) de una curva en coordenadas polares está dada por:



Calcule la longitud de arco de la curva formada por los siguientes radios r_i:

$r_1 = 2.ab * (1 + \cos(\theta))$, $r_2 = 1.ba + \sin(\theta)$, con $0 < \theta < \pi$ utilizando los métodos de integración descritos.

$$ds = \sqrt{(rd\theta)^2 + dr^2} = \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\, d\theta$$

$$L = \int_a^b ds = \int_a^b \sqrt{\left(r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2\right)}\, d\theta.$$

evalúe para $a = P/Q$ y $b = P * \pi/Q$

P= Menor valor del último digito del código

Q= Mayor valor del último digito del código

82. Calcular la longitud del trozo de uno de los siguientes arcos, aplicando la fórmula de la longitud de una curva dada en la Ecuación 43.

Ecuación 43. Longitud de arco de una curva

$$Longitud(C) = \int_a^b \sqrt{1 + (y'(x))^2}\,\mathrm{dx}$$

a. $y = 0.9ab * x^2$ correspondiente al intervalo $0 \le x \le 1$.
b. $f(x) = \frac{0.9ab*x^3}{6} + \frac{1}{2x}$, sobre el intervalo [0.5,2]
c. $(y - 1)^3 = 0.9ab * x^2$, sobre el intervalo [0,8]
d. $f(x) = 09ab * x^{1/2}$, sobre el intervalo [0,1]
e. Aproximar la distancia recorrida por un proyectil que sigue una trayectoria dada por: $f(x) = x - 0.005ab * x^2$

83. Un cable cuelga de dos postes de igual altura distantes 20.ab metros. Se puede demostrar que un cable suspendido adopta la forma de una catenaria. Supongamos que en este caso la forma viene dada por:

$$y = 5.a * (e^{x/10} + e^{-x/10}), -10 \le x \le 10$$

¿Cuál es la longitud del cable?

Vol1 Unidad5 Integración P370

84. Un balón de rugby sigue la trayectoria:

$$y = \frac{1}{15} * x * (60 - x)\ yardas$$

Esbozar su gráfica. ¿Cuánto ha recorrido horizontalmente? Calcular la longitud de arco de la trayectoria. Si el balón ha estado 4 segundos en el aire, ¿cuál ha sido su velocidad media?

Vol1 Unidad5 Integración P370

85. Una pelota de béisbol sigue la trayectoria

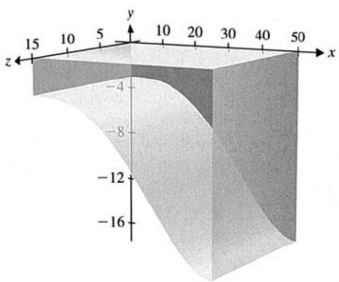
$$y = \frac{1}{300} * x * (100 - x)\ yardas$$

Esbozar su gráfica. ¿Cuánto ha recorrido horizontalmente? Calcular la longitud de arco. Explicar por qué el jugador desearía una longitud de arco pequeña, mientras que el del ejercicio anterior la preferiría grande

Vol1 Unidad5 Integración P370

86. Supongamos que la piscina de la figura, en forma de reloj de arena, está definida por las curvas:

$$y(x) = \pm\left(\frac{x^2}{\sqrt{x^4+1}} + 1\right) metros$$



En $-3 \leq x \leq 3$ y que su profundidad es $d(x) = 6 + x$ metros. Calcular su volumen.

Solución: Para todo x, la sección de la piscina perpendicular al eje x es un rectángulo de dimensiones:

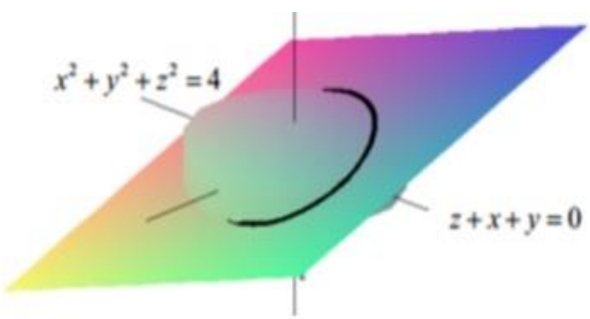
$$2 * \left(\frac{x^2}{\sqrt{x^4+1}} + 1\right)$$

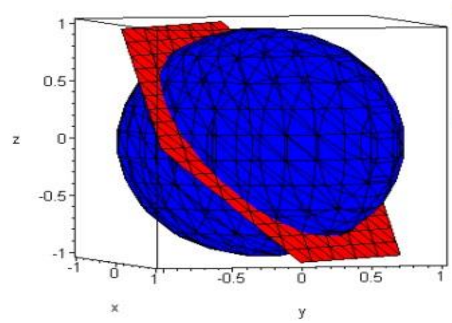
Por $6 + x$. Por $V = \int A(x)dx$, el volumen viene dado por:

$$V = \int_{-3}^{3} 2 * \left(\frac{x^2}{\sqrt{x^4+1}} + 1\right) * (6 + x)dx$$

Vol1 Unidad5 Integración P349

87. Hallar la masa de un alambre formado por la intersección de la superficie esférica $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, y el plano $x + y + z = 0$, si la densidad volumétrica de masa del alambre en (x, y, z) está dada por $\rho(x, y, z) = x^2$ gramos por unidad de longitud del alambre





$$g: [0,2\pi] \to \frac{\Re^3}{g(\theta)} = \left(\frac{4}{\sqrt{6}}sin(\theta), -\frac{2}{\sqrt{2}}cos(\theta) - \frac{2}{\sqrt{6}}sin(\theta), \frac{2}{\sqrt{2}}cos(\theta) - \frac{2}{\sqrt{6}}sin(\theta)\right)$$

$$dS = \sqrt{\left(\frac{4}{\sqrt{6}}cos(\theta)\right)^2 + \left(\frac{2}{\sqrt{2}}sin(\theta) - \frac{2}{\sqrt{6}}cos(\theta)\right)^2 + \left(-\frac{2}{\sqrt{2}}sin(\theta) - \frac{2}{\sqrt{6}}cos(\theta)\right)^2 d\theta}$$

Sustituyendo ds en la fórmula para calcular la masa y simplificando se tiene.

$$\int_C fds = \int_C \rho(x,y,z)ds$$

$$\int_C fds = \int_C (x^2)ds$$

$$\int_C fds = \int_0^{2\pi} \left(\frac{16}{3}sin^2(\theta)\right)4d\theta$$

$$\int_C fds = \int_0^{2\pi} \frac{32}{3}sin^2(\theta)d\theta$$

$$= \left[-\frac{16}{3}sin(\theta) * cos(\theta) + \frac{16}{3}\theta\right]\Big|_0^{2\pi} = \frac{32}{3}\pi$$

La masa total del alambre es igual a $32 * \pi/3$ unidades.

88. Determinar la masa de un alambre que tiene la forma de la hélice circular dada por la curva $g(t) = (-k * sin(t), k * cos(t), m * t)$, t $E(0,2\,\pi)$ con $k > 0$ y $m > 0$ si la densidad en el punto (x, y, z), está dada por $\rho(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ gramos por unidad de longitud del alambre.

$$\int_C fds = \int_C \rho(x,y,z)ds$$

$$\int_C fds = \int_C (x^2, y^2, z^2)ds$$

$$= \int_0^{2\pi} ((-k * \sin(t))^2 + (k * \cos(t))^2 + (m * t)^2)\sqrt{(-k * \cos(t))^2 + (-k * \sin(t))^2 + m^2}dt$$

$$= \int_0^{2\pi} (k^2 + m^2t^2)\sqrt{k^2 + m^2}dt$$

$$= \sqrt{k^2 + m^2}\int_0^{2\pi} (k^2 + m^2t^2)dt$$

$$= \sqrt{k^2 + m^2}\left[k^2t + \frac{1}{3}m^2t^3\right]\Big|_0^{2\pi}$$

$$= \left(2\pi k^2 + \frac{8}{3}\pi^3m^2\right)\sqrt{k^2 + m^2}$$

http://www.licimep.org/MateFisica/Calculo%20vectorial/Problemas/6%20Integral%20de%20linea/IntegralLinea0030.pdf

89. Consideremos un sólido cuya base es la elipse (Figura 11)

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1$$

Obtener su volumen, sabiendo que toda sección normal al eje y es un triángulo isósceles de altura 6 unidades.

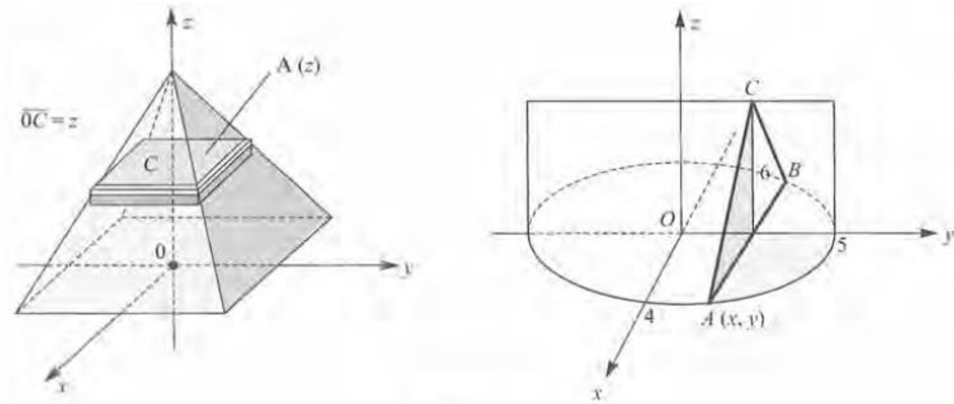
Tenga en cuenta que

$$x = \frac{4}{5}\sqrt{25 - y^2}$$

Cuando $x \geq 0$

2001_Calculo Integral Francisco circuloero

Figura 11



90. El volumen del solido generado por la rotación de $f(x) = 1 + (\frac{x}{2})^2 \quad 0 \leq x \leq 2$ en torno al eje X está dado por:I: $\int_0^2 \pi f(x)^2 dx$
   a. Estime el paso de integración necesario para aproximar I con 5 c.d.e. mediante la regla trapezoidal compuesta.
   b. Denote I_h la aprox. De I mediante la regla trapezoidal compuesta y $E_h$el error, siendo h el paso de integración.

   Suponga:

$$I = I_h + E_h, \qquad I = I_{2h} + E_{2h}$$
$$E_h \approx Ch^2, \qquad E_{2h} \approx C(2h)^2$$

   Obtenga, aíslan C, que:

$$E_h \approx \frac{1}{3}(I_h - I_{2h})$$
$$I \approx I_h + \tfrac{1}{3}(I_h - I_{2h}) \qquad (*)$$

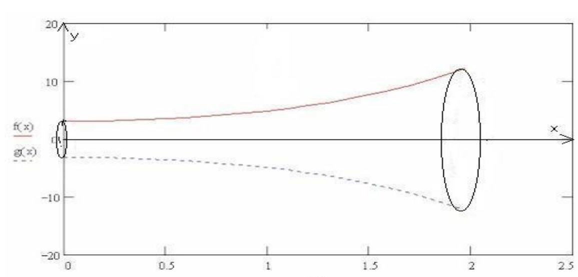
   c. Sea $g(x) = \pi f(x)^2$. Suponga:

x	0.5	1	1.5
g(x)	1,12891π	1.5625π	2.44141π

   Para h=0.25 suponga $I_h \cong 11.7940$

   a. Calcule I_{2h}.
   b. Calcule I mediante la formula $(*)$ obtenida en b.
      Compare con el dato en a). ¿Cuántos c.s.e. obtuvo?

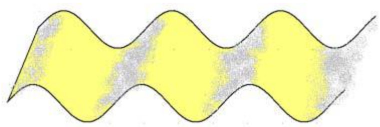
91. El cuerpo de revolución mostrado se obtiene al girar la curva dada por $y = 1 + (x/2)^2$ con $0.1a \leq x \leq 1.9b$ en torno al eje x. Calcule el volumen utilizando los tres métodos con un error menor a 0.001.



   El volumen está dado por:

$v = \int_{0.1a}^{1.9b} A(x)dx$
Donde $A(x) = \pi * (1 + (x/2)^2)^2$

92. En el techado de las casas se utilizan planchas corrugadas con perfil ondulado:



Cada onda tiene la forma f(x) = sen(x), con un periodo de 2π pulgadas. El perfil de la plancha tiene 8 ondas y la longitud de cada onda se la puede calcular con la siguiente integral:

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + (f'(x))^2}dx$$

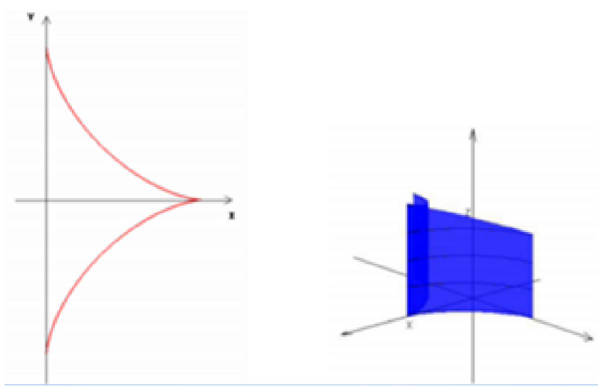
Este integral no puede ser calculado por métodos analíticos.

a. Use la fórmula de Simpson con m = 4, 6, 8, 10 para calcular y estime el error en el último Resultado
b. Con el último resultado encuentre la longitud del perfil de la plancha.

2011 Análisis Numérico Luis Ojeda P.184

Economía - Financiera

93. Una agencia de publicidad ofrece a sus clientes una valla cuya altura es variable y viene dada por la función $f(x, y) = 1.ab + (y/3)$, si la base de la valla coincide con la trayectoria $g(t) = (3cos^3t, 3sen^3t, 0)$, $0 \le t \le \pi$, tal como se ilustra en la Figura. Determine cuánto debe cobrar mensualmente la agencia de publicidad, si se sabe que la valla va a estar ubicada de tal manera que puede ser observada por ambos lados, y el alquiler mensual de la valla publicitaria es de 4 Unidades de Plata/m².
Aplicando la definición se tiene que.



$$\int_C fds = \int_C \left(1.\text{ab} + \frac{y}{3}\right) ds$$

$$\int_C fds = \int_0^{\pi/2} \left(1.ab + \frac{3sin^3(t)}{3}\right) \sqrt{\left(-9cos^2(t)sin(t)\right)^2 + \left(9sin^2(t)cos(t)\right)^2}\, dt$$

Y a este resultado se multiplica por dos y se obtiene el área de la valla.

94. Un comerciante usa el siguiente modelo para describir la distribución de la proporción x del total de su mercadería que se vende semanalmente

$$f(x) = 20x^3(1 - x) \qquad 0 \le x \le 1$$

El área debajo de $f(x)$ representa entonces la probabilidad que venda una cantidad x en cualquier semana.
Se desea conocer la probabilidad que en una semana venda más de la mitad de su mercadería (debe integrar f entre 0.5 y 1). Use la Fórmula de Simpson con $m = 4$

2011 Análisis Numérico Luis Ojeda-P182

95. Una empresa está vendiendo una licencia para manejo de un nuevo punto de venta. La experiencia indica que dentro de t años, la licencia generará utilidades según $f(t) = 14000 + 490t$ dólares por año. Si la tasa de interés r permanece fija durante los próximos n años, entonces el valor presente de la licencia se puede calcular con:

$$v = \int_o^n f(t)e^{-r*t}dt$$

Calcule V si $n = 5$ años y $r = 0.07$. Use la fórmula de Simpson con $m = 4,6,8$. Con estos resultados estime el error de truncamiento.
2011_Analisis Numeriocs_Luis Ojeda P182

96. Una placa rectangular metálica de 0.45 m por 0.60 m pesa 5 Kg. Se necesita recortar este material para obtener una placa de forma elíptica, con eje mayor igual a 50 cm, y eje menor igual a 40 cm. Calcule el área de la elipse y determine el peso que tendrá esta placa. Para calcular el área de la elipse use la fórmula de Simpson con $m = 4$. Finalmente, estime cual es el error de truncamiento en el valor del área calculada.
2011_Analisis Numeriocs_Luis Ojeda P182

97. Se desea cubrir una cochera con techo ondulado comprimiendo una lámina plana de aluminio. La anchura de las placas, es perfecta para nuestro propósito, pero con la longitud no se tiene claro, por lo que se necesita algunos cálculos. Cada onda debe tener una altura de 2 cm sobre la línea central y un periodo de $4\pi \cong 12.566371$ cm. Calcula la longitud de placa que debo cortar para cubrir cada uno de esos periodos. Observa el comportamiento en la solución si se compara con el resultado (”exacto”), $L = 15.280791$ cm.

Varios

98. Un estudio ambiental indica que dentro de t años el nivel de monóxido de carbono Q cambiará a razón de:

$$0.1 * t + 0.1ba\ partículas/millón\ por\ año.$$

Si ahora ($t = 0$) hay $3.4ab$ partículas por millón, hallar la función $Q(t)$. Cuantas partículas por millón habrá al cabo de $12.ab$ años.

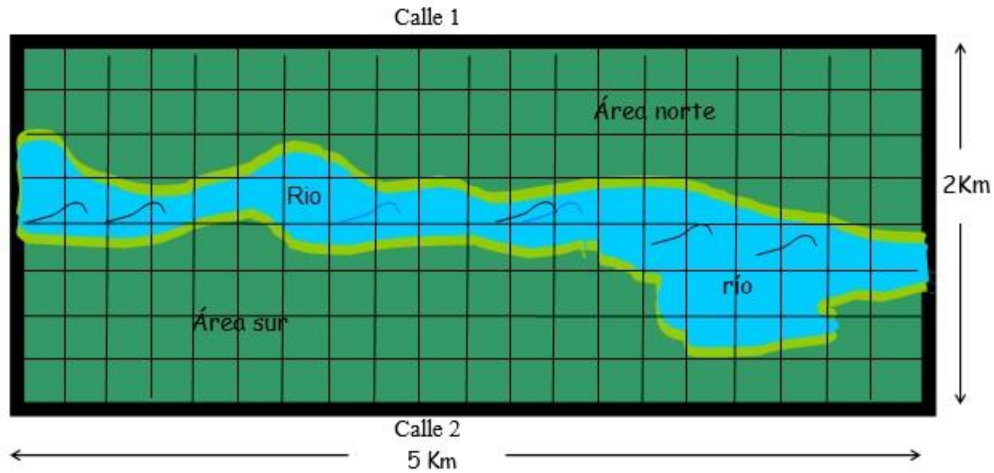
99. Para la siguiente tabla de valores:
Evalúe la integral:

$$\int_0^{1.2} f(x)dx$$

Para $h = 0.4$, $h = 0.2$, $h = 0.1$;

X	0.00	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40	0.45	0.50	0.55	0.60
F(x)	0.0000	0.9ab	5.75ab	10.ab	19.220	27.36a	30.23b	31.15a	32.56b	31.85a	31.40b	30.755	28.579
X	0.65	0.70	0.75	0.80	0.85	0.90	0.95	1.00	1.05	1.10	1.15	1.20	
F(x)	27.355	25.ab	22.042	21.64	19.875	18.385	16.35ab	12.25ab	10.75ab	8.45ab	6.2454	5.2565	

100. Un terreno está atravesado por un río y se desea calcular cuantas **hectáreas** cultivables tiene ese terreno, sabiendo que, a lo largo de la ribera del río, se dejan 5 metros libres de cada margen. El siguiente dibujo ilustra la situación:



Los datos aportados fueron diferentes mediciones realizadas desde la Calle 1 a la orilla norte del río (tabla 1) y desde la calle 2 a la orilla sur del río (tabla2).

El ancho del terreno (y Km) es la distancia desde un punto (x Km) de la calle a la marca de la ribera una distancia x de la calle. Esos valores se muestran en la siguiente tabla:

Tabla 1

(Km)	0.00	0.25	0,50	0.75	1.00	1.25	1,5	1.75	2.00	2.25	2,5	2.75	3.00	3.25	3,50	3.75	4.00	4.25	4,50	4.75	5.00
Y(Km)	0,54	0.7a	0,8b	0.7a	0,7b	0.6a	0,6b	0.6a	0,7b	0.8a	0,8b	0.7a	0,6b	0.7a	0,7b	0.8a	0,9b	0.9a	1,0b	1.0a	1.1b

Tabla 2

X(Km)	0.00	0.25	0.50	0.75	1.00	1.25	1.50	1.75	2.00	2.25	2.50	2.75	3.00	3.25	3.50	3.75	4.00	4.25	4.50	4.75	5.00
Y(Km)	0.8a	0.8b	0.8a	0.8b	0.9a	1.0b	0.5a	0.8b	0.8a	0.9b	0.8a	0.8b	0.7a	0.8b	0.7a	0.6b	0.2a	0.3b	0.3a	0.6b	0.7a

a. Calcular el área que ocupa el rio dentro del terreno.
b. Calcular el área de terreno del lado de la Calle 1 en los primeros 4 kilómetros.
c. Calcular el área total del lote sin el área del rio.

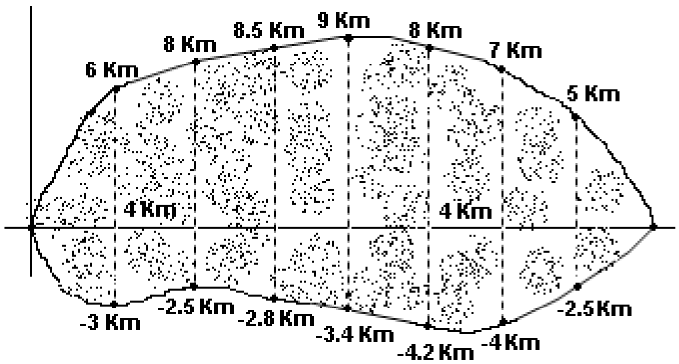
Calcule con 4, 5, 10 subáreas, por tres métodos de integración diferentes.

101. Un terreno está situado entre una valla rectilínea y un río. El ancho del terreno medido en metros a un punto x de la valla viene dada por:

X(m)	0	20	40	60	80	100	120
Y(m)	0	22	41	53	38	17	0

Grafica el área a estimar. Realiza los cálculos para estimar el área del terreno. Estima el valor final de la aproximación como el valor promedio.

102. En el siguiente gráfico se muestra delineada la zona de un derrame de petróleo ocurrido en cierta región. Las mediciones han sido obtenidas a distancias de 4 Km.



encuentre en forma aproximada el área total cubierta por el derrame de petróleo.

AJUSTE DE CURVAS

Mínimos Cuadrados

General

1. Con los siguientes datos ajuste al mejor polinomio

x	1	3	5	7	10	12	13	16	18	20
y	3	2	6	5	8	7	10	9	12	10

Calcule el error estándar de la aproximación y el coeficiente de determinación.
Grafique los datos y la línea de regresión. Repita el problema intercambiando las variables.

2. Con los siguientes datos ajuste al mejor polinomio

x	4	6	8	10	14	16	20	22	24	28	28	34	36	38
y	30	18	22	28	14	22	16	8	20	8	14	14	0	8

Calcúlese el error estándar de aproximación y el coeficiente de determinación.
Grafique los datos y la línea de regresión.

3. Ajustar los datos siguientes al mejor polinomio:

x	0	2	4	4	8	12	16	20	24	28	30	34
y	10	12	18	22	20	30	26	30	26	28	22	20

a. Una línea recta
b. Una parábola

Calcúlese los errores estándar y los coeficientes de determinación.
Grafique los datos, la línea recta y la parábola. Compare los resultados.

4. Dados los datos:

x	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
y	17.a	25.b	30.ab	33.ba	36.a	38.b	39.ab	40.ba	41.b	42.a

Usando regresión con mínimos cuadrados ajustar:
a. Una línea recta
b. Una parábola
Calcule los errores estándar y los coeficientes de determinación. Grafique y compare los resultados.

5. En unas tablas estadísticas se encontraron los siguientes valores tabulares para distribución normal estandarizada:

4. Z_c	5. 0.40	6. 0.41	7. 0.42	8. 0.43
9. $P(Z < Z_c)$	10. 0.6554a	11. 0.6591b	12. 0.6628ab	13. 0.6664ba

A partir de estos datos determinar a qué valor de Z_c, la probabilidad $P(Z < Z_c)$ es igual a 0.66

Agrícola – Forestal - Ambiental

6. La cantidad de madera en un bosque joven crece de la siguiente forma según las observaciones realizadas en un experimento controlado por la CNA. Después se pretende en un proyecto de inversión a 10 años predecir la cantidad de madera que obtendremos al final del periodo de 1 a 10 años:

Año	1	2	3	4	5	6	7	8
Cantidad de madera (m^3)	100.a	103.b	107.a	110.b	114.a	118.b	123.ab	130.ba

a. Realice una regresión lineal.
b. Realice una regresión polinomial de segundo grado.
c. Cuál es el mejor ajuste.
d. Cuál será la cantidad de madera aproximada en el año 10 si utilizas el mejor ajuste resultante en el inciso C

Calcule el coeficiente de correlación.

7. Las notas obtenidas por 10 alumnos de Matemáticas y Música son:

Alumno	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Matemáticas	6.b	4.a	8.b	5.b	3.a	7.a	5.b	10	5.a	4.b
Música	6.a	4.b	7.a	5.a	4.a	8.b	7.b	10	6.a	5.b

Se pide:

a. Calcular la covarianza, correlación y recta de regresión
b. ¿Cuál sería la nota esperada en Música de un alumno que haya obtenido 8.3 en Matemáticas así como el intervalo de confianza del 95%?

Economía - Financiera

8. Una teoría financiera sostiene que existe una relación directa entre el riesgo de una inversión y el rendimiento que promete. El riesgo de una acción se mide por medio de su valor X. A continuación, se presentan los rendimientos Y y los valores de X para 12 acciones sugeridas por una empresa de inversiones. ¿Confirman estos datos la teoría financiera de una relación directa?

$y(\%)$	5.4a	8.9a	2.3b	1.5b	3.7a	8.2b	5.3a	0.5b	1.3a	5.9b	6.8a	7.2b
x	1.5	1.9	1.0	0.5	1.5	1.8	1.3	-0.5	0.5	1.8	1.9	1.9

p^2, en el caso lineal, representa el % del cambio en y explicado por un cambio en x.

Química – Biología - Medicina

9. Según la ley de Boyle-Mariotte de los gases ideales, si una masa de gas se comprime o dilata a temperatura constante, el producto de la presión por el volumen permanece constante: $p * v = cte$.

Esta ley sólo es válida en condiciones ideales, pero en un problema real se verifica con mucha aproximación. Estimar la constante por el método de mínimos cuadrados para un gas del que se observaron los siguientes datos:

P(kg/cm)	0.1a	0.15b	0.20a	0.25ab
V(litros)	2.24	1.50	1.13	0.92

10. Las ventas de café de las cafeterías se supone que son función del número de camareros. Para distintas cafeterías se han obtenido los datos siguientes:

cafetería	camareros x	ventas de café y
1	0	508.1b
2	0	498.4b
3	1	568.2a
4	1	577.3b
5	2	651.7a
6	2	657.0b
7	4	755.3b
8	4	758.9a
9	5	787.6a
10	5	792.1b
11	6	841.4a
12	6	831.8a
13	7	854.7b
14	7	871.4b

El modelo que se supone que representa esta relación es:

$$y = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2$$

Determinar la validez del modelo.

11. Se realiza un experimento para investigar el efecto de un programa de entrenamiento sobre el tiempo que le toma a un estudiante universitario típico, correr los 100 metros planos. Nueve estudiantes se sometieron al programa. Después de dos semanas, se midió la reducción y del tiempo para correr los 100 metros planos a tres estudiantes. Después de cuatro semanas se hizo lo mismo para otros tres estudiantes. Después de cuatro semanas se hizo lo mismo para otros tres estudiantes y después de seis semanas de entrenamiento para los tres restantes. Los datos obtenidos son los siguientes:

Reducción del tiempo, y (segundos)	1.6, 8, 1.0	2.1, 1.6, 2.5	3.8, 2.7, 3.1
Semanas de entrenamiento, x	2	4	6

a. Encuentre la recta de mínimos cuadrados para estos datos.
b. Estime la reducción media del tiempo después de cuatro semanas de entrenamiento. Use un intervalo de confianza del 90%.
c. Supongamos que se emplean sólo 3 estudiantes en el experimento y que se mide la reducción del tiempo para cada estudiante al final de 2, 4 y 6 semanas. ¿Se cumplirían las suposiciones requeridas para el intervalo de confianza?

d. Explique la respuesta.

12. Se realiza un experimento para observar el efecto de un aumento en la temperatura sobre la potencia de un antibiótico. Tres porciones de 1 onza del antibiótico se almacenaron durante períodos de tiempo iguales, a cada una de las siguientes temperaturas: $30^o, 50^o, 70^o, 90^o$. Las potencias observadas a las temperaturas correspondientes fueron:

Potencia, y	38, 43, 29	32, 26, 33	19, 27, 23	14, 19, 21
Temperatura, x	30^o	50^o	70^o	90^o

a. Encuentre la recta de mínimos cuadrados apropiada para estos datos.
b. Represente los puntos y la recta, como verificación de sus cálculos.
c. Calcule S^2.

13. Sea $f(x) = e^x$, para $0 \leq x \leq 2$.

a. Aproxime $f(0.25)$ mediante la interpolación lineal con $x_0 = 0$ y $x_1 = 0.5$.
b. Aproxime $f(0.75)$ mediante la interpolación lineal con $x_0 = 0.5$ y $x_1 = 1$.
c. Aproxime $f(0.25)$ y $f(0.75)$ mediante el segundo polinomio interpolante con$x_0 = 0$, $x_1 = 1$.y $x_2 = 2$.
d. ¿Cuáles aproximaciones son mejores y por qué?

14. Los siguientes datos corresponden a dos tipos de analizadores del aliento, para los conductores sospechosos de encontrarse bajo la influencia del alcohol. Estos tipos se denominan "Analizador" y "V.S.". Los datos corresponden a las mediciones hechas por estos dos dispositivos en 15 personas.

Analizador - y	0.15	0.10	0.09	0.14	0.08	0.11	0.12	0.10	0.09	0.09	0.09	0.09	0.08	0.08	0.06
V. S. - x	0.15	0.08	0.07	0.14	0.07	0.07	0.09	0.08	0.08	0.07	0.08	0.09	0.06	0.07	0.05

a. Encuentre la recta de mínimos cuadrados que relaciona las mediciones del Analizador (y) con las del dispositivo V.S. (x).
b. Represente la recta y los puntos.
c. ¿Proporcionan los datos suficiente evidencia que indique que las mediciones de los dos dispositivos están relacionadas linealmente?
d. Supongamos que el aliento de una persona se analiza usando el dispositivo V.S. y que se obtiene el valor .01. Haga una predicción de la medición que se obtendría con el Analizador, usando un intervalo de predicción del 90%.

15. Algunas variedades de lombrices viven en la tierra y se alimentan de las raíces del césped y de las plantas de los jardines. Esta plaga, que es particularmente problemática en los climas cálidos, se puede combatir con la aplicación de pesticidas. Los siguientes datos corresponden al porcentaje de lombrices eliminadas para varias tasas de aplicación (kilos de ingrediente activo por cada 4.000 metros cuadrados).

Tasa de aplicación, x	2	3	4	5

Porcentaje eliminado, y 50, 56, 48 63, 69, 71 86, 82, 76 94, 99, 97

a. Calcule el coeficiente de correlación r, entre la tasa de aplicación (x) y el porcentaje (y).
b. Calcule el coeficiente de determinación r^2 e interprételo.
c. Ajuste una recta de mínimos cuadrados a los datos.
d. Supongamos que se desea estimar el porcentaje medio de lombrices eliminadas correspondiente a una aplicación de 4 kilos de pesticida por 4.000 metros cuadrados. ¿Satisfacen los datos las suposiciones requeridas por los intervalos de confianza?

16. La producción de soya importante fuente de proteínas, varía con el clima, con la cantidad de lluvia y con la producción de productos alternos. Los datos de la tabla siguiente muestran la producción anual en los Estados Unidos (en cientos de miles de toneladas) para los años 1960 y 1977.

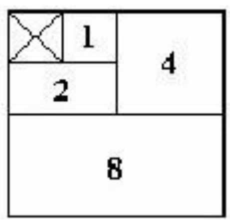
Año	x	Producción de Soya y
1960	0	9
1961	1	10
1962	2	11
1963	3	10
1964	4	11
1965	5	12
1966	6	13
1967	7	13
1968	8	14
1969	9	17
1970	10	18
1971	11	17
1972	12	16
1973	13	19
1974	14	16
1975	15	20
1976	16	18
1977	17	20

a. Ajuste una recta de mínimos cuadrados a estos datos.
b. Pronostique la producción de soya en los estados Unidos para el año 1978, usando un intervalo de predicción del 90%.
c. Obsérvese que se ha pronosticado un valor de y fuera del intervalo de valores de x usados para desarrollar la ecuación de predicción. ¿Cómo podría afectar esto la interpretación del intervalo de predicción?

Linealizables

17. El muestreo de áreas contiguas se utiliza en Ecología para contar el número de especies distintas de plantas que hay por área. El recuento se realiza de manera que cada siguiente área continua tiene el doble de extensión que la anterior y se empieza por un área de $1m^2$. Así, el modelo que relaciona el número de especies distintas y con el área $x(m^2)$ es $y = aln(x) + b$ donde el coeficiente *a* representará un índice de diversidad y el coeficiente *b* es el número de especies por área unidad. Calcular las constantes *a* y *b* para los siguientes datos:

$x(m^2)$	1	2	4	8	16	32	64
Y	2	4	7	11	16	19	21



Analizar también los modelos $y = ae^{bx}$ e $y = ax^b$ (exponencial y potencial) para ver si son adecuados.

Solución:

1. $\hat{y} = 4.9498 * In(x) + 1.1330 \quad p^2 = 0.9863$
2. $\hat{y} = 5.2595 * e^{0.028x} \quad p^2 = 0.5340$

$\hat{y} = 2.6852 * x^{0.5676} \qquad \rho^2 = 0.9325 \; \hat{y} = 2.6852 * x^{0.5676}$

Trazadores o Splines

18. Un spline cúbico natural S en [0,2] está definido por:
    $S_0(x) = 1 + 2x - x^3$ si $x \in [0,1]$
    $S_1(x) = a + b(x-1) + c(x-1)^2 + d(x-1)^3$ si $x \in [1,2]$
    Obtener $a, b, c,$ y d.

19. Obtener el Spline cúbico natural S para los datos:
    (0,0), (0.5,0.51060), (1.5, 0.72020) y (2,1.01502)

20. Un Spline cúbico sujeto S en [1,3] para la función f está definido por:
    $S_0(x) = 3(x-1) + 2(x-1)^2 - (x-1)^3$ si $x \in [1,2]$
    $S_1(x) = a + b(x-2) + c(x-2)^2 + d(x-2)^3$ si $x \in [2,3]$

    Dado que $f'(1) = f'(3)$, obtener $a, b, c\ y\ d$.

21. Suponga que la función siguiente es una función Spline cúbica en $[1,4]$:

$$s(x) = \begin{cases} \frac{1}{12}x^3 - \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{3}x^3 + {}^3\!/_2 & 1 \le x \le 2 \\ f(x) & 2 \le x \le 3 \\ -\frac{1}{12}x + \frac{7}{12} & 3 \le x \le 4 \end{cases}$$

    Encuentre $f(x)$
    Se extrae aleatoriamente x entre$[-1,1]$.
    a. Obténgase la correlación entre la variable x e $y = x^2$
    b. ¿Pueden ser dos variables aleatorias incorrelacionadas y al mismo tiempo dependientes?

22. Hallar un intervalo de confianza con coeficiente de confianza del 95% para la media m de una distribución $N(m, \sigma_0)$, donde σ_0 es conocido, en muestras de tamaño n.

23. Una muestra de tamaño 16 de un cierto tipo de transistores ha presentado una vida media de 735 horas. Se conoce la desviación típica $\sigma = 12$ horas. Se pide:

    a) Hallar un intervalo de confianza para la vida media poblacional m al 95%. Se supone normalidad.
    b) ¿Se puede aceptar que es $m = 750$ horas con confianza del 97.5%?

Agroindustrial

24. Se hace un envío de latas de conserva, de las que se afirma que el peso medio es de 1000gr. Examinada una muestra de 5 latas, se han obtenido los siguientes pesos: 995, 992, 1005, 998 y 1000. ¿Puede mantenerse la hipótesis de que $m = 1000$, con un nivel de confianza del 95%?. Hállese, además, un intervalo de confianza del 95% para m. (se supone normalidad)

25. Un metalúrgico ha realizado 4 determinaciones del punto de fusión del magnesio: 1269°, 1271°, 1263° y 1265°. Según un manual, el punto de fusión es 1260°. ¿Están de acuerdo los datos con el manual o debe aceptar que el punto de fusión es mayor? Tomar un 95% y un 99% de nivel de confianza.

26. De una muestra de tamaño 18 de una población normal, se ha obtenido la siguiente media y varianza muestral:

$\bar{x} = 26.82$ y $S^2 = 61.33$

Se pide:

a. Hallar un intervalo de confianza del 99% para la media poblacional.
b. ¿Podemos admitir que la varianza poblacional es $\sigma^2 = 50$? Tómese al 95%.

27. Las varianzas muestrales de dos poblaciones normales independientes son:

$S_1^2 = 70.2$ y $S_2^2 = 76.8$

Sabiendo que los tamaños de las muestras son 86 y 121, se pide:

a. Demostrar que puede admitirse que las varianzas poblacionales son iguales, con un nivel de confianza del 95%.
b. Hallar un intervalo de confianza del 90% para la varianza poblacional, que se supone común para las dos poblaciones.

28. Los errores aleatorios de dos aparatos de medida siguen la distribución $N(0, \sigma_1)$ y $N(0, \sigma_2)$. Se han detectado los siguientes errores:

Primer aparato	0.3	0.7	-1.1	2.0	1.7	-0.8	-0.5
Segundo aparato	1.6	-0.9	-2.8	3.1	4.2	-1.0	2.1

Se desea saber si el primer aparato posee mayor precisión que el segundo.

Agrícola - Ambiental - Forestal

29. Se realizó una prueba para determinar la relación entre el contenido de fósforo en una solución y la temperatura de cristalización. Los datos son los siguientes:

Cantidad de P (g/l)	Temperatura de cristalización $(°C)$
1.1	1.7
2.3	0.4
3.2	0.2
4.3	1.1
5.4	2.3
6.6	3.1
7.8	4.2
8.8	5.3

30. Se desarrolló un método analítico para el benzoilmetronidazol y desean saber si existe linealidad en el método. Se agrega una cantidad conocida de benzoilmetronidazol y se determina la cantidad de activo con el método analítico desarrollado. Se obtienen los siguientes resultados

Benzoilmetronidazol (mg)	Activo (mg)
0.5	0.510
0.7	0.687
1.0	1.000
1.3	1.330
1.5	1.510

31. Se obtuvieron los siguientes datos sobre la cantidad de bromuro de potasio que se puede disolver en 100 gramos de agua, a distintas temperaturas.

$°C$	0	10	20	30	40	50
g	52	60	64	73	76	81

32. Los siguientes datos representan el efecto del tiempo en la pérdida de hidrógeno en muestras de acero almacenadas a una temperatura de $20°C$.

Tiempo t (h)	Contenido de H perdido (ppm)
1	8
2	7
6	6
17	5
30	4

33. Se hicieron determinaciones de la cantidad (ppm) de un compuesto soluble presente a dos diferentes profundidades en cierto número de suelos.

12 plg.	20 plg.	12 plg.	20 plg.
24	20	66	84
84	103	31	30
13	16	43	62
13	20	19	26
48	86	7	21
61	36	50	73
112	53	72	83

34. Se realizó una prueba para determinar la relación entre la concentración de conservador en fase acuosa y la concentración en fase oleosa para la distribución de clorocrezol. Los resultados obtenidos son:

Conc. fase acuosa (g/l)	Conc. fase oleosa (g/l)
0.2	0.4

0.4	0.7
0.6	1.0
1.0	1.6
0.8	1.3
0.3	0.5
0.5	0.8
0.7	1.2

35. Una muestra de 12 hojas fue recogida aleatoriamente de un árbol y la longitud y el ancho de cada hoja fueron medidos con una precisión de un milímetro. Los datos se muestran a continuación

Hoja	Longitud	Ancho
1	35	55
2	21	44
3	25	46
4	35	60
5	26	55
6	40	57
7	35	64
8	40	68
9	25	51
10	42	61
11	23	46
12	25	44

36. Se ha establecido que la presión de vapor del Eugenol (mmHg) depende de la temperatura ($^\circ C$). La siguiente tabla muestra la relación entre estas dos variables.

T($^\circ C$)	78.4	108.1	123.0	138.7	155.8	167.3	182.2	204.7	228.3	253.5
F(mmHg)	1	5	10	20	40	60	100	200	400	760

37. Se realiza un experimento psicológico para estudiar la relación entre el tiempo necesario para que un ser humano tome una decisión y el número de alternativas que se le presentan. La situación presentada a los participantes requiere la clasificación de un objeto en una de dos o más categorías, similar a la situación que se encontraría al clasificar un producto de acuerdo con su calidad (de primera, segunda, etc.). Cinco individuos clasificaron un artículo en dos categorías posibles. Otros cinco clasificaron un artículo en 3 categorías posibles y otros cinco en 4 categorías posibles. A cada uno de los 15 participantes se le tomó el tiempo necesario para llegar a una decisión.

Tiempo de reacción y (seg)	1, 3, 3, 2, 4	2, 4, 3, 4, 5	5, 6, 5, 7, 4
Número de alternativas, x	2	3	4

a. Encuentre la recta de mínimos cuadrados apropiada para estos datos.
b. Represente los puntos y la recta para verificar sus cálculos.

c. Calcule S^2 .

38. Los siguientes datos codificados representan la producción, y, de un compuesto químico para distintos niveles de la temperatura, x :

x	- 2	- 1	0	1	2
y	4	3	3	2	1

a. Calcule la recta de mínimos cuadrados para estos datos.
b. Para verificar los cálculos de a), represente los puntos (x, y) y la recta ajustada $\hat{y}$.
c. Calcule SCE y s para estos datos.
d. ¿Presentan los datos suficiente evidencia que indique que hay una relación lineal entre y y x? Use $\alpha = .05$
e. Estime el verdadero valor de β_1 usando un intervalo de confianza del 95%.
f. Haga una predicción de un valor particular de y para $x = 1$ usando un intervalo de predicción del 90%.
g. Si se tuviera que estimar el valor esperado de y para $x = 1$, ¿sería la cota del error mayor o menor? (Asuma que el coeficiente de confianza es 0.90).
h. Calcule el coeficiente de correlación.
i. ¿En qué porcentaje se reduce la suma de cuadrados de error al usar el predictor lineal $\hat{y}$.en lugar de $\bar{y}$.

39. Suponga que los siguientes datos corresponden a pacientes de enfisema: el número de años que el paciente ha fumado (x) y la evaluación subjetiva del médico en relación con el daño sufrido por los pulmones (y). La última variable se mide en una escala de 0 a 100. Las observaciones correspondientes a 10 pacientes son las siguientes:

Paciente	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Años que ha fumado, x	25	36	22	15	48	39	42	31	28	33
Daño en pulmones, y	55	60	50	30	75	70	70	55	30	35

a. Calcule el coeficiente de correlación r entre el número de años que ha fumado (x) y el daño a los pulmones (y).
b. Calcule el coeficiente de determinación r^2. Interprete r^2
c. Ajuste una recta de mínimos cuadrados a los datos. Represente la recta y los puntos. Compare la gráfica con la recta y los valores de r y r^2 calculados.

40. Se han medido los siguientes valores de tensión (V) e intensidad (I) en los bordes de la resistencia en un circuito eléctrico

$I(mA)$	25.3443	27.1937	28.3841	31.5963	32.6162	35.4612	35.8144	37.1252
$V(V)$	25.9544	27.5767	29.7065	31.7134	33.8900	35.3157	37.2115	39.0125

Con objeto de calcular de forma aproximada el valor de dicha resistencia eléctrica R a través de la ley de Ohm $(V = I * R)$ y de un ajuste lineal de los datos. Se pide:

a. Realizar una representación gráfica XY de la nube de puntos (I, V),
b. Calcular un ajuste lineal $V = b * I + a$ de dicha nube mediante mínimos cuadrados. La pendiente b de dicha recta constituye una aproximación del valor de la resistencia R. Observe que, si se han realizado las medidas con precisión, el valor del término independiente a debe ser próximo a0.
c. Representar gráficamente la recta que se acaba de obtener, **junto** con la nube de puntos del apartado 1. Para evaluar la recta,
d. Calcular la varianza S del ajuste y el error de la pendiente de la recta SR:

$$S = \sqrt{\frac{\sum_{i-1}^{N}(V_i - I_i * b - a)^2}{N-2}}$$

$$SR = \frac{S}{\sqrt{\sum_{i-1}^{N}(I - \bar{I})^2}}$$

Como siempre, preste especial atención al significado de los operadores.

Este es el último ejercicio de MATLAB como herramienta de cálculo y representación. Ahora puedes pasar a los de programación básica

41. Repetir el problema anterior suponiendo un modelo en el que no hay término independiente, es decir: $y = \beta_1 x + \beta_2 x^2$

42. Para las funciones dadas $f(x)$, sean $x_0 = 0, x_1 = 0.6, x_2 = 0.9$. Construya polinomios de interpolación de grados uno y dos a lo máximo para aproximar $f(0.45)$, y calcule el error real.

    a. $f(x) = \cos(x)$ b. $f(x) = \sqrt{1+5}$
    c. $f(x) = 1n(x+1)$ d. $f(x) = \tan(x)$

43. Aplique el teorema referente al error en la interpolación para calcular la cota de error en las aproximaciones del ejercicio 1.

44. Sean $f(x) = \sqrt{x - x^2}$ y $P_2(x)$ el polinomio interpolante en $x_0 = 0, x_1\ y\ x_2 = 1$. Calcule el valor más grande de x_1 en $(0,1)$ para el cual $f(0.5) - P_2(0.5) = -0.25$.

45. Aplica el método de Neville para aproximar $\sqrt{3}$

46. Con los valores $x_0 = -2,\ x_1 = -1,\ x_2 = 0,\ x_3 = 1\ \ y\ x_4 = 2$, y la función $f(x) = 3^x$, Calcula la cota de error

47. Con los valores $x_0 = 0,\ x_1 = 1,\ x_2 = 2,\ x_3 = 4\ \ y\ x_4 = 5$, y la función $f(x) = \sqrt{x}$, Calcula la cota de error

48. Escribe en pseudocódigo el algoritmo para calcular el polinomio de interpolación de Lagrange que pasa por $n+1$ puntos.

49. Use la fórmula de diferencias divididas interpolantes de Newton para construir polinomios interpolantes de grado uno, dos y tres con los siguientes datos. Use cada uno de los polinomios para aproximar el valor especificado.

    a. $f(8.4)$ si $f(8.1) = 16.94410, f(8.3) = 17.56492$, $f(8.6) = 18.50515$, $f(8.7) = 18.82091$
    b. $f(0.9)$ si $f(0.6) = -0.17694460$, $f(0.7) = 0.01375227$, $f(0.8) = 0.22363362$, $f(1.0) = 0.65809197$

50. La velocidad ascendente de un cohete está dada como una función cuadrática de tiempo.
    a. Determinar la velocidad en $t = 16$ segundos.
    b. Determinar la aceleración en $t = 16$ segundos.
    c. Encontrar la distancia recorrida entre $t = 11$ y $t = 16$ segundos.

Teniendo en cuenta la siguiente información.

t (Seg)	0	10	15	20	22.5	30
V(t) Mt/Seg	0	227.ba	362.ba	517.ba	602.ab	901.ab

Fuente: 2010_aplicaciones_Splines_Fisica

ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS

Ejercicios de aplicación a la ingeniera

Física

1. En una columna rectangular con base cuadrada de un metro de lado, la densidad del aire ρ (en kilogramo/metro) depende de la altura h y está dada por la fórmula:

$$\rho(h) = \frac{1.28}{h^2 + 1}$$

Calcular la masa de la columna de aire de $10.ab$ metros de altura, puedes utilizar la siguiente integral

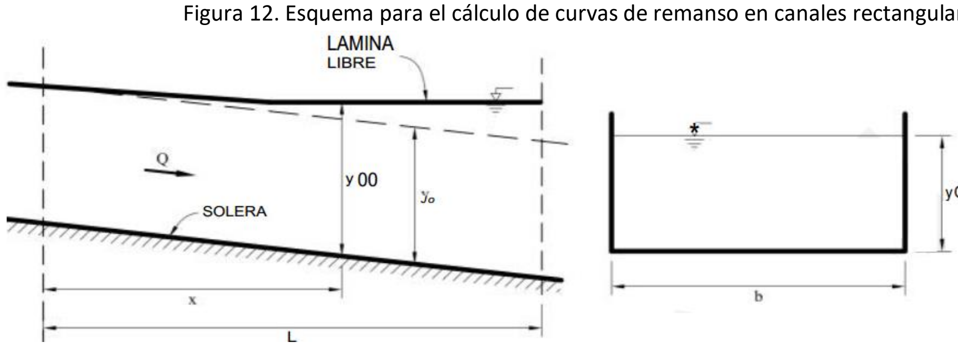
$$\int f(h)dh = \int \frac{1.28}{h^2 + 1} dh$$

y la fórmula para integrar la expresión anterior es:

$$\int \frac{du}{a^2 + u^2} = \frac{1}{a} arctan\left(\frac{u}{a}\right) + C$$

2. Cálculo de curvas de remanso en canales rectangulares: La descripción del perfil adoptado por la lámina de agua en un canal, en condiciones de flujo estacionario gradualmente variado, es un problema clásico de ingeniería hidráulica. Desde un punto de vista puramente cualitativo, el perfil puede esbozarse en base a unas curvas teóricas tipo (curvas de remanso) que dependen de la pendiente del canal y del régimen en que se desarrolla el flujo (subcrítico o supercrítico). Sin embargo, en la práctica ingenieril interesa, además, el cálculo efectivo de dicho perfil.

Figura 12. Esquema para el cálculo de curvas de remanso en canales rectangulares



Por regla general, en el estudio del problema planteado suelen admitirse las siguientes hipótesis simplificativas: (1) el canal es prismático, (2) la pendiente de la solera es pequeña (típicamente, inferior a un 5 %), (3) no se producen aportes ni pérdidas laterales de caudal a lo largo de todo el tramo de canal bajo estudio, (4) la distribución de presiones en una sección normal del canal es aproximadamente la hidrostática. En las condiciones anteriores, puede plantearse la ecuación de gobierno de este problema.

Ecuación 44

$$\frac{dy}{dx} = \frac{I_o - I_f(y)}{1 - Fr^2(y)} \quad x\epsilon[0, L]$$

Donde y es el calado, x es la distancia a lo largo del canal, L es la longitud total del canal y I_0 es la pendiente de la solera (Figura 12). $I_f(y)$ es la pérdida de carga por unidad de longitud que, por ejemplo, puede estimarse mediante fórmula de Chézy como:

Ecuación 45. Fórmula de chezy

$$I_f(y) = \frac{Q^2}{C^2 A^2(y) R_h(y)},$$

Donde C es la denominada constante de Chézy, que tiene en cuenta la rugosidad del material de revestimiento del canal, y $R_h(y)$ es el radio hidráulico, que es simplemente el cociente entre el área mojada $A(y)$ y el perímetro mojado $P(y)$ de la sección para un calado y concreto. En el caso de un canal Rectangular.

$$A(y) = by;\ P(y) = b + 2y;\ Rh = \frac{by}{b + 2y}$$

$Fr(y)$ es el denominado número de Froude, que se define según

Ecuación 46. Número de Froude al cuadrado

$$Fr^2(y) = \frac{\alpha B(y) Q^2}{g A^3(y)}$$

Donde Q es el caudal constante transportado por el canal, g es la aceleración de la gravedad, α es el coeficiente de Coriolis, $B(y)$ es el ancho hidráulico de la sección, $B(y) = b$ en el caso de canal rectangular.

Teniendo en cuenta las Ecuación 46 y Ecuación 45, la ecuación de las curvas de remanso (*Ecuación 44*) es, en general, una EDO no lineal de primer orden. Esta EDO debe ir acompañada de una condición inicial que especifique el calado en una sección concreta del canal. Desde un punto de vista hidráulico, esta condición inicial depende de si el flujo se desarrolla en régimen subcrítico (también denominado lento) o supercrítico (régimen rápido). En el caso de flujo subcrítico, la condición inicial requerida es, de forma natural, una condición aguas abajo.

$$y(L) = y_d$$

donde $y_d$es el calado en la sección última del canal, mientras que, para el flujo supercrítico, la condición inicial es aguas arriba,

$$y(0) = y_u$$

Donde $y_u$es el calado en la sección de entrada del canal.

Se considera el método de Euler para el cálculo de curvas de remanso planteado. Se resuelve la EDO de primer orden (*Ecuación 44*) con ancho del canal $b = 75m$, longitud total $L = 800m$, pendiente media $I_0 = 5 * 10^{-4}$, con constante de Chézy $C = 80m^{1/2}s^{-1}$ y caudal $Q = 500m^3/s$. El calado aguas arriba del canal es $y_0 = 3.5m$. De acuerdo con la práctica habitual, se considera que el coeficiente de Coriolis es $\alpha = 1$. Calcule el valor del calado al final del canal obtenido con distintos valores del número de subintervalos m, así como el error comparando con una solución de referencia $y(800) \cong 3.802396103$.

3. Sea $v(t)$ la velocidad de vuelo, en Km/h, de un ave, en función del tiempo t. Si $v(t)$ cumple la ecuación diferencial:

$$2 * k * v' + 2 * t * v = k * t^3 * v^2$$

Cuál será la velocidad al cabo de $3.ab\ horas$, si la velocidad inicial es de $4.ba\ Km/h$, y $k = 0.5a$.

Fuente: Modelos Continuos

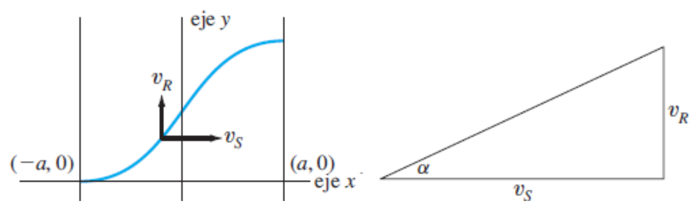
4. Si se supone que el arrastre es proporcional al cuadrado de la velocidad, se puede modelar la velocidad de un objeto que cae, como un paracaidista, por medio de la ecuación diferencial siguiente:

$$\frac{dv}{dt} = g - \frac{c_d}{m} v^2$$

Donde v es la velocidad en m/s, t es el tiempo en sg, g es la aceleración de la gravedad ($g = 9.81\ m/s^2$), c_d = coeficiente de arrastre de segundo orden en kg/mt, y $m = masa\ (kg)$. Resuelva para la velocidad y distancia que recorre un objeto de 9a.b kg con coeficiente de arrastre de $c_d = 0.225\ kg/m$. Si la altura inicial es de 0.9ab km, determine en qué momento choca con el suelo.

Fuente: Chapra Canale 5Ed p764

5. La figura muestra un río de $w = 2 * a$ de ancho que fluye hacia el norte. Las rectas $x = \pm an$ representan las orillas del río y el eje y su centro. Supóngase que la velocidad v_R a la cual el agua fluye se incrementa conforme se acerca al centro del río, y en realidad está dada en términos de la distancia x desde el centro por:



Ecuación 47

$$v_R = v_0 \left(1 - \frac{x^2}{an^2}\right)$$

Se puede utilizar la Ecuación 47 para verificar que el agua fluye más rápido en el centro, donde $v_R = v_0$, y que $v_R = 0$ en cada orilla del río. Supóngase que un nadador inicia en el punto $(-an, 0)$ de la orilla oeste y nada hacia el este (en relación con el agua) con una velocidad constante v_S. Como se indica en la figura, su vector de velocidad (relativo al cauce del río) tiene una componente horizontal $v_S\ y$ una componente vertical v_R. En consecuencia, el ángulo de dirección a del nadador está dado por

$$\tan(\alpha) = \frac{v_R}{v_S}$$

Sustituyendo en (Ecuación 47), debido a que $tan(\alpha) = dy/dx$, se obtiene la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v_0}{v_S} * \left(1 - \frac{x^2}{an^2}\right)$$

para la trayectoria del nadador $y = y(x)$ conforme éste cruza el río. Supóngase que el río tiene $1.ab$ km de ancho y la velocidad en su parte central $v_0 = 9km/h$. Si la velocidad del nadador es $v_S = 3.ab\ km/h$ Determinar para el nadador cuanto es llevado por la corriente abajo por km nadado.

2009 Henry Edwards. P16

6. Supóngase que el río del ejercicio anterior tiene $0.ab$ km de ancho y la velocidad en su parte central $v_0 = 9.ba\ km/h$. Si la velocidad del nadador es $v_S = 3.ba\ km/h$, pero la velocidad del río está dada por la función de cuarto grado así:

$$v_R = v_0 \left(1 - \frac{x^4}{an^4}\right)$$

Encuentre ahora a qué distancia aguas abajo es llevado el nadador al cruzar el río.

7. Suponga que un proyectil se lanza hacia arriba desde la superficie de la tierra. Se acepta que la única fuerza que actúa sobre el objeto es la fuerza de la gravedad, hacia abajo. En estas condiciones, se usa un balance de fuerza para obtener.

$$\frac{dv}{dt} = -g(0)\frac{R^2}{(R+x)^2}$$

donde v=velocidad hacia arriba (m/s), t=tiempo (s), x=altitud (m) medida hacia arriba a partir de la superficie terrestre, g(0) es la aceleración gravitacional a la superficie terrestre ($\approx 9.81\ m/s^2$), y R=radio de la tierra ($\approx 6.37 \times 10^6$ m). Como $dx/dt = v$, use el un método para determinar la altura máxima que se obtendría si $v(t=0) = 14ab$ m/s.

Fuente: Chapra canale 5Ed p766

8. Un proyectil de masa $m = 0.11\ kg$ se lanza verticalmente hacia arriba con una velocidad inicial $v_0 = 80\ m/s$ y se va frenando debido a la fuerza de gravedad $Fg =- mg$ y a la resistencia del aire $F_r = -kv^2$, donde $g = 9.8\ m/s$ y $k = 0.002\ kg/m$. La ecuación diferencial para la velocidad v está dada por:

$$mv' = -mg - kv^2$$

Encuentre la velocidad del proyectil a diferentes tiempos en su ascenso y el tiempo que tarda en llegar a su altura máxima.

2014 Métodos numéricos aplicados a la ing. Nieves P593

9. Se deja caer desde el reposo un objeto de masa m en un medio que presenta una resistencia proporcional a v, la magnitud de la velocidad instantánea del objeto. Si se supone que la fuerza gravitacional es constante, determinar la posición y la velocidad del objeto en cualquier instante t. El peso mg del objeto actúa entonces en la dirección hacia abajo (positiva), pero la resistencia $k|v|$, en donde k es una constante positiva, actúa para impedir el movimiento. Si v > 0, la resistencia es en la dirección hacia arriba (negativa) y, por tanto, se expresa por $-kv$. Si v <0, la resistencia actúa hacia abajo y todavía se expresa por $-kv$. Por tanto, en todos los casos es posible escribir la ley de Newton como:

$$m\frac{dv}{dt} = mg - kv$$

O bien,

Ecuación 48

$$\frac{dv}{dt} + \frac{k}{m}v = g$$

La ecuación anterior es una ecuación lineal de primer orden y tiene el factor integrante e kt/m. La solución es:

Ecuación 49

$$v = \frac{mg}{k} + c_1 e^{-\frac{kt}{m}}$$

La condición inicial $v(0) = 0$ requiere que $c1 = -mg/k$; por tanto

Ecuación 50

$$v = \frac{mg}{k}\left(1 - e^{-\frac{kt}{m}}\right)$$

Para obtener la posición x del cuerpo, en la Ecuación 50 se sustituye v por dx/dt; al integrar y aplicar la segunda condición inicial $x(0) = 0$ da;

Ecuación 51

$$x = \frac{mg}{k}t - \frac{m^2 g}{k^2}\left(1 - e^{-\frac{kt}{m}}\right)$$

La posición y la velocidad del cuerpo en cualquier instante t quedan dadas por las ecuaciones Ecuación 50 y Ecuación 51, respectivamente. Vale la pena hacer notar que cuando t→∞ en la Ecuación 49, la velocidad tiende al valor límite

$$v_1 = mg/k$$

La velocidad límite también puede obtenerse directamente a partir de la ecuación diferencial (**Ecuación 48**) al hacer dv/dt = 0 y luego despejar v en la **Ecuación 48**. La velocidad límite vl no depende de las condiciones iniciales, sino sólo de la masa del objeto y del coeficiente de resistencia del medio. Dada vl o k, la ecuación (10) proporciona una fórmula para calcular la otra. Cuando k tiende a cero (es decir, que la resistencia disminuye), la velocidad límite aumenta indefinidamente.

Fuente: https://repositorio.unicordoba.edu.co/bitstream/handle/ucordoba/650/Modulo%20de%20Ecuaciones%20Diferenciales.pdf?sequence=1&isAllowed=y

10. Al abrir su paracaídas un paracaidista está cayendo con una velocidad de $176.ab\ ft/s$, si la fuerza de resistencia del aire es $W * v^2/256\ Ib$, donde W es el peso total del hombre y del paracaídas y v la velocidad con que va cayendo, hallar la velocidad en cualquier tiempo después de abierto el paracaídas. El diagrama de cuerpo libre es

De la segunda ley de Newton, usando que $W — m * g$ y $g = 32\ ft/s^2$, se sigue que

$$m * \frac{dv}{dt} = F_{total}$$

$$= W - F_r = W - \frac{W * v^2}{256}$$

$$= \frac{(256 - v^2) * m * g}{256} = \frac{32 * m * (256 - v^2)}{256} = \frac{m * (256 - v^2)}{8}$$

o equivalentemente

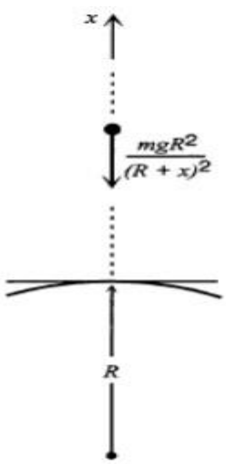
Ecuación 52

$$\frac{dv}{dt} = \frac{256 - v^2}{8}$$

La Ecuación 52 diferencial es separable, resolviéndola y usando la condición inicial $v(0) = 176.ab$

2004 Edo Jose Ventura P93

11. Desde la superficie de la Tierra se proyecta hacia arriba un cuerpo de masa constante m con una velocidad inicial v_0. Si se supone que no hay resistencia del aire, pero se toma en cuenta la variación del campo gravitacional terrestre con la altitud, encontrar una expresión para la velocidad durante el movimiento subsecuente. Encontrar también la velocidad inicial necesaria para que el cuerpo alcance una altitud máxima dada ξ, por encima de la superficie terrestre y la menor velocidad inicial para que el cuerpo no regrese a la Tierra; esta última velocidad es la velocidad de escape. Tome el eje x positivo hacia arriba, con el origen en la superficie de la Tierra; ver la Figura 13. El peso del cuerpo actúa hacia abajo y está dado por:



Ecuación 53

$$w(x) = -\frac{mgR^2}{(R+x)^2}$$

En donde el signo negativo significa que $w(x)$ está dirigido en la dirección x negativa. En virtud de que no existen otras fuerzas que actúen sobre el cuerpo, la ecuación del movimiento es:

Ecuación 54

$$m\frac{dv}{dt} = -\frac{mgR^2}{(R+x)^2}$$

Figura 13

Y la condición inicial es:

$$v(0) = v_0$$

Dado que el segundo miembro de la Ecuación 53 sólo depende de x, es conveniente considerar a x, en vez de t, como la variable independiente. Esto requiere que se exprese dv/dt en términos de dv/dx por la regla de la cadena; de donde

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt} = v\frac{dv}{dx'}$$

Y la Ecuación 54 se reemplaza por:

$$v\frac{dv}{dx} = -\frac{gR^2}{(R+x)^2}$$

Al separar las variables e integrar se obtiene:

Ecuación 55

$$\frac{v^2}{2} = -\frac{gR^2}{R+x} + c$$

Como $x = 0$ cuando $t = 0$, entonces la condición inicial en $t = 0$ puede sustituirse por la condición de que $v = v_0$ cuando x=0. De donde, $c = (r_0^2/2) - gR$ y

Ecuación 56

$$v = \pm\sqrt{v_0^2 - 2gR + \frac{2gR^2}{R+x}}$$

Observe que la Ecuación 56 da la velocidad como una función de la altitud, en vez de como una función del tiempo. Debe elegirse el signo positivo si el cuerpo está ascendiendo y el negativo si el cuerpo está cayendo de regreso a la Tierra.

Para determinar la altitud máxima ξ que el cuerpo alcanza, se hace y = 0 y x = ξ en la Ecuación 56 y luego se despeja ξ, con lo que se obtiene:

Ecuación 57

$$\xi = \frac{v_0^2 R}{2gR - v_0^2}$$

Al despejar v_0 en la Ecuación 57 se encuentra la velocidad inicial requerida para elevar el cuerpo hasta la altitud ξ; a saber:

$$v_0 = \sqrt{2gR\frac{\xi}{R+\xi}}$$

Entonces se encuentra la velocidad de escape v_e al hacer que $\xi \to \infty$. Por consiguiente:

$$v_e = \sqrt{2gR}$$

El valor numérico de v_e es aproximadamente de 6.9 $millas/s$ o bien, 11.1 km/s.

Fuente: https://repositorio.unicordoba.edu.co/bitstream/handle/ucordoba/650/Modulo%20de%20Ecuaciones%20Diferenciales.pdf?sequence=1&isAllowed=y

12. Una bola de masa de $m = 0.25ab\ kg$ se lanza hacia arriba con una velocidad inicial de $v_0 = 20.ba\ m/s$ desde el techo de un edificio que tiene 30.ab m de altura. Desprecie la resistencia del aire.
    a. Encuentre la altura máxima que alcanza la bola por arriba del piso.
    b. Si se supone que en su trayecto hacia abajo la bola no cae en el edificio, halle el tiempo que transcurre hasta que choca contra el piso.

    Fuente: 2021_05_31_Modulo de ecuaciones Diferenciales

13. Suponga que las condiciones son como las del problema anterior, excepto en que existe una fuerza de $|v|/30$ debido a la resistencia del aire, en donde v está dada en metros por segundo.
    a. Encuentre la altura máxima que alcanza la bola por arriba del piso.
    b. Encuentre el tiempo que transcurre hasta que la bola choca contra el piso.

    Fuente: 2021_05_31_Modulo de ecuaciones Diferenciales

14. Un cuerpo de masa constante m=35.ab kg se proyecta verticalmente hacia arriba con una velocidad inicial $v_0 = 10.ab\ m/s$. Si se supone que la atracción gravitacional de la Tierra es constante, y se desprecian todas las demás fuerzas que actúan sobre el cuerpo, halle
    a. La altura máxima alcanzada por el cuerpo.
    b. El tiempo en el que se alcanza la altura máxima.
    c. El tiempo en el que el cuerpo regresa a su punto de partida.

    Fuente: 2021_05_31_Modulo de ecuaciones Diferenciales

15. Un cuerpo se lanza verticalmente hacia arriba con una velocidad inicial v_0 en un medio que ofrece una resistencia proporcional a la magnitud de la velocidad. Encuentre la velocidad v como una función del tiempo t. Encuentre la velocidad límite v_l a la que se tiende después de mucho tiempo.

    Fuente: 2021_05_31_Modulo de ecuaciones Diferenciales

16. Un objeto de masa $m = 30.ab$ kg se deja caer desde el reposo en un medio que ofrece una resistencia proporcional a la magnitud de la velocidad. Halle el intervalo de tiempo que transcurre antes de que la velocidad del objeto alcance el 90% de su valor límite.

    Fuente: 2021_05_31_Modulo de ecuaciones Diferenciales

17. Un cuerpo de masa m cae en un medio que ofrece una resistencia proporcional a $|v|r$, en donde r es una constante positiva. Si se supone que la atracción gravitacional es constante, encuentre la velocidad límite del cuerpo.

18. Un problema relacionado con la caída del paracaidista, específicamente para la velocidad se basaba en la segunda ley de Newton, escrita en la forma:

Ecuación 58

$$\frac{dv}{dt} = g - \frac{c}{m} * v$$

Esta ecuación diferencial se puede resolver tanto de manera analítica como numérica usando un modelo numérico. Las soluciones se dan para valores de $g = 9.8\ m/s^2$, $c = 12.5$, $m = 68.1ab\ Kg$ y $v = 0$ en $t = 0$.

Calcular la velocidad con base en una descripción matemática más completa de la fuerza de arrastre causada por la resistencia del viento. Este modelo se obtiene como:

$$\frac{dv}{dt} = g - \frac{c}{m}\left[v + \alpha\left(\frac{v}{v_{max}}\right)^{\beta}\right]$$

donde $g, m\ y\ c$ son los valores anteriores, α , β y v_{max} son constantes empíricas, las cuales, en este caso, son iguales a 8.ab, 2.ba y 46, respectivamente

Chapra: Ed5. P731

19. Un paracaidista que pesa 180.ab lb (incluyendo el equipo) cae verticalmente desde una altura de 5000 $pies$, y abre su paracaídas después de 10.a segundos de caída libre. Suponga que la fuerza de la resistencia del aire es de 0.7b*$|v|$ cuando el paracaídas está cerrado y de 12.a*$|v|$ cuando el paracaídas está abierto, en donde la velocidad v se da en pies por segundo.
    a. Encuentre la velocidad del paracaidista al abrirse el paracaídas.
    b. Halle la distancia que cae antes de que se abra el paracaídas.
    c. ¿Cuál es la velocidad límite vl después de que se abre el paracaídas?
    d. Estime cuánto tiempo permanece el paracaidista en el aire después de que el paracaídas se abre.

Fuente: 2021_05_31_Modulo de ecuaciones Diferenciales

20. Un paracaidista de masa M kg salta desde un avión en $t = 0$. Consideremos que la velocidad vertical inicial del paracaidista es cero en $t = 0$ y que la caída es vertical. Si el arrastre aerodinámico está dado por $F_{aire} = cv^2$, donde c es una constante y v es la velocidad vertical (positiva hacia abajo), asuma $M = 70kg$, $c = 0.27kg/m$ y $h = 0.1$. Halle la velocidad del paracaidista para $t \leq 20s$

Por la primera ley de Newton, el equilibrio de fuerzas satisface

Ecuación 59

$$M\frac{dv(t)}{dt} = -F_{aire} + gM$$

donde v es la velocidad del paracaidista en m/s (positiva hacia abajo) y g es la aceleración debida a la gravedad, $9.8m/s^2$. La Ecuación 59 puede escribirse como:

$$\frac{dv(t)}{dt} = \frac{-c}{M^2}v^2 + g, v(0) = 0$$

2011 EDO Andrés Collante P11

21. La ecuación diferencial que rige la velocidad v de un cuerpo de masa m y área proyectada A que cae en un medio de densidad ρ es:

Ecuación 60

$$\frac{dv}{dt} = g - \frac{\rho * A * v^2}{2 * m}$$

El cuerpo adquiere su velocidad terminal de caída cuando no acelera más, es decir, la derivada de la velocidad es cero. De acuerdo a la Ecuación 60, la velocidad terminal teórica es:

Ecuación 61

$$v_{f,teórica} = \sqrt{\frac{2 * m * g}{\rho * A}}$$

Supóngase una moneda con $m = 0.01ab\ kg$ y $A = 3.1416 \times 10^{-4}\ m^2$, que cae de un edificio, entonces $\rho = 1kg/m^3$. La velocidad terminal según la Ecuación 61 es $v_{f,teórica} = 24.98ab\ m/s$. Resolver la Ecuación 60 por un modelo y compara la velocidad terminal así hallada con la velocidad terminal teórica.

métodos numéricos básicos para ingenieros Carlos de Castro P32

22. Un cuerpo de masa m se proyecta verticalmente hacia abajo con una velocidad inicial v_0 en un medio que presenta una resistencia proporcional a la raíz cuadrada de la magnitud de la velocidad. Encuentre la relación entre la velocidad v y el tiempo t.
Encuentre la velocidad límite.
Fuente: 2021_05_31_Modulo de ecuaciones Diferenciales

23. Un cuerpo de masa constante m se proyecta verticalmente hacia arriba con una velocidad inicial v_0 en un medio que presenta una resistencia $k|v|$, en donde k es una constante. Despréciense los cambios en la fuerza de la gravedad.
Encuentre la altura máxima xm que alcanza el cuerpo y el instante tm en el que alcanza esta altura máxima.
Fuente: 2021_05_31_Modulo de ecuaciones Diferenciales

24. Un cuerpo de masa $m = 35.ab\ kg$ se proyecta verticalmente hacia arriba con una velocidad inicial $v_0 = 10.ab$ m/s en un medio que ofrece una resistencia $k|v|$, en donde $k = 0.7ab$. Suponga que la atracción gravitacional de la Tierra es constante.
Determine la velocidad v del cuerpo en el instante $t = 25.ab\ seg$.

25. La vibracion de un resorte sometido a amortiguamiento y fuerza extrema esta modelada por el $P.V.I.$

$$\begin{cases} y'(t) + 3y'(t) + y(t) = t^2 - 18 \\ y(0) = 0;\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

Usar el metodo Runge –Kutta cuatro para calcular valores aproximados de la posicion $y(2)$, la velocidad $y'(2)$ y la aceleracion $y"(2)$ del pendulo (usar un tamaño de paso $h = 2$).

El movimiento de un pendulo esta dado por el $P.V.I.$

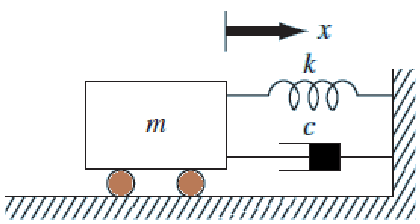
$$\begin{cases} \theta"(t) - \theta'(t) + \sin\theta\,(t) = 0 \\ \theta(0) = 1;\ \theta'(0) = 0 \end{cases}$$

Usar Runge-Kutta cuatro para calcular la posicion angular $\theta(0.1)$, la velocidad angular $\theta'(0.1)$ y la aceleracion angular $\theta'(0.1)$ del pendulo.(usar tamaño de paso $h = 0.1$).

26. Se encontró experimentalmente que un peso de 8N estira un resorte 8cm. Si el peso se lleva 5 cm por debajo de la posición de equilibrio y se suelta:
Determine la posición, velocidad, y aceleración del peso 0,6 s después de haberlo soltado
2008_Calculo Nuerico_Lucre cia Lucia chaillou P132

27. El movimiento de un sistema acoplado masa resorte (véase la figura P25.20) está descrito por la ecuación diferencial ordinaria que sigue:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + c\frac{dx}{dt} + kx = 0$$



donde x = desplazamiento desde la posición de equilibrio (m), t = tiempo (s), m = 20 kg masa, y c = coeficiente de amortiguamiento (N · s/m). El coeficiente de amortiguamiento c adopta tres valores, 5 (subamortiguado), 40 (amortiguamiento crítico), y 200 (sobreamortiguado). La constante del resorte es k = 20 N/m. La velocidad inicial es de cero y el desplazamiento inicial es x = 1 m. Resuelva esta ecuación con el uso de un método numérico durante el periodo de tiempo 0 ≤ t ≤ 15 s. Grafique el desplazamiento versus el tiempo para cada uno de los tres valores del coeficiente de amortiguamiento sobre la misma curva.
Fuente: Chapra canale 5Ed p766

28. La trayectoria de una particula que se mueve en el plano esta dada por la curva$(y_1(t), y_2(t))$, donde las funciones y_1, y_2 son la solucion del siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$y'_1(t) = -y_2(t)$$
$$y'_2(t) = y_1(t) - y_2(t)$$

Resolver este sistema en el intervalo $[0,20]$ con el metodo de Euler utilizando paso $h = 0.05$ y graficar la trayectoria de la particula, sabiendo que en tiempo $t = 0$ se encontraba en el punto $(1, -1)$. Realizar nueva,mente el grafico utilizando la solucion obtenida con el comando **ode45.**

Verificar que la funcion error, **erf,** puede ser definida como la solucion de la ecuacion diferencial.

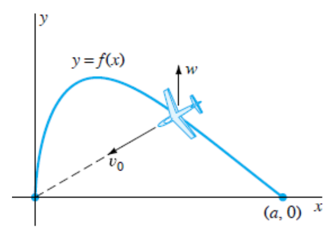
$$\begin{cases} y'(t) = \dfrac{2}{\sqrt{\pi}}e^{-t^2} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

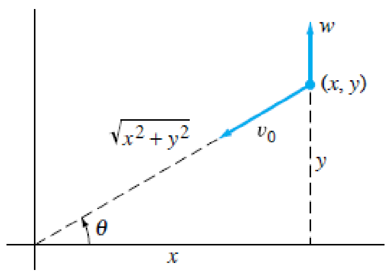
Utilizar un metodo de Runge-Kutta de orden 2 para hallar erf(t_i) con $t_i = 0, 0.05, 0.1, 0.15, \ldots, 1$. Comparar con los valores obtenidos directamente con el comando **erf** de **MatLab.**

Analice el orden del siguiente método:

$$y_n = y_{n-3} + \frac{3}{8}h(f_n + 3f_{n-1} + 3f_{n-2} + f_{n-3}$$

29. Supóngase que un avión parte del punto $(\alpha, 0)$ localizado al este de su destino esperado —un aeropuerto localizado en el origen $(0,0)$—. El avión viaja con velocidad constante v_0 relativa al viento, el cual está soplando del norte con velocidad constante w. Como se indica en la figura, se asume que el piloto del avión mantiene su dirección directamente hacia el origen.





La figura ayuda para deducir las componentes de la velocidad del avión relativas a la superficie terrestre. Ellas son

$$\frac{dx}{dt} = -v_0\cos(\theta) = -\frac{v_0 * x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\frac{dy}{dt} = -v_0\sin(\theta) + w = -\frac{v_0 * y}{\sqrt{x^2+y^2}} + w$$

Así, la trayectoria $y = f(x)$ del avión satisface la ecuación diferencial

Ecuación 62

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{1}{v_0 * x}\left(v_0 * y - w * \sqrt{x^2+y^2}\right)$$

Si se toma

$$k = \frac{w}{v_0}$$

Que es la relación entre la velocidad del viento y la velocidad del aire del avión; entonces la Ecuación 62 toma la forma homogénea

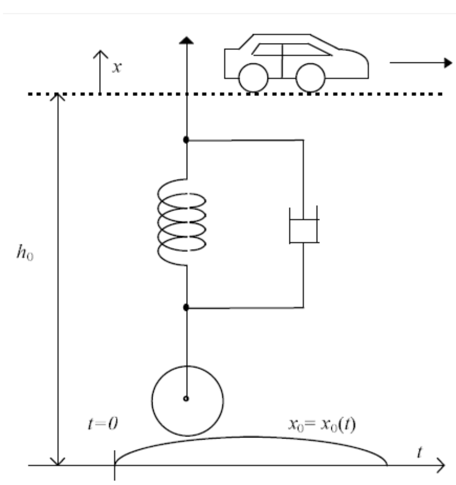
$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} - k\left[1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2\right]^{1/2}$$

Si $\alpha = 2ab\ mi, v0 = 5ba\ mi/h\ y\ w = 1ab\ mi/h$ entonces $k = w/v_0 = 1ab/5ba$, por lo que el avión logrará llegar al aeropuerto en (0,0). Se desea encontrar la cantidad máxima y para la cual el avión es desviado de su curso durante su viaje

2009 EDO y problemas con valores en frontera P.67

30. En el planteamiento del ejemplo anterior, suponga que $\alpha = 2ab\ mi, v0 = 4ba\ mi/h\ y\ w = 4a\ mi/h$. En este caso, ¿qué tan lejos llevó el viento al avión en la dirección norte?

31. Un vehiculo de masa M, suspendido por un amortiguador como el mostrado en la figura, se mueve a una velocidad constante. En el instante $t = 0$ el vehiculo tiene su centro de gravedad h_0 por encima del suelo y tiene velocidad vertical nula. Conforme pasa el tiempo, el desplazamiento vertical de la carretera por encima de la posicion de referencia (para $t = 0$) viene dado por la funcion $x_0(t)$.



Suponga que el muelle es lineal con una constante de Hooke k y que el amortiguador tiene un coeficiente de amortiguamento r que es una funcion no lineal de las velocidades relativas entre los dos extremos del amortiguador.

$$r = r_0\left(1 + c\left|\frac{dx}{dt} - \frac{dx_0}{dt}\right|\right).$$

Es facil mostrar que el desplazamiento del centro de gravedad del vehiculo $x(t)$ se rige por la solucion de la siguiente ecuacion diferencial de segundo orden.

$$M\frac{d^2x}{dt^2} = -k(x - x_0) - r\left(\frac{dx}{dt} - \frac{dx_0}{ddt}\right)$$

Con las condiciones iniciales

$$x(0) = 0, \qquad \frac{dx(0)}{dt} = 0$$

Considere que el contorno de la carretera tiene la forma

$$x_0(t) = A(1 - \cos w\ t),$$

Donde 2A es el máximo desplazamiento de la carretera respecto al nivel de referencia.

Note que el problema lineal $(c = 0)$ el sistema esta sub-amortiguado, críticamente amortiguado y sobre-amortiguado cuando:

$$\xi = \frac{T}{2\sqrt{k\,M}},$$

Es más pequeño, igual o mayor de la unidad, respectivamente.

Resuelva por modelo y numéricamente el problema para
$M = 10\ Kg\ s^2/cm, \quad A = 2cm \quad W = 10rad/s, \quad K = 640\ Kgf/cm$
Para un tiempo $t = 5$ segundos utilizando los métodos previamente desarrollados y compare los resultados entre sí.

Modelar la suspensión de un automóvil: Intervalo: $0 <= x < 2$

Condiciones iniciales: $y_c(0) = y_c'(0) = y_w(0) = y_w'(0) = 0$

a. Transformar el sistema EDOS dadas en un sistema de primer orden de EDOS.
b. Usando el método de $RK4$ resolver a) para el intervalo dado con valores diferentes de h.
c. Encuentre el valor de h que permitan soluciones hasta de $4\ c.d.e.$ para lo cual deberá construir un programa o función que grafique las soluciones para diferentes valores de h y que muestre los valores de $u(x), y_c\ e\ y_w$ hasta con $4\ c.d.e$ de comparación.

Compare los resultados usando ODE45 de Matlab y demuestre los gráficos correspondientes de $u(x), y_c\ e\ y_w$

32. Un proyectil de masa $m = 0.11\ Kg$ se lanza verticalmente hacia arriba desde el suelo con una velocidad inicial $v(0) = 8.ab\ m/seg$ y va frenando debido a la fuerza de la gravedad $F_g = -mg$ y a la resistencia del aire $F_r = -kv^2$, donde $g = 9.8m/sg2$ y $k = 0.002\ kg/m.$

a. Demuestre que la ecuación diferencial para la velocidad v(t) del proyectil en cada instante t es

$$mv'(t) = \begin{cases} -mg - k(v(t))^2, mientras\ el\ proyectil\ esta\ subiendo \\ -mg + k(v(t))^2, mientras\ el\ proyectil\ esta\ bajando \end{cases}$$

b. Demuestre que el problema de valor inicial

$$\begin{cases} v' = -g - \dfrac{k}{m} v(t)|v(t)|, \quad 0 \leq t \leq T \\ \qquad\qquad v(0) = 8 \end{cases}$$

Correspondiente a la situación descrita en el enunciado tiene solución única en el intervalo $[0, T]$, siendo T el tiempo que tarda el proyectil en caer.

a. Utilice el método de Runge Kutta de cuarto orden para estimar la velocidad del proyectil en cada uno de los instantes 0.1,0.2,…1.0 segundos, tomando tamaño de paso $h = 0.1$
b. Estime el tiempo para el cual el proyectil alcanza la altura máxima y empieza a caer.
c. Estime la altura máxima alcanzada por el proyectil.

33. El movimiento en un sistema masa–resorte amortiguado se describe con la siguiente ecuación diferencial ordinaria.

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + c\frac{dx}{dt} + kx = 0$$

Donde *x*=desplazamiento de la posición de equilibrio (m), t=tiempo(s), m=10kg de masa, c=el coeficiente de amortiguamiento $(N.s/m)$. El coeficiente de amortiguamiento toma tres valores:5(sub-amortiguamiento), 40 (amortiguamiento crítico) y 200 (sobre amortiguamiento).
La constante del resorte, $k = 40N/m$.
Intervalo: $0 \leq t \leq 15s$

Condiciones iniciales: La velocidad inicial es cero y el desplazamiento inicial es $x = 1m$.

a. Transformar el sistema de EDOS dadas en un sistema de primer orden de EDOS.
b. Usando el método de $RK - 4$ resolver a) para el intervalo dado con valores diferentes de h.
c. Grafique en la misma curva, para cada uno de los tres valores del coeficiente de amortiguamiento, desplazamiento vs tiempo.
d. Compare los resultados usando ODE45 del Matlab

34. Los nodos de vibración y las frecuencias de una viga delgada con constante de resorte que varía linealmente se rigen por la siguiente ecuación diferencial:

$$x'' + \left({}^{1}/_{t}\right)x' = xf(t) \qquad x(1) = 0; \quad x'(1) = 1$$

Los valores de $f(t)$ están tabulados:

t	1	1.5	2	2.5
$f(t)$	1	0.65	0.45	0.40

Hallar $x(t)$ para $t = 1.5, t = 2, t = 2.5$.

Las siguientes ecuaciones diferenciales describen un fenómeno físico:

$$m_1\frac{d^2x_1}{dt^2} = -k_1x_1 + k_2(x_2 - x_1)$$

$$m_2\frac{d^2x_2}{dt^2} = -k_2(x_2 - x_1)$$

$k_1 = 6 \quad k_2 = 4 \quad m_1 = 1 \quad m_2$=1

$$x'_1(0) = 1 \quad x'_2(0) = -1 \quad x_1(0) = 0 \quad x_2(0) = 0$$

Aproxime $x_1(0.3)$ y $x_2(0.3), para\ h = 0.1, 0.05$ y 0.01

Termodinámica – Transferencia de Calor

35. Un tubo largo de acero, de conductividad térmica k, tiene un radio interior r_i y un radio exterior r_e. La superficie interna se mantiene a Ti y la superficie exterior se mantiene a Te. Conductividad térmica $(\frac{W}{m}°K) = 50{,}2$ para el acero. Encuentre la temperatura en

$$r = (r_e - r_i) * 0.ab + r_i$$

Considera como $r_e = 0.2ab$ mt y $r_i = 0.1ba$ mt, $L = 12.ab$ mt
Es claro que las superficies isotérmicas son cilindros concéntricos con los cilindros dados. El área de tal superficie con radio r_i<r<r_e y longitud L es $2 * \pi * r * L$. La distancia dn en este caso es dr. Así, la ecuación puede escribirse como:

$$q = -k(2 * \pi * r * L)\frac{dT}{dr}$$

En esta ecuación, q es una constante. Las condiciones iniciales son: k , L, Te en re y Ti en r_i.

36. Un tanque cilíndrico de 5m de diámetro y 11 m de largo aislado con asbesto se carga con un líquido que está a 220oF y el cual se deja reposar durante cinco días. A partir de los datos de diseño del tanque, las propiedades térmicas y físicas del líquido, y el valor de la temperatura ambiente, se encuentra la ecuación

$$\frac{dT}{dt} = 0.615 + 0.175 * cos(\pi * t/12) - 0.0114T$$

que relaciona la temperatura T del líquido (en °C) con el tiempo t en horas. ¿Cuál es la temperatura final del líquido?

37. La temperatura inicial de una pieza metálica de masa de 0.1ab kg es de $25°C$. Dicha pieza se calienta internamente de forma eléctrica a razón de $q = 3000\ W$. La ecuación de la temperatura es:

$$\frac{dT}{dt} = \frac{1}{\rho * c * v}[q - \varepsilon * \sigma(T^4 - 298^4) - h_c A(T - 298)]$$

Calcule la temperatura hasta $t = 2$ Minutos utilizando un modelo EDO con $h = 0.1$ y $h = 1$.

Las constantes son las siguientes:

$\rho = 300\ kg/m^3$ (Densidad del metal)
$A = 0.25\ m^2$ (Área de la superficie del metal)
$c = 900\ J\ /\ kg\ K$ (Calor específico del metal)
$\sigma = 5.67\ X\ 10^{-8}\ w/m^2K^4$ (Constante de Stefan-Boltsmann)
$\varepsilon = 0.8$ (Emisividad del metal)
$\nu = 0.001\ m^3$ (Volumen del metal)
$hc = 30\ J/m^2K$ (coeficiente de transferencia de calor)
2011 EDO Andrés Collante P46

38. La tasa de enfriamiento de un cuerpo se expresa como:

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_a)$$

donde T=temperatura del cuerpo (°C), T_a =temperatura del medio circundante (°C) y k=constante de proporcionalidad (min^{-1}). Así, esta ecuación especifica que la tasa de enfriamiento es proporcional a la diferencia de la temperatura del cuerpo y del ambiente circundante. Si una bola de metal se calienta a 90ºC y se sumerge en agua que se mantiene a un valor constante de T_a=20.a °C, utilice un método numérico para calcular el tiempo que toma que la bola se enfríe a 40.b °C, si k=0.25ab min^{-1}.
Fuente: Chapra Ed5 p851

39. La tasa de flujo calorífico (conducción) entre dos puntos de un cilindro calentado por un extremo está dada por:

$$\frac{dQ}{dt} = \lambda A \frac{dT}{dx}$$

donde λ = una constante, A = área de la sección transversal del cilindro, Q=flujo calorífico, T=temperatura, t = tiempo, y x = distancia a partir del extremo calentado. Debido a que la ecuación involucra dos derivadas, la ecuación se simplificará haciendo que:

$$\frac{dT}{dx} = \frac{100(L - x)(20 - t)}{100 - xt}$$

donde L es la longitud de la barra. Combine las dos ecuaciones y calcule el flujo de calor de t=0 a 25.a s. La condición inicial es $Q(0) = 0$ y los parámetros son λ = 0.5b cal*cm/s, A=12 cm^2, L=20 cm, y x=2.5 cm. Grafique sus resultados.
Fuente: Chapra Ed5 p851

40. Una pieza metálica con una masa de 0.1 kg y 25 °C se calienta internamente de forma eléctrica a razón de q=3000W. La ecuación diferencial de la temperatura que se obtiene es:

$$\frac{dT}{dt} = 20 - t^2, si\ T(0) = 298$$

Calcule T(1) empleando un método con h=0.01
2011 EDO Andrés Collant P11

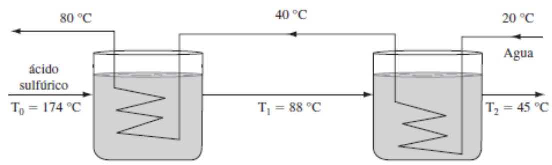
41. Un cubo de hielo esférico (una “esfera de hielo”) que mide 6 cm de diámetro es retirada de un congelador a 0°C y colocada en una pantalla de malla a temperatura ambiente Ta = 20ºC. ¿Cuál será el diámetro del cubo de hielo como función del tiempo fuera del congelador (si se supone que toda el agua que se funde gotea de inmediato a través de la pantalla)? El coeficiente de transferencia de calor h para una esfera en un cuarto tranquilo es alrededor de 3 W/(m2 · K). El flujo calorífico de la esfera de hielo al aire está dado por:

$$Flujo = \frac{q}{A} = h(T_a - T)$$

Donde q=calor y A=área superficial de la esfera. Use un método numérico para hacer el cálculo. Observe que el calor latente de la fusión es de 333 kJ/kg, y la densidad del hielo es aproximadamente de 0.917 kg/m^3.

42. Un trozo de carne de 2.5 kg que se encuentra a una temperatura de 10ºC, se lleva a un horno a $300\ °C$ a las 8 de la noche, después de 75 minutos se determinó mediante termocupla la temperatura de la carne que fue de $168°C$ ¿a qué hora se alcanzarán $212°C$, temperatura necesaria para que la carne este cocida término medio? Resuelva analíticamente y por los métodos de la serie de Taylor, Euler, Heun y Runge-Kutta de 4º orden.
Calculo numérico_Lucrecia lucia Chaillou_P132

43. En una industria química se utilizan dos tanques en serie y provistos de serpentín de enfriamiento, por el cual circula agua en contracorriente para enfriar 100ab lb/hr de ácido sulfúrico. Las condiciones de operación se muestran en la figura.



44. Si en un momento dado fallara el suministro de agua de enfriamiento, ¿cuál será la temperatura del ácido sulfúrico T_2 a la salida del segundo tanque después de $6a$ minutos? La ecuaciones que describen el proceso son:

$$3600T_o - 3600T_1 = 2800\frac{dT_1}{dt}$$

$$3600T_1 - 3600T_2 = 2800\frac{dT_2}{dt}$$

donde T_o, T_1 y T_2 están en $°C$ y t en horas.
2014 métodos numéricos aplicados a Ing. Nieves P614

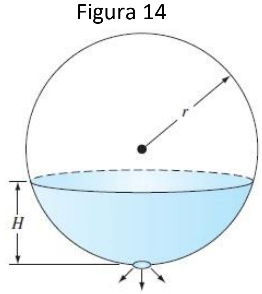
Hidráulica

45. Si se drena el agua desde un tanque cilíndrico vertical por medio de abrir una válvula en la base, el líquido fluirá rápido cuando el tanque esté lleno y despacio conforme se drene. Como se ve, la tasa a la que el nivel del agua disminuye es:

$$\frac{dy}{dt} = -k\sqrt{y}$$

donde k es una constante que depende de la forma del agujero y del área de la sección transversal del tanque y agujero de drenaje. La profundidad del agua y se mide en metros y el tiempo t en minutos.
Si $k = 0.06ab$, determine cuánto tiempo se requiere para vaciar el tanque si el nivel del fluido se encuentra en un inicio a 3.ab m. Resuelva utilizando un paso de 10 seg.

Figura 14



Fuente: Chapra Canale 5Ed p765

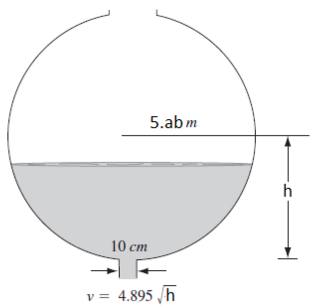
46. Un tanque esférico (Figura 14) tiene un orificio circular en el fondo a través del cual fluye líquido. La tasa de flujo a través del agujero se calcula como:

$$Q_{sal} = CA\sqrt{2 * g * H}$$

Donde Q_{sal} es el flujo de salida en m^3/s, C es el coeficiente obtenido en forma empírica, A es el área del orificio (m^2), g es la constante gravitacional ($g = 9.81\ m/s2$) y H es la profundidad del líquido dentro del tanque. Emplee alguno de los modelos a fin de determinar cuánto tiempo tomaría que el agua fluyera por completo de un tanque de 3.ab m de diámetro con altura inicial de 2.7ab m. Observe que el orificio tiene un diámetro de 3.ba cm y C = 0.55.

Fuente: Chapra Canale 5Ed p765

47. Calcule el tiempo necesario para que el nivel del líquido dentro del tanque esférico con radio $r = 5.ab\ mt$, mostrado en la figura, pase de $4m$ a $3m$. La velocidad de salida por el orificio del fondo es $v = 4.895$ mt/sg, y el diámetro de dicho orificio es de $10cm$.



Acumulación = -Entrada -Salida

$$\rho \frac{dV}{dt} = 0 - A * v * \rho$$

Donde V es el volumen del líquido en el tanque que, en función de la altura, está dado por:

$$V = \pi * \left(5.ab * h^2 - \frac{h^3}{3}\right) mt^3$$

A es el área del orificio de salida

$$A = \frac{\pi}{4}(0.1)^2 mt^2$$

y

$$v = 4.895\sqrt{h}$$

Estas cantidades se sustituyen en la primera ecuación y se tiene

$$\pi \frac{d\left(5.ab * h^2 - \frac{h^3}{3}\right)}{dt} = -\frac{\pi}{4}(0.1)^2 * 4.895\sqrt{h}$$

Se deriva

$$10 * h\frac{dh}{dt} - \frac{3h^2}{3}\frac{dh}{dt} = -\frac{(0.1)^2}{3} 4.895\sqrt{h}$$

Y al despejar se tiene

$$\frac{dh}{dt} = \frac{(0.1)^2 * 4.895\sqrt{h}}{4(10h - h^2)}$$

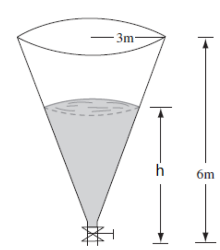
Que con la condición inicial y la pregunta forman lo siguiente:

$$\frac{dh}{dt} = \frac{(0.1)^2 * 4.895\sqrt{h}}{4(10h - h^2)}$$

$$A(0) = 4\ mt\ y\ a(¿) = 3\ mt$$

2014 métodos numéricos aplicados a Ing. Nieves P587

48. Calcule el tiempo necesario para que el nivel del líquido del tanque de la figura pase de 6.0 mt a 1.ab mt.



El flujo de salida por el orificio del fondo es $3.45ab\sqrt{h}\ Lit/seg.$

2014 métodos numéricos aplicados a Ing. Nieves P609

49. Para el rescate de un barco antiguo hundido durante el siglo XIX, se piensa utilizar un batiscafo para grandes profundidades. Para que la maniobra tenga éxito es necesario sumergir el batiscafo lentamente para que los cambios de presión en la coraza de este sean graduales. Considerando una

velocidad de hundimiento constante se obtuvo el siguiente modelo matemático de la variaci6n de la presi6n con respecto al tiempo:

$$\frac{dp}{dt} = 1600\,\frac{\rho_{agua} * g * t}{P}$$

Determinar cómo varía la presión conforme pasan los primeros cinco (5) minutos del descenso

Tenga en cuenta que:

$$\rho_{agua} = 1.0021 * 10^{-3}\ Kgr/Mt^3$$
$$g = 9.807\ mt/sg^2$$

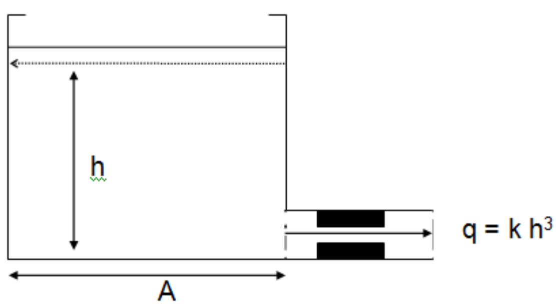
Fuente: 1984_Ejercicios_Metodos_Numericos_Rafael_Iriarte Pag: 144

50. Un bote de motor y su tripulante pesan juntos 320 lb. Si el empuje del motor es equivalente a una fuerza constante de 10 lb en la dirección del movimiento, si la resistencia del agua al movimiento es numéricamente igual al doble de la velocidad en pies por segundo y si el bote se encuentra inicialmente en reposo, determine
    a. La velocidad del bote en el instante t=55 s.
    b. La velocidad límite.

Fuente: 2021_05_31_Modulo de ecuaciones Diferenciales

51. La altura $h(t)$ del fluido del sistema hidráulico de la figura está caracterizada por la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{dh}{dt} = -\frac{K}{A}h^3$$



Donde A es el área del fondo del tanque y K es una constante que depende de la viscosidad del fluido y de la apertura por la que sale.

Figura de un sistema hidráulico:

Determinar la altura $h(t)$ en el $t = t_{final}$ como función del tiempo por el método de Runge-Kutta de cuarto orden empleado los siguientes valores:

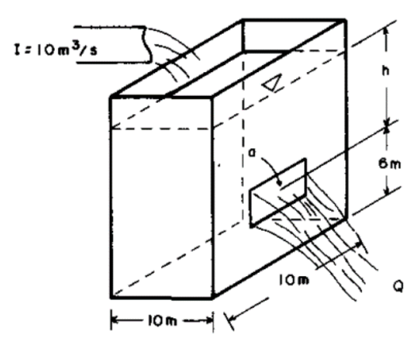
$$h_0 = 2m, A = 1m^2, K = 0.1Seg^{-1}, t_0 = 0seg, t_{final} = 45seg, h = 0.5seg$$

Solución: $0.3288\ m$

52. Calcular el tránsito de una avenida a través del almacenamiento mostrado en la figura. Se sabe que el gasto de la avenida es constante e igual $I = 10\ m^3/s$ y que el gasto que sale del almacenamiento está dado por la ecuación:

$$Q = C_0 * a * \sqrt{2 * g * h} = 5 * h\ (m^3/s)$$

El área de la base del almacenamiento es de 100 m. El nivel en el almacenamiento al tiempo t=0 s es de h=16 m.



Solución: Se trata de resolver la ecuación de continuidad:

$$\frac{dV}{dt} = I - Q$$

Como

$$V = A * (h + 6)$$

así

$$dV = A * dh$$
$$\frac{dh}{dt} = \frac{I - Q}{A}$$

sustituyendo valores y la ecuación del gasto de descarga

$$\frac{dh}{dt} = 0.1 - 0.05\sqrt{h}$$

1988 Métodos numéricos aplicados a Hidráulica P.99

53. Para encontrar el hidrograma de salida del vaso de una presa cuando a éste entra el gasto I dado por un hidrograma se requiere resolver la ecuación de continuidad

$$\frac{dV}{dt} = I - O$$

Donde V es, almacenamiento del vaso, t es el tiempo y O e I son los gastos de salida y de entrada del vaso, respectivamente.

Para llevar a cabo el tránsito se requiere de las curvas elevaciones-capacidades y elevaciones-gastos de salida y de la condición inicial del agua en el vaso y del gasto I. Si se acepta que la curva elevaciones-capacidades se representa como $V = kh$, siendo k y N constantes y h la elevación del vaso y si el gasto de salida está dado como $0 = c(h - h_c)^{3/2}$ si $h \geq h_c$ y $O = 0$ si $h \leq h_c$ para h_c igual al nivel de la cresta del vertedor por donde sale 0, se tiene que:

$$\frac{d}{dt} kh^N = I - O$$
$$\frac{dh}{dt} = \frac{I - O}{k * N * h^{N-1}} = f(h, t)$$

1988 Métodos numéricos aplicados a Hidráulica P.63

54. El flujo permanente gradualmente variado en un canal con pendientes pequeñas es descrito por la ecuación:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{S_0 - S_f}{1 - \frac{Q^2 * B}{g * A^3}}$$

Donde y es el tirante, Q el gasto, B el ancho de superficie libre, A el área hidráulica, g la aceleración de la gravedad, S_0 la pendiente del fondo, S_f la pendiente de fricción y x la distancia a lo largo del canal. Si se considera la fórmula de Manning para definir a S_f se tiene que:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{S_0 - \frac{Q^2 N^2 P^{4/3}}{A^{4/3}}}{1 - \frac{Q^2 * B}{g * A^3}}$$

Donde N es el coeficiente de rugosidad de Manning y P es el perímetro mojado. Para un canal se sección transversal trapecial, con Ap de ancho de plantilla y k designación de talud se tiene que:

$$A = (y * (Ap + ky))$$
$$P = \left(Ap + 2 * y * \sqrt{1 + k^2}\right)$$
$$B = (Ap + 2 * k * y)$$

De manera que la ecuación diferencial queda:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{S_0-\frac{Q^2*N^2\left(Ap+2*y*\sqrt{1+k^2}\right)^{4/3}}{(y*(Ap+k*y))^{4/3}}}{1-\frac{Q^2*(Ap+2*k*y)}{g*(y*(Ap+k*y))^3}}$$

El tirante a lo largo del canal puede ser calculado integrando la ecuación anterior. Asuma valores para resolver la EDO.

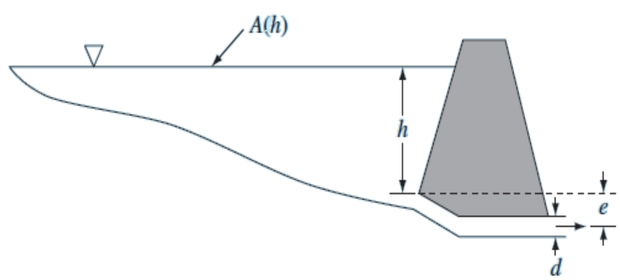
1988 Métodos numéricos aplicados a Hidráulica P.73

55. Una caja rectangular hermética (de dimensiones unitarias) con peso específico ¾ se sumerge en un líquido de peso específico unitario, bajo la acción de una fuerza externa $f(t)=\frac{3}{4}+t^2, 0\le t\le 1$ (movimiento y fuerza tienen dirección vertical)
Se pide:
   a. Obtener el $P.V.I$ que describe el hundimiento de la caja, sabiéndose que en $t=o$, posición y velocidad son nulos.
   b. Usar Runge-Kutta cuatro para calcular aproximaciones de posición, la velocidad y la aceleración de la caja, en paso de una décima.
   c. Obtener la solución exacta de $P.V.I$
   d. Calcular los errores relativos correspondientes a las aproximaciones calculadas (si es posible). Graficar.

56. Un estanque se drena a través de un tubo. Con suposiciones simplificadoras, la ecuación diferencial siguiente describe cómo cambia la profundidad con el tiempo:

$$\frac{dh}{dt}=-\frac{\pi d^2}{4A(h)}\sqrt{2g(h+e)}$$

donde h es la profundidad (m), t es el tiempo (sg), d es el diámetro del tubo (mt), A(h) es el área de la superficie del estanque como función de la profundidad (m^2), g es la constante gravitacional (9.81 m/s^2) y e es la profundidad de la salida del tubo por debajo del fondo del estanque (mt). Con base en la tabla siguiente de área-profundidad, resuelva esta ecuación diferencial para determinar cuánto tiempo tomaría que el estanque se vaciara dado que $h(0)=6\ m$, $d=0.25\ m$, $e=1\ m$.



$h-mt$	6	5	4	3	2	1	0
$A(h)\ 10^4 mt^2$	1.17	0.97	0.67	0.45	0.32	0.18	0

57. A traves de una tuberia cilindrica fluye vapor de agua a alta temperatura y presion. La distribucion de temperatura esta modelada por el $P.V.F$.

$$\begin{cases} ru"+u'=0 \\ u(1)=500, \quad u(2)=20 \end{cases}$$

Los valores $r=1$ y $r=2$ corresponden al radiio interior y exterior de la tuberia, respectivamente. Calcular valores aproximados de la temperatura tomando un paso $\Delta r=0.1$.

Una masa está colocada sobre un resorte que está sometido a fuerza externa y amortiguamiento. Su posición $y(t)$ satisface el $P.V.I.$

$$\begin{cases} y'' + +3y' + y = t^2 - 18, \qquad 0 \leq t \leq 6 \\ y(0) = 0\,, y'(0) = 0 \end{cases}$$

Se pide

a. Tomar tamaño de paso $h = 0.1$ en el método de Runge-Kutta cuatro y calcular posición, velocidad y aceleración de la masa, para $t_k = 0.1k$, $k = 0{,}1, \ldots{,}60$. Graficar
b. Obtener la solución exacta del $P.V.I$. Graficar $y(t)$, $y'(t)$ y $y''(t)$.
c. Comparar los resultados exactos con los cálculos aproximados. Analizar.

58. Se bombea agua de mar con una concentración de 8000 g/m3 hacia un tanque bien mezclado, a una tasa de 0.6ab m3/h. Debido al diseño defectuoso, el agua se evapora del tanque a una tasa de 0.025ba m3/h. La solución salina abandona el tanque a una tasa de 0.6ab m3/h.

a. Si originalmente el tanque contiene 1.ab m3 de la solución que entra, ¿cuánto tiempo después de que se enciende la bomba de salida quedará seco el tanque?
b. Use métodos numéricos para determinar la concentración de sal en el tanque como función del tiempo.

Estadística

59. Para simular una población se utiliza el modelo logístico:

$$\frac{dp}{dt} = k_{gm}(1 - p/p_{max})p$$

donde p es la población, k_{gm} es la tasa máxima de crecimiento en condiciones ilimitadas, y $p_{máx}$ es la capacidad de carga. Simule la población mundial entre 1950 y 2030, con el empleo de algún método numérico. Para la simulación, utilice las siguientes condiciones iniciales y valores de parámetros: p_0 (en 1950)=2555 millones de personas, k_{gm} =0.026ab/año, y p_{max}=12.000 millones de personas. Haga que la función genere salidas que correspondan a las fechas de los datos siguientes de población. Desarrolle una gráfica de la simulación
junto con los datos.

T	1950	1960	1970	1980	1990	2000	2010	2020
p	2555	3040	3708	4454	5276	6140	6960	7790

Fuente: Chapra canale 5Ed p765

60. Se considera una población que evoluciona según una ecuación logística pero que, además, está sometida a una depredación que reduce el tamaño de la población en 10 individuos en cada tiempo t. Este comportamiento hace que la velocidad de cambio de la población se exprese de la siguiente forma:

$$y' = y\left(1 - \frac{y}{40}\right) - 10$$

Donde $y(t)$ representa el número de individuos en el tiempo t, $y(1 - y/40)$ expresa el término logístico y el segundo término expresa la depredación.

Si inicialmente hay 100 individuos, ¿cuántos individuos habrá en cada tiempo $t = 5.ab$?
Fuente: _coleccionEjercicios.pdf

61. La población $x(t)$ de una cierta ciudad satisface la ley logística

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{100}x - \frac{1}{10^8}x^2$$

donde el tiempo t se mide en años. Suponiendo que la población de esta ciudad es 100.000 en 1980, determine:

a. La población como una función del tiempo t.
b. La población en el año 2000.
c. El año en que se duplicará la población de 1980.
d. El comportamiento de la población cuando $t \to \infty$

2004 EDO José Ventura P106

62. Una cierta presa, en su máxima capacidad, contiene 1.000 millones de m^3 de agua. En un instante dado, estando llena la presa, tiene una masa de 2 toneladas de contaminantes, distribuida en forma homogénea. Suponga que en temporada de lluvias entra agua a la presa a razón de 10.a millones de m^3 por día, con una masa de contaminantes de 0.09ab% toneladas por millón de m^3 de agua y sale con la misma rapidez. Determine la cantidad de contaminantes en la presa en cualquier instante. ¿En cuánto tiempo se reducirá la contaminación total de la presa a $1.2\ toneladas$?
Denote con $A(t)$ el número de toneladas de contaminantes después de t días. En este caso, se tiene la ecuación diferencial, junto con la condición inicial $A(0) = 2$

$$\frac{dA}{dt} = (10.a)(0.0009ab) - 10.a * \frac{A(t)}{1000}$$

2004 EDO José Ventura P111

63. Ley de Crecimiento Biológico:

Ecuación 63

$$\frac{dy}{dt} = \alpha y$$

Cuya solución es:

$$y = e^{\alpha t}$$

La ley del crecimiento exponencial, con las debidas modificaciones, puede tener un número muy grande de aplicaciones al área de Ciencias de la Salud.

Un problema fundamental en biología es el crecimiento, sea éste el crecimiento de una célula, un órgano, un ser humano, una planta o una población. La ecuación diferencial (Ecuación 63) nos dice que el crecimiento ocurre si $\alpha > 0$, y por otro lado el decaimiento (o encogimiento) ocurre si $\alpha < 0$. Un defecto obvio de la Ecuación 63 y de su solución es que si $\alpha > 0$ y el tiempo transcurre, el crecimiento es ilimitado. Esto es una contradicción con la realidad, puesto que, después de transcurrir un cierto tiempo, sabemos que la célula o individuo deja de crecer, y obtiene un tamaño máximo. La pregunta que surge es ¿podemos modificar (Ecuación 63) para que los resultados concuerden con la realidad?, la respuesta es sí, y está dada por la ecuación diferencial:

Ecuación 64

$$\frac{dy}{dt} = \alpha y - \beta y^2$$

cuya solución es:

Ecuación 65

$$y = \frac{\alpha/\beta}{1 + \left(\frac{\alpha/\beta}{y_0}\right) e^{-\alpha(t-t_0)}}$$

La cual se obtiene fácilmente aplicando el método de separación de variables. Además de (Ecuación 65), observe que $\lim_{t\to\infty} y = \frac{\alpha}{\beta}$, lo cual muestra que el crecimiento dado por (Ecuación 65) tiene un límite, tal como lo requieren la realidad, y validando el modelo de crecimiento (Ecuación 64) y (Ecuación 65). Algunos ejemplos de aplicaciones para este modelo son: calcular la altura media de un grupo de mujeres en pleno crecimiento o predecir la población de Colombia para el 2030, etcétera.

Fuente: https://www.uv.mx/rm/num_anteriores/revmedica_vol6_num2/articulos/ecuaciones.htm

64. MODELO DE PROBLEMA EPIDEMIOLÓGICO: Un problema importante de biología y medicina trata de la ocurrencia, propagación y control de una enfermedad contagiosa; esto es, una enfermedad que puede transmitirse de un individuo a otros. La ciencia que estudia este problema se llama epidemiología, y si un porcentaje grande no común de una población adquiere la enfermedad, decimos que hay una epidemia. Un modelo matemático sencillo para la propagación de una enfermedad es:

Ecuación 66

$$\frac{dP_i}{dt} = kP_i(P - P_i), con\ P_i(t_0) = P_0$$

Donde P_i es el número de individuos infectados en el tiempo t, P_0 el número de individuos infectados en el tiempo t_0 y P es el número total de la población. La solución a la Ecuación 66 se obtiene por separación de variables, dando como solución:

Ecuación 67

$$P_i = \frac{P}{1 + \left(\frac{P}{P_0} - 1\right) e^{-kP(t-t_0)}}$$

Así, el modelo formado por Ecuación 66 y Ecuación 67 describe la propagación de una enfermedad en una población grande pero finita. El problema de epidemias donde se toma en cuenta la cuarentena es más complicado, ya que se considera un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias, lo cual implica aplicar teoría de álgebra lineal.

Fuente: https://www.uv.mx/rm/num_anteriores/revmedica_vol6_num2/articulos/ecuaciones.htm

65. Este es un modelo para la propagación de una infección o un rumor en una población fija. Supóngase que un estudiante portador de un virus de gripe regresa a un campus universitario, aislado, que tiene 1000 estudiantes. Supongamos que la rapidez con que el virus se propaga es proporcional no sólo al número de estudiantes contagiados, sino también, al número de estudiantes no contagiados. Determinar el número de estudiantes contagiados después de 6 días, si además se observa que después de 4 días ya eran 50 los contagiados.

Solución. Denote con $x(t)$ al número de estudiantes contagiados en t días. Entonces $x(0) = 1, x(4) = 50, 100 - x(t)$ expresa el número de estudiantes no contagiados y $\frac{dx}{dt}$ es la velocidad con la que aumenta el número de estudiantes contagiados. Por hipótesis $\frac{dx}{dt}$ es proporcional a $[x(t)][1000 - x(t)]$ Este problema queda formulado así:

$$\frac{dx}{dt} = k * x * (1000 - x), \qquad x(0) = 1, \qquad x(4) = 50$$

2004 EDO José Ventura P107

66. Los registros de salud pública indican que el comportamiento en el número de infectados (I) del brote de cierta clase de gripe con el tiempo sigue la ecuación:

$$\frac{dI}{dt} = \frac{4.8e^{-0.8t}}{(1 + 3e^{-0.85t})^2}$$

Si t es dado en semanas y al día 0 el número de infectados es 1 personas. Cuantos infectados habrá al cabo de 4 semanas.

Fuente: _sf_Modelos Continuos

67. MODELO DE ABSORCIÓN DE DROGAS EN ÓRGANOS O CÉLULAS: Un problema importante en el campo de la medicina consiste en determinar la absorción de químicos (tales como drogas) por células u órganos. Supongamos que un líquido transporta una droga dentro de un órgano de volumen *V* cm^3 a una tasa de *a* cm^3/seg y sale a una tasa de *b* cm^3/seg. La concentración de la droga en el líquido que entra es *c* cm^3/seg. La ecuación diferencial que modela tal problema es:

Ecuación 68

$$V\frac{dx}{dt} = ac - bx$$

cuya solución es:

Ecuación 69

$$x = \frac{ac}{b} + \left(x_0 - \frac{ac}{b}\right)e^{-(t-t_0)/V}$$

donde se presentan los siguientes casos:

Caso 1: $a = b$. En este caso, la tasa a la cual entra la droga es igual a la tasa a la cual sale, y (Ecuación 69) se convierte en:

$$x = c + (x_0 - \mathrm{c})e^{-\mathrm{b}(t-t_0)/V}$$

Caso 2: $a = b$ y $x_0 = 0$. En este caso, las tasas de entrada y de salida son iguales, y la concentración inicial de la droga en el órgano es 0; entonces:

$$x = c\left(1 - e^{-\mathrm{b}(t-t_0)/V}\right)$$

Fuente: https://www.uv.mx/rm/num_anteriores/revmedica_vol6_num2/articulos/ecuaciones.htm

68. Un líquido de baja viscosidad, como el agua, fluye de un tanque cónico invertido, por un orificio circular, a una razón de:

$$\frac{dx}{dt} = -0.6\pi r^2 \sqrt{2g}\,\frac{\sqrt{x}}{A(x)}$$

Donde r es el radio del orificio, x es la altura del nivel del líquido desde el vértice del cono y $A(x)$ es el área transversal del tanque x unidades arriba del orificio. Suponga que $r = 0.1a$ pies, g=32.b pies/seg^2, que el tanque tiene un nivel inicial de agua de 8.ab pies y un volumen inicial de $512\pi/3$ pies cúbicos.

1. Calcule $A(x)$.
2. Calcule el nivel de agua después de 10.a seg usando el método de runge-kutta de cuarto orden con $h = 0.1$

69. En la investigación de un homicidio o de una muerte accidental, con frecuencia es importante estimar el tiempo que ha transcurrido desde la muerte. De observaciones experimentales, se sabe que la temperatura superficial de un objeto cambia con una tasa proporcional a la diferencia entre la temperatura del objeto y la del ambiente circundante, o temperatura ambiente. Esto se conoce como ley de Newton del enfriamiento. Así, si T(t) es la temperatura del objeto al tiempo t, y Ta es la temperatura ambiente constante:

$$\frac{dT}{dt} = -K(T - T_a)$$

donde $K > 0$ es una constante de proporcionalidad. Suponga que en el momento $t = 0$ se descubre un cuerpo y se mide su temperatura, T_0. Se supone que, en el momento de la muerte, la temperatura del cuerpo, Td, era el valor normal de 37°C. Suponga que la temperatura del cuerpo al ser descubierto era de 29.5°C, y que dos horas después era de 23.5°C. La temperatura ambiente es de 20|C.
Determine K y el tiempo de la muerte.
Chapra: Ed5 P.846

70. Un ambientalista descubre que cierto tipo de árbol crece de tal forma que después de t años su altura $h(t)$ cambia a razón de

$$h'(t) = 0.2 * t^{2/3} + \sqrt{t}\,, cm/año.$$

Si el árbol tenía 20.a cm de altura cuando se plantó ¿cuánto medirá dentro de 27.ab años?.

Solución. Es claro del planteo verbal que se nos indica la derivada de la función altura y se nos pide encontrar dicha función. En términos de integral indefinida se tiene lo siguiente:

$$h(t) = \int [0.2\,t^{2/3} + t]\,dt = \int 0.2t^{2/3}dt + \int t^{1/2}dt = 0.2\frac{3}{5}t^{5/3} + \frac{3}{2}t^{2/3} + C$$

Teniendo los valores iniciales se consigue el valor de la constante C para la solución analítica. Resuelva usando un modelo numéricos para paso igual a 1 año.
_SF_Apuntes Medicina Verónica Poblete P104

Electricidad - Electrónica

71. En el estudio del campo electrónico inducido por dos líneas de transmisión cercanas, surge una ecuación de la forma

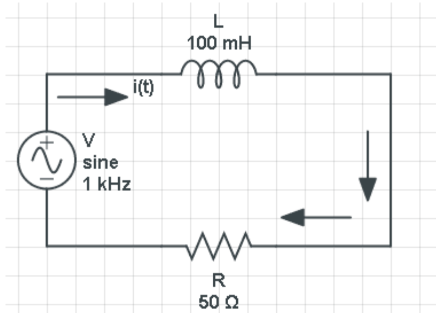
$$\frac{dz}{dx} + g(x) * z^2 = f(x)$$

Sean $f(x) = 5x + 2$, $g(x) = x^2$ y $z(0) = 1$, aproximar $z(1)$.

2011 EDO Andrés Collante P 19 – P47

72. Se aplica una fuerza electromotriz de 30V a un circuito en serie LR con 0.1 Henry de inductancia y 50 ohm de resistencia. Determine la corriente i al cabo de 0.003ab seg, si $i(0) = 0$. Determine la corriente conforme $T \to 0$. El circuito esta descrito en la Figura 15.

Figura 15



Primero se obtienen los modelos para el circuito representado en la Figura 15. Dicho modelo matemático proviene de las leyes de Kirchoff:

1. La suma de las corrientes hacia (o desde) cualquier punto es cero. LEY DE NODOS.
2. Alrededor de cualquier trayectoria cerrada la suma de las caídas de voltaje instantáneas en una dirección específica es cero. LEY DE MALLAS

En este caso, como se quiere encontrar un valor (la corriente $i(t)$), en un circuito cerrado o malla se utiliza para modelar el circuito la LEY DE MALLAS.

Aplicando la ley de mallas de Kirchhoff al circuito de la Figura 15, para las caídas de voltaje en función de la corriente $i(t)$, se tiene:

Ecuación 70

$$L\frac{di}{dt} + iR = E(t)$$

Tabla 2. Caídas de voltaje a través de los elementos del circuito

Elementos del circuito	Símbolo	Caída de Voltaje (representación diferencial)	Valores
Inductor	L	$L\frac{di}{dt}$	100mH 0.1H
Resistor	R	iR	50Ω
Capacitor	C	$\frac{1}{C}Q$	500μF
Fuente de corriente alterna		$E(t)$	Voltaje suministrado en el tiempo t. 110V a 60hz

De modo que, sumando las caídas de voltaje (**Tabla 2**) e igualándolas al voltaje de la fuente de corriente alterna, se tiene:

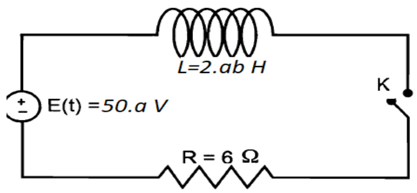
$$L\frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C}Q = E(t)$$

Para el presente caso la ecuación diferencial a resolver, según la **Ecuación 70** y sustituyendo los valores del problema planteado, es:

$$0.1\frac{di}{dt} + 50i = 30$$

Fuente: https://ecuaciondiferencialejerciciosresueltos.com/ecuaciones-diferenciales-aplicadas-circuitos-electricos

73. Un generador con una fem de 50.a V se conecta en serie con una resistencia de 6Ω y un inductor de 2.ab henrys. Si el interruptor K se cierra a $t = 0$, determine la corriente para $t = 5\ s$. Ver figura



La ecuación diferencial del circuito es

$$2 * \frac{di}{dt} + 6 * i = 50 \quad \equiv \quad \frac{di}{dt} + 3 * i = 25$$

sujeta a la condición inicial $i(0) = 0$.

74. De acuerdo con los principios elementales de electricidad, las caídas de voltaje a través de los elementos del circuito son las que se muestran en la Tabla 3.

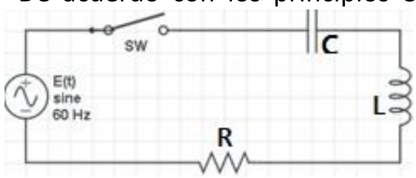


Tabla 3

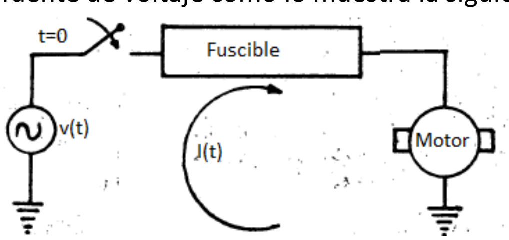
Elementos del circuito	Símbolo	Caída de Voltaje (representación diferencial)	Valores
Inductor	L	$L\frac{di}{dt}$	100mH
Resistor	R	iR	50Ω
Capacitor	C	$\frac{1}{C}Q$	500μF
Fuente de corriente alterna	$E(t)$	Voltaje suministrado en el tiempo t.	110V a 60hz

La Ecuación Diferencial para un circuito eléctrico mixto RLC. de modo que, sumando las caídas de voltaje (Tabla 3) e igualándolas al voltaje de la fuente de corriente alterna, se tiene:

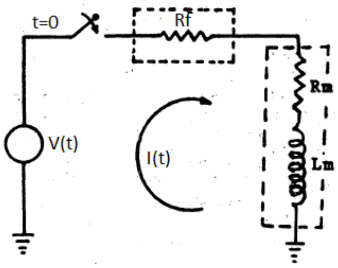
$$L\frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C}Q = E(t)$$

Fuente: https://ecuaciondiferencialejerciciosresueltos.com/circuito-electrico-mixto

75. El motor de una bomba de agua se encuentra funcionando en estado estable, alimentándose de una fuente de voltaje como lo muestra la siguiente figura



El fusible y el motor del esquema anterior se representan eléctricamente como:



donde:
$V(t)$ es el voltaje de alimentación
R_f es una resistencia, que al paso de una determinada corriente se funde, abriendo el circuito.
R_m es la resistencia del motor
$L_m$es la inductancia del embobinado del motor

Considerando que el voltaje de la fuente de alimentación es:

$$V(t) = 120\sqrt{2}\sin\,(l20 * \pi * t)$$

y que los parámetros R_f, R_m y L_m tienen los siguientes valores:

$$R_f = 10\Omega$$
$$R_m = 70\Omega$$
$$L_m = 0.15\ H$$

Calcular la corriente que circulará por el fusible a partir de que el interruptor es cerrado, considerando que en ese momento la corriente generada por el embobinado del motor es de -1 amperio.

Para resolver el· problema es necesario obtener un modelo matemático del circuito de la figura. este modelo es:

$$L_m \frac{d}{dt} I(t) + (R_f + R_m) I(t) = V(t)$$

Con, condición inicial de:

$$T(t_0) = I_0$$

Fuente: 1984_Ejercicios_Metodos_Numericos_Rafael_Iriarte Pag: 140

76. Para un circuito sencillo RL, la ley de Kirchhoff del voltaje requiere que (si se cumple la ley de Ohm)

$$L\frac{di}{dt} + Ri = 0$$

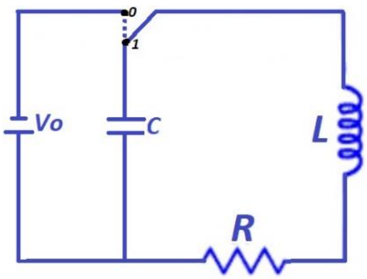
Donde i=corriente, L=inductancia y R=resistencia. Resuelva para i, si $L = 1$, $R = 1.5ab$ e $i(0) = 0.5a$. Resuelva este problema en forma analítica y con algún método numérico. Presente sus resultados en forma gráfica.
Fuente: Chapra Ed5. P850

77. En contraste con el problema anterior, las resistencias reales no siempre siguen la ley de Ohm. Por ejemplo, la caída del voltaje quizá sea no lineal y la dinámica del circuito quede descrita por una relación como la siguiente

$$L\frac{di}{dt} + R\left[\frac{i}{I} - \left(\frac{i}{I}\right)^3\right] = 0$$

Donde todos los demás parámetros se definen como en el problema anterior e I es una corriente conocida de referencia e igual a 1. Resuelva para i como función del tiempo en las mismas condiciones que se especifican para el problema anterior.
Chapra: Ed5 P850

78. En el circuito de la figura cuando el interruptor pasa de la posición 1 a la posición 0, hay un período de ajuste, que llamamos **transitorio,** hasta que se alcanza un estado estacionario. La ecuación del circuito es:



$$L\frac{di}{dt}+iR+\frac{q}{C}=0$$

Como $i=\frac{dq}{dt}\rightarrow\frac{di}{dt}=\frac{d^2q}{dt^2}$ y reemplazando queda

$$L\frac{d^2q}{dt^2}+R\frac{dq}{dt}+\frac{q}{C}=0$$

Esta es una ecuación diferencial ordinaria de 2do. Orden cuya solución es:

$$q(t)=e^{-\frac{R}{2L}t}\cos\left(\sqrt{\frac{1}{LC}-\left(\frac{R}{2L}\right)^2}\,t\right)$$

sí $t=0$, $q=q_0=V_0C$ y reordenándola para dejarla en función de R, queda:

$$f(R)=e^{-\frac{R}{2L}t}\cos\left(\sqrt{\frac{1}{LC}-\left(\frac{R}{2L}\right)^2}\,t\right)-\frac{q}{q_0}$$

Utilice los métodos de Bisección y de la Regla Falsa para determinar una resistencia apropiada para disipar energía a una velocidad constante, $f(R)=0$, para los siguientes valores de:

$$\frac{q}{q_0}=0{,}01\ ,t=0{,}05s,\ L=5H,\ C=10^{-4}F\ .$$

Realice iteraciones hasta obtener un $|\varepsilon_a|\leq 2\%$.

En un circuito eléctrico, se dispone de un condensador con capacidad constante $C=1.1ba\ faradios$ y una resistencia $R=2.1ab\ ohmios$. Se le aplica un voltaje

$$E(t)=e^{-0.06*\pi*t}sin(2*t-\pi)$$

La ecuación que rige el comportamiento de un circuito sin inducción es:

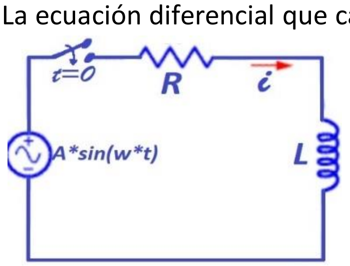
$$R\frac{dI}{dt}+I*C=\frac{dE}{dt}$$

Suponga que la intensidad en el instante inicial es $I(0)=1\ amperio$. Halle el valor aproximado de la intensidad cada 0.2 segundos los dos primeros segundos. Reemplazando los valores numéricos en el modelo matemático se tiene

$$2.1ab*\frac{dI}{dt}+\frac{I}{1.1ba}=(-0.06\pi)e^{-0.06*\pi*t}\ sin(2*t\ -\ \pi)+2e^{-0.06\,\pi\,t}cos(2*t-\pi)$$

2011 EDO Andrés Collante P16

79. La ecuación diferencial que caracteriza el comportamiento de la corriente $i(t)$ del circuito eléctrico ilustrado de la figura es:



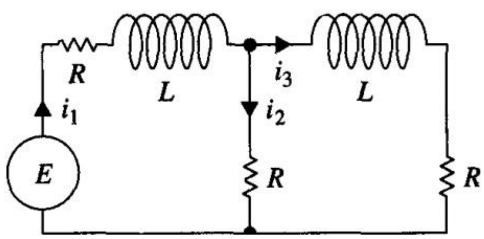
$$\frac{di}{dt}=\frac{A}{L}\sin(Wt)-\frac{R}{L}i$$

Donde A es un voltaje constante, R es la resistencia y L la inductancia. Obtener la solución numérica de la ecuación diferencial por el método de Runge-Kutta, utilizando los siguientes datos:

$$A=115V,L=1H,R=10\Omega,w=38rad/s,i_0=0Amp,t_0=0\ \ seg,t_{final}=1seg,h=0.1$$

Solución: $-0.2482\ amp$. Realice el ejercicio con los siguientes valores:
$A = 11a.b\ V, L = 1.ab\ H, R = 1a.b\ \Omega, w = 3a.b\ rad/s, i_0 = 0Amp, t_0 = 0\ \ seg, t_{final} = 1seg, h = 0.1$

80. Cuando $\mathrm{E} = 100\mathrm{V}$, $\mathrm{R} = 10\Omega$ y $L = 1h$, el sistema de ecuaciones diferenciales para las corrientes $i_1(t)$ e $i_3(t)$ en la red eléctrica de la figura es:



$$\frac{di_1}{dt} = -20i_1 + 10i_3 + 100$$
$$\frac{di_3}{dt} = 10i_1 - 20i_3$$

En donde $i_1(0) = 0$, e $i_3(0) = 0$. Aplique el método de Runge-Kutta para aproximar $i_1(t)$ e $i_3(t)$, cuando $t = 0.1{,}0.2{,}0.3{,}0.4\ y\ 0.5$. Use $h = 0.1$

Química y Medicina

81. Debido a un vertido tóxico, las aguas de un lago, que inicialmente estaban limpias, comienzan a ser contaminadas.

Sea $y(t)$ la cantidad de contaminante (gramos) por m^3 en el instante de tiempo t (medido en días). Se sabe que $y(t)$ sigue la ley:

$$y' = \frac{1}{2}(k - y)$$

donde k es una constante desconocida. Pasados 4 días tras el vertido, la contaminación es de $86.ab\ gr/m^3$.

Calcular la cantidad de contaminante por m3 que tendrán las aguas del lago 10.a días después del vertido.
Fuente: _coleccionEjercicios.pdf

82. Un calentador solar de agua consta de un tanque de agua y un panel solar. El tanque se encuentra bien aislado y tiene una constante de tiempo de 64 horas. El panel solar genera 2000 kilocalorías por hora durante el día y el tanque tiene una capacidad calorífica de 2 °C por cada 1000 kilocalorías. Si el agua se encuentra inicialmente a 30 °C y la temperatura ambiente es de 20.ba °C, ¿cuál será la temperatura del tanque al cabo de 12.ab horas de luz solar? En este caso

$$U(t) = 2°C/1000Kcal * 2000Kcal/h = 4°C/h$$

con lo que la ecuación diferencial que modeliza el fenómeno es

$$T'(t) = \frac{1}{64}(20, ba - T(t)) + 4,$$

2010 EDO José Canovas P11

83. Una determinada especie ha sufrido una epidemia, con lo que la tasa de mortalidad ha superado la tasa de natalidad. Se sabe que $y(t)$, el número de individuos vivos de la especie en el instante de tiempo t, es la solución del siguiente problema de Valor Inicial:

$$\begin{cases} y' = -\alpha y - y^2 \\ y(0) = y_o \end{cases}$$

Donde $a > 0$ es un parámetro e $y0 > 0$ es el número de individuos de la especia presentes al comienzo del periodo de observación.
Determinar la solución al problema anterior para $a = 1; y_o = 10$:
Fuente: _coleccionEjercicios.pdf

84. Un estudiante portador de un virus de gripe regresa a un campus universitario aislado que tiene 1000 estudiantes. Al cabo de 4 días hay 50 estudiantes contagiados. Si se supone que la rapidez con la que el virus se propaga es proporcional al número de estudiantes contagiados y al número de alumnos no contagiados, determinemos el número de estudiantes contagiados que habrá después de 6 días.
Sea $x(t)$ el número de alumnos contagiados al cabo de t días. Puesto que la rapidez con la que el virus se propaga es proporcional al número x de estudiantes contagiados y también al número de alumnos no contagiados, $1000 - x$, la ecuación diferencial para este problema será de la forma:

$$\frac{dx}{dt} = k * x * (100 - x)$$

2011 EDO Beatriz Campos P68

85. Dos moléculas de dicromato de potasio sólido, dos moléculas de agua y tres moléculas de azufre sólido se combinan mediante una reacción química irreversible para dar tres moléculas de dióxido de azufre gaseoso, cuatro moléculas de hidróxido de potasio sólido y dos moléculas de óxido crómico sólido. La reacción puede representar simbólicamente mediante la ecuación estequiométrica:

$$2k_2Cr_2O_7 + 2H_2O + 3S \rightarrow 4KOH + 2Cr_2O_3 + 3SO_2$$

Si se tiene n_1 moléculas de $k_2Cr_2O_7$, n_2 moléculas de H_2O y n_3 moléculas de S_1 presentes originalmente, la ecuación diferencial siguiente describe la cantidad $x(t)$ de KOH en el tiempo t:

$$\frac{dx}{dt} = k\left(n_1 - \frac{x}{2}\right)^2 \left(n_2 - \frac{x}{2}\right)^2 \left(n_3 - \frac{3x}{4}\right)^3$$

Donde k es la constante de la velocidad de la reacción. Si $k = 6.22 * 10^{-19}$, $n_1 = n_2 = 10ab, y\ n_3 = 15ba$, ¿Cuántas unidades de hidróxido de potasio se formarán después de dos segundos? Use el método de Runge-Kutta de cuarto orden con $h = 0.1$.

86. En el estudio del flujo no isotérmico de un fluido newtoniano entre placas paralelas se encontró la ecuación

$$\frac{d^2y}{dx^2} + x^2e^y = 0, x > 0$$

Mediante una serie de sustituciones esta ecuación se puede transformar en la ecuación de primer orden

$$\frac{dv}{du} = u * \left(\frac{u}{2} + 1\right) * v^3 + \left(u + \frac{5}{2}\right) v *^2$$

Use el algoritmo de EDO para aproximar $v(3)$ si $v(t)$ satisface $v(2) = 0.1$, con $h = 0.1$
2011 EDO Andrés collante P47

87. El isótopo radiactivo plutonio 241 decae de forma que se satisface la ecuación diferencial

$$\frac{dQ}{dt} = -0.0525 * Q$$

En donde Q se mide en miligramos y t en años.

a. Determine la vida media τ del plutonio 241.
b. Si en este momento se cuenta con 50 mg de plutonio, ¿cuánto quedará en 10 años?

88. El einstenio 253 decae con una rapidez proporcional a la cantidad que se tenga. Determine la vida media τ si este material pierde un tercio de su masa en 11.7 días.

89. El radio 226 tiene una vida media de 1620 años. Encuéntrese el periodo en el que un cuerpo de este material se reduce a tres cuartas partes de su tamaño original.

90. El isótopo radioactivo del Torio 234 se desintegra a una rapidez proporcional a la cantidad existente en ese instante de tiempo. Si 100.ba miligramos de este material se reducen a 82.ab miligramos en un semana, ¿cuánto Torio tendremos al cabo de tres semanas? ¿Cuánto tiempo tiene que transcurrir para que la cantidad de Torio se reduzca a la mitad?
2010 EDO Quimica Jose Canovas P.19

91. Suponga que inicialmente se encuentran 100 mg de torio 234 en un recipiente cerrado y que a éste se le agrega torio 234 con una rapidez constante de 1 mg/día.
a. Halle la cantidad $Q(t)$ de torio 234 que hay en el recipiente en cualquier instante. Recuerde que, en el ejemplo 1, se encontró la razón de decaimiento para el torio 234.
b. Halle la cantidad límite $Q1$ de torio 234 que existiría en el recipiente cuando $t \rightarrow \infty$.
c. ¿Cuánto tiempo debe transcurrir antes de que la cantidad de torio 234 en el recipiente disminuya hasta ser 0.5 mg como máximo más del valor límite $Q1$?
d. Si al recipiente se le agrega torio 234 con una rapidez de k mg/día, encuentre el valor de k que se requiere a fin de mantener un nivel constante de 100 mg de torio 234.

92. Una roca con tiene dos isótopos radiactivos, RA_1 y RA_2, que pertenecen a la misma serie radiactiva; es decir, RA_1 decae en RA_2, quien luego decae en átomos estables. Suponga que la tasa con la que RA_1 decae en RA_2 es $50e^{-10t}$ kg/s. Como la razón de decaimiento de RA2 es proporcional a la masa presente $y(t)$ de RA2, la razón de cambio de RA_2 es:

$$\frac{dy}{dt} = razon\ de\ creacion - razon\ de\ decaimiento$$

Ecuación 71

$$\frac{dy}{dt} = 50e^{-10t} - ky$$

Donde $k > 0$ es la constante de decaimiento. Si k=2/s e inicialmente $y(0) = 40.ab$ kg, determine la masa $y(t)$ de RA_2 para t>=0.

La Ecuación 71 es lineal, de modo que se escribe de la forma canónica así:

Ecuación 72

$$\frac{dy}{dt} + 2y = 50e^{-10t}, \quad y(0) = 40.ab$$

Donde se ha sustituido $k = 2$ e incluido la condicion inicial. Ahora se ve que $P(t) = 2,$ de modo que:

$$\int P(t)dt = \int 2dt = 2t$$

Asi un factor de integración es $\mu(t) = e^{2t}$. Al multiplicar la ecuación anterior por $\mu(t)$ se obtiene:

$$e^{2t}\frac{dy}{dt} + 2e^{2t}y = 50e^{-10t+2t}$$

$$\frac{d}{dt}(e^{2t}y) = 50e^{-8t}$$

Al integrar ambos lados y despejar y se tiene:

$$e^{2t}y = -\frac{25}{4}e^{-8t} + C$$

$$y = -\frac{25}{4}e^{-10t} + Ce^{-2t}$$

Al sustituir $t = 0$ y $y(0) = 40.ab$ se tiene:

$$40.ab = -\frac{25}{4}e^{0} + Ce^{0} = -\frac{25}{4} + C$$

De modo que $C = (40.ab * 4 + 25)/4$. Así la masa y(t) de RA_2 en el instante t está dada por

$$y(t) = -\frac{25}{4}e^{-10t} + \frac{(40.\text{ab} * 4 + 25)}{4}e^{-2t}, \qquad para\ t \geq 0$$

93. En una galería subterránea de $15.a \times 15.b \times 1.2ba$ m hay un 0.2% de CO_2, mientras que el aire del exterior tiene un 0.055% de CO_2. Se instalan ventiladores que introducen en la galería 9 metros cúbicos de aire del exterior por minuto, de forma que por el otro extremo de la galería sale la misma cantidad de aire. ¿Qué concentración de CO_2 habrá al cabo de 20 minutos en la galería?
2010 EDO Quimica Jose Canovas P.19

Economía y Financiera

94. Actualmente las entidades de credito suelen ofrecer un interes anual por la cantidad de dinero (C) depositada en las cuentas de ahorro. Supongamos que ingresamos una cantidad inicial de dinero C_0 y nuestra entidad nos ofrece un interes anual de k %. Si se denota por $C(t)$ la cantidad de dinero que se tiene en la cuenta en el instante t, la variacion que sufre el dinero debe cumplir la ecuación diferencial:

$$C' = \frac{k}{100}C$$

que es una ecuación en variables separadas (aunque también será lineal como veremos). Por lo tanto, para conocer la cantidad de dinero que se tiene en un instante t debemos resolver el problema de Cauchy

$$\begin{cases} C' = \dfrac{k}{100}C \\ C(0) = C_0 \end{cases}$$

donde t es el tiempo transcurrido en años. Como la solución de la ecuación es $C(t) = ce^{kt/100}$, introducimos la condición inicial y se obtiene $c = C_0$, así que la cantidad de dinero que habrá en la cuenta en el instante de tiempo t será

$$C(t) = c_0e^{kt/100}$$

Suponga que deposita una cantidad inicial de 1.000.000 de pesos y el banco ofrece pagar un interes de 6.2ab% anual. Cuanto interes tendrá al cabo de 10.ba años.

Fuente: 2011_Metodos_Gabriel_Soler_lopez p17