MÉTODOS NUMÉRICOS

Ing. Yamil Armando Cerquera Rojas[1]

TABLA DE CONTENIDO



[1] Ing. Agrícola – USCO. Especialista en Sistemas – Unal. Especialista en Administración de la Informática Educativa – UdeS. Maestría en Administración de empresas énfasis en dirección de proyectos de Ingeniería – Viña del Mar – Chile. Maestría en Gestión Educativa – UdeS.

# Problema de Población

Se considera una población que evoluciona según una ecuación logística pero que, además, está sometida a una depredación que reduce el tamaño de la población en 10 individuos en cada tiempo t. Este comportamiento hace que la velocidad de cambio de la población se exprese de la siguiente forma:

$$y' = y\left(1 - \frac{y}{40}\right) - 10$$

donde $y(t)$ representa el número de individuos en el tiempo $t$, $y\left(1 - \frac{y}{40}\right)$ expresa el término logístico y el segundo término expresa la depredación.

a. Si inicialmente hay 100 individuos, ¿cuántos individuos habrá en cada tiempo t?
b. ¿Se extinguirá la población?

El problema de valor inicial que hay que resolver es:

$$\begin{cases} y' = y\left(1 - \frac{y}{40}\right) - 10 \\ y(0) = 100 \end{cases}$$

Se calcula en primer lugar la solución general de la ecuación. Se comienza por factorizar el segundo miembro:

$$y\left(1 - \frac{y}{40}\right) - 10 = \frac{1}{40}(y(40 - y) - 400) = -\frac{1}{40}(y^2 - 40y + 400) = -\frac{1}{40}(y - 20)^2$$

Luego

$$y' = \frac{dy}{dt} = -\frac{1}{40}(y - 20)^2$$

$$\frac{dy}{(y - 20)^2} = -\frac{1}{40}dt \equiv \int \frac{dy}{(y - 20)^2} = \int -\frac{1}{40}dt$$

$$\frac{-1}{y - 20} = \frac{-t}{40} + c \equiv \frac{1}{y - 20} = \frac{t}{40} + c \equiv \frac{1}{y - 20} = \frac{t + c}{40}$$

$$\frac{40}{t + c} = y - 20 \equiv 20 + \frac{40}{t + c} = y$$

Teniendo en cuenta que la condición inicial es:

$$y(0) = 100$$

$$20 + \frac{40}{0 + c} = 100$$

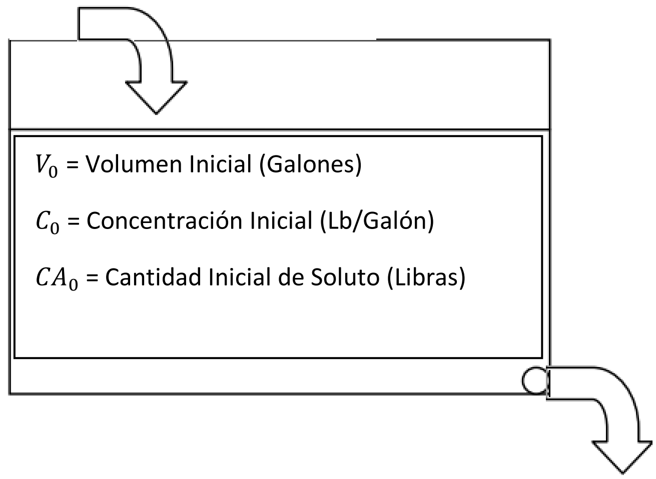
$$c = 1/2$$

Luego la solución del problema de valor inicial es:

$$y = 20 + \frac{40}{t + 1/2} \equiv 20 + \frac{80}{2t + 1}$$

# Problema de Mezcla Agua-Sal

$C_1$ = Concentración de Entrada
$Q_1$ = Caudal o Razón de entrada




$C_2(t)$ = Concentración de salida (Varía en función del tiempo)
$Q_2$ = Caudal o Razón de salida

Sea $CA(t)$ la cantidad de soluto (Libras) en el tanque en un instante de tiempo $t$. La cantidad de soluto que entra al tanque durante Δt segundos es $(Q_1 * C_1 * \Delta t)$ libras. La cantidad de soluto que fluye hacia fuera del tanque durante el mismo intervalo de tiempo depende de la concentración de soluto $C_2(t)$ en el tanque al instante t.

La concentración de soluto en el tanque en cualquier instante de tiempo t, viene dada por la ecuación: $C_2(t) = \frac{CA(t)}{V(t)}$, donde $CA(t)$ es la cantidad de soluto en cualquier instante de tiempo t y $V(t)$ denota volumen de líquido en el tanque en cualquier instante de tiempo t.

El **volumen de líquido en el tanque, en cualquier instante de tiempo t**, viene dado por la ecuación

$$V(t) = V_0 + (Q_1 - Q_2) * t$$

Por otra parte, la variación de la cantidad de soluto en un instante t, es igual a la diferencia entre la cantidad de soluto que entra al tanque $(Q_1 * C_1 * \Delta t)$ y la cantidad de soluto que sale del tanque $(Q_2 * C_2 * \Delta t)$.

ΔCA=(gramos que ingresan)-(gramos que salen)=$(Q_1 * C_1 * \Delta t) - (Q_2 * C_2 * \Delta t) = ((Q_1 * C_1) - (Q_2 * C_2)) * \Delta t$.

$$\frac{\Delta CA}{\Delta t} = ((Q_1 * C_1) - (Q_2 * C_2))$$

calculando el límite de cuando Δt → 0

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta CA}{\Delta t} = ((Q_1 * C_1) - (Q_2 * C_2))$$

Que corresponde a la derivada

$$\frac{dCA}{dt} = ((Q_1 * C_1) - (Q_2 * C_2))$$

donde $Q_1$, $C_1$ y $Q_2$ son constantes

Si:

$$C_2(t) = \frac{CA(t)}{V(t)} = \frac{CA(t)}{V_0 + (Q_1 - Q_2) * t}$$

entonces

$$\frac{dCA}{dt} = ((Q_1 * C_1) - (Q_2 * \frac{CA(t)}{V_0 + (Q_1 - Q_2) * t}))$$

$$\frac{dCA}{dt} + Q_2 * \frac{CA(t)}{V_0 + (Q_1 - Q_2) * t} = (Q_1 * C_1)$$

La ecuación diferencial asociada a problemas de mezclas es la ecuación diferencial lineal

$$\frac{dCA}{dt} + \frac{Q_2}{V_0 + (Q_1 - Q_2) * t} * CA(t) = (Q_1 * C_1)$$

# Planteamiento del problema:

Un tanque contiene originalmente 100 galones ($V_0$) de agua fresca. Se vierte dentro del tanque, agua que contiene ½ libra de sal por galón ($C_1$) a una velocidad de 2 gal/min ($Q_1$) y se permite que salga la mezcla con la misma rapidez ($Q_2$ =2 gal/min). Encontrar la cantidad de sal ($CA$) en el tanque al final de los 10 min ($t = 10min$).

## Solución Analítica

La ecuación diferencial asociada a los problemas de mezcla es:

$$\frac{dCA}{dt} + \frac{Q_2}{V_0 + (Q_1 - Q_2) * t} * CA = (Q_1 * C_1)$$

Sustituyendo los datos:

$$\frac{dCA}{dt} + \frac{2}{100 + (2 - 2) * t} * CA = \left(2 * \frac{1}{2}\right)$$

$$\frac{dCA}{dt} + \frac{1}{50} * CA = 1$$

$$\frac{dCA}{dt} = CA' = f(CA, t) = 1 - \frac{1}{50} * CA = 1 - \frac{CA}{50}$$

$$dCA = \left(1 - \frac{1}{50} * CA\right) dt$$

$$dCA = \left(\frac{50 - CA}{50}\right) dt$$

$$\frac{50}{50 - CA} dCA = dt \ \equiv \frac{50}{50 - CA} CA' = 1$$

Resolviendo

$$\frac{50}{50 - CA} CA' = 1$$

Se tiene como solución

$$-50 \ln(50 - CA) = t + c_1$$

Como condición inicial se tiene que al tiempo cero ($t = 0$) la cantidad de sal en el tanque es cero ($CA = 0$). Por lo tanto, el valor de $c_1$ será:

$$c_1 = -50ln(50) = -195.60115$$

Despejando CA se tiene

$$CA = -\mathrm{e}^{\frac{-t-c_1}{50}} + 50 = -\mathrm{e}^{\frac{-t+195.60115}{50}} + 50$$

Ahora si se desea saber la cantidad de sal al cabo de 10 minutos se reemplaza el valor de t por 10 ($t = 10$) y se tendrá entonces lo siguiente:

$$CA = -\mathrm{e}^{\frac{-10+195.60115}{50}} + 50 = 9.0634626$$

Interpretando el resultado anterior, se puede decir que al cabo de los 10 minutos la cantidad de sal en el tanque es de 9.0634626 libras de sal.

## Solución Numérica con el modelo de Euler

*Solución por Euler con 1 paso*

Condición $t_0$ inicial: 0
Condición $CA_0$ inicial: 0
Condición $t_f$ final: 10
Número de pasos: $n = 1$
Valor de Paso $h$

$$h = \frac{t_f - t_0}{n} = \frac{10 - 0}{1} = 10$$

La ecuación diferencial es:

$$f(CA, t) = 1 - \frac{CA}{50}$$

Por lo tanto, la pendiente para 1 paso será:

**1 paso**

$t_0 = 0 \ y \ CA_0 = 0$

$m = f(t_0, CA_0) = f(0,0) = 1$

$t_1 = t_0 + h = 0 + 10 = 10$ y $CA_1 = CA_0 + m * h = 0 + 1 * 10 = 10$

El tiempo y la cantidad de sal al cabo del 1 paso son: $t_1 = 10$ y $CA_1 = 10$

Par el tiempo t = 10 minutos, la cantidad de sal es: 10 libras teniendo en cuenta que el valor conseguido con 1 solo paso con el modelo de Euler.

*Tabla 1. Resumen de los datos obtenidos para 1 paso con el modelo del Euler*

| Paso | $m$ | $t_{i-1}$ | $t_i$ | $CA_{i-1}$ | $CA_i$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1.0 | 0.0000000 | 10.0000000 | 0.0000000 | 10.0000000 |

Fuente: Elaboración propia con DEV-C

Si se tiene en cuenta que el valor real calculado de manera analítica corresponde a:

$$CA = -\mathrm{e}^{\frac{-10+195.60115}{50}} + 50 = 9.0634626$$

El error de cálculo para 1 paso será:

$$e_r = \frac{|Valor_{real} - Valor_{calculado}|}{Valor_{real}} * 100\% = \frac{|9.0634626 - 10|}{9.0634626} * 100\% = 1.0333108\%$$

*Solución por Euler con 2 pasos*

Condición $t_0$ inicial: 0
Condición $CA_0$ inicial: 0
Condición $t_f$ final: 10
Número de pasos: $n = 2$
Valor de Paso $h$

$$h = \frac{t_f - t_0}{n} = \frac{10 - 0}{2} = 5$$

La ecuación diferencial es:

$$f(CA,t) = 1 - \frac{CA}{50}$$

Por tanto, los dos (2) pasos serán:

**Paso 1**

$t_0 = 0 \;\; y \; CA_0 = 0$

$m = f(t_0, CA_0) = f(0{,}0) = 1$

$t_1 = t_0 + h = 0 + 5 = 5$ y $CA_1 = CA_0 + m_1 * h = 0 + 1 * 5 = 5$

El tiempo y la cantidad de sal al cabo del 1 paso son: $t_1 = 5$ y $CA_1 = 5$

**Paso 2**

$t_1 = \; 5 \; y \; CA_1 = 5$

$m = fxy(t_1, CA_1) = f(\,5{,}5) = \; 0.9$

$t_2 = t_1 + h = 10 \; y \; CA_2 = CA_1 + m * h = 5 + 0.9 * \; 5 = 9.5$

El tiempo y la cantidad de sal al cabo del 1 paso son:$t_2 = 10$ y $CA_2 = 9.5$

Par el tiempo t = 10 minutos, la cantidad de sal es: 9.5 libras teniendo en cuenta que el valor conseguido con 2 solo paso con el modelo de Euler.

*Tabla 2. Resumen de los datos obtenidos para 2 pasos con el modelo del Euler*

| Paso | $m$ | $t_{i-1}$ | $t_i$ | $CA_{i-1}$ | $CA_i$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1.0 | 0.0000000 | 5.0000000 | 0.0 | 5.0 |
| 2 | 0.9 | 5.0000000 | 10.0000000 | 5.0 | 9.5 |

Fuente: Elaboración propia con DEV-C

Si se tiene en cuenta que el valor real calculado de manera analítica corresponde a:

$$CA = -\mathrm{e}^{\frac{-10+195.60115}{50}} + 50 = 9.0634626$$

El error de cálculo para 2 pasos será:

$$e_r = \frac{|Valor_{real} - Valor_{calculado}|}{Valor_{real}} * 100\% = \frac{|9.0634626 - 9.5|}{9.0634626} * 100\% = 4.8164528\%$$

*Solución por Euler con 4 pasos*

Condición $t_0$ inicial: 0
Condición $CA_0$ inicial: 0
Condición $t_f$ final: 10
Número de pasos: $n = 4$
Valor de Paso $h$

$$h = \frac{t_f - \; t_0}{n} = \frac{10 - 0}{4} = 2.5$$

La ecuación diferencial es:

$$f(CA,t) = 1 - \frac{CA}{50}$$

Por tanto, los cuatro (4) pasos serán:

**Paso 1**

$t_0 = 0 \;\; y \; CA_0 = 0$

$m = f(t_0, CA_0) = f(0{,}0) = 1$

$t_1 = t_0 + h = 0 + 2.5 = 2.5$ y $CA_1 = CA_0 + m * h = 0 + 1 * 2.5 = 2.5$

El tiempo y la cantidad de sal al cabo del 1 paso son: $t_1 = 2.5$ y $CA_1 = 2.5$

**Paso 2**

$t_1 = \; 2.5 \; y \; CA_1 = 2.5$

$m = fxy(t_1, CA_1) = f(\,2.5{,}2.5) = \; 0.95$

$t_2 = t_1 + h = \; 5 \; y \; CA_2 = CA_1 + m * h = 2.5 + 0.95 * \; 2.5 = 4.875$

El tiempo y la cantidad de sal al cabo del 2 paso son: $t_2 = 5$ y $CA_2 = 4.875$

**Paso 3**

$t_2 = \; 5 \; y \; CA_2 = 4.875$

$m = fxy(t_2, CA_2) = f(\,5{,}4.875) = \; 0.9025$

$t_3 = t_2 + h = \; 8 \; y \; CA_3 = CA_2 + m * h = 4.875 + 0.9025 * \; 2 = 7.13125$

El tiempo y la cantidad de sal al cabo del 3 paso son: $t_3 = 7.5$ y $CA_3 = 7.13125$

**Paso 4**

$t_3 = \; 8 \; y \; CA_3 = 7.13125$

$m = fxy(t_3, CA_3) = f(\,8{,}7.13125) = \; 0.857375$

$t_4 = t_3 + h = 10 \; y \; CA_4 = CA_3 + m * h = 7.13125 + 0.857375 * \; 2 = 9.2746875$

El tiempo y la cantidad de sal al cabo del 4 paso son: $t_4 = 10$ y $CA_4 = 9.2746875$

Al cabo de los 4 pasos (10 minutos) la cantidad de sal que existe en el tanque es de 9.2746875 libras, tal como se puede observar en los datos de la Tabla 2

*Tabla 3. Resumen de los datos obtenidos para 4 pasos con el modelo del Euler*

| Paso | $m$ | $t_{i-1}$ | $t_i$ | $CA_{i-1}$ | $CA_i$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1.000000 | 0.0000000 | 2.5000000 | 0.0000000 | 2.5000000 |
| 2 | 0.950000 | 2.5000000 | 5.0000000 | 2.5000000 | 4.8750000 |
| 3 | 0.902500 | 5.0000000 | 7.5000000 | 4.8750000 | 7.1312500 |
| 4 | 0.857375 | 7.5000000 | 10.0000000 | 7.1312500 | 9.2746875 |

Fuente: Elaboración propia con DEV-C

Si se tiene en cuenta que el valor real calculado de manera analítica corresponde a:

$$CA = -\mathrm{e}^{\frac{-10+195.60115}{50}} + 50 = 9.0634626$$

El error de cálculo para 4 pasos será:

$$e_r = \frac{|Valor_{real} - Valor_{calculado}|}{Valor_{real}} * 100\% = \frac{|9.0634626 - 9.2746875|}{9.0634626} * 100\% = 2.33051\%$$

*Solución por Euler con 10 pasos:*

Condición $t_0$ inicial: 0
Condición $CA_0$ inicial: 0
Condición $t_f$ final: 10
Número de pasos: $n = 10$

Valor de Paso $h$

$$h = \frac{t_f - t_0}{n} = \frac{10-0}{10} = 1$$

La ecuación diferencial es:

$$f(CA,t) = 1 - \frac{CA}{50}$$

**Paso 1**

$t_0 = 0 \; y \; CA_0 = 0$

$m = fxy(t_0, CA_0) = f(0{,}0) = 1$

$t_1 = t_0 + h = 1 \; y \; CA_1 = CA_0 + m * h = 0 + 1 * 1 = 1$

El tiempo y la cantidad de sal al cabo del 1 paso son: $t_1 = 1$ y $CA_1 = 1$

**Paso 2**

$t_1 = 1 \; y \; CA_1 = 1$

$m = fxy(t_1, CA_1) = f(1{,}1) = 0.98$

$t_2 = t_1 + h = 2 \; y \; CA_2 = CA_1 + m * h = 1 + 0.98 * 1 = 1.98$

El tiempo y la cantidad de sal al cabo del 2 paso son: $t_2 = 2$ y $CA_2 = 1.98$

**Paso 3**

$t_2 = 2 \; y \; CA_2 = 1.98$

$m = fxy(t_2, CA_2) = f(2{,}1.98) = 0.9604$

$t_3 = t_2 + h = 3 \; y \; CA_3 = CA_2 + m * h = 1.98 + 0.9604 * 1 = 2.9404$

El tiempo y la cantidad de sal al cabo del 3 paso son: $t_3 = 3$ y $CA_3 = 2.9404$

**Paso 4**

$t_3 = 3 \; y \; CA_3 = 2.9404$

$m = fxy(t_3, CA_3) = f(3{,}2.9404) = 0.941192$

$t_4 = t_3 + h = 4 \; y \; CA_4 = CA_3 + m * h = 2.9404 + 0.941192 * 1 = 3.8815920$

El tiempo y la cantidad de sal al cabo del 4 paso son: $t_4 = 4$ y $CA_4 = 3.8815920$

**Paso 5**

$t_4 = 4 \; y \; CA_4 = 3.881592$

$m = fxy(t_4, CA_4) = f(4{,}3.881592) = 0.9223682$

$t_5 = t_4 + h = 5 \; y \; CA_5 = CA_4 + m * h = 3.881592 + 0.9223682 * 1 = 4.8039602$

El tiempo y la cantidad de sal al cabo del 5 paso son: $t_5 = 5$ y $CA_5 = 4.8039602$

**Paso 6**

$t_5 = 5 \; y \; CA_5 = 4.8039602$

$m = fxy(t_5, CA_5) = f(5{,}4.803960) = 0.9039208$

$t_6 = t_5 + h = 6 \; y \; CA_6 = CA_5 + m * h = 4.8039602 + 0.9039208 * 1 = 5.7078810$

El tiempo y la cantidad de sal al cabo del 6 paso son: $t_6 = 4$ y $CA_6 = 5.7078810$

**Paso 7**

$t_6 = 6 \; y \; CA_6 = 5.707881$

$m = fxy(t_6, CA_6) = f(6{,}5.707881) = 0.8858424$

$t_7 = t_6 + h = 7\ y\ CA_7 = CA_6 + m * h = 5.707881 + 0.8858424 *\ 1 = 6.5937233$

El tiempo y la cantidad de sal al cabo del 7 paso son: $t_7 = 4$ y $CA_7 = 6.5937233$

**Paso 8**

$t_7 =\ 7\ y\ \ CA_7 = 6.5937233$

$m = fxy(t_7, CA_7) = f(\,7{,}6.593723) =\ 0.8681255$

$t_8 = t_7 + h = 8\ y\ CA_8 = CA_7 + m * h = 6.5937233 + 0.8681255 *\ 1 = 7.4618489$

El tiempo y la cantidad de sal al cabo del 8 paso son: $t_8 = 8$ y $CA_8 = 7.4618489$

**Paso 9**

$t_8 =\ 8\ y\ \ CA_8 = 7.4618489$

$m = fxy(t_8, CA_8) = f(\,8{,}7.461849) =\ 0.850763$

$t_9 = t_8 + h = 9\ y\ CA_9 = CA_8 + m * h = 7.4618489 + 0.850763 *\ 1 = 8.3126119$

El tiempo y la cantidad de sal al cabo del 9 paso son: $t_9 = 9$ y $CA_9 = 8.3126119$

**Paso 10**

$t_9 =\ 9\ y\ CA_9 = 8.3126119$

$m = fxy(t_9, CA_9) = f(\,9{,}8.312612) =\ 0.8337478$

$t_{10} = t_9 + h = 10\ y\ CA_{10} = CA_9 + m * h = 8.3126119 + 0.8337478 *\ 1 = 9.1463597$

Par el tiempo t = 10 minutos, la cantidad de sal es: 9.1463597 libras. El resumen de los datos obtenido en los 10 pasos aplicando el método de Euler se puede observar en la Tabla 4.

*Tabla 4. Datos para 10 pasos con el modelo del Euler*

| Paso | $m$ | $t_{i-1}$ | $t_i$ | $CA_{i-1}$ | $CA_i$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1.0000000 | 0.0000000 | 1.0000000 | 0.0000000 | 1.0000000 |
| 2 | 0.9800000 | 1.0000000 | 2.0000000 | 1.0000000 | 1.9800000 |
| 3 | 0.9604000 | 2.0000000 | 3.0000000 | 1.9800000 | 2.9404000 |
| 4 | 0.9411920 | 3.0000000 | 4.0000000 | 2.9404000 | 3.8815920 |
| 5 | 0.9223682 | 4.0000000 | 5.0000000 | 3.8815920 | 4.8039602 |
| 6 | 0.9039208 | 5.0000000 | 6.0000000 | 4.8039602 | 5.7078810 |
| 7 | 0.8858424 | 6.0000000 | 7.0000000 | 5.7078810 | 6.5937233 |
| 8 | 0.8681255 | 7.0000000 | 8.0000000 | 6.5937233 | 7.4618489 |
| 9 | 0.8507630 | 8.0000000 | 9.0000000 | 7.4618489 | 8.3126119 |
| 10 | 0.8337478 | 9.0000000 | 10.0000000 | 8.3126119 | 9.1463597 |

Fuente: Elaboración propia con DEV-C

Si se tiene en cuenta que el valor real calculado de manera analítica corresponde a:

$$CA = -\mathrm{e}^{\frac{-10+195.60115}{50}} + 50 = 9.0634626$$

El error de cálculo para 10 pasos será:

$$e_r = \frac{|Valor_{real} - Valor_{calculado}|}{Valor_{real}} * 100\% = \frac{|9.0634626 - 9.1463597|}{9.0634626} * 100\% = 0.9146295\%$$

## Solución Numérica con el modelo de Euler Mejorado

*Solución con el modelo de Euler Mejorado con 1 Paso*

Condición tiempo inicial ($t_0$) inicial: 0
Condición Cantidad de Sal ($CA_0$) inicial: 0

Condición $t_f$ final: 10
Número de pasos: $n = 1$
Valor de Paso $h$

$$h = \frac{t_f - t_0}{n} = \frac{10 - 0}{1} = 10$$

La ecuación diferencial es:

$$f(CA, t) = 1 - \frac{CA}{50}$$

**Paso 1**

$t_0 = 0\ y\ CA_0 = 0$

$m_1 = fxy(t_0, CA_0) = f(0{,}0) = 1$

$m_2 = fxy(t_0 + h, CA_0 + m_1 * h) = f(10{,}10) = 0.8$

$$m = \frac{(m_1 + m_2)}{2} = \frac{1 + 0.8}{2} = 0.9$$

$t_1 = t_0 + h = 10\ y\ CA_1 = CA_0 + m * h = 0 + 0.9 * 10 = 9$

*Tabla 5. Datos con 1 paso por Euler Mejorado*

| Paso | $m_1$ | $CA_{tem}$ | $m_2$ | $m$ | $t_i$ | $CA_i$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 10 | 0.8 | 0.9 | 10 | 9 |

Fuente: Elaboración propia con DEV-C

Si se tiene en cuenta que el valor real calculado de manera analítica corresponde a:

$$CA = -e^{\frac{-10+195.60115}{50}} + 50 = 9.0634626$$

El error de cálculo para 1 paso será:

$$e_r = \frac{|Valor_{real} - Valor_{calculado}|}{Valor_{real}} * 100\% = \frac{|9.0634626 - 9|}{9.0634626} * 100\% = 0.7002026\%$$

*Solución con el modelo de Euler Mejorado con 2 Pasos*

Condición Tiempo inicial ($t_0$) inicial: 0
Condición Cantidad de Sal ($CA_0$) inicial: 0
Condición $t_f$ final: 10
Número de pasos: $n = 2$
Valor de Paso $h$

$$h = \frac{t_f - t_0}{n} = \frac{10 - 0}{2} = 5$$

La ecuación diferencial es:

$$f(CA, t) = 1 - \frac{CA}{50}$$

**Paso 1**

$t_0 = 0\ y\ CA_0 = 0$

$m_1 = fxy(t_0, CA_0) = f(0{,}0.000000) = 1.0000000$

$m_2 = fxy(t_0 + h, CA_0 + m_1 * h) = f(5{,}5.000000) = 0.9000000$

$$m = \frac{(m_1 + m_2)}{2} = \frac{1.0000000 + 0.9000000}{2} = 0.95$$

$t_1 = t_0 + h = \ 5 \ y \ CA_1 = CA_0 + m * h = 0.0000000 + 0.9500000 * \ 5 = 4.7500000$

**Paso 2**

$t_1 = \ 5 \ y \ CA_1 = 4.7500000$

$m_1 = fxy(t_1, CA_1) = f(\ 5{,}4.750000) = \ 0.9050000$

$m_2 = fxy(t_1 + h, CA_1 + m_1 * h) = f(10{,}9.275000) = \ 0.8145000$

$$m = \frac{(m_1 + m_2)}{2} = \frac{0.9050000 + 0.8145000}{2} = 0.8597500$$

$t_2 = t_1 + h = 10 \ y \ CA_2 = CA_1 + m * h = 4.7500000 + 0.8597500 * \ 5 = 9.0487500$

*Tabla 6. Datos con 2 pasos por Euler Mejorado*

| Paso | $m_1$ | $CA_{tem}$ | $m_2$ | $m$ | $t_i$ | $CA_i$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1.0000000 | 5.0000000 | 0.9000000 | 0.9500000 | 5.0000000 | 4.7500000 |
| 2 | 0.9050000 | 9.2750000 | 0.8145000 | 0.8597500 | 10.0000000 | 9.0487500 |

Fuente: Elaboración propia con DEV-C

Si se tiene en cuenta que el valor real calculado de manera analítica corresponde a:

$$CA = -\mathrm{e}^{\frac{-10+195.60115}{50}} + 50 = 9.0634626$$

El error de cálculo para 2 pasos será:

$$e_r = \frac{|Valor_{real} - Valor_{calculado}|}{Valor_{real}} * 100\% = \frac{|9.0634626 - 9.0487500|}{9.0634626} * 100\% = 0.1623287\%$$

*Solución con el modelo de Euler Mejorado con 4 Pasos*

Condición Tiempo inicial ($t_0$) inicial: 0
Condición Cantidad de Sal ($CA_0$) inicial: 0
Condición $t_f$ final: 10
Número de pasos: $n = 4$
Valor de Paso $h$:

$$h = \frac{t_f - \ t_0}{n} = \frac{10 - 0}{4} = 2.5$$

La ecuación diferencial es:

$$f(CA, t) = 1 - \frac{CA}{50}$$

**Paso 1**

$t_0 = \ 0 \ y \ \ CA_0 = 0$

$m_1 = fxy(t_0, CA_0) = f(0.0{,}0.000000) = \ 1.0000000$

$m_2 = fxy(t_0 + h, CA_0 + m_1 * h) = f(2.5{,}2.500000) = \ 0.9500000$

$$m = \frac{(m_1 + m_2)}{2} = \frac{1.0000000 + 0.9500000}{2} = 0.9750000$$

$t_1 = t_0 + h = \ 2 \ y \ CA_1 = CA_0 + m * h = 0.0000000 + 0.9750000 * \ 2 = 2.4375000$

El tiempo y la cantidad de sal al cabo del 1 paso son: $t_1 = 2 \ y \ CA_1 = 2.4375000$

**Paso 2**

$t_1 = 2.5 \ y \ CA_1 = 2.4375000$

$m_1 = fxy(t_1, CA_1) = f(2.5{,}2.437500) = \ 0.9512500$

$m_2 = fxy(t_1 + h, CA_1 + m_1 * h) = f(5.0{,}4.815625) = \ 0.9036875$

$m = \frac{(m_1 + m_2)}{2} = \frac{0.9512500 + 0.9036875}{2} = 0.9274687$

$t_2 = t_1 + h = \ 5 \ y \ CA_2 = CA_1 + m * h = 2.4375000 + 0.9274687 * \ 2 = 4.7561719$

El tiempo y la cantidad de sal al cabo del 2 paso son: $t_2 = \ 5 \ y \ CA_2 = 4.7561719$

**Paso 3**

$t_2 = 5.0 \ y \ CA_2 = 4.7561719$

$m_1 = fxy(t_2, CA_2) = f(5.0{,}4.756172) = \ 0.9048766$

$m_2 = fxy(t_2 + h, CA_2 + m_1 * h) = f(7.5{,}7.018363) = \ 0.8596327$

$m = \frac{(m_1 + m_2)}{2} = \frac{+}{2} =$

$t_3 = t_2 + h = \ 8 \ y \ CA_3 = CA_2 + m * h = 4.7561719 + 0.8822546 * \ 2 = 6.9618085$

El tiempo y la cantidad de sal al cabo del 3 paso son: $t_3 = 8 \ y \ CA_3 = 6.9618085$

**Paso 4**

$t_3 = 7.5 \ y \ CA_3 = 6.9618085$

$m_1 = fxy(t_3, CA_3) = f(7.5{,}6.961808) = \ 0.8607638$

$m_2 = fxy(t_3 + h, CA_3 + m_1 * h) = f(10.0{,}9.113718) = \ 0.8177256$

$m = \frac{(m_1 + m_2)}{2} = \frac{0.8607638 + 0.8177256}{2} = 0.8392447$

$t_4 = t_3 + h = 10 \ y \ CA_4 = CA_3 + m * h = 6.9618085 + 0.8392447 * \ 2 = 9.0599203$

El tiempo y la cantidad de sal al cabo del 4 paso son: $t_4 = 10 \ y \ CA_4 = 9.0599203$

El resumen de los datos obtenidos en los 4 pasos se puede observar en la Tabla 7

*Tabla 7. Datos con 4 pasos por Euler Mejorado*

| Paso | $m_1$ | $CA_{tem}$ | $m_2$ | $m$ | $t_i$ | $CA_i$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1.0000000 | 2.5000000 | 0.9500000 | 0.9750000 | 2.5000000 | 2.4375000 |
| 2 | 0.9512500 | 4.8156250 | 0.9036875 | 0.9274687 | 5.0000000 | 4.7561719 |
| 3 | 0.9048766 | 7.0183633 | 0.8596327 | 0.8822546 | 7.5000000 | 6.9618085 |
| 4 | 0.8607638 | 9.1137181 | 0.8177256 | 0.8392447 | 10.0000000 | 9.0599203 |

Fuente: Elaboración propia con DEV-C

Si se tiene en cuenta que el valor real calculado de manera analítica corresponde a:

$$CA = -\mathrm{e}^{\frac{-10+195.60115}{50}} + 50 = 9.0634626$$

El error de cálculo para 4 pasos será:

$$e_r = \frac{|Valor_{real} - Valor_{calculado}|}{Valor_{real}} * 100\% = \frac{|9.0634626 - 9.0599203|}{9.0634626} * 100\% = 0.0390833\%$$

*Solución con el modelo de Euler Mejorado con 10 Pasos*

Condición Tiempo inicial ($t_0$) inicial: 0
Condición Cantidad de Sal ($CA_0$) inicial: 0
Condición $t_f$ final: 10

Número de pasos: $n = 10$
Valor de Paso $h$

$$h = \frac{t_f - t_0}{n} = \frac{10 - 0}{10} = 1$$

La ecuación diferencial es:

$$f(CA, t) = 1 - \frac{CA}{50}$$

**Paso 1**

$t_0 = 0 \; y \; CA_0 = 0$

$m_1 = fxy(t_0, CA_0) = f(0{,}0) = 1$

$m_2 = fxy(t_0 + h, CA_0 + m_1 * h) = f(1{,}1) = 0.98$

$$m = \frac{(m_1 + m_2)}{2} = \frac{1 + 0.98}{2} = 0.99$$

$t_1 = t_0 + h = 1 \; y \; CA_1 = CA_0 + m * h = 0 + 0.99 * 1 = 0.99$

El tiempo y la cantidad de sal al cabo del 1 paso son: $t_1 = 1 \; y \; CA_1 = 0.99$

**Paso 2**

$t_1 = 1 \; y \; CA1 = 0.99$

$m_1 = fxy(t_1, CA_1) = f(1{,}0.99) = 0.9802$

$m_2 = fxy(t_1 + h, CA_1 + m_1 * h) = f(2{,}1.9702) = 0.960596$

$$m = \frac{(m_1 + m_2)}{2} = \frac{0.9802 + 0.960596}{2} = 0.970398$$

$t_2 = t_1 + h = 2 \; y \; CA_2 = CA_1 + m * h = 0.99 + 0.970398 * 1 = 1.960398$

El tiempo y la cantidad de sal al cabo del 2 paso son: $t_2 = 2 \; y \; CA_2 = 1.960398$

**Paso 3**

$t_2 = 2 \; y \; CA_2 = 1.960398$

$m_1 = fxy(t_2, CA_2) = f(2{,}1.960398) = 0.960792$

$m_2 = fxy(t_2 + h, CA_2 + m_1 * h) = f(3{,}2.92119) = 0.9415762$

$$m = \frac{(m_1 + m_2)}{2} = \frac{0.960792 + 0.9415762}{2} = 0.9511841$$

$t_3 = t_2 + h = 3 \; y \; CA_3 = CA_2 + m * h = 1.960398 + 0.9511841 * 1 = 2.9115821$

El tiempo y la cantidad de sal al cabo del 3 paso son: $t_3 = 3 \; y \; CA_3 = 2.9115821$

**Paso 4**

$t_3 = 3 \; y \; CA_3 = 2.9115821$

$m_1 = fxy(t_3, CA_3) = f(3{,}2.911582) = 0.9417684$

$m_2 = fxy(t_3 + h, CA_3 + m_1 * h) = f(4{,}3.85335) = 0.922933$

$$m = \frac{(m_1 + m_2)}{2} = \frac{0.9417684 + 0.922933}{2} = 0.9323507$$

$t_4 = t_3 + h = 4 \; y \; CA_4 = CA_3 + m * h = 2.9115821 + 0.9323507 * 1 = 3.8439328$

El tiempo y la cantidad de sal al cabo del 4 paso son: $t_4 = 4 \; y \; CA_4 = 3.8439328$

**Paso 5**

$t_4 = 4 \; y \; CA_4 = 3.8439328$

$m_1 = fxy(t_4, CA_4) = f(\,4{,}3.843933) = \,0.9231213$

$m_2 = fxy(t_4 + h, CA_4 + m_1 * h) = f(5{,}4.767054) = \,0.9046589$

$m = \dfrac{(m_1 + m_2)}{2} = \dfrac{0.9231213 + 0.9046589}{2} = 0.9138901$

$t_5 = t_4 + h = \,5\; y\; CA_5 = CA_4 + m * h = 3.8439328 + 0.9138901 * \,1 = 4.7578229$

El tiempo y la cantidad de sal al cabo del 5 paso son: $t_5 = 5\; y\; CA_5 = 4.7578229$

**Paso 6**

$t_5 = \,5\; y\; CA_5 = 4.7578229$

$m_1 = fxy(t_5, CA_5) = f(\,5{,}4.757823) = \,0.9048435$

$m_2 = fxy(t_5 + h, CA_5 + m_1 * h) = f(6{,}5.662666) = \,0.8867467$

$m = \dfrac{(m_1 + m_2)}{2} = \dfrac{0.9048435 + 0.8867467}{2} = 0.8957951$

$t_6 = t_5 + h = \,6\; y\; CA_6 = CA_5 + m * h = 4.7578229 + 0.8957951 * \,1 = 5.653618$

El tiempo y la cantidad de sal al cabo del 6 paso son: $t_6 = 6\; y\; CA_6 = 5.653618$

**Paso 7**

$t_6 = \,6\; y\; CA_6 = 5.6536180$

$m_1 = fxy(t_6, CA_6) = f(\,6{,}5.653618) = \,0.8869276$

$m_2 = fxy(t_6 + h, CA_6 + m_1 * h) = f(7{,}6.540546) = \,0.8691891$

$m = \dfrac{(m_1 + m_2)}{2} = \dfrac{0.8869276 + 0.8691891}{2} = 0.8780584$

$t_7 = t_6 + h = \,7\; y\; CA_7 = CA_6 + m * h = 5.6536180 + 0.8780584 * \,1 = 6.5316764$

El tiempo y la cantidad de sal al cabo del 7 paso son: $t_7 = 7\; y\; CA_7 = 6.5316764$

**Paso 8**

$t_7 = \,7\; y\; CA_7 = 6.5316764$

$m_1 = fxy(t_7, CA_7) = f(\,7{,}6.531676) = \,0.8693665$

$m_2 = fxy(t_7 + h, CA_7 + m_1 * h) = f(\,8{,}7.401043) = \,0.8519791$

$m = \dfrac{(m_1 + m_2)}{2} = \dfrac{0.8693665 + 0.8519791}{2} = 0.8606728$

$t_8 = t_7 + h = \,8\; y\; CA_8 = CA_7 + m * h = 6.5316764 + 0.8606728 * \,1 = 7.3923492$

El tiempo y la cantidad de sal al cabo del 8 paso son: $t_8 = \,8\; y\; CA_8 = 7.3923492$

**Paso 9**

$t_8 = \,8\; y\; CA_8 = 7.3923492$

$m_1 = fxy(t_8, CA_8) = f(\,8{,}7.392349) = \,0.852153$

$m_2 = fxy(t_8 + h, CA_8 + m_1 * h) = f(\,9{,}8.244502) = \,0.83511$

$m = \dfrac{(m_1 + m_2)}{2} = \dfrac{0.8521530 + 0.83511}{2} = 0.8436315$

$t_9 = t_8 + h = \,9\; y\; CA_9 = CA_8 + m * h = 7.3923492 + 0.8436315 * \,1 = 8.2359807$

El tiempo y la cantidad de sal al cabo del 9 paso son: $t_9 = 9\; y\; CA_9 = 8.2359807$

**Paso 10**

$t_9 = \,9\; y\; CA_9 = 8.2359807$

$m_1 = fxy(t_9, CA_9) = f(\ 9{,}8.235981) = \ 0.8352804$

$m_2 = fxy(t_9 + h, CA_9 + m_1 * h) = f(10{,}9.071261) = \ 0.8185748$

$m = \frac{(m_1 + m_2)}{2} = \frac{0.8352804 + 0.8185748}{2} = 0.8269276$

$t_{10} = t_9 + h = 10\ y\ CA_{10} = CA_9 + m * h = 8.2359807 + 0.8269276 * \ 1 = 9.0629083$

El tiempo y la cantidad de sal al cabo del 10 paso son: $t_{10} = 10\ y\ CA_{10} = 9.0629083$

Los datos obtenidos en cada uno de los 10 pasos se pueden observar en la Tabla 8

*Tabla 8. datos con los 10 pasos por Euler Mejorado*

| Paso | $m_1$ | $CA_{tem}$ | $m_2$ | $m$ | $t_i$ | $CA_i$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1.00000 | 1.0000000 | 0.98000 | 0.99000 | 1.00000 | 0.9900000 |
| 2 | 0.98020 | 1.9702000 | 0.96060 | 0.97040 | 2.00000 | 1.9603980 |
| 3 | 0.96079 | 2.9211900 | 0.94158 | 0.95118 | 3.00000 | 2.9115821 |
| 4 | 0.94177 | 3.8533505 | 0.92293 | 0.93235 | 4.00000 | 3.8439328 |
| 5 | 0.92312 | 4.7670541 | 0.90466 | 0.91389 | 5.00000 | 4.7578229 |
| 6 | 0.90484 | 5.6626665 | 0.88675 | 0.89580 | 6.00000 | 5.6536180 |
| 7 | 0.88693 | 6.5405457 | 0.86919 | 0.87806 | 7.00000 | 6.5316764 |
| 8 | 0.86937 | 7.4010429 | 0.85198 | 0.86067 | 8.00000 | 7.3923492 |
| 9 | 0.85215 | 8.2445022 | 0.83511 | 0.84363 | 9.00000 | 8.2359807 |
| 10 | 0.83528 | 9.0712611 | 0.81857 | 0.82693 | 10.00000 | 9.0629083 |

Fuente: Elaboración propia con DEV-C

Si se tiene en cuenta que el valor real calculado de manera analítica corresponde a:

$$CA = -\mathrm{e}^{\frac{-10+195.60115}{50}} + 50 = 9.0634626$$

El error de cálculo para 10 pasos será:

$$e_r = \frac{|Valor_{real} - Valor_{calculado}|}{Valor_{real}} * 100\% = \frac{|9.0634626 - 9.0629083|}{9.0634626} * 100\% = 0.0061158\%$$

## Solución Numérica con el modelo de Runge Kutta de orden 4

*Solución por Runge Kutta orden 4 con 1 paso*

Desarrollando el ejercicio por el método de Runge Kutta de orden 4, con 1 paso se tendría lo siguiente:

Condición $t_0$ inicial: 0
Condición $CA_0$ inicial: 0
Condición $t_f$ final: 10
Número de pasos: $n = 1$
Valor de Paso $h$

$h = \frac{t_f - \ t_0}{n} = \frac{10 - 0}{1} = 10$

La ecuación diferencial es:

$$f(CA, t) = 1 - \frac{CA}{50}$$

Por lo tanto, las pendientes para 1 paso serán:

**Paso 1.**

$t_0 = 0$ y $CA_0 = 0$

Las 4 pendientes serán:

$$k_1 = f(t_0, CA_0) = f(0{,}0) = 1$$

$$k_2 = f\left(t_0 + \frac{h}{2}, CA_0 + \frac{h}{2} * k_1\right) = f\left(0 + \frac{10}{2}, 0 + \frac{10}{2} * 1\right) = f(\,5{,}5) = 0.9$$

$$k_3 = f\left(t_0 + \frac{h}{2}, CA_0 + \frac{h}{2} * k_2\right) = f\left(0 + \frac{10}{2}, 0 + \frac{10}{2} * 0.9\right) = f(\,5, 4.5) = 0.91$$

$$k_4 = f(t_0 + h, CA_0 + h * k_3) = f(0 + 10, 0 + 10 * 0.91) = f(10, 9.1) = 0.818$$

La pendiente promedio será:

$$k_p = \frac{k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4}{6} = \frac{1.0000000 + 2 * 0.9000000 + 2 * 0.9100000 + 0.8180000}{6} = \ 0.9063333$$

Las coordenadas al final del paso número 1 será:

$$t_1 = t_0 + h = 0 + 10 = 10$$

$$CA_1 = CA_0 + k_p * h = 0 + 0.90633 * 10 = 9.06633$$

$$t1 = 10.000000\ y\ CA1 = 9.0633333$$

Par el tiempo t = 10.000000 la cantidad de sal es: 9.0633333 teniendo en cuenta que el valor conseguido se obtuvo con 1 solo paso.

Si se tiene en cuenta que el valor real calculado de manera analítica corresponde a:

$$CA = -\mathrm{e}^{\frac{-10+195.60115}{50}} + 50 = 9.0634626$$

El error de cálculo para 1 paso será:

$$e_r = \frac{|Valor_{real} - Valor_{calculado}|}{Valor_{real}} * 100\% = \frac{|9.0634626 - 9.0633333|}{9.0634626} * 100\% = 0.0014266\%$$

*Solución por Runge Kutta orden 4 con 2 pasos*

Desarrollando el ejercicio por el método de Runge Kutta de orden 4, con 1 paso se tendría lo siguiente:

Condición $t_0$ inicial: 0
Condición $CA_0$ inicial: 0
Condición $t_f$ final: 10
Número de pasos: $n = 2$
Valor de Paso $h$

$$h = \frac{t_f - \ t_0}{n} = \frac{10 - 0}{2} = 5$$

La ecuación diferencial es:

$$f(CA, t) = 1 - \frac{CA}{50}$$

Por lo tanto, los cálculos de las pendientes para los 2 pasos serán:

**Paso 1**

$$t_0 = 0.000000\ y\ \ CA_0 = 0.0000000$$

Las 4 pendientes serán:

$$k_1 = f(t_0, CA_0) = f(\,0{,}0.0000000) = 1.0000000$$

$$k_2 = f(t_0 + h/2, CA_0 + h/2 * k_1) = f(\,0 +\ 5/2{,}0.0000000 +\ 5/2 * 1.0000000) = f(\,2.5, 2.5000000) = 0.9500000$$

$$k_3 = f(t_0 + h/2, CA_0 + h/2 * k_2) = f(\,0 +\ 5/2{,}0.0000000 +\ 5/2 * 0.9500000) = f(\,2.5, 2.3750000) = 0.9525000$$

$k_4 = f(t_0 + h, CA_0 + h * k_3) = f(\ 0 +\ 5{,}0.0000000 +\ 5 * 0.9525000) = f(\ 5.0, 4.7625000) = 0.9047500$

La pendiente promedio será:

$$k_p = \frac{k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4}{6} = \frac{1.0000000 + 2 * 0.9500000 + 2 * 0.9525000 + 0.9047500}{6} =\ 0.9516250$$

Las coordenadas al final del paso numero 1 será:

$t_1 = t_0 + h =\ 0 + 5 =\ 5\ y\ \ CA_1 =\ CA_0 + kp * h = 0.0000000 + 0.9516250 * 5 = 4.7581250$

**Paso 2**

$t_1 = 5.000000\ y\ CA1 = 4.7581250$

Las 4 pendientes serán:

$k1 = f(t_1, CA_1) = f(\ 5{,}4.7581250) = 0.9048375$

$k2 = f(t_1 + h/2, CA_1 + h/2 * k1) = f(\ 5 +\ 5/2{,}4.7581250 +\ 5/2 * 0.9048375) = f(\ 7.5, 7.0202188) = 0.8595956$

$k3 = f(t_1 + h/2, CA_1 + h/2 * k2) = f(\ 5 +\ 5/2{,}4.7581250 +\ 5/2 * 0.8595956) = f(\ 7.5, 6.9071141) = 0.8618577$

$k4 = f(t_1 + h, CA_1 + h * k3) = f(\ 5 +\ 5{,}4.7581250 +\ 5 * 0.8618577) = f(10.0, 9.0674136) = 0.8186517$

La pendiente promedio será:

$$k_p = \frac{k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4}{6} =\ (0.9048375 + 2 * 0.8595956 + 2 * 0.8618577 + 0.8186517)/6\ =\ 0.8610660$$

Las coordenadas al final del paso numero 2 será:

$t_2 = t_1 + h =\ 5 + 5 = 10\ y\ CA_2 = CA_1 + kp * h = 4.7581250 + 0.8610660 * 5 = 9.0634549$

Para el tiempo t = 10 la cantidad de sal es: 9.06345493

Si se tiene en cuenta que el valor real calculado de manera analítica corresponde a:

$$CA = -e^{\frac{-10+195.60115}{50}} + 50 = 9.0634626$$

El error de cálculo para 2 pasos será:

$$e_r = \frac{|Valor_{real} - Valor_{calculado}|}{Valor_{real}} * 100\% = \frac{|9.0634626 - 9.06345493|}{9.0634626} * 100\% = 0.0000846\%$$

*Tabla 9. Resumen de valores realizados 2 paso con el modelo de Runge Kutta orden*

| Paso | $k_1$ | $k_2$ | $k_3$ | $k_4$ | $k_p$ | $t_f$ | $CA_f$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1.0000000 | 0.9500000 | 0.9525000 | 0.9047500 | 0.9516250 | 5.00000 | 4.7581250 |
| 2 | 0.9048375 | 0.8595956 | 0.8618577 | 0.8186517 | 0.8610660 | 10.00000 | 9.0634549 |

Fuente: Elaboración propia con DEV-C

*Solución por Runge Kutta orden 4 con 4 pasos*

Desarrollando el ejercicio por el método de Runge Kutta de orden 4, con 1 paso se tendría lo siguiente:

Condición $t_0$ inicial: 0
Condición $CA_0$ inicial: 0
Condición $t_f$ final: 10
Número de pasos: $n = 4$
Valor de Paso $h$

$$h = \frac{t_f -\ t_0}{n} = \frac{10 - 0}{4} = 2.5$$

La ecuación diferencial es:

$$f(CA,t) = 1 - \frac{CA}{50}$$

Por lo tanto, los cálculos de las pendientes para los 4 pasos serán:

**Paso 1**

$t_0 = 0.000000\ y\ CA_0 = 0.0000000$

Las 4 pendientes serán:

$k_1 = f(t_0, CA_0) = f(\ 0{,}0.0000000) = 1.0000000$

$k_2 = f(t_0 + h/2, CA_0 + h/2 * k_1) = f(\ 0 +\ 2/2{,}0.0000000 +\ 2/2 * 1.0000000) = f(\ 1.2, 1.2500000) = 0.9750000$

$k_3 = f(t_0 + h/2, CA_0 + h/2 * k_2) = f(\ 0 +\ 2/2{,}0.0000000 +\ 2/2 * 0.9750000) = f(\ 1.2, 1.2187500) = 0.9756250$

$k_4 = f(t_0 + h, CA_0 + h * k_3) = f(\ 0 +\ 2{,}0.0000000 +\ 2 * 0.9756250) = f(\ 2.5, 2.4390625) = 0.9512187$

La pendiente promedio será:

$$k_p = \frac{k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4}{6} = \frac{1.0000000 + 2 * 0.9750000 + 2 * 0.9756250 + 0.9512187}{6} =\ 0.9754115$$

Las coordenadas al final del paso numero 1 será:

$t_1 = t_0 + h =\ 0 + 2 =\ 2\ y\ CA_1 = CA_0 + kp * h = 0.0000000 + 0.9754115 * 2 = 2.4385286$

**Paso 2**

$t_1 = 2.500000\ y\ CA1 = 2.4385286$

Las 4 pendientes serán:

$k_1 = f(t_1, CA_1) = f(\ 2{,}2.4385286) = 0.9512294$

$k_2 = f(t_1 + h/2, CA_1 + h/2 * k_1) = f(\ 2 +\ 2/2{,}2.4385286 +\ 2/2 * 0.9512294) = f(\ 3.8, 3.6275654) = 0.9274487$

$k_3 = f(t_1 + h/2, CA_1 + h/2 * k_2) = f(\ 2 +\ 2/2{,}2.4385286 +\ 2/2 * 0.9274487) = f(\ 3.8, 3.5978395) = 0.9280432$

$k_4 = f(t_1 + h, CA_1 + h * k_3) = f(\ 2 +\ 2{,}2.4385286 +\ 2 * 0.9280432) = f(\ 5.0, 4.7586367) = 0.9048273$

La pendiente promedio será:

$$k_p = \frac{k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4}{6} = \frac{0.9512294 + 2 * 0.9274487 + 2 * 0.9280432 + 0.9048273}{6} =\ 0.9278401$$

Las coordenadas al final del paso numero 2 será:

$t_2 = t_1 + h =\ 2 + 2 =\ 5\ y\ CA_2 = CA_1 + kp * h = 2.4385286 + 0.9278401 * 2 = 4.7581289$

**Paso 3**

$t_2 = 5.000000\ y\ CA2 = 4.7581289$

Las 4 pendientes serán:

$k_1 = f(t_2, CA_2) = f(\ 5{,}4.7581289) = 0.9048374$

$k_2 = f(t_2 + h/2, CA_2 + h/2 * k_1) = f(\ 5 +\ 2/2{,}4.7581289 +\ 2/2 * 0.9048374) = f(\ 6.2, 5.8891756) = 0.8822165$

$k_3 = f(t_2 + h/2, CA_2 + h/2 * k_2) = f(\ 5 +\ 2/2{,}4.7581289 +\ 2/2 * 0.8822165) = f(\ 6.2, 5.8608995) = 0.8827820$

$k_4 = f(t_2 + h, CA_2 + h * k_3) = f(\ 5 +\ 2{,}4.7581289 +\ 2 * 0.8827820) = f(\ 7.5, 6.9650839) = 0.8606983$

La pendiente promedio será:

$$k_p = \frac{k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4}{6} = \frac{0.9048374 + 2 * 0.8822165 + 2 * 0.8827820 + 0.8606983}{6} =\ 0.8825888$$

Las coordenadas al final del paso numero 3 será:

$$t_3 = t_2 + h = 5 + 2 = 8 \; y \; CA_3 = CA_2 + kp * h = 4.7581289 + 0.8825888 * 2 = 6.9646008$$

**Paso 4**

$t_3 = 7.500000 \; y \; CA_3 = 6.9646008$

Las 4 pendientes serán:

$$k1 = f(t_3, CA_3) = f(8{,}6.9646008) = 0.8607080$$

$$k2 = f(t_3 + h/2, CA_3 + h/2 * k1) = f(8 + 2/2{,}6.9646008 + 2/2 * 0.8607080) = f(8.8, 8.0404858) = 0.8391903$$

$$k3 = f(t_3 + h/2, CA_3 + h/2 * k2) = f(8 + 2/2{,}6.9646008 + 2/2 * 0.8391903) = f(8.8, 8.0135887) = 0.8397282$$

$$k4 = f(t_3 + h, CA_3 + h * k3) = f(8 + 2{,}6.9646008 + 2 * 0.8397282) = f(10.0, 9.0639214) = 0.8187216$$

La pendiente promedio será:

$$k_p = \frac{k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4}{6} = \frac{0.8607080 + 2 * 0.8391903 + 2 * 0.8397282 + 0.8187216}{6} = 0.8395444$$

Las coordenadas al final del paso numero 4 será:

$$t_4 = t_3 + h = 8 + 2 = 10 \; y \; CA_4 = CA_3 + kp * h = 6.9646008 + 0.8395444 * 2 = 9.0634619$$

Para el tiempo t = 10 la cantidad de sal es: 9.0634619

Si se tiene en cuenta que el valor real calculado de manera analítica corresponde a:

$$CA = -\mathrm{e}^{\frac{-10+195.60115}{50}} + 50 = 9.0634626$$

El error de cálculo para 2 pasos será:

$$e_r = \frac{|Valor_{real} - Valor_{calculado}|}{Valor_{real}} * 100\% = \frac{|9.0634626 - 9.0634619|}{9.0634626} * 100\% = 0.0000077\%$$

*Tabla 10. Resumen de valores realizados 4 pasos con el modelo de Runge Kutta orden*

| Paso | $k_1$ | $k_2$ | $k_3$ | $k_4$ | $k_p$ | $t_f$ | $CA_f$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1.0000000 | 0.9750000 | 0.9756250 | 0.9512187 | 0.9754115 | 2.50000 | 2.4385286 |
| 2 | 0.9512294 | 0.9274487 | 0.9280432 | 0.9048273 | 0.9278401 | 5.00000 | 4.7581289 |
| 3 | 0.9048374 | 0.8822165 | 0.8827820 | 0.8606983 | 0.8825888 | 7.50000 | 6.9646008 |
| 4 | 0.8607080 | 0.8391903 | 0.8397282 | 0.8187216 | 0.8395444 | 10.00000 | 9.0634619 |

Fuente: Elaboración propia con DEV-C

*Solución por Runge Kutta orden 4 con 10 pasos*

Desarrollando el ejercicio por el método de Runge Kutta de orden 4, con 10 pasos se tendría lo siguiente:

Condición $t_0$ inicial: 0
Condición $CA_0$ inicial: 0
Condición $t_f$ final: 10
Número de pasos: $n = 10$
Valor de Paso $h$

$$h = \frac{t_f - t_0}{n} = \frac{10 - 0}{10} = 1$$

La ecuación diferencial es:

$$f(CA, t) = 1 - \frac{CA}{50}$$

Por lo tanto, las pendientes para los 10 pasos serán:

**Paso 1.** $t_0 = 0$ y $CA_0 = 0$

Las 4 pendientes serán:

$$k_1 = f(t_0\,, CA_0) = f(0{,}0) = 1 - \frac{0}{50} = 1$$

$$k_2 = f\left(t_0 + \frac{h}{2}\ ,\ CA_0 + \frac{h}{2}k_1\right) = f(0 + 0.5{,}0 + 0.5 * 1) = f(0.5{,}0.5) = 1 - \frac{0.5}{50} = 0.99$$

$$k_3 = f\left(t_0 + \frac{h}{2}\ ,\ CA_0 + \frac{h}{2}k_2\right) = f(0 + 0.5{,}0 + 0.5 * 0.99) = f(0.5{,}0.495) = 1 - \frac{0.495}{50} = 0.9901$$

$$k_4 = f(t_0 + h\ ,\ CA_0 + hk_3) = f(0 + 1{,}0 + 1 * 0.9901) = f(1{,}0.9901) = 1 - \frac{0.9901}{50} = 0.980198$$

La pendiente promedio será:

$$k_p = \frac{k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4}{6} = \frac{1 + 2 * 099 + 2 * 0.9901 + 0.980198}{6} = 0.9900663$$

$$t_1 = t_0 + h = 0 + 1 = 1$$

$$CA_1 = CA_0 + k_p * h = 0 + 0.9900663 * 1 = 0.9900663$$

Las coordenadas al final del paso número 1 será:

$t_1 = 1$ y $CA_1 = 0.9900663$

*Tabla 11. Valores realizados 1 paso con el modelo de Runge Kutta orden 4*

| Paso | $k_1$ | $k_2$ | $k_3$ | $k_4$ | $k_p$ | $t_f$ | $CA_f$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1.0000000 | 0.9900000 | 0.9901000 | 0.9801980 | 0.9900663 | 1.00000 | 0.9900663 |

Fuente: Elaboración propia con DEV-C

**Paso 2.** $t_1 = 1$ y $CA_1 = 0.9900663$

Las 4 pendientes serán:

$$k_1 = f(t_1\,, CA_1) = f(1{,}0.9900663) = 1 - \frac{0.9900663}{50} = 0.9801987$$

$$k_2 = f\left(t_1 + \frac{h}{2}\ ,\ CA_1 + \frac{h}{2}k_1\right) = f(1 + 0.5{,}0.9900663 + 0.5 * 0.9801987) = f(1.5{,}1.4801657) = 1 - \frac{1.4801987}{50} = 0.9703967$$

$$k_3 = f\left(t_1 + \frac{h}{2}\ ,\ CA_1 + \frac{h}{2}k_2\right) = f(1 + 0.5{,}0.9900663 + 0.5 * 0.9703967) = f(1.5{,}1.4752647) = 1 - \frac{1.4752647}{50} = 0.9704947$$

$$k_4 = f(t_1 + h\ ,\ CA_1 + hk_3) = f(1 + 1{,}0{,}0.9900663 + 1 * 0.9704947) = f(2{,}1.9605610) = 1 - \frac{1.9605610}{50} = 0.9607888$$

La pendiente promedio será:

$$k_p = \frac{k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4}{6} = \frac{0.9801987 + 2 * 0.9703967 + 2 * 0.9704947 + 0.9607888}{6} = 0.9704617$$

$$t_2 = t_1 + h = 1 + 1 = 2$$

$$CA_2 = CA_1 + k_p * h = 0.9900663 + 0.9704617 * 1 = 1.9605280$$

Las coordenadas al final del paso número 2 será:

$t_2 = 2$ y $CA_2 = 1.9605280$

*Tabla 12. Valores realizados 2 pasos con el modelo de Runge Kutta orden 4*

| Paso | $k_1$ | $k_2$ | $k_3$ | $k_4$ | $k_p$ | $t_f$ | $CA_f$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1.0000000 | 0.9900000 | 0.9901000 | 0.9801980 | 0.9900663 | 1.00000 | 0.9900663 |
| 2 | 0.9801987 | 0.9703967 | 0.9704947 | 0.9607888 | 0.9704617 | 2.00000 | 1.9605280 |

Fuente: Elaboración propia con DEV-C

**Paso 3.** $t_2 = 2$ y $CA_2 = 1.9605280$

Las 4 pendientes serán:

$$k_1 = f(t_2\,,\,CA_2) = f(2{,}1.9605280) = 1 - \frac{0.9900663}{50} = 0.9607894$$

$$k_2 = f\left(t_2 + \frac{h}{2}\ ,\ CA_2 + \frac{h}{2}k_1\right) = f(2 + 0.5{,}1.9605280 + 0.5 * 0.9607894) = f(2.5{,}2.4409228) = 1 - \frac{2.4409228}{50} = 0.9511815$$

$$k_3 = f\left(t_2 + \frac{h}{2}\ ,\ CA_2 + \frac{h}{2}k_2\right) = f(2 + 0.5{,}1.9605280 + 0.5 * 0.9511815) = f(2.5{,}2.4361188) = 1 - \frac{2.4361188}{50} = 0.9512776$$

$$k_4 = f(t_2 + h\ ,\ CA_2 + hk_3) = f(2 + 1{,}0{,}1.9605280 + 1 * 0.9512776) = f(3{,}2.9118057) = 1 - \frac{2.9118057}{50} = 0.9417639$$

La pendiente promedio será:

$$k_p = \frac{k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4}{6} = \frac{0.9607894 + 2 * 0.9511815 + 2 * 0.9512776 + 0.9417639}{6} = 0.9512453$$

$$t_3 = t_2 + h = 2 + 1 = 3$$

$$CA_3 = CA_2 + k_p * h = 1.9605280 + 0.9512453 * 1 = 2.9117733$$

Las coordenadas al final del paso número 3 será:

$t_3 = 3$ y $CA_3 = 2.9117733$

*Tabla 13. Valores realizados 3 pasos con el modelo de Runge Kutta orden 4*

| Paso | $k_1$ | $k_2$ | $k_3$ | $k_4$ | $k_p$ | $t_f$ | $CA_f$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1.0000000 | 0.9900000 | 0.9901000 | 0.9801980 | 0.9900663 | 1.00000 | 0.9900663 |
| 2 | 0.9801987 | 0.9703967 | 0.9704947 | 0.9607888 | 0.9704617 | 2.00000 | 1.9605280 |
| 3 | 0.9607894 | 0.9511815 | 0.9512776 | 0.9417639 | 0.9512453 | 3.00000 | 2.9117733 |

Fuente: Elaboración propia con DEV-C

**Paso 4.** $t_3 = 3$ y $CA_3 = 2.9117733$

Las 4 pendientes serán:

$$k_1 = f(t_3\,,\,CA_3) = f(3{,}2.9117733) = 1 - \frac{2.9117733}{50} = 0.9417645$$

$$k_2 = f\left(t_3 + \frac{h}{2}\ ,\ CA_3 + \frac{h}{2}k_1\right) = f(3 + 0.5{,}2.9117733 + 0.5 * 0.9417645) = f(3.5{,}3.3826556) = 1 - \frac{3.3826556}{50} = 0.9323469$$

$$k_3 = f\left(t_3 + \frac{h}{2}\ ,\ CA_3 + \frac{h}{2}k_2\right) = f(3 + 0.5{,}2.9117733 + 0.5 * 0.9323469) = f(3.5{,}3.3779468) = 1 - \frac{3.3779468}{50} = 0.9324411$$

$$k_4 = f(t_3 + h\ ,\ CA_3 + hk_3) = f(3 + 1{,}0{,}2.9117733 + 1 * 0.9324411) = f(4{,}3.8442144) = 1 - \frac{3.8442144}{50} = 0.9231157$$

La pendiente promedio será:

$$k_p = \frac{k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4}{6} = \frac{0.9417645 + 2 * 0.9323469 + 2 * 0.9324411 + 0.9231157}{6} = 0.9324094$$

$$t_4 = t_3 + h = 3 + 1 = 4$$

$$CA_4 = CA_3 + k_p * h = 2.9117733 + 0.9324094 * 1 = 3.8441827$$

Las coordenadas al final del paso número 4 será:

$t_4 = 4$ y $CA_4 = 3.8441827$

*Tabla 14. Valores realizados 4 pasos con el modelo de Runge Kutta orden 4*

| Paso | $k_1$ | $k_2$ | $k_3$ | $k_4$ | $k_p$ | $t_f$ | $CA_f$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1.0000000 | 0.9900000 | 0.9901000 | 0.9801980 | 0.9900663 | 1.00000 | 0.9900663 |
| 2 | 0.9801987 | 0.9703967 | 0.9704947 | 0.9607888 | 0.9704617 | 2.00000 | 1.9605280 |
| 3 | 0.9607894 | 0.9511815 | 0.9512776 | 0.9417639 | 0.9512453 | 3.00000 | 2.9117733 |
| 4 | 0.9417645 | 0.9323469 | 0.9324411 | 0.9231157 | 0.9324094 | 4.00000 | 3.8441827 |

Fuente: Elaboración propia con DEV-C

**Paso 5.** $t_4 = 4.000000\ y\ CA_4 = 3.8441827$

Las 4 pendientes serán:

$k_1 = f(t_4, CA_4) = f(\,4{,}3.8441827) = 0.9231163$

$k_2 = f\left(t_4 + \frac{h}{2}, CA_4 + \frac{h}{2} * k1\right) = f\left(\,4 + \frac{1}{2{,}3.8441827} + \frac{1}{2} * 0.9231163\right) = f(4.5, 4.3057408) = 0.9138852$

$k_3 = f\left(t_4 + \frac{h}{2}, CA_4 + \frac{h}{2} * k2\right) = f\left(\,4 + \frac{1}{2{,}3.8441827} + \frac{1}{2} * 0.9138852\right) = f(4.5, 4.3011253) = 0.9139775$

$k_4 = f(t_4 + h, CA_4 + h * k3) = f(\,4 + \ 1{,}3.8441827 + \ 1 * 0.9139775) = f(5.0, 4.7581602) = 0.9048368$

La pendiente promedio será:

$$k_p = \frac{k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4}{6} = \frac{0.9231163 + 2 * 0.9138852 + 2 * 0.9139775 + 0.9048368}{6} = \ 0.9139464$$

Las coordenadas al final del paso número 5 será:

$t_5 = 5.000000\ y\ CA_5 = 4.7581291$

*Tabla 15. Valores realizados 5 pasos con el modelo de Runge Kutta orden 4*

| Paso | $k_1$ | $k_2$ | $k_3$ | $k_4$ | $k_p$ | $t_f$ | $CA_f$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1.0000000 | 0.9900000 | 0.9901000 | 0.9801980 | 0.9900663 | 1.00000 | 0.9900663 |
| 2 | 0.9801987 | 0.9703967 | 0.9704947 | 0.9607888 | 0.9704617 | 2.00000 | 1.9605280 |
| 3 | 0.9607894 | 0.9511815 | 0.9512776 | 0.9417639 | 0.9512453 | 3.00000 | 2.9117733 |
| 4 | 0.9417645 | 0.9323469 | 0.9324411 | 0.9231157 | 0.9324094 | 4.00000 | 3.8441827 |
| 5 | 0.9231163 | 0.9138852 | 0.9139775 | 0.9048368 | 0.9139464 | 5.00000 | 4.7581291 |

Fuente: Elaboración propia con DEV-C

**Paso 6.**

$t_5 = 5.000000\ y\ CA_5 = 4.7581291$

Las 4 pendientes serán:

$k_1 = f(t_5, CA_5) = f(5{,}4.7581291) = 0.9048374$

$k_2 = f\left(t_5 + \frac{h}{2}, CA_5 + \frac{h}{2} * k1\right) = f\left(5 + \frac{1}{2{,}4.7581291} + \frac{1}{2} * 0.9048374\right) = f(5.5{,}5.2105478) = 0.8957890$

$k_3 = f\left(t_5 + \frac{h}{2}, CA_5 + \frac{h}{2} * k2\right) = f\left(5 + \frac{1}{2{,}4.7581291} + \frac{1}{2} * 0.8957890\right) = f(5.5{,}5.2060236) = 0.8958795$

$k_4 = f(t_5 + h, CA_5 + h * k3) = f(5 + 1{,}4.7581291 + \ 1 * 0.8958795) = f(6.0{,}5.6540086) = 0.8869198$

La pendiente promedio será:

$$k_p = \frac{k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4}{6} = \frac{0.9048374 + 2 * 0.8957890 + 2 * 0.8958795 + 0.8869198}{6} = \ 0.8958491$$

Las coordenadas al final del paso número 6 será:

$t_6 = 6.000000\ y\ CA_6 = 5.6539782$

*Tabla 16. Valores realizados 6 pasos con el modelo de Runge Kutta orden 4*

| Paso | $k_1$ | $k_2$ | $k_3$ | $k_4$ | $k_p$ | $t_f$ | $CA_f$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1.0000000 | 0.9900000 | 0.9901000 | 0.9801980 | 0.9900663 | 1.00000 | 0.9900663 |
| 2 | 0.9801987 | 0.9703967 | 0.9704947 | 0.9607888 | 0.9704617 | 2.00000 | 1.9605280 |
| 3 | 0.9607894 | 0.9511815 | 0.9512776 | 0.9417639 | 0.9512453 | 3.00000 | 2.9117733 |
| 4 | 0.9417645 | 0.9323469 | 0.9324411 | 0.9231157 | 0.9324094 | 4.00000 | 3.8441827 |
| 5 | 0.9231163 | 0.9138852 | 0.9139775 | 0.9048368 | 0.9139464 | 5.00000 | 4.7581291 |
| 6 | 0.9048374 | 0.8957890 | 0.8958795 | 0.8869198 | 0.8958491 | 6.00000 | 5.6539782 |

Fuente: Elaboración propia con DEV-C

**Paso 7.**

$t_6 = 6.000000\ y\ CA_6 = 5.6539782$

Las 4 pendientes serán:

$k_1 = f(t_6, CA_6) = f(\ 6{,}5.6539782) = 0.8869204$

$k_2 = f\left(t_6 + \frac{h}{2}, CA_6 + \frac{h}{2} * k1\right) = f\left(\ 6 + \frac{1}{2{,}5.6539782} + \frac{1}{2} * 0.8869204\right) = f(\ 6.5, 6.0974384) = 0.8780512$

$k_3 = f\left(t_6 + \frac{h}{2}, CA_6 + \frac{h}{2} * k2\right) = f\left(\ 6 + \frac{1}{2{,}5.6539782} + \frac{1}{2} * 0.8780512\right) = f(\ 6.5, 6.0930038) = 0.8781399$

$k_4 = f(t_6 + h, CA_6 + h * k3) = f(\ 6 +\ 1{,}5.6539782 +\ 1 * 0.8781399) = f(\ 7.0, 6.5321181) = 0.8693576$

La pendiente promedio será:

$$k_p = \frac{k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4}{6} = \frac{0.8869204 + 2 * 0.8780512 + 2 * 0.8781399 + 0.8693576}{6} =\ 0.8781101$$

Las coordenadas al final del paso número 7 será:

$t_7 = 7.000000\ y\ CA_7 = 6.5320882$

*Tabla 17. Valores realizados 7 pasos con el modelo de Runge Kutta orden 4*

| Paso | $k_1$ | $k_2$ | $k_3$ | $k_4$ | $k_p$ | $t_f$ | $CA_f$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1.0000000 | 0.9900000 | 0.9901000 | 0.9801980 | 0.9900663 | 1.00000 | 0.9900663 |
| 2 | 0.9801987 | 0.9703967 | 0.9704947 | 0.9607888 | 0.9704617 | 2.00000 | 1.9605280 |
| 3 | 0.9607894 | 0.9511815 | 0.9512776 | 0.9417639 | 0.9512453 | 3.00000 | 2.9117733 |
| 4 | 0.9417645 | 0.9323469 | 0.9324411 | 0.9231157 | 0.9324094 | 4.00000 | 3.8441827 |
| 5 | 0.9231163 | 0.9138852 | 0.9139775 | 0.9048368 | 0.9139464 | 5.00000 | 4.7581291 |
| 6 | 0.9048374 | 0.8957890 | 0.8958795 | 0.8869198 | 0.8958491 | 6.00000 | 5.6539782 |
| 7 | 0.8869204 | 0.8780512 | 0.8781399 | 0.8693576 | 0.8781101 | 7.00000 | 6.5320882 |

Fuente: Elaboración propia con DEV-C

**Paso 8.**

$t_7 = 7.000000\ y\ CA_7 = 6.5320882$

Las 4 pendientes serán:

$k_1 = f(t_7, CA_7) = f(\ 7{,}6.5320882) = 0.8693582$

$k_2 = f\left(t_7 + \frac{h}{2}, CA_7 + \frac{h}{2} * k1\right) = f\left(\ 7 + \frac{1}{2{,}6.5320882} + \frac{1}{2} * 0.8693582\right) = f(\ 7.5, 6.9667673) = 0.8606647$

$k_3 = f\left(t_7 + \frac{h}{2}, CA_7 + \frac{h}{2} * k2\right) = f\left(\ 7 + \frac{1}{2{,}6.5320882} + \frac{1}{2} * 0.8606647\right) = f(\ 7.5, 6.9624205) = 0.8607516$

$k_4 = f(t_7 + h, CA_7 + h * k3) = f(\ 7 +\ 1{,}6.5320882 +\ 1 * 0.8607516) = f(\ 8.0, 7.3928398) = 0.8521432$

La pendiente promedio será:

$$k_p = \frac{k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4}{6} = \frac{0.8693582 + 2 * 0.8606647 + 2 * 0.8607516 + 0.8521432}{6} =\ 0.8607223$$

Las coordenadas al final del paso número 8 será:

$t_8 = 8.000000\ y\ CA_8 = 7.3928105$

*Tabla 18. Valores realizados 8 pasos con el modelo de Runge Kutta orden 4*

| Paso | $k_1$ | $k_2$ | $k_3$ | $k_4$ | $k_p$ | $t_f$ | $CA_f$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1.0000000 | 0.9900000 | 0.9901000 | 0.9801980 | 0.9900663 | 1.00000 | 0.9900663 |
| 2 | 0.9801987 | 0.9703967 | 0.9704947 | 0.9607888 | 0.9704617 | 2.00000 | 1.9605280 |
| 3 | 0.9607894 | 0.9511815 | 0.9512776 | 0.9417639 | 0.9512453 | 3.00000 | 2.9117733 |
| 4 | 0.9417645 | 0.9323469 | 0.9324411 | 0.9231157 | 0.9324094 | 4.00000 | 3.8441827 |
| 5 | 0.9231163 | 0.9138852 | 0.9139775 | 0.9048368 | 0.9139464 | 5.00000 | 4.7581291 |
| 6 | 0.9048374 | 0.8957890 | 0.8958795 | 0.8869198 | 0.8958491 | 6.00000 | 5.6539782 |
| 7 | 0.8869204 | 0.8780512 | 0.8781399 | 0.8693576 | 0.8781101 | 7.00000 | 6.5320882 |
| 8 | 0.8693582 | 0.8606647 | 0.8607516 | 0.8521432 | 0.8607223 | 8.00000 | 7.3928105 |

Fuente: Elaboración propia con DEV-C

**Paso 9.**

$t_8 = 8.000000\ y\ CA8 = 7.3928105$

Las 4 pendientes serán:

$k_1 = f(t_8, CA_8) = f(\,8{,}7.3928105) = 0.8521438$

$$k_2 = f\left(t_8 + \frac{h}{2}, CA_8 + \frac{h}{2} * k1\right) = f\left(\,8 + \frac{1}{2{,}7.3928105} + \frac{1}{2} * 0.8521438\right) = f(\,8.5, 7.8188824) = 0.8436224$$

$$k_3 = f\left(t_8 + \frac{h}{2}, CA_8 + \frac{h}{2} * k2\right) = f\left(\,8 + \frac{1}{2{,}7.3928105} + \frac{1}{2} * 0.8436224\right) = f(\,8.5, 7.8146217) = 0.8437076$$

$k_4 = f(t_8 + h, CA_8 + h * k3) = f(\,8 + \ 1{,}7.3928105 + \ 1 * 0.8437076) = f(\,9.0, 8.2365181) = 0.8352696$

La pendiente promedio será:

$$k_p = \frac{k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4}{6} = \frac{0.8521438 + 2 * 0.8436224 + 2 * 0.8437076 + 0.8352696}{6} = \ 0.8436789$$

Las coordenadas al final del paso número 9 será:

$t_9 = 9.000000\ y\ CA_9 = 8.2364894$

*Tabla 19. Valores realizados 9 pasos con el modelo de Runge Kutta orden 4*

| Paso | $k_1$ | $k_2$ | $k_3$ | $k_4$ | $k_p$ | $t_f$ | $CA_f$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1.0000000 | 0.9900000 | 0.9901000 | 0.9801980 | 0.9900663 | 1.00000 | 0.9900663 |
| 2 | 0.9801987 | 0.9703967 | 0.9704947 | 0.9607888 | 0.9704617 | 2.00000 | 1.9605280 |
| 3 | 0.9607894 | 0.9511815 | 0.9512776 | 0.9417639 | 0.9512453 | 3.00000 | 2.9117733 |
| 4 | 0.9417645 | 0.9323469 | 0.9324411 | 0.9231157 | 0.9324094 | 4.00000 | 3.8441827 |
| 5 | 0.9231163 | 0.9138852 | 0.9139775 | 0.9048368 | 0.9139464 | 5.00000 | 4.7581291 |
| 6 | 0.9048374 | 0.8957890 | 0.8958795 | 0.8869198 | 0.8958491 | 6.00000 | 5.6539782 |
| 7 | 0.8869204 | 0.8780512 | 0.8781399 | 0.8693576 | 0.8781101 | 7.00000 | 6.5320882 |
| 8 | 0.8693582 | 0.8606647 | 0.8607516 | 0.8521432 | 0.8607223 | 8.00000 | 7.3928105 |
| 9 | 0.8521438 | 0.8436224 | 0.8437076 | 0.8352696 | 0.8436789 | 9.00000 | 8.2364894 |

Fuente: Elaboración propia con DEV-C

**Paso 10.**

$t_9 = 9.000000\ y\ CA9 = 8.2364894$

Las 4 pendientes serán:

$k_1 = f(t_9, CA_9) = f(\,9{,}8.2364894) = 0.8352702$

$$k_2 = f\left(t_9 + \frac{h}{2}, CA_9 + \frac{h}{2} * k1\right) = f\left(\,9 + \frac{1}{2{,}8.2364894} + \frac{1}{2} * 0.8352702\right) = f(\,9.5, 8.6541245) = 0.8269175$$

$$k_3 = f\left(t_9 + \frac{h}{2}, CA_9 + \frac{h}{2} * k2\right) = f\left(\,9 + \frac{1}{2{,}8.2364894} + \frac{1}{2} * 0.8269175\right) = f(\,9.5, 8.6499482) = 0.8270010$$

$k_4 = f(t_9 + h, CA_9 + h * k3) = f(\,9 + \ 1{,}8.2364894 + \ 1 * 0.8270010) = f(10.0, 9.0634905) = 0.8187302$

La pendiente promedio será:

$$k_p = \frac{k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4}{6} = \frac{0.8352702 + 2 * 0.8269175 + 2 * 0.8270010 + 0.8187302}{6} = 0.8269729$$

Las coordenadas al final del paso número 10 será:

$t_{10} = 10.000000\ y\ CA_{10} = 9.0634623$

En resumen, para los 10 pasos los valores obtenidos son los mostrados en la Tabla 20

*Tabla 20. Valores de las pendientes y próximo paso en Runge Kutta orden 4*

| Paso | $k_1$ | $k_2$ | $k_3$ | $k_4$ | $k_p$ | $t_f$ | $CA_f$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1.0000000 | 0.9900000 | 0.9901000 | 0.9801980 | 0.9900663 | 1.00000 | 0.9900663 |
| 2 | 0.9801987 | 0.9703967 | 0.9704947 | 0.9607888 | 0.9704617 | 2.00000 | 1.9605280 |
| 3 | 0.9607894 | 0.9511815 | 0.9512776 | 0.9417639 | 0.9512453 | 3.00000 | 2.9117733 |
| 4 | 0.9417645 | 0.9323469 | 0.9324411 | 0.9231157 | 0.9324094 | 4.00000 | 3.8441827 |
| 5 | 0.9231163 | 0.9138852 | 0.9139775 | 0.9048368 | 0.9139464 | 5.00000 | 4.7581291 |
| 6 | 0.9048374 | 0.8957890 | 0.8958795 | 0.8869198 | 0.8958491 | 6.00000 | 5.6539782 |
| 7 | 0.8869204 | 0.8780512 | 0.8781399 | 0.8693576 | 0.8781101 | 7.00000 | 6.5320882 |
| 8 | 0.8693582 | 0.8606647 | 0.8607516 | 0.8521432 | 0.8607223 | 8.00000 | 7.3928105 |
| 9 | 0.8521438 | 0.8436224 | 0.8437076 | 0.8352696 | 0.8436789 | 9.00000 | 8.2364894 |
| 10 | 0.8352702 | 0.8269175 | 0.8270010 | 0.8187302 | 0.8269729 | 10.00000 | 9.0634623 |

Fuente: Elaboración propia con DEV-C

Par el tiempo t = 10 minutos la cantidad de sal es: 9.0634623 libras

Si se tiene en cuenta que el valor real calculado de manera analítica corresponde a:

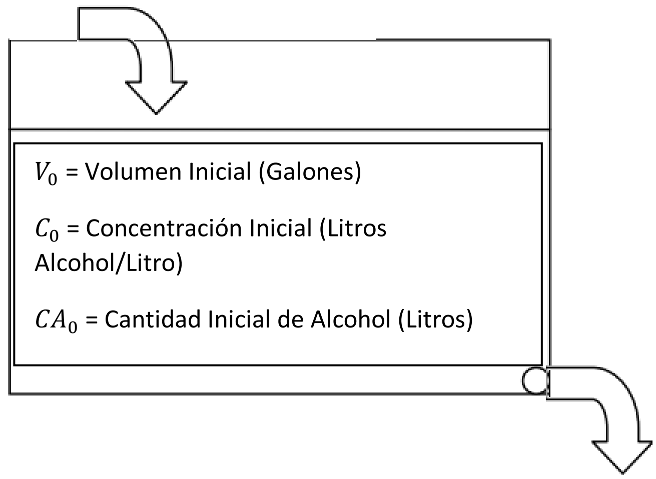
$$CA = -e^{\frac{-10+195.60115}{50}} + 50 = 9.0634626$$

El error de cálculo para 10 pasos será:

$$e_r = \frac{|Valor_{real} - Valor_{calculado}|}{Valor_{real}} * 100\% = \frac{|9.0634626 - 9.0634623|}{9.0634626} * 100\% = 0.0000033\%$$

# Problema de Mezcla Agua-Alcohol

$C_1$ = Concentración de Entrada
$Q_1$ = Caudal o Razón de entrada




$C_2(t)$ = Concentración de salida (Varía en función del tiempo)
$Q_2$ = Caudal o Razón de salida

Sea $CA(t)$ la cantidad de Alcohol (Litros) en el tanque en un instante de tiempo $t$. La cantidad de alcohol que entra al tanque durante Δt segundos es $(Q_1 * C_1 * \Delta t)$ litros. La cantidad de alcohol que fluye hacia fuera del tanque durante el mismo intervalo de tiempo depende de la concentración de alcohol $C_2(t)$ en el tanque al instante t.

La concentración de alcohol en el tanque en cualquier instante de tiempo t, viene dada por la ecuación: $C_2(t) = \frac{CA(t)}{V(t)}$, donde $CA(t)$ es la cantidad de alcohol en cualquier instante de tiempo t y $V(t)$ denota volumen de líquido en el tanque en cualquier instante de tiempo t.

El **volumen de líquido en el tanque, en cualquier instante de tiempo t**, viene dado por la ecuación

$$V(t) = V_0 + (Q_1 - Q_2) * t$$

Por otra parte, la variación de la cantidad de alcohol en un instante t, es igual a la diferencia entre la cantidad de alcohol que entra al tanque $(Q_1 * C_1 * \Delta t)$ y la cantidad de alcohol que sale del tanque $(Q_2 * C_2 * \Delta t)$.

$$\Delta\text{CA}=\text{(litros que ingresan)-(litros que salen)}=(Q_1 * C_1 * \Delta t) - (Q_2 * C_2 * \Delta t) = ((Q_1 * C_1) - (Q_2 * C_2)) * \Delta t.$$

$$\frac{\Delta CA}{\Delta t} = ((Q_1 * C_1) - (Q_2 * C_2))$$

calculando el límite de cuando Δt → 0

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta CA}{\Delta t} = ((Q_1 * C_1) - (Q_2 * C_2))$$

Que corresponde a la derivada

$$\frac{dCA}{dt} = ((Q_1 * C_1) - (Q_2 * C_2))$$

donde $Q_1$, $C_1$ y $Q_2$ son constantes

Si:

$$C_2(t) = \frac{CA(t)}{V(t)} = \frac{CA(t)}{V_0 + (Q_1 - Q_2) * t}$$

entonces

$$\frac{dCA}{dt} = ((Q_1 * C_1) - (Q_2 * \frac{CA(t)}{V_0 + (Q_1 - Q_2) * t}))$$

$$\frac{dCA}{dt} + Q_2 * \frac{CA(t)}{V_0 + (Q_1 - Q_2) * t} = (Q_1 * C_1)$$

La ecuación diferencial asociada a problemas de mezclas es la ecuación diferencial lineal

$$\frac{dCA}{dt} + \frac{Q_2}{V_0 + (Q_1 - Q_2) * t} * CA(t) = (Q_1 * C_1)$$

$$\frac{dCA}{dt} = (Q_1 * C_1) - \frac{Q_2}{V_0 + (Q_1 - Q_2) * t} * CA(t)$$

# Planteamiento del problema

Un depósito de 50 litros contiene una solución compuesta por un 90% de agua (45 Litros de agua) y 10% de alcohol (5 Litros de alcohol). Mediante un tubo se introduce en el depósito una segunda solución que contiene agua y alcohol a partes iguales, a un ritmo de 4 litros/minuto; es decir 2 litros de alcohol y 2 litros de agua por minuto. Al mismo tiempo se vacía el tanque a una velocidad de 5 litros/minuto (Mezcla agua-alcohol). Suponiendo que la solución del depósito se agita constantemente, hallar el alcohol que queda en él después de 10 minutos.

## Solución Analítica

Sea $CA(t)$ el número de litros de alcohol que hay en el depósito en el instante $t$ (en minutos). Del enunciado se desprende que el ritmo con el que cambia $CA(t)$ viene dado por la cantidad de alcohol que entra menos el que sale. Es decir,

$$CA'(t) = 2 - \frac{5}{50 - t} CA(t) \ \equiv \ \frac{dCA}{dt} = 2 - \frac{5CA}{50 - t}$$

Con condiciones iniciales. La cantidad de alcohol en el tiempo 0 es de 10% del volumen inicial.

$$CA(0) = 50 * 10\% = 5 \ Litros \ de \ alcohol$$

Esta ecuación puede ser escrita

*Ecuación 1*

$$CA'(t) + \frac{5}{50 - t} CA(t) = 2$$

$$CA'(t) = 2 - \frac{5}{50 - t} CA(t)$$

$$\frac{dCA}{dt} = CA' = 2 - \frac{5CA}{50 - t}$$

Que es una ecuación lineal de primer orden. Para resolverla, se encuentra su factor integrante así:

$$\mu(t) = e^{\int \frac{5}{50-t} dt} = e^{-5 \ln(50-t)} = \frac{1}{(50 - t)^5}$$

Al multiplicar la Ecuación 1por $\mu(t)$ se tiene:

$$\frac{1}{(50 - t)^5} CA'^{(t)} + \frac{1}{(50 - t)^5} \frac{5}{50 - t} CA(t) = 2 \frac{1}{(50 - t)^5}$$

$$\frac{1}{(50 - t)^5} CA'^{(t)} + \frac{5}{(50 - t)^6} CA(t) = \frac{2}{(50 - t)^5}$$

O bien

$$\left( CA(t) \frac{1}{(50 - t)^5} \right)' = \frac{2}{(50 - t)^5}$$

Integrando en los dos miembros

$$CA(t)\frac{1}{(50-t)^5} = \int \frac{2}{(50-t)^5} = \frac{1}{2(50-t)^4} + c$$

Despejando

$$CA(t) = c(50-t)^5 + \frac{50-t}{2},\ \ c \in \mathbb{R}$$

Para determinar el valor de *c se tiene en cuenta las condiciones iniciales* $CA(0) = 5$. Es decir, en el tiempo $t = 0$ hay 5 litros de alcohol. Así entonces c tendrá el siguiente valor:

$$5 = c(50-0)^5 + \frac{50-0}{2}$$

$$c = -\frac{20}{50^5}$$

Por lo tanto, la función será:

$$CA(t) = -\frac{20}{50^5}(50-t)^5 + \frac{50-t}{2}$$

O sea, la cantidad de alcohol ($CA$) al cabo de 10 minutos será:

$$CA(10) = -\frac{20}{50^5}(50-10)^5 + \frac{50-10}{2} = 13.4464\ litros\ de\ alcohol$$

## Solución Numérica

### *Solución por Euler con 1 paso*

Condición $t_i = t_0$ inicial: 0

Condición $CA_0$ inicial: 5

Condición $t_f$ final: 10

Número de pasos: $n = 1$

Valor del paso $h$:

$h = \frac{t_f -\ t_0}{n} = \frac{10-0}{10} = 1$

**Paso 1**

$t_0 =\ 0\ y\ CA_0 = 5$

$m = fxy(t_0, CA_0) = f(\ 0{,}5) =\ 1.5$

$t_1 = t_0 + h = 10\ y\ CA_1 = CA_0 + m * h = 5 + 1.5 * 10 = 20$

Con un solo paso aplicando el modelo de Euler se puede decir que al cabo de 10 minutos habrá 20 litros de alcohol.

### *Solución por Euler con 10 pasos*

Condición $t_i = t_0$ inicial: 0

Condición $CA_0$ inicial: 5

Condición $t_f$ final: 10

Número de pasos: $n = 10$

Valor del paso $h$:

$h = \frac{t_f -\ t_0}{n} = \frac{10-0}{10} = 1$

Valor de h = 1

**Paso 1**

$t_0 = 0 \; y \; CA_0 = 5.0000000$

$m = fxy(t_0, CA_0) = f(\,0{,}5.000000) = 1.5000000$

$t_1 = t_0 + h = 1 \; y \; CA_1 = CA_0 + m * h = 5.0000000 + 1.5000000 * 1 = 6.5000000$

*Tabla 21. Resumen con 1 paso aplicando Euler*

| Paso | $t_{i-1}$ | $CA_{i-1}$ | $m$ | $t_i$ | $CA_i$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 5 | 1.5000000 | 1 | 6.5000000 |

Fuente: elaboración propia con DEV-C

**Paso 2**

$t_1 = 1 \; y \; CA_1 = 6.5000000$

$m = fxy(t_1, CA_1) = f(\,1{,}6.500000) = 1.3367347$

$t_2 = t_1 + h = 2 \; y \; CA_2 = CA_1 + m * h = 6.5000000 + 1.3367347 * 1 = 7.8367347$

*Tabla 22. Resumen con 2 pasos aplicando Euler*

| Paso | $t_{i-1}$ | $CA_{i-1}$ | $m$ | $t_i$ | $CA_i$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 5 | 1.5000000 | 1 | 6.5000000 |
| 2 | 1 | 6.5 | 1.3367347 | 2 | 7.8367347 |

Fuente: elaboración propia con DEV-C

**Paso 3**

$t_2 = 2 \; y \; CA_2 = 7.8367347$

$m = fxy(t_2, CA_2) = f(\,2{,}7.836735) = 1.1836735$

$t_3 = t_2 + h = 3 \; y \; CA_3 = CA_2 + m * h = 7.8367347 + 1.1836735 * 1 = 9.0204082$

*Tabla 23. Resumen con 3 pasos aplicando Euler*

| Paso | $t_{i-1}$ | $CA_{i-1}$ | $m$ | $t_i$ | $CA_i$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 5 | 1.5000000 | 1 | 6.5000000 |
| 2 | 1 | 6.5 | 1.3367347 | 2 | 7.8367347 |
| 3 | 2 | 7.8367347 | 1.1836735 | 3 | 9.0204082 |

Fuente: elaboración propia con DEV-C

**Paso 4**

$t_3 = 3 \; y \; CA_3 = 9.0204082$

$m = fxy(t_3, CA_3) = f(\,3{,}9.020408) = 1.0403821$

$t_4 = t_3 + h = 4 \; y \; CA_4 = CA_3 + m * h = 9.0204082 + 1.0403821 * 1 = 10.0607903$

*Tabla 24. Resumen con 4 pasos aplicando Euler*

| Paso | $t_{i-1}$ | $CA_{i-1}$ | $m$ | $t_i$ | $CA_i$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 5 | 1.5000000 | 1 | 6.5000000 |
| 2 | 1 | 6.5 | 1.3367347 | 2 | 7.8367347 |
| 3 | 2 | 7.8367347 | 1.1836735 | 3 | 9.0204082 |
| 4 | 3 | 9.0204082 | 1.0403821 | 4 | 10.0607903 |

Fuente: elaboración propia con DEV-C

**Paso 5**

$t4 = 4 \; y \; CA4 = 10.0607903$

$m = fxy(t, CA) = f(\,4{,}10.060790) = 0.9064358$

$t5 = t4 + h = 5 \; y \; CA5 = CA4 + m * h = 10.0607903 + 0.9064358 * 1 = 10.9672261$

*Tabla 25. Resumen con 5 pasos aplicando Euler*

| Paso | $t_{i-1}$ | $CA_{i-1}$ | $m$ | $t_i$ | $CA_i$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 5 | 1.5000000 | 1 | 6.5000000 |
| 2 | 1 | 6.5 | 1.3367347 | 2 | 7.8367347 |
| 3 | 2 | 7.8367347 | 1.1836735 | 3 | 9.0204082 |
| 4 | 3 | 9.0204082 | 1.0403821 | 4 | 10.0607903 |
| 5 | 4 | 10.0607903 | 0.9064358 | 5 | 10.9672261 |

Fuente: elaboración propia con DEV-C

**Paso 6**

$t5 = 5 \; y \; CA5 = 10.9672261$

$m = fxy(t, CA) = f(5{,}10.967226) = 0.7814193$

$t6 = t5 + h = 6 \; y \; CA6 = CA5 + m * h = 10.9672261 + 0.7814193 * 1 = 11.7486454$

*Tabla 26. Resumen con 6 pasos aplicando Euler*

| Paso | $t_{i-1}$ | $CA_{i-1}$ | $m$ | $t_i$ | $CA_i$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 5 | 1.5000000 | 1 | 6.5000000 |
| 2 | 1 | 6.5 | 1.3367347 | 2 | 7.8367347 |
| 3 | 2 | 7.8367347 | 1.1836735 | 3 | 9.0204082 |
| 4 | 3 | 9.0204082 | 1.0403821 | 4 | 10.0607903 |
| 5 | 4 | 10.0607903 | 0.9064358 | 5 | 10.9672261 |
| 6 | 5 | 10.9672261 | 0.7814193 | 6 | 11.7486454 |

Fuente: elaboración propia con DEV-C

**Paso 7**

$t6 = 6 \; y \; CA6 = 11.7486454$

$m = fxy(t, CA) = f(6{,}11.748645) = 0.6649267$

$t7 = t6 + h = 7 \; y \; CA7 = CA6 + m * h = 11.7486454 + 0.6649267 * 1 = 12.4135721$

*Tabla 27. Resumen con 7 pasos aplicando Euler*

| Paso | $t_{i-1}$ | $CA_{i-1}$ | $m$ | $t_i$ | $CA_i$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 5 | 1.5000000 | 1 | 6.5000000 |
| 2 | 1 | 6.5 | 1.3367347 | 2 | 7.8367347 |
| 3 | 2 | 7.8367347 | 1.1836735 | 3 | 9.0204082 |
| 4 | 3 | 9.0204082 | 1.0403821 | 4 | 10.0607903 |
| 5 | 4 | 10.0607903 | 0.9064358 | 5 | 10.9672261 |
| 6 | 5 | 10.9672261 | 0.7814193 | 6 | 11.7486454 |
| 7 | 6 | 11.7486454 | 0.6649267 | 7 | 12.4135721 |

Fuente: elaboración propia con DEV-C

**Paso 8**

$t7 = 7 \; y \; CA7 = 12.4135721$

$m = fxy(t, CA) = f(7{,}12.413572) = 0.5565614$

$t8 = t7 + h = 8 \; y \; CA8 = CA7 + m * h = 12.4135721 + 0.5565614 * 1 = 12.9701335$

*Tabla 28. Resumen con 8 paso aplicando Euler*

| Paso | $t_{i-1}$ | $CA_{i-1}$ | $m$ | $t_i$ | $CA_i$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 5 | 1.5000000 | 1 | 6.5000000 |
| 2 | 1 | 6.5 | 1.3367347 | 2 | 7.8367347 |
| 3 | 2 | 7.8367347 | 1.1836735 | 3 | 9.0204082 |
| 4 | 3 | 9.0204082 | 1.0403821 | 4 | 10.0607903 |
| 5 | 4 | 10.0607903 | 0.9064358 | 5 | 10.9672261 |
| 6 | 5 | 10.9672261 | 0.7814193 | 6 | 11.7486454 |
| 7 | 6 | 11.7486454 | 0.6649267 | 7 | 12.4135721 |
| 8 | 7 | 12.4135721 | 0.5565614 | 8 | 12.9701335 |

Fuente: elaboración propia con DEV-C

**Paso 9**

$t8 = \ 8\ y\ CA8 = 12.9701335$

$m = fxy(t, CA) = f(\ 8{,}12.970133) = \ 0.4559365$

$t9 = t8 + h = \ 9\ y\ CA9 = CA8 + m * h = 12.9701335 + 0.4559365 * \ 1 = 13.4260700$

*Tabla 29. Resumen con 9 paso aplicando Euler*

| Paso | $t_{i-1}$ | $CA_{i-1}$ | $m$ | $t_i$ | $CA_i$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 5 | 1.5000000 | 1 | 6.5000000 |
| 2 | 1 | 6.5 | 1.3367347 | 2 | 7.8367347 |
| 3 | 2 | 7.8367347 | 1.1836735 | 3 | 9.0204082 |
| 4 | 3 | 9.0204082 | 1.0403821 | 4 | 10.0607903 |
| 5 | 4 | 10.0607903 | 0.9064358 | 5 | 10.9672261 |
| 6 | 5 | 10.9672261 | 0.7814193 | 6 | 11.7486454 |
| 7 | 6 | 11.7486454 | 0.6649267 | 7 | 12.4135721 |
| 8 | 7 | 12.4135721 | 0.5565614 | 8 | 12.9701335 |
| 9 | 8 | 12.9701335 | 0.4559365 | 9 | 13.4260700 |

Fuente: elaboración propia con DEV-C

**Paso 10**

$t9 = \ 9\ y\ CA9 = 13.4260700$

$m = fxy(t, CA) = f(\ 9{,}13.426070) = \ 0.3626744$

$t10 = t9 + h = 10\ y\ CA10 = CA9 + m * h = 13.4260700 + 0.3626744 * \ 1 = 13.7887444$

Con 10 pasos aplicando el modelo de Euler se puede decir que al cabo de 10 minutos habrá 13.7887444 litros de alcohol. Los datos de los 10 pasos aplicando Euler se pueden observar en la Tabla 30.

*Tabla 30. Datos aplicando Euler con 10 pasos*

| Paso | $t_{i-1}$ | $CA_{i-1}$ | $m$ | $t_i$ | $CA_i$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 5 | 1.5000000 | 1 | 6.5000000 |
| 2 | 1 | 6.5 | 1.3367347 | 2 | 7.8367347 |
| 3 | 2 | 7.8367347 | 1.1836735 | 3 | 9.0204082 |
| 4 | 3 | 9.0204082 | 1.0403821 | 4 | 10.0607903 |
| 5 | 4 | 10.0607903 | 0.9064358 | 5 | 10.9672261 |
| 6 | 5 | 10.9672261 | 0.7814193 | 6 | 11.7486454 |
| 7 | 6 | 11.7486454 | 0.6649267 | 7 | 12.4135721 |
| 8 | 7 | 12.4135721 | 0.5565614 | 8 | 12.9701335 |
| 9 | 8 | 12.9701335 | 0.4559365 | 9 | 13.4260700 |
| 10 | 9 | 13.4260700 | 0.3626744 | 10 | 13.7887444 |

Fuente: elaboración propia con DEV-C

## *Solución por Euler Mejorado con 1 paso*

Condición $t_i = t_0$ inicial: 0

Condición $CA_0$ inicial: 5

Condición $t_f$ final: 10

Número de pasos: $n = 1$

Valor del paso $h$:

$$h = \frac{t_f - \ t_0}{n} = \frac{10 - 0}{1} = 10$$

valor de h = 10.000000

**Paso 1**

$t_0 = \ 0 \ y \ CA_0 = 5$

$m_1 = fxy(t_0, CA_0) = f(0\ ,5) = \ 1.5$

$m_2 = fxy(t_0 + h, CA_0 + m_1 * h) = f(10\ ,20) = -0.5$

$m = \frac{(m_1 + m_2)}{2} = \frac{1.5 - 0.5}{2} = 0.5$

$t_1 = t_0 + h = 10 \ y \ CA_1 = CA_0 + m * h = 5 + 0.5 * 10 = 10$

Se puede decir que la cantidad de alcohol al cabo de 10 minutos resolviendo el problema por el modelo de Euler mejorado y trabajando 1 solo paso es de 10 Litros.

## *Solución por Euler Mejorado con 10 paso*

Condición $t_i = t_0$ inicial: 0

Condición $CA_0$ inicial: 5

Condición $t_f$ final: 10

Número de pasos: $n = 10$

Valor del paso $h$:

$h = \frac{t_f - \ t_0}{n} = \frac{10 - 0}{10} = 1$

Valor de h = 1

**Paso 1**

$t_0 = \ 0 \ y \ CA_0 = 5$

$m_1 = fxy(t_0, CA_0) = f(\ 0{,}5) = \ 1.5$

$m_2 = fxy(t_0 + h, CA_0 + m_1 * h) = f(\ 1{,}6.5) = \ 1.3367347$

$m = \frac{(m_1 + m_2)}{2} = \frac{1.5 + 1.3367347}{2} = 1.4183673$

$t_1 = t_0 + h = \ 1 \ y \ CA_1 = CA_0 + m * h = 5 + 1.4183673 * \ 1 = 6.4183673$

*Tabla 31. Datos al término del paso número 1 aplicando Euler Mejorado*

| Paso | $CA_{i-1}$ | $m_1$ | $CA_t$ | $m_2$ | $m$ | $t_i$ | $CA_i$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 5.0000000 | 1.50000 | 6.5000000 | 1.33673 | 1.41837 | 1.00000 | 6.4183673 |

Fuente: elaboración propia con DEV-C

**Paso 2**

$t_1 = \ 1 \ y \ CA_1 = 6.4183673$

$m_1 = fxy(t_1, CA_1) = f(\ 1{,}6.418367) = \ 1.3450646$

$m_2 = fxy(t_1 + h, CA_1 + m_1 * h) = f(\ 2{,}7.763432) = \ 1.1913092$

$m = \frac{(m_1 + m_2)}{2} = \frac{1.3450646 + 1.1913092}{2} = 1.2681869$

$t_2 = t_1 + h = \ 2 \ y \ CA_2 = CA_1 + m * h = 6.4183673 + 1.2681869 * \ 1 = 7.6865542$

*Tabla 32. Datos al término del paso número 2 aplicando Euler Mejorado*

| Paso | $CA_{i-1}$ | $m_1$ | $CA_t$ | $m_2$ | $m$ | $t_i$ | $CA_i$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 5.0000000 | 1.50000 | 6.5000000 | 1.33673 | 1.41837 | 1.00000 | 6.4183673 |
| 2 | 6.4183673 | 1.34506 | 7.7634319 | 1.19131 | 1.26819 | 2.00000 | 7.6865542 |

Fuente: elaboración propia con DEV-C

**Paso 3**

$t_2 = 2 \ y \ CA_2 = 7.6865542$

$m_1 = fxy(t_2, CA_2) = f(2{,}7.686554) = 1.1993173$

$m_2 = fxy(t_2 + h, CA_2 + m_1 * h) = f(3{,}8.885871) = 1.0546945$

$$m = \frac{(m_1 + m_2)}{2} = \frac{1.1993173 + 1.0546945}{2} = 1.1270059$$

$t_3 = t_2 + h = 3 \ y \ CA_3 = CA_2 + m * h = 7.6865542 + 1.1270059 * 1 = 8.8135601$

*Tabla 33. Datos al término del paso número 3 aplicando Euler Mejorado*

| Paso | $CA_{i-1}$ | $m_1$ | $CA_t$ | $m_2$ | $m$ | $t_i$ | $CA_i$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 5.0000000 | 1.50000 | 6.5000000 | 1.33673 | 1.41837 | 1.00000 | 6.4183673 |
| 2 | 6.4183673 | 1.34506 | 7.7634319 | 1.19131 | 1.26819 | 2.00000 | 7.6865542 |
| 3 | 7.6865542 | 1.19932 | 8.8858715 | 1.05469 | 1.12701 | 3.00000 | 8.8135601 |

Fuente: elaboración propia con DEV-C

**Paso 4**

$t_3 = 3 \ y \ CA_3 = 8.8135601$

$m_1 = fxy(t_3, CA_3) = f(3{,}8.813560) = 1.0623872$

$m_2 = fxy(t_3 + h, CA_3 + m_1 * h) = f(4{,}9.875947) = 0.9265275$

$$m = \frac{(m_1 + m_2)}{2} = \frac{1.0623872 + 0.9265275}{2} = 0.9944573$$

$t_4 = t_3 + h = 4 \ y \ CA_4 = CA_3 + m * h = 8.8135601 + 0.9944573 * 1 = 9.8080175$

*Tabla 34. Datos al término del paso número 4 aplicando Euler Mejorado*

| Paso | $CA_{i-1}$ | $m_1$ | $CA_t$ | $m_2$ | $m$ | $t_i$ | $CA_i$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 5.0000000 | 1.50000 | 6.5000000 | 1.33673 | 1.41837 | 1.00000 | 6.4183673 |
| 2 | 6.4183673 | 1.34506 | 7.7634319 | 1.19131 | 1.26819 | 2.00000 | 7.6865542 |
| 3 | 7.6865542 | 1.19932 | 8.8858715 | 1.05469 | 1.12701 | 3.00000 | 8.8135601 |
| 4 | 8.8135601 | 1.06239 | 9.8759473 | 0.92653 | 0.99446 | 4.00000 | 9.8080175 |

Fuente: elaboración propia con DEV-C

**Paso 5**

$t_4 = 4 \ y \ CA_4 = 9.8080175$

$m_1 = fxy(t_4, CA_4) = f(4{,}9.808017) = 0.9339111$

$m_2 = fxy(t_4 + h, CA_4 + m_1 * h) = f(5{,}10.741929) = 0.8064524$

$$m = \frac{(m_1 + m_2)}{2} = \frac{0.9339111 + 0.8064524}{2} = 0.8701818$$

$t_5 = t_4 + h = 5 \ y \ CA_5 = CA_4 + m * h = 9.8080175 + 0.8701818 * 1 = 10.6781992$

*Tabla 35. Datos al término del paso número 5 aplicando Euler Mejorado*

| Paso | $CA_{i-1}$ | $m_1$ | $CA_t$ | $m_2$ | $m$ | $t_i$ | $CA_i$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 5.0000000 | 1.50000 | 6.5000000 | 1.33673 | 1.41837 | 1.00000 | 6.4183673 |
| 2 | 6.4183673 | 1.34506 | 7.7634319 | 1.19131 | 1.26819 | 2.00000 | 7.6865542 |
| 3 | 7.6865542 | 1.19932 | 8.8858715 | 1.05469 | 1.12701 | 3.00000 | 8.8135601 |
| 4 | 8.8135601 | 1.06239 | 9.8759473 | 0.92653 | 0.99446 | 4.00000 | 9.8080175 |
| 5 | 9.8080175 | 0.93391 | 10.7419286 | 0.80645 | 0.87018 | 5.00000 | 10.6781992 |

Fuente: elaboración propia con DEV-C

**Paso 6**

$t_5 = 5 \; y \; CA_5 = 10.6781992$

$m_1 = fxy(t_5, CA_5) = f(\,5{,}10.678199) = 0.8135334$

$m_2 = fxy(t_5 + h, CA_5 + m_1 * h) = f(\,6{,}11.491733) = 0.6941213$

$$m = \frac{(m_1 + m_2)}{2} = \frac{0.8135334 + 0.6941213}{2} = 0.7538274$$

$t_6 = t_5 + h = 6 \; y \; CA_6 = CA_5 + m * h = 10.6781992 + 0.7538274 * 1 = 11.4320266$

*Tabla 36. Datos al término del paso número 6 aplicando Euler Mejorado*

| Paso | $CA_{i-1}$ | $m_1$ | $CA_t$ | $m_2$ | $m$ | $t_i$ | $CA_i$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 5.0000000 | 1.50000 | 6.5000000 | 1.33673 | 1.41837 | 1.00000 | 6.4183673 |
| 2 | 6.4183673 | 1.34506 | 7.7634319 | 1.19131 | 1.26819 | 2.00000 | 7.6865542 |
| 3 | 7.6865542 | 1.19932 | 8.8858715 | 1.05469 | 1.12701 | 3.00000 | 8.8135601 |
| 4 | 8.8135601 | 1.06239 | 9.8759473 | 0.92653 | 0.99446 | 4.00000 | 9.8080175 |
| 5 | 9.8080175 | 0.93391 | 10.7419286 | 0.80645 | 0.87018 | 5.00000 | 10.6781992 |
| 6 | 10.6781992 | 0.81353 | 11.4917326 | 0.69412 | 0.75383 | 6.00000 | 11.4320266 |

Fuente: elaboración propia con DEV-C

**Paso 7**

$t_6 = 6 \; y \; CA_6 = 11.4320266$

$m_1 = fxy(t_6, CA_6) = f(\,6{,}11.432027) = 0.7009061$

$m_2 = fxy(t_6 + h, CA_6 + m_1 * h) = f(\,7{,}12.132933) = 0.5891939$

$$m = \frac{(m_1 + m_2)}{2} = \frac{0.7009061 + 0.5891939}{2} = 0.6450500$$

$t_7 = t_6 + h = 7 \; y \; CA_7 = CA_6 + m * h = 11.4320266 + 0.6450500 * 1 = 12.0770765$

*Tabla 37. Datos al término del paso número 7 aplicando Euler Mejorado*

| Paso | $CA_{i-1}$ | $m_1$ | $CA_t$ | $m_2$ | $m$ | $t_i$ | $CA_i$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 5.0000000 | 1.50000 | 6.5000000 | 1.33673 | 1.41837 | 1.00000 | 6.4183673 |
| 2 | 6.4183673 | 1.34506 | 7.7634319 | 1.19131 | 1.26819 | 2.00000 | 7.6865542 |
| 3 | 7.6865542 | 1.19932 | 8.8858715 | 1.05469 | 1.12701 | 3.00000 | 8.8135601 |
| 4 | 8.8135601 | 1.06239 | 9.8759473 | 0.92653 | 0.99446 | 4.00000 | 9.8080175 |
| 5 | 9.8080175 | 0.93391 | 10.7419286 | 0.80645 | 0.87018 | 5.00000 | 10.6781992 |
| 6 | 10.6781992 | 0.81353 | 11.4917326 | 0.69412 | 0.75383 | 6.00000 | 11.4320266 |
| 7 | 11.4320266 | 0.70091 | 12.1329326 | 0.58919 | 0.64505 | 7.00000 | 12.0770765 |

Fuente: elaboración propia con DEV-C

**Paso 8**

$t_7 = 7 \; y \; CA_7 = 12.0770765$

$m_1 = fxy(t_7, CA_7) = f(\,7{,}12.077077) = 0.5956888$

$m_2 = fxy(t_7 + h, CA_7 + m_1 * h) = f(\,8{,}12.672765) = 0.4913375$

$$m = \frac{(m_1 + m_2)}{2} = \frac{0.5956888 + 0.4913375}{2} = 0.5435131$$

$t_8 = t_7 + h = 8 \; y \; CA_8 = CA_7 + m * h = 12.0770765 + 0.5435131 * 1 = 12.6205897$

*Tabla 38. Datos al término del paso número 8 aplicando Euler Mejorado*

| Paso | $CA_{i-1}$ | $m_1$ | $CA_t$ | $m_2$ | $m$ | $t_i$ | $CA_i$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 5.0000000 | 1.50000 | 6.5000000 | 1.33673 | 1.41837 | 1.00000 | 6.4183673 |
| 2 | 6.4183673 | 1.34506 | 7.7634319 | 1.19131 | 1.26819 | 2.00000 | 7.6865542 |
| 3 | 7.6865542 | 1.19932 | 8.8858715 | 1.05469 | 1.12701 | 3.00000 | 8.8135601 |

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 4 | 8.8135601 | 1.06239 | 9.8759473 | 0.92653 | 0.99446 | 4.00000 | 9.8080175 |
| 5 | 9.8080175 | 0.93391 | 10.7419286 | 0.80645 | 0.87018 | 5.00000 | 10.6781992 |
| 6 | 10.6781992 | 0.81353 | 11.4917326 | 0.69412 | 0.75383 | 6.00000 | 11.4320266 |
| 7 | 11.4320266 | 0.70091 | 12.1329326 | 0.58919 | 0.64505 | 7.00000 | 12.0770765 |
| 8 | 12.0770765 | 0.59569 | 12.6727653 | 0.49134 | 0.54351 | 8.00000 | 12.6205897 |

Fuente: elaboración propia con DEV-C

**Paso 9**

$t_8 = 8 \; y \; CA_8 = 12.6205897$

$m_1 = fxy(t_8, CA_8) = f(8{,}12.620590) = 0.4975488$

$m_2 = fxy(t_8 + h, CA_8 + m_1 * h) = f(9{,}13.118139) = 0.4002270$

$$m = \frac{(m_1 + m_2)}{2} = \frac{0.4975488 + 0.4002270}{2} = 0.4488879$$

$t_9 = t_8 + h = 9 \; y \; CA_9 = CA_8 + m * h = 12.6205897 + 0.4488879 * 1 = 13.0694776$

*Tabla 39. Datos al término del paso número 9 aplicando Euler Mejorado*

| Paso | $CA_{i-1}$ | $m_1$ | $CA_t$ | $m_2$ | $m$ | $t_i$ | $CA_i$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 5.0000000 | 1.50000 | 6.5000000 | 1.33673 | 1.41837 | 1.00000 | 6.4183673 |
| 2 | 6.4183673 | 1.34506 | 7.7634319 | 1.19131 | 1.26819 | 2.00000 | 7.6865542 |
| 3 | 7.6865542 | 1.19932 | 8.8858715 | 1.05469 | 1.12701 | 3.00000 | 8.8135601 |
| 4 | 8.8135601 | 1.06239 | 9.8759473 | 0.92653 | 0.99446 | 4.00000 | 9.8080175 |
| 5 | 9.8080175 | 0.93391 | 10.7419286 | 0.80645 | 0.87018 | 5.00000 | 10.6781992 |
| 6 | 10.6781992 | 0.81353 | 11.4917326 | 0.69412 | 0.75383 | 6.00000 | 11.4320266 |
| 7 | 11.4320266 | 0.70091 | 12.1329326 | 0.58919 | 0.64505 | 7.00000 | 12.0770765 |
| 8 | 12.0770765 | 0.59569 | 12.6727653 | 0.49134 | 0.54351 | 8.00000 | 12.6205897 |
| 9 | 12.6205897 | 0.49755 | 13.1181385 | 0.40023 | 0.44889 | 9.00000 | 13.0694776 |

Fuente: elaboración propia con DEV-C

**Paso 10**

$t_9 = 9 \; y \; CA_9 = 13.0694776$

$m_1 = fxy(t_9, CA_9) = f(9{,}13.069478) = 0.4061613$

$m_2 = fxy(t_9 + h, CA_9 + m_1 * h) = f(10{,}13.475639) = 0.3155451$

$$m = \frac{(m_1 + m_2)}{2} = \frac{0.4061613 + 0.3155451}{2} = 0.3608532$$

$t_{10} = t_9 + h = 10 \; y \; CA_{10} = CA_9 + m * h = 13.0694776 + 0.3608532 * 1 = 13.4303308$

Una vez realizados los 10 pasos con el modelo de Euler Mejorado se puede decir que al cabo de los 10 minutos la cantidad de alcohol será de 13.4303308 litros tal como se puede observar en la Tabla 40.

*Tabla 40. Datos con 10 pasos aplicando Euler Mejorado*

| Paso | $CA_{i-1}$ | $m_1$ | $CA_t$ | $m_2$ | $m$ | $t_i$ | $CA_i$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 5.0000000 | 1.50000 | 6.5000000 | 1.33673 | 1.41837 | 1.00000 | 6.4183673 |
| 2 | 6.4183673 | 1.34506 | 7.7634319 | 1.19131 | 1.26819 | 2.00000 | 7.6865542 |
| 3 | 7.6865542 | 1.19932 | 8.8858715 | 1.05469 | 1.12701 | 3.00000 | 8.8135601 |
| 4 | 8.8135601 | 1.06239 | 9.8759473 | 0.92653 | 0.99446 | 4.00000 | 9.8080175 |
| 5 | 9.8080175 | 0.93391 | 10.7419286 | 0.80645 | 0.87018 | 5.00000 | 10.6781992 |
| 6 | 10.6781992 | 0.81353 | 11.4917326 | 0.69412 | 0.75383 | 6.00000 | 11.4320266 |
| 7 | 11.4320266 | 0.70091 | 12.1329326 | 0.58919 | 0.64505 | 7.00000 | 12.0770765 |
| 8 | 12.0770765 | 0.59569 | 12.6727653 | 0.49134 | 0.54351 | 8.00000 | 12.6205897 |
| 9 | 12.6205897 | 0.49755 | 13.1181385 | 0.40023 | 0.44889 | 9.00000 | 13.0694776 |
| 10 | 13.0694776 | 0.40616 | 13.4756389 | 0.31555 | 0.36085 | 10.00000 | 13.4303308 |

Fuente: elaboración propia con DEV-C

*Solución por Runge Kutta con 1 paso*

Condición $t_i = t_0$ inicial: 0

Condición $CA_0$ inicial: 5

Condición $t_f$ final: 10

Número de pasos: $n = 1$

Valor del paso $h$:

$$h = \frac{t_f - t_0}{n} = \frac{10-0}{1} = 10$$

La ecuación diferencial es:

$$\frac{dCA}{dt} = CA' = 2 - \frac{5 * CA}{50 - t}$$

Paso 1

$t_0 = 0\ y\ CA_0 = 5$

Las 4 pendientes serán:

$$k_1 = f(t_0, CA_0) = f(\,0{,}5) = 2 - \frac{5*5}{50-0} = 1.5$$

$$k_2 = f\left(t_0 + \frac{h}{2}, CA_0 + \frac{h}{2} * k_1\right) = f\left(\,0 + \frac{10}{2}, 5 + \frac{10}{2} * 1.5\right) = f(\,5.0{,}12.5) = 2 - \frac{5*12.5}{50-5} = 0.6111111$$

$$k_3 = f\left(t_0 + \frac{h}{2}, CA_0 + \frac{h}{2} * k_2\right) = f\left(\,0 + \frac{10}{2}, 5 + \frac{10}{2} * 0.6111111\right) = f(\,5.0{,}8.0555556) = 1.1049383$$

$$k_4 = f(t_0 + h, CA_0 + h * k_3) = f(\,0 + 10{,}5 + 10 * 1.1049383) = f(10.0{,}16.0493827) = -0.0061728$$

La pendiente promedio será:

$$k_p = \frac{k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4}{6} = \frac{1.5 + 2*0.6111111 + 2*1.1049383 \pm 0.0061728}{6} = \ 0.8209877$$

Las coordenadas al final del paso número 1 será:

$t_1 = 10.000000\ y\ CA_1 = 13.2098765$

Para el tiempo t = 10 la cantidad de alcohol en el tanque será de: 13.20987654 resolviendo por Runge Kutta en 1 solo paso.

*Solución por Runge Kutta con 10 pasos*

Condición $t_i = t_0$ inicial: 0

Condición $CA_0$ inicial: 5

Condición $t_f$ final: 10

Número de pasos: $n = 10$

Valor del paso $h$:

$$h = \frac{t_f - t_0}{n} = \frac{10-0}{10} = 1$$

La ecuación diferencial es:

$$\frac{dCA}{dt} = CA' = 2 - \frac{5 * CA}{50 - t}$$

**Paso 1**

$t_0 = 0 \; y \; CA_0 = 5$

Las 4 pendientes para el paso 1 serán:

$$k_1 = f(t_0, CA_0) = f(\,0{,}5) = 2 - \frac{5*5}{50-0} = 1.5$$

$$k_2 = f\left(t_0 + \frac{h}{2}, CA_0 + \frac{h}{2} * k_1\right) = f\left(0 + \frac{1}{2{,}5} + \frac{1}{2} * 1.5\right) = f(0.5, 5.75) = 1.4191919$$

$$k_3 = f\left(t_0 + \frac{h}{2}, CA_0 + \frac{h}{2} * k_2\right) = f\left(0 + \frac{1}{2{,}5} + \frac{1}{2} * 1.4191919\right) = f(0.5, 5.709596) = 1.4232731$$

$$k_4 = f(t_0 + h, CA_0 + h * k_3) = f(0 + \;1{,}5 + \;1 * 1.4232731) = f(1.0, 6.4232731) = 1.344564$$

La pendiente promedio será:

$$k_p = \frac{k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4}{6} = \frac{1.5 + 2 * 1.4191919 + 2 * 1.4232731 + 1.344564}{6} = 1.4215823$$

Las coordenadas al final del paso número 1 será:

$$t_1 = t_0 + h = 0 + 1 = 1 \;\; y \;\; CA_1 = CA_0 + k_p * h = 5 + 1.4215823 * 1$$

$$t_1 = 1 \;\; y \;\; CA_1 = 6.4215823$$

*Tabla 41. Resultados obtenido hasta el paso 1 aplicando el modelo de Runge Kutta 4*

| Paso | $k_1$ | $k_2$ | $k_3$ | $k_4$ | $k_p$ | $t_f$ | $CA_f$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1.5000000 | 1.4191919 | 1.4232731 | 1.3445640 | 1.4215823 | 1.00000 | 6.42158 |

Fuente: elaboración propia con DEV C

**Paso 2**

$t_1 = 1 \; y \; CA_1 = 6.4215823$

Las 4 pendientes para el paso 2 serán:

$$k_1 = f(t_1, CA_1) = f(\,1{,}6.4215823) = 2 - \frac{5 * 6.4215823}{50-1} = 1.3447365$$

$$k_2 = f\left(t_1 + \frac{h}{2}, CA_1 + \frac{h}{2} * k_1\right) = f\left(1 + \frac{1}{2{,}6.4215823} + \frac{1}{2} * 1.3447365\right) = f(1.5, 7.0939506) = 1.2686649$$

$$k_3 = f\left(t_1 + \frac{h}{2}, CA_1 + \frac{h}{2} * k_2\right) = f\left(1 + \frac{1}{2{,}6.4215823} + \frac{1}{2} * 1.2686649\right) = f(1.5, 7.0559148) = 1.2725861$$

$$k_4 = f(t_1 + h, CA_1 + h * k_3) = f(1 + 1{,}6.4215823 + 1 * 1.2725861) = f(2.0, 7.6941685) = 1.1985241$$

La pendiente promedio será:

$$k_p = \frac{k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4}{6} = \frac{1.3447365 + 2 * 1.2686649 + 2 * 1.2725861 + 1.1985241}{6} = 1.2709604$$

Las coordenadas al final del paso número 2 será:

$$t_2 = t_1 + h = 1 + 1 = 2 \;\; y \;\; CA_2 = CA_1 + k_p * h = 6.4215823 + 1.2709604 * 1$$

$$t_2 = 2 \;\; y \;\; CA_2 = 7.6925428$$

*Tabla 42. Resultados obtenido hasta el paso 2 aplicando el modelo de Runge Kutta 4*

| Paso | $k_1$ | $k_2$ | $k_3$ | $k_4$ | $k_p$ | $t_f$ | $CA_f$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1.5000000 | 1.4191919 | 1.4232731 | 1.3445640 | 1.4215823 | 1.00000 | 6.42158 |
| 2 | 1.3447365 | 1.2686649 | 1.2725861 | 1.1985241 | 1.2709604 | 2.00000 | 7.69254 |

Fuente: elaboración propia con DEV C

| Paso | $k_1$ | $k_2$ | $k_3$ | $k_4$ | $k_p$ | $t_f$ | $CA_f$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1.5000000 | 1.4191919 | 1.4232731 | 1.3445640 | 1.4215823 | 1.00000 | 6.42158 |
| 2 | 1.3447365 | 1.2686649 | 1.2725861 | 1.1985241 | 1.2709604 | 2.00000 | 7.69254 |

**Paso 3**

$t_2 = 2\ y\ CA_2 = 7.6925428$

Las 4 pendientes para el paso 3 serán:

$$k_1 = f(t_2, CA_2) = f(\ 2{,}7.6925428) = 2 - \frac{5 * 7.6925428}{50 - 2} = 1.1986935$$

$$k_2 = f\left(t_2 + \frac{h}{2}, CA_2 + \frac{h}{2} * k_1\right) = f\left(2 + \frac{1}{2{,}7.6925428} + \frac{1}{2} * 1.1986935\right) = f(2.5, 8.2918895) = 1.1271695$$

$$k_3 = f\left(t_2 + \frac{h}{2}, CA_2 + \frac{h}{2} * k_2\right) = f\left(2 + \frac{1}{2{,}7.6925428} + \frac{1}{2} * 1.1271695\right) = f(2.5, 8.2561275) = 1.1309339$$

$$k_4 = f(t_2 + h, CA_2 + h * k_3) = f(2 + 1{,}7.6925428 + 1 * 1.1309339) = f(\ 3.0, 8.8234767) = 1.0613323$$

La pendiente promedio será:

$$k_p = \frac{k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4}{6} = \frac{1.1986935 + 2 * 1.1271695 + 2 * 1.1309339 + 1.0613323}{6} = \ 1.1293721$$

Las coordenadas al final del paso número 3 será:

$t_3 = t_2 + h = 2 + 1 = 3\ \ y\ \ CA_3 = CA_2 + k_p * h = 7.6925428 + 1.1293721 * 1$

$t_3 = 3\ \ y\ \ CA_3 = 8.8219149$

*Tabla 43. Resultados obtenido hasta el paso 3 aplicando el modelo de Runge Kutta 4*

| Paso | $k_1$ | $k_2$ | $k_3$ | $k_4$ | $k_p$ | $t_f$ | $CA_f$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1.5000000 | 1.4191919 | 1.4232731 | 1.3445640 | 1.4215823 | 1.00000 | 6.42158 |
| 2 | 1.3447365 | 1.2686649 | 1.2725861 | 1.1985241 | 1.2709604 | 2.00000 | 7.69254 |
| 3 | 1.1986935 | 1.1271695 | 1.1309339 | 1.0613323 | 1.1293721 | 3.00000 | 8.82191 |

Fuente: elaboración propia con DEV C

**Paso 4**

$t_4 = 3\ y\ CA_3 = 8.8219149$

Las 4 pendientes para el paso 4 serán:

$$k_1 = f(t_4, CA_3) = f(\ 3{,}8.8219149) = 2 - \frac{5 * 8.8219149}{50 - 3} = 1.0614984$$

$$k_2 = f\left(t_4 + \frac{h}{2}, CA_3 + \frac{h}{2} * k_1\right) = f\left(3 + \frac{1}{2{,}8.8219149} + \frac{1}{2} * 1.0614984\right) = f(3.5, 9.3526641) = 0.9943372$$

$$k_3 = f\left(t_4 + \frac{h}{2}, CA_3 + \frac{h}{2} * k_2\right) = f\left(3 + \frac{1}{2{,}8.8219149} + \frac{1}{2} * 0.9943372\right) = f(3.5, 9.3190835) = 0.9979480$$

$$k_4 = f(t_4 + h, CA_3 + h * k_3) = f(3 + 1{,}8.8219149 + 1 * 0.9979480) = f(4.0, 9.8198629) = 0.9326236$$

La pendiente promedio será:

$$k_p = \frac{k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4}{6} = \frac{1.0614984 + 2 * 0.9943372 + 2 * 0.9979480 + 0.9326236}{6} = 0.9964487$$

Las coordenadas al final del paso número 4 será:

$t_4 = t_3 + h = 3 + 1 = 4\ \ y\ \ CA_4 = CA_3 + k_p * h = 8.8219149 + 0.9964487 * 1$

$t_4 = 4\ y\ CA_4 = 9.8183636$

*Tabla 44. Resultados obtenido hasta el paso 4 aplicando el modelo de Runge Kutta 4*

| Paso | $k_1$ | $k_2$ | $k_3$ | $k_4$ | $k_p$ | $t_f$ | $CA_f$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1.5000000 | 1.4191919 | 1.4232731 | 1.3445640 | 1.4215823 | 1.00000 | 6.42158 |

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 1.3447365 | 1.2686649 | 1.2725861 | 1.1985241 | 1.2709604 | 2.00000 | 7.69254 |
| 3 | 1.1986935 | 1.1271695 | 1.1309339 | 1.0613323 | 1.1293721 | 3.00000 | 8.82191 |
| 4 | 1.0614984 | 0.9943372 | 0.9979480 | 0.9326236 | 0.9964487 | 4.00000 | 9.81836 |

Fuente: elaboración propia con DEV C

**Paso 5**

$t_4 = 4\ y\ CA_4 = 9.8183636$

Las 4 pendientes para el paso 5 serán:

$$k_1 = f(t_4, CA_4) = f(\ 4{,}9.8183636) = 2 - \frac{5 * 9.8183636}{50 - 4} = 0.9327866$$

$$k_2 = f\left(t_4 + \frac{h}{2}, CA_4 + \frac{h}{2} * k_1\right) = f\left(4 + \frac{1}{2{,}9.8183636} + \frac{1}{2} * 0.9327866\right) = f(4.5{,}10.2847569) = 0.8698069$$

$$k_3 = f\left(t_4 + \frac{h}{2}, CA_4 + \frac{h}{2} * k_2\right) = f\left(4 + \frac{1}{2{,}9.8183636} + \frac{1}{2} * 0.8698069\right) = f(4.5{,}10.2532671) = 0.8732674$$

$$k_4 = f(t_4 + h, CA_4 + h * k_3) = f(4 + 1{,}9.8183636 + 1 * 0.8732674) = f(5.0{,}10.6916310) = 0.8120410$$

La pendiente promedio será:

$$k_p = \frac{k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4}{6} = \frac{0.9327866 + 2 * 0.8698069 + 2 * 0.8732674 + 0.8120410}{6} = 0.8718294$$

Las coordenadas al final del paso número 5 será:

$t_5 = t_4 + h = 4 + 1 = 5\ \ y\ \ \ CA_5 = CA_4 + k_p * h = 9.8183636 + 0.8718294 * 1$

$t_5 = 5\ y\ CA_5 = 10.6901930$

*Tabla 45. Resultados obtenido hasta el paso 5 aplicando el modelo de Runge Kutta 4*

| Paso | $k_1$ | $k_2$ | $k_3$ | $k_4$ | $k_p$ | $t_f$ | $CA_f$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1.5000000 | 1.4191919 | 1.4232731 | 1.3445640 | 1.4215823 | 1.00000 | 6.42158 |
| 2 | 1.3447365 | 1.2686649 | 1.2725861 | 1.1985241 | 1.2709604 | 2.00000 | 7.69254 |
| 3 | 1.1986935 | 1.1271695 | 1.1309339 | 1.0613323 | 1.1293721 | 3.00000 | 8.82191 |
| 4 | 1.0614984 | 0.9943372 | 0.9979480 | 0.9326236 | 0.9964487 | 4.00000 | 9.81836 |
| 5 | 0.9327866 | 0.8698069 | 0.8732674 | 0.8120410 | 0.8718294 | 5.00000 | 10.69019 |

Fuente: elaboración propia con DEV C

**Paso 6**

$t_5 = 5\ y\ CA_5 = 10.6901930$

Las 4 pendientes para el paso 6 serán:

$$k_1 = f(t_5,\ CA_5) = f(\ 5{,}10.6901930) = 2 - \frac{5 * 10.6901930}{50 - 5} = 0.8122008$$

$$k_2 = f\left(t_5 + \frac{h}{2},\ CA_5 + \frac{h}{2} * k_1\right) = f\left(5 + \frac{1}{2{,}10.6901930} + \frac{1}{2} * 0.8122008\right) = f(5.5{,}11.0962934) = 0.7532255$$

$$k_3 = f\left(t_5 + \frac{h}{2},\ CA_5 + \frac{h}{2} * k_2\right) = f\left(5 + \frac{1}{2{,}10.6901930} + \frac{1}{2} * 0.7532255\right) = f(5.5{,}11.0668057) = 0.7565387$$

$$k_4 = f(t_5 + h,\ CA_5 + h * k_3) = f(5 + 1{,}10.6901930 + 1 * 0.7565387) = f(6.0{,}11.4467317) = 0.6992350$$

La pendiente promedio será:

$$k_p = \frac{k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4}{6} = \frac{0.8122008 + 2 * 0.7532255 + 2 * 0.7565387 + 0.6992350}{6} = 0.7551607$$

Las coordenadas al final del paso número 6 será:

$t_6 = t_5 + h = 5 + 1 = 6\ \ y\ \ CA_6 =\ CA_5 + k_p * h = 10.6901930 + 0.7551607 * 1$

$t_6 = 6\ y\ CA_6 = 11.4453537$

*Tabla 46. Resultados obtenido hasta el paso 6 aplicando el modelo de Runge Kutta 4*

| Paso | $k_1$ | $k_2$ | $k_3$ | $k_4$ | $k_p$ | $t_f$ | $CA_f$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1.5000000 | 1.4191919 | 1.4232731 | 1.3445640 | 1.4215823 | 1.00000 | 6.42158 |
| 2 | 1.3447365 | 1.2686649 | 1.2725861 | 1.1985241 | 1.2709604 | 2.00000 | 7.69254 |
| 3 | 1.1986935 | 1.1271695 | 1.1309339 | 1.0613323 | 1.1293721 | 3.00000 | 8.82191 |
| 4 | 1.0614984 | 0.9943372 | 0.9979480 | 0.9326236 | 0.9964487 | 4.00000 | 9.81836 |
| 5 | 0.9327866 | 0.8698069 | 0.8732674 | 0.8120410 | 0.8718294 | 5.00000 | 10.69019 |
| 6 | 0.8122008 | 0.7532255 | 0.7565387 | 0.6992350 | 0.7551607 | 6.00000 | 11.44535 |

Fuente: elaboración propia con DEV C

**Paso 7**

$t_6 = 6\ y\ CA_6 = 11.4453537$

Las 4 pendientes para el paso 7 serán:

$$k_1 = f(t_6, CA_6) = f(\,6{,}11.4453537) = 2 - \frac{5 * 11.4453537}{50 - 6} = 0.6993916$$

$$k_2 = f\left(t_6 + \frac{h}{2}, CA_6 + \frac{h}{2} * k_1\right) = f\left(6 + \frac{1}{2{,}11.4453537} + \frac{1}{2} * 0.6993916\right) = f(6.5{,}11.7950495) = 0.6442472$$

$$k_3 = f\left(t_6 + \frac{h}{2}, CA_6 + \frac{h}{2} * k_2\right) = f\left(6 + \frac{1}{2{,}11.4453537} + \frac{1}{2} * 0.6442472\right) = f(6.5{,}11.7674773) = 0.6474164$$

$$k_4 = f(t_6 + h, CA_6 + h * k_3) = f(6 + 1{,}11.4453537 + 1 * 0.6474164) = f(7.0{,}12.0927701) = 0.5938639$$

La pendiente promedio será:

$$k_p = \frac{k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4}{6} = \frac{0.6993916 + 2 * 0.6442472 + 2 * 0.6474164 + 0.5938639}{6} = 0.6460971$$

Las coordenadas al final del paso número 7 será:

$t_7 = t_6 + h = 6 + 1 = 6\ \ y\ CA_7 =\ CA_6 + k_p * h = 11.4453537 + 0.6460971 * 1$

$t_7 = 7\ y\ CA_7 = 12.0914508$

*Tabla 47. Resultados obtenido hasta el paso 7 aplicando el modelo de Runge Kutta 4*

| Paso | $k_1$ | $k_2$ | $k_3$ | $k_4$ | $k_p$ | $t_f$ | $CA_f$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1.5000000 | 1.4191919 | 1.4232731 | 1.3445640 | 1.4215823 | 1.00000 | 6.42158 |
| 2 | 1.3447365 | 1.2686649 | 1.2725861 | 1.1985241 | 1.2709604 | 2.00000 | 7.69254 |
| 3 | 1.1986935 | 1.1271695 | 1.1309339 | 1.0613323 | 1.1293721 | 3.00000 | 8.82191 |
| 4 | 1.0614984 | 0.9943372 | 0.9979480 | 0.9326236 | 0.9964487 | 4.00000 | 9.81836 |
| 5 | 0.9327866 | 0.8698069 | 0.8732674 | 0.8120410 | 0.8718294 | 5.00000 | 10.69019 |
| 6 | 0.8122008 | 0.7532255 | 0.7565387 | 0.6992350 | 0.7551607 | 6.00000 | 11.44535 |
| 7 | 0.6993916 | 0.6442472 | 0.6474164 | 0.5938639 | 0.6460971 | 7.00000 | 12.09145 |

Fuente: elaboración propia con DEV C

**Paso 8**

$t_7 = 7\ y\ CA_7 = 12.0914508$

Las 4 pendientes para el paso 8 serán:

$$k_1 = f(t_7, CA_7) = f(\,7{,}12.0914508) = 2 - \frac{5 * 12.0914508}{50 - 7} = 0.5940173$$

$$k_2 = f\left(t_7 + \frac{h}{2}, CA_7 + \frac{h}{2} * k_1\right) = f\left(7 + \frac{1}{2{,}12.0914508} + \frac{1}{2} * 0.5940173\right) = f(7.5{,}12.3884595) = 0.5425342$$

$$k_3 = f\left(t_7 + \frac{h}{2}, CA_7 + \frac{h}{2} * k_2\right) = f\left(7 + \frac{1}{2{,}12.0914508} + \frac{1}{2} * 0.5425342\right) = f(7.5{,}12.3627179) = 0.5455626$$

$$k_4 = f(t_7 + h, CA_7 + h * k_3) = f(7 + 1{,}12.0914508 + 1 * 0.5455626) = f(8.0{,}12.6370134) = 0.4955936$$

La pendiente promedio será:

$$k_p = \frac{k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4}{6} = \frac{0.5940173 + 2 * 0.5425342 + 2 * 0.5455626 + 0.4955936}{6} = 0.5443008$$

Las coordenadas al final del paso número 8 será:

$t_8 = t_7 + h = 7 + 1 = 8 \ y \ CA_8 = CA_7 \ + k_p * h = 12.0914508 + 0.5443008 * 1$

$t_8 = 8 \ y \ CA_8 = 12.6357516$

*Tabla 48. Resultados obtenido hasta el paso 8 aplicando el modelo de Runge Kutta 4*

| Paso | $k_1$ | $k_2$ | $k_3$ | $k_4$ | $k_p$ | $t_f$ | $CA_f$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1.5000000 | 1.4191919 | 1.4232731 | 1.3445640 | 1.4215823 | 1.00000 | 6.42158 |
| 2 | 1.3447365 | 1.2686649 | 1.2725861 | 1.1985241 | 1.2709604 | 2.00000 | 7.69254 |
| 3 | 1.1986935 | 1.1271695 | 1.1309339 | 1.0613323 | 1.1293721 | 3.00000 | 8.82191 |
| 4 | 1.0614984 | 0.9943372 | 0.9979480 | 0.9326236 | 0.9964487 | 4.00000 | 9.81836 |
| 5 | 0.9327866 | 0.8698069 | 0.8732674 | 0.8120410 | 0.8718294 | 5.00000 | 10.69019 |
| 6 | 0.8122008 | 0.7532255 | 0.7565387 | 0.6992350 | 0.7551607 | 6.00000 | 11.44535 |
| 7 | 0.6993916 | 0.6442472 | 0.6474164 | 0.5938639 | 0.6460971 | 7.00000 | 12.09145 |
| 8 | 0.5940173 | 0.5425342 | 0.5455626 | 0.4955936 | 0.5443008 | 8.00000 | 12.63575 |

Fuente: elaboración propia con DEV C

**Paso 9**

$t_8 = 8 \ y \ CA_8 = 12.6357516$

Las 4 pendientes para el paso 9 serán:

$$k_1 = f(t_8, CA_8) = f(\ 8{,}12.6357516) = 2 - \frac{5 * 12.6357516}{50 - 8} = 0.4957439$$

$$k_2 = f\left(t_8 + \frac{h}{2}, CA_8 + \frac{h}{2} * k_1\right) = f\left(8 + \frac{1}{2{,}12.6357516} + \frac{1}{2} * 0.4957439\right) = f(8.5{,}12.8836235) = 0.4477562$$

$$k_3 = f\left(t_8 + \frac{h}{2}, CA_8 + \frac{h}{2} * k_2\right) = f\left(8 + \frac{1}{2{,}12.6357516} + \frac{1}{2} * 0.4477562\right) = f(8.5{,}12.8596297) = 0.4506470$$

$$k_4 = f(t_8 + h, CA_8 + h * k_3) = f(8 + 1{,}12.6357516 + 1 * 0.4506470) = f(9.0{,}13.0863986) = 0.4040977$$

La pendiente promedio será:

$$k_p = \frac{k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4}{6} = \frac{0.4957439 + 2 * 0.4477562 + 2 * 0.4506470 + 0.4040977}{6} = 0.4494413$$

Las coordenadas al final del paso número 9 será:

$t_9 = t_8 + h = 8 + 1 = 9 \ y \ CA_9 = \ CA_8 \ + k_p * h = 12.6357516 + 0.4494413 * 1$

$t_9 = 9 \ y \ CA_9 = 13.0851929$

*Tabla 49. Resultados obtenido hasta el paso 9 aplicando el modelo de Runge Kutta 4*

| Paso | $k_1$ | $k_2$ | $k_3$ | $k_4$ | $k_p$ | $t_f$ | $CA_f$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1.5000000 | 1.4191919 | 1.4232731 | 1.3445640 | 1.4215823 | 1.00000 | 6.42158 |
| 2 | 1.3447365 | 1.2686649 | 1.2725861 | 1.1985241 | 1.2709604 | 2.00000 | 7.69254 |
| 3 | 1.1986935 | 1.1271695 | 1.1309339 | 1.0613323 | 1.1293721 | 3.00000 | 8.82191 |
| 4 | 1.0614984 | 0.9943372 | 0.9979480 | 0.9326236 | 0.9964487 | 4.00000 | 9.81836 |
| 5 | 0.9327866 | 0.8698069 | 0.8732674 | 0.8120410 | 0.8718294 | 5.00000 | 10.69019 |
| 6 | 0.8122008 | 0.7532255 | 0.7565387 | 0.6992350 | 0.7551607 | 6.00000 | 11.44535 |
| 7 | 0.6993916 | 0.6442472 | 0.6474164 | 0.5938639 | 0.6460971 | 7.00000 | 12.09145 |
| 8 | 0.5940173 | 0.5425342 | 0.5455626 | 0.4955936 | 0.5443008 | 8.00000 | 12.63575 |
| 9 | 0.4957439 | 0.4477562 | 0.4506470 | 0.4040977 | 0.4494413 | 9.00000 | 13.08519 |

Fuente: elaboración propia con DEV C

**Paso 10**

$t_9 = 9 \; y \; CA_9 = 13.0851929$

Las 4 pendientes para el paso 10 serán:

$$k_1 = f(t_9, CA_9) = f(\,9{,}13.0851929) = 2 - \frac{5 * 13.0851929}{50 - 9} = 0.4042448$$

$$k_2 = f\left(t_9 + \frac{h}{2}, CA_9 + \frac{h}{2} * k_1\right) = f\left(9 + \frac{1}{2{,}13.0851929} + \frac{1}{2} * 0.4042448\right) = f(9.5{,}13.2873153) = 0.3595907$$

$$k_3 = f\left(t_9 + \frac{h}{2}, CA_9 + \frac{h}{2} * k_2\right) = f\left(9 + \frac{1}{2{,}13.0851929} + \frac{1}{2} * 0.3595907\right) = f(9.5{,}13.2649883) = 0.3623471$$

$$k_4 = f(t_9 + h, CA_9 + h * k_3) = f(9 + 1{,}13.0851929 + 1 * 0.3623471) = f(10.0{,}13.4475400) = 0.3190575$$

La pendiente promedio será:

$$k_p = \frac{k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4}{6} = \frac{0.4042448 + 2 * 0.3595907 + 2 * 0.3623471 + 0.3190575}{6} = 0.3611963$$

Las coordenadas al final del paso número 10 será:

$$t_{10} = t_9 + h = 9 + 1 = 10 \;\; y \;\; CA_{10} = CA_9 + k_p * h = 13.0851929 + 0.3611963 * 1$$

$t_{10} = 10 \; y \; CA_{10} = 13.4463892$

El valor obtenido en 10 pasos para el tiempo $t = 10$ y para la cantidad de alcohol en el tanque es de $CA = 13.44638922$.

Tenga en cuenta que las unidades para el tiempo son minutos y para la cantidad de alcohol son litros.

*Tabla 50. Resultados aplicando el modelo de Runge Kutta 4 con 10 Pasos*

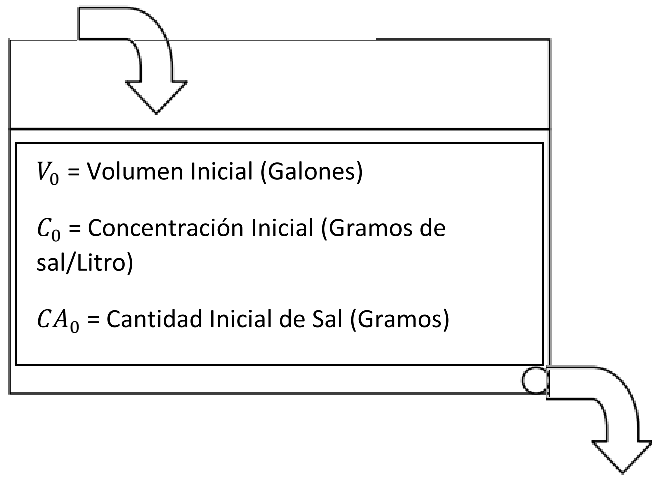
| Paso | $k_1$ | $k_2$ | $k_3$ | $k_4$ | $k_p$ | $t_f$ | $CA_f$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1.5000000 | 1.4191919 | 1.4232731 | 1.3445640 | 1.4215823 | 1.00000 | 6.42158 |
| 2 | 1.3447365 | 1.2686649 | 1.2725861 | 1.1985241 | 1.2709604 | 2.00000 | 7.69254 |
| 3 | 1.1986935 | 1.1271695 | 1.1309339 | 1.0613323 | 1.1293721 | 3.00000 | 8.82191 |
| 4 | 1.0614984 | 0.9943372 | 0.9979480 | 0.9326236 | 0.9964487 | 4.00000 | 9.81836 |
| 5 | 0.9327866 | 0.8698069 | 0.8732674 | 0.8120410 | 0.8718294 | 5.00000 | 10.69019 |
| 6 | 0.8122008 | 0.7532255 | 0.7565387 | 0.6992350 | 0.7551607 | 6.00000 | 11.44535 |
| 7 | 0.6993916 | 0.6442472 | 0.6474164 | 0.5938639 | 0.6460971 | 7.00000 | 12.09145 |
| 8 | 0.5940173 | 0.5425342 | 0.5455626 | 0.4955936 | 0.5443008 | 8.00000 | 12.63575 |
| 9 | 0.4957439 | 0.4477562 | 0.4506470 | 0.4040977 | 0.4494413 | 9.00000 | 13.08519 |
| 10 | 0.4042448 | 0.3595907 | 0.3623471 | 0.3190575 | 0.3611963 | 10.00000 | 13.44639 |

Fuente: elaboración propia con DEV C

Una vez realizados los 10 pasos con el modelo de Runge Kutta de orden 4 se puede decir que al cabo de los 10 minutos la cantidad de alcohol será de $13.446389$ litros tal como se puede observar en la Tabla 50.

# Ejercicio sobre mezcla Agua-Sal

$C_1$ = Concentración de Entrada
$Q_1$ = Caudal o Razón de entrada




$C_2(t)$ = Concentración de salida (Varía en función del tiempo)
$Q_2$ = Caudal o Razón de salida

Sea $CA(t)$ la cantidad de Sal (gramos) en el tanque en un instante de tiempo $t$. La cantidad de sal que entra al tanque durante Δt segundos es $(Q_1 * C_1 * \Delta t)$ gramos. La cantidad de sal que fluye hacia fuera del tanque durante el mismo intervalo de tiempo depende de la concentración de sal $C_2(t)$ en el tanque al instante t.

La concentración de sal en el tanque en cualquier instante de tiempo t, viene dada por la ecuación: $C_2(t) = \frac{CA(t)}{V(t)}$, donde $CA(t)$ es la cantidad de sal en cualquier instante de tiempo t y $V(t)$ denota volumen de líquido en el tanque en cualquier instante de tiempo t.

El **volumen de líquido en el tanque, en cualquier instante de tiempo t**, viene dado por la ecuación

$$V(t) = V_0 + (Q_1 - Q_2) * t$$

Por otra parte, la variación de la cantidad de sal en un instante t, es igual a la diferencia entre la cantidad de sal que entra al tanque $(Q_1 * C_1 * \Delta t)$ y la cantidad de sal que sale del tanque $(Q_2 * C_2 * \Delta t)$.

ΔCA=(gramos que ingresan)-(gramos que salen)=$(Q_1 * C_1 * \Delta t) - (Q_2 * C_2 * \Delta t) = ((Q_1 * C_1) - (Q_2 * C_2)) * \Delta t$.

$$\frac{\Delta CA}{\Delta t} = ((Q_1 * C_1) - (Q_2 * C_2))$$

calculando el límite de cuando Δt → 0

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta CA}{\Delta t} = ((Q_1 * C_1) - (Q_2 * C_2))$$

Que corresponde a la derivada

$$\frac{dCA}{dt} = ((Q_1 * C_1) - (Q_2 * C_2))$$

donde $Q_1$, $C_1$ y $Q_2$ son constantes

Si:

$$C_2(t) = \frac{CA(t)}{V(t)} = \frac{CA(t)}{V_0 + (Q_1 - Q_2) * t}$$

entonces

$$\frac{dCA}{dt} = ((Q_1 * C_1) - (Q_2 * \frac{CA(t)}{V_0 + (Q_1 - Q_2) * t}))$$

$$\frac{dCA}{dt} + Q_2 * \frac{CA(t)}{V_0 + (Q_1 - Q_2) * t} = (Q_1 * C_1)$$

La ecuación diferencial asociada a problemas de mezclas es la ecuación diferencial lineal

$$\frac{dCA}{dt} + \frac{Q_2}{V_0 + (Q_1 - Q_2) * t} * CA(t) = (Q_1 * C_1)$$

$$\frac{dCA}{dt} = (Q_1 * C_1) - \frac{Q_2}{V_0 + (Q_1 - Q_2) * t} * CA(t)$$

# Planteamiento del problema

Un tanque de 400 litros de capacidad contiene inicialmente una solución salina de 150 litros de agua y 25 gramos de sal.

Una solución salina de 2 gramos por litro de sal entra en el tanque a 10 litros por minuto, mientras que la mezcla resultante sale por un sumidero a 5 litros por minuto. ¿Qué cantidad de sal hay en el tanque en el momento en que este empieza a rebosar?

## Solución Analítica

Sea $y(t)$ la cantidad en gramos de sal que hay en el tanque después de t minutos, entonces:

$$y'(t) = 20 - \frac{5}{150 + 5t} y(t), \quad y(0) = 25\ gr\ de\ sal$$

O bien

$$y'(t) + \frac{1}{30 + t} y(t) = 20$$

$$\frac{dy}{dt} = 20 - \frac{y}{30 + t}$$

$$y' = 20 - \frac{y}{30 + t}$$

Esta ecuación diferencial es lineal de primer orden. Para resolverla se necesita el factor integrante

$$\mu(t) = e^{\int \frac{1}{30+t} dt} = (30 + t)$$

Multiplicando la ecuación diferencial por el factor integrante

$$(30 + t)y'(t) + (30 + t)\frac{1}{30 + t} y(t) = 20(30 + t)$$

$$(30 + t)y'(t) + y(t) = 600 + 20t$$

Que puede escribirse

$$\left((30 + t)y(t)\right)' = 600 + 20t$$

$$(30 + t)y(t) = 600t + 10t^2 + c$$

Si las condiciones iniciales dan que:

$$y(0) = 25$$

Entonces el valor de $c$ será:

$$(30 + 0) * 25 = 600 * 0 + 10 * 0^2 + c$$

$$c = 750$$

Por lo tanto y(t) será:

$$y(t) = \frac{600t + 10t^2 + 750}{(30 + t)}$$

A continuación, es necesario saber el tiempo necesario para que el tanque se llene:

El volumen del tanque lleno es de 400 litros

El volumen inicial es de 150 litros

La diferencia en Volumen que entra y sale del tanque es de 5 Litros/min

Por tanto, el tiempo para que el tanque se llene será:

$$400 = 150 + 5t \Longrightarrow\ t = 50\, minutos$$

Finalmente, la respuesta al ejercicio será:

$$y(50) = 696.8 \text{ gramos de sal.}$$

## Solución Numérica

### *Solución por Euler con 1 paso*

Condición $t_0$ inicial: 0
Condición $CA_i$ inicial: 25
Condición $t_f$ final: 50
Número de pasos: $n = 1$

$h = \frac{t_f - t_0}{n} = \frac{50 - 0}{1} = 50$

$h = 50$

Ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dt} = 20 - \frac{y}{30 + t}$$

**Paso 1**

$t_0 = 0$ y $CA_0 = 25.0000000$

$\mathrm{m} = \mathrm{fxy}(\mathrm{t}, CA_0) = \mathrm{f}(\ 0{,}25.000000) = 19.1666667$

$t_1 = t_0 + \mathrm{h} = 50$ y $CA_1 = CA_0 + \mathrm{m} * \mathrm{h} = 25.0000000 + 19.1666667 * 50 = 983.3333333$

*Tabla 51. Resumen de los datos obtenidos con 1 paso con el modelo de Euler*

| Paso | $t_{i-1}$ | $t_i$ | $CA_{i-1}$ | $CA_i$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0.0000000 | 50.0000000 | 25.0000000 | 983.3333333 |

Fuente: Elaboración propia con DEV-C

### *Solución por Euler con 10 pasos*

Condición $t_0$ inicial: 0
Condición $CA_i$ inicial: 25
Condición $t_f$ final: 50
Número de pasos: $n = 10$

$h = \frac{t_f - t_0}{n} = \frac{50 - 0}{10} = 5$

$h = 5$
Ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dt} = 20 - \frac{y}{30 + t}$$

**Paso 1**

$t_0 = \ 0 \ y \ CA_0 = 25.0000000$

$m = fxy(t_0, CA_0) = f(\ 0{,}25.000000) = 19.1666667$

$t_1 = t_0 + h = \ 5 \ y \ CA_1 = CA_0 + m * h = 25.0000000 + 19.1666667 * \ 5 = 120.8333333$

**Paso 2**

$t_1 = \ 5 \ y \ CA_1 = 120.8333333$

$m = fxy(t_1, CA_1) = f(\ 5{,}120.833333) = 16.5476190$

$t_2 = t_1 + h = 10 \ y \ CA_2 = CA_1 + m * h = 120.8333333 + 16.5476190 * \ 5 = 203.5714286$

**Paso 3**

$t_2 = 10 \ y \ CA_2 = 203.5714286$

$m = fxy(t_2, CA_2) = f(10{,}203.571429) = 14.9107143$

$t_3 = t_2 + h = 15 \ y \ CA_3 = CA_2 + m * h = 203.5714286 + 14.9107143 * \ 5 = 278.1250000$

**Paso 4**

$t_3 = 15 \ y \ CA_3 = 278.1250000$

$m = fxy(t_3, CA_3) = f(15{,}278.125000) = 13.8194444$

$t_4 = t_3 + h = 20 \ y \ CA_4 = CA_3 + m * h = 278.1250000 + 13.8194444 * \ 5 = 347.2222222$

**Paso 5**

$t_4 = 20 \ y \ CA_4 = 347.2222222$

$m = fxy(t_4, CA_4) = f(20{,}347.222222) = 13.0555556$

$t_5 = t_4 + h = 25 \ y \ CA_5 = CA_4 + m * h = 347.2222222 + 13.0555556 * \ 5 = 412.5000000$

**Paso 6**

$t_5 = 25 \ y \ CA_5 = 412.5000000$

$m = fxy(t_5, CA_5) = f(25{,}412.500000) = 12.5000000$

$t_6 = t_5 + h = 30 \ y \ CA_6 = CA_5 + m * h = 412.5000000 + 12.5000000 * \ 5 = 475.0000000$

**Paso 7**

$t_6 = 30 \ y \ CA_6 = 475.0000000$

$m = fxy(t_6, CA_6) = f(30{,}475.000000) = 12.0833333$

$t_7 = t_6 + h = 35 \ y \ CA_7 = CA_6 + m * h = 475.0000000 + 12.0833333 * \ 5 = 535.4166667$

**Paso 8**

$t_7 = 35 \ y \ CA_7 = 535.4166667$

$m = fxy(t_7, CA_7) = f(35{,}535.416667) = 11.7628205$

$t_8 = t_7 + h = 40 \ y \ CA_8 = CA_7 + m * h = 535.4166667 + 11.7628205 * \ 5 = 594.2307692$

**Paso 9**

$t_8 = 40 \ y \ CA_8 = 594.2307692$

$m = fxy(t_8, CA_8) = f(40{,}594.230769) = 11.5109890$

$t_9 = t_8 + h = 45 \ y \ CA_9 = CA_8 + m * h = 594.2307692 + 11.5109890 * \ 5 = 651.7857143$

**Paso 10**

$t_9 = 45 \ y \ CA_9 = 651.7857143$

$m = fxy(t_9, CA_9) = f(45{,}651.785714) = 11.3095238$

$t_{10} = t_9 + h = 50\ y\ CA_{10} = CA_9 + m * h = 651.7857143 + 11.3095238 * 5 = 708.3333333$

*Tabla 52. Resumen de los datos obtenidos con 10 pasos con el modelo de Euler*

| Paso | $t_{i-1}$ | $t_i$ | $CA_{i-1}$ | $CA_i$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0.0000000 | 5.0000000 | 25.0000000 | 120.8333333 |
| 2 | 5.0000000 | 10.0000000 | 120.8333333 | 203.5714286 |
| 3 | 10.0000000 | 15.0000000 | 203.5714286 | 278.1250000 |
| 4 | 15.0000000 | 20.0000000 | 278.1250000 | 347.2222222 |
| 5 | 20.0000000 | 25.0000000 | 347.2222222 | 412.5000000 |
| 6 | 25.0000000 | 30.0000000 | 412.5000000 | 475.0000000 |
| 7 | 30.0000000 | 35.0000000 | 475.0000000 | 535.4166667 |
| 8 | 35.0000000 | 40.0000000 | 535.4166667 | 594.2307692 |
| 9 | 40.0000000 | 45.0000000 | 594.2307692 | 651.7857143 |
| 10 | 45.0000000 | 50.0000000 | 651.7857143 | 708.3333333 |

Fuente: Elaboración propia con DEV-C

## *Solución por Euler Mejorado con 1 paso*

Condición $t_0$ inicial: 0
Condición $CA_i$ inicial: 25
Condición $t_f$ final: 50
Número de pasos: $n = 1$

$h = \frac{t_f - t_0}{n} = \frac{50 - 0}{1} = 50$

$h = 50$
Ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dt} = 20 - \frac{y}{30 + t}$$

**Paso 1**

$t_0 = 0\ y\ CA_0 = 25.0000000$

$m_1 = fxy(t_0, CA_0) = f(\ 0{,}25.000000) = 19.1666667$

$m_2 = fxy(t_0 + h, CA_0 + m_1 * h) = f(50{,}983.333333) = 7.7083333$

$m = \frac{m_1 + m_2}{2} = \frac{19.1666667 + 7.7083333}{2} = 13.437500$

$t_1 = t_0 + h = 50\ y\ CA_1 = CA_0 + m * h = 25.0000000 + 13.4375000 * 50 = 696.8750000$

## *Solución por Euler Mejorado con 10 pasos*

Condición $t_0$ inicial: 0
Condición $CA_i$ inicial: 25
Condición $t_f$ final: 50
Número de pasos: $n = 10$

$h = \frac{t_f - t_0}{n} = \frac{50 - 0}{10} = 5$

$h = 5$
Ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dt} = 20 - \frac{y}{30 + t}$$

**Paso 1**

$t_0 = \ 0 \ y \ CA_0 = 25.0000000$

$m_1 = fxy(t_0, CA_0) = f(0{,}25.000000) = 19.1666667$

$m_2 = fxy(t_0 + h, CA_0 + m_1 * h) = f(5{,}120.833333) = 16.5476190$

$$m = \frac{m_1 + m_2}{2} = \frac{19.1666667 + 16.5476190}{2} = 17.8571429$$

$t_1 = t_0 + h = \ 5 \ y \ CA_1 = CA_0 + m * h = 25.0000000 + 17.8571429 * \ 5 = 114.2857143$

*Tabla 53. Datos resultados con el modelo Euler Mejorado para el 1 paso*

| Paso | $m_1$ | $CA + m_1 * h$ | $m_2$ | $m$ | $t_i$ | $CA_i$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 19.1666667 | 120.8333333 | 16.5476190 | 17.8571429 | 5.0000000 | 114.2857143 |

Fuente: Elaboración propia con DEV-C

**Paso 2**

$t_1 = \ 5 \ y \ CA_1 = 114.2857143$

$m_1 = fxy(t_1, CA_1) = f(5{,}114.285714) = 16.7346939$

$m_2 = fxy(t_1 + h, CA_1 + m_1 * h) = f(10{,}197.959184) = 15.0510204$

$$m = \frac{m_1 + m_2}{2} = \frac{16.7346939 + 15.0510204}{2} = 15.8928571$$

$t_2 = t_1 + h = 10 \ y \ CA_2 = CA_1 + m * h = 114.2857143 + 15.8928571 * \ 5 = 193.7500000$

*Tabla 54. Datos resultados con el modelo Euler Mejorado para el 2 paso*

| Paso | $m_1$ | $CA + m_1 * h$ | $m_2$ | $m$ | $t_i$ | $CA_i$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 19.1666667 | 120.8333333 | 16.5476190 | 17.8571429 | 5.0000000 | 114.2857143 |
| 2 | 16.7346939 | 197.9591837 | 15.0510204 | 15.8928571 | 10.0000000 | 193.7500000 |

Fuente: Elaboración propia con DEV-C

**Paso 3**

$t_2 = 10 \ y \ CA_2 = 193.7500000$

$m_1 = fxy(t_2, CA_2) = f(10{,}193.750000) = 15.1562500$

$m_2 = fxy(t_2 + h, CA_2 + m_1 * h) = f(15{,}269.531250) = 14.0104167$

$$m = \frac{m_1 + m_2}{2} = \frac{15.1562500 + 14.0104167}{2} = 14.5833333$$

$t_3 = t_2 + h = 15 \ y \ CA_3 = CA_2 + m * h = 193.7500000 + 14.5833333 * \ 5 = 266.6666667$

*Tabla 55. Datos resultados con el modelo Euler Mejorado para el 3 paso*

| Paso | $m_1$ | $CA + m_1 * h$ | $m_2$ | $m$ | $t_i$ | $CA_i$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 19.1666667 | 120.8333333 | 16.5476190 | 17.8571429 | 5.0000000 | 114.2857143 |
| 2 | 16.7346939 | 197.9591837 | 15.0510204 | 15.8928571 | 10.0000000 | 193.7500000 |
| 3 | 15.1562500 | 269.5312500 | 14.0104167 | 14.5833333 | 15.0000000 | 266.6666667 |

Fuente: Elaboración propia con DEV-C

**Paso 4**

$t_3 = 15 \ y \ CA_3 = 266.6666667$

$m_1 = fxy(t_3, CA_3) = f(15{,}266.666667) = 14.0740741$

$m_2 = fxy(t_3 + h, CA_3 + m_1 * h) = f(20{,}337.037037) = 13.2592593$

$$m = \frac{m_1 + m_2}{2} = \frac{14.0740741 + 13.2592593}{2} = 13.6666667$$

$t_4 = t_3 + h = 20 \ y \ CA_4 = CA_3 + m * h = 266.6666667 + 13.6666667 * \ 5 = 335.0000000$

*Tabla 56. Datos resultados con el modelo Euler Mejorado para el 4 paso*

| Paso | $m_1$ | $CA + m_1 * h$ | $m_2$ | $m$ | $t_i$ | $CA_i$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 19.1666667 | 120.8333333 | 16.5476190 | 17.8571429 | 5.0000000 | 114.2857143 |
| 2 | 16.7346939 | 197.9591837 | 15.0510204 | 15.8928571 | 10.0000000 | 193.7500000 |
| 3 | 15.1562500 | 269.5312500 | 14.0104167 | 14.5833333 | 15.0000000 | 266.6666667 |
| 4 | 14.0740741 | 337.0370370 | 13.2592593 | 13.6666667 | 20.0000000 | 335.0000000 |

Fuente: Elaboración propia con DEV-C

**Paso 5**

$t_4 = 20 \ y \ CA_4 = 335.0000000$

$m_1 = fxy(t_4, CA_4) = f(20{,}335.000000) = 13.3000000$

$m_2 = fxy(t_4 + h, CA_4 + m_1 * h) = f(25{,}401.500000) = 12.7000000$

$$m = \frac{m_1 + m_2}{2} = \frac{13.3000000 + 12.7000000}{2} = 13.0000000$$

$t_5 = t_4 + h = 25 \ y \ CA_5 = CA_4 + m * h = 335.0000000 + 13.0000000 * \ 5 = 400.0000000$

*Tabla 57. Datos resultados con el modelo Euler Mejorado para el 5 paso*

| Paso | $m_1$ | $CA + m_1 * h$ | $m_2$ | $m$ | $t_i$ | $CA_i$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 19.1666667 | 120.8333333 | 16.5476190 | 17.8571429 | 5.0000000 | 114.2857143 |
| 2 | 16.7346939 | 197.9591837 | 15.0510204 | 15.8928571 | 10.0000000 | 193.7500000 |
| 3 | 15.1562500 | 269.5312500 | 14.0104167 | 14.5833333 | 15.0000000 | 266.6666667 |
| 4 | 14.0740741 | 337.0370370 | 13.2592593 | 13.6666667 | 20.0000000 | 335.0000000 |
| 5 | 13.3000000 | 401.5000000 | 12.7000000 | 13.0000000 | 25.0000000 | 400.0000000 |

Fuente: Elaboración propia con DEV-C

**Paso 6**

$t_5 = 25 \ y \ CA_5 = 400.0000000$

$m_1 = fxy(t_5, CA_5) = f(25{,}400.000000) = 12.7272727$

$m_2 = fxy(t_5 + h, CA_5 + m_1 * h) = f(30{,}463.636364) = 12.2727273$

$$m = \frac{m_1 + m_2}{2} = \frac{12.7272727 + 12.2727273}{2} = 12.5000000$$

$t_6 = t_5 + h = 30 \ y \ CA_6 = CA_5 + m * h = 400.0000000 + 12.5000000 * \ 5 = 462.5000000$

*Tabla 58. Datos resultados con el modelo Euler Mejorado para el 6 paso*

| Paso | $m_1$ | $CA + m_1 * h$ | $m_2$ | $m$ | $t_i$ | $CA_i$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 19.1666667 | 120.8333333 | 16.5476190 | 17.8571429 | 5.0000000 | 114.2857143 |
| 2 | 16.7346939 | 197.9591837 | 15.0510204 | 15.8928571 | 10.0000000 | 193.7500000 |
| 3 | 15.1562500 | 269.5312500 | 14.0104167 | 14.5833333 | 15.0000000 | 266.6666667 |
| 4 | 14.0740741 | 337.0370370 | 13.2592593 | 13.6666667 | 20.0000000 | 335.0000000 |
| 5 | 13.3000000 | 401.5000000 | 12.7000000 | 13.0000000 | 25.0000000 | 400.0000000 |
| 6 | 12.7272727 | 463.6363636 | 12.2727273 | 12.5000000 | 30.0000000 | 462.5000000 |

Fuente: Elaboración propia con DEV-C

**Paso 7**

$t_6 = 30 \ y \ CA_6 = 462.5000000$

$m_1 = fxy(t_6, CA_6) = f(30{,}462.500000) = 12.2916667$

$m_2 = fxy(t_6 + h, CA_6 + m_1 * h) = f(35{,}523.958333) = 11.9391026$

$$m = \frac{m_1 + m_2}{2} = \frac{12.2916667 + 11.9391026}{2} = 12.1153846$$

$$t_7 = t_6 + h = 35 \; y \; CA_7 = CA_6 + m * h = 462.5000000 + 12.1153846 * \; 5 = 523.0769231$$

*Tabla 59. Datos resultados con el modelo Euler Mejorado para el 7 paso*

| Paso | $m_1$ | $CA + m_1 * h$ | $m_2$ | $m$ | $t_i$ | $CA_i$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 19.1666667 | 120.8333333 | 16.5476190 | 17.8571429 | 5.0000000 | 114.2857143 |
| 2 | 16.7346939 | 197.9591837 | 15.0510204 | 15.8928571 | 10.0000000 | 193.7500000 |
| 3 | 15.1562500 | 269.5312500 | 14.0104167 | 14.5833333 | 15.0000000 | 266.6666667 |
| 4 | 14.0740741 | 337.0370370 | 13.2592593 | 13.6666667 | 20.0000000 | 335.0000000 |
| 5 | 13.3000000 | 401.5000000 | 12.7000000 | 13.0000000 | 25.0000000 | 400.0000000 |
| 6 | 12.7272727 | 463.6363636 | 12.2727273 | 12.5000000 | 30.0000000 | 462.5000000 |
| 7 | 12.2916667 | 523.9583333 | 11.9391026 | 12.1153846 | 35.0000000 | 523.0769231 |

Fuente: Elaboración propia con DEV-C

**Paso 8**

$$t_7 = 35 \; y \; CA_7 = 523.0769231$$

$$m_1 = fxy(t_7, CA_7) = f(35{,}523.076923) = 11.9526627$$

$$m_2 = fxy(t_7 + h, CA_7 + m_1 * h) = f(40{,}582.840237) = 11.6737109$$

$$m = \frac{m_1 + m_2}{2} = \frac{11.9526627 + 11.6737109}{2} = 11.8131868$$

$$t_8 = t_7 + h = 40 \; y \; CA_8 = CA_7 + m * h = 523.0769231 + 11.8131868 * \; 5 = 582.1428571$$

*Tabla 60. Datos resultados con el modelo Euler Mejorado para el 8 paso*

| Paso | $m_1$ | $CA + m_1 * h$ | $m_2$ | $m$ | $t_i$ | $CA_i$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 19.1666667 | 120.8333333 | 16.5476190 | 17.8571429 | 5.0000000 | 114.2857143 |
| 2 | 16.7346939 | 197.9591837 | 15.0510204 | 15.8928571 | 10.0000000 | 193.7500000 |
| 3 | 15.1562500 | 269.5312500 | 14.0104167 | 14.5833333 | 15.0000000 | 266.6666667 |
| 4 | 14.0740741 | 337.0370370 | 13.2592593 | 13.6666667 | 20.0000000 | 335.0000000 |
| 5 | 13.3000000 | 401.5000000 | 12.7000000 | 13.0000000 | 25.0000000 | 400.0000000 |
| 6 | 12.7272727 | 463.6363636 | 12.2727273 | 12.5000000 | 30.0000000 | 462.5000000 |
| 7 | 12.2916667 | 523.9583333 | 11.9391026 | 12.1153846 | 35.0000000 | 523.0769231 |
| 8 | 11.9526627 | 582.8402367 | 11.6737109 | 11.8131868 | 40.0000000 | 582.1428571 |

Fuente: Elaboración propia con DEV-C

**Paso 9**

$$t_8 = 40 \; y \; CA_8 = 582.1428571$$

$$m_1 = fxy(t_8, CA_8) = f(40{,}582.142857) = 11.6836735$$

$$m_2 = fxy(t_8 + h, CA_8 + m_1 * h) = f(45{,}640.561224) = 11.4591837$$

$$m = \frac{m_1 + m_2}{2} = \frac{11.6836735 + 11.4591837}{2} = 11.5714286$$

$$t_9 = t_8 + h = 45 \; y \; CA_9 = CA_8 + m * h = 582.1428571 + 11.5714286 * \; 5 = 640.0000000$$

*Tabla 61. Datos resultados con el modelo Euler Mejorado para el 9 paso*

| Paso | $m_1$ | $CA + m_1 * h$ | $m_2$ | $m$ | $t_i$ | $CA_i$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 19.1666667 | 120.8333333 | 16.5476190 | 17.8571429 | 5.0000000 | 114.2857143 |
| 2 | 16.7346939 | 197.9591837 | 15.0510204 | 15.8928571 | 10.0000000 | 193.7500000 |
| 3 | 15.1562500 | 269.5312500 | 14.0104167 | 14.5833333 | 15.0000000 | 266.6666667 |
| 4 | 14.0740741 | 337.0370370 | 13.2592593 | 13.6666667 | 20.0000000 | 335.0000000 |
| 5 | 13.3000000 | 401.5000000 | 12.7000000 | 13.0000000 | 25.0000000 | 400.0000000 |
| 6 | 12.7272727 | 463.6363636 | 12.2727273 | 12.5000000 | 30.0000000 | 462.5000000 |

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 7 | 12.2916667 | 523.9583333 | 11.9391026 | 12.1153846 | 35.0000000 | 523.0769231 |
| 8 | 11.9526627 | 582.8402367 | 11.6737109 | 11.8131868 | 40.0000000 | 582.1428571 |
| 9 | 11.6836735 | 640.5612245 | 11.4591837 | 11.5714286 | 45.0000000 | 640.0000000 |

Fuente: Elaboración propia con DEV-C

**Paso 10**

$t_9 = 45\ y\ CA_9 = 640.0000000$

$m_1 = fxy(t_9, CA_9) = f(45{,}640.000000) = 11.4666667$

$m_2 = fxy(t_9 + h, CA_9 + m_1 * h) = f(50{,}697.333333) = 11.2833333$

$$m = \frac{m_1 + m_2}{2} = \frac{11.4666667 + 11.2833333}{2} = 11.3750000$$

$t_{10} = t_9 + h = 50\ y\ CA_{10} = CA_9 + m * h = 640.0000000 + 11.3750000 *\ 5 = 696.8750000$

*Tabla 62. Datos resultados con el modelo Euler Mejorado para los 10 pasos*

| Paso | $m_1$ | $CA + m_1 * h$ | $m_2$ | $m$ | $t_i$ | $CA_i$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 19.1666667 | 120.8333333 | 16.5476190 | 17.8571429 | 5.0000000 | 114.2857143 |
| 2 | 16.7346939 | 197.9591837 | 15.0510204 | 15.8928571 | 10.0000000 | 193.7500000 |
| 3 | 15.1562500 | 269.5312500 | 14.0104167 | 14.5833333 | 15.0000000 | 266.6666667 |
| 4 | 14.0740741 | 337.0370370 | 13.2592593 | 13.6666667 | 20.0000000 | 335.0000000 |
| 5 | 13.3000000 | 401.5000000 | 12.7000000 | 13.0000000 | 25.0000000 | 400.0000000 |
| 6 | 12.7272727 | 463.6363636 | 12.2727273 | 12.5000000 | 30.0000000 | 462.5000000 |
| 7 | 12.2916667 | 523.9583333 | 11.9391026 | 12.1153846 | 35.0000000 | 523.0769231 |
| 8 | 11.9526627 | 582.8402367 | 11.6737109 | 11.8131868 | 40.0000000 | 582.1428571 |
| 9 | 11.6836735 | 640.5612245 | 11.4591837 | 11.5714286 | 45.0000000 | 640.0000000 |
| 10 | 11.4666667 | 697.3333333 | 11.2833333 | 11.3750000 | 50.0000000 | 696.8750000 |

Fuente: Elaboración propia con DEV-C

## *Solución por Runge Kutta orden 4 con 1 paso*

Condición $t_0$ inicial: 0
Condición $CA_i$ inicial: 25
Condición $t_f$ final: 50
Número de pasos: $n = 1$

$$h = \frac{t_f -\ t_0}{n} = \frac{50 - 0}{1} = 50$$

$h = 50$
Ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dt} = 20 - \frac{y}{30 + t}$$

**Paso 1**

$t_0 = 0.000000\ y\ CA_0 = 25.0000000$

Las 4 pendientes *serán*:

$k_1 = f(t0, CA_0) = f(\ 0{,}25.0000000) = 19.1666667$

$k_2 = f(t_0 + h/2, CA_0 + h/2 * k_1) = f(\ 0 + 50/2{,}25.0000000 + 50/2 * 19.1666667) = f(25.0{,}504.1666667) = 10.8333333$

$k_3 = f(t_0 + h/2, CA_0 + h/2 * k_2) = f(\ 0 + 50/2{,}25.0000000 + 50/2 * 10.8333333) = f(25.0{,}295.8333333) = 14.6212121$

$k_4 = f(t_0 + h, CA_0 + h * k_3) = f(\ 0 + 50{,}25.0000000 + 50 * 14.6212121) = f(50.0{,}756.0606061) = 10.5492424$

La pendiente promedio *será*:

$$kp = \frac{k_1 + 2 * k_2 + 2 * k_3 + k_4}{6} = \frac{19.1666667 + 2 * 10.8333333 + 2 * 14.6212121 + 10.5492424}{6} = 13.4375000$$

*Las coordenadas al final del paso número 1 será:*

$t_1 = 50.000000 \; y \; CA_1 = 696.8750000$

*Solución por Runge Kutta orden 4 con 10 pasos*

Condición $t_0$ inicial: 0
Condición $CA_i$ inicial: 25
Condición $t_f$ final: 50
Número de pasos: $n = 10$

$$h = \frac{t_f - t_0}{n} = \frac{50 - 0}{10} = 5$$

$h = 5$
Ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dt} = 20 - \frac{y}{30 + t}$$

**Paso 1**

$t_0 = 0.000000 \; y \; CA_0 = 25.0000000$

Las 4 pendientes serán:

$k_1 = f(t_0, CA_0) = f(\,0{,}25.0000000) = 19.1666667$

$k_2 = f(t_0 + h/2, CA_0 + h/2 * k_1) = f(\,0 + \,5/2{,}25.0000000 + \,5/2 * 19.1666667) = f(\,2.5{,}72.9166667) = 17.7564103$

$k_3 = f(t_0 + h/2, CA_0 + h/2 * k_2) = f(\,0 + \,5/2{,}25.0000000 + \,5/2 * 17.7564103) = f(\,2.5{,}69.3910256) = 17.8648915$

$k_4 = f(t_0 + h, CA_0 + h * k_3) = f(\,0 + \,5{,}25.0000000 + \,5 * 17.8648915) = f(\,5.0{,}114.3244576) = 16.7335869$

La pendiente promedio será:

$$k_p = \frac{k_1 + 2 * k_2 + 2 * k_3 + k_4}{6} = \frac{19.1666667 + 2 * 17.7564103 + 2 * 17.8648915 + 16.7335869}{6} = 17.8571429$$

Las coordenadas al final del paso número 1 será:

$t_1 = t_0 + h = \; 0 + 5 = \; 5 \; y \; CA_1 = CA_0 + kp * h = 25.0000000 + 17.8571429 * 5 = 114.2857143$

*Tabla 63. Resumen de resultados aplicando el modelo de Runge Kutta orden 4 con 1 paso*

| Paso | $k_1$ | $k_2$ | $k_3$ | $k_4$ | $k_p$ | $t_i$ | $CA_i$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 19.1666667 | 17.7564103 | 17.8648915 | 16.7335869 | 17.8571429 | 5.00000 | 114.28571 |

Fuente: Elaboración propia con DEV-C

**Paso 2**

$t_1 = 5.000000 \; y \; CA_1 = 114.2857143$

Las 4 pendientes serán:

$k_1 = f(t_1, CA_1) = f(\,5{,}114.2857143) = 16.7346939$

$k_1 = f(t_1 + h/2, CA_1 + h/2 * k_1) = f(\,5 + \,5/2{,}114.2857143 + \,5/2 * 16.7346939) = f(\,7.5{,}156.1224490) = 15.8367347$

$k_3 = f(t_1 + h/2, CA_1 + h/2 * k_1) = f(\,5 + \,5/2{,}114.2857143 + \,5/2 * 15.8367347) = f(\,7.5{,}153.8775510) = 15.8965986$

$k_4 = f(t_1 + h, CA_1 + h * k_3) = f(\,5 + \,5{,}114.2857143 + \,5 * 15.8965986) = f(10.0{,}193.7687075) = 15.1557823$

La pendiente promedio será:

$$k_p = \frac{k_1 + 2 * k_1 + 2 * k_3 + k_4}{6} = \frac{16.7346939 + 2 * 15.8367347 + 2 * 15.8965986 + 15.1557823}{6} = \ 15.8928571$$

Las coordenadas al final del paso número 2 será:

$t_2 = t_1 + h = \ 5 + 5 = 10 \ y \ CA_2 = CA_1 + kp * h = 114.2857143 + 15.8928571 * 5 = 193.7500000$

*Tabla 64. Resumen de resultados aplicando el modelo de Runge Kutta orden 4 con 2 pasos*

| Paso | $k_1$ | $k_2$ | $k_3$ | $k_4$ | $k_p$ | $t_i$ | $CA_i$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 19.1666667 | 17.7564103 | 17.8648915 | 16.7335869 | 17.8571429 | 5.00000 | 114.28571 |
| 2 | 16.7346939 | 15.8367347 | 15.8965986 | 15.1557823 | 15.8928571 | 10.00000 | 193.75000 |

Fuente: Elaboración propia con DEV-C

**Paso 3**

$t_2 = 10.000000 \ y \ CA_2 = 193.7500000$

Las 4 pendientes serán:

$k_1 = f(t_2, CA_2) = f(10{,}193.7500000) = 15.1562500$

$k_2 = f(t_2 + h/2, CA_2 + h/2 * k_1) = f(10 + \ 5/2{,}193.7500000 + \ 5/2 * 15.1562500) = f(12.5{,}231.6406250) = 14.5496324$

$k_3 = f(t_2 + h/2, CA_2 + h/2 * k_2) = f(10 + \ 5/2{,}193.7500000 + \ 5/2 * 14.5496324) = f(12.5{,}230.1240809) = 14.5853157$

$k_4 = f(t_2 + h, CA_2 + h * k_3) = f(10 + \ 5{,}193.7500000 + \ 5 * 14.5853157) = f(15.0{,}266.6765787) = 14.0738538$

La pendiente promedio será:

$$k_p = \frac{k_1 + 2 * k_2 + 2 * k_3 + k_4}{6} = \frac{15.1562500 + 2 * 14.5496324 + 2 * 14.5853157 + 14.0738538}{6} = \ 14.5833333$$

Las coordenadas al final del paso número 3 será:

$t_3 = t_2 + h = 10 + 5 = 15 \ y \ CA_3 = CA_2 + kp * h = 193.7500000 + 14.5833333 * 5 = 266.6666667$

*Tabla 65. Resumen de resultados aplicando el modelo de Runge Kutta orden 4 con 3 pasos*

| Paso | $k_1$ | $k_2$ | $k_3$ | $k_4$ | $k_p$ | $t_i$ | $CA_i$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 19.1666667 | 17.7564103 | 17.8648915 | 16.7335869 | 17.8571429 | 5.00000 | 114.28571 |
| 2 | 16.7346939 | 15.8367347 | 15.8965986 | 15.1557823 | 15.8928571 | 10.00000 | 193.75000 |
| 3 | 15.1562500 | 14.5496324 | 14.5853157 | 14.0738538 | 14.5833333 | 15.00000 | 266.66667 |

Fuente: Elaboración propia con DEV-C

**Paso 4**

$t_3 = 15.000000 \ y \ CA_3 = 266.6666667$

Las 4 pendientes serán:

$k_1 = f(t_3, CA_3) = f(15{,}266.6666667) = 14.0740741$

$k_2 = f(t_3 + h/2, CA_3 + h/2 * k_1) = f(15 + \ 5/2{,}266.6666667 + \ 5/2 * 14.0740741) = f(17.5{,}301.8518519) = 13.6452242$

$k_3 = f(t_3 + h/2, CA_3 + h/2 * k_2) = f(15 + \ 5/2{,}266.6666667 + \ 5/2 * 13.6452242) = f(17.5{,}300.7797271) = 13.6677952$

$k_4 = f(t_3 + h, CA_3 + h * k_3) = f(15 + \ 5{,}266.6666667 + \ 5 * 13.6677952) = f(20.0{,}335.0056428) = 13.2998871$

La pendiente promedio será:

$$k_p = \frac{k_1 + 2 * k_2 + 2 * k_3 + k_4}{6} = \frac{14.0740741 + 2 * 13.6452242 + 2 * 13.6677952 + 13.2998871}{6} = \ 13.6666667$$

Las coordenadas al final del paso número 4 será:

$t_4 = t_3 + h = 15 + 5 = 20 \ y \ CA_4 = CA_3 + kp * h = 266.6666667 + 13.6666667 * 5 = 335.0000000$

*Tabla 66. Resumen de resultados aplicando el modelo de Runge Kutta orden 4 con 4 pasos*

| Paso | $k_1$ | $k_2$ | $k_3$ | $k_4$ | $k_p$ | $t_i$ | $CA_i$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 19.1666667 | 17.7564103 | 17.8648915 | 16.7335869 | 17.8571429 | 5.00000 | 114.28571 |
| 2 | 16.7346939 | 15.8367347 | 15.8965986 | 15.1557823 | 15.8928571 | 10.00000 | 193.75000 |
| 3 | 15.1562500 | 14.5496324 | 14.5853157 | 14.0738538 | 14.5833333 | 15.00000 | 266.66667 |
| 4 | 14.0740741 | 13.6452242 | 13.6677952 | 13.2998871 | 13.6666667 | 20.00000 | 335.00000 |

Fuente: Elaboración propia con DEV-C

**Paso 5**

$t_4 = 20.000000\ y\ CA_4 = 335.0000000$

Las 4 pendientes serán:

$k_1 = f(t_4, CA_4) = f(20{,}335.0000000) = 13.3000000$

$k_2 = f(t_4 + h/2, CA_4 + h/2 * k_1) = f(20 +\ 5/2{,}335.0000000 +\ 5/2 * 13.3000000) = f(22.5{,}368.2500000) = 12.9857143$

$k_3 = f(t_4 + h/2, CA_4 + h/2 * k_2) = f(20 +\ 5/2{,}335.0000000 +\ 5/2 * 12.9857143) = f(22.5{,}367.4642857) = 13.0006803$

$k_4 = f(t_4 + h, CA_4 + h * k_3) = f(20 +\ 5{,}335.0000000 +\ 5 * 13.0006803) = f(25.0{,}400.0034014) = 12.7272109$

La pendiente promedio será:

$$k_p = \frac{k_1 + 2 * k_2 + 2 * k_3 + k_4}{6} = \frac{13.3000000 + 2 * 12.9857143 + 2 * 13.0006803 + 12.7272109}{6} = 13.0000000$$

Las coordenadas al final del paso número 5 será:

$t_5 = t_4 + h = 20 + 5 = 25\ y\ CA_5 = CA_4 + kp * h = 335.0000000 + 13.0000000 * 5 = 400.0000000$

*Tabla 67. Resumen de resultados aplicando el modelo de Runge Kutta orden 4 con 5 pasos*

| Paso | $k_1$ | $k_2$ | $k_3$ | $k_4$ | $k_p$ | $t_i$ | $CA_i$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 19.1666667 | 17.7564103 | 17.8648915 | 16.7335869 | 17.8571429 | 5.00000 | 114.28571 |
| 2 | 16.7346939 | 15.8367347 | 15.8965986 | 15.1557823 | 15.8928571 | 10.00000 | 193.75000 |
| 3 | 15.1562500 | 14.5496324 | 14.5853157 | 14.0738538 | 14.5833333 | 15.00000 | 266.66667 |
| 4 | 14.0740741 | 13.6452242 | 13.6677952 | 13.2998871 | 13.6666667 | 20.00000 | 335.00000 |
| 5 | 13.3000000 | 12.9857143 | 13.0006803 | 12.7272109 | 13.0000000 | 25.00000 | 400.00000 |

Fuente: Elaboración propia con DEV-C

**Paso 6**

$t_5 = 25.000000\ y\ CA_5 = 400.0000000$

Las 4 pendientes serán:

$k_1 = f(t_5, CA_5) = f(25{,}400.0000000) = 12.7272727$

$k_2 = f(t_5 + h/2, CA_5 + h/2 * k_1) = f(25 +\ 5/2{,}400.0000000 +\ 5/2 * 12.7272727) = f(27.5{,}431.8181818) = 12.4901186$

$k_3 = f(t_5 + h/2, CA_5 + h/2 * k_2) = f(25 +\ 5/2{,}400.0000000 +\ 5/2 * 12.4901186) = f(27.5{,}431.2252964) = 12.5004296$

$k_4 = f(t_5 + h, CA_5 + h * k_3) = f(25 +\ 5{,}400.0000000 +\ 5 * 12.5004296) = f(30.0{,}462.5021481) = 12.2916309$

La pendiente promedio será:

$$k_p = \frac{k_1 + 2 * k_2 + 2 * k_3 + k_4}{6} = \frac{12.7272727 + 2 * 12.4901186 + 2 * 12.5004296 + 12.2916309}{6} = 12.5000000 =$$

Las coordenadas al final del paso número 6 será:

$t_6 = t_5 + h = 25 + 5 = 30\ y\ CA_6 = CA_5 + kp * h = 400.0000000 + 12.5000000 * 5 = 462.5000000$

*Tabla 68. Resumen de resultados aplicando el modelo de Runge Kutta orden 4 con 6 pasos*

| Paso | $k_1$ | $k_2$ | $k_3$ | $k_4$ | $k_p$ | $t_i$ | $CA_i$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 19.1666667 | 17.7564103 | 17.8648915 | 16.7335869 | 17.8571429 | 5.00000 | 114.28571 |
| 2 | 16.7346939 | 15.8367347 | 15.8965986 | 15.1557823 | 15.8928571 | 10.00000 | 193.75000 |
| 3 | 15.1562500 | 14.5496324 | 14.5853157 | 14.0738538 | 14.5833333 | 15.00000 | 266.66667 |
| 4 | 14.0740741 | 13.6452242 | 13.6677952 | 13.2998871 | 13.6666667 | 20.00000 | 335.00000 |
| 5 | 13.3000000 | 12.9857143 | 13.0006803 | 12.7272109 | 13.0000000 | 25.00000 | 400.00000 |

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 6 | 12.7272727 | 12.4901186 | 12.5004296 | 12.2916309 | 12.5000000 | 30.00000 | 462.50000 |

Fuente: Elaboración propia con DEV-C

**Paso 7**

$t_6 = 30.000000\ y\ CA_6 = 462.5000000$

Las 4 pendientes serán:

$k_1 = f(t_6, CA_6) = f(30,462.5000000) = 12.2916667$

$k_2 = f(t_6 + h/2, CA_6 + h/2 * k_1) = f(30 + 5/2,462.5000000 + 5/2 * 12.2916667) = f(32.5,493.2291667) = 12.1083333$

$k_3 = f(t_6 + h/2, CA_6 + h/2 * k_2) = f(30 + 5/2,462.5000000 + 5/2 * 12.1083333) = f(32.5,492.7708333) = 12.1156667$

$k_4 = f(t_6 + h, CA_6 + h * k_3) = f(30 + 5,462.5000000 + 5 * 12.1156667) = f(35.0,523.0783333) = 11.9526410$

La pendiente promedio será:

$$k_p = \frac{k_1 + 2 * k_2 + 2 * k_3 + k_4}{6} = \frac{12.2916667 + 2 * 12.1083333 + 2 * 12.1156667 + 11.9526410}{6} = 12.1153846$$

Las coordenadas al final del paso número 7 será:

$t_7 = t_6 + h = 30 + 5 = 35\ y\ CA_7 = CA_6 + kp * h = 462.5000000 + 12.1153846 * 5 = 523.0769231$

*Tabla 69. Resumen de resultados aplicando el modelo de Runge Kutta orden 4 con 7 pasos*

| Paso | $k_1$ | $k_2$ | $k_3$ | $k_4$ | $k_p$ | $t_i$ | $CA_i$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 19.1666667 | 17.7564103 | 17.8648915 | 16.7335869 | 17.8571429 | 5.00000 | 114.28571 |
| 2 | 16.7346939 | 15.8367347 | 15.8965986 | 15.1557823 | 15.8928571 | 10.00000 | 193.75000 |
| 3 | 15.1562500 | 14.5496324 | 14.5853157 | 14.0738538 | 14.5833333 | 15.00000 | 266.66667 |
| 4 | 14.0740741 | 13.6452242 | 13.6677952 | 13.2998871 | 13.6666667 | 20.00000 | 335.00000 |
| 5 | 13.3000000 | 12.9857143 | 13.0006803 | 12.7272109 | 13.0000000 | 25.00000 | 400.00000 |
| 6 | 12.7272727 | 12.4901186 | 12.5004296 | 12.2916309 | 12.5000000 | 30.00000 | 462.50000 |
| 7 | 12.2916667 | 12.1083333 | 12.1156667 | 11.9526410 | 12.1153846 | 35.00000 | 523.07692 |

Fuente: Elaboración propia con DEV-C

**Paso 8**

$t_7 = 35.000000\ y\ CA_7 = 523.0769231$

Las 4 pendientes serán:

$k_1 = f(t_7, CA_7) = f(35,523.0769231) = 11.9526627$

$k_2 = f(t_7 + h/2, CA_7 + h/2 * k_1) = f(35 + 5/2,523.0769231 + 5/2 * 11.9526627) = f(37.5,552.9585799) = 11.8080210$

$k_3 = f(t_7 + h/2, CA_7 + h/2 * k_2) = f(35 + 5/2,523.0769231 + 5/2 * 11.8080210) = f(37.5,552.5969757) = 11.8133781$

$k_4 = f(t_7 + h, CA_7 + h * k_3) = f(35 + 5,523.0769231 + 5 * 11.8133781) = f(40.0,582.1438138) = 11.6836598$

La pendiente promedio será:

$$k_p = \frac{k_1 + 2 * k_2 + 2 * k_3 + k_4}{6} = \frac{11.9526627 + 2 * 11.8080210 + 2 * 11.8133781 + 11.6836598}{6} = 11.8131868$$

Las coordenadas al final del paso número 8 será:

$t_8 = t_7 + h = 35 + 5 = 40\ y\ CA_8 = CA_7 + kp * h = 523.0769231 + 11.8131868 * 5 = 582.1428571$

*Tabla 70. Resumen de resultados aplicando el modelo de Runge Kutta orden 4 con 8 pasos*

| Paso | $k_1$ | $k_2$ | $k_3$ | $k_4$ | $k_p$ | $t_i$ | $CA_i$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 19.1666667 | 17.7564103 | 17.8648915 | 16.7335869 | 17.8571429 | 5.00000 | 114.28571 |
| 2 | 16.7346939 | 15.8367347 | 15.8965986 | 15.1557823 | 15.8928571 | 10.00000 | 193.75000 |
| 3 | 15.1562500 | 14.5496324 | 14.5853157 | 14.0738538 | 14.5833333 | 15.00000 | 266.66667 |
| 4 | 14.0740741 | 13.6452242 | 13.6677952 | 13.2998871 | 13.6666667 | 20.00000 | 335.00000 |
| 5 | 13.3000000 | 12.9857143 | 13.0006803 | 12.7272109 | 13.0000000 | 25.00000 | 400.00000 |
| 6 | 12.7272727 | 12.4901186 | 12.5004296 | 12.2916309 | 12.5000000 | 30.00000 | 462.50000 |

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 7 | 12.2916667 | 12.1083333 | 12.1156667 | 11.9526410 | 12.1153846 | 35.00000 | 523.07692 |
| 8 | 11.9526627 | 11.8080210 | 11.8133781 | 11.6836598 | 11.8131868 | 40.00000 | 582.14286 |

Fuente: Elaboración propia con DEV-C

**Paso 9**

$t_8 = 40.000000\ y\ CA_8 = 582.1428571$

Las 4 pendientes serán:

$k_1 = f(t_8, CA_8) = f(40{,}582.1428571) = 11.6836735$

$k_2 = f(t_8 + h/2, CA_8 + h/2 * k_1) = f(40 + 5/2{,}582.1428571 + 5/2 * 11.6836735) = f(42.5{,}611.3520408) = 11.5675581$

$k_3 = f(t_8 + h/2, CA_8 + h/2 * k_2) = f(40 + 5/2{,}582.1428571 + 5/2 * 11.5675581) = f(42.5{,}611.0617523) = 11.5715620$

$k_4 = f(t_8 + h, CA_8 + h * k_3) = f(40 + 5{,}582.1428571 + 5 * 11.5715620) = f(45.0{,}640.0006673) = 11.4666578$

La pendiente promedio será:

$$k_p = \frac{k_1 + 2 * k_2 + 2 * k_3 + k_4}{6} = \frac{11.6836735 + 2 * 11.5675581 + 2 * 11.5715620 + 11.4666578}{6} = 11.5714286$$

Las coordenadas al final del paso número 9 será:

$t_9 = t_8 + h = 40 + 5 = 45\ y\ CA_9 = CA_8 + kp * h = 582.1428571 + 11.5714286 * 5 = 640.0000000$

*Tabla 71. Resumen de resultados aplicando el modelo de Runge Kutta orden 4 con 9 pasos*

| Paso | $k_1$ | $k_2$ | $k_3$ | $k_4$ | $k_p$ | $t_i$ | $CA_i$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 19.1666667 | 17.7564103 | 17.8648915 | 16.7335869 | 17.8571429 | 5.00000 | 114.28571 |
| 2 | 16.7346939 | 15.8367347 | 15.8965986 | 15.1557823 | 15.8928571 | 10.00000 | 193.75000 |
| 3 | 15.1562500 | 14.5496324 | 14.5853157 | 14.0738538 | 14.5833333 | 15.00000 | 266.66667 |
| 4 | 14.0740741 | 13.6452242 | 13.6677952 | 13.2998871 | 13.6666667 | 20.00000 | 335.00000 |
| 5 | 13.3000000 | 12.9857143 | 13.0006803 | 12.7272109 | 13.0000000 | 25.00000 | 400.00000 |
| 6 | 12.7272727 | 12.4901186 | 12.5004296 | 12.2916309 | 12.5000000 | 30.00000 | 462.50000 |
| 7 | 12.2916667 | 12.1083333 | 12.1156667 | 11.9526410 | 12.1153846 | 35.00000 | 523.07692 |
| 8 | 11.9526627 | 11.8080210 | 11.8133781 | 11.6836598 | 11.8131868 | 40.00000 | 582.14286 |
| 9 | 11.6836735 | 11.5675581 | 11.5715620 | 11.4666578 | 11.5714286 | 45.00000 | 640.00000 |

Fuente: Elaboración propia con DEV-C

**Paso 10**

$t_9 = 45.000000\ y\ CA_9 = 640.0000000$

Las 4 pendientes serán:

$k_1 = f(t_9, CA_9) = f(45{,}640.0000000) = 11.4666667$

$k_2 = f(t_9 + h/2, CA_9 + h/2 * k_1) = f(45 + 5/2{,}640.0000000 + 5/2 * 11.4666667) = f(47.5{,}668.6666667) = 11.3720430$

$k_3 = f(t_9 + h/2, CA_9 + h/2 * k_2) = f(45 + 5/2{,}640.0000000 + 5/2 * 11.3720430) = f(47.5{,}668.4301075) = 11.3750954$

$k_4 = f(t_9 + h, CA_9 + h * k_3) = f(45 + 5{,}640.0000000 + 5 * 11.3750954) = f(50.0{,}696.8754769) = 11.2890565$

La pendiente promedio será:

$$k_p = \frac{k_1 + 2 * k_2 + 2 * k_3 + k_4}{6} = \frac{11.4666667 + 2 * 11.3720430 + 2 * 11.3750954 + 11.2890565}{6} = 11.3750000$$

Las coordenadas al final del paso número 10 será:

$t_{10} = t_9 + h = 45 + 5 = 50\ y\ CA_{10} = CA_9 + kp * h = 640.0000000 + 11.3750000 * 5 = 696.8750000$

Para el tiempo t = 50 la cantidad de sal es: 696.87500000 gramos

*Tabla 72. Resultado aplicando el modelo de Runge Kutta orden 4 con 10 pasos*

| Paso | $k_1$ | $k_2$ | $k_3$ | $k_4$ | $k_p$ | $t_i$ | $CA_i$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 19.1666667 | 17.7564103 | 17.8648915 | 16.7335869 | 17.8571429 | 5.00000 | 114.28571 |
| 2 | 16.7346939 | 15.8367347 | 15.8965986 | 15.1557823 | 15.8928571 | 10.00000 | 193.75000 |
| 3 | 15.1562500 | 14.5496324 | 14.5853157 | 14.0738538 | 14.5833333 | 15.00000 | 266.66667 |
| 4 | 14.0740741 | 13.6452242 | 13.6677952 | 13.2998871 | 13.6666667 | 20.00000 | 335.00000 |
| 5 | 13.3000000 | 12.9857143 | 13.0006803 | 12.7272109 | 13.0000000 | 25.00000 | 400.00000 |
| 6 | 12.7272727 | 12.4901186 | 12.5004296 | 12.2916309 | 12.5000000 | 30.00000 | 462.50000 |
| 7 | 12.2916667 | 12.1083333 | 12.1156667 | 11.9526410 | 12.1153846 | 35.00000 | 523.07692 |
| 8 | 11.9526627 | 11.8080210 | 11.8133781 | 11.6836598 | 11.8131868 | 40.00000 | 582.14286 |
| 9 | 11.6836735 | 11.5675581 | 11.5715620 | 11.4666578 | 11.5714286 | 45.00000 | 640.00000 |
| 10 | 11.4666667 | 11.3720430 | 11.3750954 | 11.2890565 | 11.3750000 | 50.00000 | 696.87500 |

Fuente: Elaboración propia con DEV-C

Para el tiempo $t = 50$ la cantidad de sal es: 696.875 gramos