



به نام خدا



دانشگاه تهران
دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر
دانشکده مهندسی مکانیک
کنترل سیستم های دیجیتال
پروژه نهایی

| | |
|--------------------|---------------------------------------|
| نام و نام خانوادگی | سیده دیبا روانشید شیرازی، منصور داودی |
| شماره دانشجویی | 810199431، 810199567 |
| تاریخ ارسال گزارش | 24 تیرماه 1403 |

فهرست گزارش سوالات

| | |
|---------------|----|
| سوال 1 | 4 |
| سوال 2 | 5 |
| سیستم خطی | 5 |
| سیستم غیر خطی | 7 |
| سوال 3 | 8 |
| سیستم خطی | 8 |
| سیستم غیر خطی | 12 |
| سوال 4 | 13 |
| سوال 5 | 15 |
| سیستم خطی | 15 |
| سیستم غیر خطی | 16 |
| سوال 6 | 17 |
| سوال 7 | 19 |
| سیستم خطی | 20 |
| سیستم غیر خطی | 20 |
| سوال 8 | 21 |
| سیستم خطی | 21 |
| سیستم غیر خطی | 22 |
| نتیجه گیری | 23 |
| سوال 9 | 24 |
| سوال 10 | 25 |

25.....سیستم خطی

25.....سیستم غیر خطی

26.....سوال 11

27.....سیستم خطی

27.....سیستم غیر خطی

سوال 1

نقاط تعادل سیستم و خطی سازی حول آن ها و معادلات فضای حالت و تابع تبدیل سیستم :

(1) $\dot{x}_1 = x_2 = 0 \rightarrow x_2 = 0$ $x_1 = 0/00^\circ$ در این نقطه تعادل

$$\dot{x}_2 = -g + \frac{c}{m} \frac{x_2^2}{0/00 \sqrt{2} - x_1} = -9.81 + 1/10000 \frac{x_2^2}{0/00 \sqrt{2} - x_1} = 0 \Rightarrow 9.81 = 1/10000 \frac{x_2^2}{0/00 \sqrt{2} - x_1} \Rightarrow x_2 = \pm \sqrt{10000 \cdot 9.81 \cdot (0/00 \sqrt{2} - x_1)}$$

$$\dot{x}_2 = \frac{1}{L} (-R x_2 + u) = 1/10 \frac{1}{10} (-10 x_2 + u) = 0 \Rightarrow u = 10 x_2 = \pm \sqrt{10000 \cdot 9.81 \cdot (0/00 \sqrt{2} - x_1)}$$

\rightarrow در این نقطه تعادل : $x_{1e} = 0/00^\circ$ $x_{2e} = 0$ $u_{1e} = \pm \sqrt{10000 \cdot 9.81 \cdot (0/00 \sqrt{2} - x_{1e})}$ $u_{2e} = \pm \sqrt{10000 \cdot 9.81 \cdot (0/00 \sqrt{2} - x_{1e})}$

$\dot{x}_1 = x_2$

$$\dot{x}_2 = 1/10000 \frac{x_2^2}{(0/00 \sqrt{2} - x_1)} + 1/10000 \frac{x_2^2}{(0/00 \sqrt{2} - x_1)} x_1 = 1/10000 \frac{x_2^2}{(0/00 \sqrt{2} - x_1)} + 1/10000 \frac{x_2^2}{(0/00 \sqrt{2} - x_1)} x_1$$

$$\dot{x}_2 = -1/10 x_2 + 1/10 u$$

$$\Rightarrow \dot{X} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1/10000 & 0 & 1/10000 \\ 0 & 0 & -1/10 \end{bmatrix}}_A X + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/10 \end{bmatrix}}_B u \quad Y = \underbrace{[1 \ 0 \ 0]}_C X \quad D = 0$$

$$G = C(SI - A)^{-1}B + D = \frac{1/10000 \cdot 1}{S^3 + 1/10 S^2 - 1/10000 S - 1/10000}$$

با توجه به مخرج تابع تبدیل این سیستم سه قطب دارد که یکی از این قطب ها ناپایدار می باشد.

سوال 2

سیستم خطی

پایدار سازی سیستم به گونه ای که خطای خروجی صفر شود:

(۲) با استفاده از PID tuner، مقادیر کنترلر PID با فرایند زیر را طراحی کردیم

$$G_c = k_p + \frac{k_I}{s} + k_D \frac{N}{1 + \frac{N}{s}}$$

$$k_p = 9.1472 \quad k_I = 9.1472 \quad k_D = 0.114 \quad N = 14047$$

$$\Rightarrow G_c = 9.147 + \frac{9.147}{s} + \frac{0.114 \times 14047 s}{s + 14047} = \frac{1985s^2 + 48098.15s + 511000}{s^2 + 14047s}$$

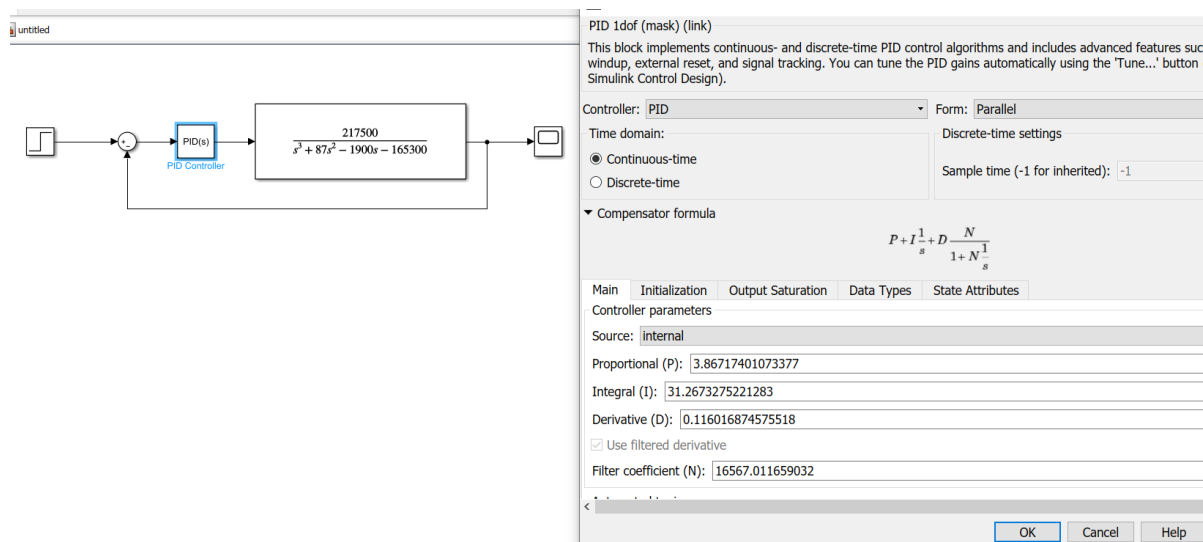


Figure 1 PID Controller

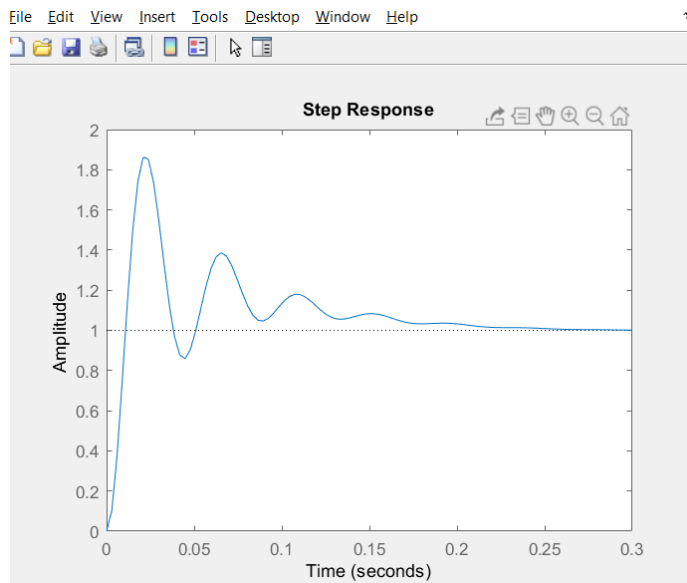
ویژگی های پاسخ گذرا و ماندگار طبق عکس 1 و 2 و 3 به صورت زیر می باشد:

در حالت گذرا ابتدا overshoot زیادی داریم که به حدود 86 درصد میرسد ولی بعد از مدتی دمپ میشود.

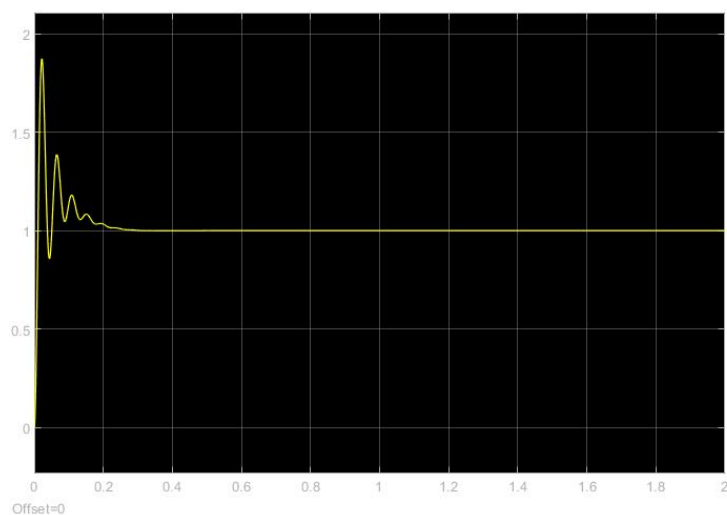
بعد از حدود 0.21 ثانیه پاسخ پله settle میشود. Rise time به نسبت کم است و 0.007 ثانیه می باشد.

همچنین در حالت ماندگار مشاهده میکنیم که سیستم به خطای صفر رسیده و ورودی پله را به درستی

دنبال میکند.



پاسخ پله سیستم کنترل شده در حالت گذرا **Figure 2**



پاسخ پله سیستم کنترل شده در حالت ماندگار **Figure 3**

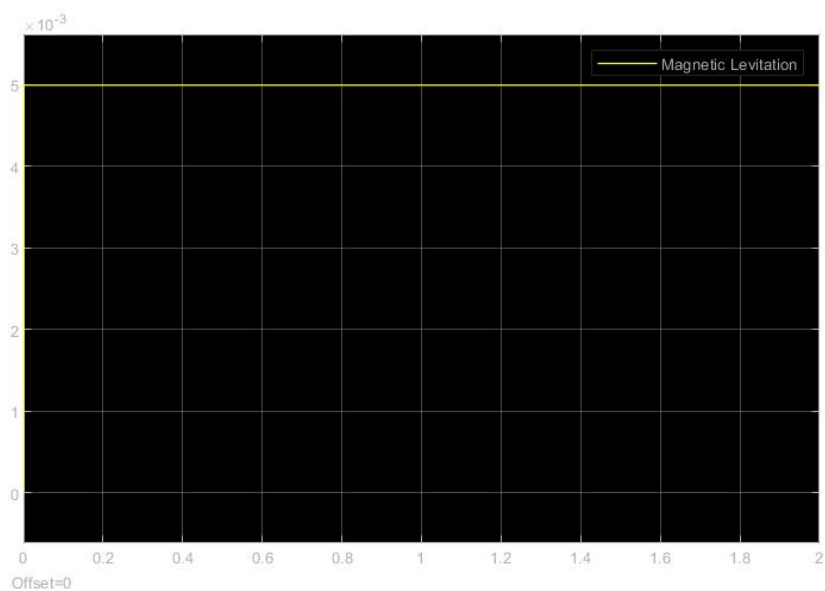
struct with fields:

```
RiseTime: 0.0071
SettlingTime: 0.2122
SettlingMin: 0.8584
SettlingMax: 1.8622
Overshoot: 86.2166
Undershoot: 0
Peak: 1.8622
PeakTime: 0.0209
```

اطلاعات دقیق تر پاسخ پله **Figure 4**

سیستم غیر خطی

این سیستم با کنترل کننده ی بالا به اشباع میرود.



پاسخ پله سیستم غیر خطی Figure 5

سوال 3

$$S = \frac{r}{T} \frac{z-1}{z+1} \rightarrow G_{C(z)} = \frac{1928 \left(\frac{r}{T} \frac{z-1}{z+1} \right)^2 + 44690.8 \left(\frac{r}{T} \frac{z-1}{z+1} \right) + 518000}{\left(\frac{r}{T} \frac{z-1}{z+1} \right)^2 + 14847 \left(\frac{r}{T} \frac{z-1}{z+1} \right)}$$

(۳) تبدیل درختی

$$\xrightarrow{T=0.1} G_{C(z)} = \frac{71747 z^2 - 17019 z + 0.018}{z^2 - 0.0074 z - 0.9926}$$

$$\xrightarrow{T=0.01} G_{C(z)} = \frac{44194 z^2 - 45041 z + 17129}{z^2 - 0.00084 z - 0.99916}$$

$$\xrightarrow{T=0.001} G_{C(z)} = \frac{41018 z^2 - 41417 z + 20179}{z^2 - 0.0000105 z - 0.9999895}$$

$$\xrightarrow{T=0.1} G_{C(z)} = \frac{41872 z^2 - 17119 z + 0.1744}{(z^2 - z)(z-1)}$$

صفر و قطب تطبیق یافته

$$\xrightarrow{T=0.01} G_{C(z)} = \frac{1417 z^2 - 242 z + 9.119}{z^2 - z}$$

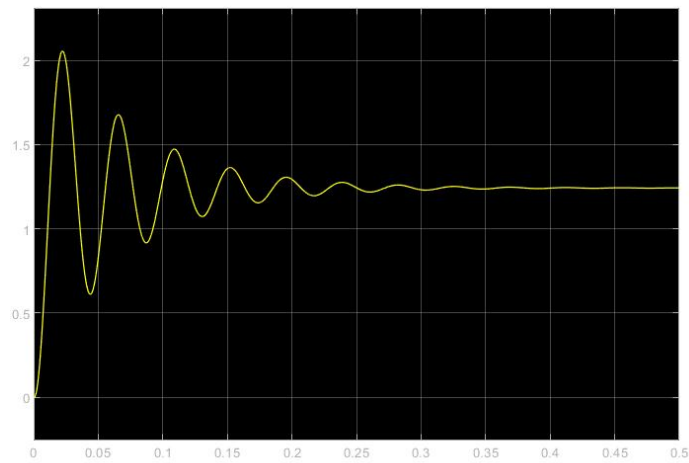
$$\xrightarrow{T=0.001} G_{C(z)} = \frac{111.2 z^2 - 82.8 z + 114.9}{z^2 - z + 4.38 \times 10^{-4}}$$

سیستم خطی

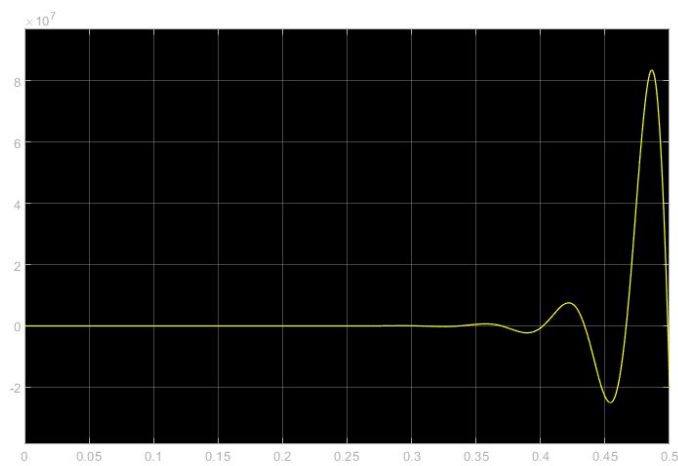
سه نرخ نمونه برداری 0.001 و 0.01 و 0.1 را انتخاب کردیم.

و به ازای این سه نرخ برای دو حالت گسسته سازی صفر و قطب تطبیق یافته و تبدیل دو خطی پاسخ

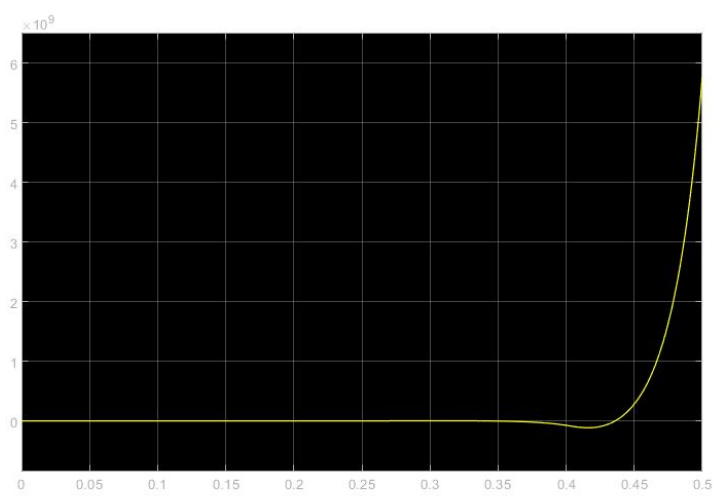
پله ها را رسم کردیم.



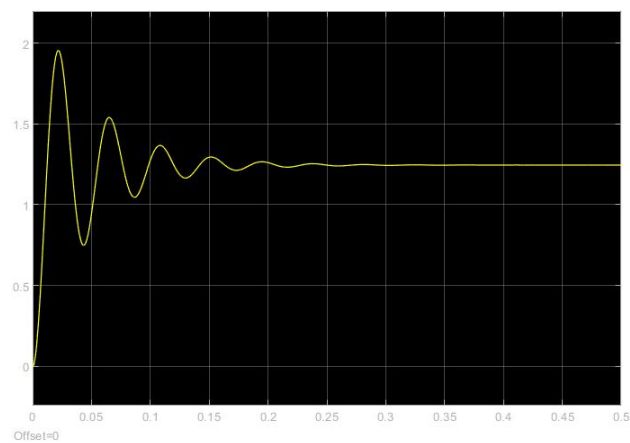
صفر و قطب تطبیق یافته با نرخ نمونه برداری 0.001 ثانیه **Figure 6**



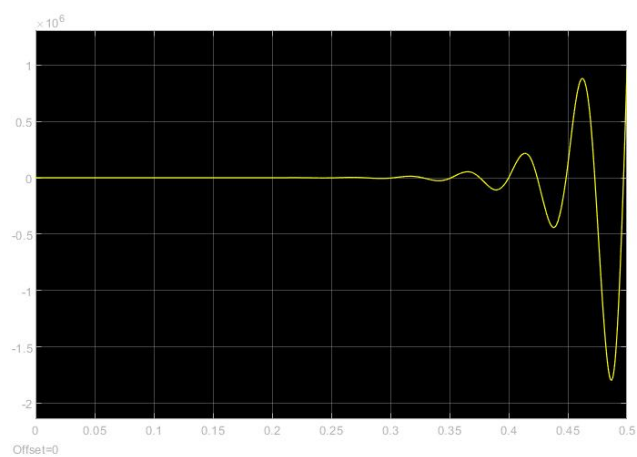
صفر و قطب تطبیق یافته با نرخ نمونه برداری 0.01 ثانیه **Figure 7**



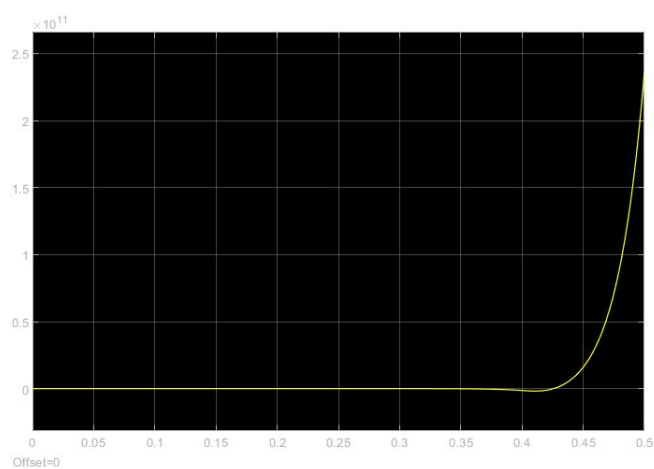
صفر و قطب تطبیق یافته با نرخ نمونه برداری 0.1 ثانیه **Figure 8**



تبدیل دو خطی با نرخ نمونه برداری 0.001 ثانیه **Figure 9**



تبدیل دو خطی با نرخ نمونه برداری 0.01 ثانیه **Figure 10**



تبدیل دو خطی با نرخ نمونه برداری 0.1 ثانیه **Figure 11**

با توجه به نمودارها، مشاهده کردیم که گسسته سازی با نرخ نمونه برداری 0.1 و 0.01 باعث میشود سیستم ما ناپایدار شود. اما هر چه زمان نمونه برداری را کاهش میدهیم (مثلا 0.001) سیستم پایدار تر میشود و به پاسخ سیستم زمان پیوسته نزدیکتر می شود. پس مقدار $T_s=0.001$ مقدار منطقی و مناسبی است.

تفاوت های بین روش ها هم در این است که در تبدیل دو خطی هم overshoot و هم زمان نشست کمتر است.

و میبینیم که در روش تبدیل دو خطی پاسخ پله به حالت پیوسته شبیه تر است پس آن ها را به صورت دقیق تر مقایسه میکنیم:

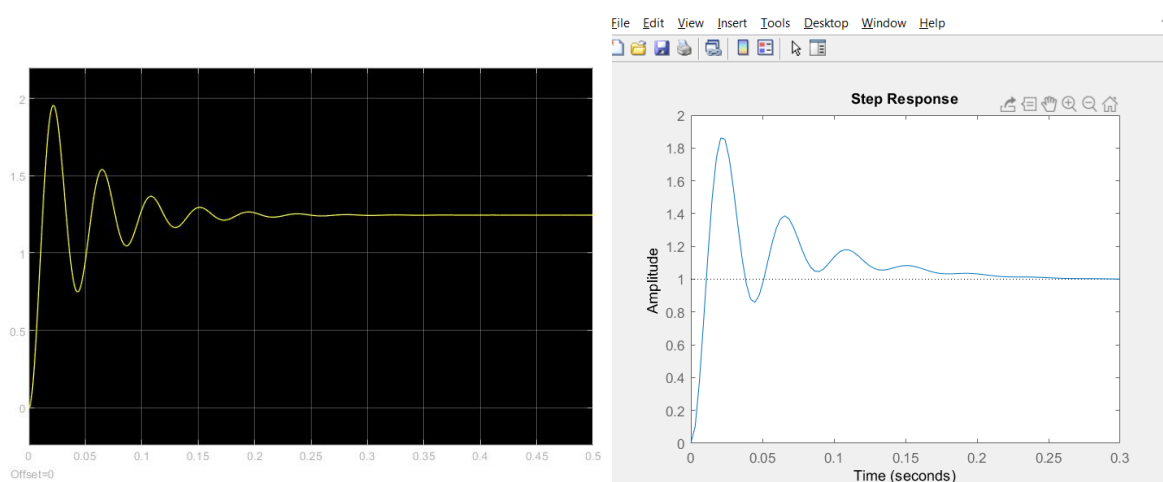
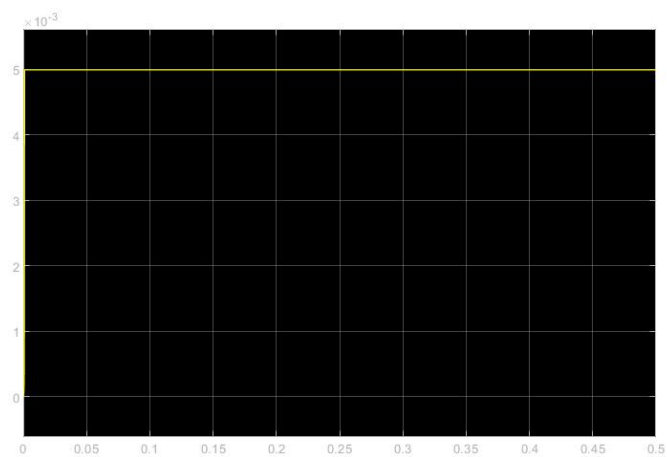


Figure 12 مقایسه پاسخ پله های سیستم های پیوسته (سمت راست) و گسسته (سمت چپ)

میبینیم که در حالت گسسته زمان نشست کمی بیشتر است. میزان overshoot نیز کمی بیشتر میباشد. همچنین تعداد نوسان های سیستم گسسته تا زمان نشست بیشتر است.

سیستم غیر خطی

برای همه بخش ها جواب به یک صورت بود و سیستم به اشباع می‌رود.



پاسخ پله برای تمامی بخش ها Figure 13

سوال 4

$G(z) =$

$$\frac{3.548e-05 z^2 + 0.0001389 z + 3.397e-05}{z^3 - 2.919 z^2 + 2.835 z - 0.9167}$$

Sample time: 0.001 seconds
Discrete-time transfer function.

تابع تبدیل گسسته سازی شده سیستم اصلی پیوسته را بدست آوردیم.

حال نمودار بود و مکان ریشه را برای این سیستم رسم میکنیم:

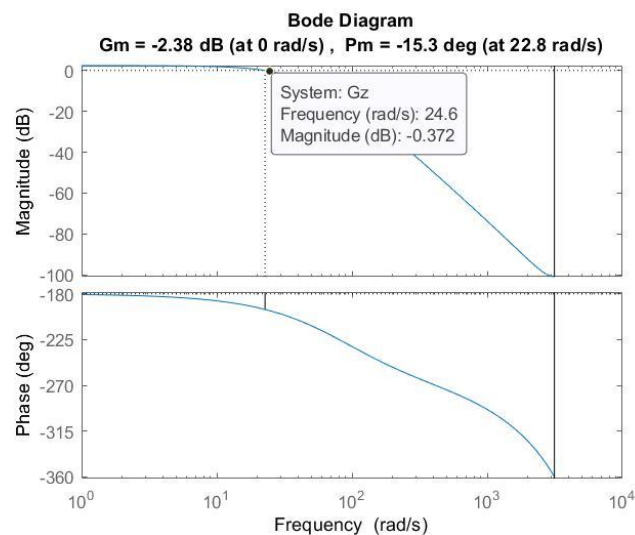
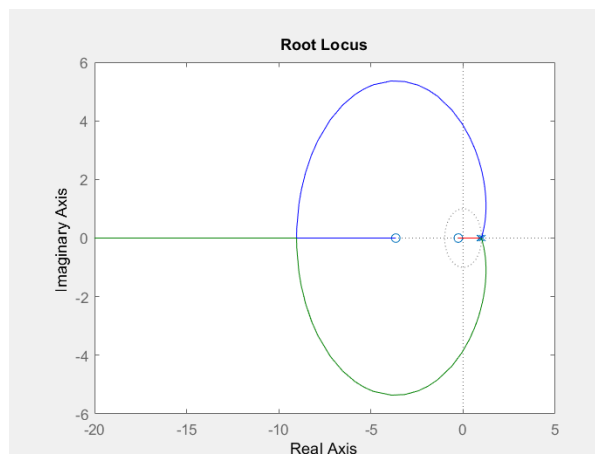
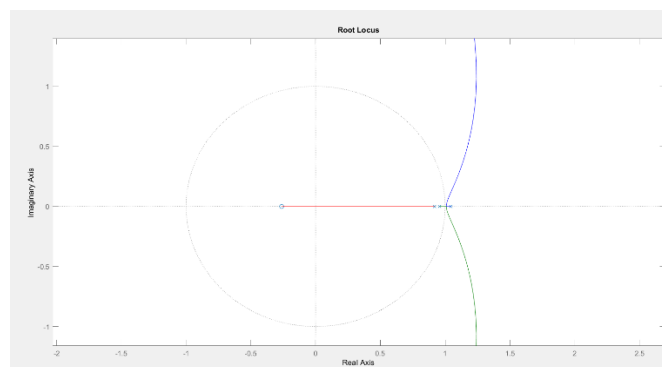


Figure 14: دیاگرام بود تابع تبدیل سیستم گسسته سازی شده

میبینیم که هم حاشیه فاز و هم حاشیه بهره منفی هستند. پهنای باند هم میشود فرکانسی که در آن دامنه از مقدار اولیه خود 3 دسی بل پایین تر است : 24.6 رادیان بر ثانیه



نمودار مکان ریشه Figure 15



نمودار مکان ریشه از نمای نزدیکتر Figure 16

با توجه به نمودار مکان ریشه و با کلیک کردن بر قسمت های مختلف آن میبینیم که به ازای هیچ بهره ای قطب های حلقه بسته درون دایره واحد قرار نمی گیرند و سیستم پایدار نیست.

سوال 5

$$G_c(z) = k_p + k_I T_s \frac{1}{z-1} + k_D \frac{N}{1+N T_s \frac{1}{z-1}}$$

$T_s = 0.001 \text{ (s)} \quad N = 1912 \quad k_p = 4.411 \quad k_I = 14.1 \quad k_D = 0.47$

$$\Rightarrow G_c(z) = \frac{1111z^2 - 4043z + 1174}{z^2 - 0.9101z - 0.9112}$$

(5) با PID tuner در حالت دستی:

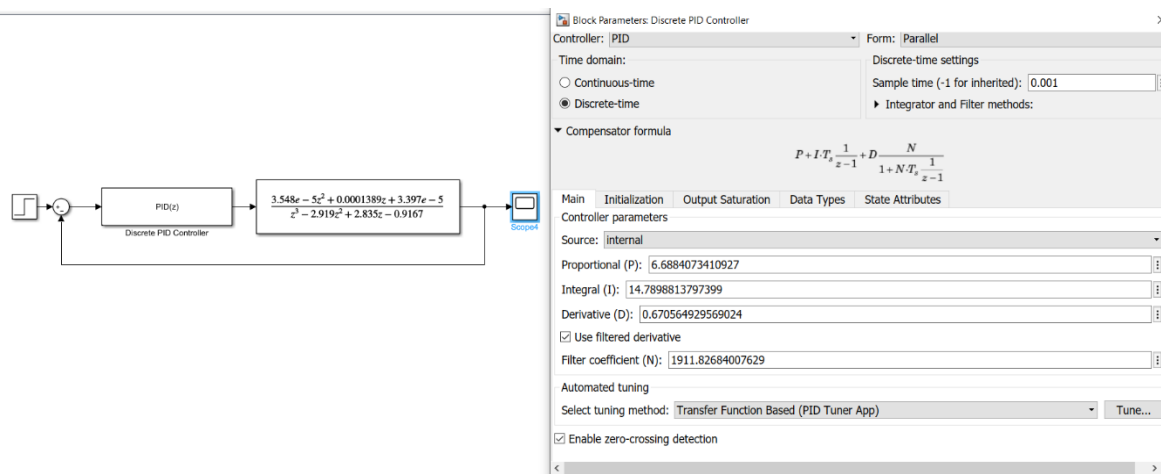


Figure 17 PID Controller

سیستم خطی

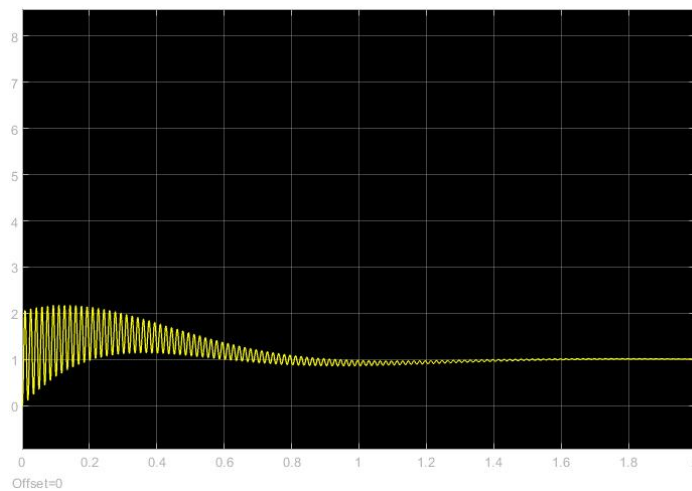


Figure 18 پاسخ پله سیستم گسسته شده با کنترلر جدید

سیستم غیر خطی

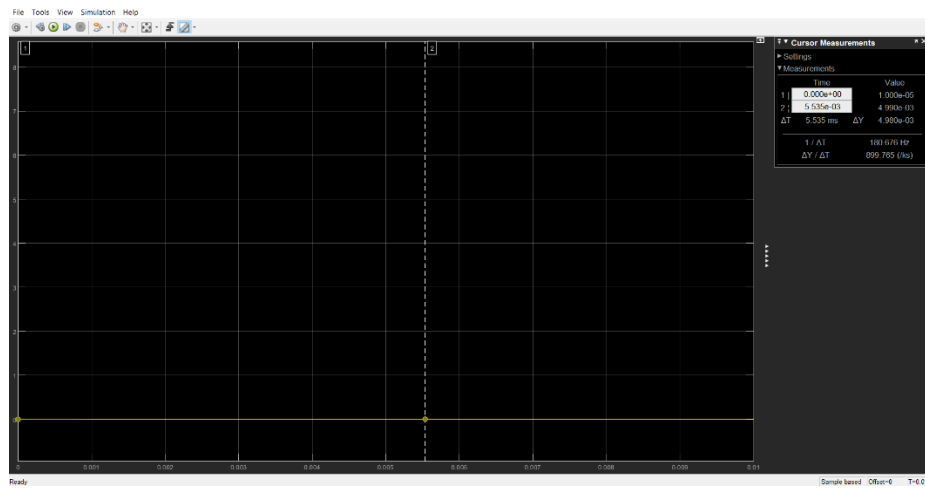
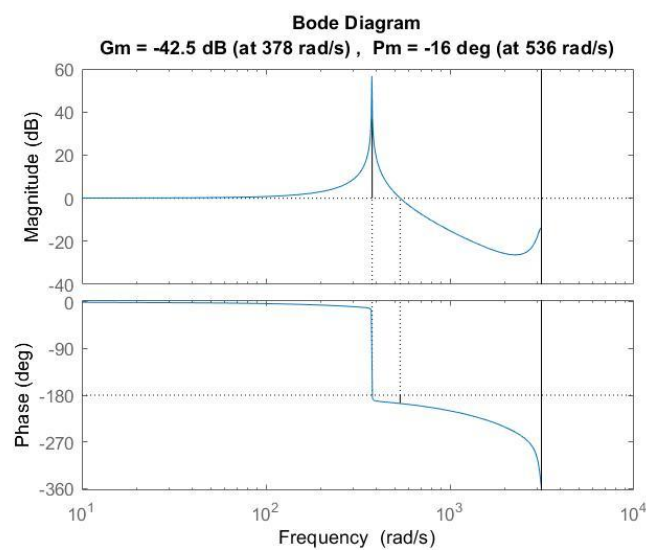


Figure 19 پاسخ پله سیستم غیر خطی گسسته شده با کنترلر سیستم خطی

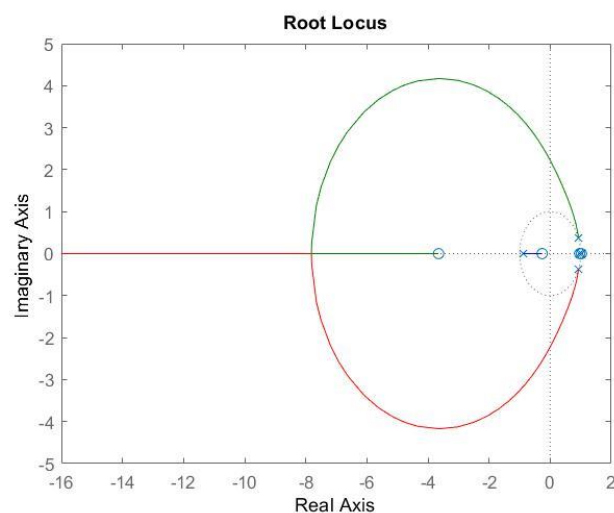
سوال 6

با سوال 4 مقایسه میکنیم. در این حالت در نمودار بود میبینیم که همچنان هم حاشیه فاز و هم حاشیه بهره منفی هستند. ولی مقادیر آن ها افزایش یافته است. در نمودار همچنین در یک فرکانس خاص فاز به شدت کاهش یافته و دامنه افزایش میابد.

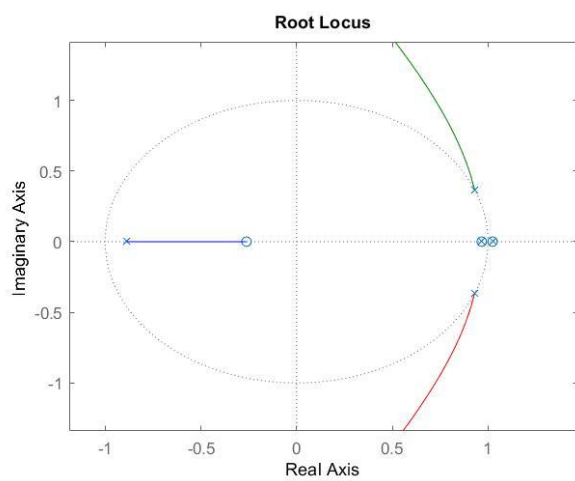
همچنین در نمودار مکان ریشه قطب هایی که اضافه شده و صفر و قطبی که حذف شده اند را مشاهده میکنیم که باعث شده اند سیستم پایدار تر شود.



نمودار بود سیستم کنترل شده Figure 20



نمودار مکان ریشه سیستم کنترل شده Figure 21



نمودار مکان ریشه سیستم کنترل شده از نمای نزدیکتر **Figure 22**

سوال 7

$$G_z = \frac{0.0001 \cdot z^2 + 0.0001 \cdot z + 0.0001}{z^2 - 0.99 \cdot z + 0.98 \cdot z - 0.99} = \frac{0.0001 \cdot (z + 0.99)(z + 0.99)}{(z - 0.99)(z - 0.99)(z - 0.99)} \quad (v)$$

$$= \frac{0.0001 \cdot (1 + 0.99z^{-1})(1 + 0.99z^{-1})z^{-2}}{(1 - 0.99z^{-1})(1 - 0.99z^{-1})(1 - 0.99z^{-1})} \quad F(z) = f_1 z^{-1} + f_2 z^{-2} + f_3 z^{-3}$$

$$F(z) = (1 + 0.99z^{-1})(m_1 z^{-1} + m_2 z^{-2}) = f_1 z^{-1} + f_2 z^{-2} + f_3 z^{-3} \Rightarrow \begin{cases} f_1 = m_1 \\ f_2 = m_2 + 0.99m_1 \\ f_3 = 0.99m_2 = 0.99(f_2 - 0.99f_1) \end{cases} \Rightarrow m_2 = f_2 - 0.99f_1$$

$$1 - F(z) = (1 - z^{-1})(1 - 0.99z^{-1})(1 + n_1 z^{-1}) = 1 - f_1 z^{-1} - f_2 z^{-2} - f_3 z^{-3}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -f_1 = 1 - 0.99 + n_1 = -0.99 + n_1 = -0.99 + f_1 \\ -f_2 = -0.99n_1 - n_1 + 0.99 = 1.00 - 0.99n_1 = 1.00 + 0.99f_1 \\ -f_3 = 0.99n_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f_1 = 0.9919 \\ f_2 = 1.9894 \\ f_3 = -1.9894 \end{cases}$$

$$\Rightarrow F(z) = 0.9919 z^{-1} + 1.9894 z^{-2} - 1.9894 z^{-3} \quad G_{C(z)} = \frac{F(z)}{(1 - F(z)) G(z)}$$

$$\Rightarrow G_{C(z)} = \frac{(1 + 0.99z^{-1})(0.9919 z^{-1} - 0.99z^{-2})(1 - 0.99z^{-1})(1 - 0.99z^{-1})(1 - 0.99z^{-1})}{(1 - z^{-1})(1 - 0.99z^{-1})(1 + 0.99z^{-1})(1 + 0.99z^{-1})(1 + 0.99z^{-1}) \cdot 0.0001 \cdot z^{-2}}$$

$$= \frac{0.0001 \cdot 0.9919 \cdot 1.9894 \cdot z^2 - 0.0001 \cdot 0.9919 \cdot 1.9894 \cdot z + 0.0001 \cdot 0.9919 \cdot 1.9894}{z^2 + 0.9919 z - 1.9894 z - 0.9919}$$

سیستم خطی

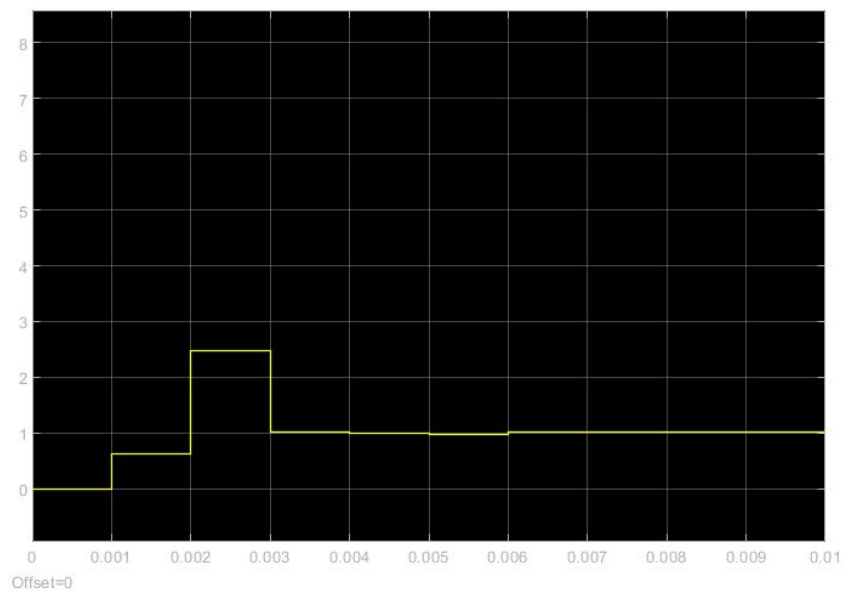


Figure 23 پاسخ به ورودی پله با کنترل کننده مرده نوش

سیستم غیر خطی

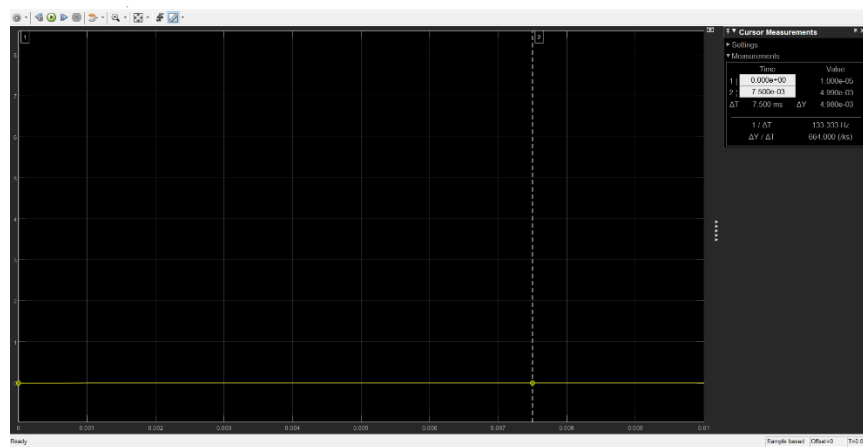
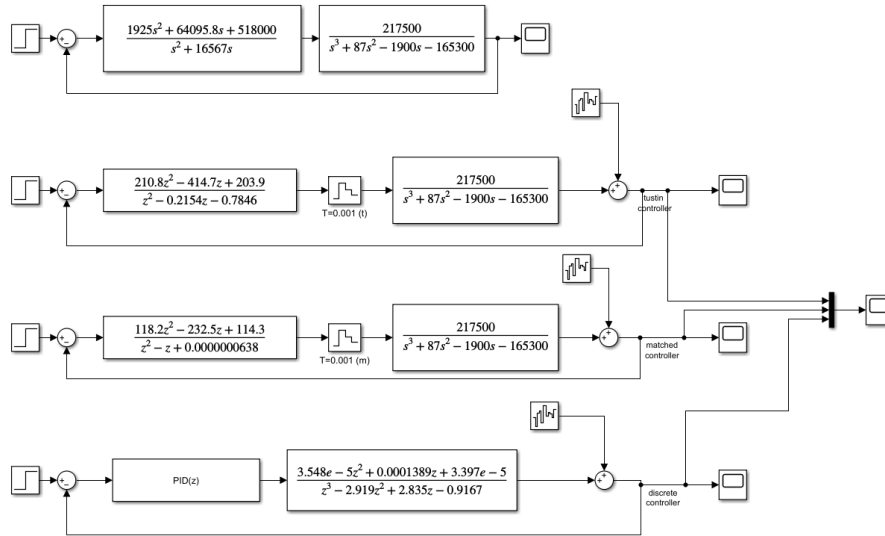


Figure 24 پاسخ پله سیستم غیر خطی بعد از کنترل کننده مرده نوش

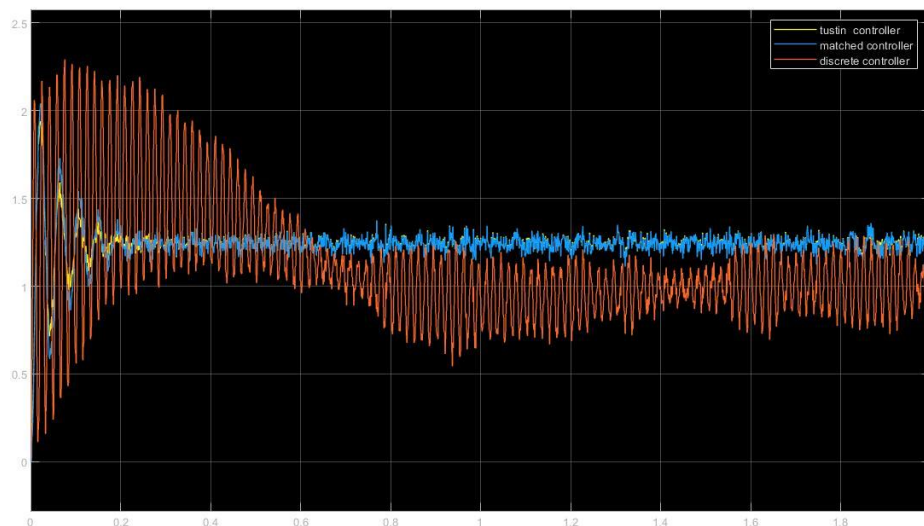
سوال 8

سیستم خطی



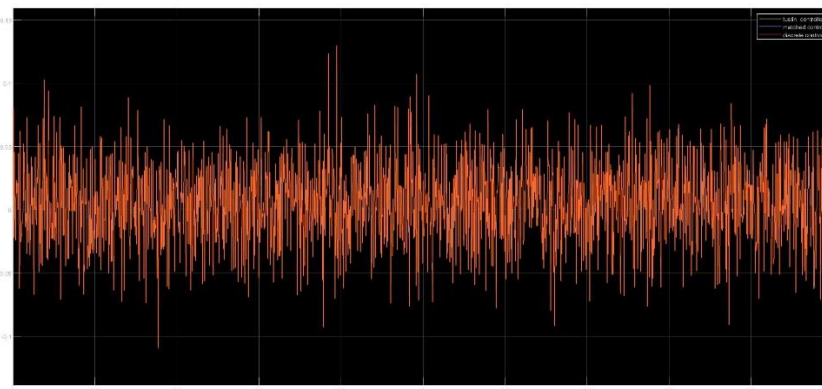
Simulink 25 Figure

همینطور که مشاهده میکنید. نمودار آبی مربوط به گسسته سازی به روش تطبیق، نمودار زرد مربوط به گسسته سازی به روش تبدیل دو خطی و نمودار نارنجی مربوط به کنترل کننده در فضای گسسته میباشد.



پاسخ پله بعد از اضافه کردن نویز سفید Figure 26

سیستم غیر خطی



پاسخ پله بعد از اضافه کردن نویز سفید برای سیستم غیر خطی Figure 27

نتیجه گیری

به نظر میرسد که در هر دو حالت خطی و غیرخطی، کنترل کننده زمان پیوسته بهتر اثر نویز را از بین برده است. در صورتی که در بخشی که کنترلر زمان گسسته استفاده کردیم، اثر نویز به خوبی از بین برده نشده است و خروجی به شدت نوسان می کند.

اگر بدون نویز دوباره نحوه ی کار سیستم را ببینیم بیشتر این موضوع را متوجه میشویم:

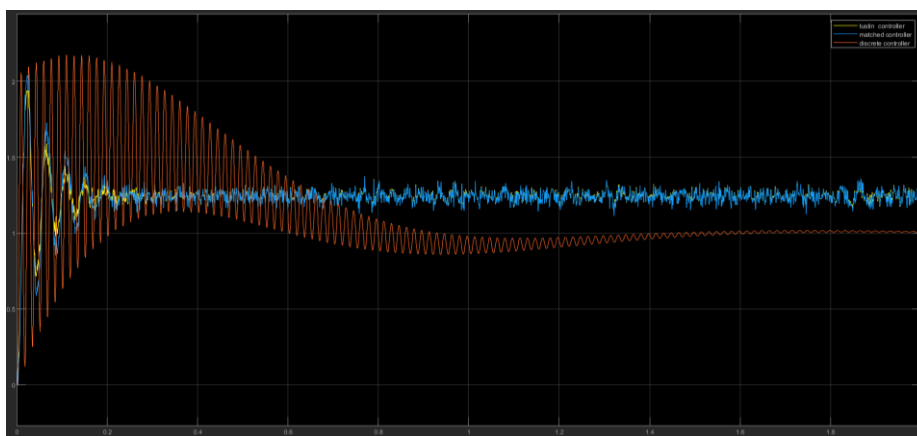


Figure 28 پاسخ پله کنترل کننده گسسته بدون نویز

سوال 9

Q9

```
sys_discrete=c2d(sys,0.001);
G_d = sys_discrete.A
H_d = sys_discrete.B
C_d = sys_discrete.C
D_d = sys_discrete.D
ControllabilityMatrix=ctrb(G_d,H_d)
ObservabilityMatrix=obsv(G_d,C_d);
rank(ControllabilityMatrix) % Is Controllable
rank(ObservabilityMatrix) % Is Observable
```

```
G_d = 3x3
    1.0010    0.0010    0.0121
    1.9006    1.0010   23.9511
         0         0    0.9167

H_d = 3x1
    0.0000
    0.1057
    0.0083

C_d = 1x3
     1     0     0

D_d = 0
ControllabilityMatrix = 3x3
    0.0000    0.0002    0.0006
    0.1057    0.3054    0.4891
    0.0083    0.0076    0.0070

ans = 3
ans = 3
```

از آنجایی که رنک جفت ماتریس های کنترل پذیری و مشاهده پذیری 3 میباشد یعنی که این ماتریس ها معکوس پذیر میباشند و در نتیجه سیستم هم کنترل پذیر و هم مشاهده پذیر میباشد.

سوال 10

$$\begin{aligned}
 G &= \begin{bmatrix} 1/001 & 0/001 & 0/012 \\ 1/9 & 1/001 & 2/998 \\ 0 & 0 & 0/92 \end{bmatrix} \quad H = \begin{bmatrix} 0/001 \\ 0/100V \\ 0/00182 \end{bmatrix} \quad C = [1 \ 0 \ 0] \quad D = 0 \\
 \Rightarrow M &= \begin{bmatrix} 0 & 0/002 & 0/004 \\ 0/100V & 0/2008 & 0/1891 \\ 0/00182 & 0/0074 & 0/0070 \end{bmatrix} \quad P_{(2)} = |ZI - G| = Z^3 - 2/92 Z^2 + 2/182 Z - 0/92 \Rightarrow \begin{cases} a_1 = -2/92 \\ a_2 = 2/182 \\ a_3 = -0/92 \end{cases} \\
 \Rightarrow W &= \begin{bmatrix} 2/182 & -2/92 & 1 \\ -2/92 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow T = MW = \begin{bmatrix} 0 & 0/001 & 0 \\ -0/1024 & -0/002 & 0/100V \\ 0/00182 & -0/0044 & 0/00182 \end{bmatrix} \quad \hat{K} = [0/92 \ 2/182 \ 2/92] \\
 K &= \hat{K} T^{-1} = [2/182 \ 2/92 \ 2/00182]
 \end{aligned}$$

سیستم خطی

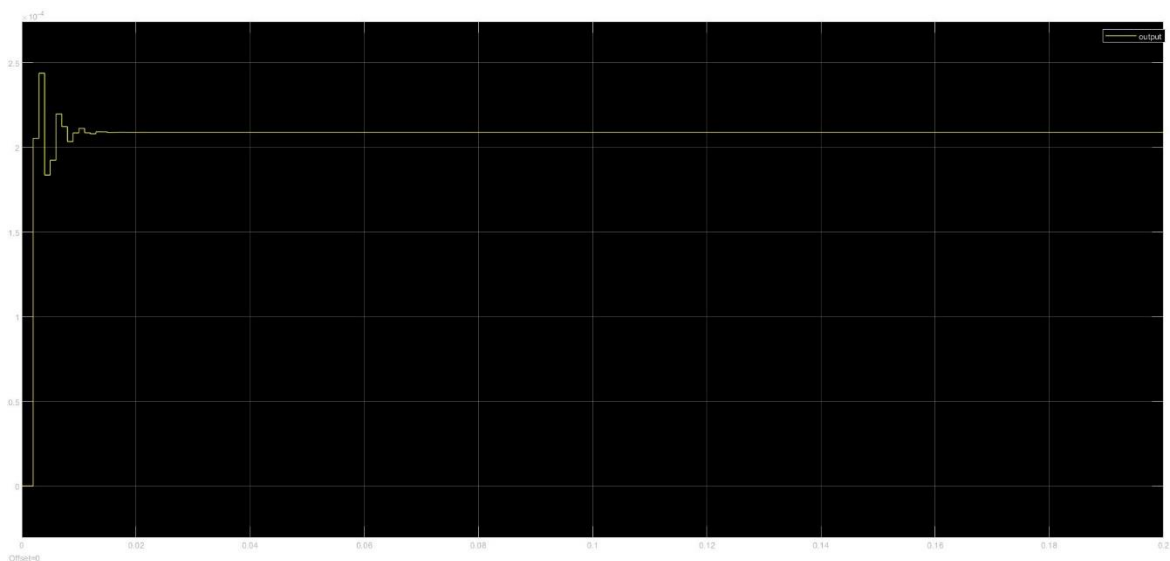


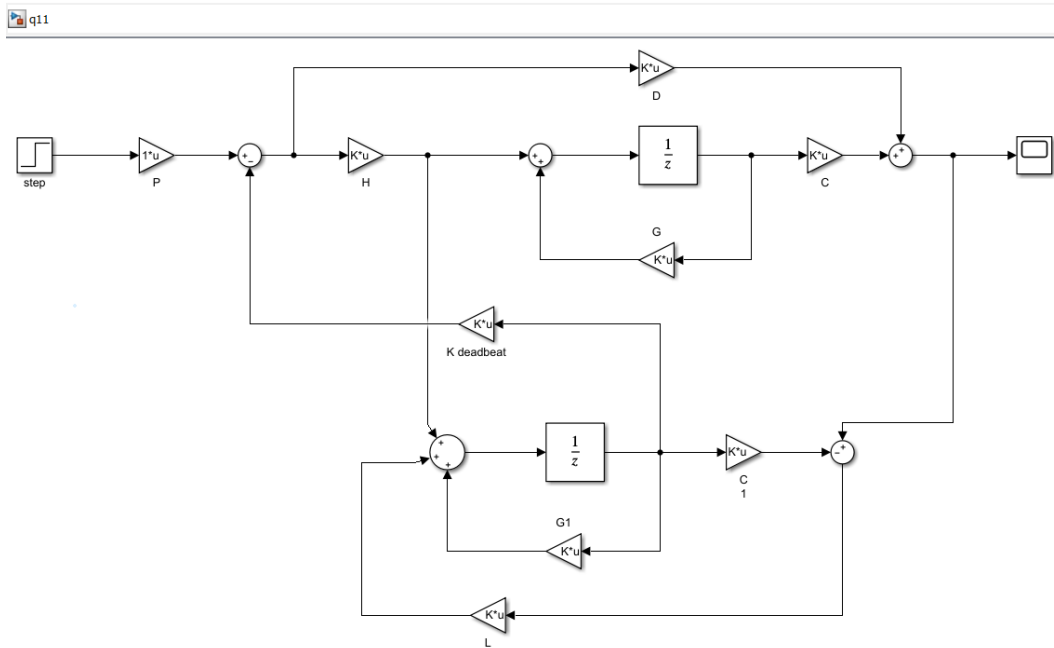
Figure 29 پاسخ پله مرده نوش دارد

سیستم غیر خطی

با توجه به اینکه به متغیر های حالت دسترسی نداریم نمیتوانیم از این روش استفاده کنیم و سیستم را کنترل کنیم.

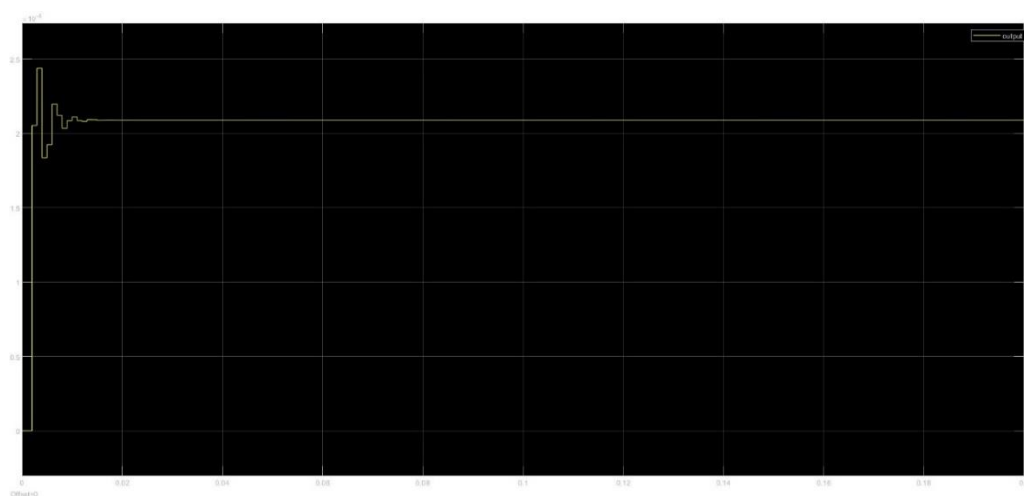
سوال 11

$$L_z (WN)^{-1} k^T = \begin{bmatrix} 2,9 \\ 2254,12 \\ 321,5 \end{bmatrix}$$



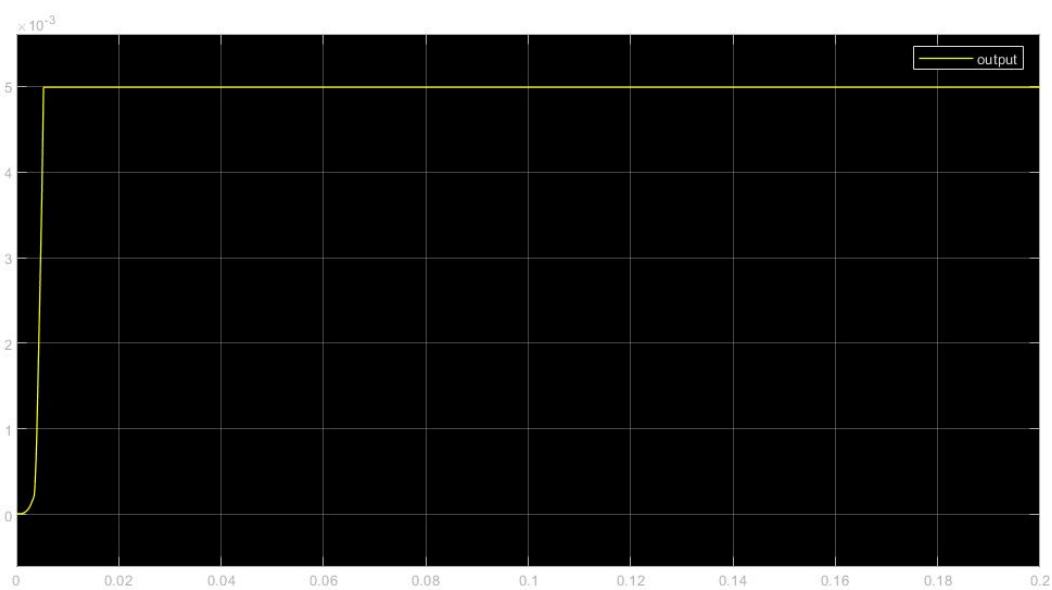
سیستم با مشاهده گر با فیدبک حالت سوال 3010 Figure

سیستم خطی



پاسخ پله سیستم خطی Figure 31

سیستم غیر خطی



پاسخ پله سیستم غیر خطی Figure 32

مقایسه با سوال 10: به نظر می آید که نتایج این دو بخش یکسان میباشند و مشاهده گر به خوبی توانسته است متغیر های حالت را تخمین بزند.