INGENIERÍA MECATRÓNICA

DI_CERO

Diego Cervantes Rodríguez

Ingeniería Asistida por Computadora

COMSOL Multiphysics 5.6

8: Viga en 2D con Carga Triangular

Contenido

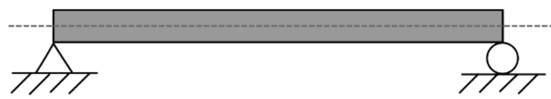
OBJETIVOS:

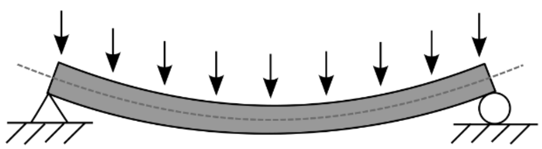
Se examinará el esfuerzo creado en una viga sometida a flexión por varias fuerzas puntuales y repartidas de diferentes tipos.

La viga será simulada en COMSOL 5.3a para comprobar los cálculos hechos en el método analítico.

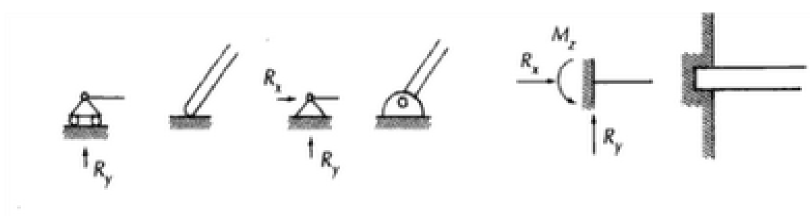
INTRODUCCIÓN TEÓRICA:

Existen momentos que someten nuestros elementos mecánicos a torsión (cuando al aplicarlos nuestro elemento mecánico se tuerce como trapo), pero si este momento se aplica en alguno de los otros 2 ejes restantes lo que creará es flexión simple, este tipo de torque lo que hace es curvar o doblar al elemento.



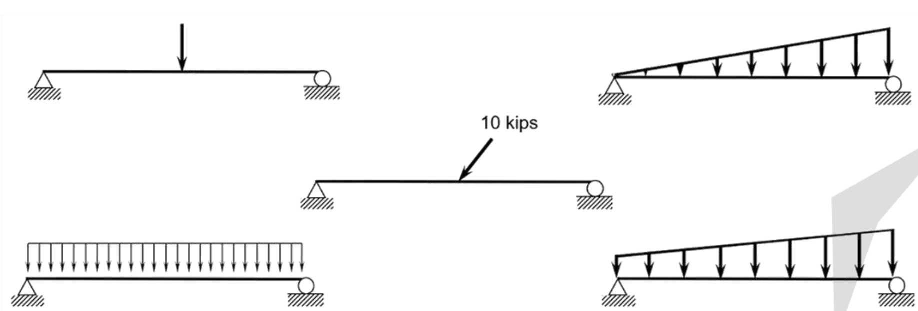


Cuando hacemos ejercicios de flexión pueden aparecer 3 tipos de apoyos, estos generarán distintas reacciones sobre la viga cuando se aplique una carga externa.

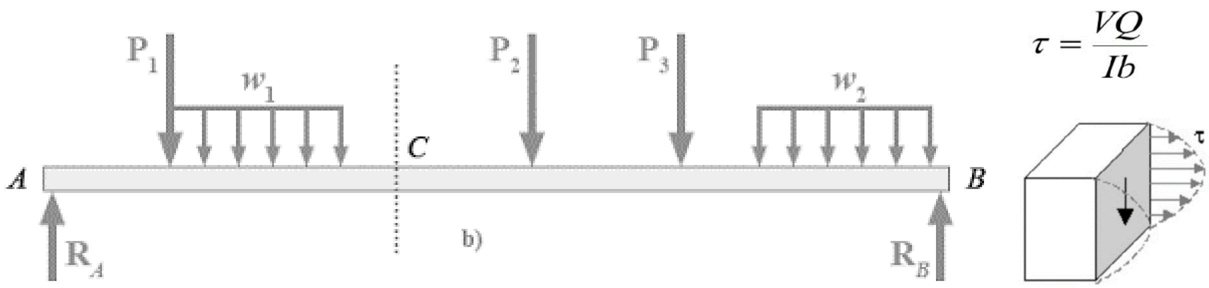


(a) Apoyo simple (b) Apoyo articulado (c) Apoyo empotrado

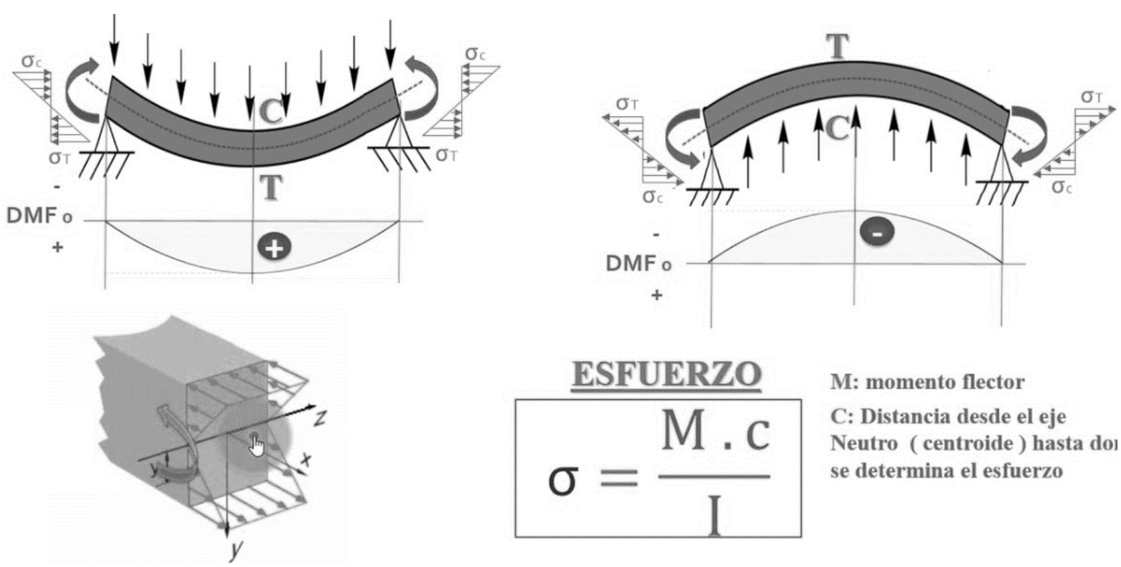
Se le llama viga a cualquier elemento que esté sometido a flexión, en las vigas se pueden aplicar varios tipos de carga, ya sea puntual o repartida, las cargas repartidas también se dividen en rectangulares, triangulares, descritas por una función o una combinación de todas las anteriores.



Primero que nada, en este tipo de problemas debo encontrar el valor de las reacciones en los apoyos, ya habiendo hecho esto debo encontrar un diagrama que abarque toda la longitud de la viga para encontrar cuál es la fuerza cortante resultante en cada punto, esta fuerza cortante lo que hará es crear un esfuerzo cortante cuyo valor máximo se encontrará solamente en el eje longitudinal de la viga:

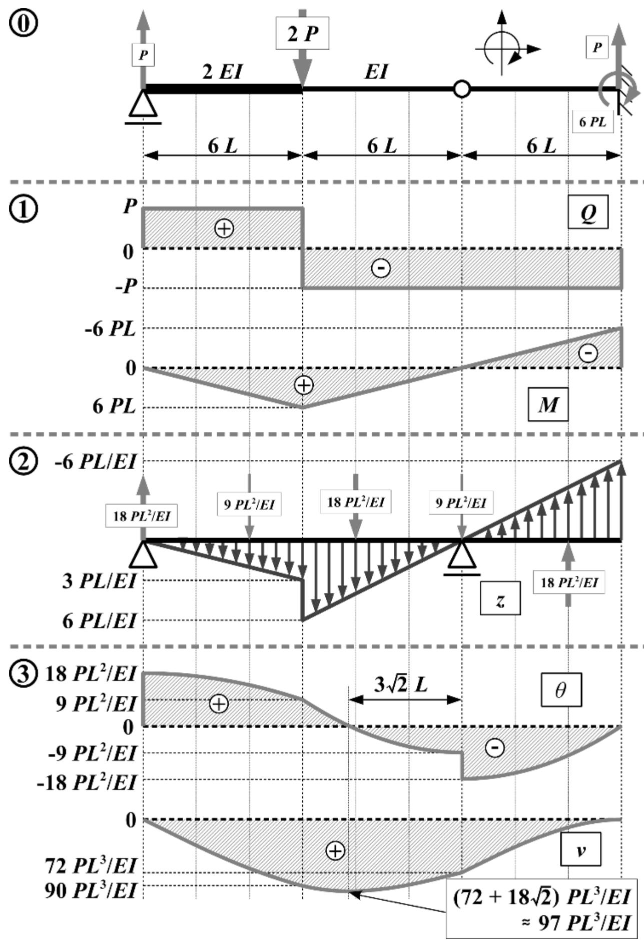


Este esfuerzo no es el que buscamos encontrar porque no es el que puede generar falla en la viga, el que nos interesa encontrar es el esfuerzo normal, si queremos encontrar este esfuerzo nos debemos basar en el diagrama de fuerza cortante para obtener el diagrama de momento flexionante en toda la viga y de éste tomaremos el momento que tenga mayor valor para poder así encontrar el esfuerzo normal en la viga, este esfuerzo por la misma naturaleza de la flexión lo que hará es que las partículas inferiores y superiores de la viga se compriman o tensionen dependiendo del sentido del momento flexionante.



El valor de los esfuerzos en la viga depende totalmente de la forma del área de sección transversal o también llamada perfil estructural debido al momento de inercia que puede tener, esto implica también que dependiendo de la forma del perfil estructural la viga se deformará o no cuando se le apliquen cargas externas.

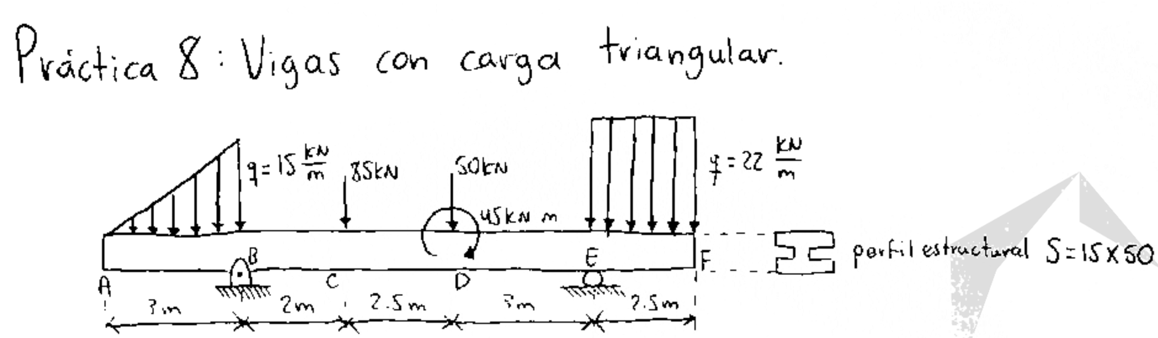
Finalmente en las vigas se puede saber cuál es su deformación vertical (llamada deflexión) y cuál es la inclinación de la viga después de haber aplicado una carga (llamada pendiente), esto es obtenido por medio de la ecuación de la elástica en la cual se toma en cuenta el módulo de elasticidad del material, el momento de inercia del perfil estructural y una expresión de momento que se debe medir desde uno de los extremos de la viga que se deja en función de x para representar después cada punto de la longitud de la viga, toda esta ecuación se debe integrar dos veces y hay que tener cuidado porque la función del momento respecto a x se integra de forma muy particular ya que al integrar solo se afectará al exponente no a las variables de dentro.



Ya con esto tendríamos todos los datos a saber de cualquier viga:

$$E(Iz)y'' = E(Iz)\frac{d^2y}{dx^2} = M(x)$$

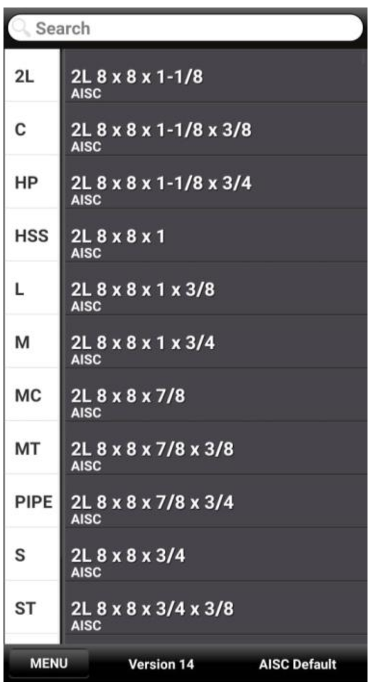
DESCRIPCIÓN DEL PROBLEMA:

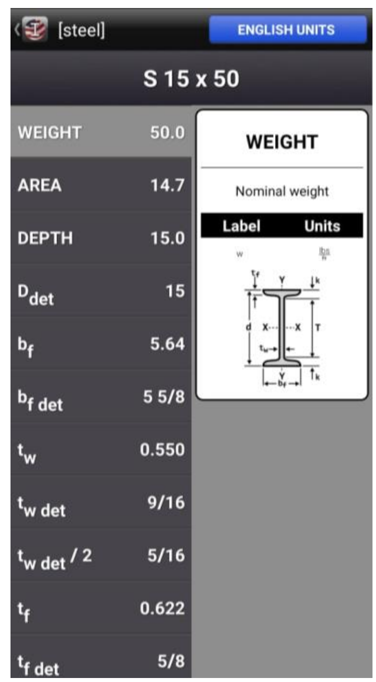


Teniendo la siguiente viga, encontrar su esfuerzo normal y su deflexión:

- Debido a que el perfil estructural de la viga es constante se puede usar la ecuación de la elástica debemos obtener su momento de inercia.

Para saber las dimensiones de una viga con su código, osea S 15X50, lo que se puede hacer es bajar la aplicación de Steel Shapes - AISC de la Play Store para Android o de la Apple Store para IOS y buscar el modelo:





Cuando encuentre el modelo vendrán las dimensiones en la aplicación para que pueda calcular el momento de inercia.

- El momento de inercia del perfil estructural I es de Iz = $2.0068X10^{-4}$ [m^4]
- El módulo de elasticidad de la viga vale E = 200 [GPa]

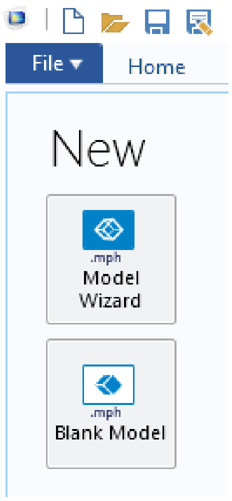
Después de calcular las reacciones en los apoyos

- La fuerza de reacción en el apoyo del punto B vale R_B = 92.6667 [kN].
- La fuerza de reacción en el apoyo del punto E vale R_E = 119.8333 [kN].

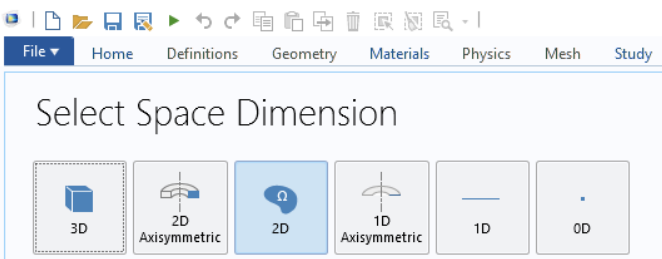
Se comprobarán los datos obtenidos haciendo el modelado de la estructura en COMSOL 5.3a.

CREACIÓN DE LA PIEZA EN COMSOL:

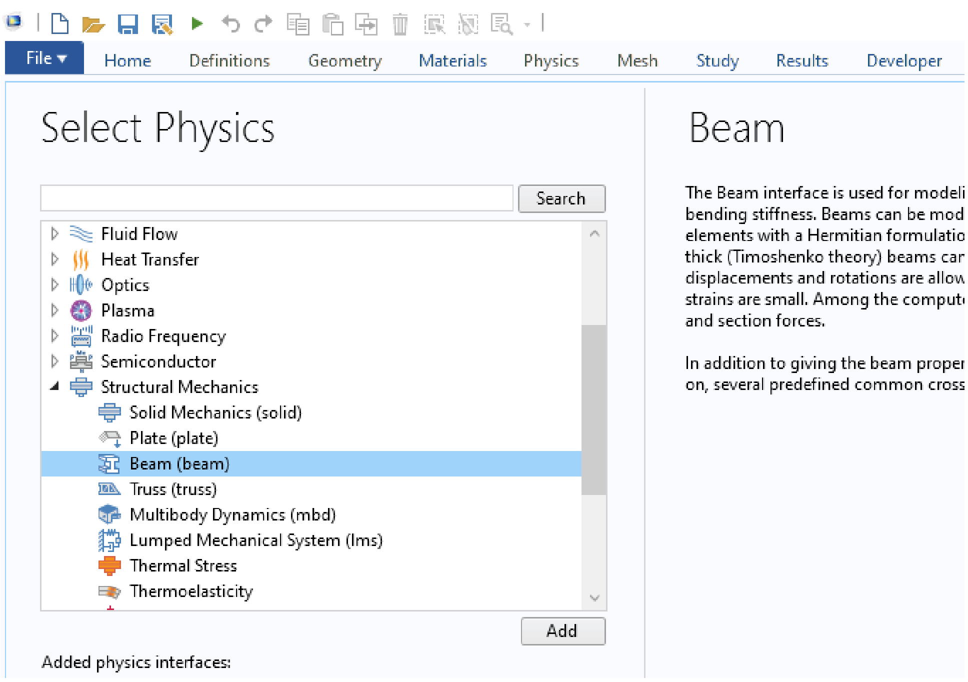
1) Software COMSOL → Model Wizard…



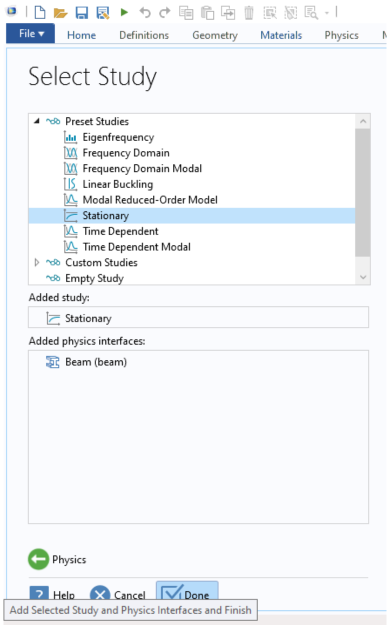
2) … → 2D (estructura 2D) …



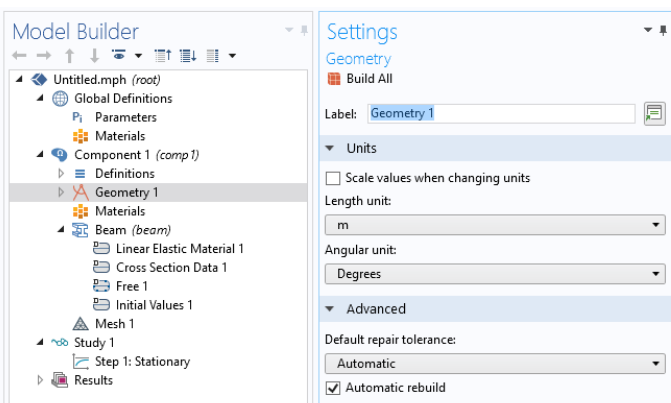
3) … → Structural Mechanics → Beam (osea Viga) → Add…



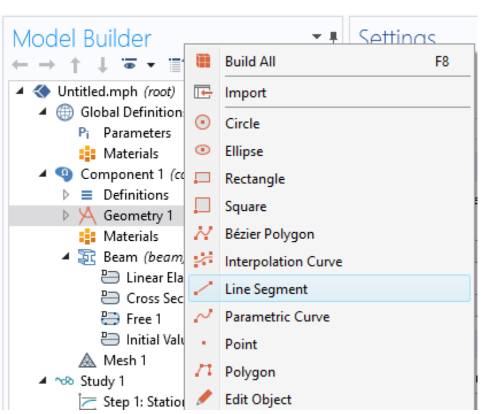
4) … → Study → Preset Studies → Stationary → Done…

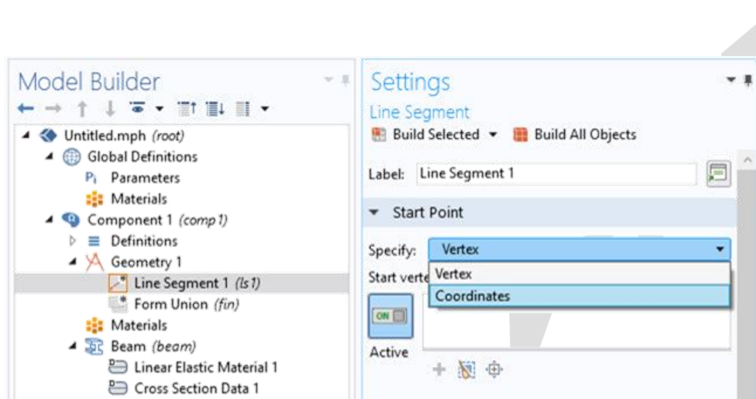


5) Geometry → Length unit: (indico en esta parte las unidades de dimensión en mi figura) …



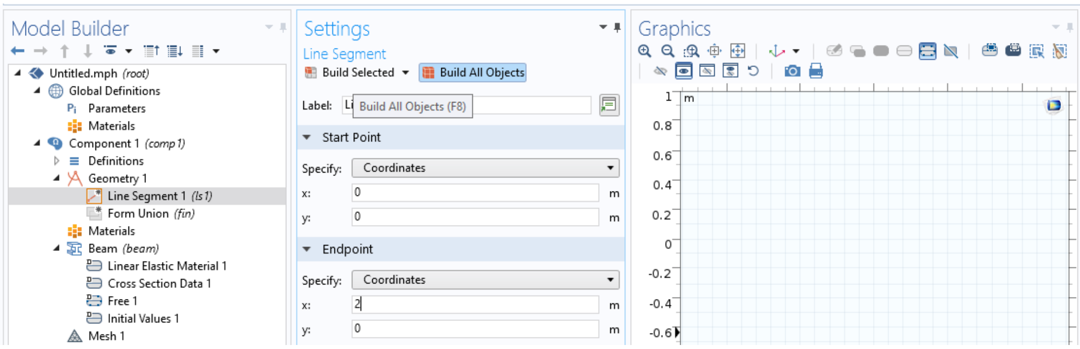
6) …clic derecho en Geometry → Line segment (para crear una fracción de mi viga) → Specify: → Coordinates (para que mi segmento de línea lo cree por medio de coordenadas en mi plano de trabajo) …

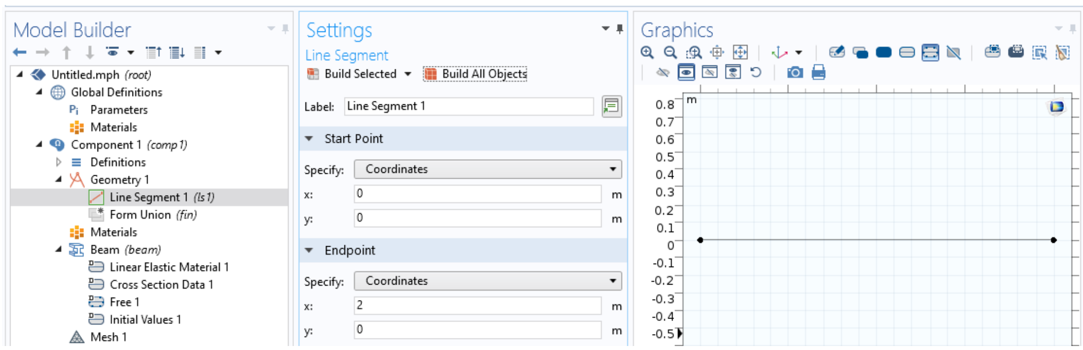




DI_CERO

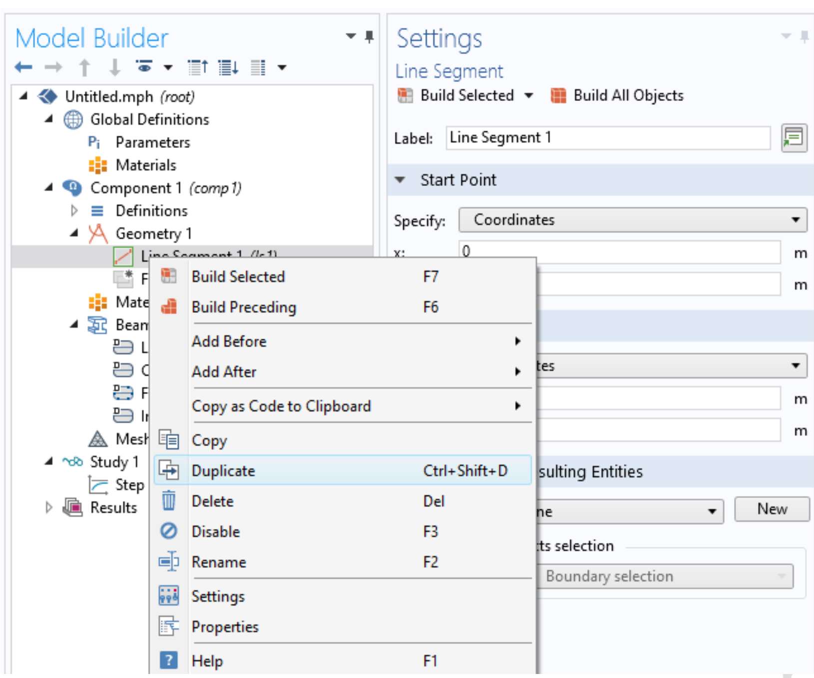
7) …Line Segment 1 → Start Point → x: y: (indicar las coordenadas iniciales de mi segmento de línea) → Endpoint → x: y: (indicar las coordenadas finales de mi segmento de línea) → Build All Objects…

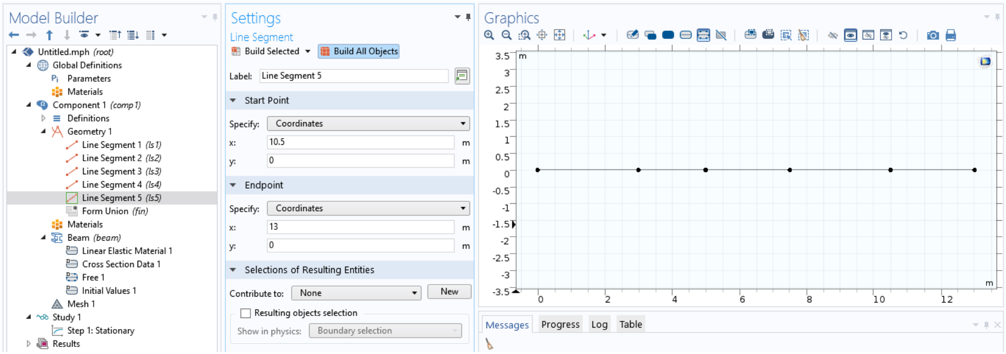




Repetir este proceso hasta crear toda la viga, siempre tomando en cuenta que debo crearla tramo a tramo dependiendo de dónde están mis cargas aplicadas y mis apoyos, por ejemplo, si mi carga es descrita por una función lo que debo hacer es dividir esa carga en varios tramos y poner cargas rectangulares que se le aproximen, pero para poder hacer esto debo crear mi viga con varios pedacitos.

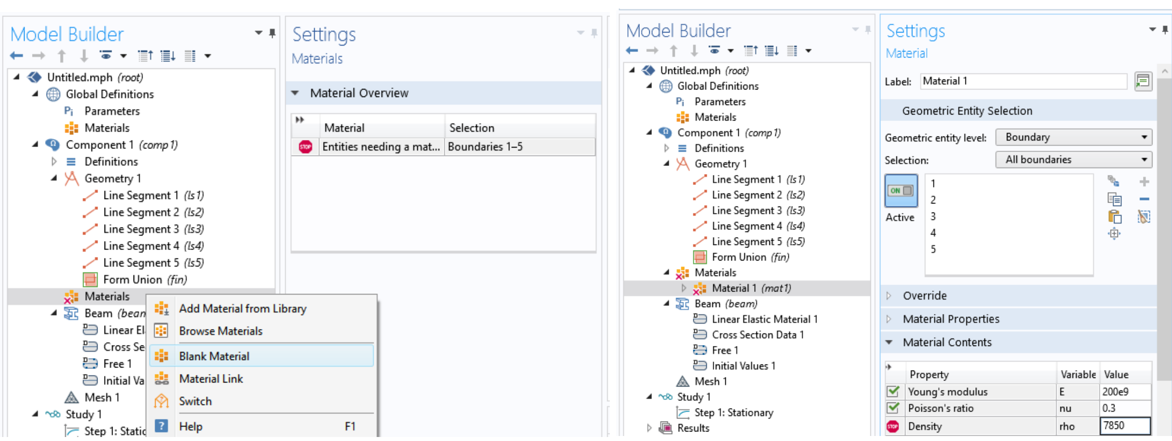
8) …Line Segment → Duplicate (es como copiar y pegar un elemento de línea ya existente) …



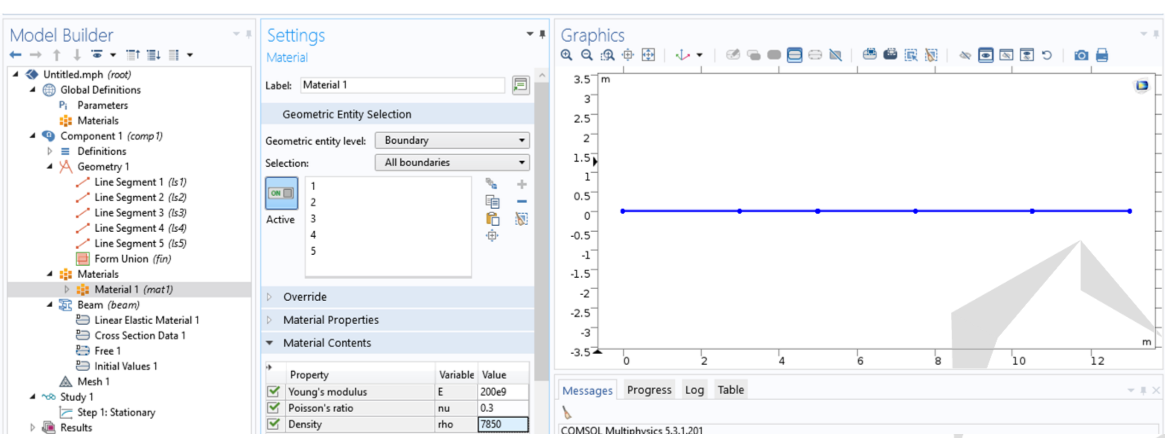


ANÁLISIS MECÁNICO EN COMSOL:

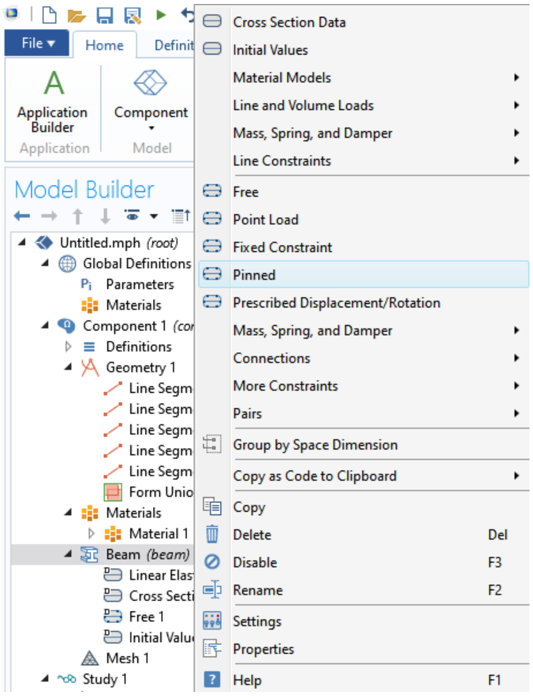
9) Geometry → Materials → Blank Material (para elegir un material para la viga que no se encuentre en la biblioteca ya incluida en COMSOL) → Young´s modulus: (Módulo de Elasticidad) → El módulo de elasticidad en la viga es de 200 MPa → Poission´s ratio: (Módulo de poission) → El módulo de poisson del acero es de 0.3 aproximadamente → Density: (Densidad del material) → La densidad del acero es de 7850 $\left[\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}\right]$…

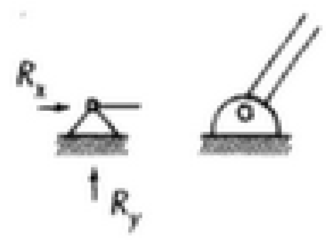


Cuando aparezca una palomita verde alado del nombre es cuando estarán correctamente introducidas todas las propiedades del material.

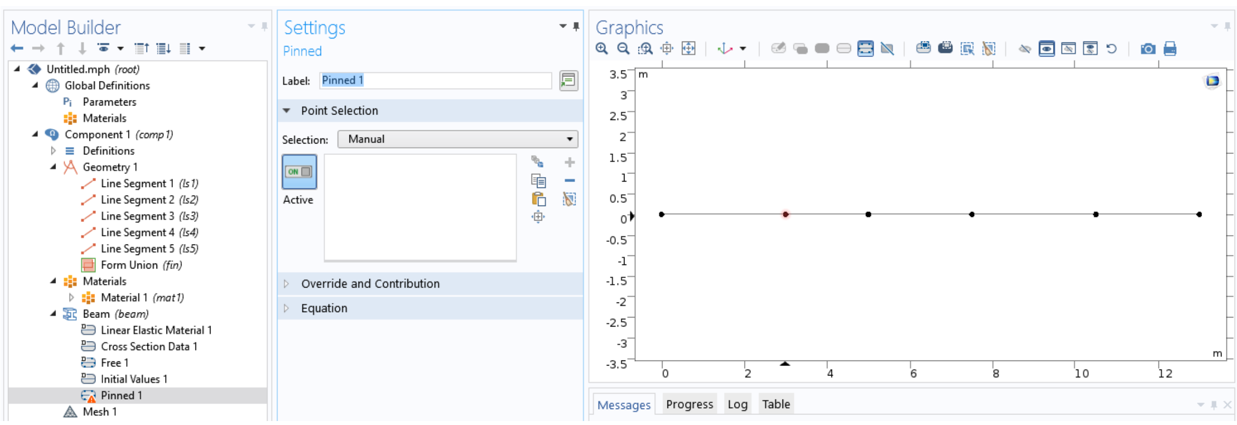


10) Clic derecho Beam → Pinned (Para agregar un apoyo articulado tipo chumacera que tendrá dos reacciones) → Seleccionar el punto donde se encuentra el apoyo…

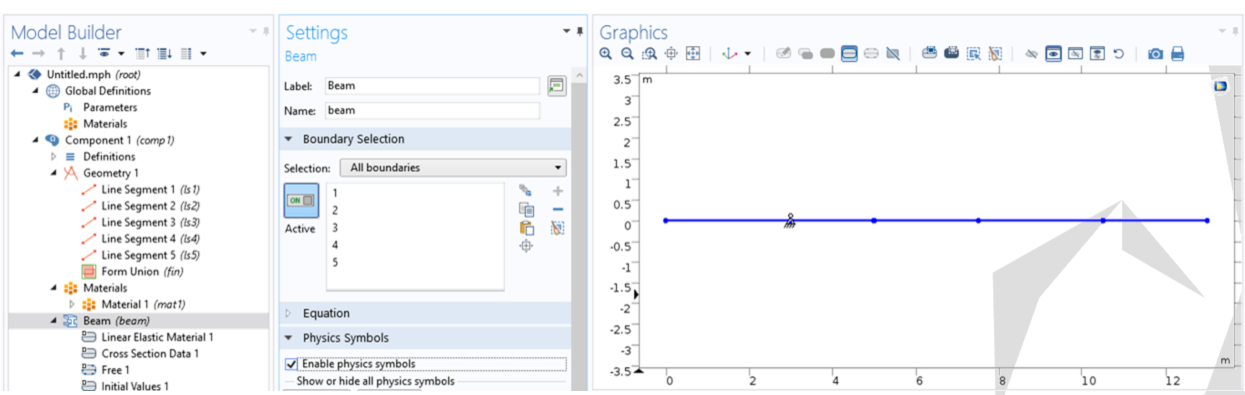




(b) Apoyo articulado

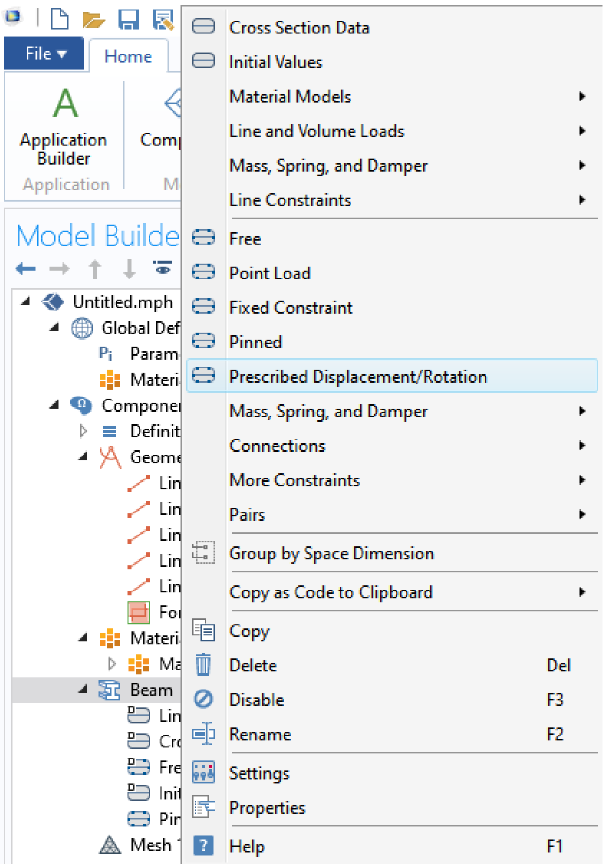


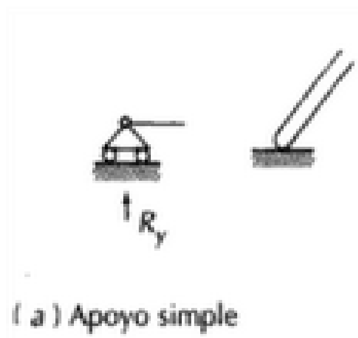
11) Beam → dar clic en el checkbox de Enable physics symbols para que se puedan apreciar las cargas y apoyos en el área de trabajo…

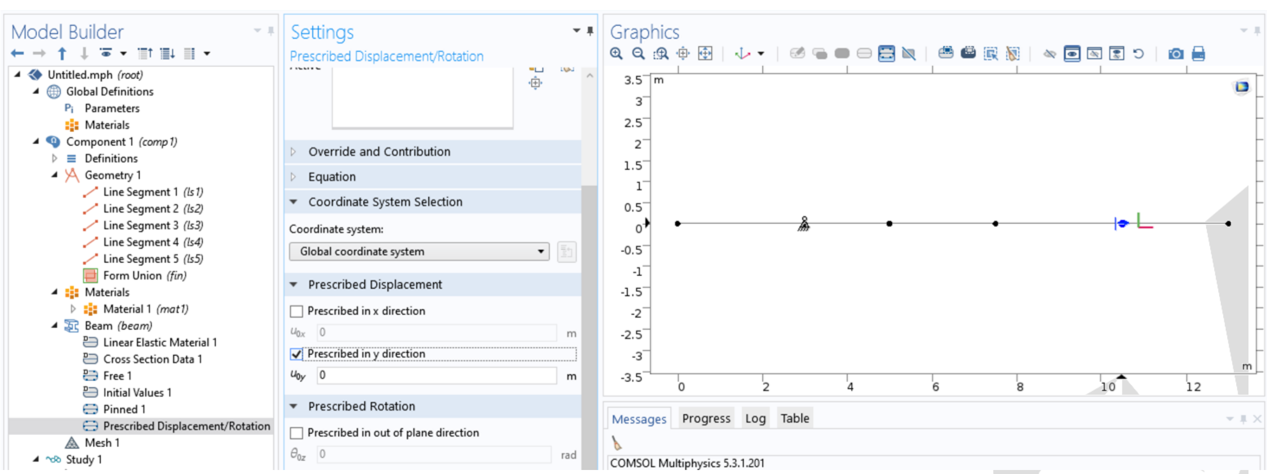


12) Clic derecho Beam → Prescribed Displacement/Rotation (Para agregar un apoyo móvil que solo tiene una reacción hacia arriba) → Seleccionar el punto donde se encuentra el apoyo simple → Prescribed Displacement…

- ✓ Prescribed in x direction: Para cuando la reacción del apoyo solo es en dirección horizontal x.
- ✓ Prescribed in y direction: Para cuando la reacción del apoyo solo es en dirección vertical y.

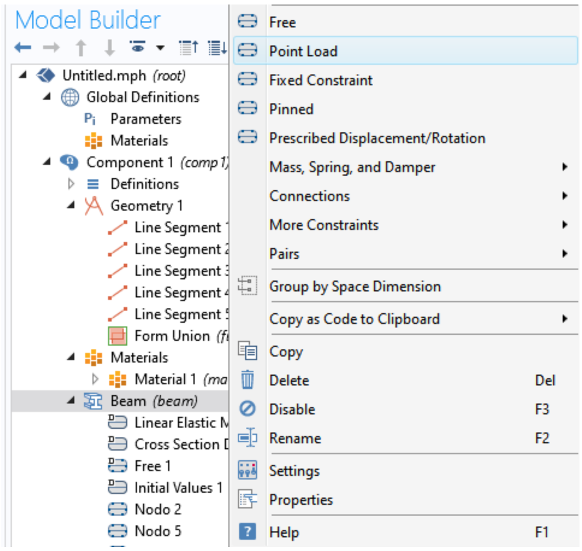


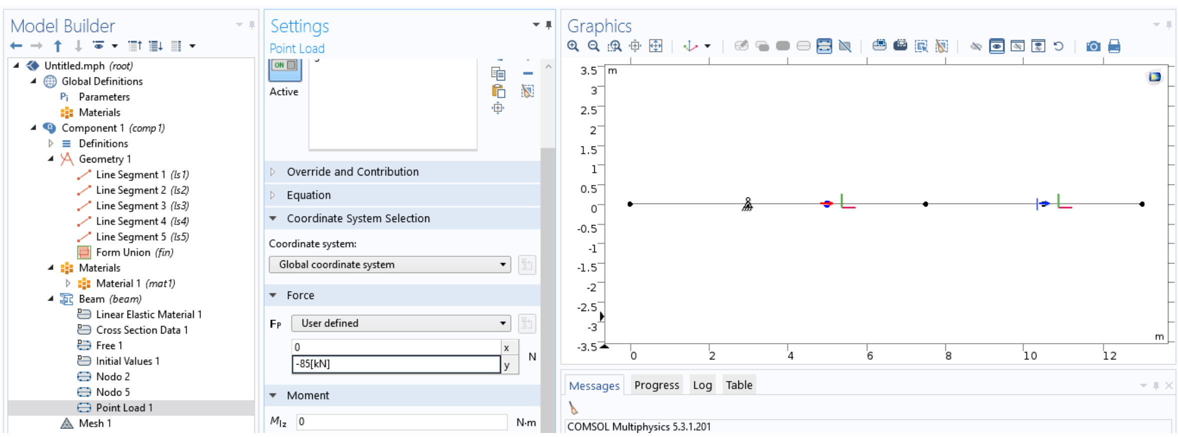




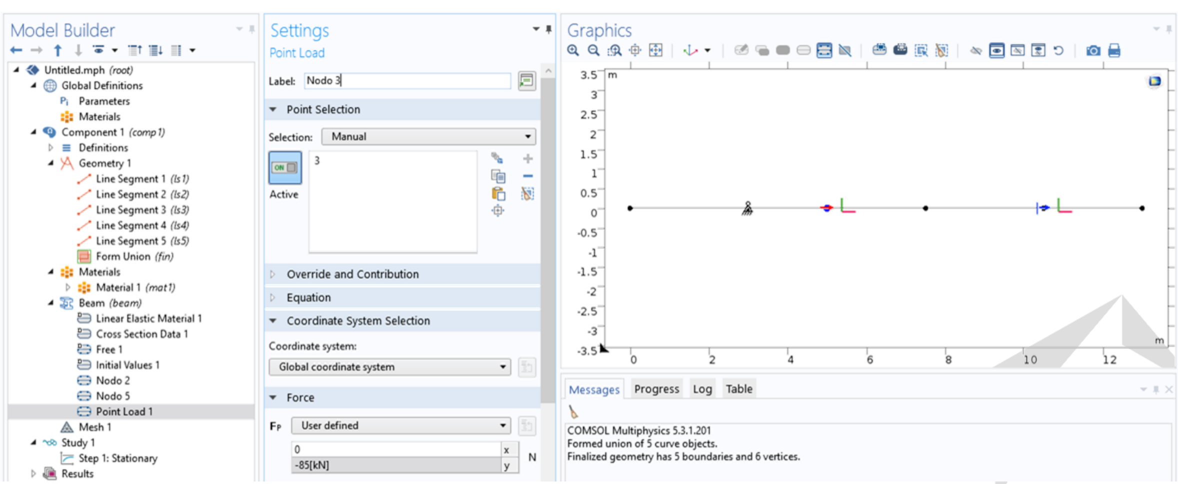
13) Clic derecho Beam → Point Load (Para indicar las fuerzas externas puntuales aplicadas en la viga) → Seleccionar el punto donde se encuentra la aplicación de la fuerza → Force → x (componente

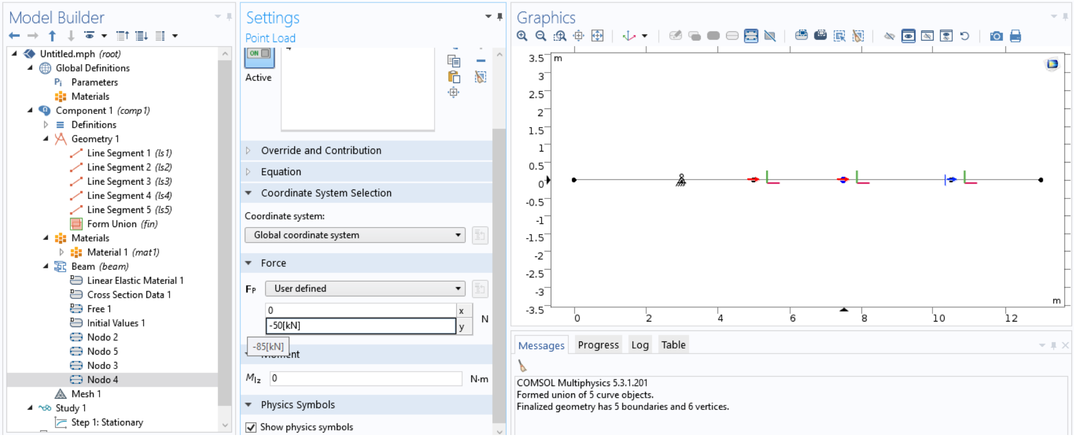
horizontal de la fuerza, signo positivo cuando tiene dirección hacia la derecha y negativo cuando va hacia la izquierda) y (componente vertical de la fuerza, signo positivo cuando tiene dirección hacia arriba y negativo cuando va hacia abajo) → Moment → M_{IZ} → Se declara con los signos que obedecen la ley de la mano derecha para momentos…



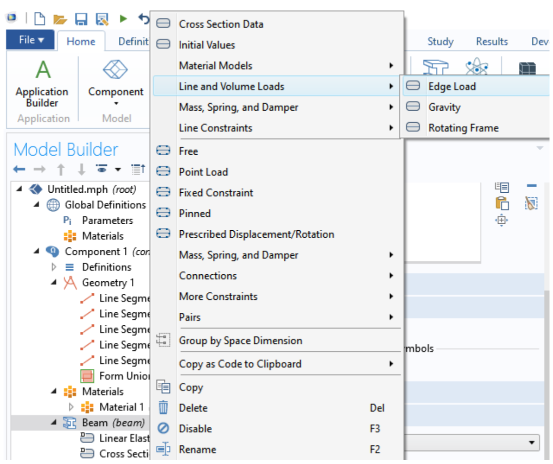


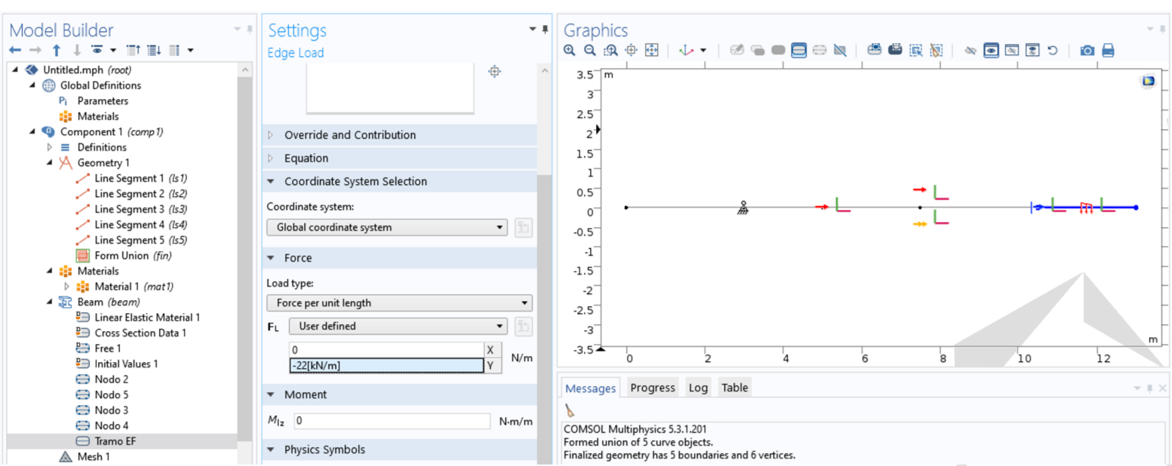
A cada Point Load le puedo dar un nombre en la parte donde dice Label para identificar cada uno.





14) Clic derecho Beam → Line and Volume Loads (Para aplicar fuerzas repartidas en forma rectangular sobre la viga) → Edge Load →Seleccionar el Line Segment de la viga donde se encuentra la aplicación de la fuerza repartida → Force → Force per unit length (Si quiero usar otra unidad que no sea $\left[\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}\right]$ lo debo poner entre corchetes) → x (componente horizontal de la fuerza, signo positivo cuando tiene dirección hacia la derecha y negativo cuando va hacia la izquierda) y (componente vertical de la fuerza, signo positivo cuando tiene dirección hacia arriba y negativo cuando va hacia abajo) → Moment → M_{lZ} → Se declara con los signos que obedecen la ley de la mano derecha para momentos…

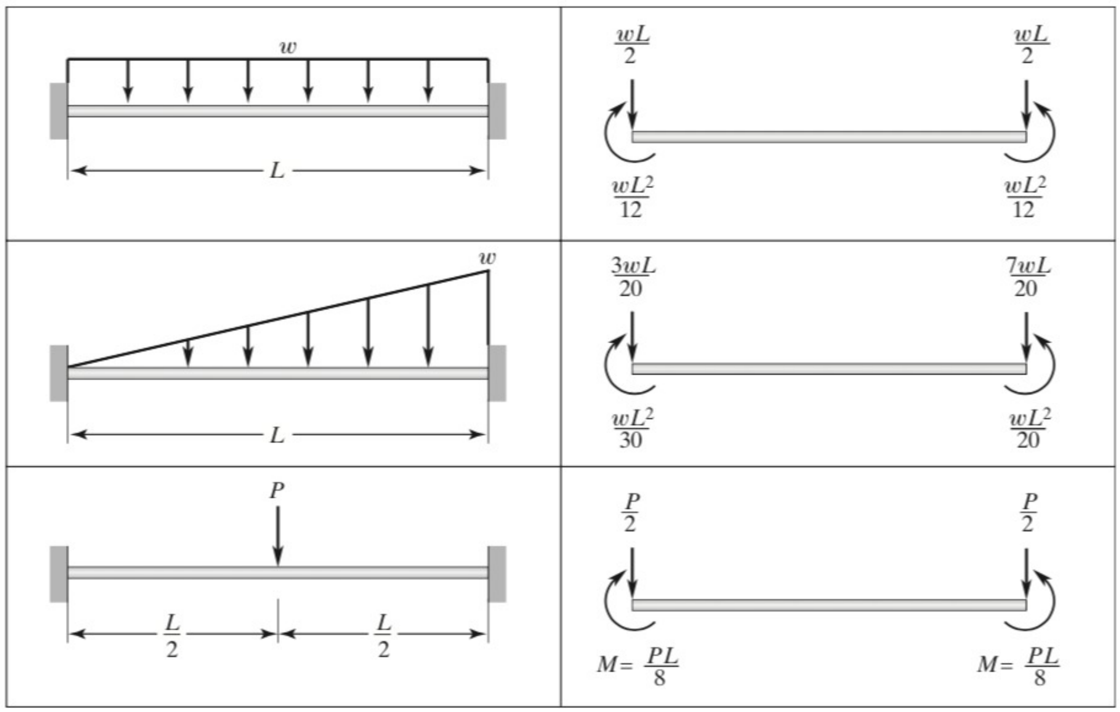




Para poder colocar cargas triangulares debo usar la siguiente equivalencia porque no se puede poner cargas triangulares en COMSOL directamente:

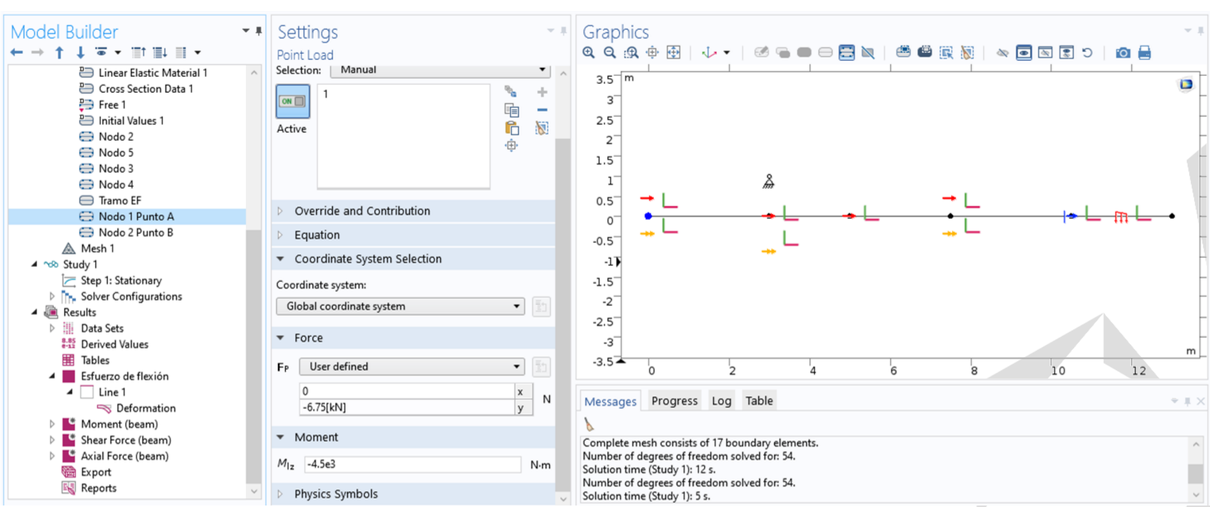
TABLE 4.2 Equivalent nodal loading of beams

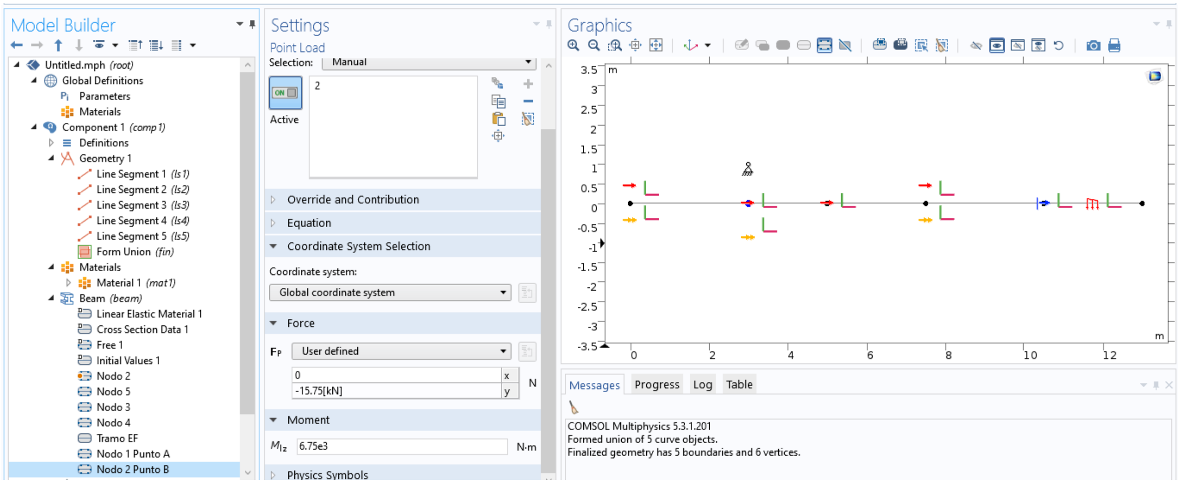
Loading	Equivalent Nodal Loading



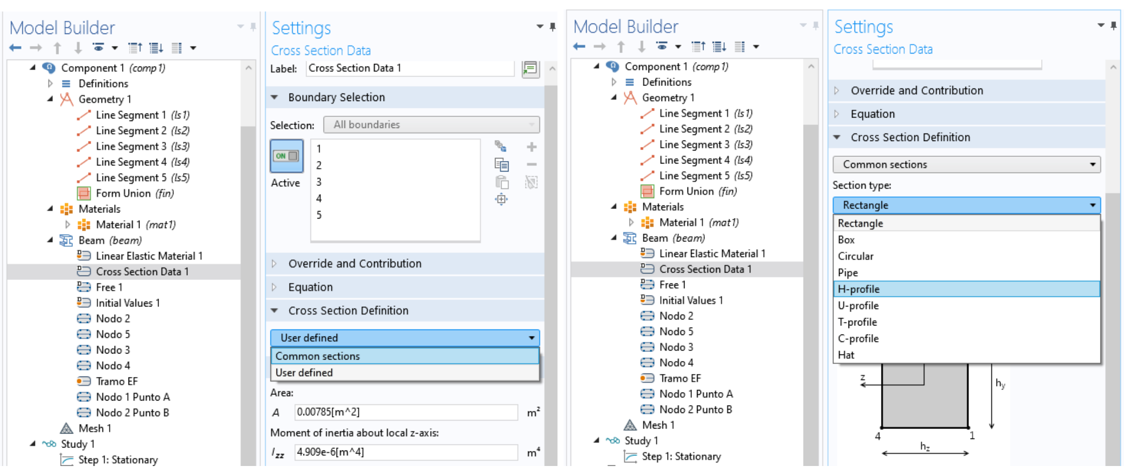
15) Clic derecho Beam → Point Load → Seleccionar el punto donde se encuentra la aplicación de la fuerza → Force → x y (La dirección de las fuerzas se indica con sus signos) → Moment → M_{lz} → Se declara con los signos que obedecen la ley de la mano derecha para momentos…

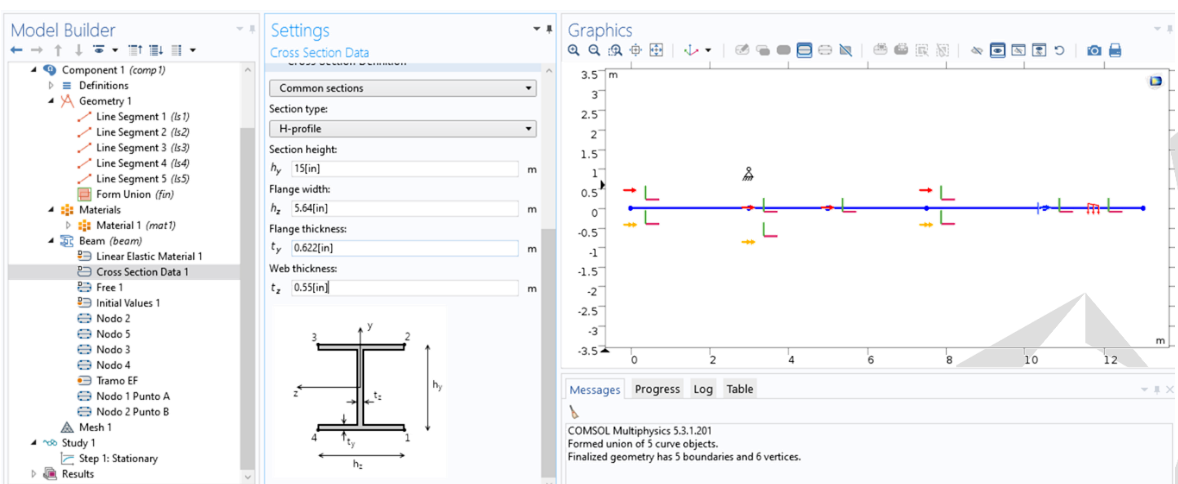
Esto es del equivalente de cargas puntuales y momentos que habíamos visto antes en el punto A y B para la carga triangular repartida.





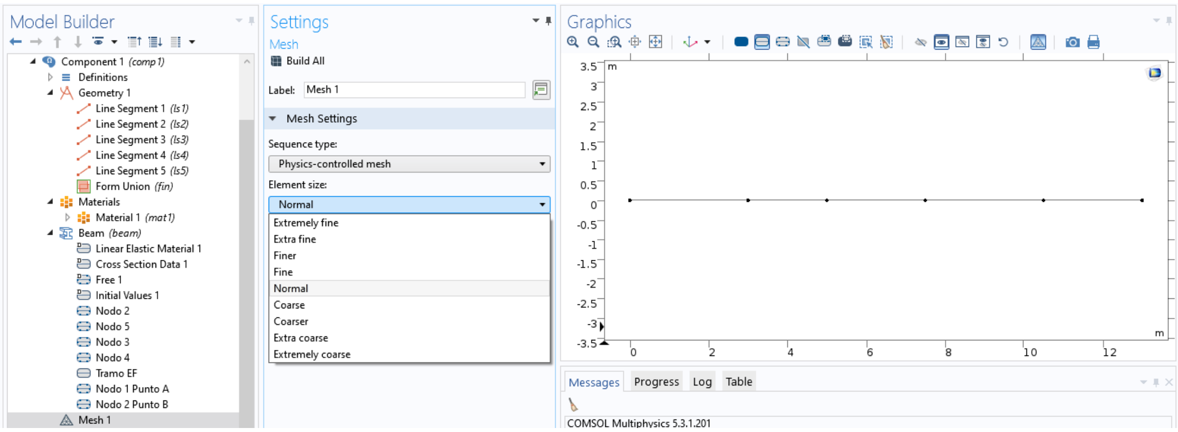
16) Beam → Cross Section Data (Aquí indico cuál es el área de sección transversal en mi viga) → User defined (en esta modalidad al programa no le importa cuál es la forma del perfil estructural, solo debo indicar el momento de inercia y el área) → Common sections (en esta modalidad debo elegir una forma de las que vienen predefinidas en COMSOL) → Rectangle, Box, Circular, H-Profile (Perfil estructural I), etc. → Definir las dimensiones del área de sección transversal…

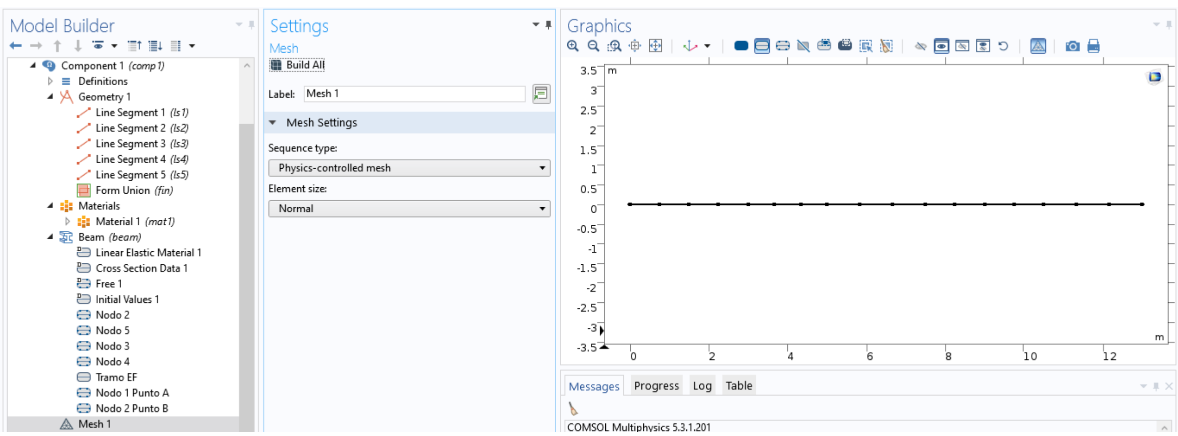




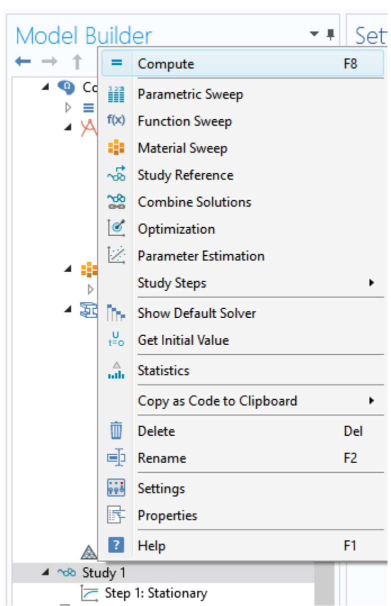
RESULTADO DEL ELEMENTO FINITO EN COMSOL:

17) Malla para hacer el análisis por medio del método de elemento finito (en análisis de vigas no importa tanto el tamaño de la malla por la simplicidad de la figura) → Mesh → Build All…

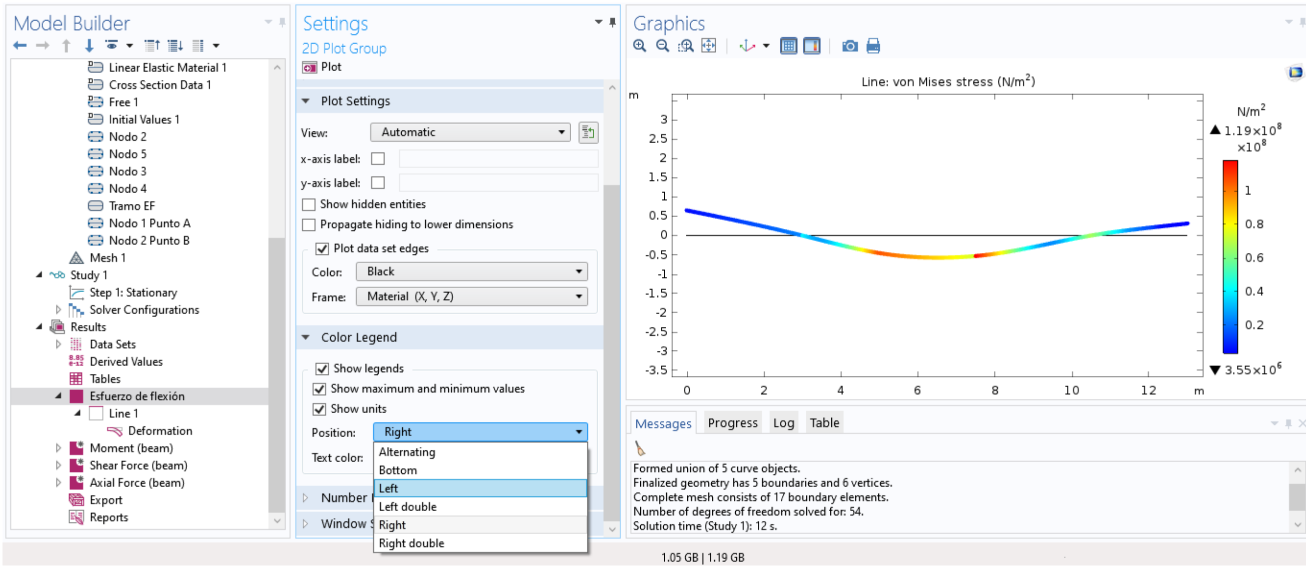




18) Study → Compute (y se generará el cálculo de esfuerzos y momento flexionante por default)



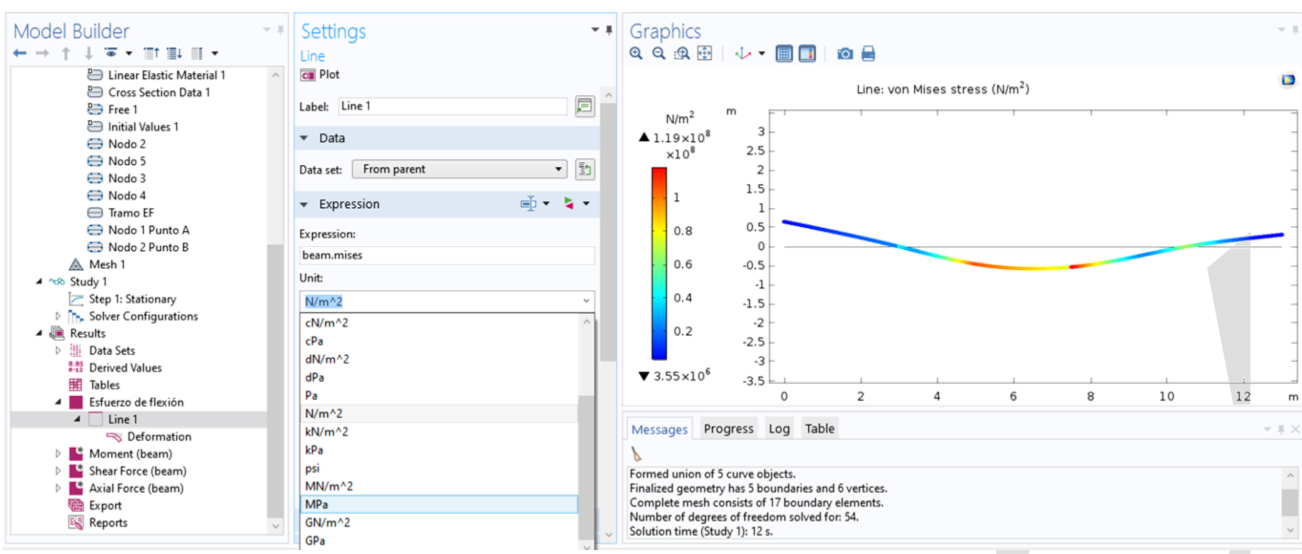
19) Results → Stress (Para ver el resultado del cálculo de esfuerzos) → Dar clic en las checkbox de Show legends, Show maximum and minimum values y Show units para que en la barra de colores se puedan ver mis resultados correctamente → Color Legend → Position → Elegir la posición donde quiero que se vea la barra de resultados dentro del área de trabajo…

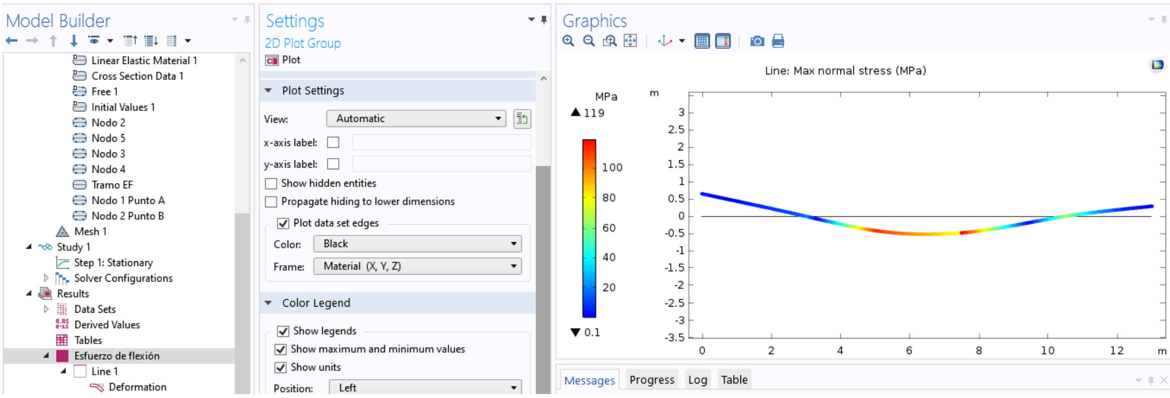


20) Results → Stress → Line 1 → Unit: Para indicar la unidad en la que quiero que se vean mis resultados → MPa → Plot…

21) Results → Line 1 → Expression: Si quiero ver el resultado de la teoría de falla de von mises o del esfuerzo cortante máximo debo poner ciertos códigos en para indicar el movimiento que quiero restringir en mi apoyo…

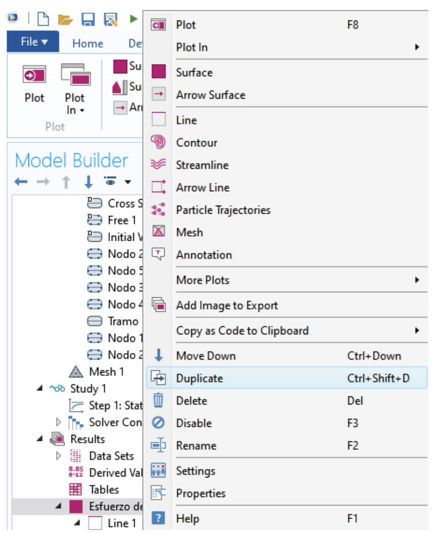
- ✓ beam.smax: Para ver el esfuerzo normal máximo en la viga.
- ✓ v: Sirve para saber la deflexión de la viga.
- ✓ thz: Se usa para saber la pendiente de la viga.
- ✓ beam.RFy: Se usa para saber la reacción vertical de un apoyo.



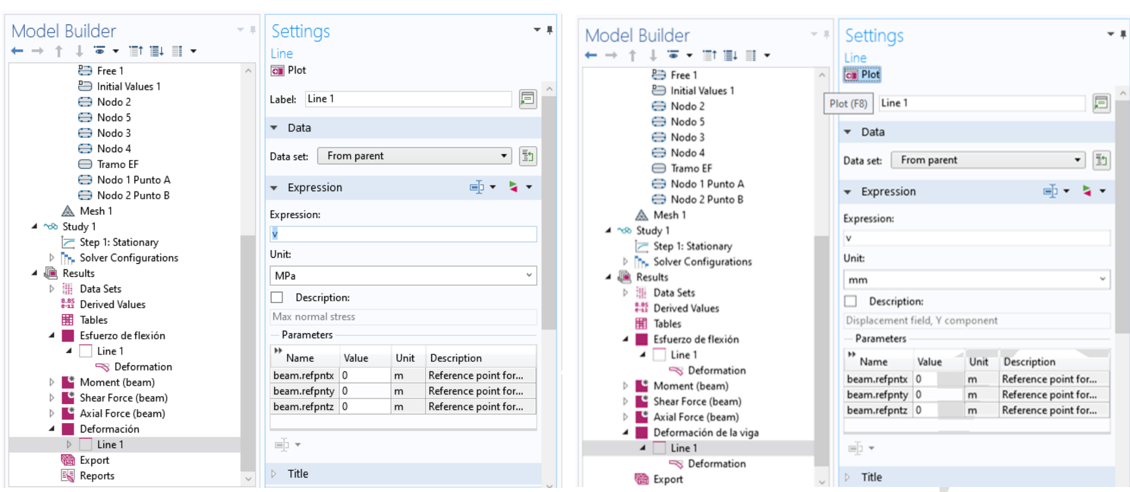


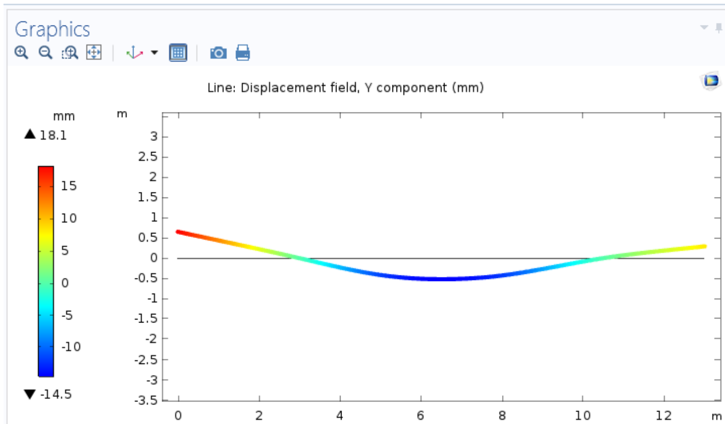
$$\sigma max = 119\ [MPa]$$

22) Results → clic derecho en Stress (Esfuerzo de flexión) → Duplicate (para poder crear otro resultado que me muestre ahora la deflexión en la viga) …



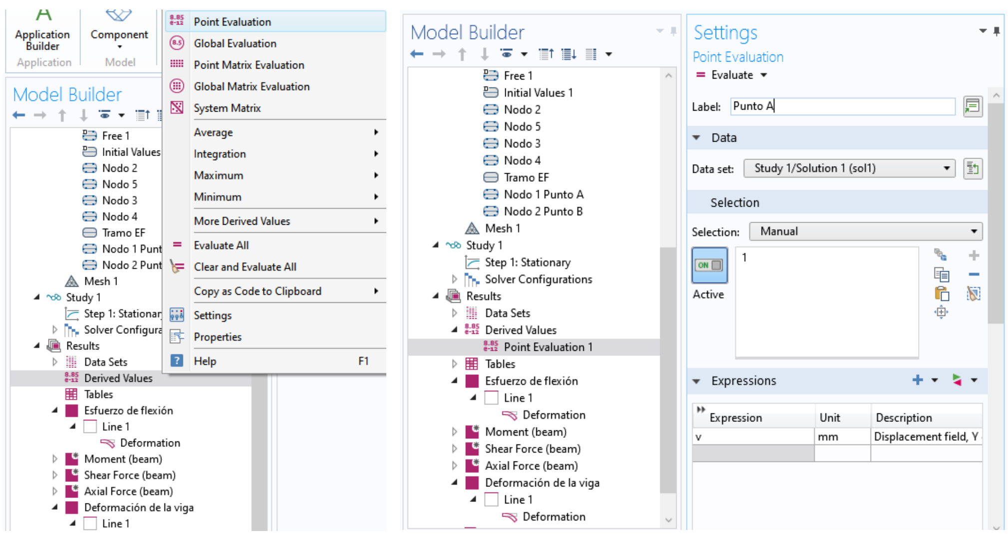
23) …Label (para darle un nombre a mi nuevo resultado) → Deformación → Line 1 → Expressión: v (esta expresión es la que me sirve para saber las deformaciones en el eje vertical) → Unit: mm (para que el resultado lo muestre en esta unidad) → Plot…

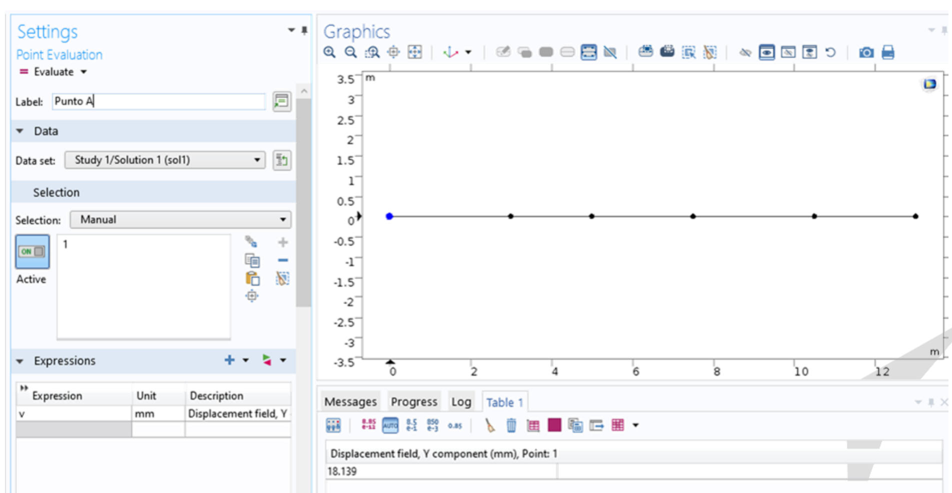




Con esto puedo ver que la deformación máxima se encuentra en el punto A y es de 18.1 [mm]

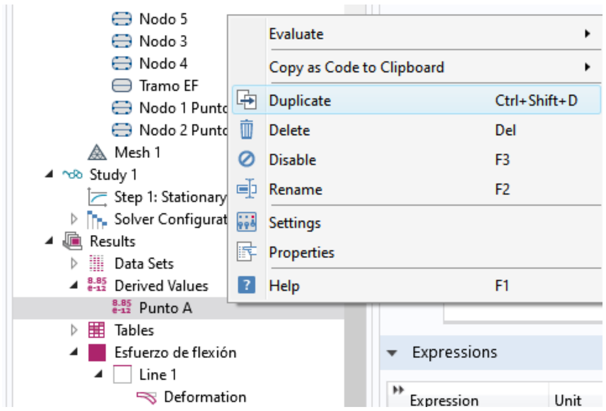
24) Results → Clic derecho en Derived Values → Point Evaluation (para cuando quiero saber el valor de cualquier cosa solo en un punto en específico) → Seleccionar un nodo de los mostrados donde quiero saber algún resultado → Expression (poner la expresión de lo que quiero saber), Unit (poner la unidad en la que quiero que me lo muestre) …

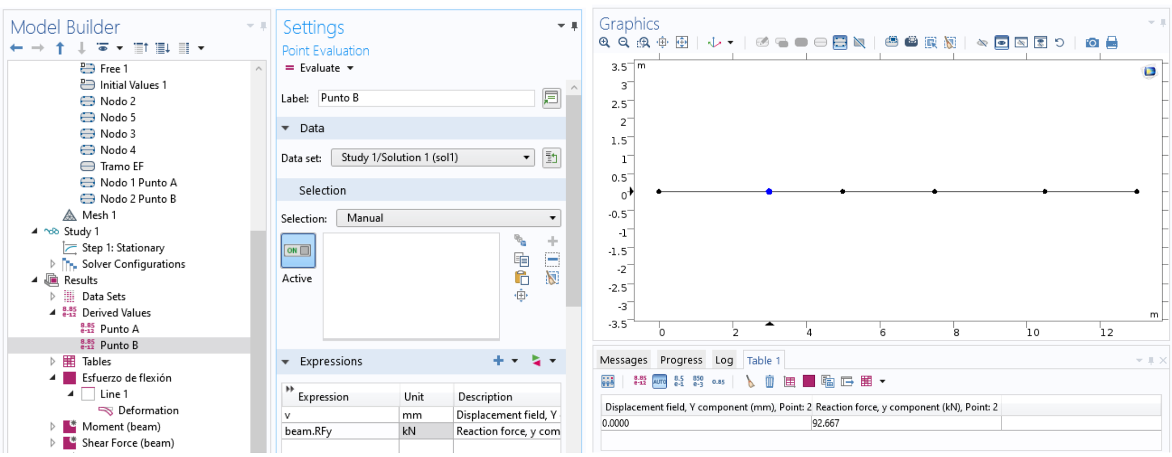




$$Y_A = 18.139\ [\mathrm{mm}]$$

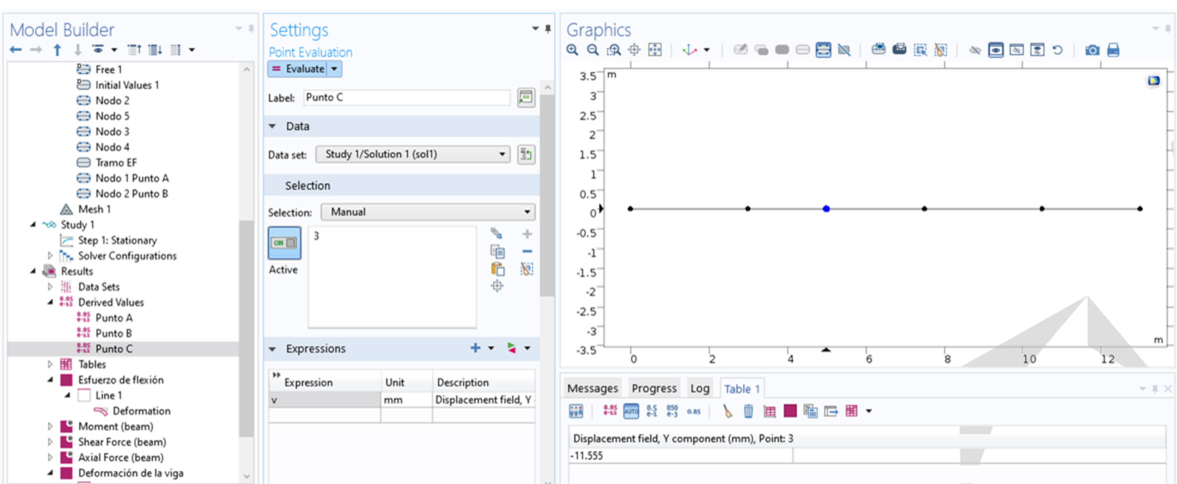
25) …El mismo Point Evaluation se puede usar para conocer los mismos resultados en nodos diferentes y se irán apilando en la tabla que se encuentra debajo de la figura, o se puede duplicar y tener uno para cada punto → Results → Derived Values → Point Evaluation → Duplicate → Para borrar los resultados acumulados debo dar clic en la escoba → Evaluate…



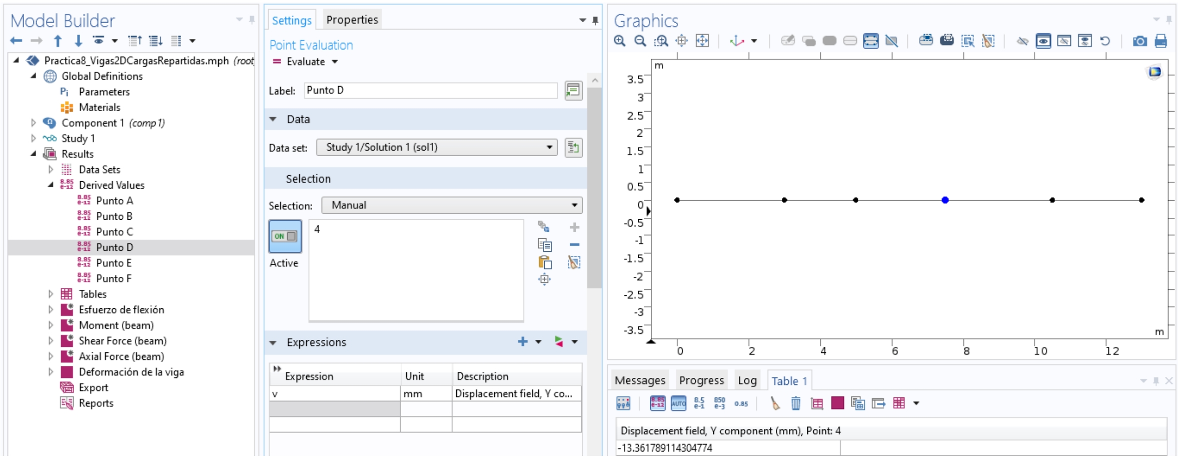


$$Y_B = 0\ [mm]$$

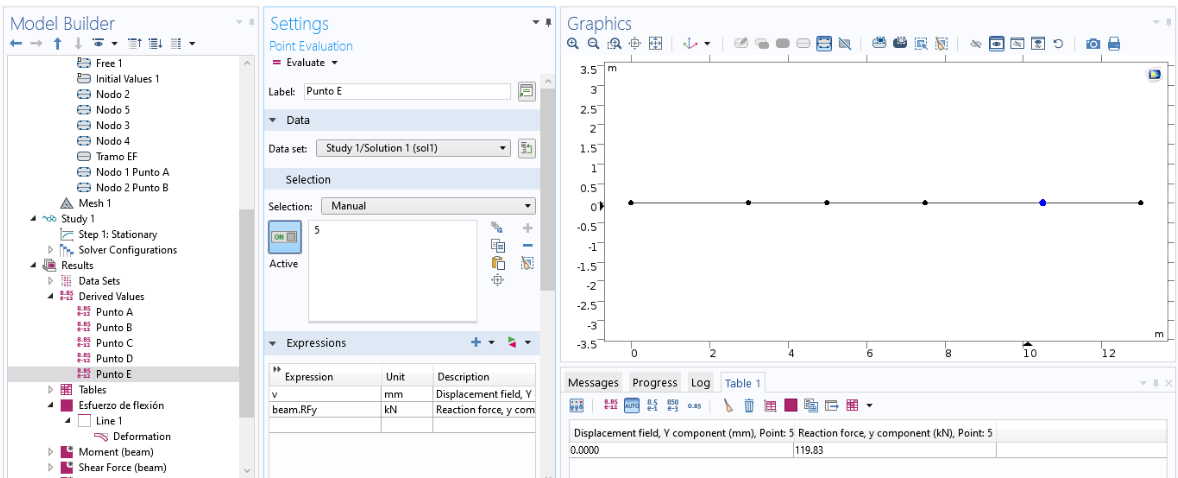
$$R_B = 92.667\ [mm]$$



$$Y_C = -11.555\ [mm]$$

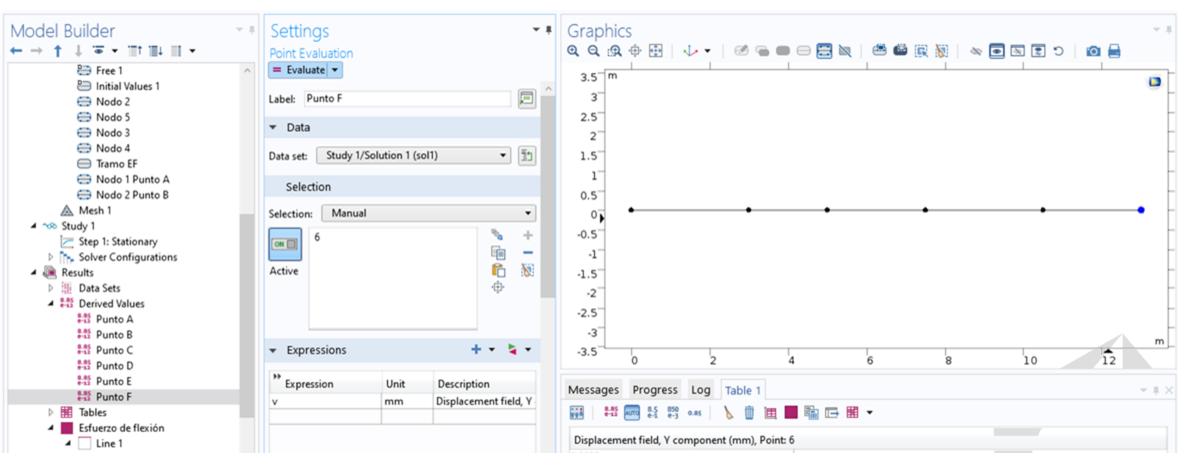


$$Y_D = -13.361789\ [mm]$$



$$Y_E = 0\ [mm]$$

$$R_E = 119.83\ [mm]$$



$$Y_F = 8.0925\ [mm]$$

CONCLUSIÓN:

Con el método numérico apoyado por el programa COMSOL podemos comprobar que esté bien hecho nuestro método analítico y visualizar el momento flexionante máximo, la fuerza cortante máxima, el esfuerzo máximo, la deflexión y pendiente en cada punto de la viga después de haberle aplicado las carga de manera gráfica, además para casos especiales como este donde no se puede usar la ecuación de la elástica es de mucha utilidad.

ERROR:

$$error = \frac{|valor\ obtenido\ en\ el\ programa| - |valor\ analítico|}{|valor\ obtenido\ en\ el\ programa|} * 100[\%]$$

Un error menor al 11% es aceptable entre ambos métodos analítico y numérico.

RB:

$$error = \frac{|92.667| - |92.6667|}{|92.667|} * 100 = 0\%$$

RE:

$$error = \frac{|119.83| - |119.8333|}{|119.83|} * 100 = 0\%$$

σmax:

$$error = \left|\frac{|119| - |119.3711|}{|119|}\right| * 100 = 0.8246\%$$

Y_A:

$$error = \left|\frac{|18.139| - |18.1388|}{|18.139|}\right| * 100 = 0.8246\%$$

Y_F:

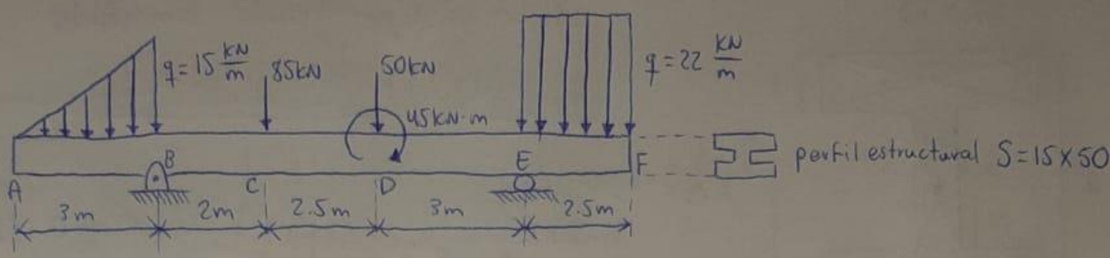
$$error = \left|\frac{|8.0925| - |8.0927|}{|8.0925|}\right| * 100 = 0.1581\%$$

BIBLIOGRAFÍA:

MECÁNICA DE MATERIALES (5TA EDICIÓN) – FERDINAND P. BEER.

MÉTODO ANALÍTICO:

Práctica 8: Vigas con carga triangular.



Obtener los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante para obtener el esfuerzo en la viga y encontrar la deflexión y pendiente en los puntos A y F.

$FR = A = \frac{b(h)}{2}$ $c = \frac{2}{3}b$

$FR = A = b(h)$ $c = \frac{b}{2}$

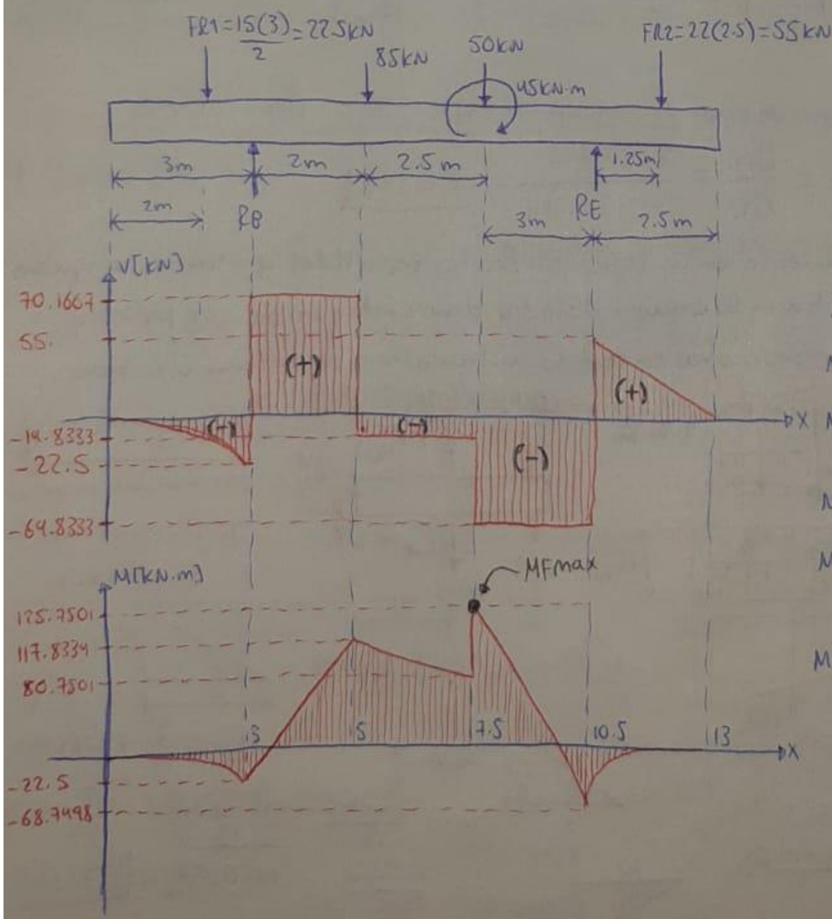
1) Encontrar las fuerzas de reacción en los apoyos.

$\Sigma M_B = (-1)(-22.5)+(2)(-85)+([illegible].5)(-50)- \cdots (-45)+(7.5)R_E+8.75(-55)=0$

$\boxed{R_E = 119.8333\,kN}$

$\Sigma F_y = -22.5+R_B-85-50+R_E-55=0$

$\boxed{R_B = 92.6667\,kN}$



$M(x=0) = 0\,kN\cdot m$

$M(x=3) = -22.5\,[kN\,m]$

$M(x=5) = -22.5+70.1667(2) = 117.8334$

$M(x=7.5) = 117.8334-14.8333(2.5)$

$= 80.7501$

considerando la convención de signos

$M(x=7.5) = 80.7501+45 = 125.7501$

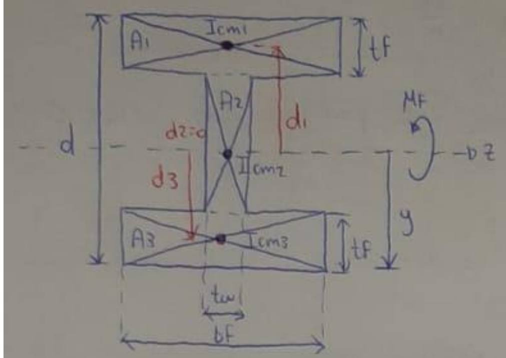
$M(x=10.5) = 125.7501-64.8333(3)$

$= -68.7498$

$M(x=13) = -68.7498+\left(\frac{2.5(55)}{2}\right) \approx 0$

2) Ya que haya encontrado M_{Fmax} debo obtener los esfuerzos de la viga considerando al área de sección transversal o perfil estructural

S15X50



$$I_z = I_{cm1} + A_1 d_1^2 + I_{cm2} + A_2 d_2^2 + I_{cm3} + A_3 d_3^2$$

$$I_z = \frac{bf(tf)(2tf^2 + 6(d-tf)^2) + tw(d-2tf)^3}{12}$$

$bf = 5.64''$

$tf = 0.622''$

$tw = 0.55''$

$d = 15''$

$$d = 15\,[in]\left(\frac{2.54\times10^{-2}\,[m]}{[in]}\right) = 0.381\,[m]$$

$$I_z = \frac{5.64(0.622)(2(0.622)^2 + 6(15-0.622)^2) + 0.55(15-2(0.622))^3}{12}$$

$I_z = 482.1382\,[in]^4$ $\quad 1\,in = 2.54\times10^{-2}\,[m]$

$$I_z = 482.1382\,[in^4]\left(\frac{(2.54\times10^{-2})^4\,[m^4]}{1\,[in^4]}\right) = 2.0068\times10^{-4}\,[m^4]$$

$$\boxed{I_z = 2.0068\times10^{-4}\,[m^4]}$$

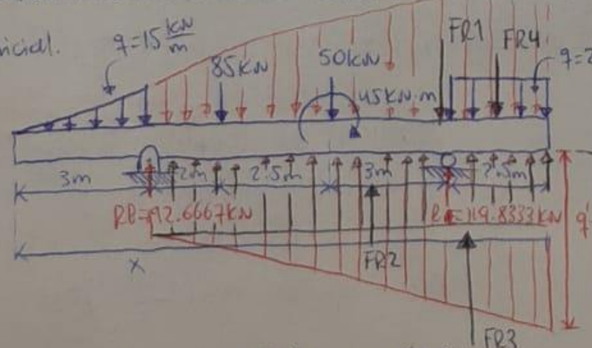
$$\sigma = \frac{M_{max}}{I_z}\left(\frac{d}{2}\right) = \frac{125.7501\times10^3}{2.0068\times10^{-4}}\left(\frac{0.381}{2}\right)$$

$$\boxed{\sigma = 119.3711\,[MPa]}$$

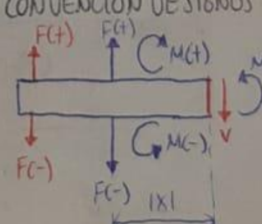
La viga es de acero estructural ⟶ ASTM-A36 ∴ $\sigma_{pc} = 250\,MPa$

$$F.S. = \frac{\sigma_{pc}}{\sigma_t} = \frac{250\,MPa}{119.3711\,MPa} = 2.0943$$

3) Encontrar la deflexión y pendiente en la viga, las fuerzas repartidas ya sea rectangulares o triangulares se deben extender hacia la esquina derecha donde estoy midiendo $M(x)$ y posteriormente las debo cancelar poniendo otras en sentido contrario para no alterar el estado inicial.



CONVENCIÓN DE SIGNOS

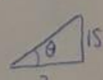


$$\boxed{EI_z(y'') = M(x)}$$

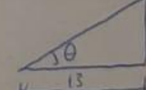
ecuación de la elástica.

$y' = \theta =$ pendiente

$y =$ deflexión.



$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{15}{3}\right) = 78.6900$$

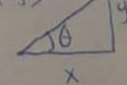


$$\tan\theta = \frac{q'}{13} \rightarrow q' = 64.9996$$

$$M(x) = FR1\left\langle\frac{x}{3}\right\rangle + FR2\left\langle\frac{x-3}{2}\right\rangle + FR3\left\langle\frac{x-3}{3}\right\rangle + 92.6667\langle x-3\rangle \cdots$$

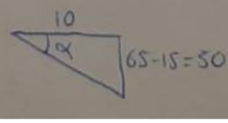
$$\cdots - 85\langle x-5\rangle - 50\langle x-7.5\rangle + 45\langle x-7.5\rangle^0 \cdots$$

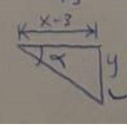
$$\cdots + 119.8333\langle x-10.5\rangle - FR4\left\langle\frac{x-10.5}{2}\right\rangle$$



$$\tan\theta = \frac{y}{x}$$

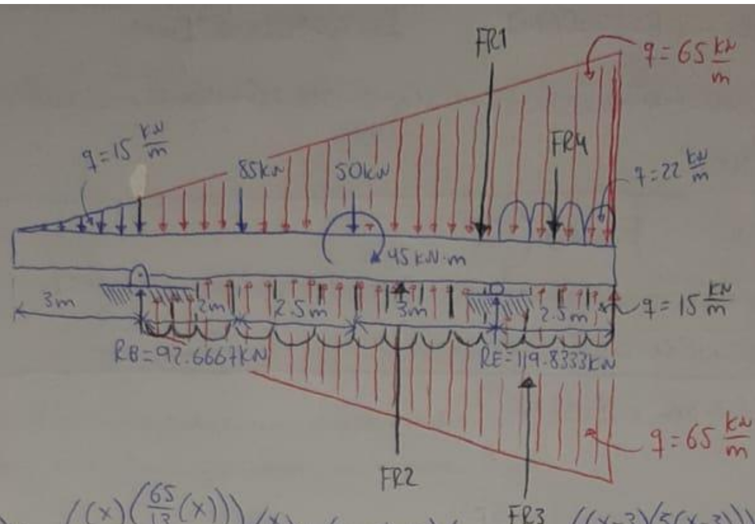
$$\tan\theta = \frac{64.9996}{13} \longrightarrow y = \frac{65}{13}x$$





$$\tan\alpha = \frac{y}{x-3} = \frac{50}{10}$$

$$\longrightarrow y = 5(x-3)$$



3.1) Obtener M(x)

$$M(x) = -\left(\frac{(x)\left(\frac{65}{13}(x)\right)}{2}\right)\left\langle \frac{x}{3} \right\rangle + ((x-3)15)\left\langle \frac{x-3}{2} \right\rangle + \left(\frac{(x-3)(5(x-3))}{2}\right)\left\langle \frac{x-3}{3} \right\rangle + 92.6667\langle x-3\rangle \cdots$$

$$\cdots -85\langle x-5\rangle - 50\langle x-7.5\rangle + 45\langle x-7.5\rangle^0 + 119.8333\langle x-10.5\rangle - ((x-10.5)22)\left\langle \frac{x-10.5}{2} \right\rangle$$

$$M(x) = -\frac{5}{6}\langle x\rangle^3 + \frac{15}{2}\langle x-3\rangle^2 + \frac{5}{6}\langle x-3\rangle^3 + 92.6667\langle x-3\rangle - 85\langle x-5\rangle - 50\langle x-7.5\rangle + 45\langle x-7.5\rangle^0 + 119.8333\langle x-10.5\rangle$$

$$\cdots -11\langle x-10.5\rangle^2$$

3.2) Integrar 2 veces la ecuación de la elástica para obtener la pendiente y deflexión.

$$E(I_z)y'' = M(x)$$

$$E(I_z)\int y'' = \int -\frac{5}{6}\langle x\rangle^3 + \frac{15}{2}\langle x-3\rangle^2 + \frac{5}{6}\langle x-3\rangle^3 + 92.6667\langle x-3\rangle - 85\langle x-5\rangle - 50\langle x-7.5\rangle + 45\langle x-7.5\rangle^0 + 119.8333\langle x-10.5\rangle - 11\langle x-10.5\rangle^2$$

$$E(I_z)\theta = -\frac{5}{24}\langle x\rangle^4 + \frac{15}{6}\langle x-3\rangle^3 + \frac{5}{24}\langle x-3\rangle^4 + \frac{92.6667}{2}\langle x-3\rangle^2 - \frac{85}{2}\langle x-5\rangle^2 - \frac{50}{2}\langle x-7.5\rangle^2 + 45\langle x-7.5\rangle + \frac{119.8333}{2}\langle x-10.5\rangle^2 - \frac{11}{3}\langle x-10.5\rangle^3 \cdots + C1$$

$$E(I_z)y = -\frac{5}{120}\langle x\rangle^5 + \frac{15}{24}\langle x-3\rangle^4 + \frac{5}{120}\langle x-3\rangle^5 + \frac{92.6667}{6}\langle x-3\rangle^3 - \frac{85}{6}\langle x-5\rangle^3 - \frac{50}{6}\langle x-7.5\rangle^3 + \frac{45}{2}\langle x-7.5\rangle^2 + \frac{119.8333}{6}\langle x-10.5\rangle^3 \cdots$$

$$\cdots -\frac{11}{12}\langle x-10.5\rangle^4 + C1\langle x\rangle + C2$$

3.3) Evaluar en las condiciones de frontera de la viga para encontrar C1 y C2.

$\boxed{y=0}$

$\boxed{\theta=0 \quad y=0}$

$x=3$

$y=0$

$$0 = -\frac{5}{120}(3)^5 + 0 + 0 - 0 - 0 + 0 + 0 + 3C1 + C2$$

$x=10.5$

$y=0$

$$0 = -\frac{5}{120}(10.5)^5 + \frac{15}{24}(7.5)^4 + \frac{5}{120}(7.5)^5 + \frac{92.6667}{6}(7.5)^3 - \frac{85}{6}(5.5)^3 \cdots$$

$$\cdots -\frac{50}{6}(3)^3 + \frac{45}{2}(3)^2 + \frac{119.8333}{6}\cancel{(0)} - 0 + 10.5C1 + C2$$

$\boxed{3C1 + C2 = 10.125}$

$\boxed{10.5C1 + C2 = -1784.6169}$

$\boxed{C1 = -239.2989 \quad C2 = 728.0217}$

E → Acero estructural ASTM-A36 → $E = 200\,[GPa]$ $\quad I_z = 2.0068 \times 10^{-4}\,[m^4]$

$$\theta = \frac{(-0.2083\langle x\rangle^4 + 2.5\langle x-3\rangle^3 + 0.2083\langle x-3\rangle^4 + 46.3333\langle x-3\rangle^2 - 42.5\langle x-5\rangle^2 - 25\langle x-7.5\rangle^2 + 45\langle x-7.5\rangle + 59.91665\langle x-10.5\rangle^2 \cdots - 3.6666\langle x-10.5\rangle^3 + C_1)1\times10^3}{E(I_z)}$$

$$\theta = \frac{-208.3\langle x\rangle^4 + 2.5\times10^3\langle x-3\rangle^3 + 208.3\langle x-3\rangle^4 + 46.3333\times10^3\langle x-3\rangle^2 - 42.5\times10^3\langle x-5\rangle^2 - 25\times10^3\langle x-7.5\rangle^2 + 45\times10^3\langle x-7.5\rangle + \cdots 59.9166\times10^3\langle x-10.5\rangle^2 - 3.6666\times10^3\langle x-10.5\rangle^3 + (-239.2989\times10^3)}{200\times10^9(2.0068\times10^{-4})}$$

pendiente en los puntos A y F:

A: $x=0$

$$\theta = \frac{-0+0+0+0-0-0+0+0-0-239.2989\times10^3}{200\times10^9(2.0068\times10^{-4})} = -5.9622\times10^{-3}$$

F: $x=13$

$$\theta = \frac{-208.3\langle 13\rangle^4 + 2.5\times10^3\langle 10\rangle^3 + 208.3\langle 10\rangle^4 + 46.3333\times10^3\langle 10\rangle^2 - 42.5\times10^3\langle 8\rangle^2 - 25\times10^3\langle 5.5\rangle^2 + 45\times10^3\langle 5.5\rangle + 59.9166\times10^3\langle 2.5\rangle^2 \cdots 3.6666\times10^3\langle 2.5\rangle^3 \; 239.2989\times10^3}{200\times10^9(2.0068\times10^{-4})}$$

$$y = \frac{-41.6666\langle x\rangle^5 + 625\langle x-3\rangle^4 + 41.6666\langle x-3\rangle^5 + 15.4444\times10^3\langle x-3\rangle^3 - 14.1666\times10^3\langle x-5\rangle^3 - 8.3333\times10^3\langle x-7.5\rangle^3 \cdots + (22.5\langle x-7.5\rangle^2)\times10^3 + 19.9722\times10^3\langle x-10.5\rangle^3 - 916.6666\langle x-10.5\rangle^4 - 239.2989\times10^3 + 728.0217\times10^3}{E(I_z)}$$

$$y = \frac{-41.6666\langle x\rangle^5 + 625\langle x-3\rangle^4 + 41.6666\langle x-3\rangle^5 + 15.4444\times10^3\langle x-3\rangle^3 - 14.1666\times10^3\langle x-5\rangle^3 - 8.333\times10^3\langle x-7.5\rangle^3 \cdots + 22.5\times10^3\langle x-7.5\rangle^2 + 19.9722\times10^3\langle x-10.5\rangle^3 - 916.6666\langle x-10.5\rangle^4 - 239.2989\times10^3\langle x\rangle + 728.0217\times10^3}{200\times10^9(2.0068\times10^{-4})}$$

deflexión en los puntos A y F:

A: $x=0$

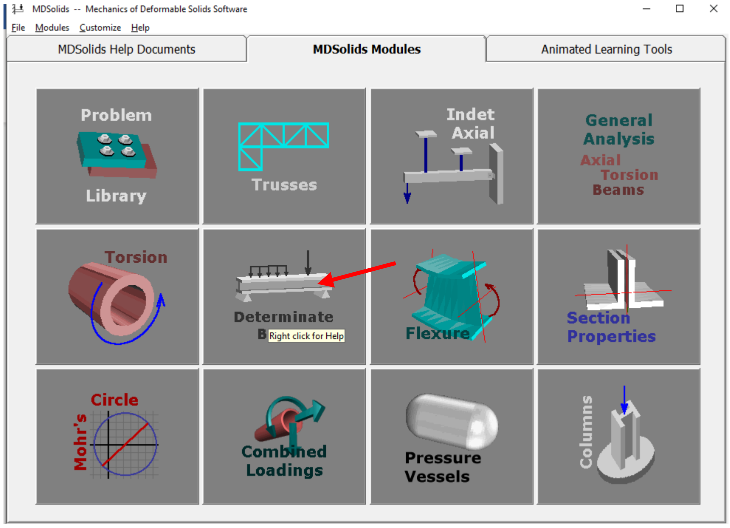
$$y = \frac{-0+0+0+0-0-0+0+0-0-0+728.0217\times10^3}{200\times10^9(2.0068\times10^{-4})} = \underline{18.1388\,[mm]}$$

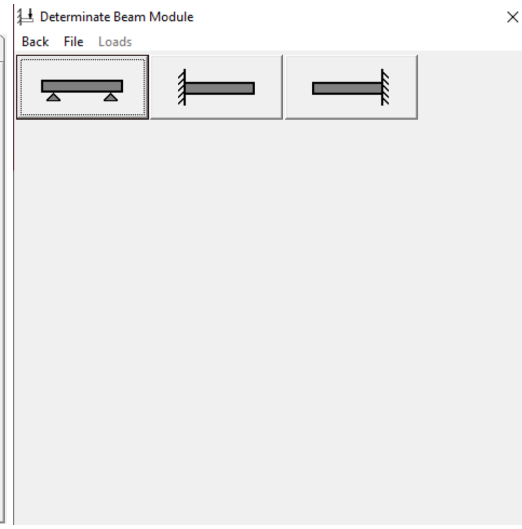
F: $x=13$

$$y = \frac{-41.6666\langle 13\rangle^5 + 625\langle 10\rangle^4 + 41.6666\langle 10\rangle^5 + 15.4444\times10^3\langle 10\rangle^3 - 14.1666\times10^3\langle 8\rangle^3 - 8.3333\times10^3\langle 5.5\rangle^3 + 22.5\times10^3\langle 5.5\rangle^2 \cdots + 19.9722\times10^3\langle 2.5\rangle^3 - 916.666\langle 2.5\rangle^4 - 239.2989\times10^3\langle 13\rangle + 728.0217\times10^3}{200\times10^9(2.0068\times10^{-4})}$$

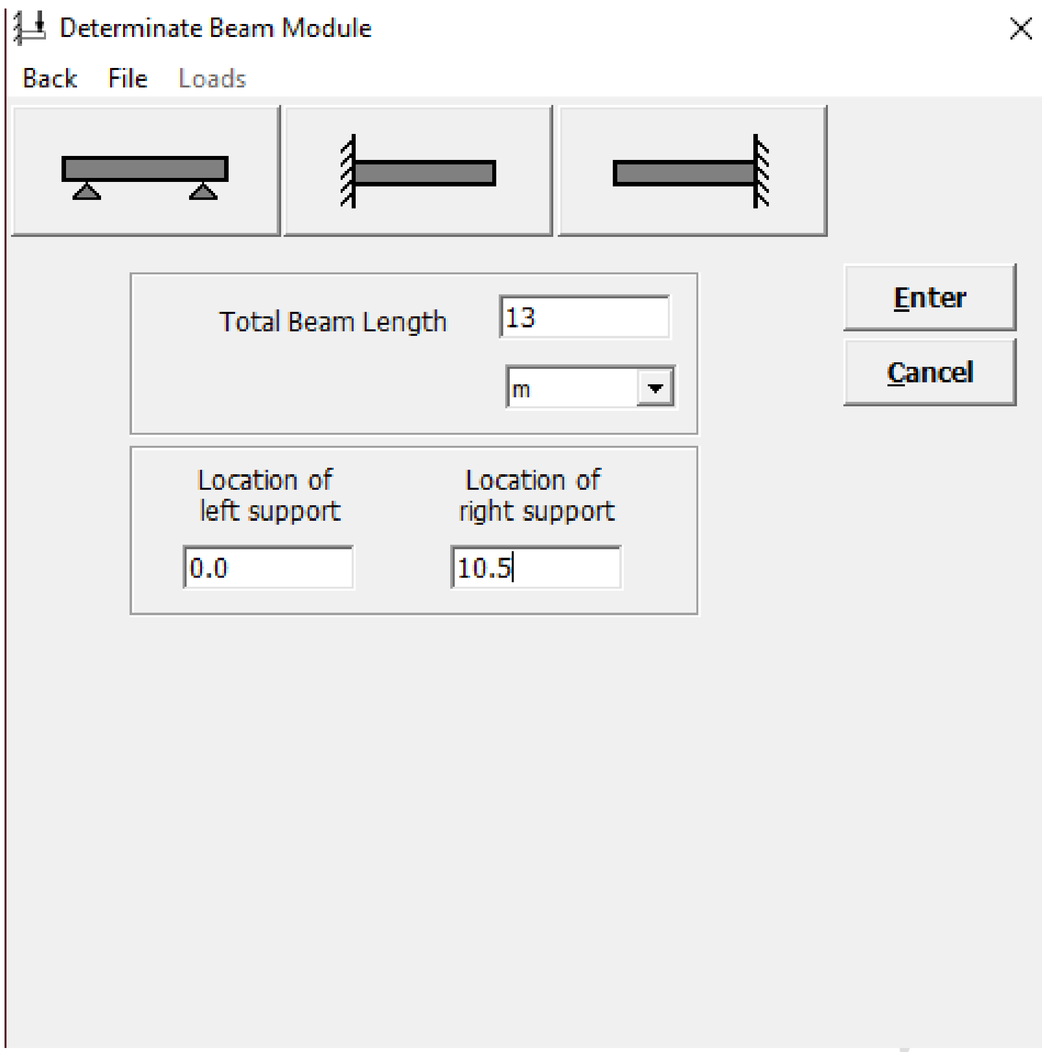
$$\underline{y = 8.0927\,[mm]}$$

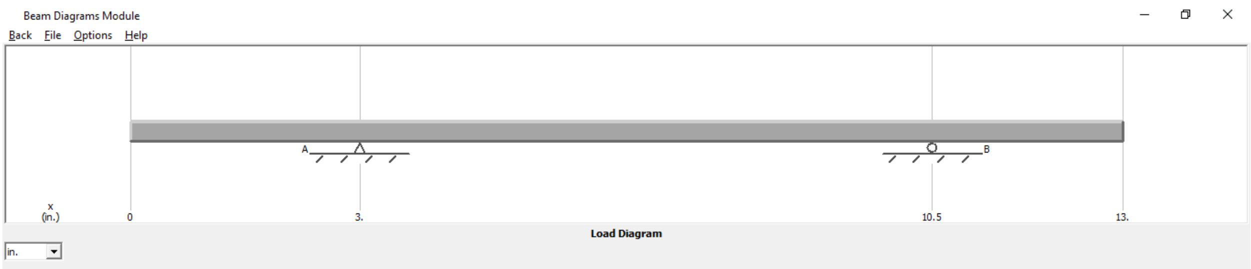
COMPROBACIÓN MÉTODO MDSolids:



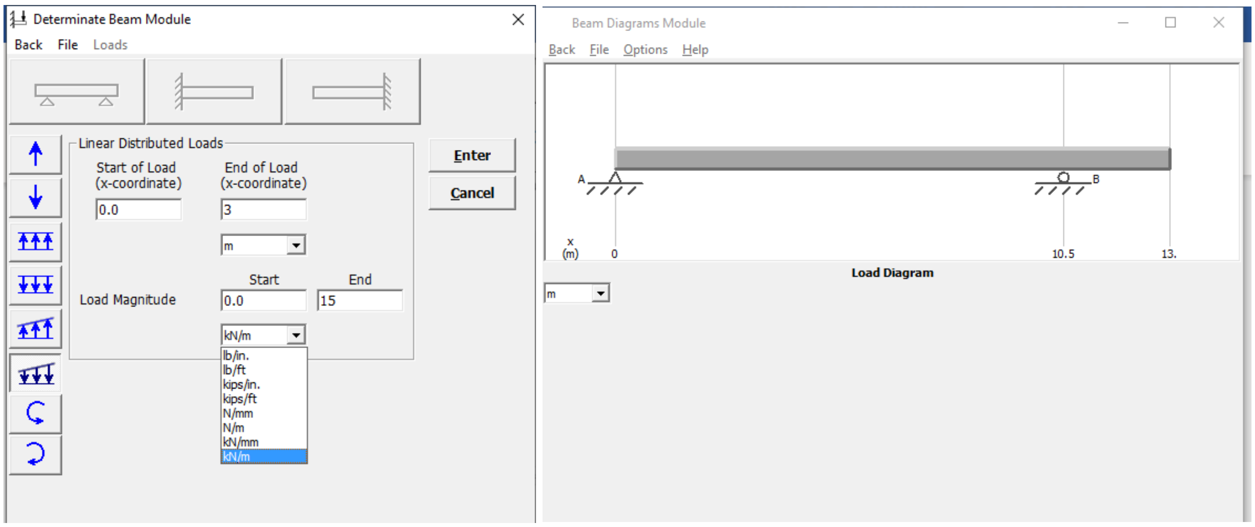


En este punto le indico al software de MDSolids donde están los apoyos del sistema:

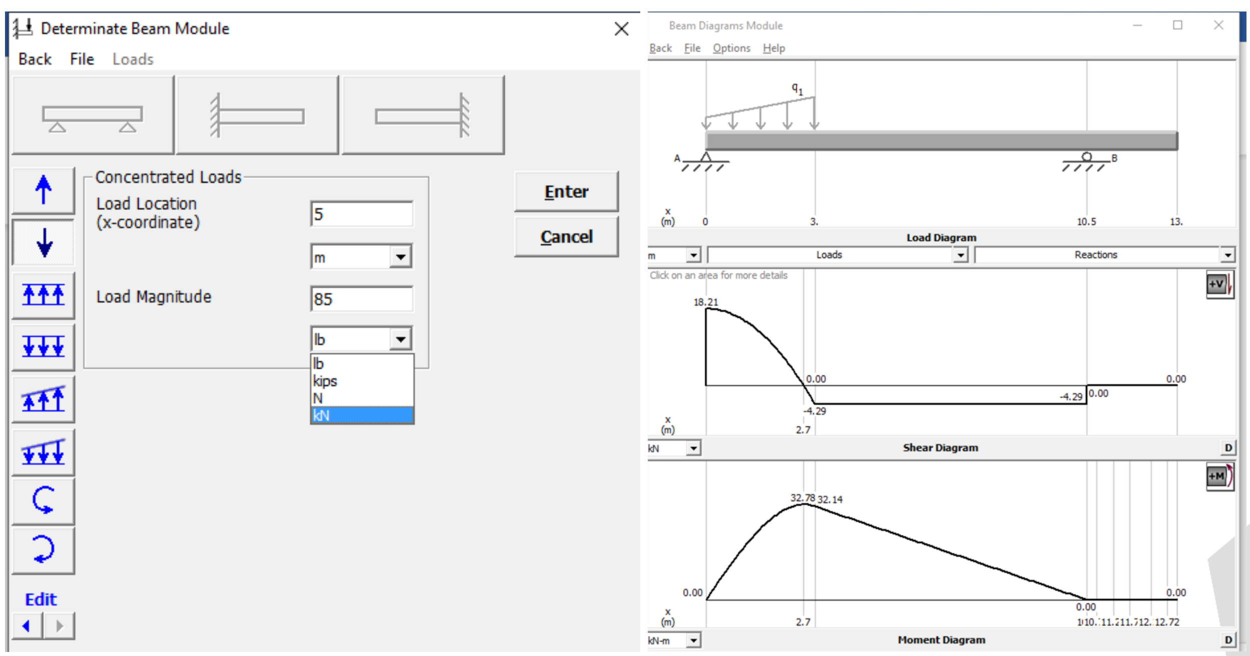




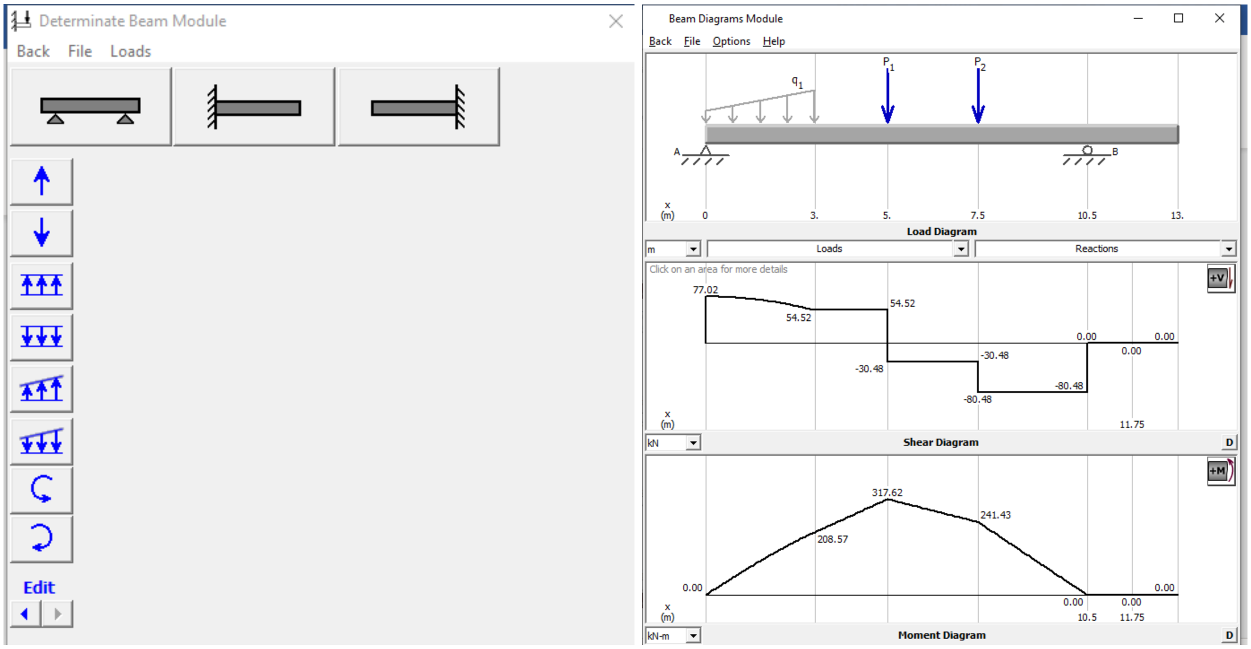
Beam Diagrams Module
Back File Options Help
A
B
x
(in.)
0
3.
10.5
13.
Load Diagram
in.

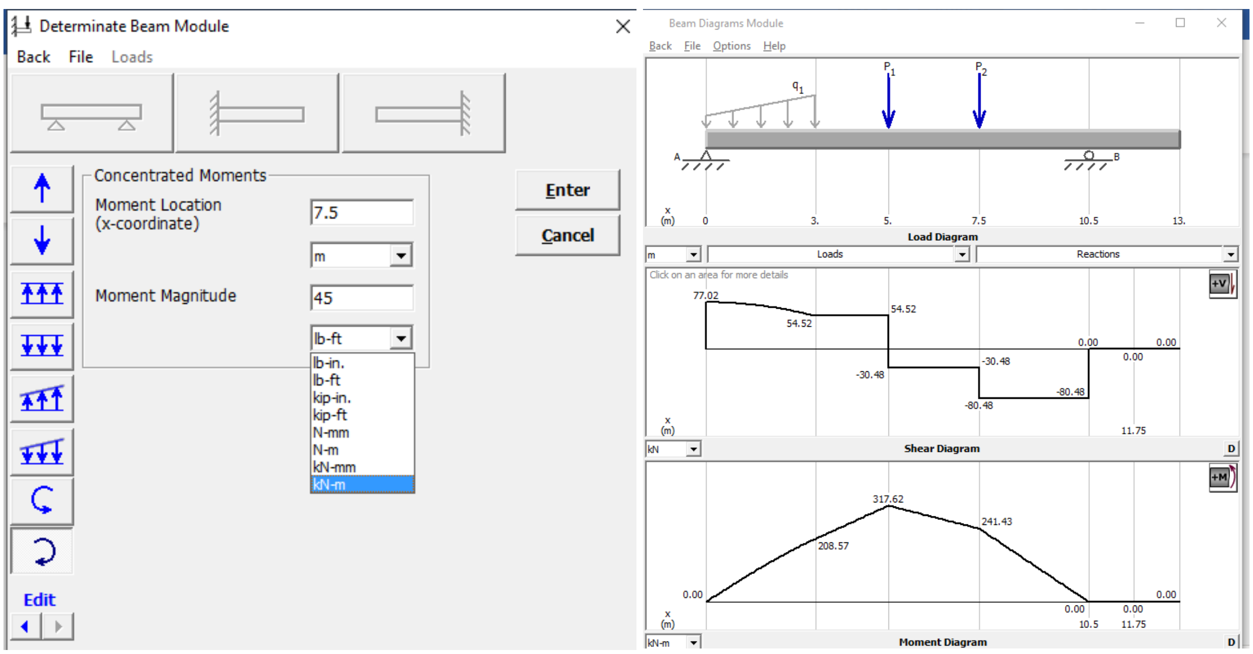


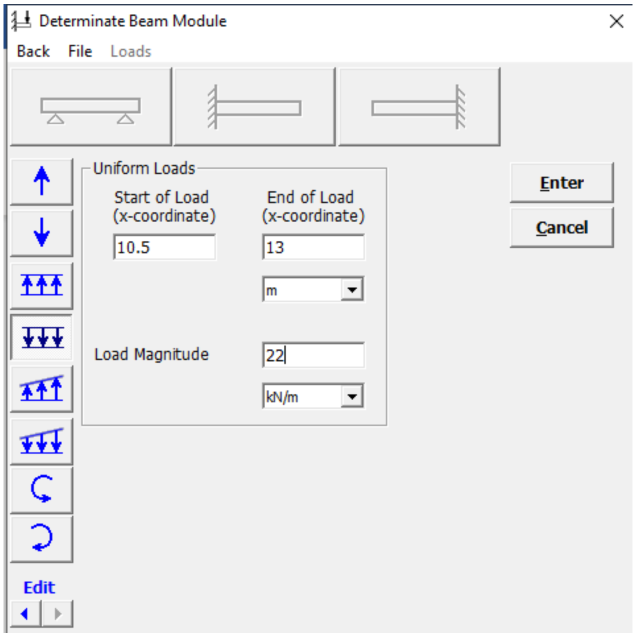
Determinate Beam Module
Back File Loads
Linear Distributed Loads
Start of Load
(x-coordinate)
End of Load
(x-coordinate)
0.0
3
m
Start
End
Load Magnitude
0.0
15
kN/m
lb/in.
lb/ft
kips/in.
kips/ft
N/mm
N/m
kN/mm
kN/m
Enter
Cancel
Beam Diagrams Module
Back File Options Help
A
B
x
(m)
0
10.5
13.
Load Diagram
m

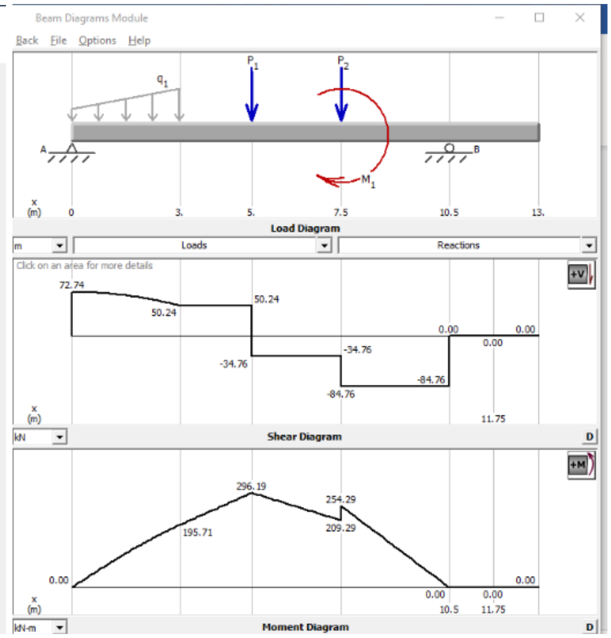


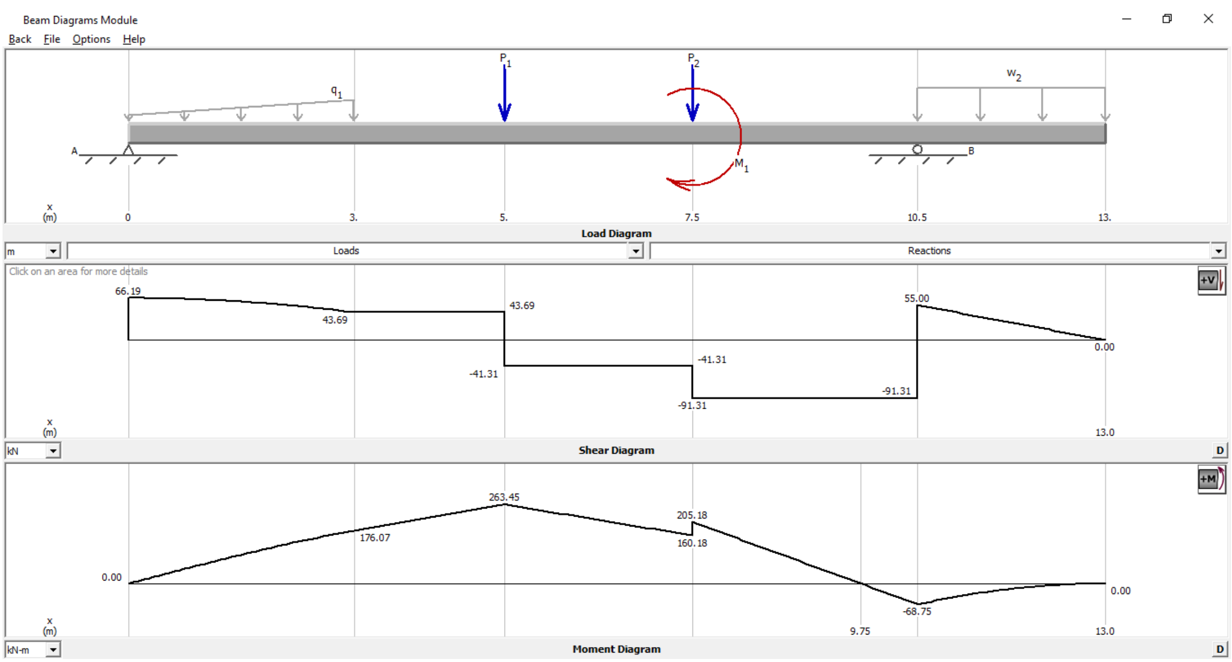
Determinate Beam Module
Back File Loads
Concentrated Loads
Load Location
(x-coordinate)
5
m
Load Magnitude
85
lb
lb
kips
N
kN
Enter
Cancel
Edit
Beam Diagrams Module
Back File Options Help
A
B
x
(m)
0
3.
10.5
13.
Load Diagram
m
Loads
Reactions
Click on an area for more details
18.21
0.00
-4.29
-4.29
0.00
0.00
2.7
Shear Diagram
kN
32.78
32.14
0.00
0.00
0.00
2.7
Moment Diagram
kN-m


Determinate Beam Module
Back File Loads
Edit
Beam Diagrams Module
Back File Options Help
Load Diagram
Loads
Reactions
Click on an area for more details
Shear Diagram
Moment Diagram


Determinate Beam Module
Back File Loads
Concentrated Moments
Moment Location
(x-coordinate)
7.5
m
Moment Magnitude
45
lb-ft
lb-in.
lb-ft
kip-in.
kip-ft
N-mm
N-m
kN-mm
kN-m
Enter
Cancel
Edit
Beam Diagrams Module
Back File Options Help
Load Diagram
Shear Diagram
Moment Diagram

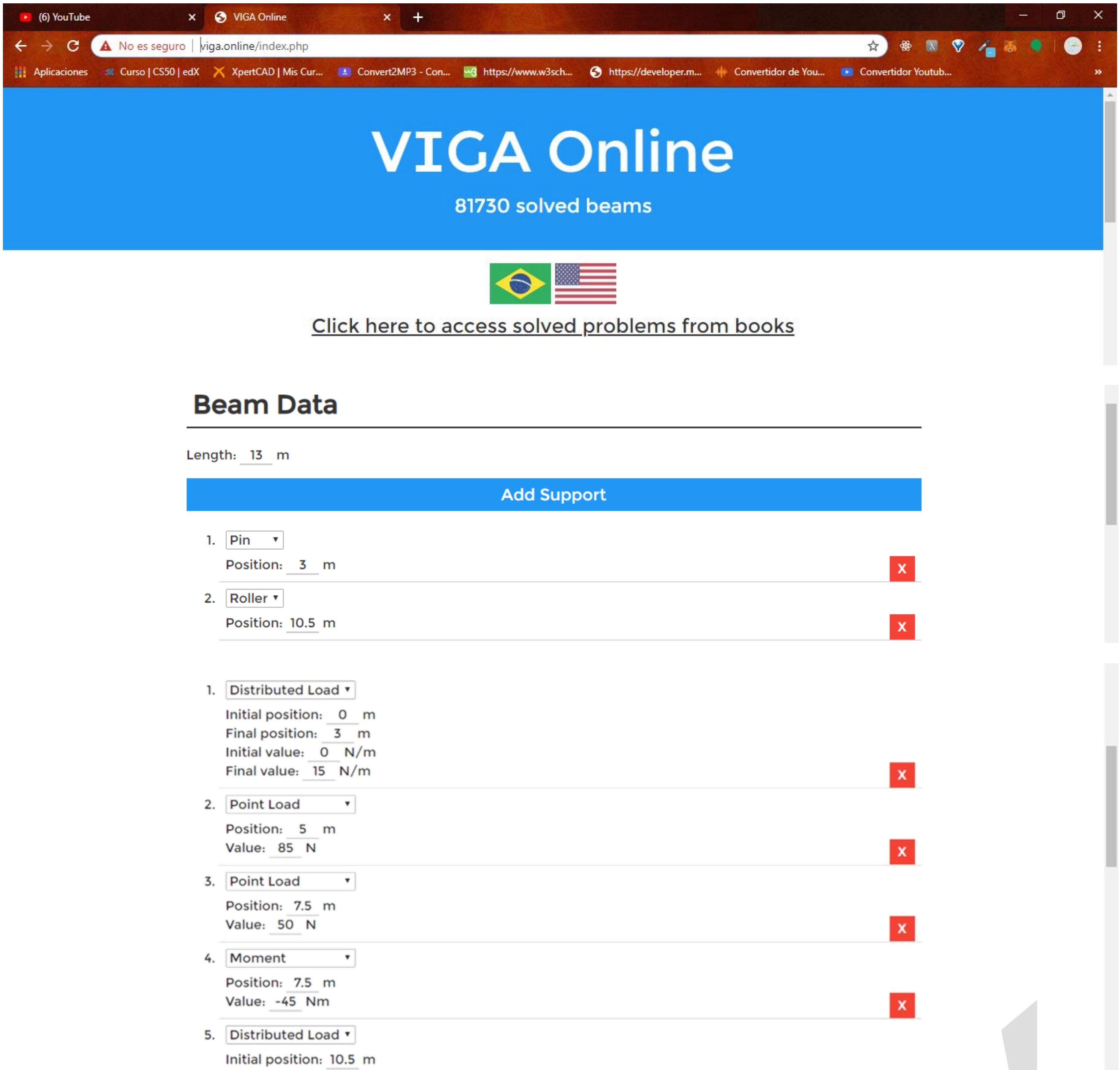

Determinate Beam Module
Back
File
Loads
Uniform Loads
Start of Load (x-coordinate)
End of Load (x-coordinate)
10.5
13
m
Load Magnitude
22
kN/m
Enter
Cancel
Edit


Beam Diagrams Module
Back
File
Options
Help
Load Diagram
Loads
Reactions
Click on an area for more details
72.74
50.24
50.24
-34.76
-34.76
-84.76
-84.76
0.00
0.00
0.00
11.75
Shear Diagram
296.19
254.29
209.29
195.71
0.00
0.00
0.00
0.00
10.5
11.75
Moment Diagram


Beam Diagrams Module
Back
File
Options
Help
Load Diagram
Loads
Reactions
Click on an area for more details
66.19
43.69
43.69
-41.31
-41.31
-91.31
-91.31
55.00
0.00
13.0
Shear Diagram
263.45
205.18
160.18
176.07
0.00
-68.75
0.00
9.75
13.0
Moment Diagram

COMPROBACIÓN MÉTODO Viga Online:

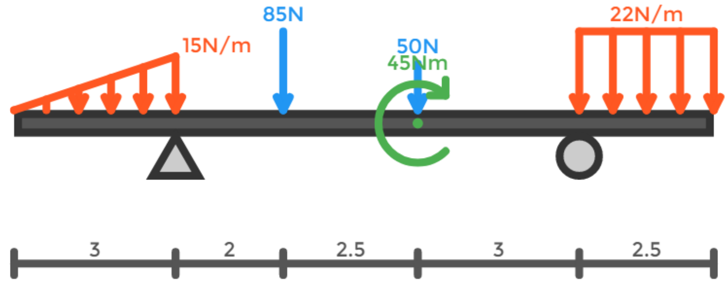
http://www.viga.online/index.php



Final position: 13 m
Initial value: 22 N/m
Final value: 22 N/m

X

Clear

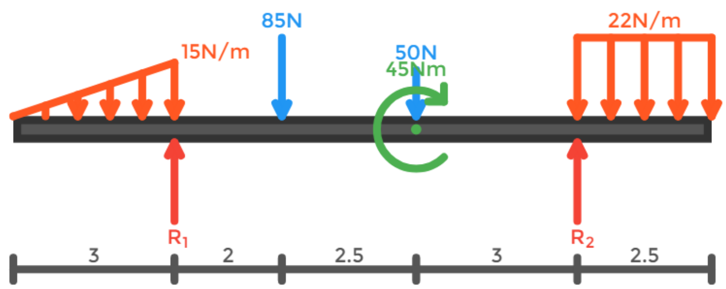


Solve Beam

Beam's link: viga.online/#L(13):P(3)R(10.5):W(0,3,0,15)F(5,85)F(7.5,50)M(7.5,-45)W(10.5,13,22,22)

Calculating Reactions

To find the reactions at the supports, we need to verify the equilibrium of vertical forces, to ensure that the beam is not going to move up or down, and the moment equilibrium, to ensure that the beam is not going to spin. The free body diagram of the beam is:



Therefore, calculating the vertical forces equilbrium, one finds that:

$$\sum F_y = 0 \rightarrow W_1 + F_2 + F_3 + W_5 - R_1 - R_2 = 0$$

Where: R represents the reactions; F represents point loads; W represent the total force caused by a distributed load. To find this total force, you calculate the area below the distributed load, so:

$$\text{Load 1, increasing triangle: } W_1 = \frac{w_f}{2}(x_f - x_i) = \frac{15}{2}[(3) - (0)] = 22.5\text{N}$$

$$\text{Load 5, rectangular: } W_5 = w(x_f - x_i) = 22[(13) - (10.5)] = 55\text{N}$$

Where x_i and x_f represent initial and final load application position and w_i and w_f, the initial and final values, in N/m. Therefore, by substituting the numerical values, we find:

$$R_1 + R_2 = 212.5\text{N}$$

By solving the moment equilibrium in the first support, we will find:

$$\sum M = 0 \rightarrow R_2(x_{\text{support 2}} - x_{\text{support 1}}) - W_1(\bar{x}_{\text{load 1}} - x_{\text{support 1}}) - F_2(x_{\text{load 2}} - x_{\text{support 1}})$$
$$- F_3(x_{\text{load 3}} - x_{\text{support 1}}) + M_4 - W_5(\bar{x}_{\text{load 5}} - x_{\text{support 1}}) = 0$$

Where $\bar{x}$ is the equivalent application position of the distributed load, which is the centroid of the geometry, calculated as:

$$\text{Load 1, increasing triangle: } \bar{x} = \frac{x_i + 2x_f}{3} = \frac{0 + 2(3)}{3} = 2\text{m}$$

$$\text{Load 5, rectangular: } \bar{x} = \frac{x_i + x_f}{2} = \frac{10.5 + 13}{2} = 11.75\text{m}$$

By substituting the numerical values, we find:

$$R_2(10.5 - 3) = +(22.5)(2 - 3) + (85)(5 - 3) + (50)(7.5 - 3) - (-45) + (55)(11.75 - 3) \rightarrow 7.5R_2 = 898.75\text{N}$$

From both equations, we find the following system:

$$R_1 + R_2 = 212.5\text{N}$$
$$7.5R_2 = 898.75\text{N}$$

Solving the system, we find that:

$$R_1 = 92.6667\text{N}$$
$$R_2 = 119.8333\text{N}$$

Calculating Shear Force

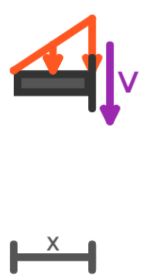
To find the equation for shear force, we need to solve the equilibrium of vertical forces in each section (that spans from 0 to x), so:

$$\sum F_y + V(x) = 0$$

Where $V(x)$ is the value of the shear force at the x position.

Section 1 $(0 \leq x \leq 3)$

Solving the equilibrium of forces at the section:



$$W_{1x} + V(x) = 0$$

Where W_{1x} represents the distributed load applied only until x position, and not the complete load, calculated as:

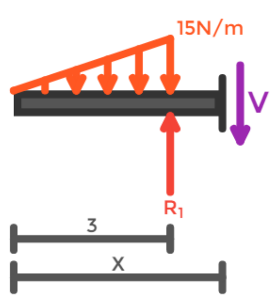
$$\text{Load 1, increasing triangle: } W_{1x} = \frac{w_f}{2(x_f - x_i)}(x - x_i)^2 = 2.5x^2 - 0x - 0$$

By substituting the numerical values, we find:

$$V(x) = -2.5x^2$$

Section 2 $(3 \leq x \leq 5)$

Solving the equilibrium of forces at the section:



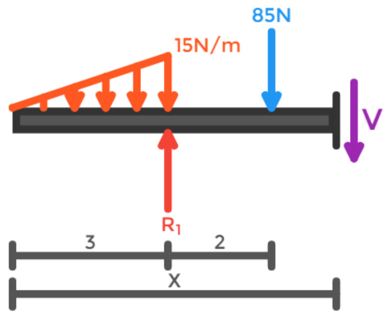
$$W_1 - R_1 + V(x) = 0$$

By substituting the numerical values, we find:

$$V(x) = 70.1667$$

Section 3 $(5 \leq x \leq 7.5)$

Solving the equilibrium of forces at the section:



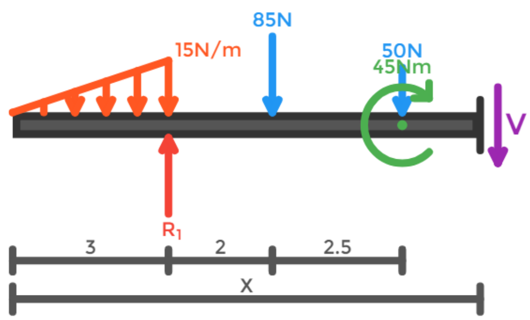
$$W_1 + F_2 - R_1 + V(x) = 0$$

By substituting the numerical values, we find:

$$V(x) = -14.8333$$

Section 4 $(7.5 \leq x \leq 10.5)$

Solving the equilibrium of forces at the section:



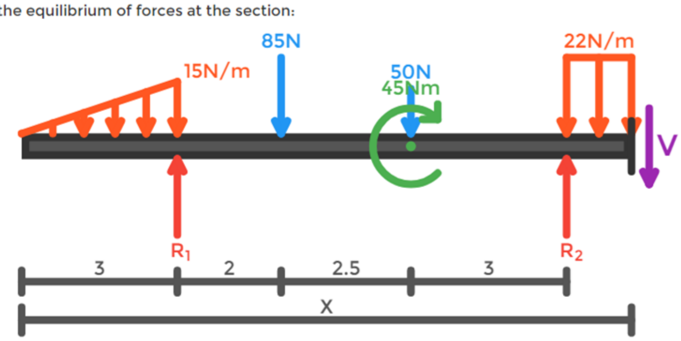
$$W_1 + F_2 + F_3 - R_1 + V(x) = 0$$

By substituting the numerical values, we find:

$$V(x) = -64.8333$$

Section 5 $(10.5 \leq x \leq 13)$

Solving the equilibrium of forces at the section:



$$W_1 + F_2 + F_3 + W_{5x} - R_1 - R_2 + V(x) = 0$$

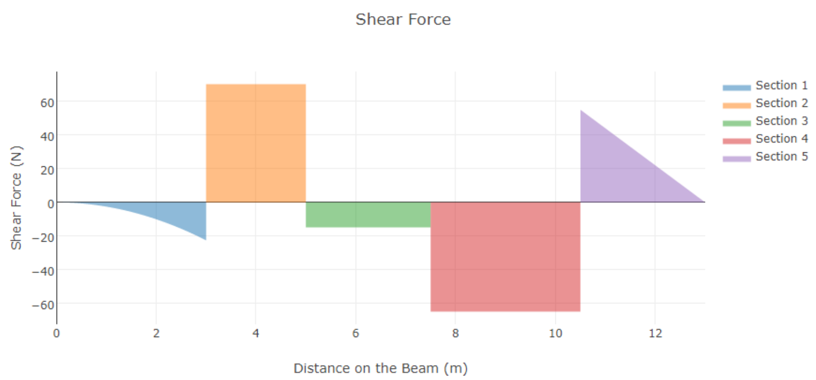
Where W_{5x} represents the distributed load applied only until x position, and not the complete load, calculated as:

$$\text{Load 5, rectangular: } W_{5x} = w(x - x_i) = 22x - 231$$

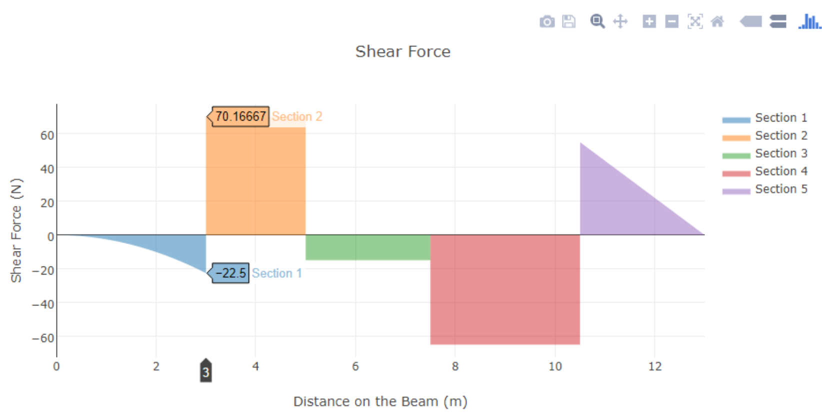
By substituting the numerical values, we find:

$$V(x) = -22x + 286$$

Diagram



Diagram



Lo cool es que nos muestra las ecuaciones y si pongo el mouse encima de la gráfica me muestra los valores punto a punto.

Solo que el diagrama está al revés porque usa el método de Euler-Timochenco que solo cambia el signo osea el sentido de la gráfica, pero los valores son iguales.

Calculating Bending Moment

To find the equation for bending, we need to solve the equilibrium of moments in each section (that spans from 0 to x), so:

$$\sum F_y(x - x_{load}) + \sum M + M(x) = 0$$

Where $M(x)$ is the value of the bending moment at the x position.

Section 1 $(0 \leq x \leq 3)$

Solving the moment equilibrium at the section:

$$W_{1x}(x - \bar{x}_{\text{load 1}}) + M(x) = 0$$

Where $W_{1x}(x - \bar{x})$ represents the equivalent moment caused by the distributed load applied only until x position, and not the complete load, calculated as:

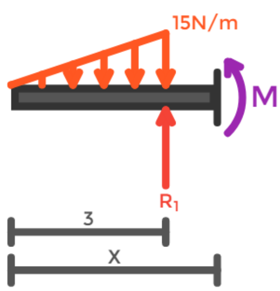
$$\text{Load 1, increasing triangle: } W_{1x}(x - \bar{x}_{\text{load 1}}) = \frac{w_f}{6(x_f - x_i)}(x - x_i)^3 = 0.8333x^3 - 0x^2 - 0x - 0$$

By substituting the numerical values, we find:

$$M(x) = -0.8333x^3$$

Section 2 $(3 \leq x \leq 5)$

Solving the moment equilibrium at the section:



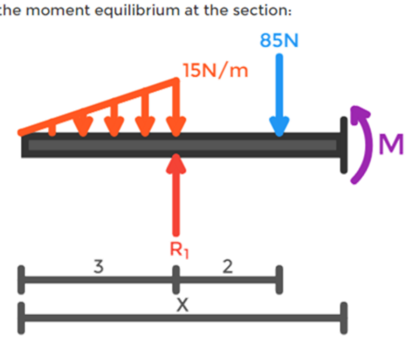
$$W_1(x - \bar{x}_{\text{load 1}}) - R_1(x - x_{\text{support 1}}) + M(x) = 0$$

By substituting the numerical values, we find:

$$M(x) = 70.1667x - 233$$

Section 3 $(5 \leq x \leq 7.5)$

Solving the moment equilibrium at the section:



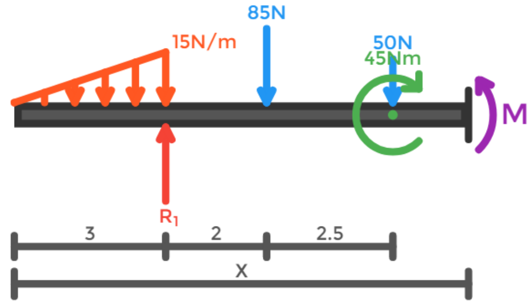
$$W_1(x - \bar{x}_{\text{load 1}}) + F_2(x - x_{\text{load 2}}) - R_1(x - x_{\text{support 1}}) + M(x) = 0$$

By substituting the numerical values, we find:

$$M(x) = -14.8333x + 192$$

Section 4 $(7.5 \le x \le 10.5)$

Solving the moment equilibrium at the section:



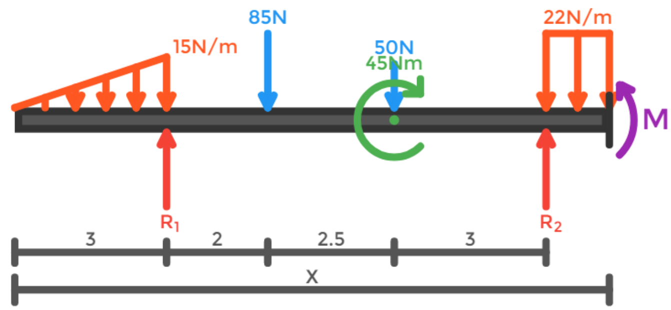
$$W_1(x - \bar{x}_{\text{load }1}) + F_2(x - x_{\text{load }2}) + F_3(x - x_{\text{load }3}) + M_4 - R_1(x - x_{\text{support }1}) + M(x) = 0$$

By substituting the numerical values, we find:

$$M(x) = -64.8333x + 612$$

Section 5 $(10.5 \le x \le 13)$

Solving the moment equilibrium at the section:



$$W_1(x - \bar{x}_{\text{load }1}) + F_2(x - x_{\text{load }2}) + F_3(x - x_{\text{load }3}) + M_4 + W_{5x}(x - \bar{x}_{\text{load }5}) - R_1(x - x_{\text{support }1}) - R_2(x - x_{\text{support }2}) + M(x) = 0$$

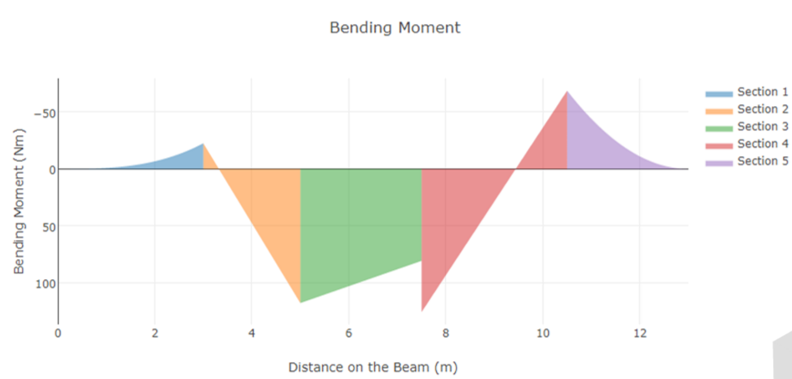
Where $W_{5x}(x - \bar{x})$ represents the equivalent moment caused by the distributed load applied only until x position, and not the complete load, calculated as:

$$\text{Load 5, rectangular: } W_{5x}(x - \bar{x}_{\text{load }5}) = \frac{w}{2}(x - x_i)^2 = 11x^2 - 231x + 1212.75$$

By substituting the numerical values, we find:

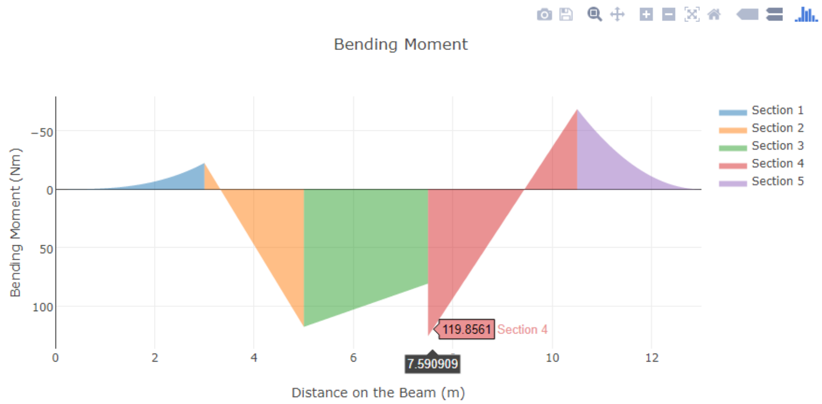
$$M(x) = -11x^2 + 286x - 1859$$

Diagram



Beam's link: viga.online/#L(13):P(3)R(10.5):W(0,3,0,15)F(5,85)F(7.5,50)M(7.5,-45)W(10.5,13,22,22)

Diagram



Beam's link: viga.online/#L(13):P(3)R(10.5):W(0,3,0,15)F(5,85)F(7.5,50)M(7.5,-45)W(10.5,13,22,22)

Lo útil de usar esta herramienta es que nos muestra las ecuaciones para llegar a los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante, y además si pongo el mouse encima de la gráfica se me muestra sus valores punto a punto.

El diagrama está al revés porque usa el método de Euler-Timochenko que solo cambia el signo osea el sentido de la gráfica, pero los valores son iguales.