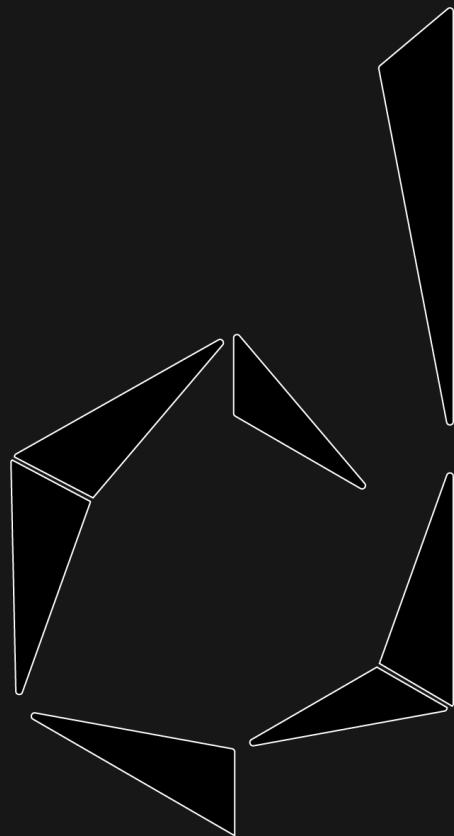


# INGENIERÍA MECATRÓNICA



## DI\_CERO

DIEGO CERVANTES RODRÍGUEZ

INGENIERÍA ASISTIDA POR COMPUTADORA

COMSOL MULTIPHYSICS 5.6

9: Impacto Estático y  
Dinámico en una Viga

## Contenido

OBJETIVOS:.....	2
INTRODUCCIÓN TEÓRICA:.....	2
DESCRIPCIÓN DEL PROBLEMA: .....	2
CREACIÓN DE LA PIEZA EN COMSOL:.....	3
ANÁLISIS MECÁNICO EN COMSOL: .....	8
RESULTADO DEL ELEMENTO FINITO EN COMSOL: .....	11
CONCLUSIÓN:.....	18
ERROR: .....	18
BIBLIOGRAFÍA:.....	18
MÉTODO ANALÍTICO:.....	19



## OBJETIVOS:

Se examinará el esfuerzo creado en una viga modelada en 3D con una carga dinámica aplicada, donde se deja caer cierto peso desde una altura por lo que es un análisis de impacto que se hace por medio de la consideración de su energía potencial solamente debido a que se deja simplemente caer el peso desde una posición inicial sin movimiento por lo que su energía cinética es igual a cero.

La viga será simulada en COMSOL 5.3a para comprobar los cálculos hechos en el método analítico.

## INTRODUCCIÓN TEÓRICA:

Se aplica una carga dinámica en un tubo hueco que está fijo de un lado, esto es igual a hacer el análisis de una viga en cantiléver, por lo que el esfuerzo generado en la viga será un esfuerzo normal, si queremos encontrar este esfuerzo debemos apoyarnos de la ecuación de la elástica para poder encontrar la carga máxima y con ésta encontrar la deflexión máxima y el esfuerzo cuando se aplica la carga dinámica, todo por medio de un análisis de energías.

$$E(Iz)y'' = E(Iz) \frac{d^2y}{dx^2} = M(x)$$

Ya habiendo encontrado la función  $M(x)$  dejando a la carga como una variable, se debe despejar para dejarla en función de  $Y$ , esa deflexión será la máxima y se denota como  $Ym$ .

Ahora consideramos la energía de deformación de la viga:

$$U = \frac{Pm(Ym)}{2}, \quad \text{esto si solo hay energía potencial almacenada}$$

El trabajo de deformación:

$$W = m(g)(h + Ym)$$

Y finalmente las igualamos para satisfacer el principio de conservación de la energía:

$$U = W$$

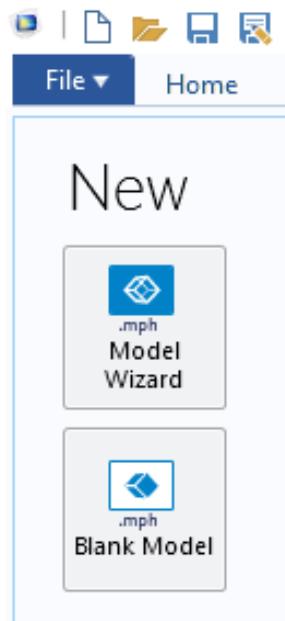
## DESCRIPCIÓN DEL PROBLEMA:

Una masa con  $m = 100$  kg se deja caer desde una altura de  $h = 0.5$  m, hacer el análisis dinámico y estático de la viga para ver que esfuerzos y deformaciones produce este impacto.

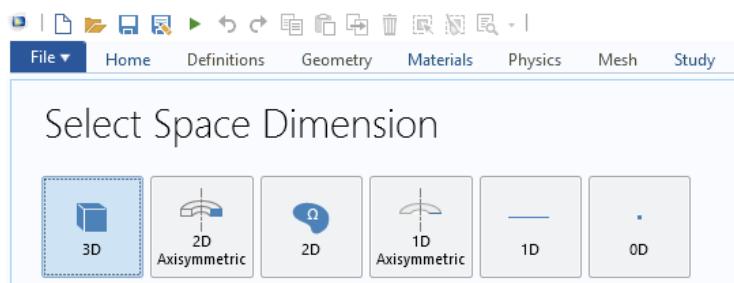
Se comprobarán los datos obtenidos haciendo el modelado de la estructura en COMSOL 5.3a.

# CREACIÓN DE LA PIEZA EN COMSOL:

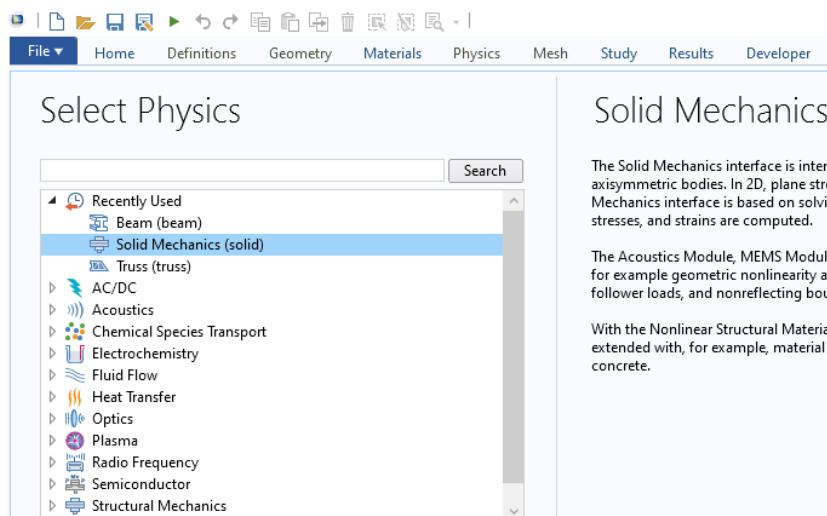
1) Software COMSOL → Model Wizard...



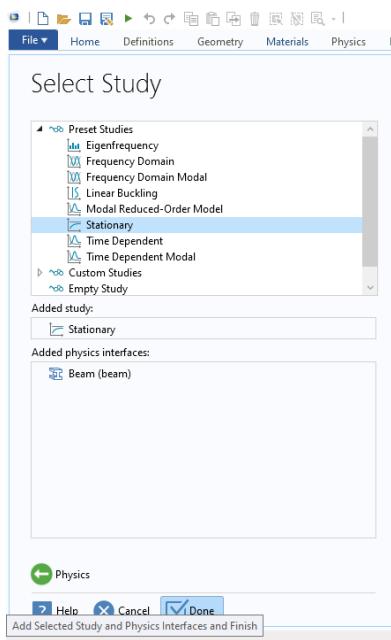
2) ... → 3D (estructura 3D) ...



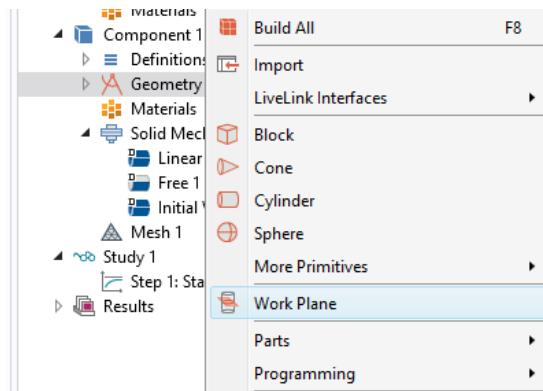
3) ... → Structural Mechanics → Solid Mechanics → Add...



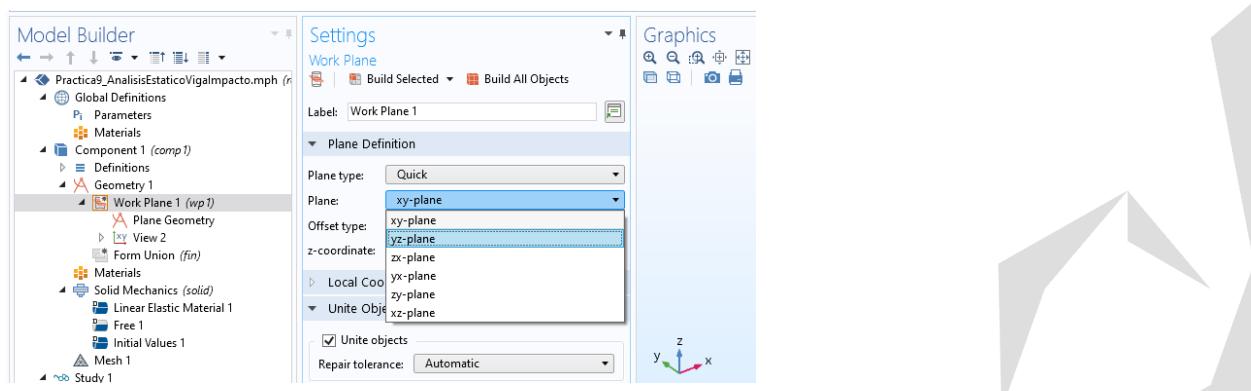
4) ... → Study → Preset Studies → Stationary → Done...



5) Clic derecho Geometry → Work Plane (para indicar el área de sección transversal en mi elemento 3D) ...

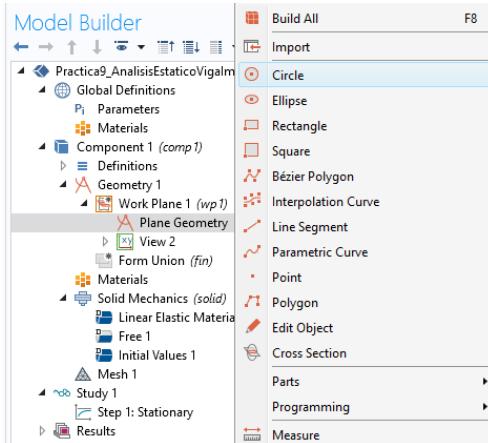


6) Geometry → Work Plane (para indicar el área de sección transversal en mi elemento 3D) → Plane Definition → Plane (para saber hacia qué dirección estará el área de sección transversal de la figura): → xy-plane, yz-plane, zx-plane, yx-plane, zy-plane, xz-plane...

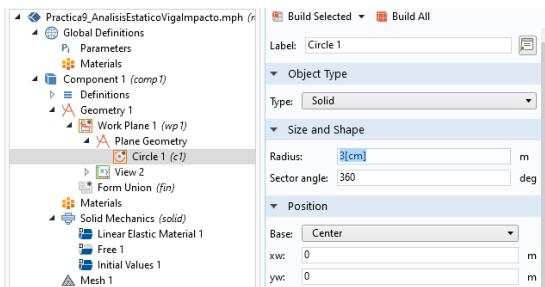


Quiero que mi área de sección transversal se encuentre en el plano  $yz$  y para que extruya mi figura 3D en  $x$  se cree mi viga en forma de tubo.

- 7) ... → Geometry → Work Plane → Plane Geometry → Elegir la figura del área de sección transversal de la figura → círculo, rectángulo, cuadrado, etc...

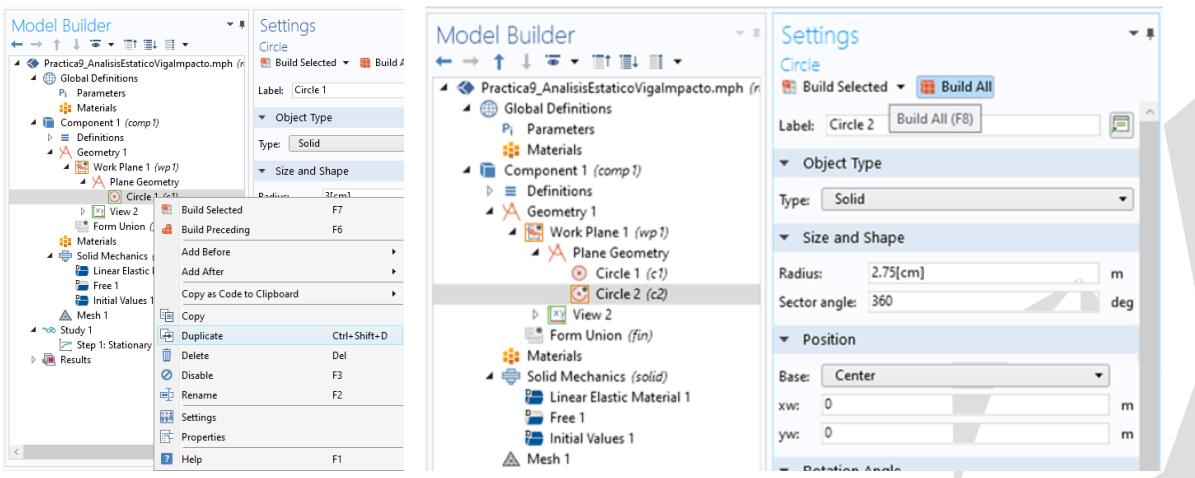


- 8) ... → Plane Geometry → Circle (figura del área de sección transversal) → Radius (dar dimensiones al perfil) → Sector angle (es para cuando mi círculo no estará completo, sino que solo se formará hasta cierto ángulo) → Base (fijar un punto base desde donde se formará la figura) → Build All...

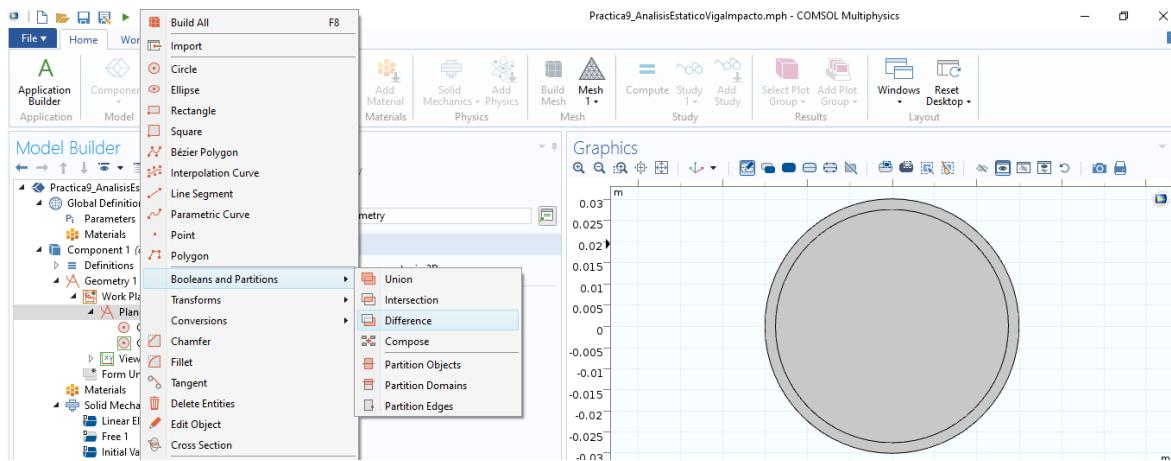


Si quiero usar una unidad que no sea la que está indicada en el Plane Geometry la debo poner entre corchetes, La unidad de dimensión de esta parte se elige desde Geometry.

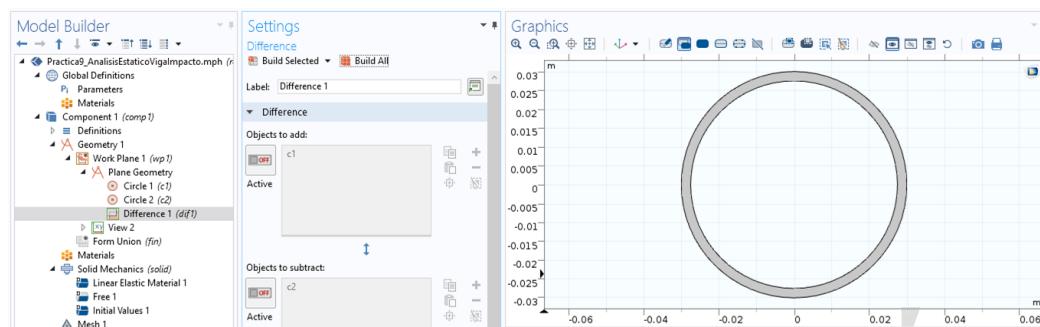
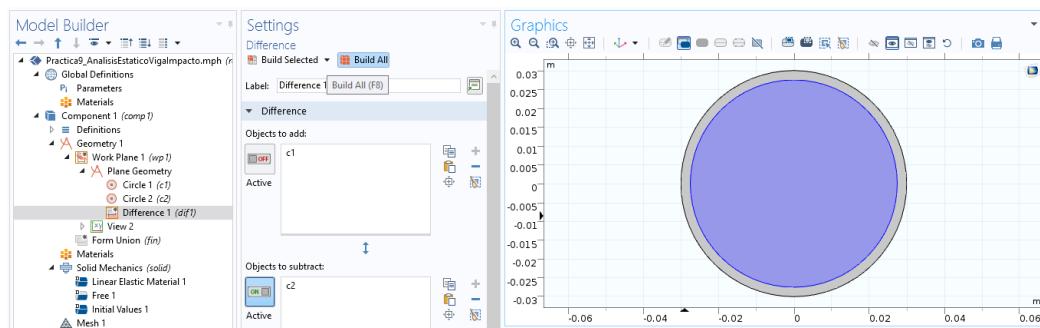
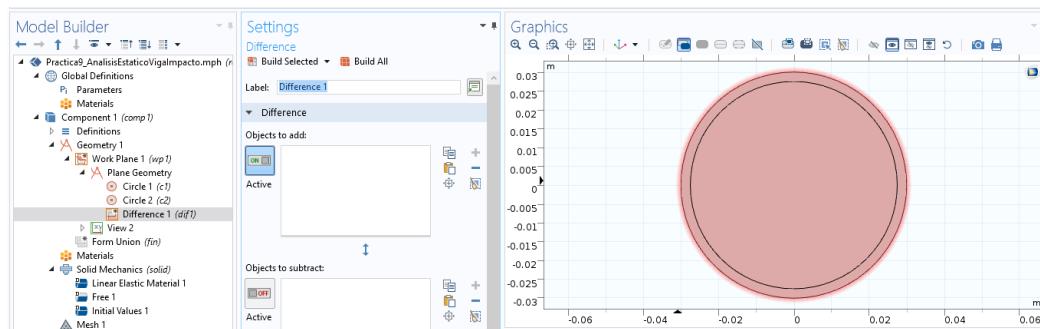
Debo repetir este proceso para crear el círculo que dará el radio interior de mi tubo.



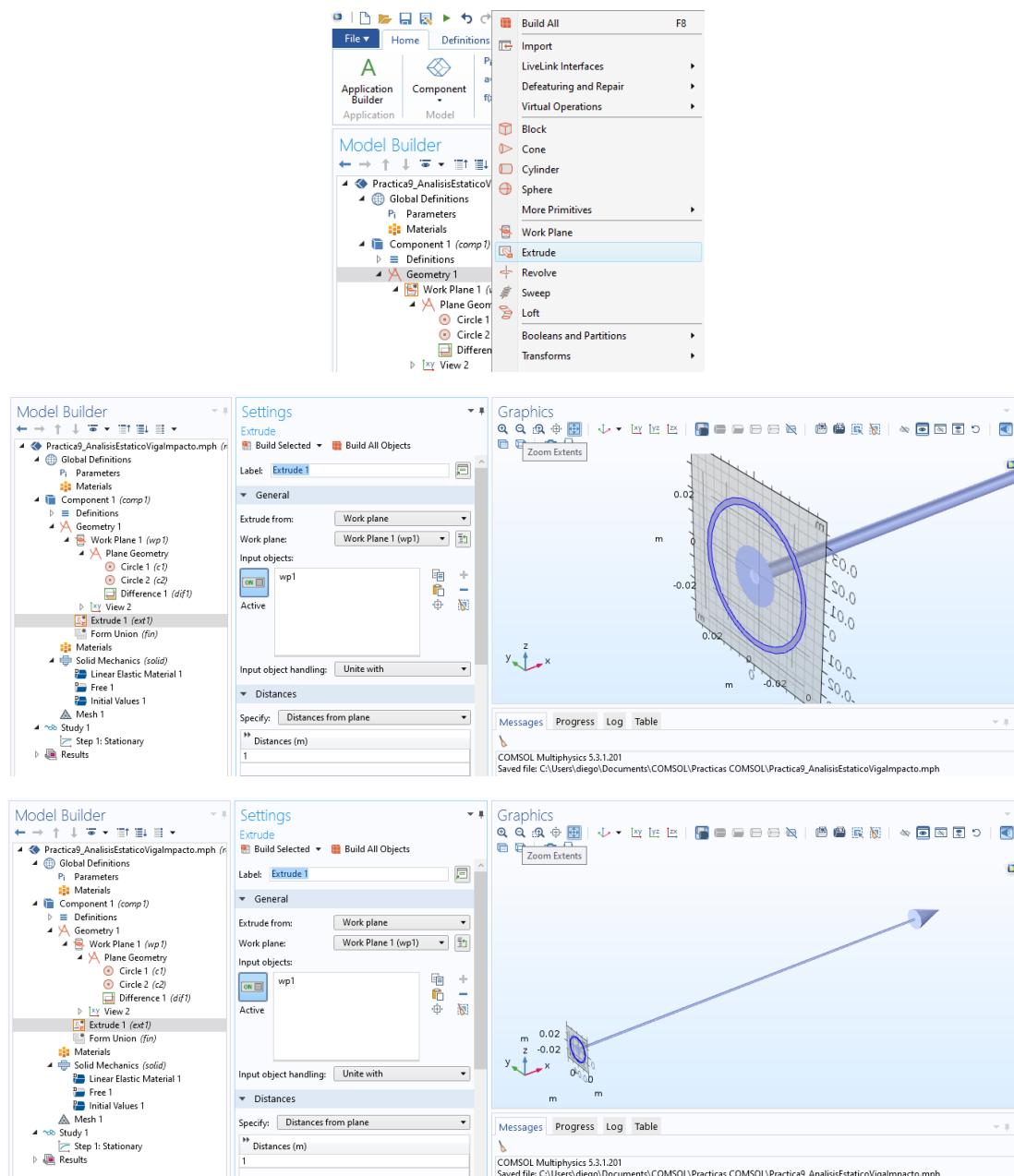
9) ... → Plane Geometry → Booleans and Partitions (Para extraer o unir dos áreas de sección transversal y así crear una figura compuesta) → Difference (Para extraer una figura de la otra) ...



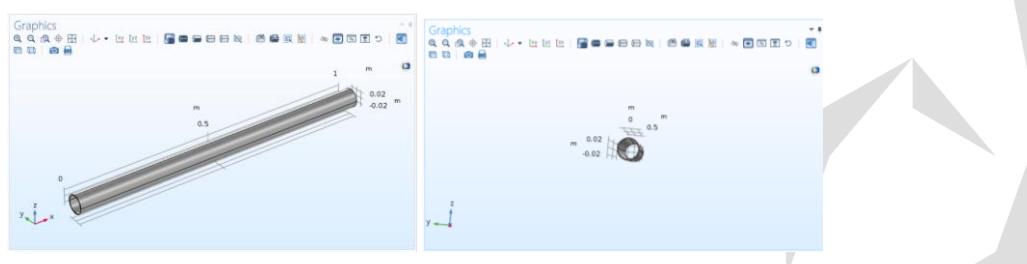
10) ...Difference → Objects to add (Seleccionar el área de sección transversal que sea parte de mi figura 3D) → Objects to subtract (Seleccionar el área de sección transversal que quiero remover de mi figura 3D) → Build All...



11) Geometry → Extrude (para extraer el área de sección transversal resultante del difference que acabo de aplicar) → Distances (Indicar cuánto voy a extruir mi figura) → Build All...

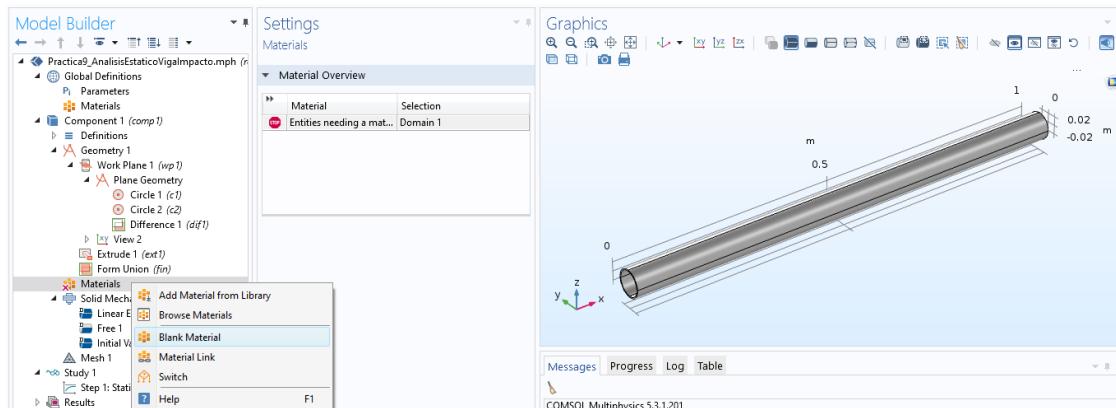


Quiero que lo extruya 1 metro en el eje x para crear la viga y como puedo ver el área de sección transversal si se encuentra en el plano yz.

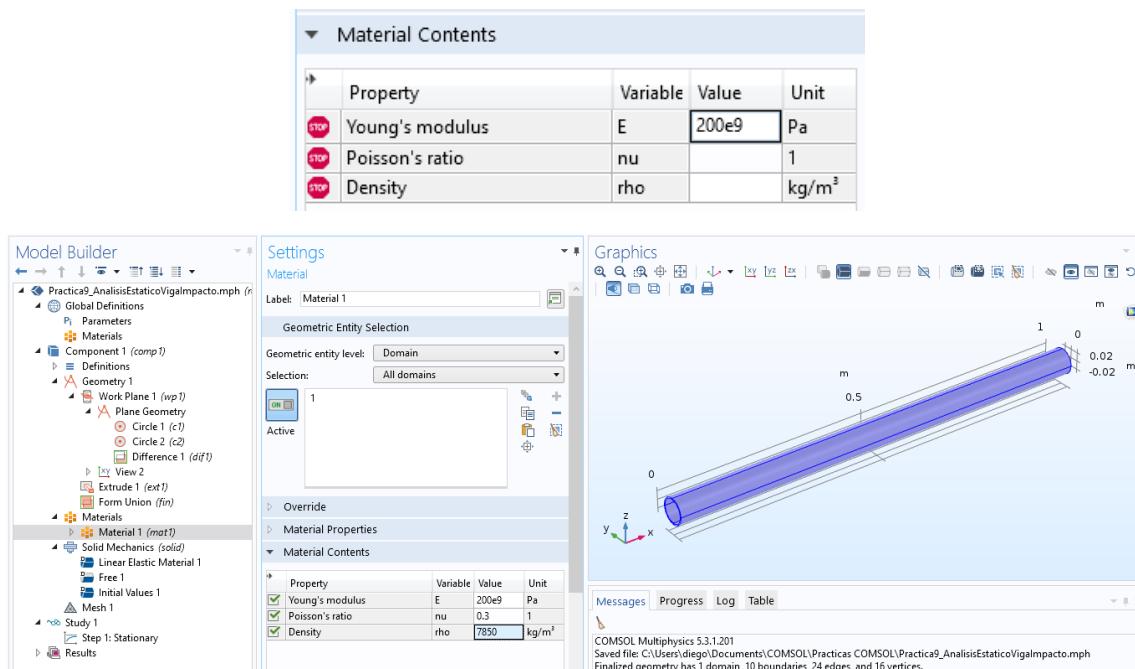


# ANÁLISIS MECÁNICO EN COMSOL:

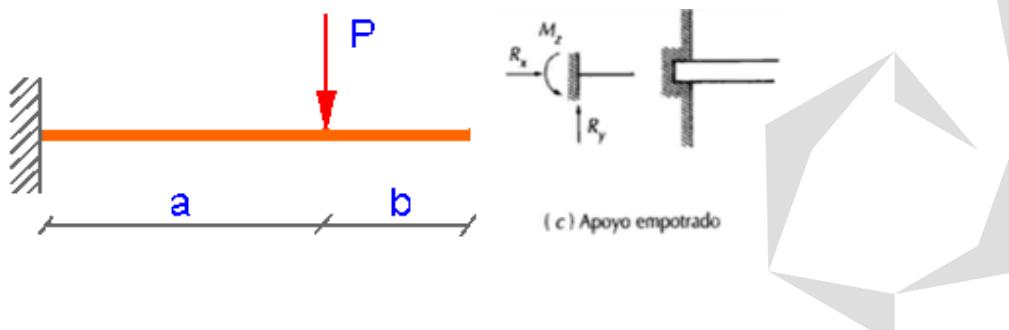
12) Añadir material → Clic derecho en Materials → Blank Material (para cuando quiero elegir un material que no se encuentre dentro de la librería de materiales de COMSOL) ...

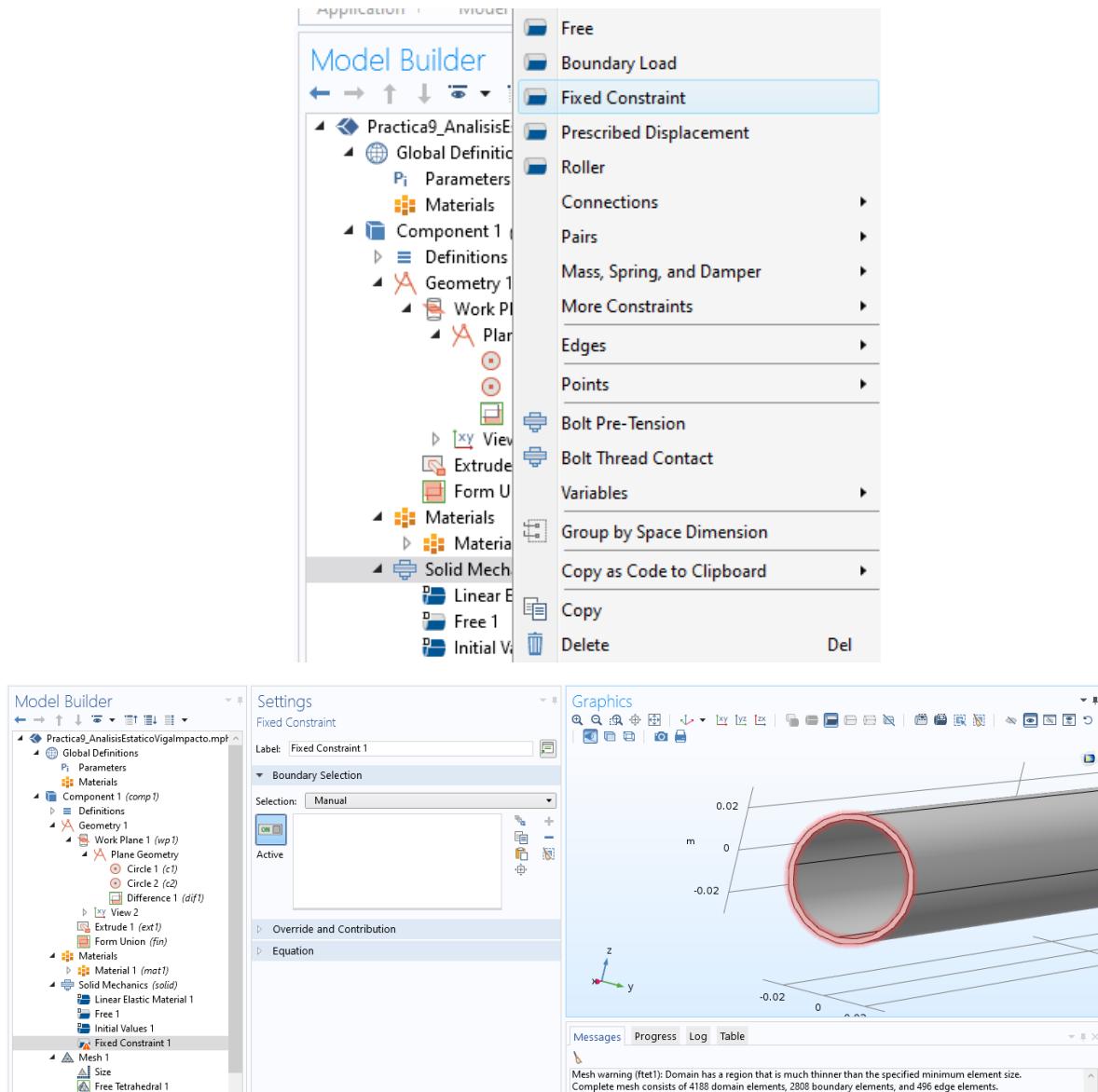


Se indica la constante de Poisson que vale 0.3, el módulo de elasticidad E y la densidad del material.

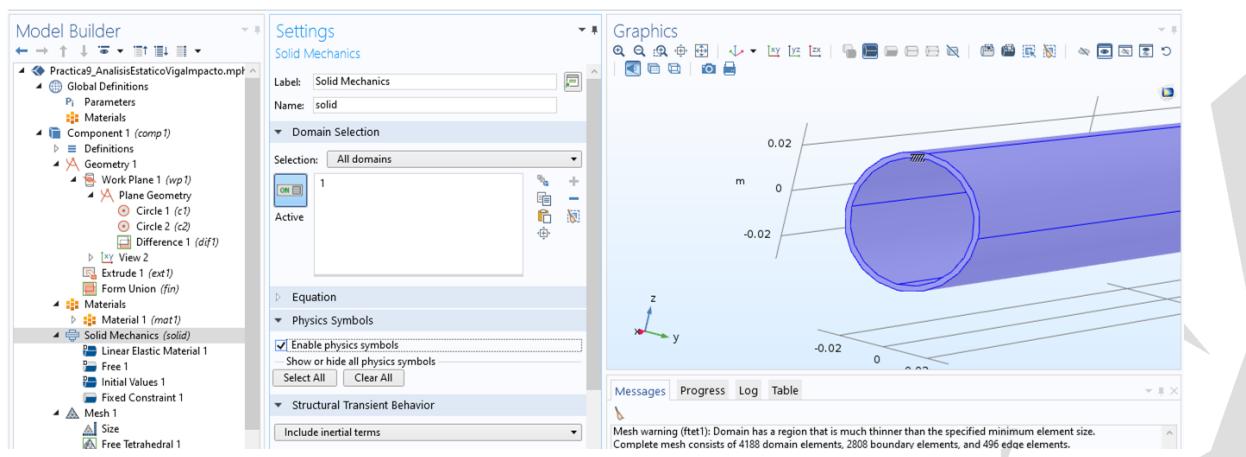


13) Clic Solid Mechanics → Fixed Constraint (Para agregar un apoyo fijo o empotrado que tendrá 3 reacciones como se muestra en la figura) → Seleccionar el punto donde se encuentra el apoyo fijo...

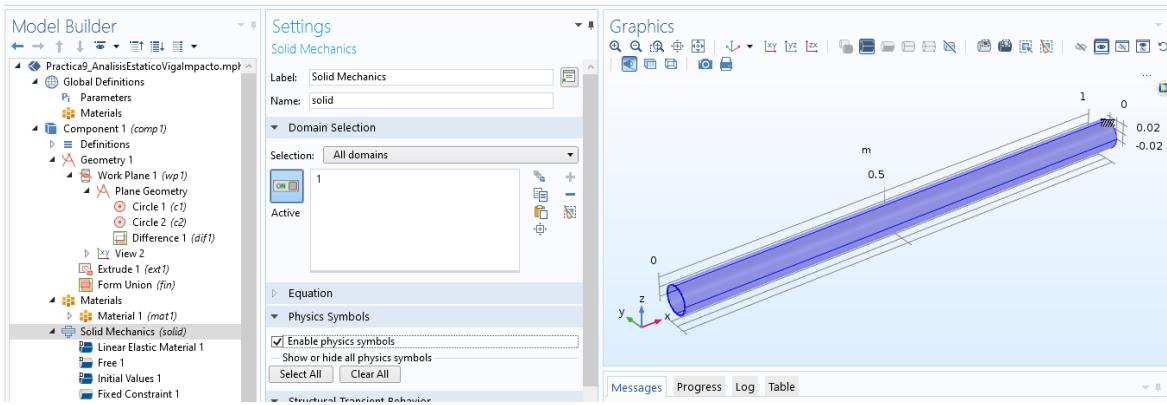




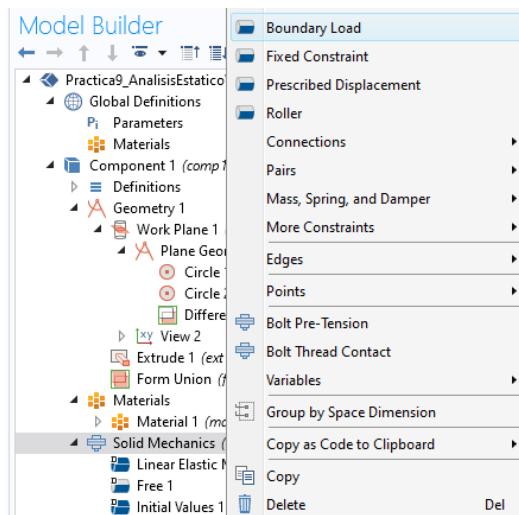
14) Solid Mechanics → dar clic en el checkbox de Enable physics symbols para que se puedan apreciar las cargas y apoyos en el área de trabajo...



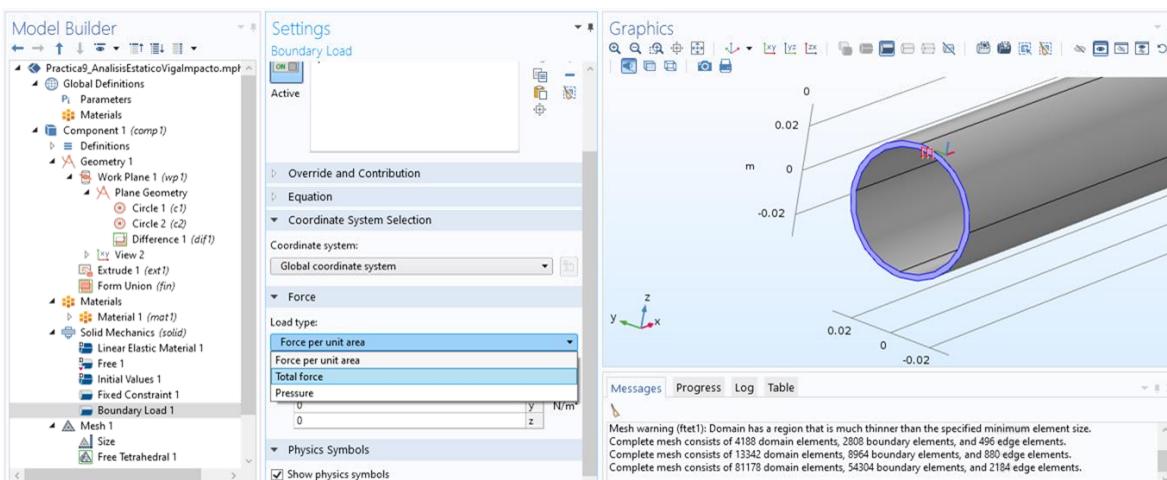
El empotramiento de la viga queda así:

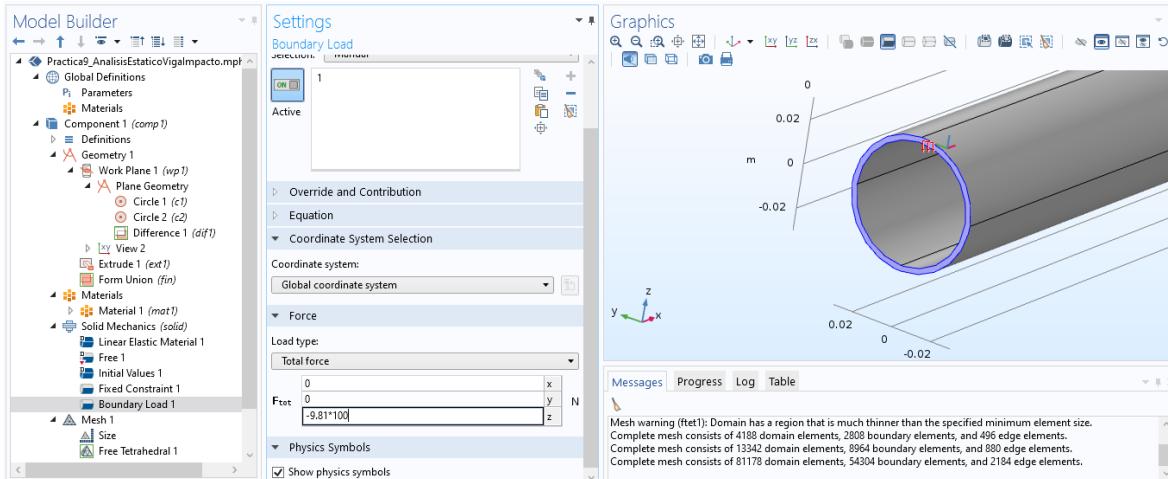


- 15) Solid Mechanics → Boundary Load (Para indicar las fuerzas externas puntuales aplicadas en la viga) → Seleccionar el punto de aplicación de la fuerza → Load Type → Total Force (para indicar fuerzas puntuales) → x (componente x de la fuerza) y (componente y de la fuerza) z (componente z de la fuerza) ...



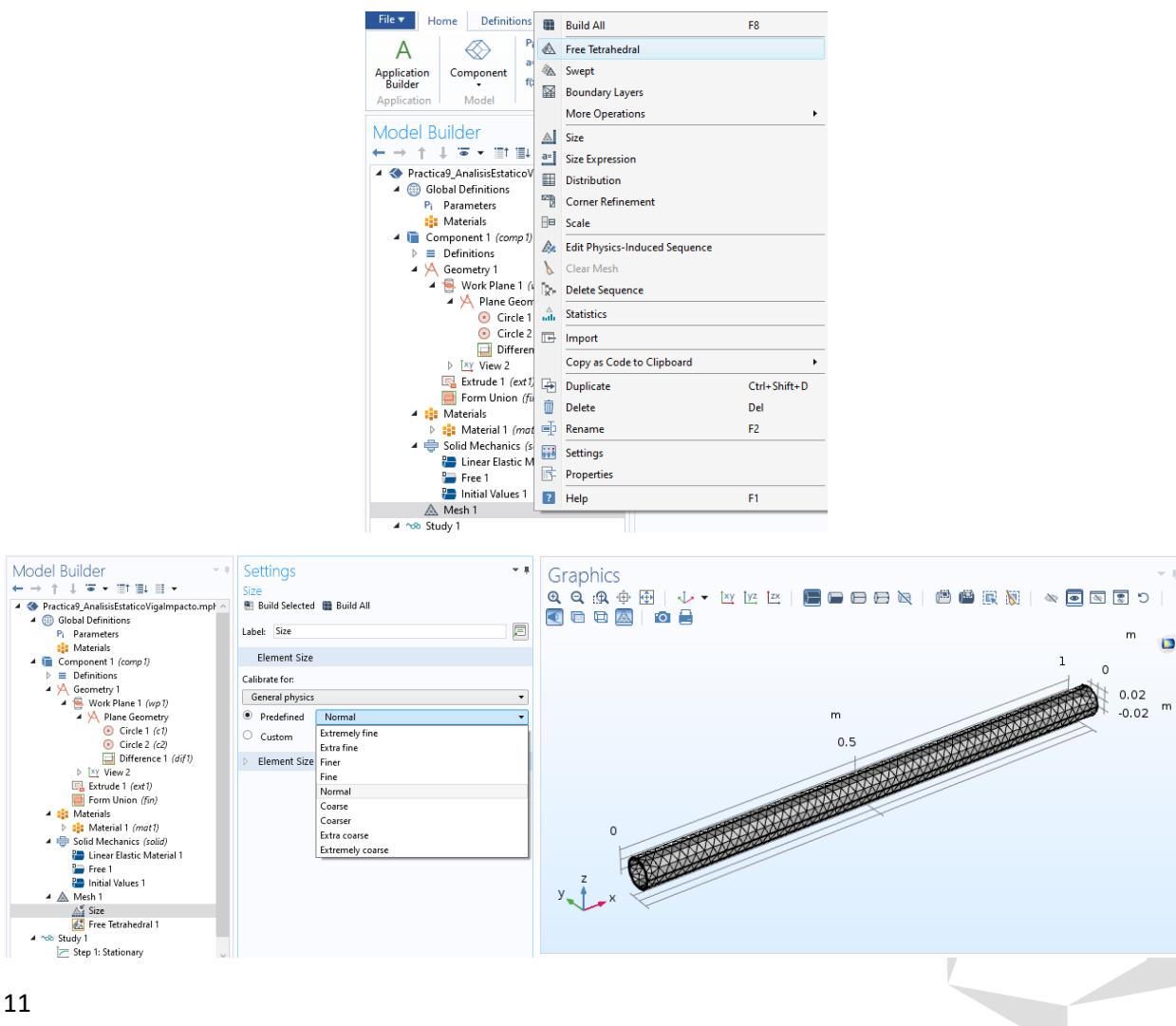
1ero hacemos el análisis estático en el cual proponemos que la carga se va a colocar lentamente:

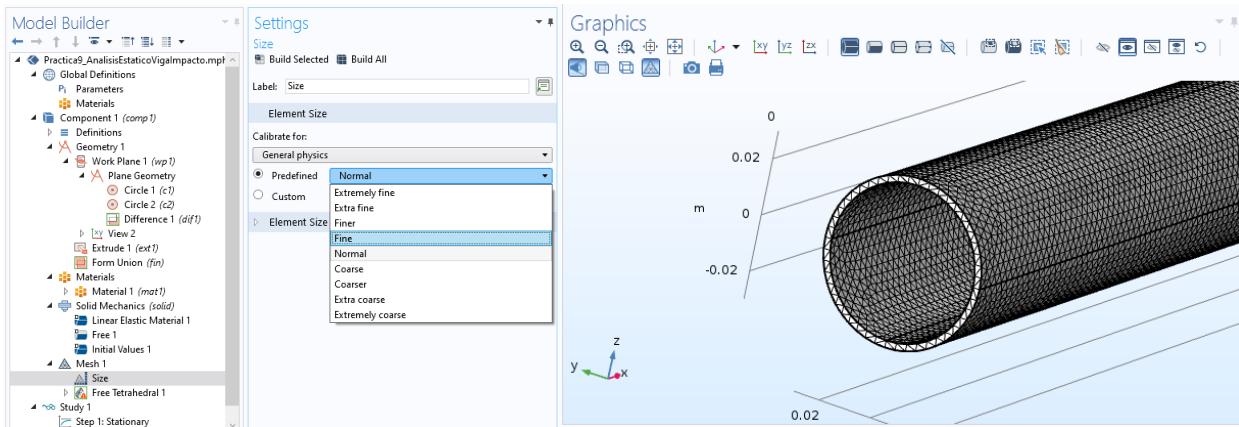




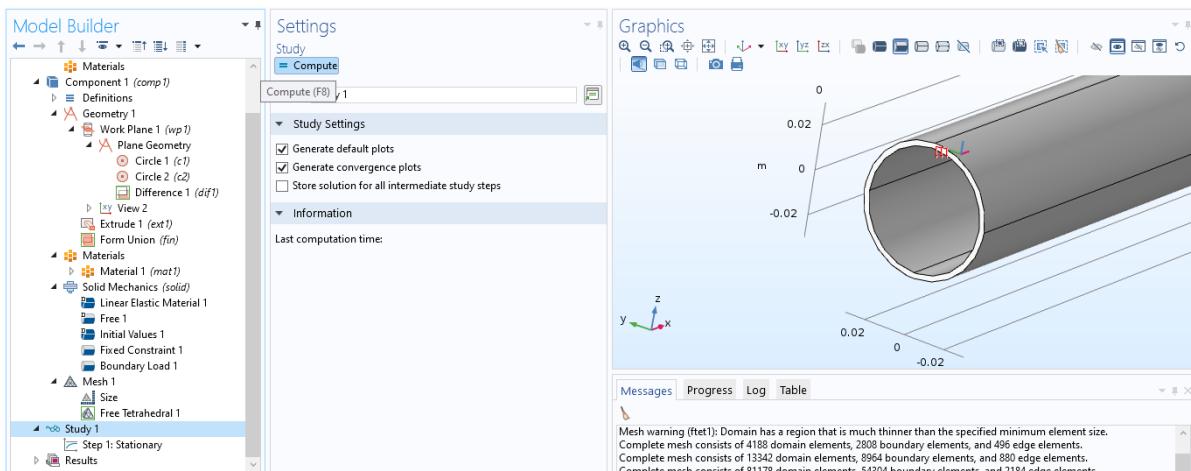
## RESULTADO DEL ELEMENTO FINITO EN COMSOL:

16) ...clic derecho Mesh (Malla para hacer el análisis por medio del método de elemento finito) → Free Tetrahedral → Size → Finer, Fine, Normal, etc. (Mientras más fina sea la malla más exacta será el resultado entregado por el programa) → Build All...



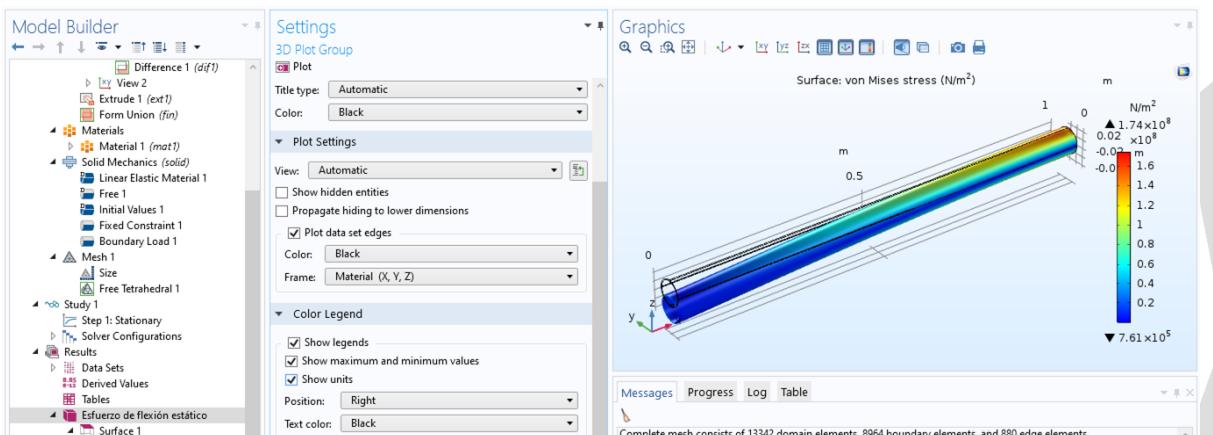


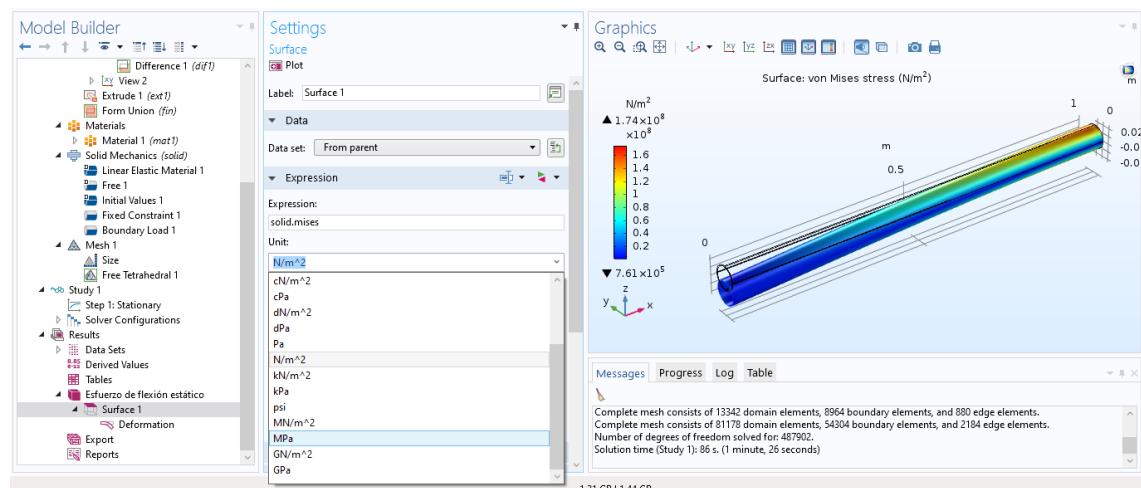
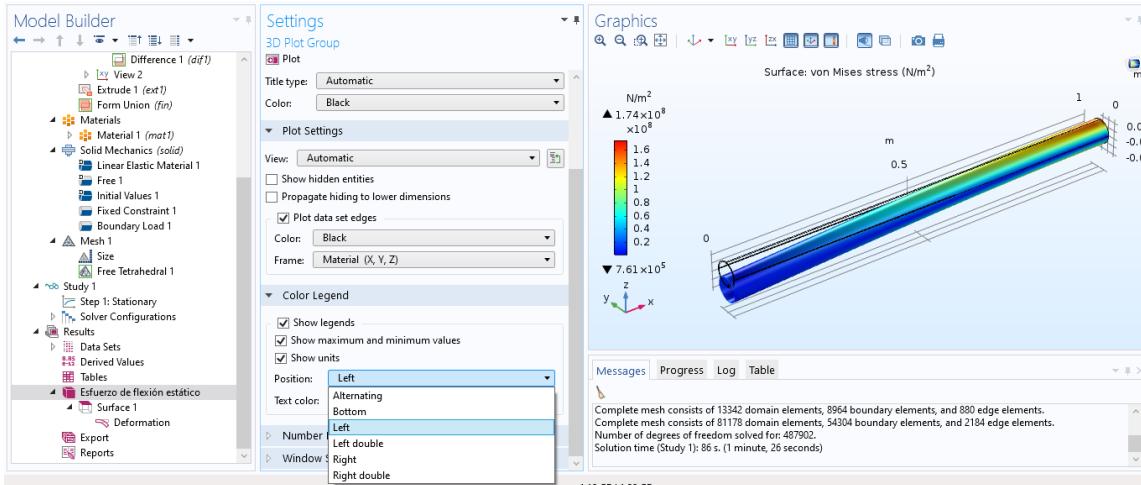
17) Study → Compute (y se generará el cálculo de esfuerzos por default)



18) Results → Stress (Para ver el resultado del cálculo de esfuerzos) → Dar clic en las checkbox de Show legends, Show maximum and minimum values y Show units para que en la barra de colores se puedan ver mis resultados correctamente → Color Legend (sirve para elegir la forma en la que se mostrará mi barra de resultados) → Position: (aquí elijo donde quiero que se acomode mi barra de colores) → Label (aquí le puedo cambiar el nombre a mi resultado).

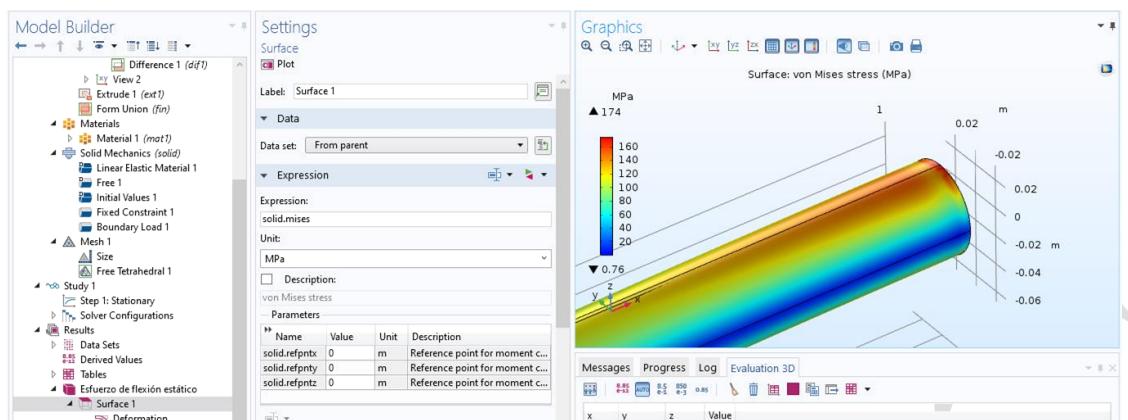
19) Results → Stress (Esfuerzo de flexión elástico) → Surface 1 → Unit: Para indicar la unidad en la que quiero que se vean mis resultados → MPa → Plot...



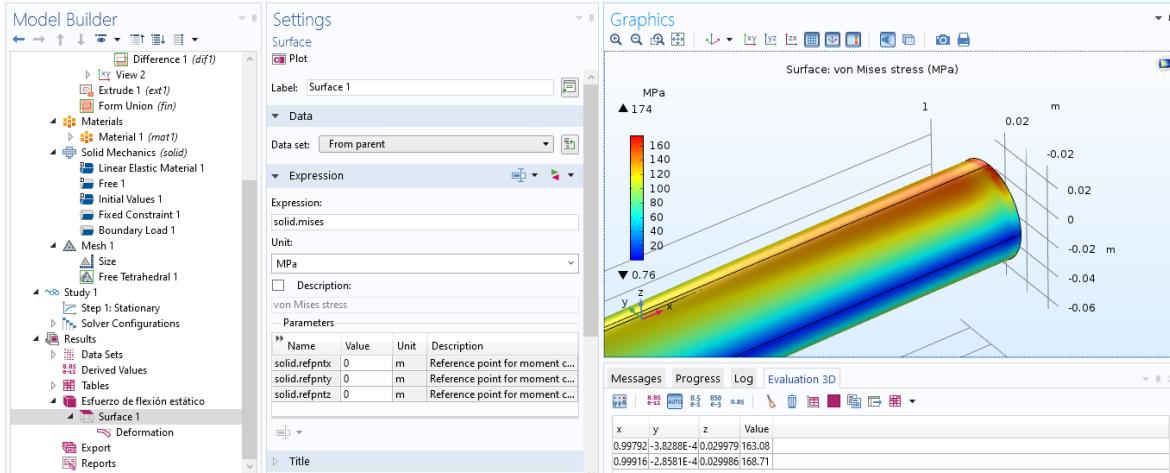


20) Results → Surface 1 → Expression: Si quiero ver el resultado de la teoría de falla de von mises o del esfuerzo cortante máximo debo poner ciertos códigos en para indicar el movimiento que quiero restringir en mi apoyo...

- ✓ solid.mises: Para ver el esfuerzo resultante en la viga usando la teoría de Von Mises.
- ✓ solid.sx: : Para ver el esfuerzo principal que está sobre el eje x (analizando la partícula de mi elemento mecánico).
- ✓ solid. disp: Sirve para saber la deflexión de la viga.

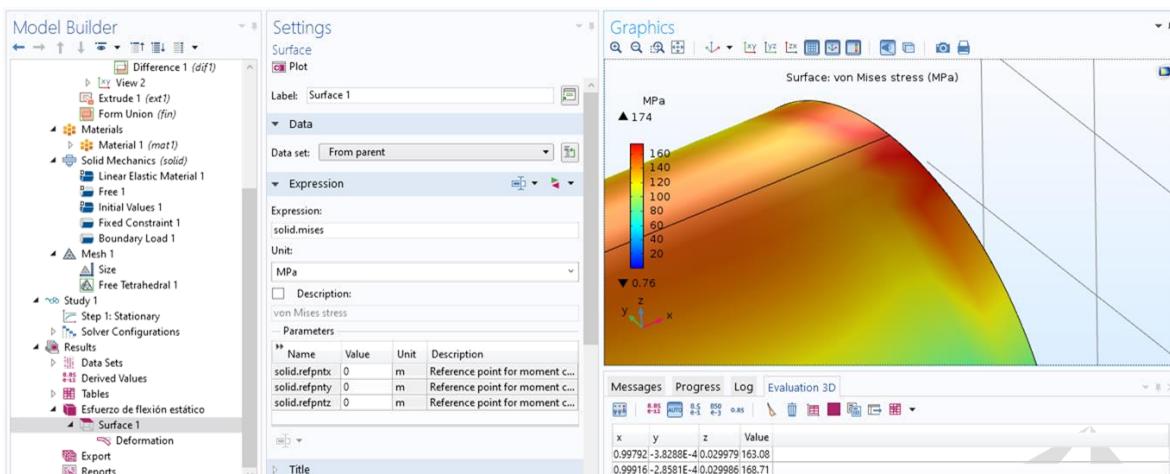


Si le doy clic a un punto de la viga que se encuentra en mi área de trabajo, el programa me sacará el esfuerzo exacto en ese punto y aparecerá debajo de la figura:



El esfuerzo máximo estará alrededor de estos valores, el esfuerzo analítico que obtuvimos fue de 157.38 [MPa] pero como podemos ver en la zona no hay un color constante, hay varios y mientras más se acerque a los concentradores de esfuerzo (que son los agujeros y las esquinas), se vuelve más rojo el color y el valor se aleja más y del valor analítico, de hecho la zona que más se le va a acercar al valor analítico que encontramos es la zona amarilla.

Evaluation 3D			
x	y	z	Value
0.99792	-3.8288E-4	0.029979	163.08
0.99916	-2.8581E-4	0.029986	168.71

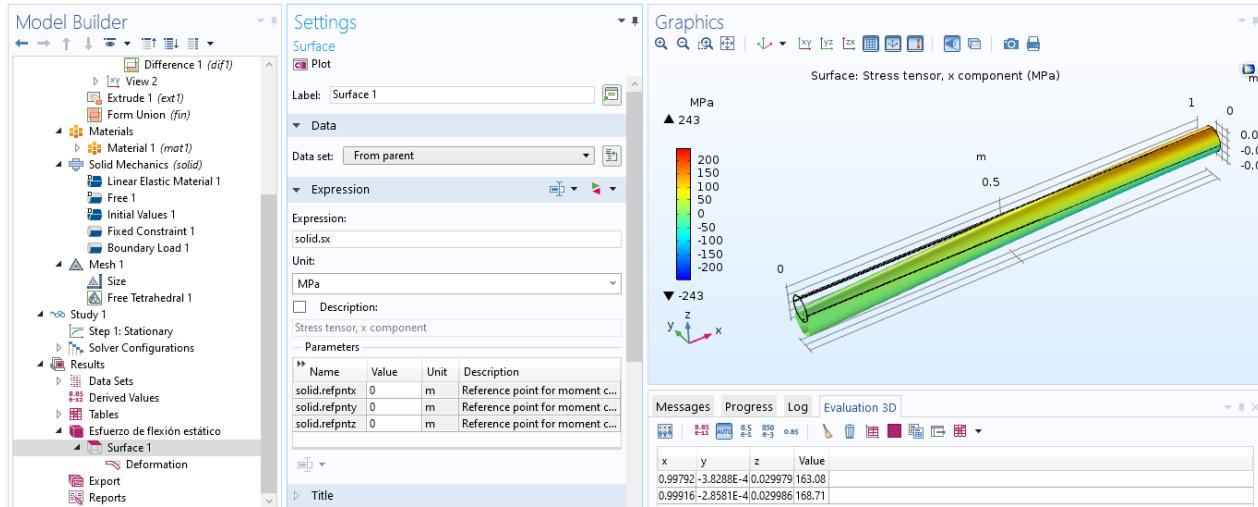


Si hacemos un promedio de todos los valores calculados en esos puntos obtendremos un esfuerzo promedio de 157.38 [MPa], este esfuerzo calculado es el resultante de Von Mises obtenido por la expresión solid.mises, esto se calcula con la siguiente fórmula:

$$\sigma' = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_1\sigma_3}$$

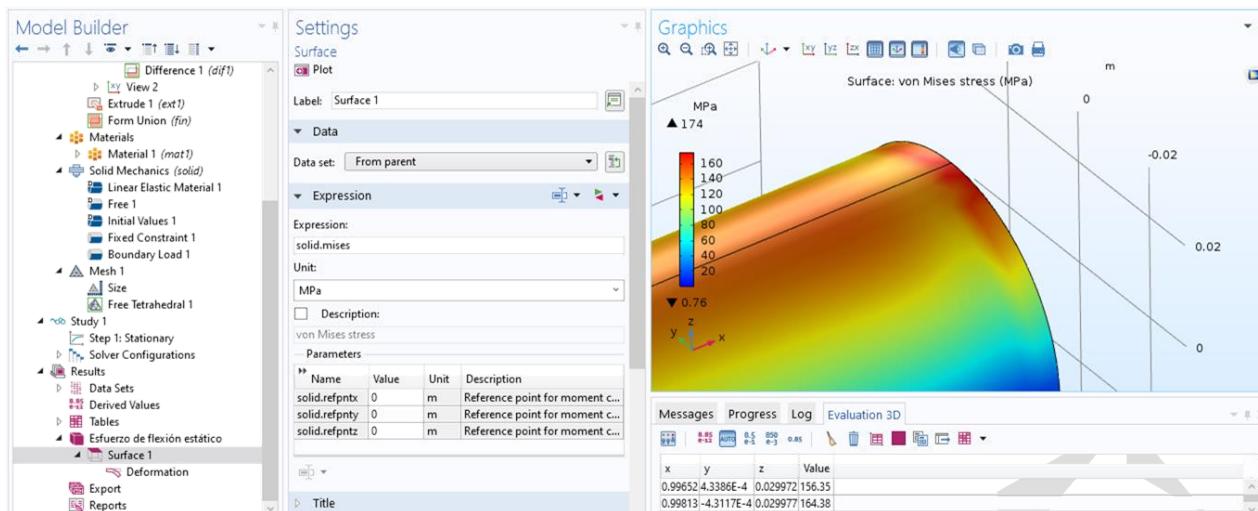
$$F.S = ns = \frac{S_{yp}}{\sigma'}$$

Y como en este caso no tenemos los esfuerzos  $\sigma_2$  y  $\sigma_3$ , solamente tenemos uno y es el esfuerzo de flexión que llamamos  $\sigma_1$ , el esfuerzo de Von Mises es prácticamente el mismo que el esfuerzo en el eje de las x, por lo que da lo mismo si ponemos la expresión solid.sx.

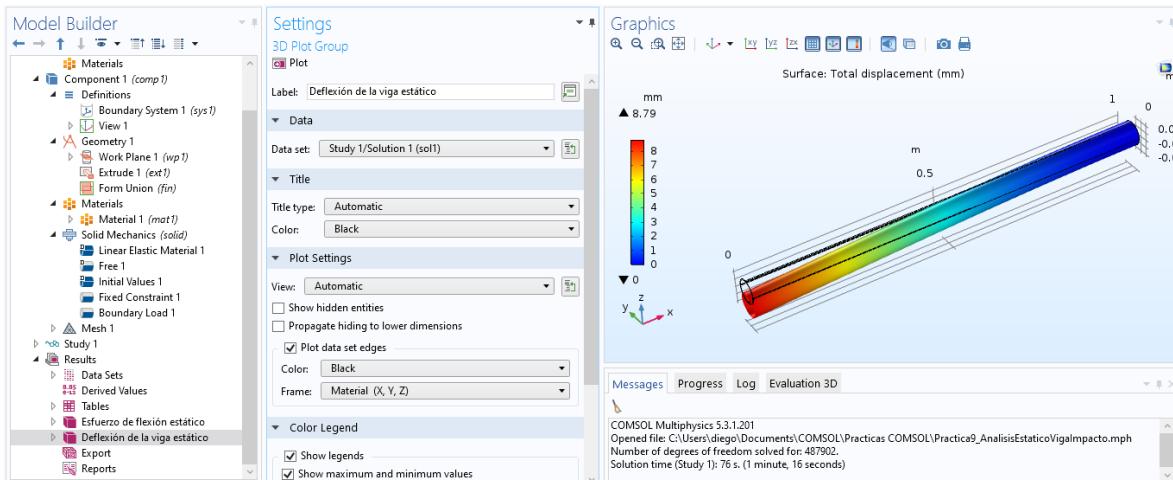


Y si recordamos que la zona amarilla es la que más se le acerca al valor encontrado analíticamente podemos observar que la zona amarilla está cerca de 150 [MPa] y nuestro valor analítico es de 157.38 [MPa]. Por lo que en esta estructura no habrá falla porque el esfuerzo de fluencia  $S_{yp}$  es de 250 [MPa].

Evaluation 3D			
x	y	z	Value
0.99652	4.3386E-4	0.029972	156.35
0.99813	-4.3117E-4	0.029977	164.38



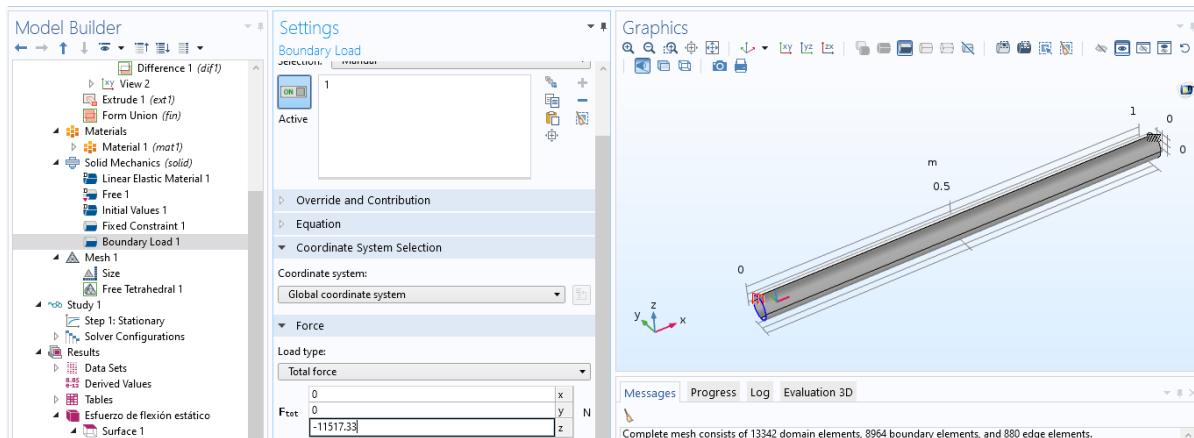
- 21) Results → clic derecho en Stress (Esfuerzo de flexión elástico) → Duplicate (para poder crear otro resultado que me muestre ahora la deflexión en la viga) ...



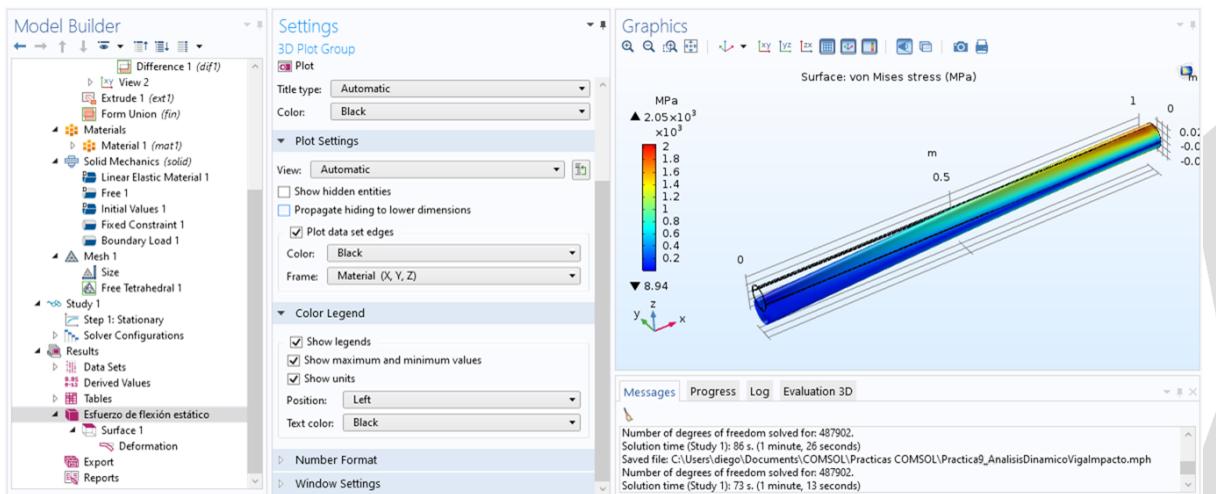
Y esta es la deflexión de la viga en el análisis estático.

22) Ahora duplicamos el documento y cambiamos la carga estática por la que calculamos en el análisis dinámico como  $P_m$  haciendo el análisis de energías → Boundary Load 1 → Force z

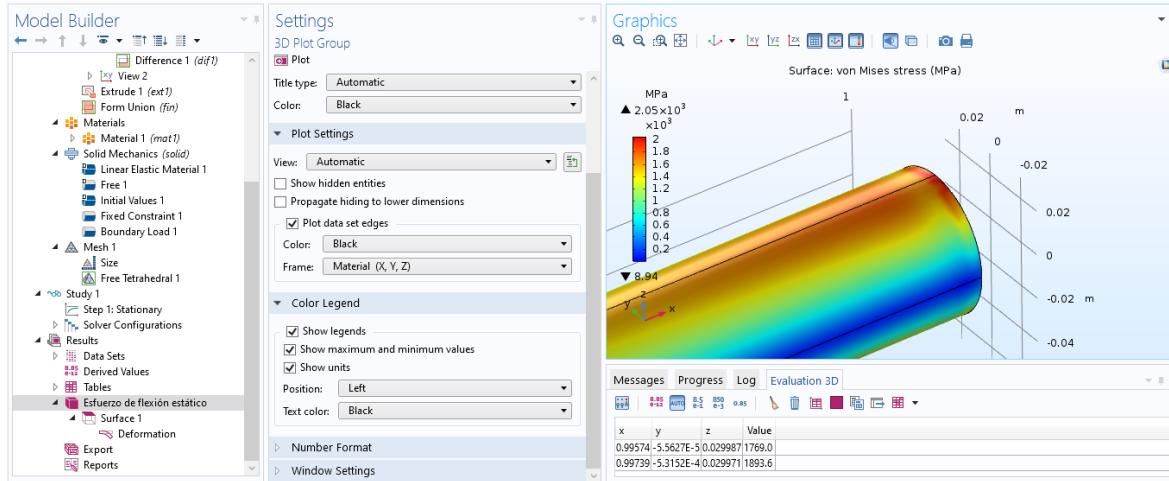
$$P_m = 11.5173 [kN]$$



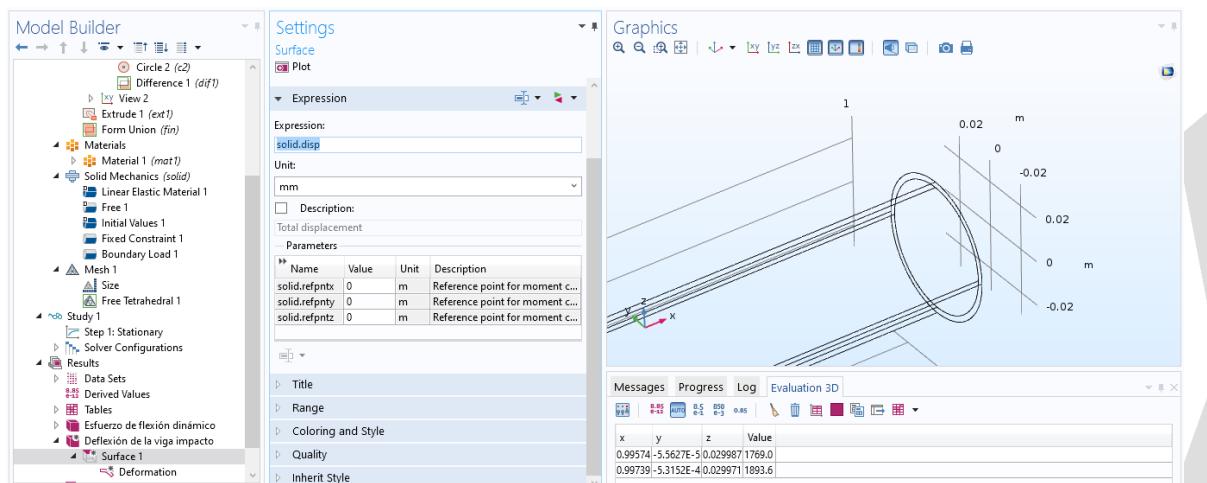
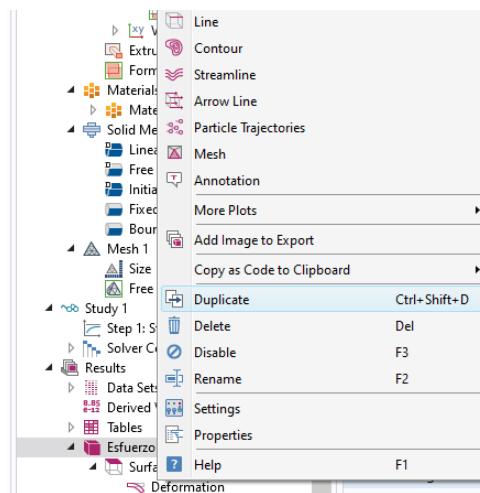
Y ahora nos da un esfuerzo muchísimo más grande:

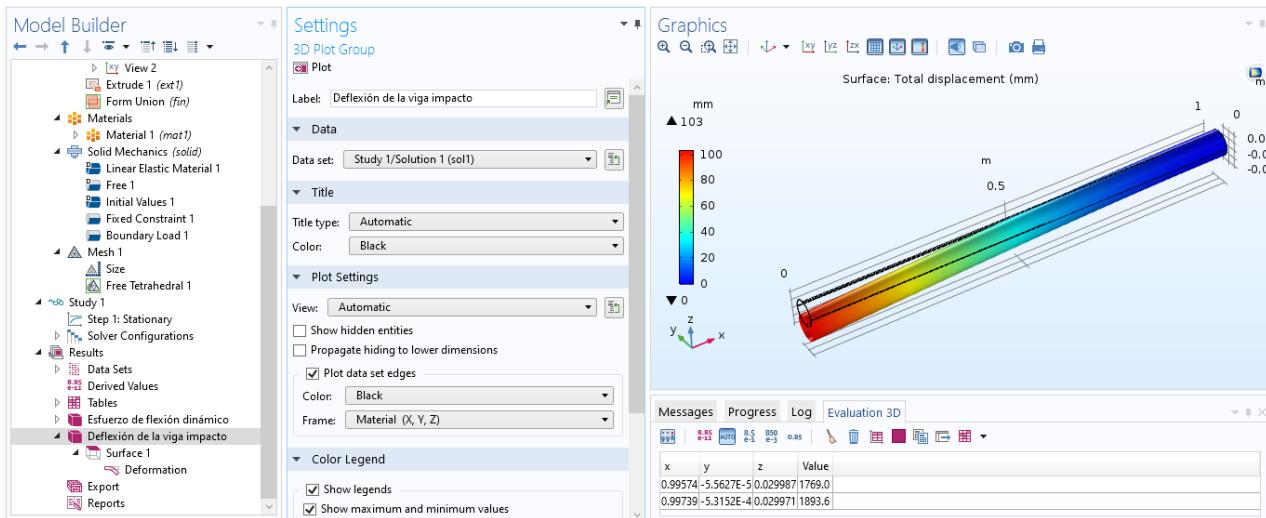


Y cuando dé clic alrededor de la zona crítica podré obtener varios esfuerzos para hacer el cálculo y obtener un número cercano a mi resultado analítico que era un esfuerzo de 1847.7 [MPa]



- 23) Results → clic derecho en Stress (Esfuerzo de flexión elástico) → Duplicate (para poder crear otro resultado que me muestre ahora la deflexión en la viga con carga dinámica) → Expression: solid.disp ...





Y vemos que la deflexión es de 100 a 103 mm y eso es una deflexión muy grande.

El resultado en analítico daba que la deflexión máxima era de 10.26 cm, eso equivale a 102.6 mm.

## CONCLUSIÓN:

Con el método numérico apoyado por el programa COMSOL podemos comprobar que esté bien hecho nuestro método analítico y visualizar los efectos causados por la carga dinámica, además de poder comparar sus efectos de forma visual en comparación con la carga estática.

## ERROR:

$$error = \frac{|valor\ obtenido\ en\ el\ programa| - |valor\ analítico|}{|valor\ obtenido\ en\ el\ programa|} * 100[\%]$$

Un error menor al 11% es aceptable entre ambos métodos analítico y numérico.

$Y_m$ :

$$error = \frac{|103| - |102.6|}{|103|} * 100 = 0.3883\%$$

## BIBLIOGRAFÍA:

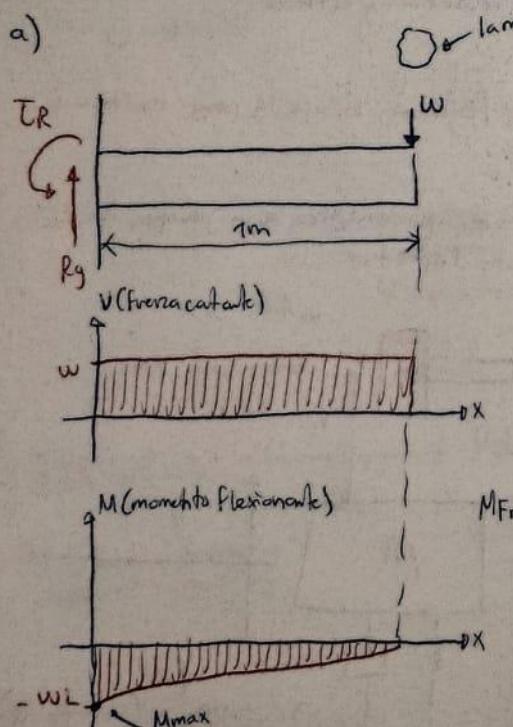
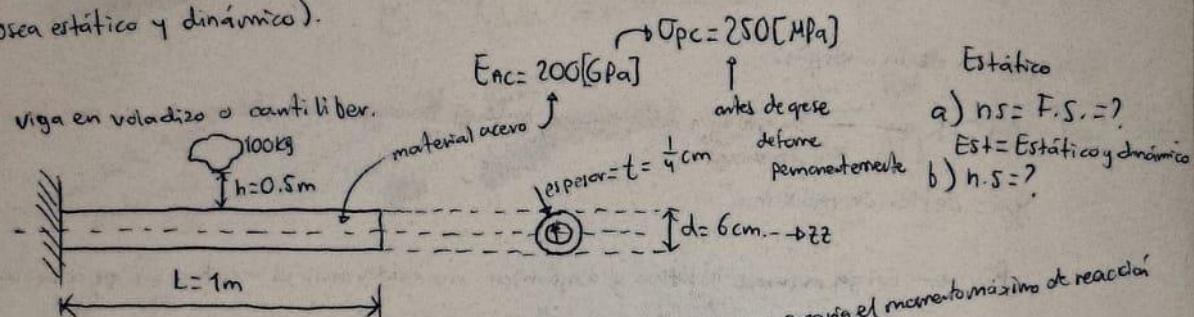
MECÁNICA DE MATERIALES (5TA EDICIÓN) – FERDINAND P. BEER.

# MÉTODO ANALÍTICO:

Un elemento de máquina en forma de viga en voladizo tiene una sección transversal tubular circular de diámetro exterior de 6 cm, y de espesor del tubo  $t_{\text{tubo}}$  de  $\frac{1}{4}$  cm. En un momento determinado se deja caer una masa de 100 kg de una altura de  $\frac{1}{2}$  metro sobre el extremo libre de la viga.

a) ¿Cuál es el factor de seguridad si se supone primero que la carga se aplica y se retira lentamente? (Análisis estático)

b) ¿Cuál es el factor de seguridad si la carga cae repentinamente? (Análisis completo, o sea estático y dinámico).



$$I_{zz} = \frac{\pi}{64} (d^4 - d_i^4) = \frac{\pi}{64} (0.06^4 - 0.055^4)$$

$$I_{zz} = 1.87 \times 10^{-7} \text{ [m}^4]$$

$$C = 3 \text{ cm} = 0.03 \text{ m}$$

a)

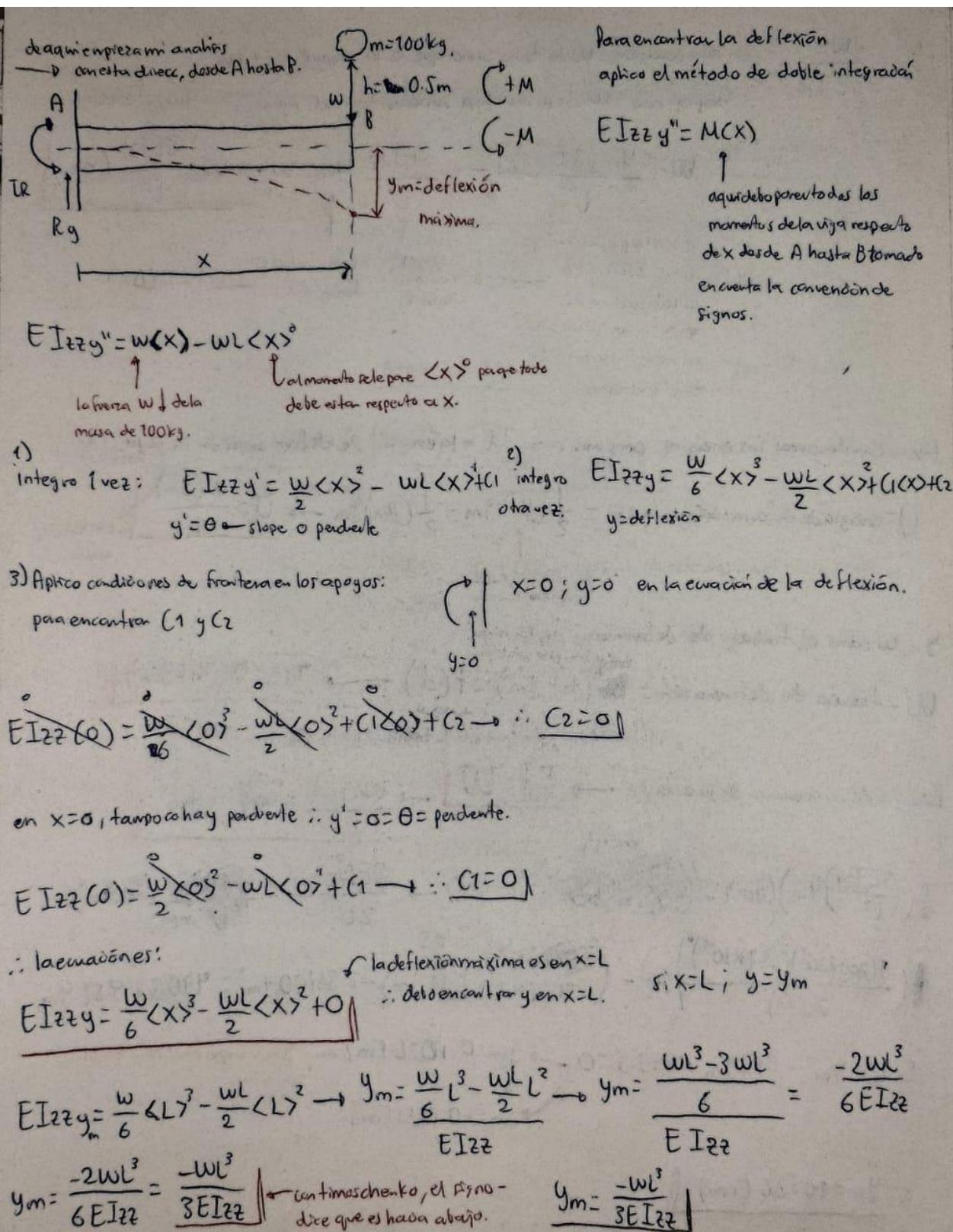
$$\sigma_{\text{flex}} = \frac{M_{\text{max}}(C)}{I_{zz}}$$

$$E = 200 \times 10^9 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \quad h = 0.5 \text{ m} \quad L = 1 \text{ m}$$

$$m = 100 \text{ kg} \quad g = 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$\sigma_t = (\sigma_{\text{flex}})_{\text{estático}} = \frac{(100)(9.81)(1 \text{ m})(0.03)}{1.87 \times 10^{-7} \text{ [m}^4]} = 157.38 \text{ MPa}$$

$$F.S. = n_s = \frac{\sigma_{pc}}{\sigma_t} = \frac{250}{157.38} = 1.588 > 1 \therefore \text{estamos dentro del rango elástico.}$$



$$y_m = \frac{-WL^3}{3EI_{zz}}$$

en esta ecuación  $W$  la tomo como que es la carga máxima.

$\therefore$  despejando  $W$  de la ecuación sin considerar el signo: Carga máxima.

$$W = \frac{y_m(3EI_{zz})}{L^3} \rightarrow \frac{3EI_{zz}}{L^3} y_m = W \rightarrow W = \frac{3EI_{zz}}{L^3} (y_m)$$

Esto lo puedo modelar como un resorte, considerando a la viga en voladizo como un resorte y una masa en el extremo.

estos como si fueran  $K$

estos como si fueran  $\Delta x$

$F = K(\Delta x)$

Ahora consideramos las energías, ponemos como  $U$  a la energía de deformación de la viga.

$$U = \text{energía de deformación de la viga} = \frac{1}{2}(W)y_m = \frac{1}{2}(P_m)y_m \rightarrow U = \frac{W(y_m)}{2}$$

carga máxima

y a  $W$  como el trabajo de deformación de la viga.

$$W = \text{trabajo de deformación} = m(g) \underbrace{(h + y_m)}_{\text{pero estático}} = F(d) \rightarrow W = \frac{m(g)}{2} (h + y_m)$$

$\downarrow$  trabajo = fuerza (distancia).

$$\text{Principio de conservación de la energía} \rightarrow U = W \rightarrow \frac{W(y_m)}{2} = \frac{m(g)}{2} (h + y_m)$$

$$\frac{1}{2} \left( \frac{3EI_{zz}}{L^3} y_m \right) (y_m) = \left( \cancel{\frac{3EI_{zz}}{L^3}} \cancel{y_m} \right) (h + y_m) \rightarrow \frac{3EI_{zz} y_m^2}{2L^3} = \cancel{\frac{3EI_{zz}}{L^3}} \cancel{y_m} (h + y_m)$$

$$\left( \frac{3(200 \times 10^9)(1.87 \times 10^{-7})^2}{2(1^3)} \right) y_m^2 = \left( \cancel{\frac{3(200 \times 10^9)}{2(1^3)}} \right)^{0.5} \left( \cancel{100(9.81)} \right) (h + y_m) \rightarrow 56100 y_m^2 = 490.5 + 981 y_m$$

$$56100 y_m^2 - 981 y_m - 490.5 = 0 \rightarrow y_m = 0.1026 \text{ [m]} \leftarrow y_m \text{ siempre es el resultado positivo}$$

$\downarrow$

$$\rightarrow y_m = -0.0881 \text{ [m]}$$

$$\therefore \underline{y_m = 10.26 \text{ [cm]}}$$

$$\therefore (\sigma_{\text{flex}})_{\text{est}} = \frac{M_{\max}(c)}{I_{zz}}$$

est = estudio, o sea el dinámico y el estático.

$$M_{\max} = P_m(L) = W_{\max}(L) = W(L)$$

$$M_{\max} = \left( \frac{3EI_{zz}y_m}{L^3} \right) K = \frac{3EI_{zz}y_m}{L^2}$$

$$M_{\max} = \frac{3(200 \times 10^9)(1.87 \times 10^{-7})}{1^2} (0.10265)$$

$$M_{\max} = 11,517.33 \text{ N}\cdot\text{m}$$

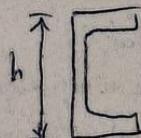
$$y_m = 10.26 \text{ cm}$$

$$\therefore (\sigma_{\text{flex}})_{\text{est}} = \frac{(11,517.33 \times 10^3) \left(\frac{0.06}{2}\right)}{1.87 \times 10^7} = 1847.7 \text{ [MPa]}$$

dinámico y  
estático

$$\therefore h_s = \frac{S_y c}{\sigma_t} = \frac{250 \text{ MPa}}{1847.7 \text{ MPa}} = 0.1353 < 1 \quad \therefore \text{estamos en el rango plástico.}$$

Cambiando el perfil por uno C:



aumentaría  $I_{zz}$  y disminuiría  $(\sigma_{\text{flex}})_{\text{est}}$ .

$$M = F(d) \rightarrow F_{\max} = \frac{M_{\max}}{L} = \frac{11.5173 \text{ kN}\cdot\text{m}}{1 \text{ m}} \rightarrow F_{\max} = 11.5173 \text{ kN}$$