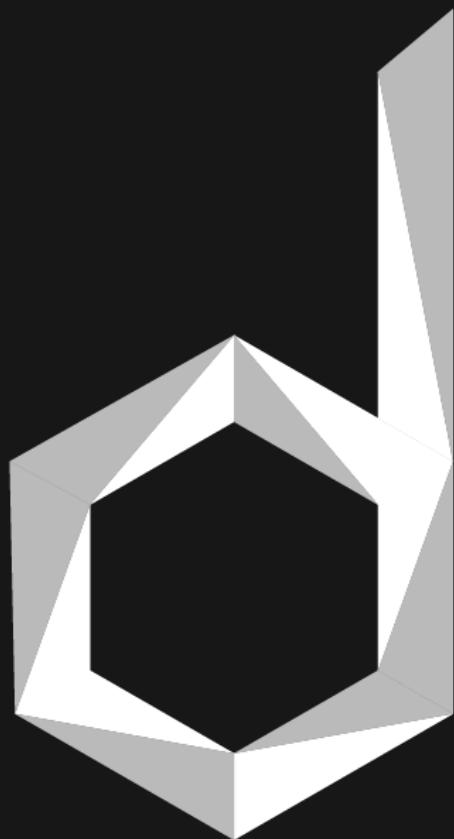


# INGENIERÍA MECATRÓNICA



## DI\_CERO

DIEGO CERVANTES RODRÍGUEZ

INGENIERÍA ASISTIDA POR COMPUTADORA

COMSOL MULTIPHYSICS 5.6

?: Viga en Cantiléver 2D con 2 Áreas  
de Sección Transversal Distintas

## Contenido

OBJETIVOS:.....	2
INTRODUCCIÓN TEÓRICA:.....	2
DESCRIPCIÓN DEL PROBLEMA: .....	4
CREACIÓN DE LA PIEZA EN COMSOL:.....	5
ANÁLISIS MECÁNICO EN COMSOL: .....	14
RESULTADO DEL ELEMENTO FINITO EN COMSOL: .....	17
CÓDIGO DE MATLAB:.....	22
CONCLUSIÓN:.....	23
ERROR: .....	24
BIBLIOGRAFÍA:.....	24
MÉTODO ANALÍTICO:.....	25



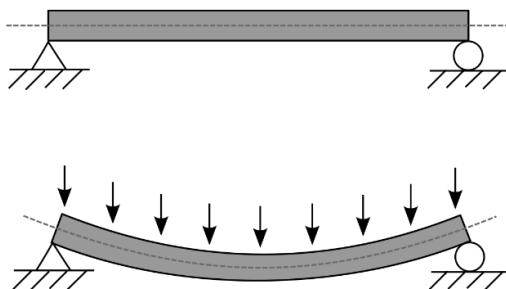
# OBJETIVOS:

Se examinará el esfuerzo creado en una viga sometida a flexión, el cambio de diámetros en la viga hace que la deflexión de la viga no se pueda encontrar por medio de la ecuación de la elástica.

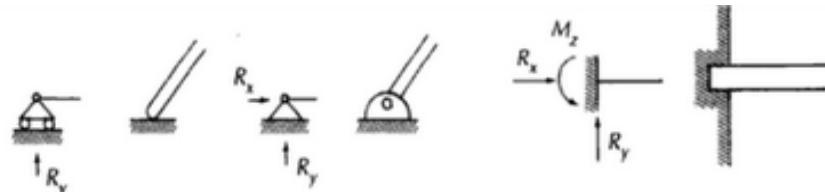
La viga será simulada en COMSOL 5.3a para comprobar los cálculos hechos en el método analítico.

# INTRODUCCIÓN TEÓRICA:

Existen momentos que someten nuestros elementos mecánicos a torsión (cuando al aplicarlos nuestro elemento mecánico se tuerce como trapo), pero si este momento se aplica en alguno de los otros 2 ejes restantes lo que creará es flexión simple, este tipo de torque lo que hace es curvar o doblar al elemento.



Cuando hacemos ejercicios de flexión pueden aparecer 3 tipos de apoyos, estos generarán distintas reacciones sobre la viga cuando se aplique una carga externa.

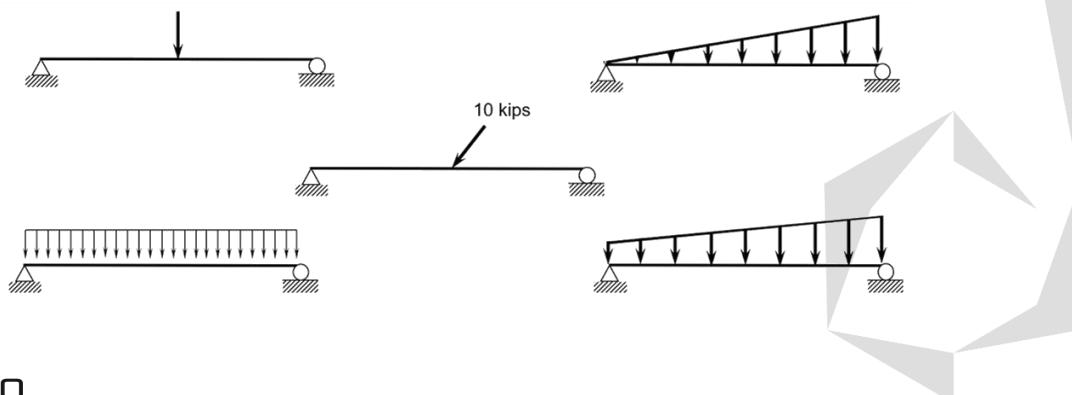


(a) Apoyo simple

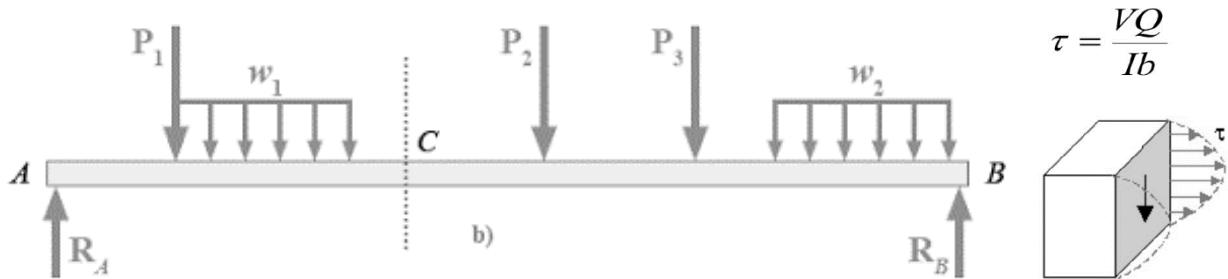
(b) Apoyo articulado

(c) Apoyo empotrado

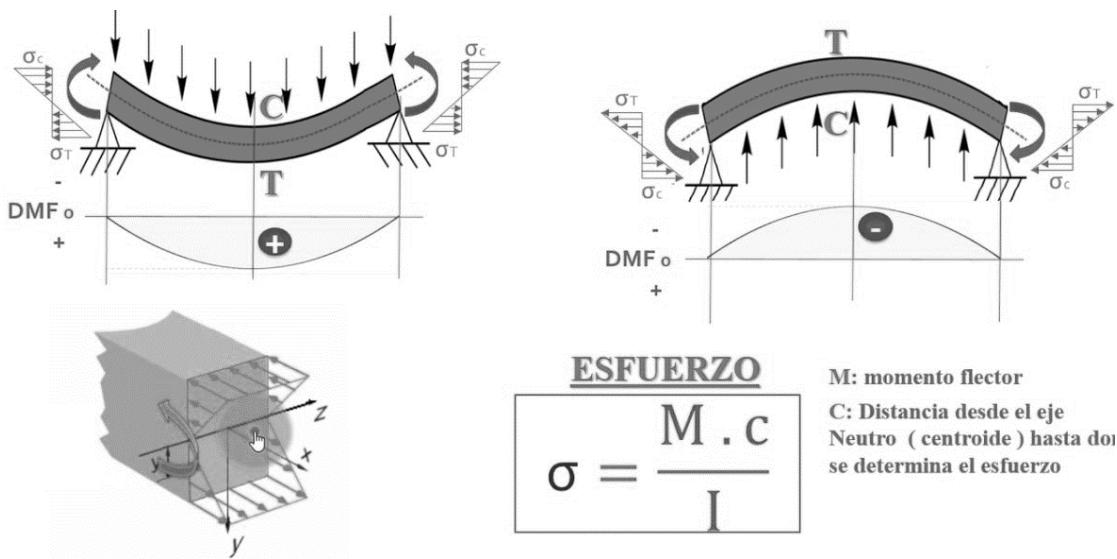
Se le llama viga a cualquier elemento que esté sometido a flexión, en las vigas se pueden aplicar varios tipos de carga, ya sea puntual o repartida, las cargas repartidas también se dividen en rectangulares, triangulares, descritas por una función o una combinación de todas las anteriores.



Primero que nada, en este tipo de problemas debo encontrar el valor de las reacciones en los apoyos, ya habiendo hecho esto debo encontrar un diagrama que abarque toda la longitud de la viga para encontrar cuál es la fuerza cortante resultante en cada punto, esta fuerza cortante lo que hará es crear un esfuerzo cortante cuyo valor máximo se encontrará solamente en el eje longitudinal de la viga:



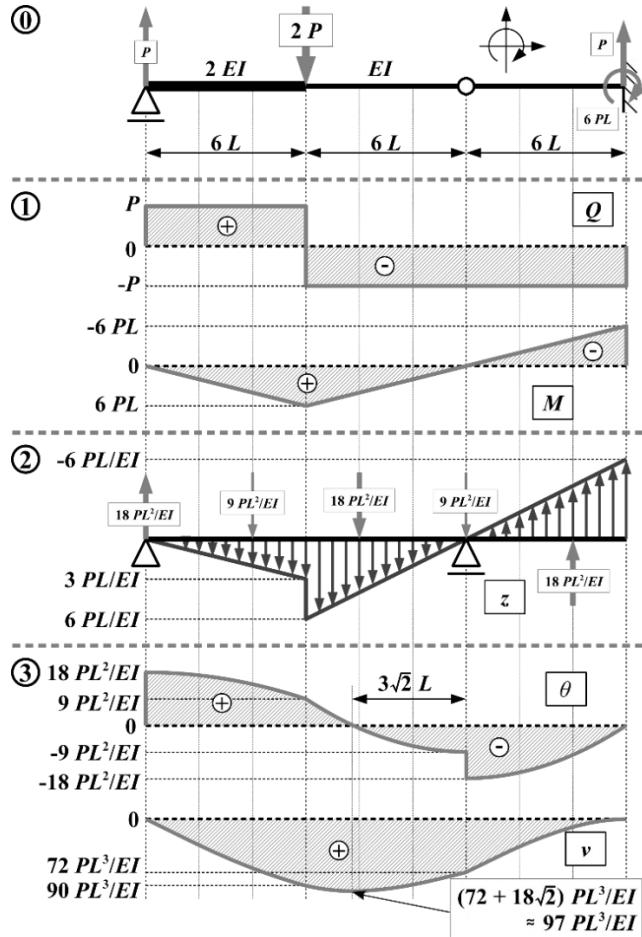
Este esfuerzo no es el que buscamos encontrar porque no es el que puede generar falla en la viga, el que nos interesa encontrar es el esfuerzo normal, si queremos encontrar este esfuerzo nos debemos basar en el diagrama de fuerza cortante para obtener el diagrama de momento flexionante en toda la viga y de éste tomaremos el momento que tenga mayor valor para poder así encontrar el esfuerzo normal en la viga, este esfuerzo por la misma naturaleza de la flexión lo que hará es que las partículas inferiores y superiores de la viga se compriman o tensionen dependiendo del sentido del momento flexionante.



El valor de los esfuerzos en la viga depende totalmente de la forma del área de sección transversal o también llamada perfil estructural debido al momento de inercia que puede tener, esto implica también que dependiendo de la forma del perfil estructural la viga se deformará o no cuando se le apliquen cargas externas.

Finalmente en las vigas se puede saber cuál es su deformación vertical (llamada deflexión) y cuál es la inclinación de la viga después de haber aplicado una carga (llamada pendiente), esto es obtenido por medio de la ecuación de la elástica en la cual se toma en cuenta el módulo de elasticidad del material, el momento de inercia del perfil estructural y una expresión de momento que se debe medir desde uno de los extremos de la viga que se deja en función de \$x\$ para representar después cada punto de la longitud de la viga, toda esta ecuación se debe integrar dos veces y hay que tener cuidado porque la función del

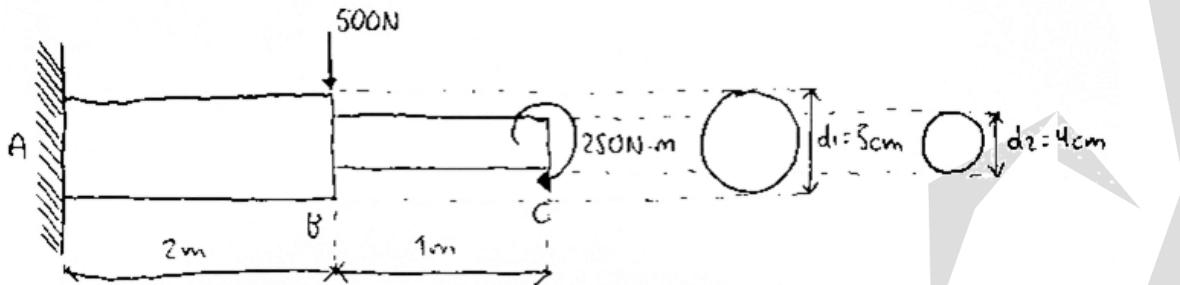
momento respecto a x se integra de forma muy particular ya que al integrar solo se afectará al exponente no a las variables de dentro.



Ya con esto tendríamos todos los datos a saber de cualquier viga, el problema que puede ocurrir como pasa en este caso es que cuando existen dos perfiles estructurales en la viga o dos materiales diferentes, si se puede saber el esfuerzo, pero no se puede saber la deflexión ni la pendiente, por lo que la ecuación de la elástica se hace inútil.

$$E(Iz)y'' = E(Iz) \frac{d^2y}{dx^2} = M(x)$$

## DESCRIPCIÓN DEL PROBLEMA:



Teniendo la siguiente viga, encontrar su esfuerzo normal y su deflexión:

- Debido a que en la viga hay dos materiales y dos áreas de sección transversal diferentes, no podremos usar la ecuación de la elástica.
- El módulo de elasticidad del primer tramo de la viga vale  $E_{AB} = 210$  [GPa]
- El módulo de elasticidad del segundo tramo de la viga vale  $E_{BC} = 180$  [GPa]

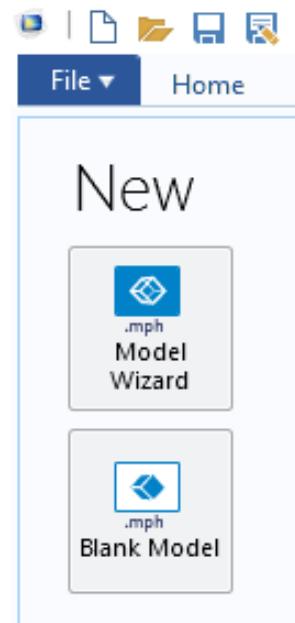
Después de calcular las reacciones en los apoyos

- El momento de reacción en el apoyo del punto A vale  $T_A = 1250$  [ $N \cdot m$ ].
- La fuerza de reacción en el apoyo del punto A vale  $R_Y = 500$  [N].

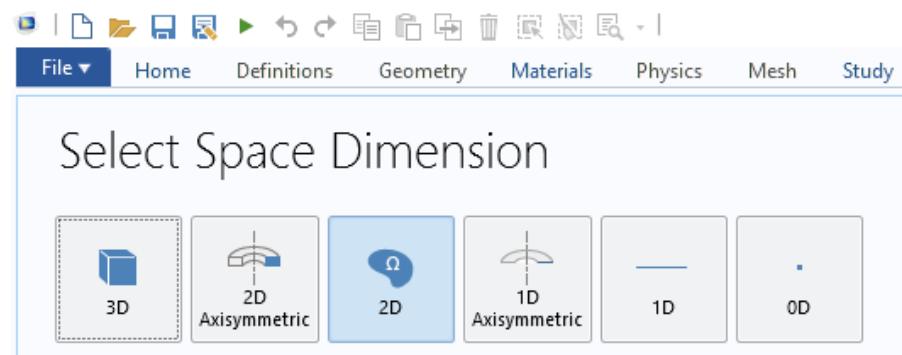
Se comprobarán los datos obtenidos haciendo el modelado de la estructura en COMSOL 5.3a.

## CREACIÓN DE LA PIEZA EN COMSOL:

- 1) Software COMSOL → Model Wizard...



- 2) ... → 2D (estructura 2D) ...



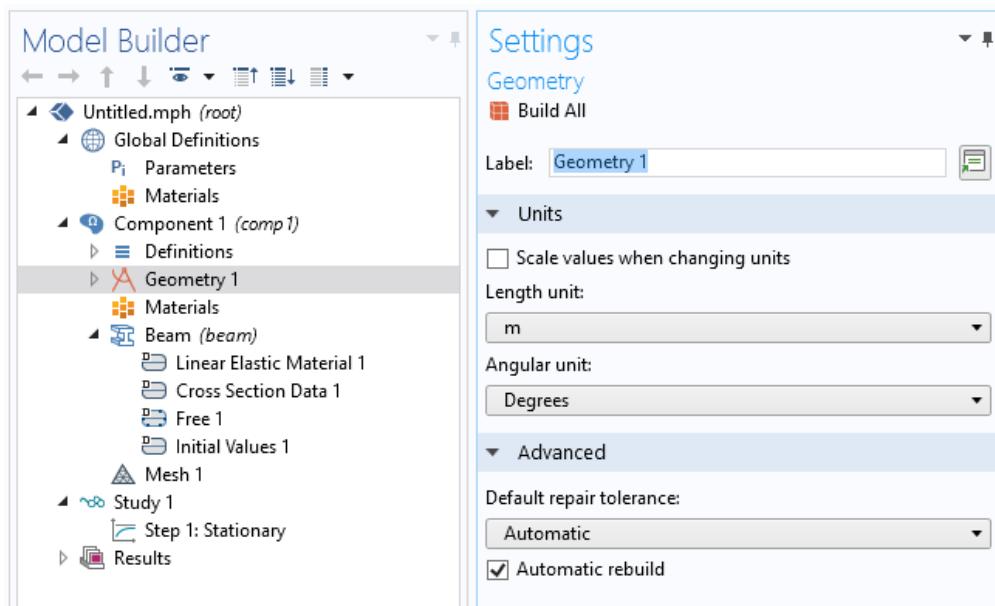
3) ... → Structural Mechanics → Beam (osea Viga) → Add...

The screenshot shows the 'Select Physics' interface. At the top, there is a navigation bar with icons for File, Home, Definitions, Geometry, Materials, Physics, Mesh, Study, Results, and Developer. Below the navigation bar, the title 'Select Physics' is displayed. On the left, there is a tree view of available physics interfaces, with 'Beam (beam)' highlighted and selected. On the right, a detailed description of the 'Beam' interface is provided, along with its usage notes. At the bottom, there is a section for 'Added physics interfaces' which lists 'Beam (beam)'.

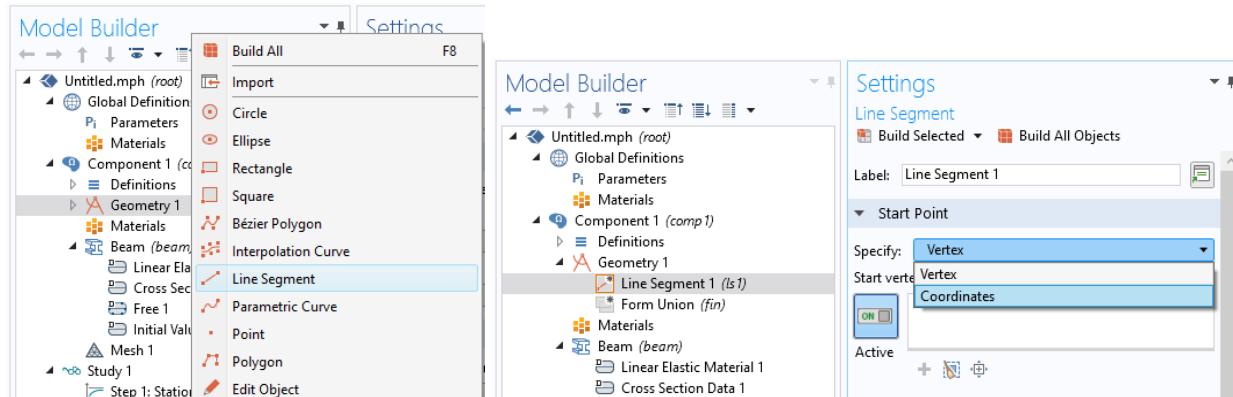
4) ... → Study → Preset Studies → Stationary → Done...

The screenshot shows the 'Select Study' interface. At the top, there is a navigation bar with icons for File, Home, Definitions, Geometry, Materials, Physics, Mesh, Study, Results, and Developer. Below the navigation bar, the title 'Select Study' is displayed. On the left, there is a tree view of available study types, with 'Stationary' highlighted and selected. On the right, a detailed description of the 'Stationary' study type is provided. At the bottom, there is a section for 'Added study' which lists 'Stationary', and a section for 'Added physics interfaces' which lists 'Beam (beam)'. A large, semi-transparent 3D model of a mechanical part is visible in the background.

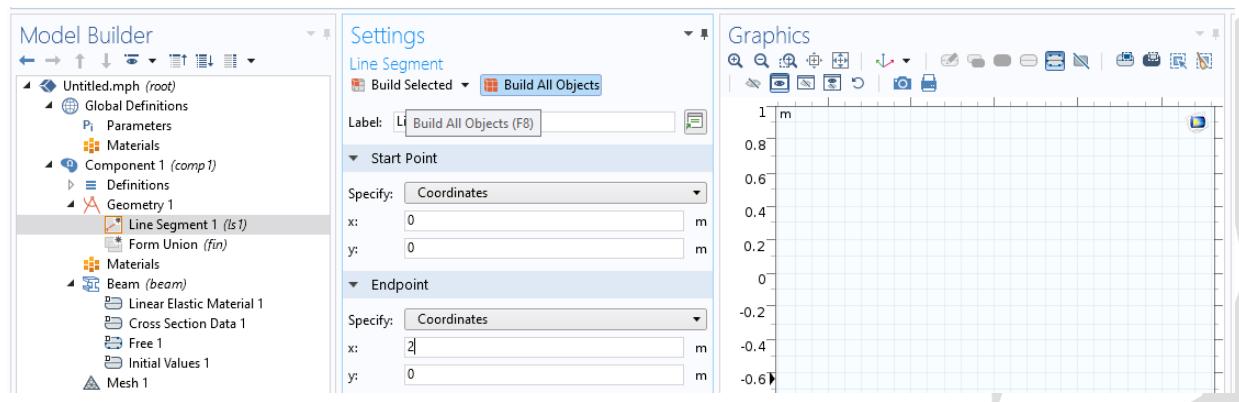
5) Geometry → Length unit: (indico en esta parte las unidades de dimensión en mi figura) ...

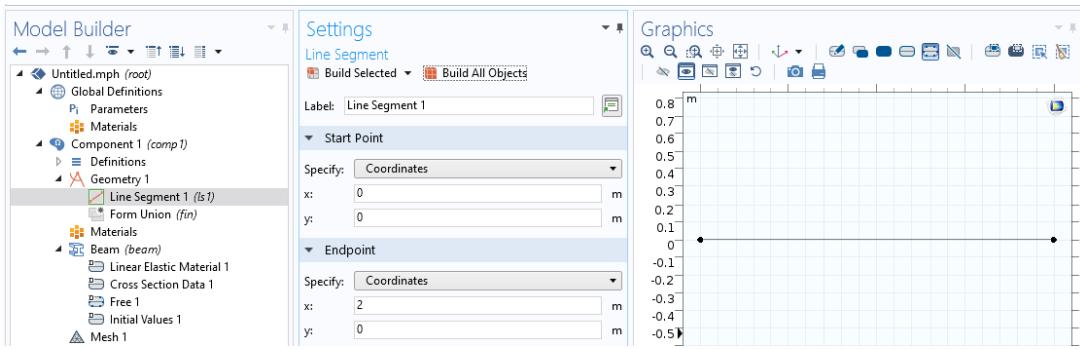


6) ...clic derecho en Geometry → Line segment (para crear una fracción de mi viga) → Specify: → Coordinates (para que mi segmento de línea lo cree por medio de coordenadas en mi plano de trabajo) ...



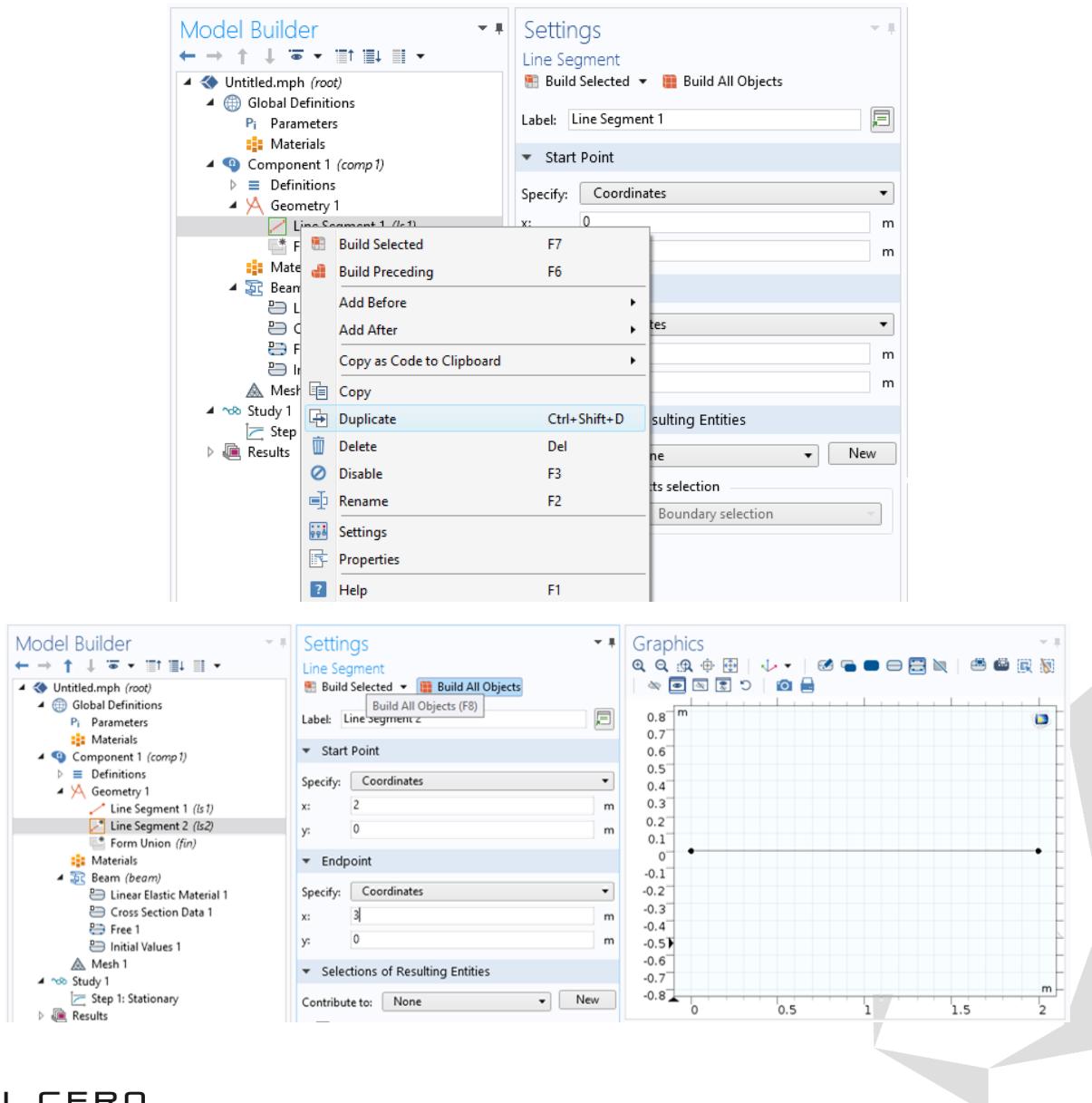
7) ...Line Segment 1 → Start Point → x: y: (indicar las coordenadas iniciales de mi segmento de línea)  
→ Endpoint → x: y: (indicar las coordenadas finales de mi segmento de línea) → Build All Objects...

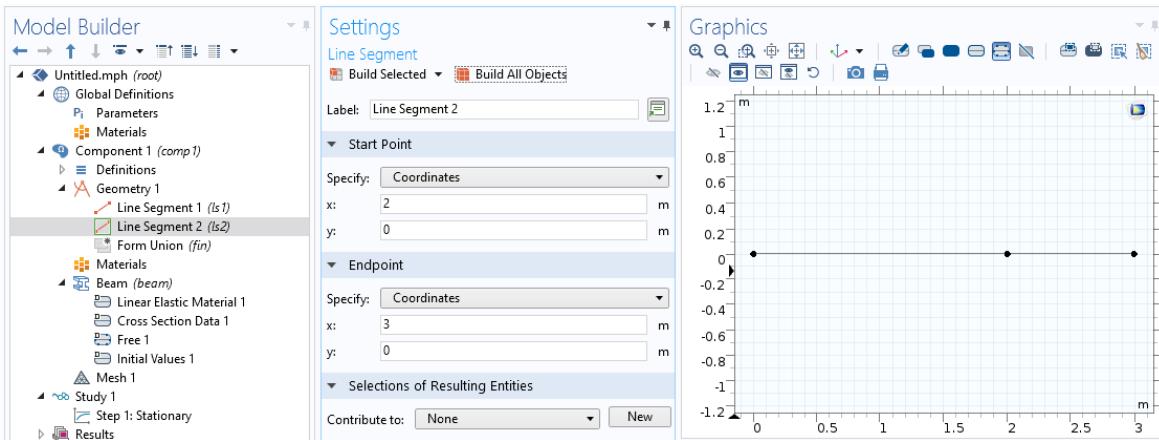




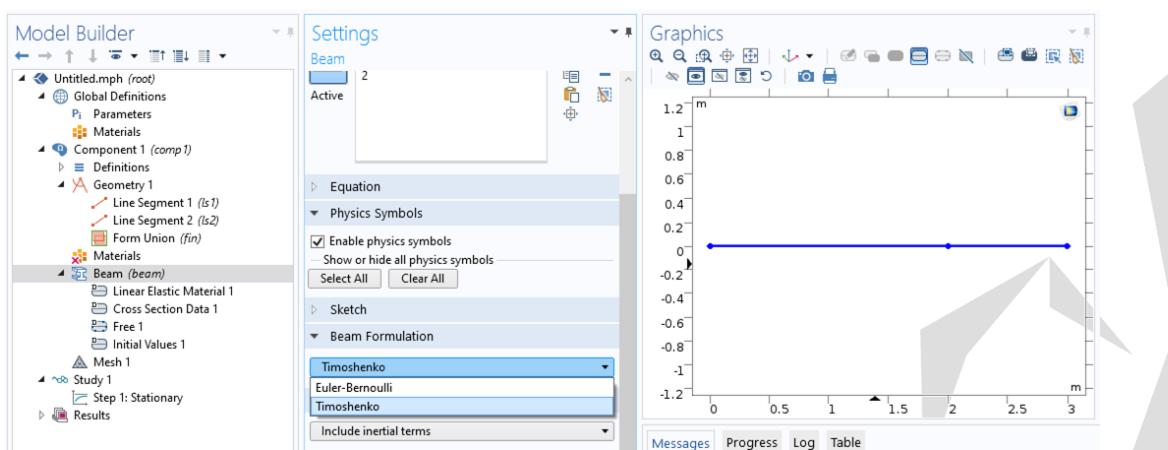
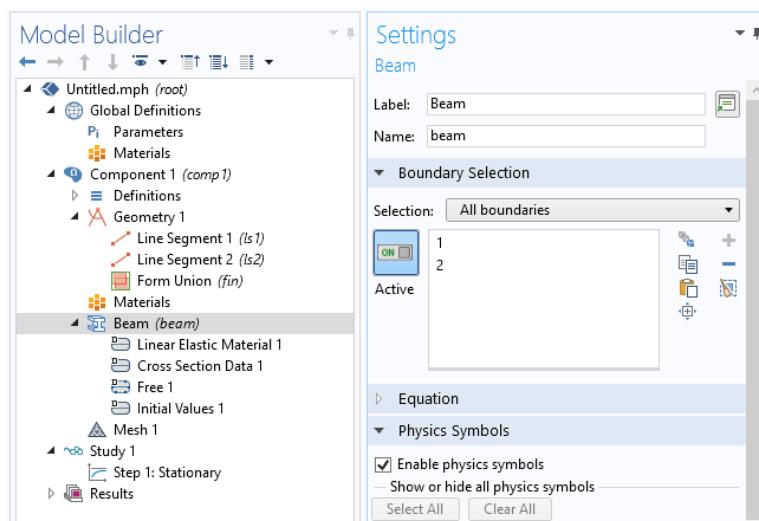
Repetir este proceso hasta crear toda la viga, siempre tomando en cuenta que debo crearla tramo a tramo dependiendo de dónde están mis cargas aplicadas y mis apoyos, por ejemplo, si mi carga es descrita por una función lo que debo hacer es dividir esa carga en varios tramos y poner cargas rectangulares que se le aproximen, pero para poder hacer esto debo crear mi viga con varios pedacitos.

#### 8) ...Line Segment → Duplicate (es como copiar y pegar un elemento de línea ya existente) ...

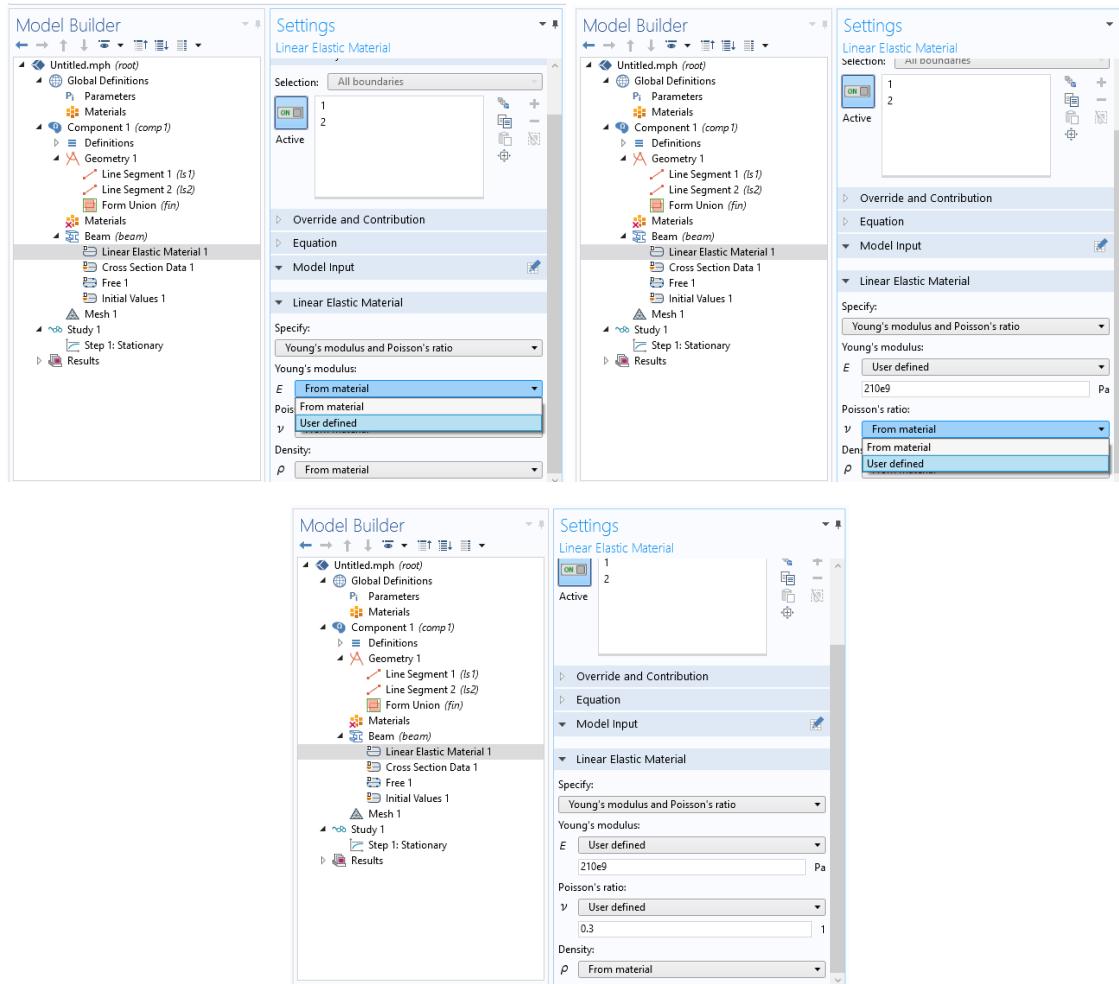




- 9) Beam → dar clic en el checkbox de Enable physics symbols para que se puedan apreciar las cargas y apoyos en el área de trabajo...
- 10) Beam → Beam Formulation → Seleccionar si quiero utilizar el método de Euler Bernoulli o Timoschenko (ambos métodos se usan para obtener la deflexión, osea la deformación vertical de la viga o la pendiente, osea el grado de inclinación de la viga, todo por medio de la ecuación de la elástica, pero usando el método de Euler Bernoulli la deflexión negativa será hacia arriba y la positiva hacia abajo mientras que con Timoschenko es lo contrario) ...

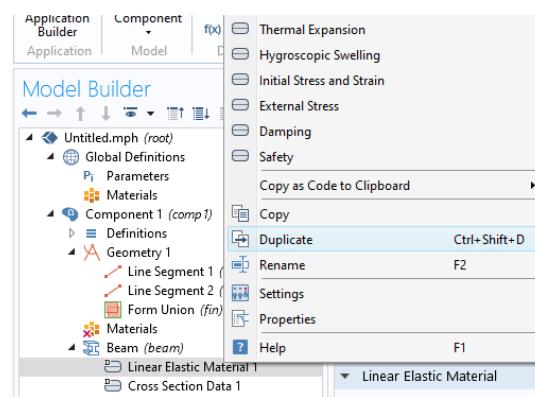


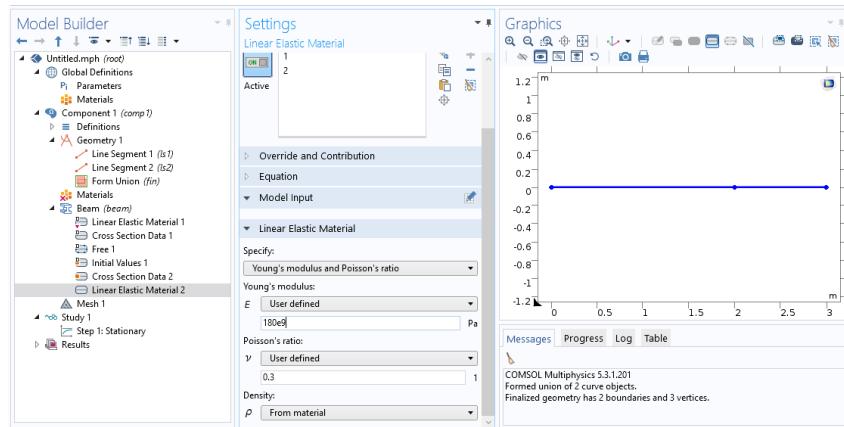
11) Beam → Linear Elastic Material → Young's modulus: (Módulo de Elasticidad) → User defined (el primer módulo de elasticidad en la viga es de 210 MPa) → Poisson's ratio: (Módulo de poission) → User defined (el módulo de poisson del acero es de 0.3 aproximadamente) → Density: (La densidad la puedo dejar sin indicar y no debe haber ningún problema) ...



$$E_1 = 210 \text{ [MPa]} = 210 \times 10^9 \text{ [Pa]}$$

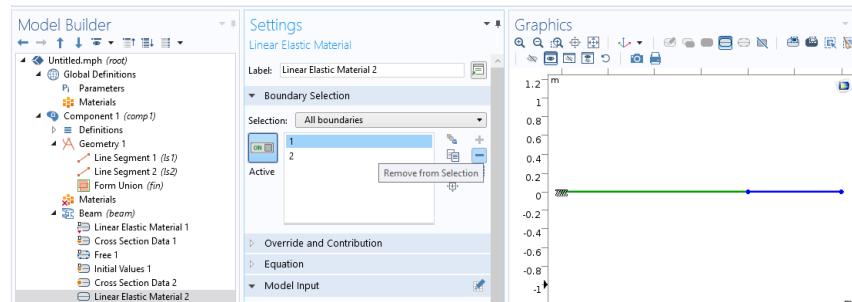
12) ...Beam → Linear Elastic Material → Duplicate (Debido a que en la viga hay dos tipos de materiales diferentes) → Definir las propiedades del segundo material en la viga...





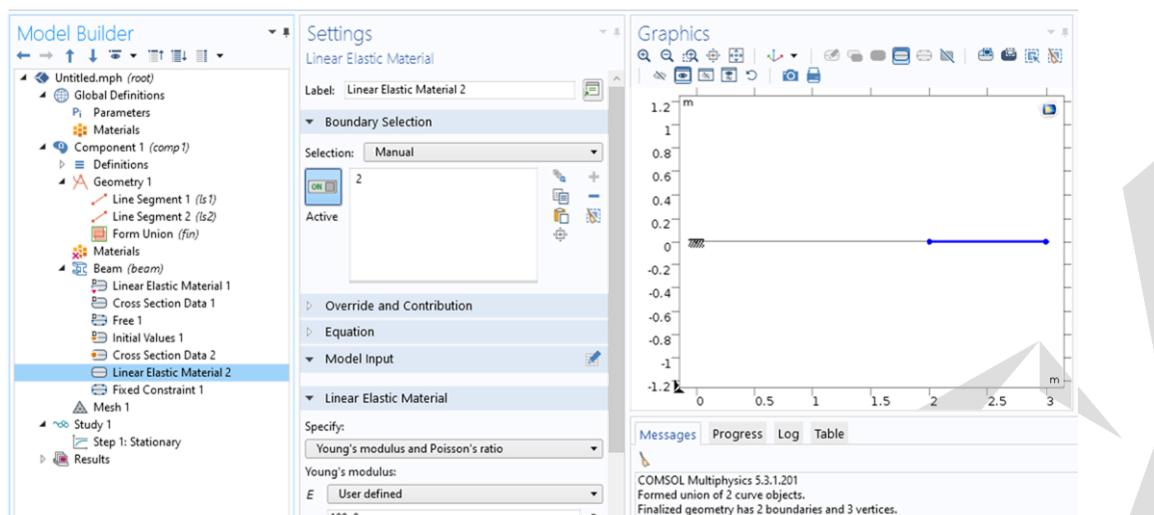
$E_2 = 180$  [MPa], el módulo de Poisson se mantiene igual para muchos materiales.

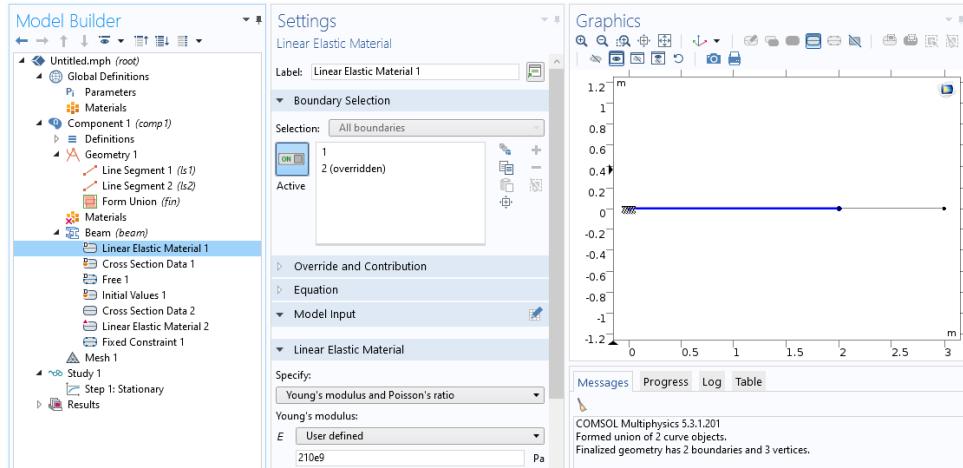
- 13) ...Beam → Linear Elastic Material 2 → Deseleccionar el tramo de mi viga que no vaya a tener el material con  $E_2$  → Boundary Selection -> Seleccionar el tramo de la viga (que se iluminará con verde en el área de trabajo) -> Dar clic en el signo de menos para removerlo...



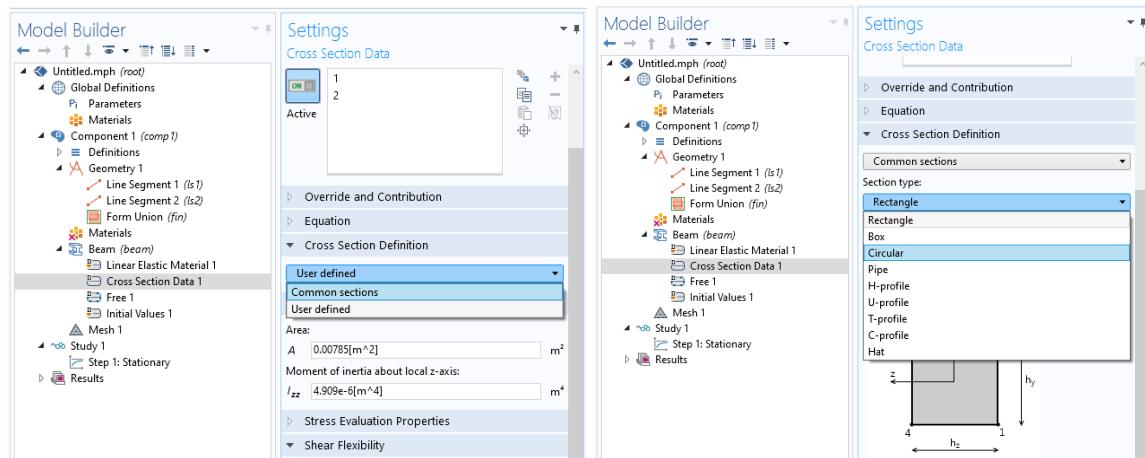
Quedará con el color azul el tramo que tiene el segundo tipo de material.

Dentro de Linear Elastic Material 1 aparecerá como overidden el tramo 2 de la viga porque lo está sobrescribiendo el Linear Elastic Material 2, esto se hace así porque dentro de Linear Elastic Material 1 no se puede eliminar ningún tramo como se hizo en el 2, más bien se deben sobrescribir añadiendo más Linear Elastic Materials en la viga.

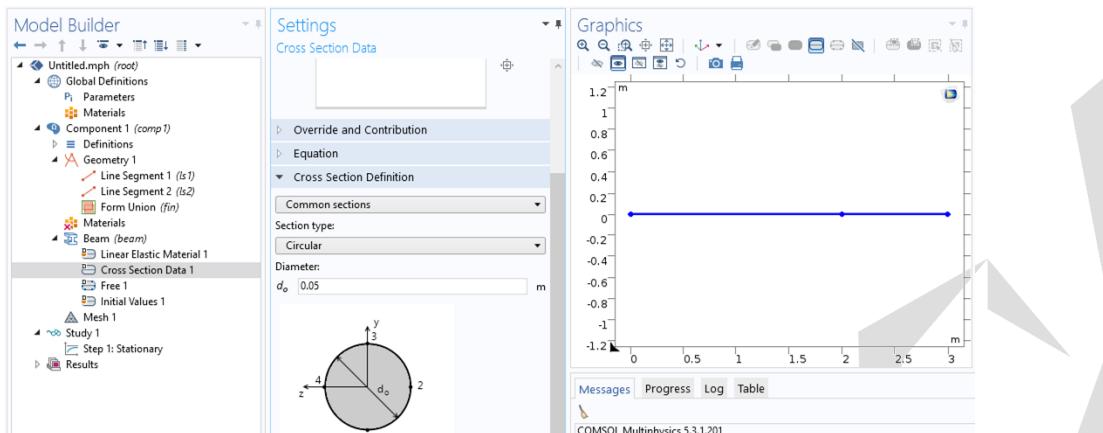




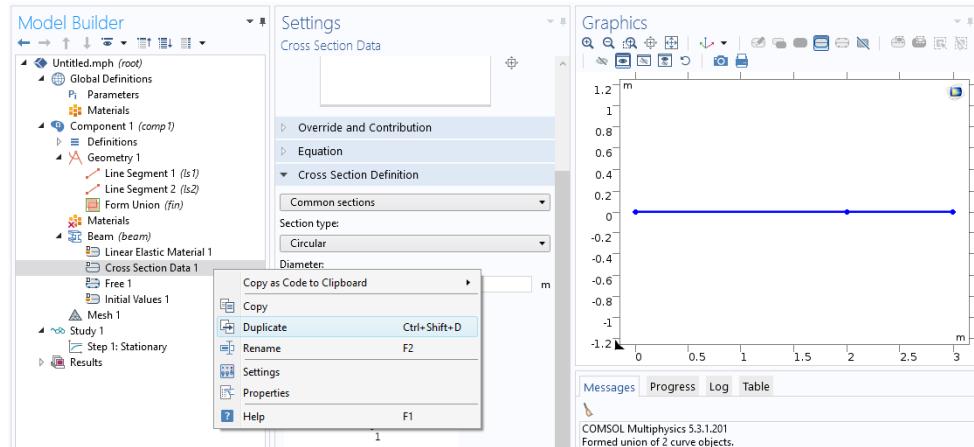
- 14) Beam → Cross Section Data (Aquí indico cuál es el área de sección transversal en mi viga) → User defined (en esta modalidad al programa no le importa cuál es la forma del perfil estructural, solo debo indicar el momento de inercia y el área) → Common sections (en esta modalidad debo elegir una forma de las que vienen predefinidas en COMSOL) → Rectangle, Box, Circular, etc. → Definir las dimensiones del área de sección transversal...



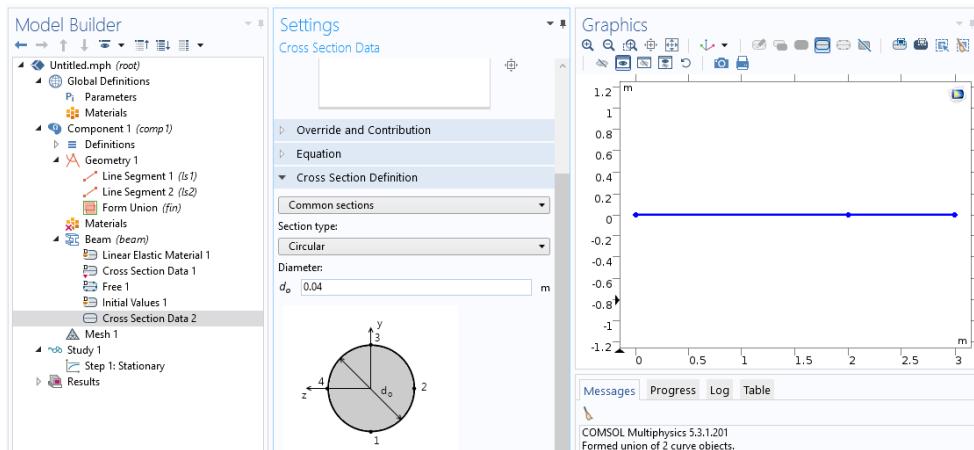
En este caso el diámetro 1 es de  $d_1 = 0.05$  [m] o  $d_2 = 50$  [mm], si quiero poner las unidades en otra unidad que no sea metro, lo debo poner entre corchetes.



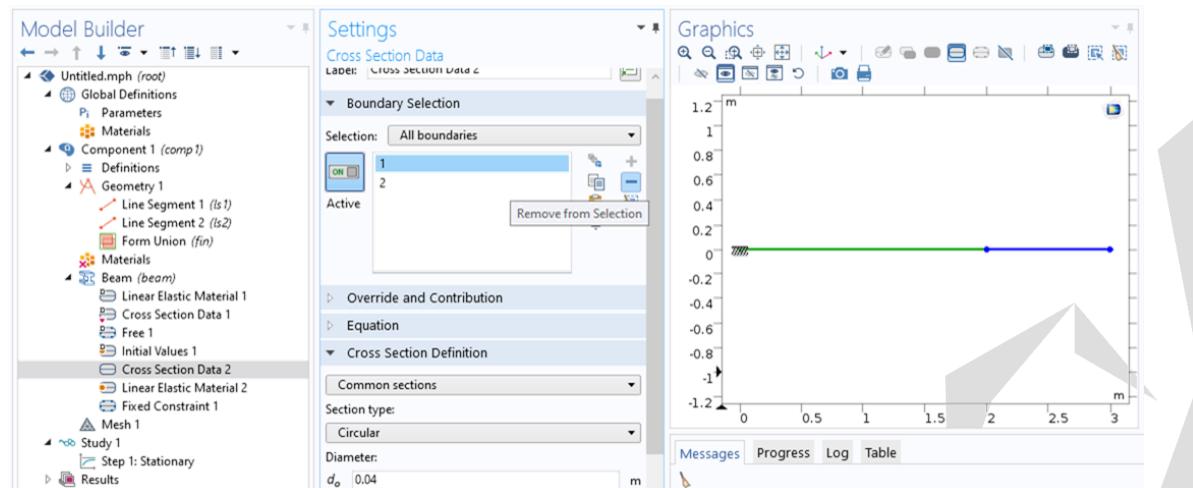
15) ...Beam → Cross Section Data → Duplicate (Debido a que en la viga hay dos áreas de sección transversal diferentes) → Definir las dimensiones del área de sección transversal...



En este caso el diámetro 2 es de  $d_2 = 0.04$  [m] o  $d_2 = 40$  [mm]

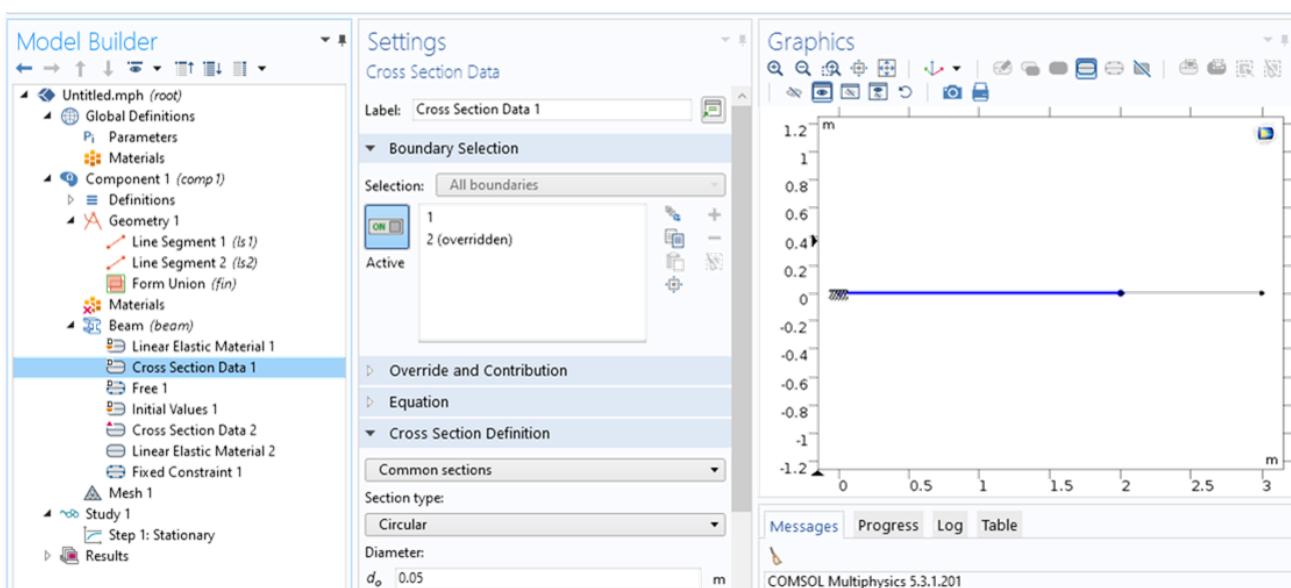
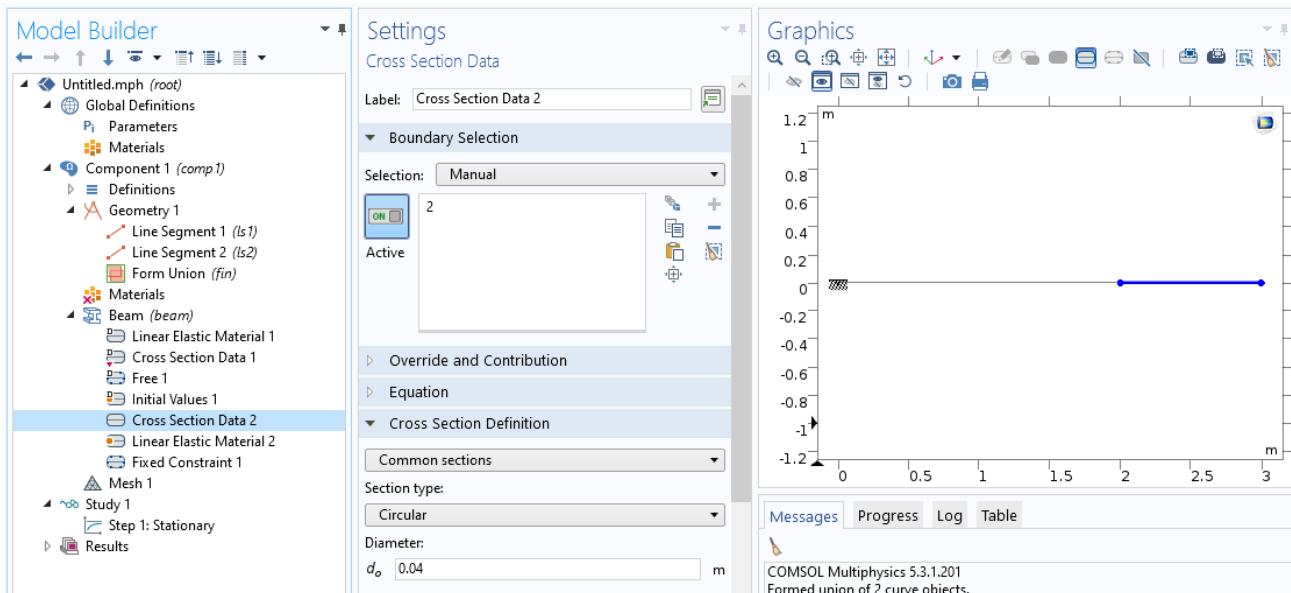


16) ...Beam → Cross Section Data 2 → Deseleccionar el tramo de mi viga que no vaya a tener el área de sección transversal con  $d_2$  → Boundary Selection -> Seleccionar el tramo de la viga (que se iluminará con verde en el área de trabajo) -> Dar clic en el signo de menos...



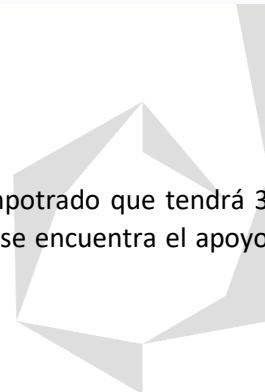
Quedará con el color azul el tramo que tiene el segundo tipo de área de sección transversal.

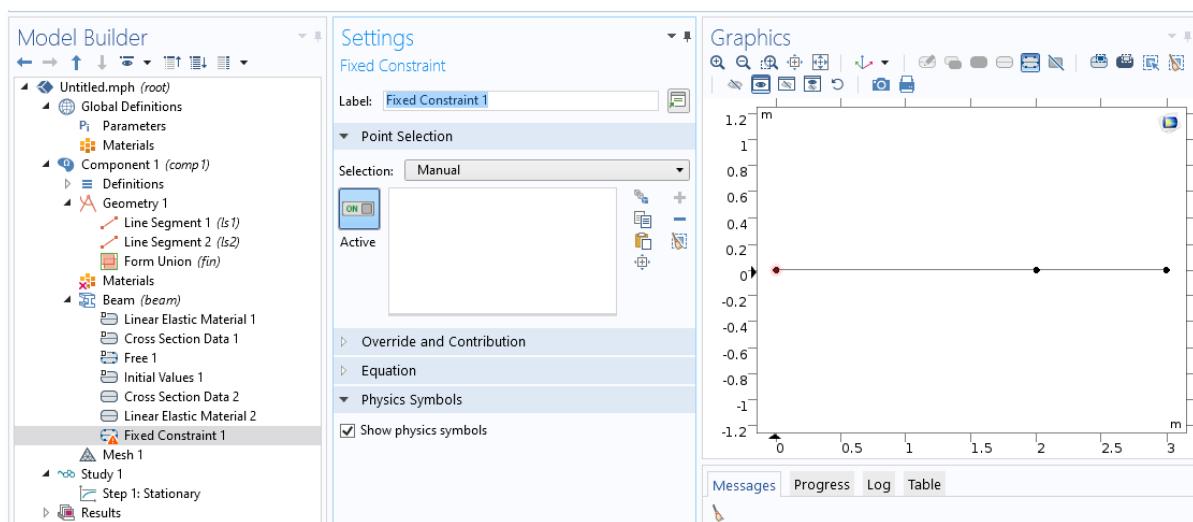
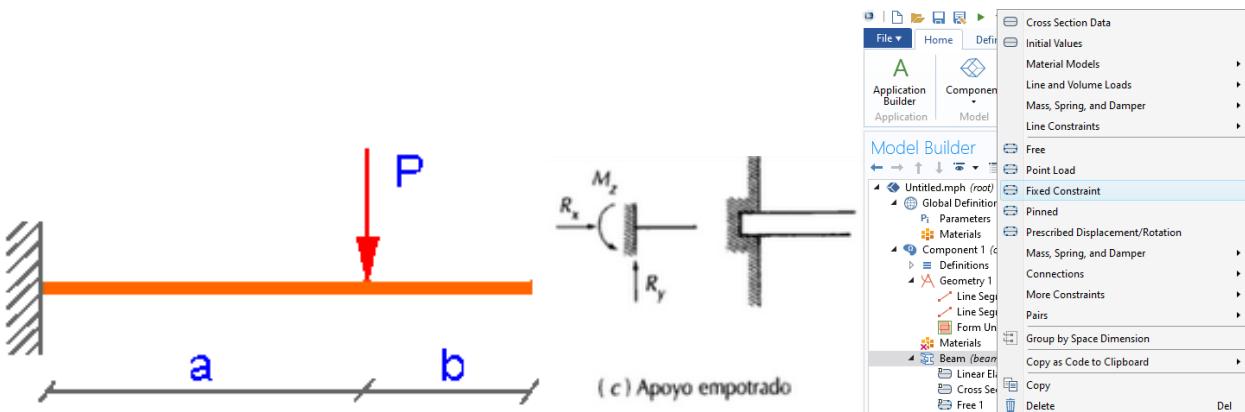
Dentro de Cross Section Data 1 aparecerá como overiden el tramo 2 de la viga porque lo está sobrescribiendo el Cross Section Data 2, esto se hace así porque dentro de Cross Section Data 1 no se puede eliminar ningún tramo como se hizo en el 2, más bien se deben sobrescribir añadiendo más Cross Section Data en la viga.



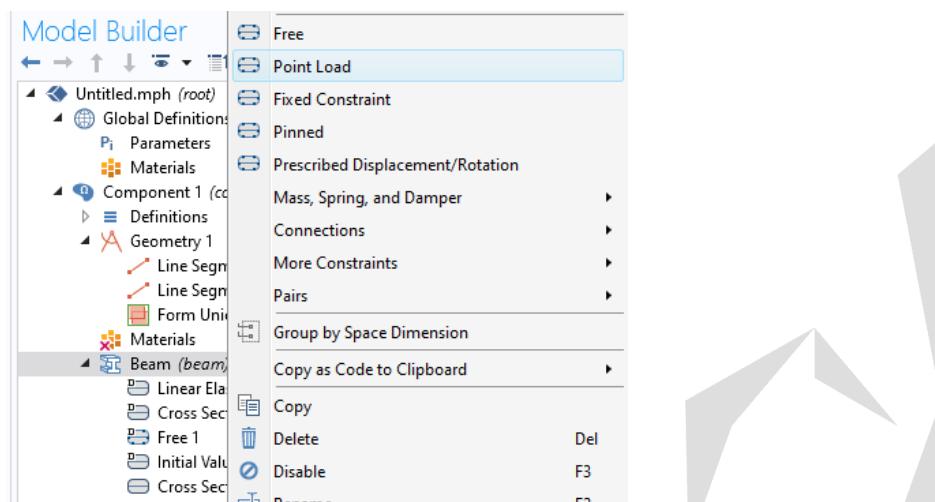
## ANÁLISIS MECÁNICO EN COMSOL:

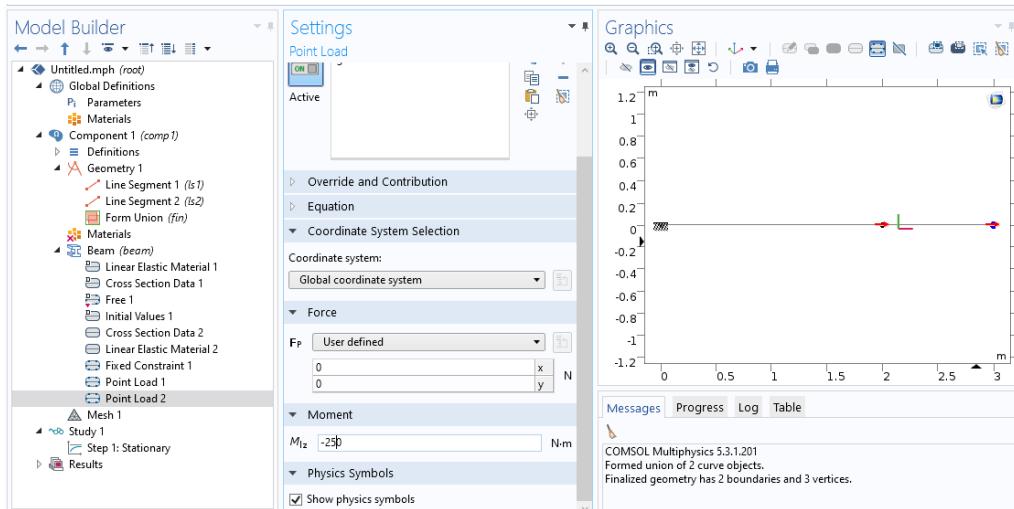
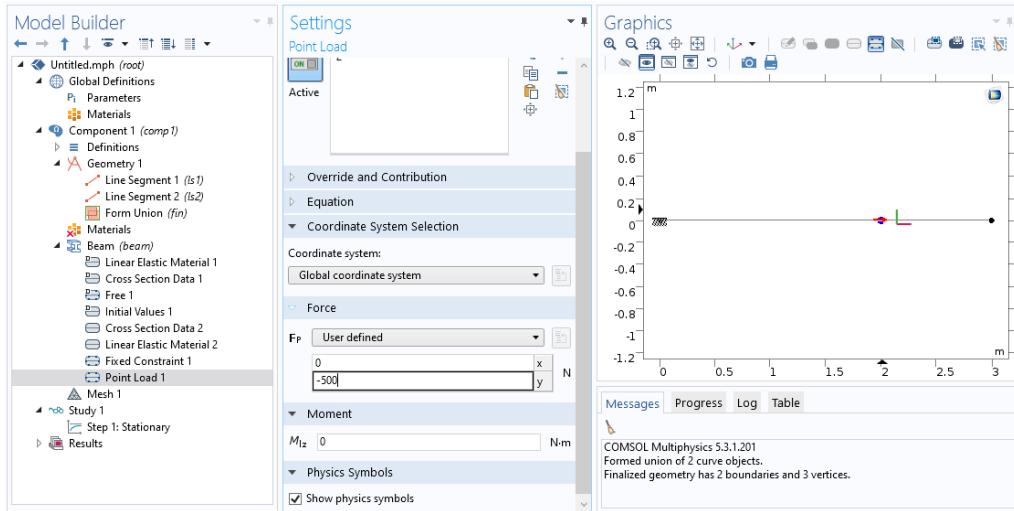
- 17) Clic derecho Beam → Fixed Constraint (Para agregar un apoyo fijo o empotrado que tendrá 3 reacciones como se muestra en la figura) → Seleccionar el punto donde se encuentra el apoyo fijo...



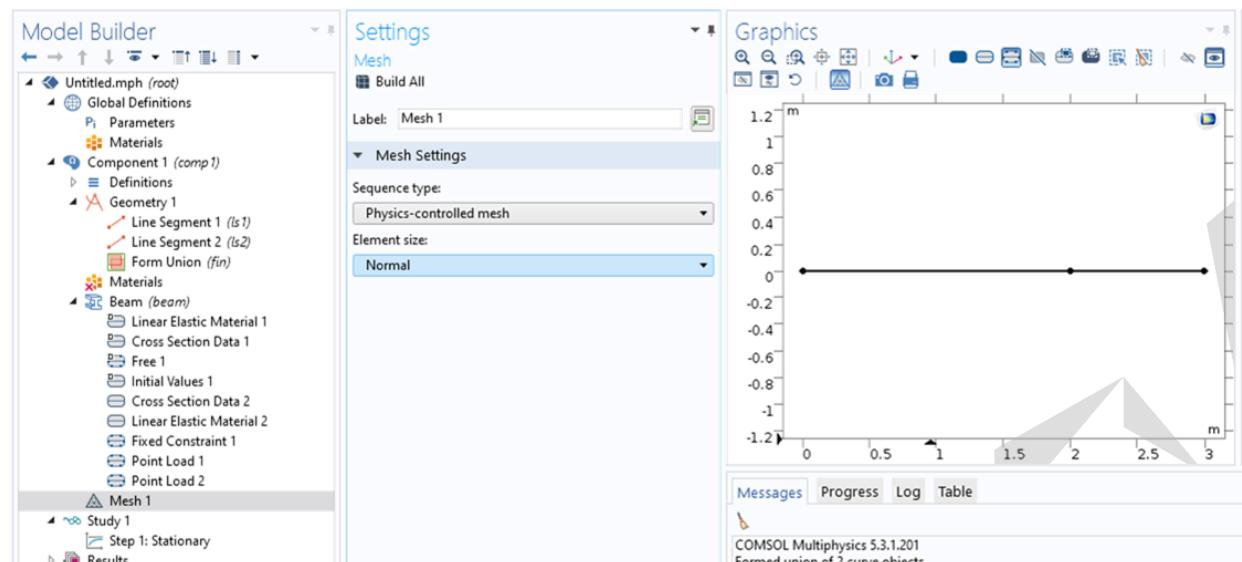


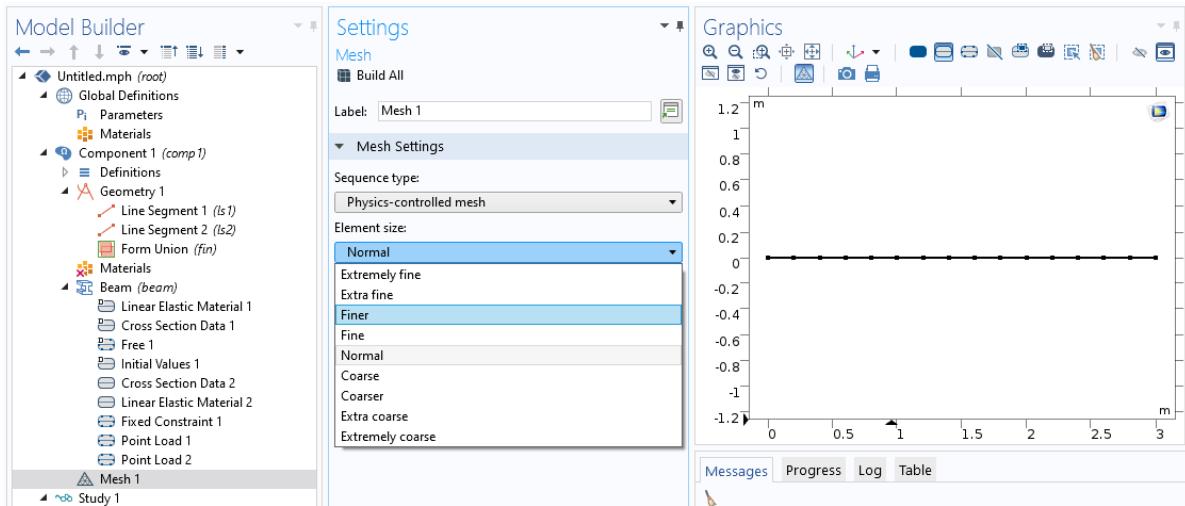
- 18) Beam → Point Load (Para indicar las fuerzas externas puntuales aplicadas en la viga) → Seleccionar el punto donde se encuentra la aplicación de la fuerza → Force → x (componente horizontal de la fuerza, signo positivo cuando tiene dirección hacia la derecha y negativo cuando va hacia la izquierda) y (componente vertical de la fuerza, signo positivo cuando tiene dirección hacia arriba y negativo cuando va hacia abajo) → Moment →  $M_{IZ}$  → Se declara con los signos que obedecen la ley de la mano derecha para momentos...





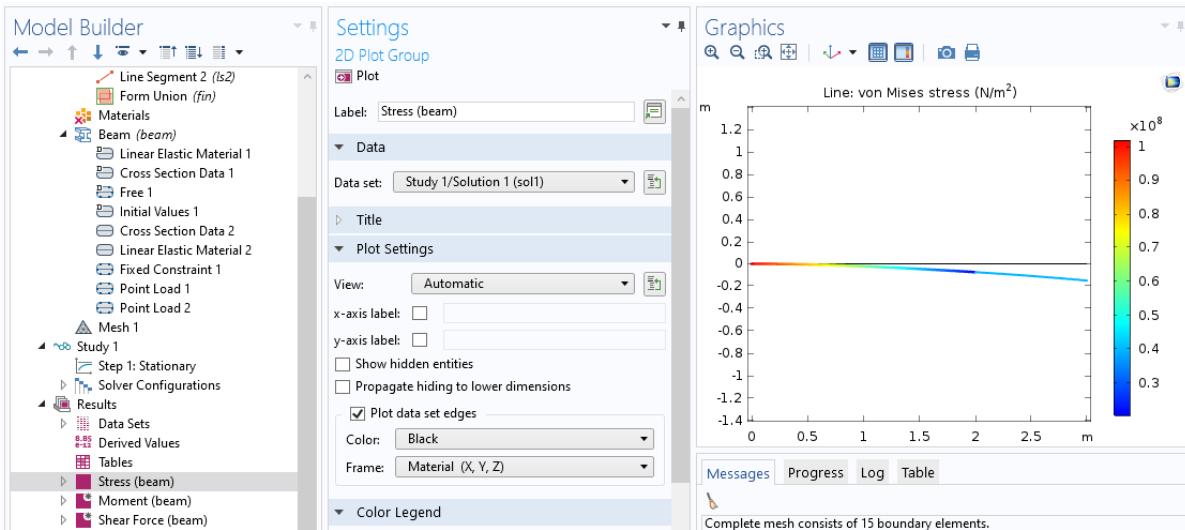
19) Malla para hacer el análisis por medio del método de elemento finito (en análisis de vigas no importa tanto el tamaño de la malla por la simplicidad de la figura) → Mesh → Build All...



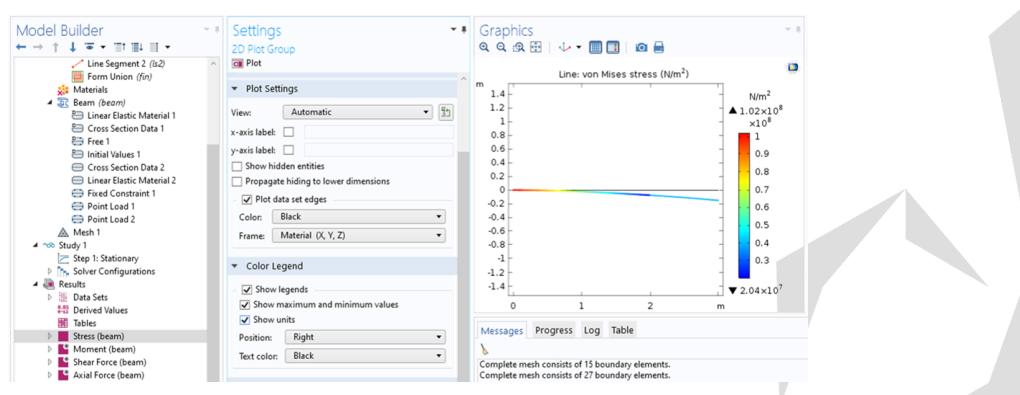


## RESULTADO DEL ELEMENTO FINITO EN COMSOL:

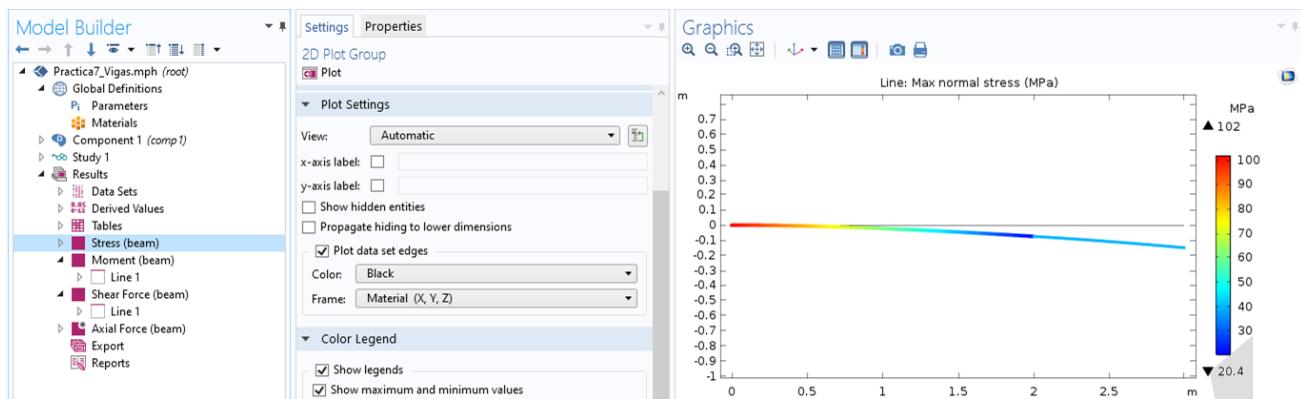
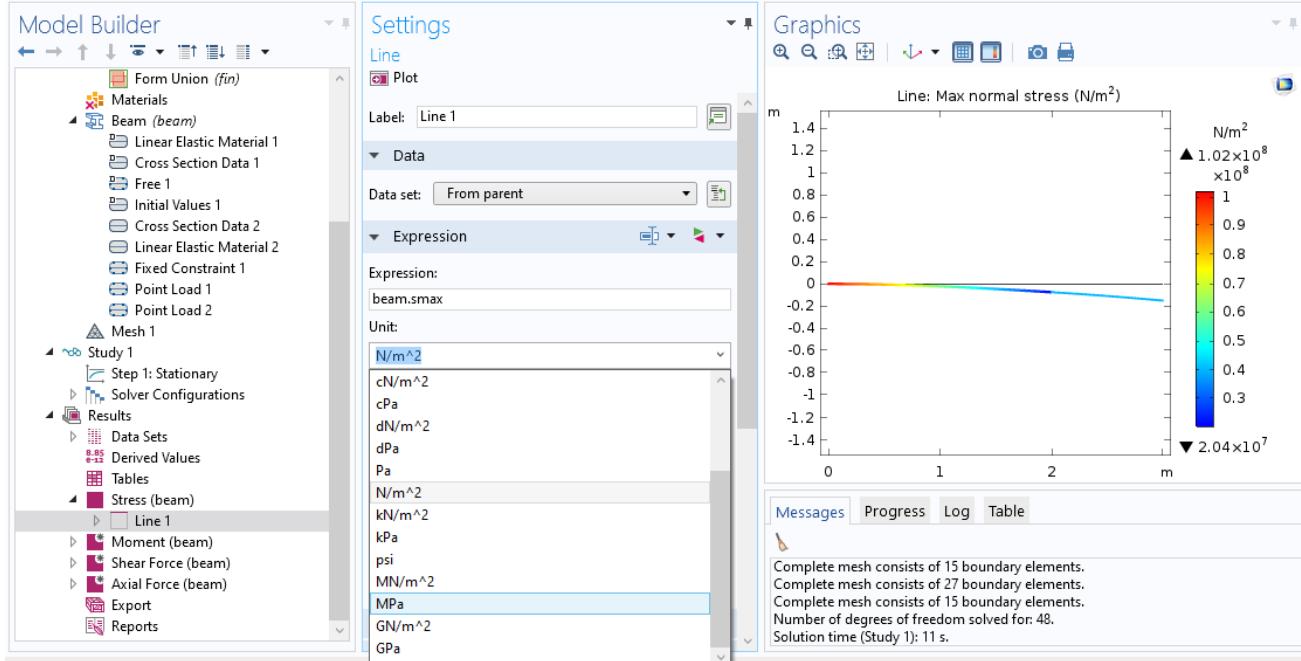
20) Study → Compute (y se generará el cálculo de esfuerzos y momento flexionante por default)



21) Results → Stress (Para ver el resultado del cálculo de esfuerzos) → Dar clic en las checkbox de Show legends, Show maximum and minimum values y Show units para que en la barra de colores se puedan ver mis resultados correctamente...

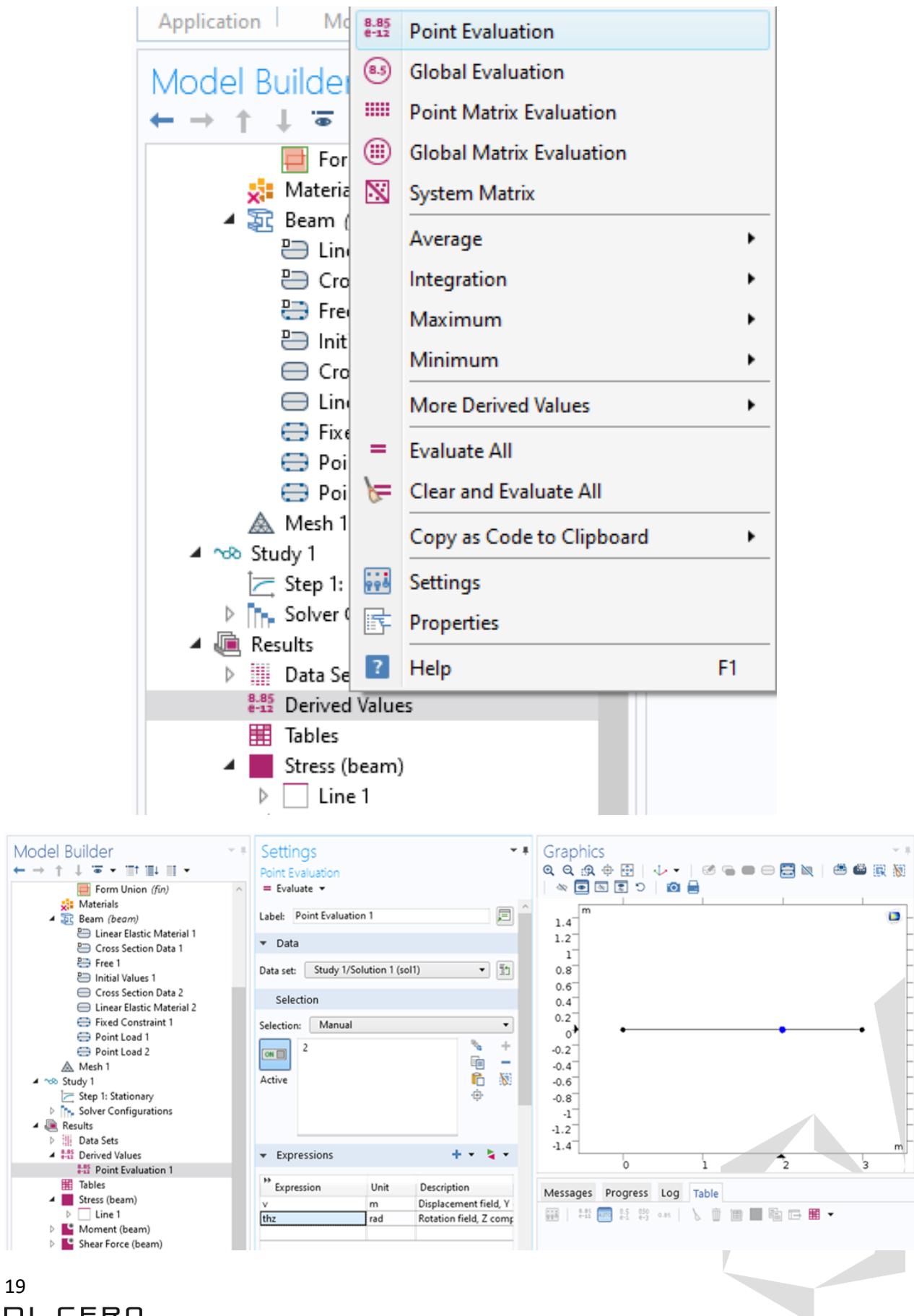


- 22) Results → Stress → Line 1 → Unit: Para indicar la unidad en la que quiero que se vean mis resultados → MPa → Plot...
- 23) Results → Line 1 → Expression: Si quiero ver el resultado de la teoría de falla de von mises o del esfuerzo cortante máximo debo poner ciertos códigos en para indicar el movimiento que quiero restringir en mi apoyo...
- ✓ beam.smax: Para ver el esfuerzo normal máximo en la viga.
  - ✓ v: Sirve para saber la deflexión de la viga.
  - ✓ thz: Se usa para saber la pendiente de la viga.

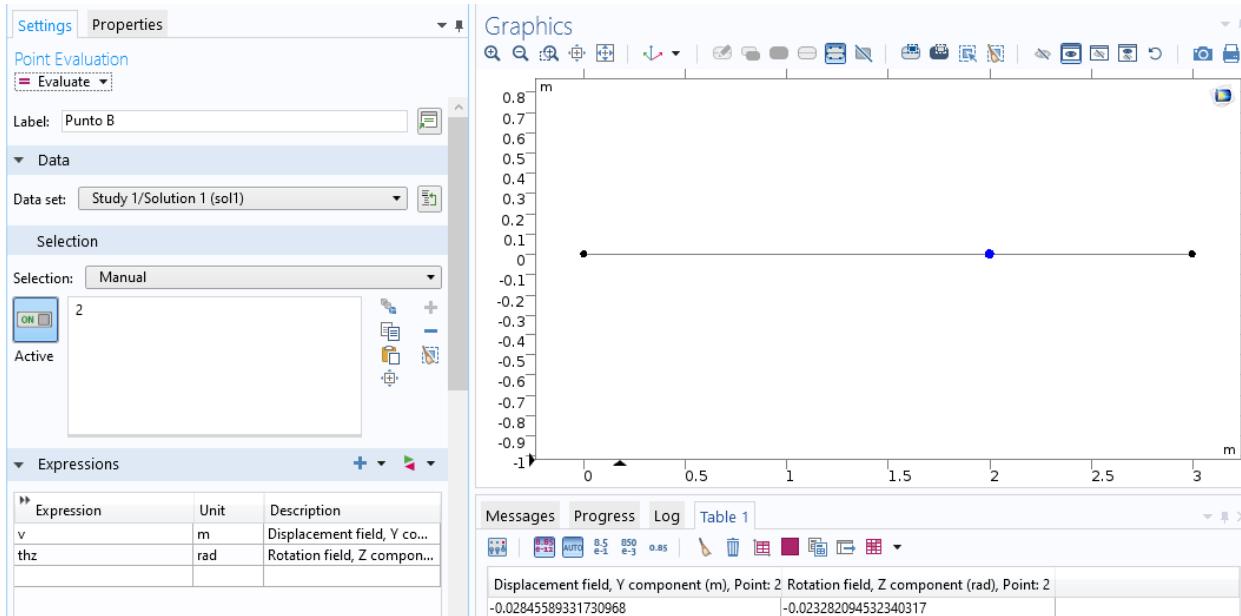


- 24) Results → Clic derecho en Derived Values → Point Evaluation (para cuando quiero saber el valor de cualquier cosa solo en un punto en específico) → Seleccionar un nodo de los mostrados donde quiero saber algún resultado → Expression (poner la expresión de lo que quiero saber), Unit (poner la unidad en la que quiero que me lo muestre) ...





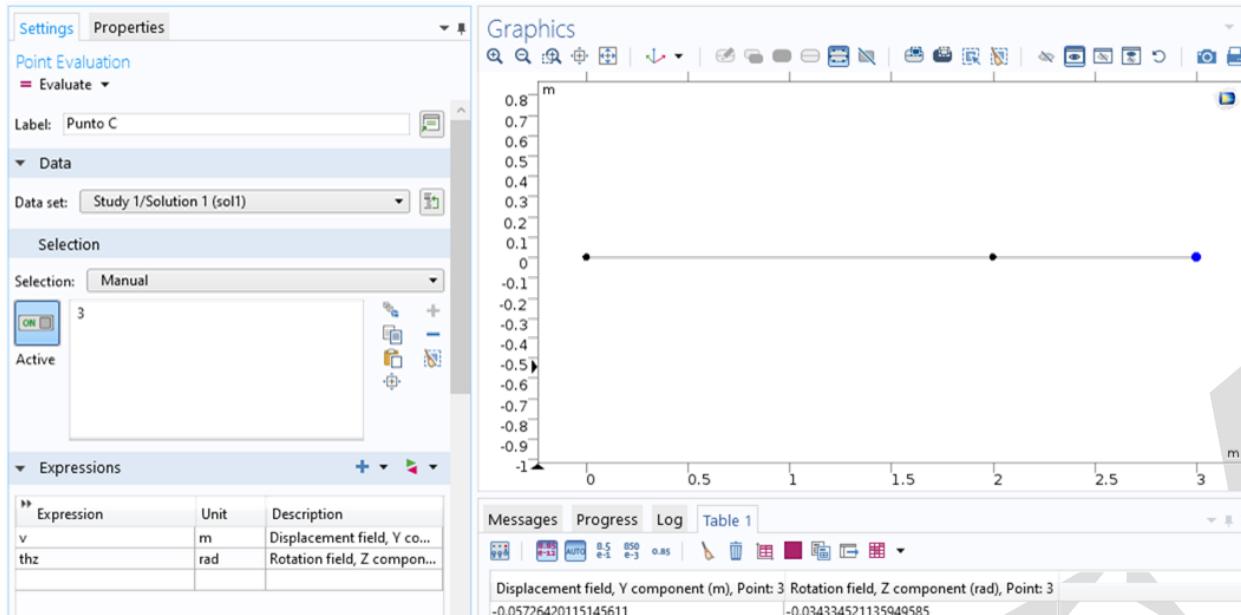
25) ...El resultado aparecerá en la tabla que se encuentra debajo de la figura → Para borrar los resultados debo dar clic en la escoba...



$$Y_B = -0.028455 [m]$$

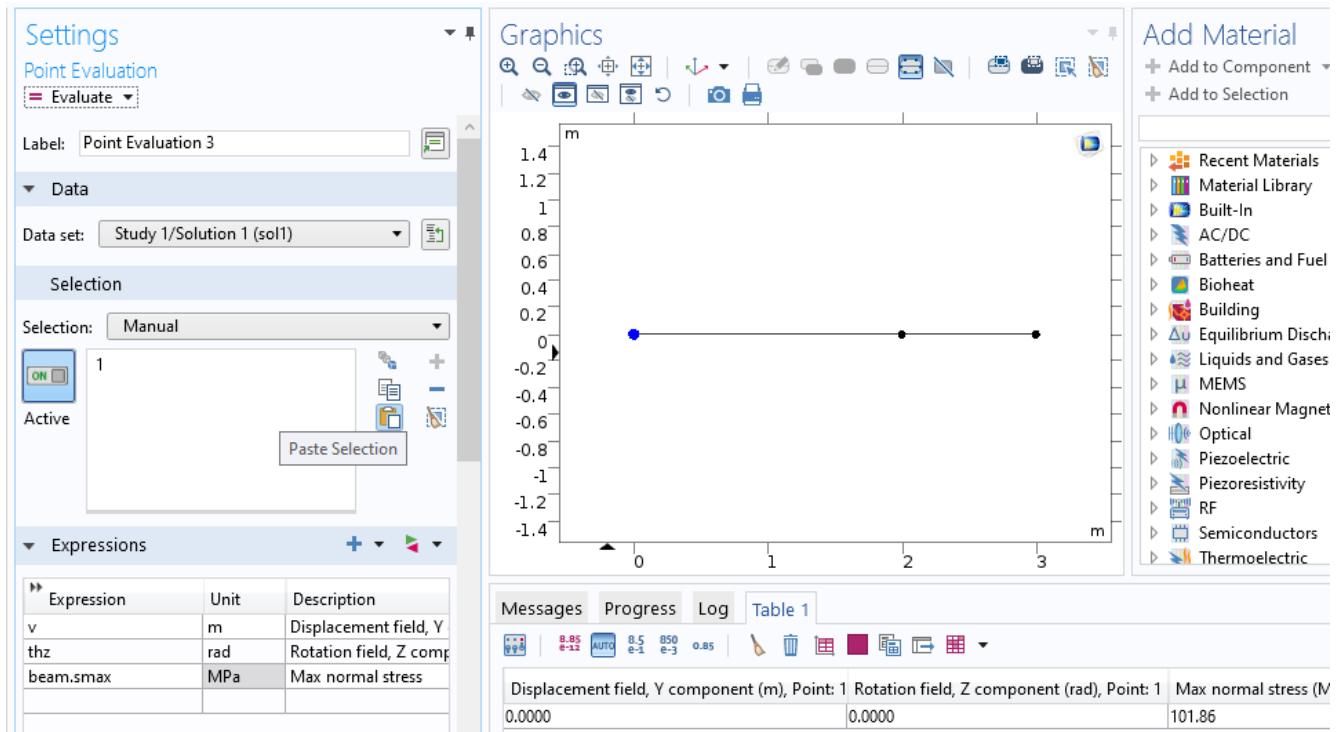
$$\theta_B = -0.023282 [rad]$$

26) ...El mismo Point Evaluation se puede usar para conocer los mismos resultados en nodos diferentes y se irán apilando en la tabla que se encuentra debajo de la figura → Para borrar los resultados debo dar clic en la escoba...



$$Y_C = -0.05726 [m]$$

$$\theta_C = -0.03433 [rad]$$



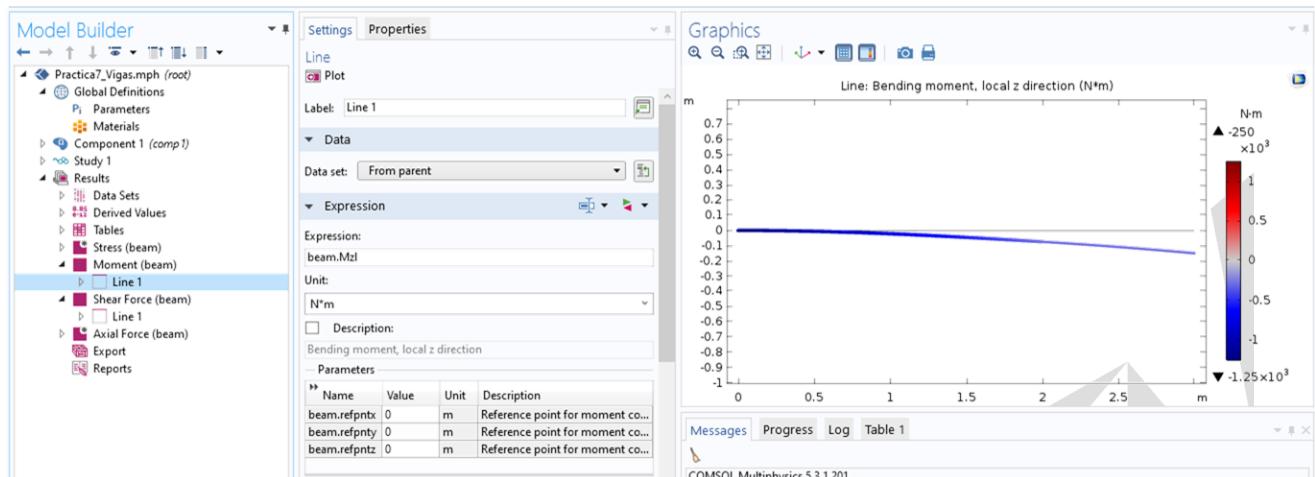
$$Y_A = 0 [m]$$

$$\theta_A = 0 [rad]$$

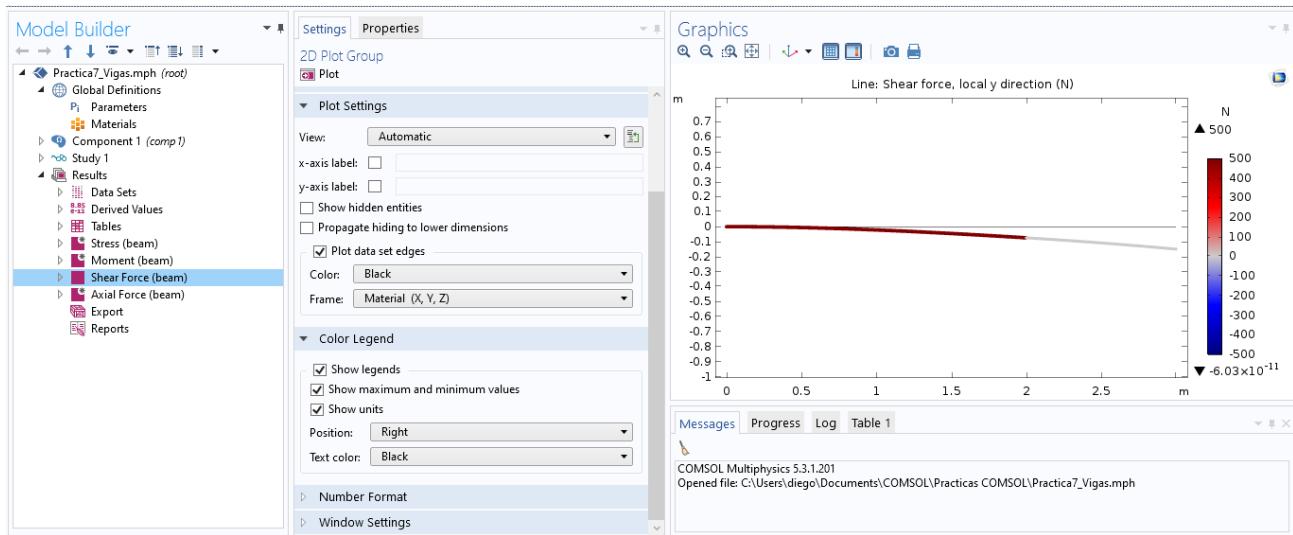
$$\sigma_{max} = 101.86 [MPa]$$

27) Results → Moment (beam) que me dice el momento flexionante en la viga → Line 1 → Unit: Para indicar la unidad en la que quiero que se vean mis resultados → MPa → Plot...

- ✓ beam.Mzl: Es la expresión que debo usar para saber el momento flexionante producido en la viga.
- ✓ beam.Tyl: Es la expresión que debo usar para saber la fuerza cortante producida en la viga.



$$MF_{max} = -1250 [N * m]$$



$$V_{max} = 500 \text{ [N]}$$

## CÓDIGO DE MATLAB:

Como en este caso no se puede aplicar la ecuación de la elástica se usa el método de elemento finito para encontrar la deflexión y pendiente en la viga, el código hecho en Matlab para realizar esta operación es el siguiente:

```

E1=210e9;%módulo de elasticidad del 1er tramo de la viga
L1=2;%longitud del 1er tramo de la viga
d1=0.05;%diámetro del 1er tramo de la viga
I1=(pi/64)*d1^4;%momento de inercia del 1er tramo de la viga

E2=180e9;%módulo de elasticidad del 2do tramo de la viga
L2=1;%longitud del 2do tramo de la viga
d2=0.04;%diámetro del 2do tramo de la viga
I2=(pi/64)*d2^4;%momento de inercia del 2do tramo de la viga

k1=BeamElementStiffness(E1,I1,L1);%Matriz de rigidez del 1er tramo de la viga

k2=BeamElementStiffness(E2,I2,L2);%Matriz de rigidez del 2do tramo de la viga

K=zeros(6,6);%zeros reserva una matriz vacía de 6x6 para que meta mi matriz
global aquí

%La función BeamAssemble mete la matriz del 1er elemento en la matriz global
de zeros
K=BeamAssemble(K,k1,1,2);
%Le debo indicar el nodo de inicio y nodo final de este tramo de la viga.

%La función BeamAssemble mete la matriz del 2do elemento en la matriz global
de zeros
K=BeamAssemble(K,k2,2,3);
%Le debo indicar el nodo de inicio y nodo final de este tramo de la viga.

```

```

%Ya con esto en la matriz global tengo todos los elementos de mis dos tramos
de viga

%Los elementos del vector de desplazamiento que sean ceros hacen que se
%cree un subsistema con el que vamos a encontrar el valor de los
%desplazamientos que no sean ceros
k=K(3:6,3:6);
%Con esto creo un subsistema diciendole al programa que extraiga de la fila 3
a la 6 y de la columna 3 a la 6
f=[-500;0;0;-250];%Creo el vector de fuerzas externas del subsistema creado
q=k\f;%Con esto encuentro los desplazamientos Q3,Q4,Q5 y Q6 de arriba hacia
abajo

%Para encontrar las reacciones debo usar las filas que eliminé cuando el
%desplazamiento Q era cero y todas las columnas de la matriz global
kk=K(1:2,1:6);%Con esto le digo al programa que extraiga de la matriz global
de la fila 1 a la 2 y de la columna 1 a la 6
%También creo un vector que tenga todos los grados de libertad de la viga,
incluidos los que valían cero
Q=[0;0;q(1);q(2);q(3);q(4)];%Los valores que ya había obtenido los extraigo
del vector q indicando sus índices
F=kk*Q;%Con esta operación ya obtengo el valor de las reacciones en donde Q=0

```

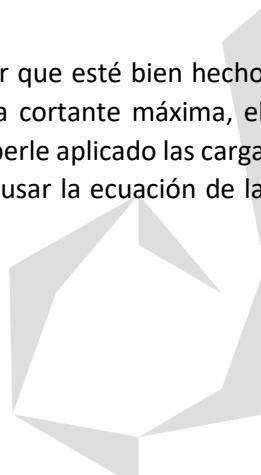
Y los resultados obtenidos de Q3 (osea la deflexión del punto B), Q4 (osea la pendiente del punto B), Q5 (osea la deflexión del punto C) y Q6 (osea la pendiente del punto C) son los siguientes:

$$\begin{aligned}
q = \\
-0.0285 \\
-0.0233 \\
-0.0573 \\
-0.0343
\end{aligned}$$

Podemos ver entonces que ambos métodos dan resultados similares.

## CONCLUSIÓN:

Con el método numérico apoyado por el programa COMSOL podemos comprobar que esté bien hecho nuestro método analítico y visualizar el momento flexionante máximo, la fuerza cortante máxima, el esfuerzo máximo, la deflexión y pendiente en cada punto de la viga después de haberle aplicado las carga de manera gráfica, además para casos especiales como este donde no se puede usar la ecuación de la elástica es de mucha utilidad.



# ERROR:

$$error = \frac{|valor\ obtenido\ en\ el\ programa| - |valor\ analítico|}{|valor\ obtenido\ en\ el\ programa|} * 100[\%]$$

Un error menor al 11% es aceptable entre ambos métodos analítico y numérico.

*MFmax*:

$$error = \frac{|1250| - |1250|}{|1250|} * 100 = 0\%$$

*Vmax*:

$$error = \frac{|500| - |500|}{|500|} * 100 = 0\%$$

*σmax*:

$$error = \left| \frac{|101.86| - |101.8591|}{|101.86|} \right| * 100 = 0.8246\%$$

*Y<sub>B</sub>*:

$$error = \left| \frac{|-0.028455| - |-0.0285|}{|-0.028455|} \right| * 100 = 0.1581\%$$

*θ<sub>B</sub>*:

$$error = \left| \frac{|-0.023282| - |-0.0233|}{|-0.023282|} \right| * 100 = 0.0773\%$$

*Y<sub>C</sub>*:

$$error = \left| \frac{|-0.05726| - |-0.0573|}{|-0.05726|} \right| * 100 = 0.0698\%$$

*θ<sub>C</sub>*:

$$error = \left| \frac{|-0.03433| - |-0.0343|}{|-0.03433|} \right| * 100 = 0.0873\%$$

# BIBLIOGRAFÍA:

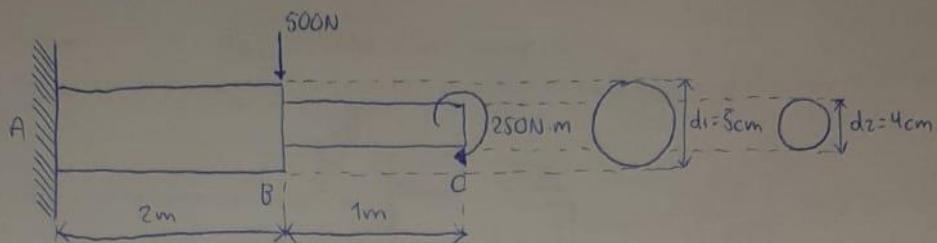
MECÁNICA DE MATERIALES (5TA EDICIÓN) – FERDINAND P. BEER.



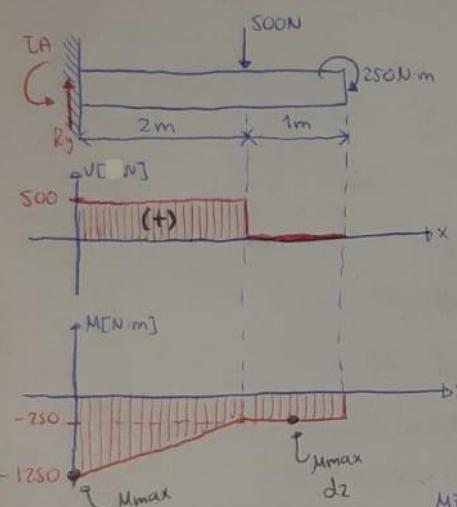
# MÉTODO ANALÍTICO:

Práctica 7: Vigas

$$E=210 \text{ [GPa]}$$



Obtener los diagramas de fuerza constante y momento flexionante para obtener el esfuerzo en la viga y encontrar la deflexión y pendiente en los puntos B y C.



1) Encontrar las fuerzas de reacción en los apoyos.

$$\Sigma T_A = T_A + (2)(-500) - 250 = 0 \rightarrow T_A = 1250 \text{ N·m}$$

$$\Sigma F_y = R_y - 500 = 0 \rightarrow R_y = 500 \text{ N}$$

$$M(x=0) = -1250 \text{ N·m}$$

$$M(x=2) = -1250 + 500(2) = -250 \text{ N·m}$$

$$M(x=3) = -250 + 250 = 0 \text{ N·m}$$

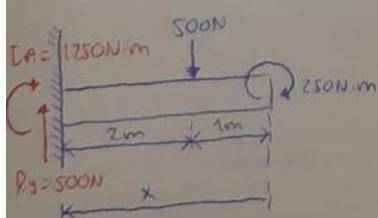
2) Ya que hay encontrado  $M_{\text{max}}$  debo obtener los esfuerzos de la viga tomando en cuenta el área de sección transversal.

$$\text{CONVENCIÓN DE SIGNOS: } \begin{array}{l} F(+), F(-), C(+), C(-) \\ M(+), M(-) \end{array}$$

$$J = \frac{\pi d^4}{32} \quad d_1: \quad J_1 = \frac{\pi (1250)^4}{32} \quad d_2: \quad J_2 = \frac{\pi (5 \times 10^{-2})^4}{32}$$

$$\sigma_1 = \frac{M_1 \cdot I}{J} = \frac{32(250)}{\pi (4 \times 10^{-2})^3} = 39.7887 \text{ [MPa]} \quad \sigma_2 = \frac{M_2 \cdot I}{J} = \frac{32(1250)}{\pi (5 \times 10^{-2})^3} = 101.8591 \text{ [MPa]}$$

3) Encontrar la deflexión y pendiente en la viga, las fuerzas repartidas ya sea rectangulares o triangulares se deben extender.



CONVENCIÓN DE

SIGNOS:

$F(+)$ ,  $F(-)$ ,  $C(+)$ ,  $C(-)$

$M(+)$ ,  $M(-)$

$$E(Iz)y'' = M(x)$$

$$y' = \theta \text{ pendiente} \quad Iz = \frac{\pi(d^4)}{32} \quad y = \text{deflexión}$$

$$U_{\text{max}} = U_t = 101.8591 \text{ [MPa]}$$

ecuación de la elástica.

3.1) Obtener  $M(x)$ .

$$M(x) = 500(x) + 1250(x)^2 - 500(x-2)$$

$$E(Iz)y'' = 500x + 1250x^2 - 500(x-2)$$

esta ecuación se podría usar si el área de sección transversal fuese cte.

3.2) Integrar 2 veces para obtener la pendiente y deflexión

$$M(x) = 500(x) + 1250(x)^2 - 500(x-2)$$

$$E(Iz)y'' = 500x + 1250x^2 - 500(x-2)$$