Задачи к лекции 9

Задача 1. *Для следующих поверхностей вычислите вторую фундаментальную форму, среднюю и гауссову кривизны*: (1) *сфера* $x^2+y^2+z^2=R^2$; (2) *тор* $r(u,v)=\big((a+b\cos u)\cos v,(a+b\cos u)\sin v,b\sin u\big)$, $a>b>0$; (3) *график гладкой функции* $z=f(x,y)$; (4) *поверхность, полученная вращением графика функции* $x=f(z)>0$ *вокруг оси* z; (5) *развертывающаяся поверхность* $r(u,v)=\gamma(u)+v\,\dot\gamma(u)$. (6) *В задаче* (5) *найти главные кривизны и главные направления.*

Задача 2. *Пусть* S *— некоторая данная поверхность. Отложим на нормалях к поверхности* S *в одном направлении отрезки постоянной длины. Концы отложенных отрезков описывают поверхность* S^*, *"параллельную" поверхности* S. *Если уравнение поверхности* S *есть* $r=r(u,v)$, *то уравнение* S^*

$$\rho=r(u,v)+a\,n(u,v),$$

где $n(u,v)$ *— единичный вектор нормали к* S, $a=\mathrm{const}$.

Выразите коэффициенты первой и второй фундаментальных форм поверхности S^* *через коэффициенты первой и второй фундаментальных форм поверхности* S.

Задача 3. *Докажите, что* (1) *компактное двумерное многообразие без края нельзя погрузить в* $\mathbb{R}^3$ *так, чтобы гауссова кривизна в каждой точке была отрицательна*; (2) *неориентируемое двумерное многообразие нельзя погрузить в* $\mathbb{R}^3$ *так, чтобы гауссова кривизна в каждой точке была положительна.*

Задача 4. *Докажите, что если у регулярной поверхности тождественно равны нулю ее средняя и гауссова кривизны, то эта поверхность совпадает с плоскостью или ее частью.*