1 Лекция 10

1.1 Дискретный аналог теоремы Боля

Пусть $f(x)$ - периодическая функция с периодом 1. Пусть $\alpha \notin \mathbb{Q}$, обозначим через $S_n = \sum_{j=1}^{n} f(j\alpha + x)$.

Теорема: Пусть $f \in C^2$, тогда $\forall N, \forall \varepsilon > 0 \exists n \geq N : |S_n(x)| < \varepsilon$. И $\int_0^1 f(x)dx =< f >= 0$.

$\triangle$ Множество иррациональных чисел представляется в виде объединения $K_1 \bigcup K_2$, причем $K_1 \bigcap K_2$ - пусто. K_1 определим следующим образом: Число $\alpha \in K_1$ тогда и только тогда $\Leftrightarrow$, когда неравенство $|n\alpha - m| < n^{-3\backslash 2}$ имеет бесконечно много решений в целых числах. Остальные иррациональные числа отнесем к K_2. Заметим, что в определении K_1 m и n можно считать взаимно простыми. Заметим, что K_2 имеет полную меру на $\mathbb{R}$, K_1 всюду плотно и имеет мощность континуума.

Лемма 1: Если $\alpha \in K_2$, то $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2|n\alpha - m_n|} < \infty$, где m_n - последовательность целых чисел.

Докажем лемму. Пусть $S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2|n\alpha - m_n|}$, нас интересует случай $|n\alpha - m_n| < 1$ (иначе нас не устраивает). $\frac{1}{2^{j+1}} \leq |n_k^j \alpha - m_{n_k^j}| < \frac{1}{2^j}, j = 0, 1, 2, \ldots$. При этом можно упорядочить: $n_{k+1}^j > n_k^j, k = 1, 2, \ldots$. Запишем неравенство: $|(n_{k+1}^j - n_k^j)\alpha - \overline{m}| < \frac{1}{2^{j-1}}$, и еще одно: $|\overline{n}\alpha - \overline{m}| < \frac{1}{2^{j-1}}$, $N_j = min \overline{n} \geq 1$, (что такое $\overline{n}$?)

$(n_{k+1}^j - n_k^j) \geq N_j$ $|n_1^j \alpha - m_{n_1^j}| < \frac{1}{2^j} < \frac{1}{2^{j-1}} \Rightarrow n_1^j \geq N_j \Rightarrow n_k^j \geq kN_j$, $N_j^{3\backslash 2} \geq 2^{j-1} \Rightarrow N_j \geq [2^{j-1}]^{2\backslash 3}$ Обозначим через S_j - часть S, отвечающую j - ому неравенству:

$S_j = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(n_k^j)^2 |n_k^j \alpha - m_{n_k^j}|} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{j+1}}{(kN_j)^2} = \frac{2^{j+1}}{N_j^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \frac{\pi^2 2^{j-1} 4}{6[2^{j-1}]^{4/3}} = \frac{2\pi^2}{3} (\frac{1}{\sqrt[3]{2}})^{j-1}$ $\sqrt[3]{3} > 1 \Rightarrow \sum S_j < \frac{2\pi^2}{3} \sum (\frac{1}{\sqrt[3]{2}})^{j-1} < \infty$ отсюда получаем требуемое.

Лемма 2: Имеет место неравенство $|e^{2\pi i n\alpha} - 1| \geq 4|n\alpha - m|$ для некоторого целого m. Докажем лемму: $|e^{\pi i n\alpha} - e^{-\pi i n\alpha}| = 2|\sin(\pi n\alpha)| = 2|sin\pi(n\alpha - m)| \geq 4|n\alpha - m|$.

Лемма 3: Если $f \in C^2$, то $\exists g \in C$ такая, что: $g(x+1) = g(x)$, $S_n(x) = \sum_{j=1}^{n} f(j\alpha + x) = g((n+1)\alpha + x) - g(x)$. Докажем лемму: $f(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty} f_n e^{2\pi i n x}$, $x mod 1$, так как $f \in C^2$, то $|f_n| \leq \frac{c}{n^2}, n \geq 1$ (грубая оценка). $S_n(x) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{-\infty}^{+\infty} f_m e^{2\pi m(j\alpha + x)} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} f_m \sum_{j=1}^{n} e^{2\pi i m j\alpha} e^{2\pi i m x} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{f_m e^{2\pi i m x}(e^{2\pi i m\alpha(n+1)} - 1)}{e^{2\pi i m\alpha} - 1}$ Берем $g(x) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{f_m e^{2\pi i m x}}{e^{2\pi i m\alpha} - 1}$. Из леммы 2 следует, что: $|e^{2\pi i m\alpha} - 1| \geq 4|m\alpha - l|, \alpha \in K_2$. Применяем лемму 1: $|f_m| \leq \frac{c}{m^2}$, так как $f \in C^2$. Ряд для функции $g(x)$ сходится и является непрерывной 1-периодической функцией.

Мажоранта: $\sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{c}{e^{m^2|m\alpha - lm|}} < \infty \Rightarrow S_n(x) = g((n+1)\alpha + x) - g(x)$ $\square$

Замечание: Вместе с этими леммами доказана теорема для $\alpha \in K_2$. Последовательность $\{x + (n+1)\alpha\}$ всюду плотно распределена на $[0; 1]$, а так как g - непрерывна, то $S_n(x)$ сколь угодно мала равномерно по x. Далее будем рассматривать случай, когда $\alpha \in K_1$.

Вычисление Эйлера : $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$. Поясним это вычисление. Рассмотрим известное из анализа представление функции $\sin x$ в виде бесконечного произведния: $\sin x = x(1 - \frac{x^2}{\pi^2})(1 - \frac{x^2}{4\pi^2}) \ldots$. С другой стороны, рассмотрим разложение функции $\sin x$ в ряд Тейлора и приравняем эти представления: $1 - \frac{x^2}{6} + \ldots = (1 - \frac{x^2}{\pi^2})(1 - \frac{x^2}{4\pi^2}) \ldots \Rightarrow \frac{1}{6} = \frac{1}{\pi^2} + \frac{1}{4\pi^2} + \ldots$

Лемма: Пусть $f(x)$ - 1 - периодична и $< f >= 0$, $f \in C^2$, $\alpha \in K_1$.

Тогда $|\sum_{j=1} nf(j\alpha + x| \le \frac{M_1}{\sqrt{n}} + \frac{M_2}{24n}$, где $M_1 = \max |f^{'}(x)|$, $M_2 = \max |f^{''}(x)|$.

$\triangle$ Фиксируем $\frac{m}{n} : |\alpha - \frac{m}{n}| < \frac{1}{n^{5/2}}$

$|\sum_{j=1}^{n} f(j\alpha + x) - \sum j = 1nf(\frac{jm}{n} + x)| \le \sum_{j=1}^{n} |f(j\alpha + x) - f(\frac{jm}{n} + x)| =$
$\sum_{j=1}^{n} |f^{'}(\zeta_j)| j |\alpha - \frac{m}{n}| \le \frac{M_1}{\sqrt{n}}$

Теперь рассмотрим оценку: $\sum_{j=1}^{n} f(j\frac{m}{n} + x)$, обозначим $x_j = j\frac{m}{n} + x$ $x_{k+1} - x_k = \frac{1}{n}$;

Метод прямоугольников: $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_k) \le \int_0^1 f(x)dx + \frac{f^{''}(\zeta)}{24n^2}$.

Так как $< f >= 0$, $|f^{''}(\zeta)| \le M_2$, $|\sum_{k=1}^{n} f(x_k)| \le \frac{M_2}{24n}$. Отсюда получаем требуемое. Осталось обосновать метод прямоугольников. $\int_{-h}^{h} f(x)dx = \int_0^h f(x)dx + \int_{-h}^{0} f(x)dx = F(h) - F(-h)$.

$F(h) = F(0) + F^{'}(0)h + F^{''}(0)h^2/2 + F^{'''}(\zeta)h^3/6$, $\zeta \in [0; h]$

$F(-h) = F(0) - F^{'}(0)h + F^{''}(0)h^2/2 - F^{'''}(\eta)h^3/6$, $\eta \in [-h; 0]$

$\int_{-h}^{h} f(x)dx = F^{'}(0)2h + \frac{F^{'''}(\zeta)+F^{'''}(\eta)}{2}(2h)^3/24$ так как $F^{'}(h) = f(h)$, $\frac{F^{'''}(\zeta)+F^{'''}(\eta)}{2} = \frac{f^{''}(\zeta)+f^{''}(\eta)}{2} = f^{''}(\xi)$

Таким образом, мы получили оценку: $\int_{-h}^{h} f(x)dx - f(0)2h = \frac{f^{''}(\xi)(2h)^3}{24}$ $2h = 1/n \Rightarrow \int_0^1 f(x)dx - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_k) \le \frac{f^{''}(\xi)}{24n^2}$ Отсюда получаем требуемое.

$\square$

1.2 Теорема о возвращаемости интегралов от двухчастотных условно-периодических функций. Пример Пуанкаре

Рассмотрим $f(x_1, x_2), x_1, x_2 mod 1$. Пусть $\int_0^1\int_0^1 f(x_1, x_2)dx_1dx_2 = 0 =< f >$, считаем, что $x_1 = \omega_1 t + x_1^0; x_2 = \omega_2 t + x_2^0$, где $\frac{\omega_1}{\omega_2} \notin \mathbb{Q}$. $f(\omega_1 t + x_1^0, \omega_2 t + x_2^0)$ - условно - периодическая функция времени. $I(T, x^0) = \int_0^T f(\omega t + x)dt$. $S^1 = \{x_1 mod 1\}, x_2 = x_2^0$ - сечение (Пуанкаре), обозначим $x_1^0 = x$, $\Delta t = \frac{1}{\omega_2}$ - время возврата на окружность. $F(x) = \int_0^{\frac{1}{\omega_2}} f(\omega_1 t + x, \omega_2 t + x_2^0)dt$ $\Rightarrow \int_0^{\frac{n}{\omega_2}} f(\omega_1 t + x, \omega_2 t + x_2^0)dt = F(x) + \ldots + F(x + \alpha(n-1))$, $F \in C^2$, $\int_0^1 F(x)dx = 0$. (Упражнение: проверить).

Пример Пуанкаре.

$f(x_1, x_2) = \sum_{n=1}^{\infty}(\frac{A}{\Lambda})^n \cos 2\pi(u_n x_1 + v_n x_2)$ - не имеет ни одной производной ни в одной точке, $< f >= 0$ u_n, v_n - целые числа такие, что: $(\sqrt{2} - 1)^n = u_n + v_n\sqrt{2}$, $x_1, x_2 mod 1$. $\Lambda = \sqrt{2} + 1$, $1 < \frac{\Lambda}{2} < A < \Lambda$, f - непрерывная функция(есть мажоранта). Будем считать, что: $x_2 = \sqrt{2}t, x_1 = t, \omega_2 = \sqrt{2}, \omega_1 = 1$ $\frac{\omega_1}{\omega_2} \notin \mathbb{Q}$, $x_1^0 = x_2^0 = 0$, $u_n x_1 + v_n x_2 = (u_n + \sqrt{2}v_n)t = (\sqrt{2} - 1)^n t = \frac{t}{(\Lambda)^n}$, ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{A}{\Lambda})^n \cos(\frac{2\pi t}{\Lambda^n})$ сходится, поэтому $I(\tau) = \int_0^\tau \sum_{n=1}^{\infty}(\frac{A}{\Lambda})^n \cos(\frac{2\pi t}{\Lambda^n})dt$

Предоложение: $I(\tau) \longrightarrow +\infty(-\infty), \tau \to +\infty(-\infty)$

$\triangle$ Возьмем интервал: $\frac{\pi}{2}\Lambda^{n-1} \le t \le \frac{\pi}{2}\Lambda^n, n = 1, 2, \ldots$, разделим его на Λ^{n+k} : $0 < \frac{\pi}{2}\Lambda^{-k-1} \le \frac{t}{\Lambda^{n+k}} \le \frac{\pi}{2\Lambda^k} < \frac{\pi}{2}, k = 0, 1, 2, \ldots$ $I(t) = \sum_{j=1}^{\infty} A^j \sin(\frac{t}{\Lambda^j}) = \sum_{j=1}^{n-1}(A^j \sin(\frac{t}{\Lambda^j}) + \sum_{k=0}^{\infty} A^{n-k}\sin(\frac{t}{\Lambda^{n+k}}) = (I) + (II)$. $(I) \le \sum_{j=1}^{n-1} A^j = \frac{A^n - A}{A-1}$ $(II) : \sin(\frac{t}{\Lambda^{n+k}}) \ge \frac{2t}{\pi\Lambda^{n+k}} > \frac{1}{\Lambda^{k+1}}$ $(II) \ge \sum_{k=0}^{\infty} A^{n+k}/\Lambda^{k+1} = \frac{A^n}{\Lambda}\sum_{k=0}^{\infty}(\frac{A}{\Lambda})^k = \frac{A^n}{\Lambda - A}$ В нашем интервале получается, что $I(t) \ge \frac{A^n}{\Lambda - A} - \frac{A^n - A}{A-1} = A^n\frac{2A - \Lambda - 1}{(\Lambda - A)(A-1)} + \frac{A}{A-1} \to \infty, n \to \infty, t \to \infty$.

$\square$

$f(x_1,x_2) = \sum_{n=1}^{\infty}(\frac{A}{\Lambda})^n \cos 2\pi(u_n x_1 + v_n x_2)$, положим $x_2 = 0, x_1 = x \Rightarrow g(x) = \sum_{n=1}^{\infty}(\frac{A}{\Lambda})^n \cos(2\pi u_n x) \Rightarrow \Lambda = \sqrt{2}+1 = \frac{1}{\sqrt{2}-1} \Rightarrow u_n + v_n\sqrt{2} = \frac{1}{\Lambda^n} \Rightarrow (-\sqrt{2}-1)^n = u_n - v_n\sqrt{2} = (-1)^n\Lambda^n$. Из этих соотношений мы можем найти u_n, v_n: $u_n = (-1)^n/2[\Lambda^n + (-1)^n/\Lambda^n]$.

Введем функцию $G(x) = \sum_{n=1}^{\infty}(\frac{A}{\Lambda})^n \cos(2\pi\Lambda^n x)$ - функция Вейерштрасса, не имеет производной ни в одной точке(Харди).

Упражнение: Доказать, что $g(x) - G(x) \in C^1$.

Рассмотрим $f(x_1,x_2) \in C^2; x_1, x_2 mod 1; < f >= 0$, берем $x_1^0, x_2^0 : f(x_1^0, x_2^0) \neq 0$. Запишем интеграл: $I(\tau, x^0) = \int_0^{\tau} f(\omega_1 t + x_1^0, \omega_2 t + x_2^0)dt$, где $\frac{\omega_1}{\omega_2}$ - иррационально. Интеграл возвращается к нулю (было доказано ранее).

Теорема: В этих предположениях $I(\tau, x^0)$ имеет бесконечно много нулей при $\tau \to \infty$.(нули встречаются сколь угодно далеко)

1.3 Дифференциальные уравнения на торе с инвариантными мерами

Эйлер:

$\dot{x} = f(x,y)$

$\dot{y} = g(x,y)$

$\rho(x,y)$ - плотность инвариантной меры, интегрирующий множитель. Уравнение Лиувилля: $\frac{\partial(\rho f)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho g)}{\partial y} = 0$. Рассмотрим дифференциальную форму: $-\rho g dx + \rho f dy = dH(x,y)$ (она точна в силу условия Лиувилля). $\frac{\partial H}{\partial x} = -\rho g$, $\frac{\partial H}{\partial y} = \rho f$. Как видим, H - первый интеграл системы.

Теорема Якоби: Пусть есть система дифференциальных уравнений: $\dot{x} = f(x)$. Пусть:

1) имеется $(n-2)$ независимых первых интеграла $G_1(x), \dots, G_{n-2}(x)$,

2)имеется интегральный инвариант с плотностью $\rho(x) > 0$, $\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \rho f_i}{\partial x_i} = 0$.

Тогда уравнения интегрируются в квадратурах.

Замечание: Почему рассматриваемый класс систем полезно изучать? Рассмотрим совместный уровень первых интегралов: $M_c = \{G_1 = c_1, \dots, G_{n-2} = c_{n-2}\}$ - вообще говоря, это двумерная поверхность. Рассмотрим случай, когда M_c - замкнуто(представляется как пересечение замкнутых множеств) и ограничено. Предположим также, что $f(x) \neq 0 \forall x \in M_c$, и рассмотрим связную компоненту M_c, тогда M_c диффеоморфно $\mathbb{T}^2$. Ясно, что M_c - ориентируемая поверхность. Почему на торе будет интегральный инвариант? Введем на торе угловые переменные u, v, $\mathbb{T}^2 \cong M_c$, то есть в окрестности тора можно ввести n переменных: $z_1 = G_1, \dots, z_{n-2} = G_{n-2}, z_{n-1} = u, z_n = v$, $u, v, mod 2\pi$. Напишем в этих переменных дифференциальное уравнение: $\dot{z}_1 = 0, \dots, \dot{z}_{n-2} = 0$

$\dot{z}_{n-1} = f$

$\dot{z_n} = g$

Утверждение: Эта система имеет интегральный инвариант с плотностью $\overline{\rho}(z) = \rho(x(z))\frac{\partial(x_1,\dots,x_n)}{\partial(z_1,\dots,z_n)}$.

Можем записать уравнение Лиувилля для новой системы:

$\frac{\partial(\overline{\rho} f)}{\partial x} + \frac{\partial(\overline{\rho} g)}{\partial y} = 0$.

Фиксируем $z_1 = c_1, \dots, z_{n-2} = c_{n-2}$, отсюда все получаем.