Задачи к лекции 7

Задача 1. (1) *Докажите, что ограничения карт на край гладкого многообразия превращает край в гладкое многообразие.* (2) *Покажите, что полноторий, ограниченный тором, полученным при вращении вокруг оси z окружности радиуса r в плоскости xz с центром в точке $(R, 0, 0)$, $0 < r < R$, является многообразием с краем.*

Задача 2. (1) *Пусть $N = (0, 0, 1)$ — северный полюс стандартной двумерной сферы S^2. Для произвольной точки $P \in S^2$ определим величину $\theta(P)$, положив ее равной углу между радиус-векторами точек N и P. Пусть $f\colon S^2 \to \mathbb{R}$ и $g\colon S^2 \to \mathbb{R}$ — функции, такие что $f(P) = \cos\theta(P)$ и $g(P) = \sin\theta(P)$. Покажите, что функция f — гладкая, а функция g — нет.*

(2) *Докажите, что отображение $f : S^2 \to \mathbb{R}\mathrm{P}^2$, сопоставляющее точке P на сфере S^2 прямую, проходящую через начало координат и точку P, является гладким отображением гладких многообразий.*

Задача 3. (1) *Приведите пример гладкого гомеоморфизма гладких многообразий, не являющегося диффеоморфизмом.* (2) *Докажите, что при $n \neq m$ многообразия $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{R}^m$ не диффеоморфны.* (3) *Докажите, что многообразия разных размерностей не диффеоморфны.* (4) *Группа $\mathrm{U}(n)$ состоит из всех комплексных матриц A размера $n \times n$, таких что $A \cdot A^* = E$, где $A^* = \bar{A}^T$ (черта означает сопряжение, а B^T — транспонирование матрицы B), E — единичная матрица. Группа $\mathrm{SU}(n)$ является подгруппой в $\mathrm{U}(n)$, состоящей из всех матриц с определителем 1. Докажите, что $\mathrm{U}(n)$ и $\mathrm{SU}(n)$ являются гладкими многообразиями, причем $\mathrm{SU}(2)$ диффеоморфно S^3.*

Задача 4. (1) *Вычислите образ горизонтального (параллельного плоскости xy) единичного вектора, касательного к двумерной сфере, при действии дифференциала стереографической проекции из северного полюса.*

(2) *Докажите, что* $\xi = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^9$ *является касательным вектором к подмногообразию $\mathrm{SO}(3) \subset \mathbb{R}^9$ в точке E, где E — единичная матрица, и вычислите образ этого касательного вектора при действии дифференциала отображения $f\colon \mathrm{SO}(3) \to S^2$, ставящего в соответствие каждой матрице ее первый столбец.*

Задача 5. *Докажите, что дифференциалы dx^i координатных функций x^i, вычисленные в точке P гладкого многообразия M, образуют базис векторного пространства T_P^*M, двойственного к T_PM. Пространство T_P^*M называется* ***кокасательным***. *Проверьте, что базисы $dx^1, \dots, dx^n$ и $\partial/\partial x^1, \dots, \partial/\partial x^n$ двойственны, т.е. $dx^i(\partial/\partial x^i) = \delta^i_j$.*

Задача 6. (1) *Докажите, что край ориентируемого многообразия ориентируем*; (2) *приведите пример многообразия, край которого неориентируем. Докажите, что* (3) *декартово произведение ориентируемых многообразий ориентируемо*; (4) *многообразие размерности* n, *содержащее неориентируемое подмногообразие размерности* n, *неориентируемо*; (5) *регулярная поверхность в* $\mathbb{R}^n$, *заданная системой неявных функций, — ориентируемое многообразие.*

Выведите из полученных выше результатов, что (6) *сфера* S^n, *тор* $T^n = S^1 \times \dots \times S^1$, *группы* $\mathrm{GL}(n)$, $\mathrm{O}(n)$, $\mathrm{SO}(n)$, $\mathrm{SL}(n)$ *ориентируемы, а бутылка Клейна* K^2 *и проективная плоскость* $\mathbb{R}\mathrm{P}^2$ *— нет.*

(7) *Докажите, что проективное пространство* $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$ *ориентируемо тогда и только тогда, когда* n *— нечетно.*

Задача 7. *Докажите, что* (1) *проективная плоскость гомеоморфна сфере с одним листом Мебиуса*; (2) *бутылка Клейна гомеоморфна сфере с двумя листами Мебиуса. Чему гомеоморфна поверхность,* (3) *склеенная из восьмиугольника по слову* $abcdb^{-1}a^{-1}cd$.