Логика высказываний.

Математическая логика делится на несколько разделов:
1) математическая логика(в узком смысле);
2) теория алгоритмов;
3) основание математики.

Начнем с определений:
Определение: *Алфавит* - это определенный набор символов.
Алфавит может определяться как конечный так и бесконечный.
Определение: *Слово* - любой конкретный, конечный набор знаков.
Пустое слово обозначается знаком Λ. Всего называемых объектов счетно.
Определение: *Высказывание* - это, что бывает либо истинным, либо ложным.
Соответственно у любого высказывания А есть истинностное значение. Их обохначают так: И(T) - истина, Л(F) - ложь. $|\mathrm{A}| = \{^{T}_{F}$
Определение: Два высказывания с одинаковым истинностным значением называются **равносильными**.
Обозначение: $\mathrm{A} \equiv \mathrm{B}$
Определение: *Закон логики* - это такое утверждение, которое верно независимо от его состава.

Логические связки

1) Одноместные
Это связка *НЕ*.
Обозначение: $\neg$
Таблица истинности этой связки такова:

A	$\neg A$
0	1
1	0

Например, $\neg\neg A = A$ - закон логики (снятие двойного отрицания)

2) Двуместные
а) ...И... - *конъюнкция.*
Обозначение: $\wedge$ или &
б) ...ИЛИ... - *дизъюнкция.*
Обозначение: $\vee$
в) Если,...то... - *импликация.*
Обозначение: $\Rightarrow$
Таблица истинности для этих связок такова:

A	B	$A\&B$	$A \vee B$	$A \Rightarrow B$
0	0	0	0	1
0	1	0	1	1
1	0	0	1	0
1	1	1	1	1

Можно установить **Законы де Моргана**:
1) $\neg(A \vee B) \equiv \neg A \& \neg B$
2) $\neg(A \& B) \equiv \neg A \vee \neg B$
Доказываются эти законы вписыванием таблиц истинности для левой и правой части.
Также верны такие равенства:
3) $A \Rightarrow B \equiv \neg A \vee B$
4) $A \Leftrightarrow B \equiv (A \Rightarrow B) \& (B \Rightarrow A)$
5) $A \vee B \equiv \neg(\neg A \& \neg B)$
6) $A \& B \equiv \neg(\neg A \vee \neg B)$

Буквы алфавита: ( ) $\neg$ & $\vee$
Высказывательные переменные: $A, .., Z, A_1, ..., Z_1, ...$

Язык логики высказываний

Определение: Формулы - это выражения, построенные по следующим условиям:
1) Каждая высказывательная переменная есть формула.
2) Если α(метапеременная, значением является выражение языка объекта) есть формула, то $\neg\alpha$ - формула.
3) Если α и β есть формула, то $(\alpha \& \beta)$, $(\alpha \vee \beta)$, $(\alpha \Rightarrow \beta)$ - тоже формулы.

Теорема о главном знаке(единственность представления): Если α - формула, то верен один из пяти вариантов:
1) α есть высказывательная переменная;
2) α есть $\neg(\alpha')$, где α - есть формула;
3) α есть $\alpha_1 \& \alpha_2$, где α_1 и α_2 - формулы.
4) α есть $\alpha_1 \vee \alpha_2$, где α_1 и α_2 - формулы.
5) α есть $\alpha_1 \Rightarrow \alpha_2$, где α_1 и α_2 - формулы.
Доказательство: ◀ Без доказательства. ▶

Определение: Формула называется безимпликативной, если она не содержит импликаций.
Определение: Формула называется нормальной, если она безимпликативна и обладает следующим свойством: за каждым знаком отрицания следует высказывательная переменная.
Теорема: Каждая формлуа может быть приведена к нормальному виду
Доказательство: ◀ Уничтожим импликацию по приведенному выше равенству. Далее раскроем скобки по законам де Моргана. Видно, что так формула будет приведена к нормальному виду. ▶

Высказывание может быть представлено как функция: I = { И, Л }, тогда высказывание - это f: $I^n \to I$.

Рассмотрим теперь λ - обозначения:
Сдулаем это на примере функции $y + x^2$
λxy: $y + x^2(3,5) = 3 + 5^2$
λxy: $y + x^2(3,5) = 5 + 3^2$
$\lambda zyuxv$: $y + x^2(3,5)$ - бессмысленно
$\lambda zyuxv$: $y + x^2(3,0,5,8,11) = 0 + 8^2$
$\lambda ztuxv$: $y + x^2(3,0,5,8,11) = y + 8^2$
Таким образом для любой формулы логики высказываний существует присоединчнная формула:
$\underbrace{\lambda AB \;\; A \vee B}_{\text{Имя присоединчнной функции}}(1,1) = 1$

Замечание: знак = означает, что слева и справа от него стоят имена одного и того же объекта.
Определение: Высказывания, которые истинны всегда называются тавтологией и обозначаются $\models$.
Например, $A \vee \neg A$ - тавтология.
$\alpha \equiv \beta \;\Leftrightarrow\; \models (\alpha \Leftrightarrow \beta)$
$\models \alpha \;\Leftrightarrow\; \alpha \equiv A \vee \neg A$
Определение: Язык называется разрешимым, если
1) Некоторое высказывание отмечено как истинное;
2) Существует алгоритм, который для любого высказывания определяет истинно оно или ложно.
Язык логики высказываний разрешим.

Всякая ли истинностная функция является присоединчнной к некоторой высказывательной формуле?
I = {И, Л}
f: $I^n \to I$.
Всего функций соответственно: 2^{2^n}
Определение: $(a_1, ..., a_n)$ - кортеж длины n.
$(a_1, ..., a_n) \epsilon$ M $\Leftrightarrow$ f$(a_1, ..., a_n)$ = И.
$a^e = 1 \Leftrightarrow$ a = e, где $a^1 = a, a^0 = \neg a$.
f = $\lambda a_1 ... a_n \bigvee\limits_{e_1 ... e_n \epsilon M} (A_1^{e_1} \& ... \& A_n^{e_n})$, если M - не пустое множество.
Если же M - пустое, то f = $\lambda a_1 ... a_n \; A_1 \& A_n$
Таким образом каждая формула задачт функцию.

Определение: Если у двух формлу совпадают присоединчнные функции, то они называются равносильными.
Определение: Конъюнкцией формул $A_1 ... A_n$ называют формулу $(...(A_1 \& A_2) \& A_3) ... \& A_n)$ и обозначают $A_1 \& ... \& A_n$.
Дизъюнкция n формул определяется аналогично. **Определение:** Формула, которая есть пропозициональная переменная или отрицание переменной, называется литералом.
Определение: Произвольная конъюнкция(дизъюнкция) литералов назывется конъюнктом(дизъюнктом).

Определение: Дизъюнктивной(конъюнктивной) нормальной формой(д.н.ф.(к.н.ф.)) называется произвольная дизъюнкция конъюнктов(конъюнкция дизъюнктов).
Определение: Д.н.ф(К.н.ф) называется совершенной и обозначается с.д.н.ф(с.к.н.ф.) если каждая переменная формулы А входит с отрицанием или без отрицания в каждый конъюнкт(дизъюнкт) ровно один раз.
Теорема: Каждая истинностная функция, не принимающая тождественно значение ложь ?????????????????????
Пример
Рассмотрим $\lambda AB \ \ A$

A	B	A
0	0	0
0	1	0
1	0	$\underline{1}$
1	1	$\underline{1}$

Видно, что $A \equiv (A\&B) \vee (A\&\neg B)$;

Упорядоченные множества.

Определение: $x \preccurlyeq y$ ("х предшествует у") тогда и только тогда $x \leqslant y$
Свойства:
1) рефлексивность: $\forall x \ \ x \preccurlyeq x$
2) транзитивность: $\forall x, y \ ((x \preccurlyeq y)\&(y \preccurlyeq z) \Rightarrow (x \preccurlyeq z))$
3) $\forall x, y \ ((x \preccurlyeq y)\&(y \preccurlyeq x) \Rightarrow (x = y))$
4) связанность: $\forall x, y \ ((x \preccurlyeq y) \vee (y \preccurlyeq x))$
Определение: Множество называется линейно-упорядоченным, если на нем введено отношение, обладающее свойствами 1-4.
Бинарное отношение - свойство пары чисел.
Пример: Делимость натуральных чисел.
$x \preccurlyeq y$ превращется в высказывание, если переменным придать фиксированные значения("высказывательная форма").

Определение: Изоморфизм упорядоченных множеств - такое биективное отображение, при котором $\ x \preccurlyeq y \equiv \varphi(x) \preccurlyeq \varphi(y)$.
Для множества множеств - порядок: $A \preccurlyeq B \ \Leftrightarrow \ A \subset B$
Задача: Доказать, что любое упорядоченное множество изоморфно множеству множеств.
Определение: Отношение квазипорядка(предпорядка) называется отношение, обладающее рефлексивностью и транзитивностью.
Задача: Пусть есть квазипорядок: $a \sim b \ \ \Leftrightarrow \ \ a \preccurlyeq b \ \& \ a \preccurlyeq b$.
Доказать, что $\sim$ - порядок.
Задача: М - квазипорядок, $\sim$ - отношение из предыдущей задачи. Тогда возникает естественное отношение порядка на фактор множестве М/$\sim$.
$A \preccurlyeq B \ \Leftrightarrow$
1) $\exists x \epsilon A \ \exists y \epsilon B \ \ x \preccurlyeq y$
2) $\forall x \epsilon A \ \forall y \epsilon B \ \ x \preccurlyeq y$
Доказать, что 1) $\Leftrightarrow$ 2).
Задача: α, β - формулы математической логики $\alpha \preccurlyeq \beta \Leftrightarrow \models (\alpha \Leftrightarrow \beta)$.

Доказать, что это предпорядок.

Введя отношение эквивалентности $\alpha \sim \beta \ \Leftrightarrow \ (\alpha \equiv \beta)$ получим Алгебру Линденбаума. Элементами Алгебры Линденбаума являются классы эквивалентных формул.
Обозначение: Ä(готическое А) - элементы Алгебры Линденбаума.
Ä & B̈ := $[\alpha \& \beta]$, где $\alpha \epsilon A$, $\beta \epsilon B$.
Ясно, что это определение корректно, поскольку не зависит от выбора α и β.

Пусть множество линейно упорядочено, тогда некоторые разбиения называются сечениями. Пусть $A \neq \emptyset \ \ B \neq \emptyset \ \ A \bigcap B = \emptyset$
$M = A \bigcup B$ - разбиение на смежные файлы: А - левый(нижний) класс, В - правый(верхний) класс.

Рассмотрим названия разбиений:
1) Существует ли наибольший элемент в левом смежном классе?
2) Существует ли наименьший элемент в правом смежном классе?
I. да,да - СКАЧОК
II. да,нет - ДЕДЕКИНДОВО СЕЧЕНИЕ
III. нет,да - ДЕДЕКИНДОВО СЕЧЕНИЕ
IIII. нет,нет - ЩЕЛЬ
Заметим, что при изоморфизмах сечение переходит в сечение.