Задачи к лекции 4

Задача 1. *Доказать, что если* $w = f(z)$ *— дробно-линейное отображение, то для любых четырех точек* z, z_1, z_2, z_3 *и их образов* w, w_1, w_2, w_3 *выполняется следующее равенство:*

$$\frac{z - z_1}{z - z_3} : \frac{z_2 - z_1}{z_2 - z_3} = \frac{w - w_1}{w - w_3} : \frac{w_2 - w_1}{w_2 - w_3}.$$

Иными словами, двойное отношение $\frac{z-z_1}{z-z_3} : \frac{z_2-z_1}{z_2-z_3}$ *сохраняется при дробно-линейных преобразованиях. Вывести отсюда, что любые три различные точки можно перевести в любых три различные точки с помощью некоторого дробно-линейного преобразования, причем такое преобразование единственно.*

Задача 2. *Доказать, что все дробно-линейные преобразования, переводящие единичный круг в себя, могут быть записаны в следующем виде:*

$$z \mapsto e^{i\varphi} \frac{z - z_0}{1 - \bar{z}_0 \, z},$$

где $\varphi \in \mathbb{R}$, *а* z_0 *— комплексное число, такое что* $|z_0| < 1$.

Задача 3. *Доказать, что все дробно-линейные преобразования, переводящие верхнюю полуплоскость в себя, могут быть записаны в следующем виде:*

$$z \mapsto \frac{az + b}{cz + d},$$

где числа a, b, c *и* d *— вещественные, и определитель матрицы* $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ *равен единице.*

Задача 4. *Доказать, что отрезок прямой на плоскости Лобачевского между точками* A *и* B *есть кратчайшая кривая, соединяющая точки* A *и* B.

Задача 5. *Расстояние между точками на плоскости Лобачевского — это длина отрезка прямой Лобачевского между этими точка. Найти расстояние между точками на плоскости Лобачевского в модели Пуанкаре и в модели верхней полуплоскости.*

Задача 6. *Как выглядят окружности на плоскости Лобачевского. Вычислить длину окружности и площадь круга радиуса* ρ *на плоскости Лобачевского (радиус понимается в смысле метрики на плоскости Лобачевского).*

Задача 7. *Показать, что сумма углов треугольника на плоскости Лобачевского равна $\pi - S$, где S — площадь этого треугольника.*

Задача 8. *Пусть ABC — треугольник на плоскости Лобачевского; α, β, γ — величины углов при вершинах A, B, C; a, b, c — длины сторон BC, AC, AB. Доказать две теоремы косинусов:*

$$\operatorname{ch} c = \operatorname{ch} a \operatorname{ch} b - \operatorname{sh} a \operatorname{sh} b \cos\gamma \tag{1}$$

$$\cos\gamma = -\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta \operatorname{ch} c \tag{2}$$

В частности, доказать теорему Пифагора для прямоугольного треугольника с катетами a, b и гипотенузой c:

$$\operatorname{ch} c = \operatorname{ch} a \operatorname{ch} b$$

Задача 9. *Пусть ABC — треугольник на плоскости Лобачевского; α, β, γ — величины углов при вершинах A, B, C; a, b, c — длины сторон BC, AC, AB. Доказать теорему синусов на плоскости Лобачевского:*

$$\frac{\operatorname{sh} a}{\sin\alpha} = \frac{\operatorname{sh} b}{\sin\beta} = \frac{\operatorname{sh} c}{\sin\gamma}.$$

Задача 10. *Во всякий ли треугольник на плоскости Лобачевского можно вписать окружность? Всякий ли треугольник на плоскости Лобачевского можно описать окружностью?*