Задачи к лекции 3

Задача 1. *Составьте параметрическое уравнение поверхности, образованной касательными к данной гладкой кривой $\gamma = \gamma(u)$. Такая поверхность называется* **развертывающейся**. *Исследуйте развертывающуюся поверхность на регулярность и вычислите индуцированную на ней метрику.*

Задача 2. *Вокруг оси Oz вращается плоская кривая $x = f(v)$, $z = g(v)$. Составьте параметрические уравнения так полученной* **поверхности вращения**, *исследуйте ее на регулярность и вычислите индуцированную на ней метрику. Рассмотрите также частный случай $x = f(z)$, $z = z$.*

Задача 3. *Вычислите первую фундаментальную форму регулярной поверхности, заданной неявной функцией $F(x, y, z)$.*

Задача 4. *Первая квадратичная форма поверхности имеет вид*

$$ds^2 = du^2 + (u^2 + a^2)dv^2.$$

1) *Найдите периметр криволинейного треугольника, образованного пересечением кривых*

$$u = \pm\frac{1}{2}av^2, \quad v = 1.$$

2) *Найдите углы этого криволинейного треугольника.*

3) *Вычислите площадь треугольника, образованного пересечением кривых*

$$u = \pm av, \quad v = 1.$$

Задача 5. *Найдите на поверхности*

$$x = u\cos v, \quad y = u\sin v, \quad z = a\ln(u + \sqrt{u^2 - a^2})$$

кривые, пересекающие каждую кривую $v = \mathrm{const}$ под постоянным углом θ (**локсодромии**).

Задача 6. *Напомним, что* **большой окружностью** *на сфере $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ называется пересечение сферы с двумерной плоскостью, проходящей через центр сферы. Докажите, что меньший из двух отрезков большой окружности, на которые ее делят две точки A и B, является кратчайшей кривой на S^2 среди всех регулярных кривых, соединяющих A и B.*

Задача 7. *Рассмотрим криволинейный треугольник Δ на сфере $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ единичного радиуса, ограниченный отрезками больших окружностей. Покажите, что сумма углов треугольника Δ равна $\pi + S$, где S — площадь треугольника Δ.*

Задача 8. *Пусть ABC — криволинейный треугольник на сфере $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ единичного радиуса, ограниченный отрезками больших окружностей. Обозначим через α, β и γ величины углов при вершинах A, B, C, а через a, b и c — длины сторон BC, AC, AB. Докажите теорему косинусов:*

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \alpha.$$

В частности, выведите отсюда теорему Пифагора для прямоугольного треугольника с катетами b, c и гипотенузой a:

$$\cos a = \cos b \cos c.$$