Задачи к лекции 5

Задача 1. *Пусть Y — произвольное подмножество топологического пространства X. Докажите, что семейство, состоящее из пересечений с Y всех открытых в X множеств, удовлетворяет аксиомам топологии (такая топология на Y называется* ***индуцированной*** *из X).*

Задача 2. *Пусть (X, ρ) — метрическое пространство, $p \in X$, и r — положительное число. Открытый шар $U(p, r)$ радиуса r с центром в точке p определяется так:*

$$U(p, r) = \{x \in X \mid \rho(p, x) < r\}.$$

Докажите, что семейство, состоящее из всех подмножеств метрического пространства, каждое из которых вместе с каждой своей точкой содержит некоторый открытый шар с центром в этой точке, является хаусдорфовой топологией.

Задача 3. ***Топологией Зарисского*** *на множестве X называется система множеств, состоящая из пустого множества, а также из всех подмножеств множества X, дополнения до которых конечны.* (1) *Проверьте, что эта система удовлетворяет аксиомам топологии.* (2) *Докажите, что если X бесконечно, то X с топологией Зарисского не хаусдорфово.* (3) *Опишите все непрерывные отображения из пространства с топологией Зарисского в прямую со стандартной топологией, заданной функцией расстояния между точками.*

Задача 4. *Говорят, что последовательность точек x_n топологического пространства x* ***сходится*** *к точке $x \in X$, называемой* ***пределом последовательности*** *x_n, если для любой окрестности U точки x существует такое N, что при каждом $n > N$ выполняется $x_n \in U$. Докажите, что* (1) *в хаусдорфовом пространстве предел сходящейся последовательности определен однозначно;* (2) *в антидискретном пространстве X (пространстве с топологией, состоящей лишь из пустого множества и всего X) любая последовательность точек сходится к любой точке.* (3) *Опишите все сходящиеся последовательности в пространстве с топологией Зарисского.*

Задача 5. *Топологическое пространство называется* ***несвязным***, *если его можно представить в виде объединения непустых непересекающихся открытых множеств. Топологическое пространство называется* ***связным***, *если оно не является несвязным. Докажите, что* (1) *объединение пересекающихся связных множеств связно;* (2) *замыкание связного множества связно;* (3) *отрезок прямой связен.*

Непрерывной кривой *в топологическом пространстве X называется непрерывное отображение $\gamma\colon [a, b] \to X$ отрезка $[a, b]$ в X. Если γ*

— непрерывная кривая, то говорят, что γ ***соединяет точки*** *$\gamma(a)$* ***и*** *$\gamma(b)$. Пространство X называется* ***линейно связным****, если любые две его точки можно соединить непрерывной кривой. (4) Докажите, что линейно связное топологическое пространство является связным.*

Задача 6. *Докажите, что подмножество плоскости xy, состоящее из графика функции $y = \sin\frac{1}{x}$ при $x = 0$ и отрезка оси y, соединяющего точки с координатами -1 и 1, является связным, но не линейно связным топологическим пространством (с индуцированной из плоскости топологией).*

Задача 7. *Докажите, что (1) при непрерывном отображении образ связного (линейно связного, компактного) пространства связен (линейно связен, компактен); (2) прообраз хаусдорфова пространства при непрерывном отображении, взаимно однозначном с образом, также является хаусдорфовым пространством. Приведите пример непрерывного отображения, для которого (3) прообраз связного (линейно связного, компактного) пространства не является связным (линейно связным, компактным); (4) образ хаусдорфова пространства не является хаусдорфовым пространством.*

Задача 8. *Выясните, какие из следующих матричных групп связны, какие компактны:*

$$\mathrm{O}(n), \quad \mathrm{SO}(n), \quad \mathrm{GL}(n), \quad \mathrm{SL}(n, \mathbb{R}).$$

Задача 9. *Докажите, что (1) интервал и прямая гомеоморфны, а (2) отрезок и "буква T" — нет. (3) Приведите пример непрерывного взаимно-однозначного соответствия, не являющегося гомеоморфизмом со своим образом.*

Задача 10. *Докажите, что (1) замкнутое подмножество компактного пространство компактно; (2) компактное подмножество хаусдорфова пространства замкнуто; (3) непрерывное взаимно-однозначное отображение компактного пространства в хаусдорфово является гомеоморфизмом.*