Подготовка к экзамену по курсу "Линейная алгебра и геометрия"

(весна 2003г., лектор - Э.Б. Винберг)

13 июня 2003 г.

---

1 Базис и размерность векторного пространства.

Def. Векторным пространством над полем K называется аддитивная абелева группа V, в которой определена операция умножения на элементы поля K так, что выполнены следующие условия:

1. $\lambda(a+b) = \lambda a + \lambda b$ для всех $\lambda \in K$ и $a, b \in V$;
2. $(\lambda + \mu)a = \lambda a + \mu a$ для всех $\lambda, \mu \in K$ и $a \in V$;
3. $(\lambda\mu)a = \lambda(\mu a)$ для всех $\lambda, \mu \in K$ и $a \in V$;
4. $1 \cdot a = a$ для любого $a \in V$.

Элементы поля K называются скалярами (числами).
Простейшие следствия из аксиом:

1. $\lambda \cdot 0 = 0$ для всех $\lambda \in K$;
2. $\lambda(a-b) = \lambda a - \lambda b$ для всех $\lambda \in K$ и $a, b \in V$;
3. $0 \cdot a = 0$ для любого $a \in V$;
4. $(\lambda - \mu)a = \lambda a - \mu a$ для всех $\lambda, \mu \in K$ и $a \in V$.

Def. Пусть есть система векторов $\{a_i\}_{i\in I}$ (не обязательно конечная). Линейной комбинацией этой системы векторов называется выражение $\sum\limits_{i\in I} \lambda_i a_i$, где $\lambda_i \in K$, причем лишь конечное число λ_i отлично от нуля.
Def. Система векторов $\{a_i\}_{i\in I}$ называется линейно зависимой, если существует их нетривиальная линейная комбинация, равная нулю.
Def. Базисом векторного пространства называется максимальная линейно независимая система его векторов ($\Leftrightarrow$ линейно независимая система векторов, через которую любой вектор линейно выражается $\Leftrightarrow$ система векторов, через которую всякий вектор линейно выражается единственным образом).
Коэффициенты этого выражения называются координатами вектора в базисе $\{e_i\}_{i\in I}$:
если $x = \sum\limits_{i\in I} x_i e_i$, то x_i - координаты вектора x.
Def. Векторное пространство называется конечномерным, если в нём существует конечный базис.
Теорема. В конечномерном векторном пространстве все базисы равномощны.
Доказательство. (Первый семестр: доказывается, что конечные эквивалентные линейно независимые системы строк равномощны, что следует из основной леммы о линейной зависимости). **Q.E.D.**

Def. Число векторов базиса пространства V называется размерностью данного пространства и обозначается $\dim V$.
Def. Отображение векторных пространств $\varphi : V_1 \to V_2$ (над одним и тем же полем K) называется изоморфизмом, если:

1. φ биективно;

2. φ сохраняет операции, то есть:

   - $\varphi(a+b) = \varphi(a) + \varphi(b)$ для всех $a, b \in V$;
   - $\varphi(\lambda a) = \lambda\varphi(a)$ для всех $\lambda \in K$ и $a \in V$.

Если φ - изоморфизм, то $\varphi(0) = 0$ и $\varphi\left(\sum\limits_{i\in I} \lambda_i a_i\right) = \sum\limits_{i\in I} \lambda_i \varphi(a_i)$, и поэтому φ сохраняет линейную зависимость систем векторов и переводит базис V_1 в базис V_2.
Def. Векторные пространства называются изоморфными, если между ними существует хотя бы один изоморфизм.
Теорема. Векторные пространства конечной размерности изоморфны тогда и только тогда, когда их размерности равны.
Доказательство. 1) Если $\varphi : V_1 \to V_2$ - изоморфизм и $(e_1, \dots, e_n)$ - базис V_1, то $(\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n))$ - базис V_2;
2) Пусть $\dim V_1 = \dim V_2$, $(e_1, \dots, e_n)$ - базис V_1, $(f_1, \dots, f_n)$ - базис V_2. Определим $\varphi : V_1 \to V_2$ по формуле $\varphi\left(\sum\limits_i \lambda_i e_i\right) = \sum\limits_i \lambda_i f_i$. Очевидно, что φ - изоморфизм V_1 и V_2. **Q.E.D.**
Следстсвие. Всякое n-мерное векторное пространство над K изоморфно K^n (изоморфизм осуществляется сопоставлением каждому вектору строки из его координат в каком-либо фиксированном базисе).

2 Преобразования координат в векторном пространстве.

Пусть есть $(e_1, \dots, e_n)$ - базис пространства V и $(e'_1, \dots, e'_n)$ - система n векторов пространства V. Пусть эти вектора выражаются через базисные следующим образом:

$$e'_j = \sum_{i=1}^{n} c_{ij} e_i \qquad (j = 1, 2, \dots, n)$$

Матрица, составленная из чисел c_{ij} называется матрицей перехода $C = (c_{ij})$ от базиса $(e_1, \dots, e_n)$ к системе векторов $(e'_1, \dots, e'_n)$. Матричная запись: $(e'_1, \dots, e'_n) = (e_1, \dots, e_n) \cdot C$.
Теорема. $(e'_1, \dots, e'_n)$ - базис $\Leftrightarrow$ матрица C невырождена.
Доказательство. Установим изоморфизм между пространствами V и K^n, поставив в соответствие каждому вектору столбец его координат в базисе $(e_1, \dots, e_n)$. При этом изоморфизме векторам $e'_1, e'_2, \dots, e'_n$ будут соответствовать столбцы матрицы C. Система $(e'_1, \dots, e'_n)$ линейно независима $\Leftrightarrow$ столбцы матрицы C линейно независимы $\Leftrightarrow$ C невырождена. **Q.E.D.**
Если C невырождена, то $(e_1, \dots, e_n) = (e'_1, \dots, e'_n)\, C^{-1}$. Выведем формулы преобразования координат. Пусть $x = \sum_i x_i e_i$; $x' = \sum_j x'_j e'_j$.

Тогда $x = \sum\limits_j x'_j e'_j = \sum\limits_{i,j} x'_j c_{ij} e_i = \sum\limits_i \left(\sum\limits_j c_{ij} x'_j\right) e_i$, значит

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x'_j \qquad (i = 1, 2, \dots, n)$$

В матричной форме: пусть $X = (x_1, \dots, x_n)^\top$, $X' = (x'_1, x'_2, \dots, x'_n)^\top$. Тогда $x = (e_1, \dots, e_n)\, X = (e'_1, \dots, e'_n)\, X'$, значит $(e_1, \dots, e_n)\, X = (e_1, \dots, e_n)\, CX' \Rightarrow X = CX'$, таким образом

$$X' = C^{-1}X.$$

3 Подпространства как множества решений систем однородных линейных уравненений.

<u>Def</u>. Подмножество U векторного пространства V называется подпространством, если:

1. $a, b \in U \Rightarrow a + b \in U$;
2. $a \in U \Rightarrow \lambda a \in U \qquad \forall \lambda \in K$;
3. $0 \in U \qquad$ (непустота U).

<u>Def</u>. Пусть $S \subset V$. Линейной оболочкой S называется множество

$$\langle S \rangle = \left\{ \sum_i \lambda_i x_i \ : \ x_i \in S, \lambda_i \in K \right\}.$$

Очевидно, что $\langle S \rangle$ - подпространство.
Более того, это наименьшее подпространство, содержащее S (в том смысле, что любое подпространство, содержащее S, должно содержать и $\langle S \rangle$), приём $\dim S = \operatorname{rk} S$, и любая максимальная линейно независимая подсистема в S является базисом $\langle S \rangle$.
<u>Def</u>. Базис $(e_1, \dots, e_n)$ пространства V называется согласованным с подпространством U, если U натянуто на какие-то из базисных векторов.
Теорема. Для любого подпространства U существует согласованный с ним базис пространства V.
Доказательство. Пусть $(e_1, \dots, e_k)$ - базис U. Дополним его до базиса $(e_1, \dots, e_n)$ всего пространства. Это и будет искомый базис пространства V. **Q.E.D**.
Следстсвие. $\dim U \le \dim V$, причём $\dim U = \dim V \Rightarrow U = V$.
Теорема. Всякое подпространство $U \subset K^n$ есть множество решений некоторой системы однородных линейных уравнений.
Доказательство. Пусть $(e_1, \dots, e_n)$ - стандартный базис пространства K^n, $(e'_1, \dots, e'_n)$ - такой базис, что $U = \langle e'_1, \dots, e'_k \rangle$. Тогда в базисе $(e'_1, \dots, e'_n)$ U задаётся так:

$$U = \left\{ x = \sum_j x'_j e'_j, \quad x'_{k+1} = \dots = x'_n = 0 \right\}.$$

Пусть $(e'_1, \dots, e'_n) = (e_1, \dots, e_n)\, C$, тогда $\begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} = C^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$. Подставляя в уравнения, задающие подпространство U в базисе $(e'_1, \dots, e'_n)$ выражения координат $x'_1, x'_2, \dots, x'_n$ через координаты $x_1, x_2, \dots, x_n$, получим систему однородных линейных уравнений относительно $x_1, x_2, \dots, x_n$, задающую U в стандартном базисе $(e_1, \dots, e_n)$ пространства V. **Q.E.D**.

4 Связь между размерностями суммы и пересечения двух подпространств.

Теорема. Для любых двух подпространств $U, W \subset V$ существует базис пространства V, согласованный с ними обоими.

Доказательство. Рассмотрим $U \cap W$ - также подпространство в V. Пусть $(e_1, \dots, e_p)$ - базис $U \cap W$. Дополним его до базиса $(e_1, \dots, e_p, e_{p+1}, \dots, e_k)$ подпространства U и его же - до базиса $(e_1, \dots, e_p, e_{k+1}, \dots, e_{k+l-p})$ подпространства W (здесь $\dim U = k$, $\dim W = l$). Докажем, что система векторов $e_1, \dots, e_{k+l-p}$ линейно независима (тогда дополним её до базиса пространства V, он и будет искомым).

Предположим, что $\sum\limits_{i=1}^{k+l-p} \lambda_i e_i = 0$. Тогда $\sum\limits_{i=1}^{k} \lambda_i e_i = -\sum\limits_{j=1}^{k+l-p} \lambda_j e_j$. Правая часть равенства - это линейная комбинация базисных векторов подпространства U, левая - подпространства W. Значит $x = \sum\limits_{i=1}^{k} \lambda_i e_i \in U \cap W$, поэтому $x = \sum\limits_{i=1}^{p} \mu_i e_i = -\sum\limits_{j=k+1}^{k+l-p} \lambda_j e_j$ (разложение вектора $\in U \cap W$ по базису этого подпространства). Перенося всё в одну часть, получим $\sum\limits_{i=1}^{p} \mu_i e_i + \sum\limits_{j=k+1}^{k+l-p} \lambda_j e_j = 0$. Значит, $\mu_i = \lambda_j = 0$ $(i = 1, \dots, p; j = k+1, \dots, k+l-p)$ $\Rightarrow$ $x = 0$ $\Rightarrow$ $\lambda_i = 0$ $(i = 1, \dots, k)$. Поэтому векторы $(e_1, \dots, e_{k+l-p})$ линейно независимы. **Q.E.D.**

Def. Суммой подпространств U и $W \in V$ называется подпространство $U + W = \langle U \cup W \rangle$ - наименьшее подпространство, содержащее U и W. Ясно, что $U + W = \{u + w \,:\, u \in U, w \in W\}$ (такие векторы должны быть в $U + W$, но и сами они уже образуют подпространство).

Следстсвие. $\dim(U + W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W)$.

Доказательство. $\dim(U+W) = k+l-p = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W)$ - в обозначениях предыдущей теоремы: $k + l - p$ линейно независимых векторов составляют базис $U + W$. **Q.E.D.**

Для трёх подпространств, вообще говоря, не существует согласованного с ними базиса (рассм. 3 одномерных подпространства в $\mathbb{R}^2$).

5 Линейная независимость подпространств. Базис и размерность прямой суммы

Def. Подпространства $U_1, \dots, U_k \subset V$ называются линейно независимыми, если $u_1 + \dots + u_k = 0$ $(u_i \in U_i)$ $\Rightarrow$ $u_1 = u_2 = \dots = u_k = 0$.

Теорема. Два подпространства U и W линейно независимы $\Leftrightarrow$ $U \cap W = 0$.

Доказательство. $u + w = 0$ $\Leftrightarrow$ $u = -w \in U \cap W$. Если $U \cap W = 0$, то $u = w = 0$. Обратно, если существует ненулевой вектор $z \in U \cap W$, то, сложив его с противоположным, получим $z + (-z) = 0$, где $z \in U$, $-z \in W$. **Q.E.D.**

Для трёх подпространств если их попарные пересечения равны $\{0\}$, то это не означает их линейной независимости.

Теорема. Если подпространства $U_1, \dots, U_k$ линейно независимы, то размерность их суммы равна сумме их размерностей: $\dim(U_1 + \dots + U_k) = \dim U_1 + \dots + \dim U_k$.

Доказательство. Пусть $(e_{i1}, \dots, e_{in_i})$ - базис в U_i $(i = 1, \dots, k)$, $\dim U_i = n_i$. Докажем, что $(e) = (e_{ij} \,:\, i = 1, \dots, k;\ j = 1, \dots, n_i)$ - базис $U_1 + \dots + U_k$:

1) Каждый вектор $u \in U_1 + \dots + U_k$ имеет вид $u = u_1 + \dots + u_k$ $(u_i \in U_i) \Rightarrow$ выражается через (e);

2)Векторы (e) линейно независимы. Действительно, предположим, что $\sum\limits_{i,j} \lambda_{ij} e_{ij} = 0$. Тогда $\sum\limits_{i} \left(\sum\limits_{j} \lambda_{ij} e_{ij} \right) = 0$; но $\forall i$ $\sum\limits_{j} \lambda_{ij} e_{ij} \in U_i$ $\Rightarrow$ $\sum\limits_{j} \lambda_{ij} e_{ij} = 0$ $\Rightarrow$ $\forall i\ \forall j\ \lambda_{ij} = 0$ (так как мы имеем линейную комбинацию базисных векторов каждого из подпространств). **Q.E.D.**

Def. Сумма линейно независимых подпространств называется прямой суммой. Обозначается: $U_1 \oplus U_2 \oplus \dots \oplus U_k$. Если $U_1 \oplus \ldots \oplus U_k = V$, то говорят, что пространство V разложено в прямую сумму подпространств $U_1, \dots, U_k$. В этом случае $\dim V = \dim U_1 + \dots + \dim U_k$. Каждый вектор из V единственным образом представляется в виде $x = x_1 + \dots + x_k$, где $x_i \in U_i$. Вектор x_i называется проекцией x на U_i и обозначается $x_i = \operatorname{pr}_{U_i} x$ что зависит от всего разложения пространства V в прямую сумму.

6 Линейные отображения, их запись в координатах. Образ и ядро линейного отображения, связь между их размерностями.

Def. Отображение $\varphi : V \to U$ векторных пространств над полем K называется линейным, если:

1. $\varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y)$ для любых $x, y \in V$;
2. $\varphi(\lambda x) = \lambda\varphi(x)$ для любых $\lambda \in K$ и $x \in V$.

Свойства:
$\varphi(0) = 0$
$\varphi(\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_k x_k) = \lambda_1\varphi(x_1) + \dots + \lambda_k\varphi(x_k)$;
Линейно зависимая система векторов переходит в линейно зависимую. Линейное отображение конечномерных векторных пространств полностью определяется образами базисных векторов:
Пусть $(e_1, \dots, e_n)$ - базис пространства V. Линейное отображение $\varphi : V \to U$ однозначно определяется векторами $\varphi(e_j) = u_j$. Действительно, $x = \sum\limits_j x_j e_j \Rightarrow \varphi(x) = \sum\limits_j x_j u_j$. Обратно, если заданы любые векторы $u_j \in U$, то можно определить линейное отображение $\varphi : V \to U$ по формуле $x = \sum\limits_j x_j e_j \Rightarrow \varphi(x) = \sum\limits_j x_j u_j$. Оно будет линейным и $\varphi(e_j) = u_j$.
Если в пространстве U выбран базис $(f_1, \dots, f_m)$, то u_j можно разложить по этому базису: $u_j = \sum\limits_i a_{ij} f_i$. Матрица $A = (a_{ij})$ называется матрицей линейного отображения φ относительно выбранных базисов пространств V и U. Координаты образов базисных векторов пишутся по столбцам, $(\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)) = (f_1, \dots, f_m)A$.

$$x = \sum_j x_j e_j \in V \Rightarrow \varphi(x) = \sum_j x_j u_j = \sum_{i,j} x_j a_{ij} f_i = \sum_i \left(\sum_j x_j a_{ij} \right) f_i,$$

значит, если обозначить $\varphi(x) = y = \sum\limits_i y_i f_i$, то $y_i = \sum\limits_j a_{ij} x_j \quad (i = 1, \dots, m)$.
В матричной форме $Y = AX$, где $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)^\top, Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)^\top$.
Def. Пусть $\varphi : V \to U$. Образом φ называется подмножество $\operatorname{Im}\varphi = \{\varphi(x) \ : \ x \in V\} \subset U$;
ядром φ - подмножество $\operatorname{Ker}\varphi = \{x \in V \ : \ \varphi(x) = 0\} \subset V$.
Теорема.

1. $\operatorname{Im}\varphi$ - подпространство в U, $\dim\operatorname{Im}\varphi = \operatorname{rk} A$, где A - матрица φ;
2. $\operatorname{Ker}\varphi$ - подпространство в V, $\dim\operatorname{Ker}\varphi = \dim V - \operatorname{rk} A$;
3. $\forall\, b = \varphi(a) \in \operatorname{Im}\varphi \quad \varphi^{-1}(b) = a + \operatorname{Ker}\varphi$ (полный прообзаз равен смежному классу по ядру, в частности, φ инъективно $\Leftrightarrow \operatorname{Ker}\varphi = 0$).

Доказательство.

1. $\varphi(x) + \varphi(y) = \varphi(x + y) \in \operatorname{Im}\varphi$;
   $\lambda\varphi(x) = \varphi(\lambda x) \in \operatorname{Im}\varphi$;
   $0 = \varphi(0) \in \operatorname{Im}\varphi \Rightarrow \operatorname{Im}\varphi$ - подпространство.

   $\operatorname{Im}\varphi = \langle\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)\rangle \Rightarrow \dim \operatorname{Im}\varphi = \operatorname{rk}(\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n))$.
   Но система векторов $(\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n))$ - это система столбцов матрицы A.

2. $\varphi(x) = \varphi(y) = 0 \Rightarrow \varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y) = 0$;
   $\varphi(x) = 0 \Rightarrow \varphi(\lambda x) = \lambda\varphi(x) = 0$;
   $\varphi(0) = 0 \Rightarrow \operatorname{Ker}\varphi$ - подпространство.

   Пусть $(e_1, \dots, e_k)$ - базис $\operatorname{Ker}\varphi$, $(e_1, \dots, e_n)$ - базис V. Тогда $\operatorname{Im}\varphi = \langle\varphi(e_{k+1}), \dots, \varphi(e_n)\rangle$. Докажем, что $\varphi(e_{k+1}), \dots, \varphi(e_n)$ линейно независимы. Пусть $\lambda_{k+1}\varphi(e_{k+1}) + \dots + \lambda_n\varphi(e_n) = 0$. Тогда $\varphi(\lambda_{k+1}e_{k+1} + \dots + \lambda_n e_n) = 0$, значит $\lambda_{k+1}e_{k+1} + \dots + \lambda_n e_n \in \operatorname{Ker}\varphi \Rightarrow \lambda_{k+1} = \dots = \lambda_n = 0$ (иначе базис V линейно зависим). Таким образом $\dim \operatorname{Im}\varphi = n - k = \dim V - \dim \operatorname{Ker}\varphi$.

3. Пусть $b = \varphi(a) \in \operatorname{Im}\varphi$.
   $\forall\ y \in \operatorname{Ker}\varphi \quad \varphi(a + y) = \varphi(a) + \varphi(y) = b$.

   Обратно, $\varphi(x) = b \Rightarrow \varphi(x - a) = \varphi(x) - \varphi(a) = 0 \Rightarrow x - a = y \in \operatorname{Ker}\varphi \Rightarrow x = a + y,\ y \in \operatorname{Ker}\varphi$. Значит, $\varphi^{-1}(b) = a + \operatorname{Ker}\varphi$. В частности, φ - инъективно $\Leftrightarrow |\varphi^{-1}(a)| = 1 \Leftrightarrow \operatorname{Ker}\varphi = 0$. **Q.E.D.**

7 Линейные функции, их запись в координатах. Сопряжённое пространство и сопряжённые базисы.

Def. Функция α на векторном пространстве V со значениями в поле K называется линейной, если:

1. $\alpha(x + y) = \alpha(x) + \alpha(y) \qquad \forall\ x, y \in V$;
2. $\alpha(\lambda x) = \lambda\alpha(x) \qquad \forall\ \lambda \in K,\ \forall\ x \in V$.

Это специальный случай линейного отображения - отображение из V в поле K, рассматриваемое как векторное пространство над самим собой ($\dim = 1$).
Запись линейной функции в координатах:
Пусть $(e_1, \dots, e_n)$ - базис V, $x = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i \Rightarrow \alpha(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \alpha(e_i)$. Положим $a_i = \alpha(e_i)$, тогда

$$\alpha(x) = \sum_i a_i e_i.$$

Числа a_i называются координатами линейной функции α в базисе $(e_1, \dots, e_n)$.
Преобразования координат при переходе к другому базису:

$$(e'_1, \dots, e'_n) = (e_1, \dots, e_n)\, C \quad \Rightarrow \quad (a'_1, \dots, a'_n) = (a_1, \dots, a_n)\, C.$$

Если $\alpha \neq 0$, то можно выбрать базис, в котором $\alpha(x) = x_1$. Действительно, $\dim \operatorname{Ker}\alpha = n - 1$, пусть $(e_2, \dots, e_n)$ - базис $\operatorname{Ker}\alpha$. Возьмём $e_1 \notin \operatorname{Ker}\alpha$, такой, что $\alpha(e_1) = 1$. Тогда $(e_1, \dots, e_n)$ - базис V, и в нём $\alpha(x) = x_1$.
Пространство линейных функций $L(V, K)$ образует линейное (векторное) пространство над K.
Оно обозначается V^* и называется сопряжённым к V пространством.
Пусть $(e_1, \dots, e_n)$ - базис V. Рассмотрим координатные функции $\varepsilon_i(x) = x_i$.

Теорема. $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ - базис V^*.
Доказательство. $\alpha(x) = \sum\limits_i a_i x_i \Rightarrow \alpha = \sum\limits_i a_i \varepsilon_i$. С другой стороны, если $\sum a_i \varepsilon_i = 0$, то $\left(\sum\limits_i a_i \varepsilon_i\right)(e_j) = a_j = 0 \ \Rightarrow \ a_1 = \dots = a_n = 0$. **Q.E.D.**
Следстсвие. Для конечномерного пространства $\dim V^* = \dim V$.
Def. Базис $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ называется сопряжённым к базису $(e_1, \dots, e_n)$.

8 Канонический изоморфизм конечномерного векторного пространства и второго сопряжённого пространства.

Рассмостим отображение $f : V \to V^{**}$, $x \mapsto f_x$, такое, что $f_x(\alpha) = \alpha(x)$.
Теорема. f - изоморфизм.
Доказательство.

1. f линейно:

   $f_{x+y}(\alpha) = \alpha(x+y) = \alpha(x) + \alpha(y) = f_x(\alpha) + f_y(\alpha)$, то есть $f_{x+y} = f_x + f_y$;

   $f_{\lambda x}(\alpha) = \alpha(\lambda x) = \lambda\alpha(x) = \lambda f_x(\alpha)$, то есть $f_{\lambda x} = \lambda f_x$.

2. $\dim V = \dim V^{**}$, поэтому достаточно доказать, что $\operatorname{Ker} f = 0$.

   $x \in \operatorname{Ker} f \Rightarrow f_x(\alpha) = 0 \ \forall \ \alpha \in V^* \Leftrightarrow \alpha(x) = 0 \ \forall \ \alpha \in V^* \Leftrightarrow x = 0$ **Q.E.D.**

Следстсвие. Всякий базис пространства V^* сопряжён некоторому базису пространства V.
Замечание. Если $e_1, e_2, \dots, e_n \in V$, $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n \in V^*$, причём $\varepsilon_i(e_j) = \delta_{ij}$, то $(e_1, \dots, e_n)$ и $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ - сопряжённые базисы.
Действительно, если $\sum\limits_i \lambda_i e_i = 0$, то рассмотрев значение ε_j от обеих частей равенства, получим $\lambda_j = 0 \ \forall \ j \Rightarrow (e_1, \dots, e_n)$ - базис в $V \ \Rightarrow \ (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ - сопряжённый ему базис V^*.

9 Билинейные функции, их запись в координатах. Изменение матрицы билинейной функции при переходе к другому базису.

Def. Билинейной функцией α на векторном пространстве V над полем K называется отображение $\alpha : V \times V \to K$, линейное по каждому аргументу.
Запись в координатах:
Пусть $(e_1, \dots, e_n)$ - базис пространства V, $x = \sum\limits_i x_i e_i, \ y = \sum\limits_j y_j e_j$.
$\alpha(x, y) = \sum\limits_{i,j} x_i y_j \cdot \alpha(e_i, e_j)$. Положим $a_{ij} = \alpha(e_i, e_j)$, тогда $\alpha(x, y) = \sum\limits_{i,j} a_{ij} x_i y_j$.
Матрица $A = (a_{ij})$ называется матрицей билинйеной функции α в базисе $(e_1, \dots, e_n)$. В матричной форме:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \ Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \alpha(x, y) = X^\top A Y.$$

При переходе к другому базису $(e'_1, \dots, e'_n)$:
$(e'_1, \dots, e'_n) = (e_1, \dots, e_n)\, C \quad \Rightarrow \quad X = CX', \ Y = CY'$. Тогда $\alpha(x, y) = X^\top A Y = X'^\top C^\top A C Y'$.
Таким образом,

$$A' = C^\top A C.$$

Def. Ядром билинейной функции α называется (очевидно, подпространство)

$$\operatorname{Ker}\alpha = \{y \in V \ : \ \alpha(x,y) = 0 \ \forall \ x \in V\}.$$

Теорема. $\dim\operatorname{Ker}\alpha = \dim V - \operatorname{rk} A$, где A - матрица функции α в каком-либо базисе.
Доказательство. $\alpha(x,y) = 0 \ \forall \ x \ \Leftrightarrow \ \alpha(e_i,y) = 0 \quad (i = 1,\dots,n)$.
Но $\alpha(e_i,y) = \sum\limits_j a_{ij}y_j$, значит $\operatorname{Ker}\alpha$ задаётся системой однородных линейных уравнений

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}y_j = 0 \quad (i = 1,\dots,n).$$

Следовательно, $\dim\operatorname{Ker}\alpha = n - \operatorname{rk} A$ **Q.E.D.**

10 Ортогональное дополнение к подпространству относительно симметрической или кососимметрической билинейной функции.

Def. Билинейная функция α называется симместрической (кососимместрической), если
$\forall \ x,y \in V \ \ \alpha(x,y) = \alpha(y,x) \ \ (\alpha(x,y) = -\alpha(y,x), \ \operatorname{char}K \neq 2)$.
Def. Векторы x и y называются ортогональными относительно симметрической или кососимметрической билинейной функции α, если $\alpha(x,y) = 0$.
Если α кососимметрическая, то каждый вектор ортогонален сам себе: $\alpha(x,x) = -\alpha(x,x) = 0$.
Def. Ортогональным дополнением к подпространсву $U \subset V$ относительно симметрической или кососимместрической билинейной функции α называется подпространство
$U^\perp = \{y \in V \ : \ \alpha(x,y) = 0 \ \forall \ x \in U\}$. В частности, $V^\perp = \operatorname{Ker}\alpha$.
Теорема. $\dim U^\perp \geqslant \dim V - \dim U$.
Если же α невырождена, то $\dim U^\perp = \dim V - \dim U$, и $\left(U^\perp\right)^\perp = U$.
Доказательство. Запишем уравнения U в координатах.
Заметим, что $U^\perp = \{y \in V \ : \ \alpha(e_i,y) = 0 \ \forall \ i\}$ (здесь $e_1,\dots,e_k$ - базис U). Дополним $(e_1,\dots,e_k)$ до базиса $(e_1,\dots,e_n)$ всего пространства V. В этом базисе $U^\perp$ задаётся уравнениями:

$$\sum_j a_{ij}y_j = 0 \qquad (i = 1,\dots,k).$$

Значит, $\dim U^\perp \geqslant n - k = \dim V - \dim U$. Если же α невырождена, то $A = (a_{ij})$ - невырожденная матрица, следовательно её первые k строк линейно независимы, поэтому

$$\dim U^\perp = n - k = \dim V - \dim U.$$

Для доказательства того, что $\left(U^\perp\right)^\perp = U$, достаточно заметить, что $\left(U^\perp\right)^\perp \supset U$
и размерности U и $\left(U^\perp\right)^\perp$ в случае невырожденности α совпадают, поэтому $\left(U^\perp\right)^\perp = U$. **Q.E.D.**
Def. Подпрострасство $U \subset V$ называется невырожденным относительно билинейной функции α, если функция $\alpha|_U$ невырождена.
Теорема. $V = U \oplus U^\perp \ \Leftrightarrow \ U$ невырождено относительно α.
Доказательство.

1. U невырождено $\Leftrightarrow U \cap U^\perp = 0$ - ядро $\alpha|_U$ нулевое;
2. $V = U \oplus U^\perp \ \Rightarrow \ U \cap U^\perp = 0 \ \Rightarrow \ U$ невырождено;
3. U невырождено $\Rightarrow U \cap U^\perp = 0 \ \Rightarrow$ сумма $U + U^\perp$ прямая.
   $\dim(U \oplus U^\perp) = \dim U + \dim U^\perp \geqslant \dim V \ \Rightarrow \ U \oplus U^\perp = V$ **Q.E.D.**

11 Связь между симметрическими билинейными и квадратичными функциями. Существование ортогонального базиса для симметрической билинейной функции.

Def. Базис $(e_1, \dots, e_n)$ называется ортогональным относительно билинейной функции α, если в этом базисе матрица её имеет диагональный вид. В ортогональном базисе билинейная функция записывается как $\alpha(x,y) = \sum\limits_i a_i x_i y_i = a_1 x_1 y_1 + \dots + a_n x_n y_n$.

Def. Квадратичной функцией, ассоциированной с симметрической билинейной функцией α, называется функция $q(x) = \alpha(x,x)$. В координатах: $q(x) = \sum\limits_{i,j} a_{ij} x_i x_j$. Понятно, что α однозначно восстанавливается по q: $\alpha(x,y) = \frac{1}{2}(q(x+y) - q(x) - q(y))$.
Теорема. Для всякой симметрической билинейной функции α существует ортогональный базис.
Доказательство. Индукцией по $n = \dim V$.
При $n = 1$ доказывать нечего - любой базис ортогональный.
При $n > 1$ если $\alpha \equiv 0$, то доказывать нечего.
Пусть $n > 1$ и $\alpha \neq 0$. Тогда и $q \neq 0$, то есть $\exists\ e_1 \in V\ :\ q(e_1) \neq 0$. Подпространство $\langle e_1 \rangle$ невырождено относительно $\alpha \;\Rightarrow\; V = \langle e_1 \rangle \oplus \langle e_1 \rangle^\perp$, $\dim \langle e_1 \rangle^\perp = n - 1$. По предположению индукции в $\langle e_1 \rangle^\perp$ существует ортогональный базис $(e_2, \dots, e_n)$. Значит $(e_1, \dots, e_n)$ - ортогональный базис V.
Q.E.D.

12 Нормальный вид вещественной квадратичной функции. Закон инерции.

В ортогональном базисе матрица симметрической билинейной функции имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_n \end{pmatrix}.$$

1. За счёт перестановки базисных векторов можно переставлять числа a_i;
2. За счёт умножения базисных векторов на ненулевые элементы поля K, можно умножить a_i на квадраты элементов поля.

Число ненулевых коэффициентов a_i равно рангу $\operatorname{rk} q$ билинейной формы (и не зависит от базиса).
Если $K = \mathbb{C}$, то можно добиться того, чтобы $a_i \in \{0, 1\}$. Получим нормальный вид

$$q(x) = x_1^2 + \dots + x_{\operatorname{rk} q}^2.$$

Если $K = \mathbb{R}$, то можно добиться того, чтобы $a_i \in \{0, \pm 1\}$. Получим нормальный вид

$$q(x) = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_k^2 - x_{k+1}^2 - \dots - x_{k+l}^2 \qquad (k + l = \operatorname{rk} q).$$

Def. Квадратичная функция q называется положительно определённой, если $\forall\ x \neq 0\ \ q(x) > 0$. Квадратичная положительно определена $\Leftrightarrow$ её нормальный вид есть $x_1^2 + \dots + x_n^2$. То есть для положительно определённой квадратичной функции её нормальный вид определяется однозначно. Понятно, что если q положительно определена, то $\det q > 0$ в любом базисе (потому что в нормальном виде $\det q = 1$).
Теорема (Закон инерции). Числа k и l в нормальном виде квадратичной функции не зависят от выбора базиса, в котором эта функция имеет нормальный вид.

Доказательство. Достаточно доказать, что k не зависит от базиса. Докажем, что k есть максимальная размерность подпространства, на котором данная квадратичная функция q положительно определена. Пусть $q(x) = x_1^2+x_2^2+\dots+x_k^2-x_{k+1}^2-\dots-x_{k+l}^2$ в базисе $(e_1, \dots, e_n)$. На подпространстве $\langle e_1, \dots, e_k\rangle$ q положительно определена.
Пусть теперь q положительно определена на каком-то подпространстве U и $\dim U > k$. Рассмотрим подпространство $W = \langle e_{k+1}, \dots, e_n\rangle$, $\dim W = n-k$. Но так как $\dim U + \dim W > n$, $U \cap W \neq 0$.
Пусть $0 \neq x \in U \cap W$. Тогда $q(x) > 0$ с одной стороны и $q(x) = -x_{k+1}^2 - \dots - x_{k+l}^2 \leqslant 0$. **Q.E.D.**
Def. Число k называется положительным индексом инерции квадратичной функции q,
число l - отрицательным.

13 Процесс ортогонализации. Нахождение индексов инерции квадратичной функции методом Якоби.

Положим $V_k = \langle e_1, \dots, e_k\rangle$. Матрица функции $\alpha|_{V_k}$ в базисе $(e_1, \dots, e_k)$ - это левый верхний угол порядка k матрицы A. Обозначим эту матрицу через A_k, её определитель - через δ_k.
Теорема (Процесс ортогонализации Грама - Шмидта). Предположим, что $\alpha|_{V_k}$ - невырождена, то есть $\delta_k \neq 0 \quad (k = 1, \dots, n)$. Тогда существует единственный ортогональный базис $(f_1, \dots, f_n)$ пространства V, для которого $f_k \in e_k + V_{k-1} \quad (k = 1, \dots, n)$, при этом $q(f_k) = \delta_k/\delta_{k-1}$,
если считать $\delta_0 = 1$ и $V_0 = 0$.
Доказательство. Положим $f_1 = e_1$, тогда $q(f_1) = q(e_1) = \delta_1$.
Далее, пусть $f_1, \dots, f_{k-1}$, удовлетворяющие всем требуемым условиям, уже построены. Будем искать f_k в виде

$$f_k = e_k + \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \dots + \lambda_{k-1} f_{k-1} \ \in \ e_k + V_{k-1}.$$

Условия ортогональности: $\alpha(f_k, f_i) = \alpha(e_k, f_i) + \lambda_i q(f_i) = 0 \quad (i = 1, \dots, k-1)$.
Так как $q(f_i) = \alpha(f_i, f_i) = \delta_i/\delta_{i-1} \neq 0$, то уравнение имеет единственное решение $\lambda_i = -\frac{\alpha(e_k, f_i)}{q(f_i)}$.
Остаётся доказать, что $q(f_k) = \delta_k/\delta_{k-1}$.
Рассмотрим базисы $(e_1, e_2, \dots, e_k)$ и $(f_1, f_2, \dots, f_k)$ пространства V_k. Матрица перехода имеет вид

$$C = \begin{pmatrix} 1 & * & \dots & * \\ 0 & 1 & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

$\det C = 1$. Значит, матрица $\alpha|_{V_k}$ в обоих базисах имеет одинаковый определитель, то есть

$$\delta_k = \det A_k = \begin{vmatrix} q(f_1) & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & q(f_k) \end{vmatrix} = q(f_1) \cdot \dots \cdot q(f_k), \quad \text{но} \quad q(f_1) \cdot \dots \cdot q(f_{k-1}) = \delta_{k-1}, \quad \mathcal{Q.E.D.}$$

Теорема (Метод Якоби). Пусть квадратичная функция q в каком-то базисе имеет матрицу A, все угловые миноры $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n$ которой отличны от нуля. Тогда отрицательный индекс инерции квадратичной функции q равен числу перемен знака в последовательности $(1, \delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n)$.
Доказательство. По предыдущей теореме, функцию можно привести к виду

$$\delta_1 x_1^2 + \frac{\delta_2}{\delta_1} x_2^2 + \dots + \frac{\delta_n}{\delta_{n-1}} x_n^2.$$

Коэффициент при x_i^2 отрицателен тогда и только тогда, когда на i-м месте в последовательности $(1, \delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n)$ имеет место перемена знака. **Q.E.D.**

14 Критерий Сильвестра.

Теорема (Критерий Сильвестра). Пусть квадратичная функция q в каком-то базисе имеет матрицу A. Тогда q положительно определена тогда и только тогда, когда все угловые миноры марицы A положительны.

Доказательство. Если $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n$ положительны, то в силу Метода Якоби отрицательный индекс инерции q равен нулю, и $\det q \neq 0$, значит q положительно определена.

Обратно, пусть q положительно определена. Положим $V_k = \langle e_1, e_2, \ldots, e_k \rangle$. Тогда матрица ограничения $\alpha|_{V_k}$ есть A_k - левый верхний угол порядка k матрицы A. Ясно, что $\alpha|_{V_k}$ - положительно определённая квадратичная функция. Значит, $\det \alpha|_{V_k} = \det A_k = \delta_k > 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, n)$ **Q.E.D.**

15 Существование симплектического базиса для кососимметрической билинейной функции.

<u>Def</u>. Базис $(e_1, \ldots, e_n)$ называется симплектическим относительно кососимметрической билинейной функции α, если $\alpha(e_1, e_2) = -\alpha(e_2, e_1) = 1,\ \alpha(e_3, e_4) = -\alpha(e_4, e_3) = 1, \ldots, \alpha(e_{2m-1}, e_{2m}) =$
$= -\alpha(e_{2m}, e_{2m-1}) = 1$ и $\alpha(e_i, e_j) = 0$ в остальных случаях. Иными словами, если матрица α в этом базисе имеет вид:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 &&&&&&&& \\ -1 & 0 &&&&&&&& \\ && 0 & 1 &&&&&& \\ && -1 & 0 &&&&&& \\ &&&& \ddots &&&&& \\ &&&&& 0 & 1 &&& \\ &&&&& -1 & 0 &&& \\ &&&&&&& 0 && \\ &&&&&&&& \ddots & \\ &&&&&&&&& 0 \end{pmatrix}.$$

Теорема. Для любой кососимметрической билинейной функции α существует симплектический базис.

Доказательство. Индукцией по $n = \dim V$.

Если $n = 0$ или 1, то доказывать нечего.

Если $n \geqslant 2$, но $\alpha \equiv 0$, то тоже доказывать нечего.

Если $n \geqslant 2$, и $\alpha \neq 0$, то $\exists\, e_1, e_2$ такие, что $\alpha(e_1, e_2) \neq 0$. Нормируя, добьёмся того, чтобы $\alpha(e_1, e_2) = 1$. Матрица $\alpha|_{\langle e_1, e_2 \rangle^\perp}$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

значит, $U = \langle e_1, e_2 \rangle^\perp$ - невырожденное подпространство, поэтому $V = U \oplus U^\perp$. По предположению индукции, в $U^\perp$ существует симплектический базис $(e_3, e_4, \ldots, e_n)$. Тогда $(e_1, \ldots, e_n)$ - искомый симплектический базис всего пространства. **Q.E.D.**

16 Евклидовы пространтва. Длина вектора и угол между векторами.

<u>Def</u>. Евклидовым векторным пространством называется вещественное векторное пространство, в котором фиксирована некоторая положительно определённая билинейная функция, называемая скалярным умножением и обозначаемая (,).

Def. Длиной вектора x в евклидовом векторном пространстве называется арифметическое значение квадратного корня из его скалярного квадрата: $|x| = \sqrt{(x,x)}$.
Свойство длины: $|\lambda x| = |\lambda| \cdot |x|$.
Def. Углом между ненулевыми векторами x и y в евклидовом векторном пространстве называется такой угол α $(0 \leqslant \alpha \leqslant \pi)$, косинус которого равен $\cos\alpha = \dfrac{(x,y)}{|x|\cdot|y|}$. Корректность этого определения вытекает из следующей теоремы:
Теорема (Неравенство Коши-Буняковского). Для любых векторов $x, y \in V$ выполняется неравенство $|(x,y)| \leqslant |x| \cdot |y|$, причём равенство достигается $\Leftrightarrow$ x и y пропорциональны.
Доказательство. Если $y = \lambda x$, то $|(x,y)| = |\lambda| \cdot |x|^2 = |x| \cdot |y|$.
Пусть теперь x и y непропорциональны. Тогда они составляют базис подпространства $U = \langle x, y\rangle$. Ограничение $(\ ,\ )|_U$ является положительно определённой симметрической билинейной функцией, значит

$$\begin{vmatrix} (x,x) & (x,y) \\ (y,x) & (y,y) \end{vmatrix} > 0, \quad \Rightarrow \quad |x|^2 \cdot |y|^2 - (x,y)^2 > 0 \quad \Rightarrow \quad |(x,y)| \leqslant |x| \cdot |y|, \qquad \mathcal{Q.E.D}$$

Верно неравенство треугольника $|x+y| \leqslant |x| + |y|$.
Из общей теории следует, что в любом конечномерном евклидовом векторном пространстве существует ортонормированный базис. В этом базисе скалярное умножение принимает вид:

$$(x,y) = x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n.$$

Def. Изоморфизмом евклидовых пространств называется отображение, которое является изоморфизмом векторных пространств и сохраняет скалярное умножение. Понятно, что евклидовы пространства одинаковой конечной размерности изоморфны (возьмём два ортонормированных базиса, установим изоморфизм, ассоциированный с ними, тогда и скалярное произведение будет сохраняться).

17 Матрица и определитель Грама системы векторов евклидова пространства.

Def. Пусть V - евклидово простраснтво и $a_1, a_2, \dots, a_k \in V$. Матрицей Грама этой системы векторов называется матрица

$$G(a_1, a_2, \dots, a_k) = \begin{pmatrix} (a_1,a_1) & (a_1,a_2) & \dots & (a_1,a_k) \\ (a_2,a_1) & (a_2,a_2) & \dots & (a_2,a_k) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (a_k,a_1) & (a_k,a_2) & \dots & (a_k,a_k) \end{pmatrix}.$$

Теорема. $\det G(a_1, a_2, \dots, a_k) \geqslant 0$, причём равенство достигается $\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow$ векторы $a_1, a_2, \dots, a_k$ линейно зависимы.
Доказательство.

1. Пусть $a_1, a_2, \dots, a_k$ линейно зависимы, то есть $\sum\limits_{i=1}^{k} \lambda_i a_i = 0$, тогда для каждого j $\sum\limits_i \lambda_i (a_i, a_j) = 0$, значит, строки матрицы Грама линейно зависимы с теми же коэффициентами, значит $\det G(a_1, a_2, \dots, a_k) = 0$;

2. Пусть $a_1, a_2, \dots, a_k$ линейно независимы. Тогда они составляют базис подпространства $U = \langle a_1, a_2, \dots, a_k\rangle$. $G(a_1, a_2, \dots, a_k)$ - это матрица ограничения $(\ ,\ )|_U$ в этом базисе, значит $\det G(a_1, a_2, \dots, a_k) > 0$. **Q.E.D**.

18 Ортонормированные базисы евклидова пространства и ортогональные матрицы.

Теорема. Пусть $(e_1, \dots, e_n)$ - ортонормированный базис пространства V, и пусть $(e'_1, \dots, e'_n) = (e_1, \dots, e_n)\, C$. Тогда $(e'_1, \dots, e'_n)$ - также ортонормированный базис $\Leftrightarrow C^{-1} = C^\top$ (такие матрицы называются ортогональными).
Доказательство. $G(e'_1, e'_2, \dots, e'_n) = C^\top G(e_1, e_2, \dots, e_n) C = C^\top C$, как матрицы скалярного умножения в двух базисах. Поэтому базис $(e'_1, \dots, e'_n)$ является ортонормированным $\Leftrightarrow G(e'_1, e'_2, \dots, e'_n) = E \Leftrightarrow C^\top = C^{-1}$ **Q.E.D**.

19 Расстояние от вектора до подпространсntва, его выражение через определители Грама.

Для всякого подпространсntва $U \in V$ евклидова векторного пространства $U \oplus U^\perp = V$, так как U - невырождено относительно скалярного умножения. Значит, $\forall\ x \in V$ единственным образом представим в виде $x = y + z$, где $y \in U, z \in U^\perp$. Вектор y называется ортогональной проекцией вектора x на подпространство U, вектор z - ортогональной составляющей вектора x:
$y = \mathrm{pr}_U x,\ z = \mathrm{ort}_U x$.

Если $(e_1, e_2, \dots, e_k)$ - ортонормированный базис в U, то $\mathrm{pr}_U x = \sum\limits_{i=1}^{k} (x, e_i) e_i$.

Действительно, $\left(x - \sum\limits_{i=1}^{k} (x, e_i) e_i\ ;\ e_j\right) = 0\ \forall\ j$, значит, разность принадлежит $U^\perp$.

Если же $(e_1, e_2, \dots, e_k)$ - ортогональный базис подпространства U, то $\mathrm{pr}_U x = \sum\limits_{i=1}^{k} \dfrac{(x, e_i)}{(e_i, e_i)} e_i$.

(действительно, рассмотрим $e'_i = \dfrac{e_i}{\sqrt{(e_i, e_i)}}$ и воспользуемся предыдущим).
<u>Def</u>. Расстояние межлу векторами: $\rho(x, y) = |x - y|$, расстояние между подмножествами:
$\rho(X, Y) = \inf\limits_{x \in X, y \in Y} \rho(x, y)$.
Теорема. Пусть $U \subset V$ - подпространство, $x \in V$. Тогда $\rho(x, U) = |\mathrm{ort}_U x|$, причём единственный ближайший к вектору x вектор подпространства U есть $\mathrm{pr}_U x$.
Доказательство. Пусть $x = y + z,$ где $y \in U, z \in U^\perp$. Пусть $y' \in U,\ y' \neq y$.
Надо доказать, что $\rho(x, y') > \rho(x, y)$.
$x - y' = (x - y) + (y - y') = z + u$, где $u \in U$, $\mathrm{ort}_U x = z \perp u$. $\Rightarrow\ |x - y'| = \sqrt{|z|^2 + |u|^2} > |z|$ **Q.E.D**.
Следстсвие. Из процесса ортогонализации вытекает, что если $(e_1, e_2, \dots, e_{k-1})$ - произвольный базис в U, то

$$(\rho(x, U))^2 = \frac{\det G(e_1, \dots, e_{k-1}, x)}{\det G(e_1, \dots, e_{k-1})}.$$

Доказательство. Действительно, рассмотрим процесс ортогонализации произвольного базиса $(e_1, \dots, e_n)$ пространства V (можно ортогонализовать, так как все угловые миноры положительны). Пусть получается базис $(f_1, \dots, f_n)$. Понятно, что $f_k = \mathrm{ort}_{V_{k-1}} e_k$, где $V_{k-1} = \langle e_1, \dots, e_{k-1} \rangle = \langle f_1, \dots, f_{k-1} \rangle$. Тогда $f_k = e_k - \mathrm{pr}_{V_{k-1}} e_k = e_k - \sum\limits_{i=1}^{k-1} \dfrac{(e_k, f_i)}{(f_i, f_i)} f_i$, и $(f_k, f_k)^2 = \dfrac{\det G(e_1, \dots, e_k)}{\det G(e_1, \dots, e_{k-1})}$. Теперь, полагая $e_k = x$, (в случае $x \in U$ всё и так очевидно) получаем то, что надо. **Q.E.D.**

20 Объём параллелепипеда в евклидовом пространстве (две формулы).

Def. Параллелепипедом, натянутым на базис $(a_1, \ldots, a_n)$ называется множество

$$P(a_1, \ldots, a_n) = \left\{ \sum_i \lambda_i a_i \ : \ 0 \leqslant \lambda_i \leqslant 1 \right\}$$

Def. Объёмом n-мерного параллелепипеда $P(a_1, \ldots, a_n)$ называется произведение объёма "основания" $P(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1})$ на "высоту" $h = \left|\mathrm{ort}_{\langle a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}\rangle} a_n\right|$, при $n = 1$ $\quad \mathrm{vol}\, P(a_1) = |a_1|$.

Теорема. $(\mathrm{vol}\, P(a_1, \ldots, a_n))^2 = \det G(a_1, \ldots, a_n)$.

Доказательство. Индукцией по n.

$n = 1 \ : \ (\mathrm{vol}\, P(a_1))^2 = |a_1|^2 = (a_1, a_1) = \det G(a_1)$;

$n > 1 \ : \ (\mathrm{vol}\, P(a_1, \ldots, a_n))^2 = (\mathrm{vol}\, P(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}))^2 \cdot \rho(a_n; \langle a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}\rangle)^2 =$

$\det G(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}) \cdot \dfrac{\det G(a_1, \ldots, a_n)}{\det G(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1})} = \det G(a_1, \ldots, a_n)$. **Q.E.D.**

Следстсвие. $\mathrm{vol}\, P(a_1, \ldots, a_n)$ не зависит от нумерации векторов $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

Теорема. Пусть $(e_1, \ldots, e_n)$ - ортонормированный базис пространства V, $(a_1, \ldots, a_n) = (e_1, \ldots, e_n) A$. Тогда $\mathrm{vol}\, P(a_1, \ldots, a_n) = |\det A|$.

Доказательство. $G(a_1, \ldots, a_n)$ - матрица скалярного умножения в базисе $(a_1, \ldots, a_n)$.

$G(a_1, \ldots, a_n) = A^\top G(e_1, \ldots, e_n) A = A^\top A. \quad \det G(a_1, \ldots, a_n) = (\det A)^2 \ \Rightarrow$

$\Rightarrow \ \mathrm{vol}\, P(a_1, \ldots, a_n) = |\det A|$ **Q.E.D.**

21 Полуторалинейные функции, их запись в координатах. Изменение матрицы полуторалинейной функции при переходе к другому базису. Эрмитовы и косоэрмитовы полуторалинейные функции, связь между ними.

Def. Полуторалинейной функцией на комплексном пространстве V называется функция $\alpha : V \times V \to \mathbb{C}$, обладающая линейностью по второму аргументу и антилинейностью по первому, то есть:

1. $\alpha(x_1 + x_2, y) = \alpha(x_1, y) + \alpha(x_2, y)$;
2. $\alpha(\lambda x, y) = \overline{\lambda}\alpha(x, y)$.

Пусть $(e_1, \ldots, e_n)$ - базис пространства V. Тогда если $x = \sum\limits_i x_i e_i, \quad y = \sum\limits_j y_j e_j$, то

$$\alpha(x, y) = \sum_{i,j} a_{ij} \overline{x}_i y_j, \quad \text{где } a_{ij} = \alpha(e_i, e_j).$$

Матрица $A = (a_{ij})$ называется матрицей полуторалинейной функции α в базисе $(e_1, \ldots, e_n)$ (понятно, что любой комплексной матрице соответствует полуторалинейная функция).

$$\alpha(x, y) = X^* A Y, \quad \text{где } X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^\top, \ Y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)^\top, \ X^* = \overline{X}^\top.$$

Свойства:

1. $(C + D)^* = C^* + D^*$;

2. $(\lambda C)^* = \overline{\lambda} C^*$;

3. $(CD)^* = D^* C^*$.

Рассмотрим переход к другому базису: $(e'_1, \dots, e'_n) = (e_1, \dots, e_n)\, C$. Преобразования координат: $X = CX',\ Y = CY'$.

$$\alpha(x, y) = X^* A Y = (CX')^* A (CY') = X'^* (C^* A C) Y'.$$

<u>Def</u>. Ядром полуторалинейной функции α называется подпространство

$$\operatorname{Ker} \alpha = \{y \in V \ :\ \alpha(x, y) = 0 \ \forall\ x \in V\} = \{y \in V \ :\ \alpha(e_i, y) = 0 \ \forall\ i = 1, \dots, n\}$$

Теорема. $\dim \operatorname{Ker} \alpha = \dim V - \operatorname{rk} A$ **Q.E.D.** (доказательство аналогично)
<u>Def</u>. Полуторалинейная функция называется эрмитовой (косоэрмитовой), если $\alpha(x, y) = \overline{\alpha(y, x)}$ (соответственно, $\alpha(x, y) = -\overline{\alpha(y, x)}$).
Очевидно, что полуторалинейная функция α эрмитова $\Leftrightarrow$ функция $i\alpha$ косоэрмитова.

22 Нормальный вид эрмитовой функции. Закон инерции.

Будем рассматривать только эрмитовы полуторалинейные функции.
<u>Def</u>. Векторы x и y называются ортогональными относительно эрмитовой полуторалинейной функции α, если $\alpha(x, y) = 0$. Ортогональным дополнением к подпространству U называется подпространство $U^\perp = \{y \in V \ :\ \alpha(x, y) = 0 \ \forall\ x \in U\}$.
Теорема. $V = U \oplus U^\perp \ \Leftrightarrow\ U$ - невырожденное подпространство (относительно α). **Q.E.D.**
<u>Def</u>. Квадратичной эрмитовой функцией, ассоциированной с эрмитовой полуторалинейной функцией α называется $q(x) = \alpha(x, x)$. Понятно, что $\overline{q(x)} = \overline{\alpha(x, x)} = \alpha(x, x) = q(x) \ \to\ q(x) \in \mathbb{R}$.
Теорема. Эрмитова полуторалинейная функция α однозначно восстанавливается по своей квадратичной функции q.
Доказательство. $q(x + y) = \alpha(x + y, x + y) = q(x) + q(y) + \alpha(x, y) + \overline{\alpha(x, y)}$.
$q(x + iy) = \alpha(x + iy, x + iy) = q(x) + q(y) + i\alpha(x, y) - i\alpha(y, x)$.
Для $\alpha(x, y)$ и $\alpha(y, x)$ получаем систему линейных уравнений с ненулевым определителем, значит восстанавливается однозначно **Q.E.D.**
Следстсвие. $q \equiv 0 \ \Rightarrow\ \alpha \equiv 0$.
Теорема. Для всякой эрмитовой полуторалинейной функции существует ортогональный базис.
Доказательство. Аналогично. **Q.E.D.**
В этом базисе $\alpha(x, y) = a_1 \overline{x}_1 y_1 + \dots + a_n \overline{x}_n y_n$, где $a_i = q(e_i) \in \mathbb{R}$.
Нормируя базисные векторы можно добиться того, чтобы $a_i \in \{\pm 1, 0\}$. Получим нормальный вид:

$$\alpha(x, y) = \overline{x}_1 y_1 + \dots + \overline{x}_k y_k - \overline{x}_{k+1} y_{k+1} - \dots - \overline{x}_{k+l} y_{k+l};$$

$$q(x) = |x_1|^2 + \dots + |x_k|^2 - |x_{k+1}|^2 - \dots - |x_{k+l}|^2.$$

<u>Def</u>. Эрмиова квадратичная функция q называется положительно определённой, если $q(x) > 0 \ \forall\ x \neq 0$.
Теорема (закон инерции). Числа k и l в нормальном виде эрмитовой квадратичной функции не зависят от базиса, в котором она имеет нормальный вид
Доказательство. Аналогично. **Q.E.D.**
Числа k и l называются соответственно положительным и отрицательным индексами инерции эрмитовой квадратичной функции q. Аналогично для эрмитовых полуторалинейных функций имеют место процесс ортогонализации, метод Якоби и критерий Сильвестра.

23 Эрмитовы пространства. Ортонормированные базисы эрмитова пространства и унитарные матрицы.

Def. Эрмитовым пространством называется комплексное векторное пространство, в котором фиксирована некоторая положительно определённая эрмитова полуторалинейная функция, называемая скалярным умножением и обозначаемая (,).
Можно определить по аналогии с евклидовым пространством длину вектора $|x| = \sqrt{(x, x)}$, угол между векторами. Верно неравенство Коши-Буняковского $|(x, y)| \leqslant |x| \cdot |y|$, неравенство треугольника $|x + y| \leqslant |x| + |y|$. Определено расстояние между векторами $\rho(x, y) = |x - y|$.
В любом конечномерном эрмитовом пространстве существует ортонормированный базис, в котором

$$(x, y) = \overline{x}_1 y_1 + \cdots + \overline{x}_n y_n;$$

$$(x, x) = |x_1|^2 + \cdots + |x_n|^2.$$

Пусть $(e_1, \dots, e_n)$ - ортонормированный базис, $(e'_1, \dots, e'_n) = (e_1, \dots, e_n)\, C$.
Тогда базис $(e'_1, \dots, e'_n)$ ортонормирован $\Leftrightarrow$ $C^* C = E$ (такие матрицы называются унитарными).
Для любого подпространства $U \subset V$ эрмитова пространства $V = U \oplus U^{\perp}$.

24 Линейные операторы, их запись в координатах. Изменение матрицы линейного оператора при переходе к другому базису. Ранг и определитель линейного оператора. Невырожденные линейные операторы.

Def. Линейным оператором в векторном пространстве V (или линейным преобразованием пространства V) называется линейное отображение пространства V в себя $\mathcal{A} : V \to V$.
Def. Подпространснтво $U \subset V$ называется инвариантным относительно оператора $\mathcal{A}$, если $\mathcal{A}U \subset U$, то есть $\forall\ x \in U \quad \mathcal{A}x \in U$. В этом случае можно рассмотреть $\mathcal{A}|_U$ - линейный оператор в подпространстве U.
Теперь пусть $\dim V < \infty$, и пусть $\mathcal{A}$ - линейный оператор в пространстве V.
Пусть $(e_1, \dots, e_n)$ - базис V.
Разложим $\mathcal{A}e_j = \sum\limits_i a_{ij} e_i$ - в отличие от общих линейных отображений, в обоих случаях используется один и тот же базис. Матрица $A = (a_{ij})$ называется иатрицей линейного оператора $\mathcal{A}$ в базисе $(e_1, \dots, e_n)$ - в j-м столбце этой матрицы стоят координаты образа e_j в этом же базисе.
В матричной форме: $(\mathcal{A}e_1, \dots, \mathcal{A}e_n) = (e_1, \dots, e_n)\, A$.
Запись линейного оператора в координатах:
$x = \sum\limits_i x_i e_i,\ \mathcal{A}x = y = \sum\limits_j y_j e_j,\ X = (x_1, x_2, \dots, x_n)^\top,\ Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)^\top$. Тогда $Y = AX$.
Изменение матрицы линейного оператора при переходе к другому базису $(e'_1, \dots, e'_n)$:
Пусть $(e'_1, \dots, e'_n) = (e_1, \dots, e_n)\, C$. Тогда $(\mathcal{A}e'_1, \dots, \mathcal{A}e'_n) =$ *(в силу линейности)* $=$
$= (\mathcal{A}e_1, \dots, \mathcal{A}e_n)\, C = (e_1, \dots, e_n)\, AC = (e'_1, \dots, e'_n)\, C^{-1}AC$, значит $A' = C^{-1}AC$.
Понятно, что ранг и определитель линейного оператора не зависят от базиса.
Def. Линейный оператор называется невырожденным, если его определитель отличен от нуля.
Из теории общих линейных отображений следует, что

- $\dim \operatorname{Im} \mathcal{A} = \operatorname{rk} \mathcal{A}$;
- $\dim \operatorname{Ker} \mathcal{A} = \dim V - \operatorname{rk} \mathcal{A}$.

25 Собственные векторы и собственные значения линейного оператора.

Если $V = V_1 \oplus \ldots \oplus V_s$, где $V_i \quad (i = 1, \ldots, s)$ - инвариантные подпространства, то в соответсвующем базисе пространства V матрица $\mathcal{A}$ имеет блочно-диагональный вид. Рассмотрение одномерных инвариантных подпространств приводит к понятию собственного вектора.

Def. Ненулевой вектор $e \in V$ называется собственным вектором оператора $\mathcal{A}$, если $\mathcal{A}e = \lambda e$ для некоторого $\lambda \in K$. Число λ называется собственным значением оператора $\mathcal{A}$.

Пусть $\mathcal{A}$ - линейный оператор в конечномерном векторном пространстве V.

Понятно, что если существуют собственные векторы с собственным значением λ, то $\det(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E}) = 0$, и наоборот.

Вместе с нулевым вектором собственные вектора, отвечающие одному и тому же собственному значению λ, образуют подпространство $V_\lambda(\mathcal{A}) = \mathrm{Ker}\,(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})$, называемое собственным подпространством.

Def. Характеристическим многочленом оператора $\mathcal{A}$ называется многочлен (n-й степени)

$$f_{\mathcal{A}}(t) = \det(t\mathcal{E} - \mathcal{A}) = (-1)^n \det(\mathcal{A} - t\mathcal{E}) = (-1)^n \begin{vmatrix} a_{11} - t & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - t & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} - t \end{vmatrix}.$$

Непосредстсвенно из определений вытекает, что

Теорема. Число λ является собственным значением оператора $\mathcal{A} \Leftrightarrow$ оно является корнем характеристического многочлена $f_{\mathcal{A}}$. При этом $V_\lambda(\mathcal{A}) = \mathrm{Ker}\,(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})$. **Q.E.D.**

Чтобы получить собственные векторы, отвечающие собственному значению λ, надо взять ненулевые решения системы уравнений $(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})x = 0$.

26 Собственные подпространства линейного оператора, их свойства. Достаточное условие существования собственного базиса.

Теорема. $\dim V_\lambda(\mathcal{A}) \leqslant$ кратности корня λ в $f_{\mathcal{A}}$.

Доказательство. Пусть $(e_1, e_2, \ldots, e_k)$ - базис $V_\lambda(\mathcal{A})$, $(e_1, \ldots, e_n)$ - базис всего пространства.В этом базисе запишем матрицу линейного оператора:

$$A = \begin{pmatrix} \begin{matrix} \lambda & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda \end{matrix} & C \\ 0 & B \end{pmatrix};$$

$$f_{\mathcal{A}}(t) = \det(tE - A) = \begin{vmatrix} \begin{matrix} t-\lambda & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & t-\lambda \end{matrix} & -C \\ 0 & tE - B \end{vmatrix} = (t-\lambda)^k f_B(t) \;\Rightarrow$$

$\Rightarrow$ кратность корня λ в $f_{\mathcal{A}}(t)$ больше либо равна k. **Q.E.D.**

Теорема. Собственные подпространства, отвечающие различным собственным значениям, линейно независимы.

Доказательство. Пусть $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ - различные собственные значения $\mathcal{A}$. Докажем, что $V_{\lambda_1}(\mathcal{A}), \ldots, V_{\lambda_s}(\mathcal{A})$ линейно независимы, индукцией по s. При $s = 1$ доказывать нечего. Предположим, что $V_{\lambda_1}(\mathcal{A}), \ldots, V_{\lambda_s}(\mathcal{A})$ линейно зависимы (s>1). Тогда найдутся такие $v_i \in V_{\lambda_i}(\mathcal{A})$ не все равные нулю, что $v_1 + \cdots + v_s = 0$. Применим к этому равенству оператор $\mathcal{A}$. Получим $\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_s v_s = 0$. Из второго равенства вычтем первое, умноженное на λ_s: $(\lambda_1 - \lambda_s)v_1 + \cdots + (\lambda_{s-1} - \lambda_s)v_{s-1} = 0$. По предположению индукции, $(\lambda_i - \lambda_s)v_i = 0 \ \ (i = 1, \ldots, s-1)$. Но тогда $v_i = 0 \ \ (i = 1, \ldots, s-1)$ так как $\lambda_i \neq \lambda_s$. Но тогда v_s=0. Противоречие. **Q.E.D.**

Следстсвие. Если $f_{\mathcal{A}}$ имеет n различных корней, то для $\mathcal{A}$ существует базис из собственных векторов, очевидно.

27 Инвариантные подпространства линейного оператора. Существование одномерного или двумерного инвариантного подпространства для линейного оператора в вещественном векторном пространстве.

Пусть V - вещественное векторное пространство. Определим комплексификацию $V(\mathbb{C}) = \{x + iy \ : \ x, y \in V\}$.

Операции:

$(x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$;

$(\lambda + \mu i)(x + iy) = (\lambda x - \mu y) + i(\lambda y + \mu x)$.

Понятно, что $V(\mathbb{C})$ - векторное пространство, $V(\mathbb{C}) \supset V = \{x + 0i \ : \ x \in V\}$.

Любой базис V над $\mathbb{R}$ является базисом $V(\mathbb{C})$ над $\mathbb{C}$:

$x = \sum\limits_k x_k e_k;\ y = \sum\limits_k y_k e_k \ \Rightarrow \ x + iy = \sum\limits_k (x_k + iy_k)e_k$.

Всякий линейный оператор в V единственным образом продолжается до линейного оператора в $V(\mathbb{C})$: $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}(x + iy) = \mathcal{A}x + i\mathcal{A}y$. В вещественном базисе матрица $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}$ совпадает с матрицей $\mathcal{A}$.

Теорема. Для любого линейного оператора в вещественном векторном пространстве существует одномерное или двумерное инвариантное подпространство.

Доказательство. Если $f_{\mathcal{A}}$ имеет вещественный корень, то есть одномерное инвариантное подпространство.Предположим, что $f_{\mathcal{A}}$ имеет мнимый корень (то есть комплексное число с ненулевой мнимой частью) $\lambda + \mu i$.Пусть $x + iy \in V(\mathbb{C})$ - вектор, отвечающий этому собственному значению, то есть $\mathcal{A}x + i\mathcal{A}y = (\lambda + \mu i)(x + iy)$. Это означает, что $\begin{cases} \mathcal{A}x = \lambda x - \mu y; \\ \mathcal{A}y = \mu x - \lambda y. \end{cases}$

Мы видим, что $\langle x, y \rangle$ - не более чем двумерное инвариантное подпространство. **Q.E.D.**

28 Связь между линейными операторами и билинейными (полуторалинейными) функциями в евклидовом (эрмитовом) пространстве. Сопряжённые операторы.

Пусть V - евклидово пространство. Каждому линейному оператору поставим в соответствие билинейную функцию $\varphi_{\mathcal{A}}(x, y) = (x, \mathcal{A}y)$.

В ортонормированном базисе матрица $\varphi_{\mathcal{A}}$ совпадает с матрицей $\mathcal{A}$: $\varphi_{\mathcal{A}}(e_i, e_j) = (e_i, \mathcal{A}e_j) = a_{ij}$. Отображение $\mathcal{A} \mapsto \varphi_{\mathcal{A}}$ является изоморфизмом пространства линийеных операторов на пространство

билинейных функций. Но каждой билинейной функции можно поставить в соответствие "транспонированную" билинейную функцию $\varphi^\top(x,y)=\varphi(y,x)$. Матрица такой функции есть транспозиция исходной. В частности, можно рассмотреть $\varphi^\top_\mathcal{A}$, по определению ей соответствует линейный оператор $\mathcal{A}^*$, называемый сопряжённым к оператору $\mathcal{A}$: $(x,\mathcal{A}^*y)=(y,\mathcal{A}x)=(\mathcal{A}x,y)$. В ортонормированном базисе матрица $\mathcal{A}^*$ является транспонированной матрицей оператора $\mathcal{A}$.
Def. Линейный оператор $\mathcal{A}$ называется симметрическим (самосопряжённым), если $\mathcal{A}^*=\mathcal{A}$.
Def. Линейный оператор $\mathcal{A}$ называется кососимметрическим, если $\mathcal{A}^*=-\mathcal{A}$.
Def. Линейный оператор $\mathcal{A}$ называется ортогональным, если $\mathcal{A}^*\mathcal{A}=E$, то есть $\mathcal{A}$ сохраняет скалярное произведение: $(\mathcal{A}x,\mathcal{A}y)=(\mathcal{A}^*\mathcal{A}x,y)=(x,y)$.

Теперь пусть V - эрмитово пространство. Также определяется полуторалинейная функция $\varphi_\mathcal{A}(x,y)=(x,\mathcal{A})$. В ортонормированном базисе $(e_1,\dots,e_n)$ матрица $\varphi_\mathcal{A}$ совпадает с матрицей $\mathcal{A}$. Введём φ^* - сопряжённую полуторалинейную функцию следующим образом: $\varphi^*(x,y)=\overline{\varphi(y,x)}$.
Как и в евклидовом пространстве, сопряжённый оператор $\mathcal{A}^*$ определяется из условия $\varphi_{\mathcal{A}^*}=\varphi^*_\mathcal{A}$.
$\varphi_{\mathcal{A}^*}(x,y)=(x,\mathcal{A}^*y)=\varphi^*_\mathcal{A}(x,y)=\overline{\varphi_\mathcal{A}(y,x)}=\overline{(y,\mathcal{A}x)}=(\mathcal{A}x,y)$.
Значит, $(x,\mathcal{A}^*y)=(\mathcal{A}x,y)$ - полностью аналогично евклидовому случаю.
Def. Оператор $\mathcal{A}$ в эрмитовом пространстве называется эрмитовым (косоэрмитовым), если $\mathcal{A}^*=\mathcal{A}$ ($\mathcal{A}^*=-\mathcal{A}$).
Def. Оператор $\mathcal{A}$ в эрмитовом пространстве называется унитарным, если $\mathcal{A}^*=\mathcal{A}^{-1}$.

29 Существование ортонормированного собственного базиса для симметрического оператора. Приведение квадратичной функции в евклидовом пространстве к каноническому виду.

Теорема. Пусть $\mathcal{A}$ - симметрический, кососимметрический или ортогональный оператор в евклидовом пространстве, $U\subset V$ - инвариантное подпространство. Тогда $U^\perp$ - тоже инвариантное подпространство.
Доказательство.

1. Пусть $\mathcal{A}$ - симметрический оператор. Пусть $y\in U^\perp,\ \ x\in U$. Тогда $(x,\mathcal{A}y)=(\mathcal{A}x,y)=0$, так как $\mathcal{A}x\in U, y\in U^\perp$.

2. Для кососимметрических операторов всё аналогично.

3. Пусть $\mathcal{A}$ - ортогональный оператор. Тогда $\mathcal{A}|_U$ - тоже ортогональный оператор, значит является невырожденным. Пусть $y\in U^\perp,\ \ x\in U$. Надо доказать, что $\mathcal{A}y\in U^\perp$. Но $\exists\, z\in U$ такой, что $x=\mathcal{A}z$. Тогда $(x,\mathcal{A}y)=(\mathcal{A}z,\mathcal{A}y)=(z,y)=0$ **Q.E.D.**

Теорема. Для любого симметричекого оператора в евклидовом пространстве существует ортонормированный базис из собственных векторов.
Доказательство. Индукция по $n=\dim V$.
При $n=1$ доказывать нечего.
Пусть $n=2$. В ортонормированном базисе $A=\begin{pmatrix} a & b\\ b & c\end{pmatrix}$. Запишем:

$$f_\mathcal{A}(t)=\begin{vmatrix} t-a & -b\\ -b & t-c\end{vmatrix}=t^2-(a+c)t+ac-b^2.\ \ t_{1,2}=\frac{a+c\pm\sqrt{(a-c)^2+4b^2}}{2}\in\mathbb{R}.$$

Значит существует одномерное инвариантное подпространство $U\subset V$. Тогда $V=U\oplus U^\perp$, и $U^\perp$ тоже инвариантно. Возьмём $e_1\in U,\ \ e_2\in U^\perp$ - единичные, собственные, ортогональные векторы.

Тогда (e_1, e_2) - искомый базис.

Теперь пусть $n > 2$. Существует одномерное или двумерное инвариантное подпространство, но и в двумерном инвариантном подпространстве существует одномерное.
Пусть U - одномерное инвариантное подпространство, тогда $V = U \oplus U^\perp$. Но $\dim U^\perp = n-1$, значит по предположению индукции **Q.E.D.**
Следстсвие. Если $\mathcal{A}$ - симметрический оператор, то $V = \bigoplus\limits_\lambda V_\lambda(\mathcal{A})$, причём $V_\lambda(\mathcal{A}) \perp V_\mu(\mathcal{A})$ при $\lambda \neq \mu$.
Доказательство. Пусть $(e_1, \ldots, e_n)$ - ортонормированный базис из собственных векторов, $\mathcal{A}e_i = \lambda_i e_i$. Тогда $V_\lambda(\mathcal{A}) = \langle e_i \ : \ \lambda_i = \lambda \rangle$. - линейная оболочка всех векторов e_i с собственным значением $\lambda_i = \lambda$. **Q.E.D.**
Теорема. Для любой квадратичной функции q в евклидовом пространстве V существует ортонормированный базис, в котором q имеет вид $q(x) = \lambda_1 x_1^2 + \cdots + \lambda_n x_n^2$. При этом числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ определяются однозначно с точностью до перестановки (приведение к главным осям).
Доказательство. $q(x) = (\mathcal{A}x, x)$, где $\mathcal{A}$ - симметрический оператор. В любом ортонормированном базисе матрица q совпадает с матрицей $\mathcal{A}$. В частности, $q(x) = \lambda_1 x_1^2 + \cdots + \lambda_n x_n^2 \ \Leftrightarrow$ матрица $\mathcal{A}$ в этом базисе диагональна $\Leftrightarrow$ базис состоит из собственных векторов. По предыдущей теореме такой ортонормированный базис существует, а $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ - собственные значения оператора $\mathcal{A}$, они не зависят от базиса. **Q.E.D.**

30 Приведение к каноническому виду матрицы ортогонального оператора.

Каковы собственные значения ортогонального оператора?
$\mathcal{A}x = \lambda x \ \Rightarrow \ (\mathcal{A}x, \mathcal{A}x) = \lambda^2(x,x) = (x,x) \ \Rightarrow \ \lambda = \pm 1.$
Теорема. Для любого ортогонального оператора существует ортонормированный базис, в котором его матрица имеет вид:

$$\begin{pmatrix} \Pi(\alpha_1) &&&&&&&& \\ & \ddots &&&&&&& \\ && \Pi(\alpha_m) &&&&&& \\ &&& -1 &&&&& \\ &&&& \ddots &&&& \\ &&&&& -1 &&& \\ &&&&&& 1 && \\ &&&&&&& \ddots & \\ &&&&&&&& 1 \end{pmatrix}, \quad \text{где} \ \ \Pi(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

Доказательство. Индукцией по $n = \dim V$.
<u>$n = 1$</u>. Очевидно, что $A = (\pm 1)$ в любом базисе.
<u>$n = 2$</u>. Пусть (e_1, e_2) - ортонормированный базис. Пусть $\mathcal{A}e_1$ образует угол α с e_1. Так как $\mathcal{A}e_1 \perp \mathcal{A}e_2$, то возможно два случая:

1. либо $\mathcal{A}$ есть поворот на угол α, и тогда $A = \Pi(\alpha)$;
2. либо $\mathcal{A}$ есть отражение относительно биссектрисы угла между e_1 и $\mathcal{A}e_1$, и тогда $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ в подходящем ортонормированном базисе.

<u>$n > 2$</u>. Существует одномерное или двумерное инвариантное подпространство $U \subset V$, тогда $V = U \oplus U^\perp$, и $U^\perp$ инвариантно.
Далее стандартным рассуждением получаем что надо. **Q.E.D.**

31 Существование ортонормированного собственного базиса для эрмитова (унитарного) оператора.

Всякий линейный оператор в эрмитовом пространстве имеет, очевидно, собственный вектор.
Теорема. Если $\mathcal{A}$ - эрмитовый или унитарный оператор и $U \subset V$ - инвариантное подпространство, то $U^{\perp}$ - тоже инвариантное подпространство.
Доказательство. Аналогично вещественному случаю. **Q.E.D.**
Теорема. Собственные значения эрмитова (унитарного) оператора являются вещественными (соответственно, по модулю равными единице).
Доказательство.

1. Если $\mathcal{A}$ - эрмитовый, то $(\mathcal{A}e, e) = \lambda(e, e) = (e, \mathcal{A}e) = \overline{\lambda}(e, e) \;\Rightarrow\; \lambda \in \mathbb{R}; \quad (e \neq 0)$

2. Если $\mathcal{A}$ - унитарный, то $(\mathcal{A}e, \mathcal{A}e) = \lambda\overline{\lambda}(e, e) = (e, e) \;\Rightarrow\; |\lambda| = 1. \quad (e \neq 0)$ **Q.E.D.**

Следстсвие. Всякий симметрический оператор в евклидовом пространстве имеет собственный вектор.
Доказательство. Рассмотрим комплексификацию. **Q.E.D.**
Теорема. Для всякого эрмитова (унитарного) оператора в эрмитовом пространстве существует ортонормированный базис из собственных векторов.
Доказательство. Аналогично евклидову случаю (без рассмотрения случая двумерного инвариантного подпространства.) **Q.E.D.**

32 Полярное разложение невырожденного линейного оператора в евклидовом (эрмитовом) пространстве.

Def. Симметрический оператор называется положительно определённым, если соответствующая квадратичная функция положительно определена, то есть все собственные значения оператора положительны.
Лемма. Для любого положительно определённого симметрического оператора $\mathcal{B}$ существует единственный положительно определённый симметриеский оператор $\mathcal{S}$, такой, что $\mathcal{S}^2 = \mathcal{B}$.
Доказательство.

1. В некотором ортонормированном базисе оператор $\mathcal{B}$ записывается диагональной матрицей $\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$, $\lambda_i > 0$. Рассмотрим оператор $\mathcal{S}$,
   который в том же базисе записывается матрицей $\begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix}$, $\sqrt{\lambda_i} > 0$.
   Очевидно, что $\mathcal{S}^2 = \mathcal{B}$, и $\mathcal{S}$ - положительно определённый симметрический оператор.

2. Пусть $\mathcal{S}^2 = \mathcal{B}$, и $\mathcal{S}$ - положительно определённый симметрический оператор.
   Пусть $\mu_1, \ldots, \mu_m$ - различные собственные значения оператора $\mathcal{S}$.
   Тогда $V = V_{\mu_1}(\mathcal{S}) \oplus \ldots \oplus V_{\mu_m}(\mathcal{S})$, причём различные слагаемые ортогональны.
   Оператор $\mathcal{B}$ действует на $V_{\mu_i}(\mathcal{S})$ как умножение на μ_i^2. Значит $V_{\mu_i}(\mathcal{S}) = V_{\mu_i^2}(\mathcal{B})$.
   Поэтому μ_i и $V_{\mu_i}(\mathcal{S})$ определены однозначно как корни из собственных значений оператора $\mathcal{B}$ и собственные подпространства оператора $\mathcal{B}$. **Q.E.D.**

Теорема (Полярное разложение). Всякий невырожденный линейный оператор $\mathcal{A}$ в евклидовом пространстве единственным образом представим в виде $\mathcal{A} = \mathcal{S}\mathcal{O}$, где $\mathcal{S}$ - положительно определённый симметрический оператор, а $\mathcal{O}$ - ортогональный оператор.
Доказательство.

1. Пусть $\mathcal{A} = \mathcal{S}\mathcal{O}$. Тогда $\mathcal{A}\mathcal{A}^* = \mathcal{S}\mathcal{O}\mathcal{O}^*\mathcal{S}^* = \mathcal{S}\mathcal{S}^* = \mathcal{S}^2$. Заметим, что $\mathcal{A}\mathcal{A}^*$ для невырожденного оператора есть положительно определённый симметрический оператор:
   $(\mathcal{A}\mathcal{A}^*)^* = \mathcal{A}^{**}\mathcal{A}^* = \mathcal{A}\mathcal{A}^*$;
   $(\mathcal{A}\mathcal{A}^*x, x) = (\mathcal{A}^*x, \mathcal{A}^*x) > 0$ при $x \neq 0$.
   По лемме $\mathcal{S}$ определён однозначно, но тогда и $\mathcal{O} = \mathcal{S}^{-1}\mathcal{A}$ тоже определён однозначно.

2. Рассмотрим $\mathcal{A}\mathcal{A}^*$ - по лемме существует невырожденный положительно определённый симметрический оператор $\mathcal{S}$ такой, что $\mathcal{A}\mathcal{A}^* = \mathcal{S}^2$. Положим $\mathcal{O} = \mathcal{S}^{-1}\mathcal{A}$, тогда $\mathcal{A} = \mathcal{S}\mathcal{O}$.
   Но $\mathcal{O}$ - ортогональный оператор: $\mathcal{O}\mathcal{O}^* = \mathcal{S}^{-1}\mathcal{A}\mathcal{A}^*\mathcal{S}^{*-1} = \mathcal{S}^{-1}\mathcal{S}^2\mathcal{S}^{-1} = \mathcal{E}$, **Q.E.D.**

Полярное разложение невырожденного линейного оператора в эрмитовом пространстве доказывается абсолютно аналогично.

33 Корневые подпространства линейного оператора. Разложение пространства в прямую сумму корневых подпространств.

Def. Вектор $e \in V$ называется корневым вектором оператора $\mathcal{A}$, если существует такое $m \in \mathcal{N} \cup \{0\}$, что $(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})^m e = 0$. Наименьшее такое m называется высотой корневого вектора e. Собственные векторы - это корневые векторы высоты 1, нулевой вектор имеет высоту 0.
Если $(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})^m e = 0$, то $(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E}^{m-1}e)$ - собственный вектор с собственным значением λ.
Значит, корневые векторы могут существовать только для собственных значений оператора $\mathcal{A}$.
Совокупность всех корневых векторов, отвечающих одному и тому же λ, образует подпространство. Оно называется корневым подпространством и обозначается $V^\lambda(\mathcal{A})$. Понятно, что если e - корневой вектор высоты m, то $(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})e$ - корневой вектор высоты $m-1$. Значит, $(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})V^\lambda(\mathcal{A}) \subset V^\lambda(\mathcal{A})$.
Поэтому $V^\lambda(\mathcal{A})$ инвариантно относительно $\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E}$, значит, и относительно $\mathcal{A}$.
Лемма. В корневом подпространстве $V^\lambda(\mathcal{A})$ существует базис, в котором матрица $\mathcal{A}$ имеет вид:

$$\begin{pmatrix} \lambda & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda \end{pmatrix}.$$

Доказательство. $V^\lambda(\mathcal{A}) = \bigcup\limits_{m=0}^{\infty} \mathrm{Ker}\,(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})^m$, поэтому

$$\mathrm{Ker}\,(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E}) \subset \mathrm{Ker}\,(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})^2 \subset \cdots \subset \mathrm{Ker}\,(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})^p = V^\lambda(\mathcal{A}).$$

Выберем базис в $\mathrm{Ker}\,(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})$, дополним его до базиса $\mathrm{Ker}\,(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})^2$, и так далее.
Получим базис в $V^\lambda(\mathcal{A})$, в котором матрица $\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E}$ имеет вид
$\begin{pmatrix} 0 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}$, а матрица $\mathcal{A}$ - вид $\begin{pmatrix} \lambda & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda \end{pmatrix}$. $\mathcal{Q.E.D.}$
Следстсвие. Характеристический многочлен оператора $\mathcal{A}|_{V^\lambda(\mathcal{A})}$ имеет вид $(t - \lambda)^q$, где $q = \dim V^\lambda(\mathcal{A})$.
Следстсвие. При $\lambda \neq \mu$ оператор $\mathcal{A} - \mu\mathcal{E}$ невырожден на $V^\lambda(\mathcal{A})$.

Теорема. $\dim V^{\lambda}(\mathcal{A})$ = кратности корня λ в $f_{\mathcal{A}}(t)$.
Доказательство. Пусть $(e_1, \dots, e_q)$ - базис в $V^{\lambda}(\mathcal{A})$.
Дополним его до базиса $(e_1, \dots, e_n)$ пространства V. В этом базисе матрица $\mathcal{A}$ имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} B & D \\ 0 & C \end{pmatrix},$$

где B - матрица $\mathcal{A}|_{V^{\lambda}(\mathcal{A})}$. Тогда

$$f_{\mathcal{A}}(t) = \begin{vmatrix} tE - B & -D \\ 0 & tE - C \end{vmatrix} = (t-\lambda)^q \cdot \det(tE - C).$$

Докажем, что $\det(tE - C)$ не делится на $t - \lambda$, то есть $\det(\lambda E - C) \neq 0$. Рассмотрим оператор $\mathcal{C}$ в пространстве $\langle e_{q+1}, \dots, e_n \rangle$, задаваемый матрицей C. Если $\det(\lambda E - C) = 0$, то λ - собственное значение $\mathcal{C}$, то есть $\exists\ e \in \langle e_{q+1}, \dots, e_n \rangle,\ e \neq 0$, такой что $\mathcal{C}e = \lambda e$. Но тогда $\mathcal{A}e = \lambda e + u$ для некоторого $u \in \langle e_1, \dots, e_q \rangle = V^{\lambda}(\mathcal{A})$. Таким образом $(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})e \in V^{\lambda}(\mathcal{A}) \Rightarrow e \in V^{\lambda}(\mathcal{A})$. Противоречие. **Q.E.D.**
Теорема. Корневые подпространства, отвечающие различным собственным значениям λ, линейно независимы.
Доказательство. Пусть $(\lambda_1, \dots, \lambda_s)$ - различные собственные значения.
Будем рассуждать индукцией по s.
При $s = 1$ доказывать нечего.
Пусть $s > 1$. Предположим, что $v_1 + \dots + v_s = 0$, где $v_i \in V^{\lambda_i}(\mathcal{A})$. Применим к этому равенству $(\mathcal{A} - \lambda_s\mathcal{E})^m$, где m выбрано так, что $(\mathcal{A} - \lambda_s\mathcal{E})^m v_s = 0$. Тогда

$$(\mathcal{A} - \lambda_s\mathcal{E})^m v_1 + \dots + (\mathcal{A} - \lambda_s\mathcal{E})^m v_{s-1} = 0.$$

Заметим, что $(\mathcal{A} - \lambda_s\mathcal{E})^m v_i \in V^{\lambda_i}(\mathcal{A})$. По предподожению, все слагаемые равны нулю:
$(\mathcal{A} - \lambda_s\mathcal{E})^m v_i = 0 \quad i = 1, \dots, s-1$. Но это значит, в силу невырожденности $(\mathcal{A} - \lambda_s\mathcal{E})^m$ на $V^{\lambda_i}(\mathcal{A})$ при $s \neq i$, что $v_i = 0 \quad i = 1, \dots, s-1$. Но тогда и $v_s = 0$. **Q.E.D.**
Теорема. Если $f_{\mathcal{A}}(t) = (t-\lambda_1)^{k_1} \dots (t-\lambda_s)^{k_s}$, где $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ различны, то $V = V^{\lambda_1}(\mathcal{A}) \oplus \dots \oplus V^{\lambda_s}(\mathcal{A})$.
Доказательство. По двум предыдущим теоремам, эти подпространства линейно независимы, и сумма их размерностей равна размерности всего пространства, поэтому **Q.E.D.**

34 Нильпотентные операторы. Разложение пространства в прямую сумму циклических подпространств нильпотентного оператора.

$V^{\lambda}(\mathcal{A}) = \operatorname{Ker}(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})^m$ для некоторого m. Значит, если обозначить $\mathcal{N} = \mathcal{A} - \lambda\mathcal{E}|_{V^{\lambda}(\mathcal{A})}$, то $\mathcal{N}^m = 0$, поэтому $\mathcal{N}$ - нильпотентный оператор. Изучим нильпотентные операторы.
Пусть $\mathcal{N}$ - нильпотентный оператор в пространстве V. Высотой вектора v назовём наименьшее m, для которого $\mathcal{N}^m v = 0$. Обозначается $\operatorname{ht} v$.
Лемма 1. Пусть e - вектор высоты m. Тогда векторы $e, \mathcal{N}e, \dots, \mathcal{N}^{m-1}e$ линейно независимы.
Доказательство. Пусть $\lambda_0 e + \lambda_1\mathcal{N}e + \dots + \lambda_{m-1}\mathcal{N}^{m-1}e = 0$ - нетривиальная линейная зависимость. Пусть λ_k - первый ненулевой коэффициент. Применим $\mathcal{N}^{m-k-1}$, получим $\lambda_k\mathcal{N}^{m-1}e = 0$. Противоречие. **Q.E.D.**
Def. Подпространство $\langle e, \mathcal{N}e, \dots, \mathcal{N}^{m-1}e \rangle$ называется циклическим подпространством, порождённым вектором e. Это подпространство инвариантно относительно $\mathcal{N}$, причём в базисе

$(e, \mathcal{N}e, \dots, \mathcal{N}^{m-1}e)$ матрица ограничения $\mathcal{N}$ на это подпространство имеет вид:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & 0 & & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}.$$

Такая матрица называется нильпотентной жордановой клеткой.

Лемма 2. Пусть e - вектор высоты m, $U = \left\langle e, \mathcal{N}e, \dots, \mathcal{N}^{m-1}e \right\rangle$. Если $e' \in U \backslash \mathcal{N}U$, то e' порождает то же циклической попространство U.

Доказательство. $e' = \lambda_0 e + \lambda_1 \mathcal{N}e + \dots + \lambda_{m-1}\mathcal{N}^{m-1}e,\ \lambda_0 \neq 0$, значит $\mathcal{N}^{m-1}e' = \lambda_0 \mathcal{N}^{m-1}e \neq 0 \ \Rightarrow$ $\operatorname{ht} e' = m \ \Rightarrow \ \left\langle e', \mathcal{N}e', \dots, \mathcal{N}^{m-1}e' \right\rangle = U$. **Q.E.D.**

Теорема. Для всякого нильпотентного оператора $\mathcal{N}$ всё пространство может быть разложено в прямую сумму циклических подпространств, а число слагаемых в разложении равно $\dim \operatorname{Ker} \mathcal{N}$.

Доказательство. Индукцией по $n = \dim V$.

При $n = 1$ доказывать нечего.

Пусть $n > 1$. Так как $\mathcal{N}$ вырожден, то $\mathcal{N}V \neq V$. Пусть U - любое пространство размерности $n-1$, содержащее $\mathcal{N}V$. Очевидно, что U инвариантно, так как $\mathcal{N}V \subset U \ \Rightarrow \ \mathcal{N}U \subset U$. По предположению, U разложимо в прямую сумму циклических подпространств $U = U_1 \oplus \ldots \oplus U_k$. Пусть $e \in V \backslash U$. Тогда $\mathcal{N}e \in U \ \Rightarrow \ \mathcal{N}e = u_1 + \dots + u_k \quad u_i \in U_i$. Если $u_i \in \mathcal{N}U_i$, то есть $u = \mathcal{N}v_i \quad v_i \in U_i$, то, заменив e на $e - v_i$, получим $u_i = 0$. Так что будем считать, что для каждого i либо $u_i \notin \mathcal{N}U_i$, либо $u_i = 0$.

1. Пусть все $u_i = 0$, то есть $\mathcal{N}e = 0$. Тогда $\langle e \rangle$ - одномерное циклическое подпространство, $V = \langle e \rangle \oplus U_1 \oplus \ldots \oplus U_k$.

2. Если не все $u_i = 0$, то $\operatorname{ht} \mathcal{N}e = \max\limits_{i\,:\,u_i \neq 0} \operatorname{ht} u_i = m$. Без ограничения общности считаем, что $\operatorname{ht} u_1 = m$. Тогда $\operatorname{ht} e = m + 1$. Докажем, что $V = \langle e, \mathcal{N}e, \dots, \mathcal{N}^m e \rangle \oplus U_2 \oplus \ldots \oplus U_k$. Надо доказать, что сумма прямая, ведь так как $u_i \notin \mathcal{N}U_i$, $\dim U_1 = m$, поэтому сумма размерностей уже равна $\dim V$. Так как $U_2, \dots, U_k$ линейно независимы, достаточно доказать, что $\langle e, \mathcal{N}e, \dots, \mathcal{N}^m e \rangle \cap (U_2 \oplus \ldots \oplus U_k) = 0$. Пусть $\lambda_0 e + \lambda_1 \mathcal{N}e + \dots + \lambda_m \mathcal{N}^m e \in U_2 \oplus \ldots \oplus U_k$. Так как $e \notin U$, то $\lambda_0 = 0$. Проектируя на U_1, получаем, что (так как $\mathcal{N}e = u_1 + \dots + u_k$) $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 \mathcal{N}u_1 + \dots + \lambda_m \mathcal{N}^{m-1}u_1 = 0$. Но тогда по Лемме 1, $\lambda_1 = \dots = \lambda_m = 0$.

Теперь докажем про число подпространств. Пусть $V = U_1 \oplus \ldots \oplus U_k$ - разложение V в прямую сумму циклических подпространств. Поэтому $\operatorname{Ker} \mathcal{N} = \operatorname{Ker} \mathcal{N}|_{U_1} \oplus \ldots \oplus \operatorname{Ker} \mathcal{N}|_{U_k}$. Но $\dim \operatorname{Ker} \mathcal{N}|_{U_i} = 1$, поэтому $\dim \operatorname{Ker} \mathcal{N} = k$. **Q.E.D.**

35 Приведение матрицы линейного оператора к жордановой форме. Минимальный многочлен. Теорема Гамильтона-Кэли. Критерий существования собственного базиса.

Пусть $\mathcal{A}$ - линейный оператор, характеристический многочлен которого раскладывается на линейные множители. Тогда $V = V^{\lambda_1}(\mathcal{A}) \oplus \ldots \oplus V^{\lambda_s}(\mathcal{A})$. Для каждого i подпространство $V^{\lambda_i}(\mathcal{A})$ может быть разложено в прямую сумму циклических подпространств относительно нильпотентного оператора $\mathcal{N}_i = \mathcal{A} - \lambda\mathcal{E}|_{V^{\lambda_i}(\mathcal{A})}$. В базисе пространства V, составленном из базисов всех этих подпространств, матрица $\mathcal{A}$ будет иметь вид:

$$A = \begin{pmatrix} J_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_p \end{pmatrix}, \text{ где } J_1, \ldots, J_p - \text{ матрицы вида } \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \lambda & & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{pmatrix}.$$

— так называемые жордановы клетки (для каждого собственного значения λ может быть несколько жордановых клеток с этим значением - столько, сколько циклических подпространств). Сама матрица такого вида называется жордановой. Таким образом, доказана следующая теорема:

Теорема. Если характеристический многочлен линейного оператора раскладывается на линейные множители, то существует базис, в котором матрица этого оператора жорданова (такой базис называется жордановым). **Q.E.D.**

Можно также доказать, что жорданова форма матрицы линейного оператора единственна с точностью до перестановки клеток, хотя сам жорданов базис далеко не единствен.

Сумма порядков жордановых клеток с одним и тем же λ на диагонали равна $\dim V^{\lambda}(\mathcal{A})$, то есть кратности корня λ в $f_{\mathcal{A}}(t)$, а количество этих клеток равно $\dim V_{\lambda}(\mathcal{A})$.

Максимальный порядок этих клеток равен высоте оператора $(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})|_{V^{\lambda}(\mathcal{A})}$.

Def. Пусть $f(t) = a_0 t^n + \cdots + a_{n-1} t + a_n$, $\mathcal{A}$ - линейный оператор. Тогда можно определить $f(\mathcal{A}) = a_0\mathcal{A}^n + \cdots + a_{n-1}\mathcal{A} + a_n\mathcal{E}$. Аналогично можно определить $f(A)$ для матриц.

Если в каком-то базисе оператор $\mathcal{A}$ имеет матрицу A, то оператор $f(\mathcal{A})$ имеет матрицу $f(A)$. Понятно, что:

1. $(f+g)(\mathcal{A}) = f(\mathcal{A}) + g(\mathcal{A})$;
2. $(fg)(\mathcal{A}) = f(A) \cdot g(\mathcal{A})$.

Def. Многочлен f называется аннулирующим многочлленом оператора $\mathcal{A}$, если $f(\mathcal{A}) = 0$.

Лемма. Для любого линейного оператора $\mathcal{A}$ существует ненулевой аннулирующий многочлен.

Доказательство. Так как $\dim L(V) = n^2 < \infty$ ($L(V)$ - пространство линейных операторов), то система $\mathcal{E}, \mathcal{A}, \mathcal{A}^2, \ldots, \mathcal{A}^{n^2}$ линейно зависима. Значит, существует аннулирующий многочлен - с коэффициентами линейной зависимости этой системы операторов. Степень этого многочлена равна n^2. **Q.E.D.**

Любой многочлен, кратный аннулирующему, тоже является аннулирующим.

Лемма. Пусть m - аннулирующий многочлен оператора $\mathcal{A}$ минимальной степени. Тогда всякий аннулирующий многочлен кратен m.

Доказательство. Пусть f - аннулирующий многочлен. Поделим: $f = qm + r$.

Но тогда $r = f - qm$ - тоже аннулирующий многочлен. Но тогда $r = 0$, потому что его степень меньше степени m. **Q.E.D.**

Def. Аннулирующий многочлен минимальной степени со старшим коэффициентом 1 называется минимальным многочленом оператора $\mathcal{A}$. Обозначается $m_{\mathcal{A}}$. Всякий другой аннулирующий многочлен кратен ему.

Лемма 1. Пусть J - жорданова клетка порядка m с собственным значением λ. Тогда $m_J = (t-\lambda)^m$.

Доказательство. $(J - \lambda E)^m = 0 \Rightarrow (t-\lambda)^m$ - аннулирующий многочлен.

Значит, $m_J = (t-\lambda)^k,\ k \leqslant m$. Но $(J - \lambda E)^{m-1} \neq 0 \Rightarrow k = m$. **Q.E.D.**

Лемма 2. Если

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A_k \end{pmatrix},$$

то $m_A = \text{НОК}(m_{A_1}, \ldots, m_{A_k})$.

Доказательство. Вытекает из того, что операции над клеточно-диагональной матрицей сводятся к тем же самым операциям над клетками. Поэтому $f(A) = 0 \Leftrightarrow f(A_i) = 0 \; \forall \; i \Rightarrow$
$\Rightarrow m_A = \text{НОК}(m_{A_1}, \ldots, m_{A_k})$. **Q.E.D.**
Теорема. Пусть характеристический многочлен оператора $\mathcal{A}$ раскладывается на линейные множители: $f_{\mathcal{A}}(t) = (t-\lambda_1)^{k_1} \ldots (t-\lambda_s)^{k_s}$, где $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ различны. Тогда $m_{\mathcal{A}}(t) = (t-\lambda_1)^{m_1} \ldots (t-\lambda_s)^{m_s}$, где m_i - мксимальный порядок жордановых клеток с собственным значением λ в жордановой форме матрицы оператора $\mathcal{A}$.
Доказательство. Пусть

$$J = \begin{pmatrix} J_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_p \end{pmatrix}$$

- жорданова форма матрицы оператора $\mathcal{A}$.
Тогда по Лемме 2 $m_{\mathcal{A}} = \text{НОК}(m_{J_1}, \ldots, m_{J_k})$, значит по Лемме 1 **Q.E.D.**
Следствие (Теорема Гамильтона-Кэли). $f_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}) = 0$.
Доказательство. Из теоремы вытекает, что $m_{\mathcal{A}} | f_{\mathcal{A}}$ - действительно, $k_i \geqslant m_i$.
Значит, $f_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}) = 0$. **Q.E.D.**
Таким образом, видно, что есть аннулирующие многочлены степени не выше n.
Следствие (Критерий дигонализируемости). Матрица A диагонализируема $\Leftrightarrow$ её характеристический многочлен разлагается на линейные множители, а минимальный не имеет кратных корней.
Доказательство. Матрица приводитса к диагональному виду $\Leftrightarrow$ её жорданова форма диагональна $\Leftrightarrow$ все m_i в обозначениях теоремы равны 1, то есть $m_{\mathcal{A}}$ раскладывается на линейные множители $\Leftrightarrow$ не имеет кратных корней. **Q.E.D.**

36 Аффинные пространства. Векторизация. Аффинные системы координат. Барицентрические линейные комбинации точек.

Пусть V - векторное простраснтво над полем K.
Def. Аффинным пространством, ассоциированным с векторным пространством V, называется множество S, элементы которого называются точками, вместе с операцией сложения точек и векторов $V \times S \to S$, $(p, x) \mapsto p + x$, удовлетворяющей следующим условиям:

1. $p + (x + y) = (p + x) + y$;
2. $p + 0 = p$;
3. $\forall \; p, q \in S \; \exists! \; x \in V \; : \; p + x = q$, обозначается: $x = \overrightarrow{pq}$.

Само векторное пространство V можно рассматривать как аффинное простарнство, ассоциированное с самим собой (тогда сложение точек и векторов - это сложение векторов). При этом $\overrightarrow{pq} = q - p$. Каждое аффинное пространство S, ассоциированное с V, можно отождествить с V, если фиксировать начало отсчёта $o \in S$. При этом каждую точку $p \in S$ можно отождествить с её радиус-вектором $\overrightarrow{op}$. При этом операции сложения точек и векторов будет соответствовать операция сложения векторов: $\overrightarrow{o(p+x)} = \overrightarrow{op} + \overrightarrow{px}$, так как $o + (p + x) = (o + p) + x$. Операция выбора точки o и отождествления аффинного пространства S с векторным пространством называется векторизацией.
Свойство: $\overrightarrow{pq} + \overrightarrow{qr} = \overrightarrow{pr}$.
Действительно, обозначим $\overrightarrow{pq} = x$, $\overrightarrow{qr} = y$, тогда $p + (x + y) = (p + x) + y = q + y = r \Rightarrow x + y = \overrightarrow{pr}$.
Def. Размерностью аффинного пространства называется размерность соответствущего ему векторного пространства.

В аффинном пространстве можно ввести систему координат. Репером в пространстве S называется система $(o; e_1, e_2, \ldots, e_n)$, где o - точка (начало отсчёта), а $(e_1, \ldots, e_n)$ - базис пространства V.
В репере каждая точка имеет свои координаты: $\forall\, p \in S\ \ \overrightarrow{op} = \sum x_i e_i$; тогда $(x_1, \ldots, x_n)$ - координаты точки p относительно репера $(o; e_1, e_2, \ldots, e_n)$. Свойства:

1. Координаты точки $p + x$ суть суммы соответствующих координат точки p и вектора x;

2. Координаты вектора $\overrightarrow{pq}$ суть разности соответствующих координат точек p и q.

Def. Выберем начало отсчёта o и положим $p = \sum\limits_{i=1}^{k} \lambda_i p_i$, где $\overrightarrow{op} = \sum\limits_{i=1}^{k} \lambda_i \overrightarrow{op_i}$. Получим линейную комбинацию точек. Барицентрическими линейными комбинациями точек разываются такие линейные комбинации, в которых сумма коэффициентов равна единице: $\sum\limits_{i=1}^{k} \lambda_i = 1$.

Докажем, что точка $p = \sum\limits_{i=1}^{k} \lambda_i p_i$, где $\sum\limits_{i=1}^{k} \lambda_i = 1$, не зависит от выбора точки o.
Пусть o' - другая точка. Тогда имеем: $\sum \lambda_i \overrightarrow{o'p_i} = \sum \lambda_i (\overrightarrow{o'o} + \overrightarrow{op_i}) = \sum \lambda_i \overrightarrow{o'o} + \sum \lambda_i \overrightarrow{op_i} = \overrightarrow{o'o} + \sum \lambda_i \overrightarrow{op_i}$.
Значит $o' + \sum \lambda_i \overrightarrow{o'p_i} = o + \overrightarrow{o'o} + \sum \lambda_i \overrightarrow{op_i} = o + \sum \lambda_i \overrightarrow{op_i}$. **Q.E.D.**
Имеет смысл центр масс системы точек $p_1, \ldots, p_k$ с массами $m_1, \ldots, m_k$ - это точка

$$\operatorname{cent}(p_1, \ldots, p_k;\ m_1, \ldots, m_k) = \frac{1}{\sum m_i} \sum m_i p_i.$$

Центр тяжести можно брать по частям, имеет место теорема Архимеда о медианах треугольника.

37 Плоскости аффинного пространства, их задание системами линейных уравнений. Аффинная оболочка системы точек.

Def. Пусть S - аффинное пространство, ассоциированное с векторным пространством V.
Плоскостью в S называется подмножество вида $P = p_0 + U$, где $p_0 \in S$, а $U \subset V$ - подпространство.
Предложение 1. $p_0 \in P\ \Rightarrow\ p_0' + U = P$.
Доказательство. $p_0' = p_0 + u_0$ для некоторого $u_0 \in U$. Значит $p_0' + U = p_0 + u_0 + U = p_0 + U$.
Предложение 2. $p_0 + U = p_0' + U'\ \Rightarrow\ U = U'$.
Доказательство. $p_0' \in p_0 + U\ \Rightarrow\ p_0 + U = p_0' + U = p_0' + U'\ \Rightarrow\ U = U'$.
Def. Подпространство U называется направляющим подпространством плоскости P.
Предложение 3. Плоскость $P \subset S$ является аффинным пространством, ассоциированным с U, отностиельно той же операции сложения точек и векторов, которая определена в пространстве S.
Доказательство.

1. $p \in P,\ u \in U\ \Rightarrow\ p + u \in p + U = P$ - замкнутость относительно операции сложения точек и векторов.

2. Свойства $p + (x + y) = (p + x) + y$ и $p + 0 = p$ выполнены, так как они выполнены в S.

3. $p, q \in P\ \Rightarrow\ P = p + U,\ q = p + u$ для некоторого $u \in U$. $\Rightarrow\ \overrightarrow{pq} = u \in U$, причём вектор $\overrightarrow{pq}$ единствен, так как он единствен во всём пространстве. **Q.E.D.**

Следстсвие. Любая барицентрическая линейная комбинация точек из P лежит в P.
Плоскость можно определить как подмножество, замкнутое относительно взятия барицентрических линейных комбинаций.
Def. Размерность плоскости - это размерность её направляющего подпространства: $\dim P = \dim U$.

Нульмерные плоскости - это точки, одномерные плоскости называются прямыми, $(n-1)-$мерные плоскости называются гиперплоскостями.
Фиксируем в S аффинную систему координат.
Теорема. Множество всех решений совместной системы линейных уравнений является плоскостью в S, и обратно, любая плоскость является множеством рашений некоторой системы линейных уравнений.
Доказательство.

1. Пусть есть совместная система линейных уравнений
$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i \qquad (i = 1, \dots, m).$$
Пусть $p_0 \in S$ - какое-либо её решение. Тогда множество всех её решений получается так: p_0+U, где U - множество решений присоединённой однородной системы линейных уравнений. Но U - подпространство в V, если интерпретировать решения как векторы, значит множество всех решений исходной системы линейных уравнений есть плоскость.

2. Пусть $P = p_0 + U$ - плоскость в S. Существует система линейных однородных уравнений, задающая направляющее подпространство U: $\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = 0 \quad (i = 1, \dots, m)$. Подставим в левые части координаты точки p_0. Получим какие-то числа $b_1, \dots, b_m$.
Рассмотрим систему линейных уравнений $\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i \quad (i = 1, \dots, m)$, она и будет искомой, её множество решений - это и есть $p_0 + U$. **Q.E.D.**

Если $\dim P = k$, то P задаётся $n-k$ линейно незывисимыми уравнениями. В частности, одно уравнение $a_1x_1 + \dots + a_nx_n = b$, где не все $a_i = 0$, задаёт гиперплоскость, и обратно, всякая гиперплоскость задаётся одним линейным уравнением.
Теорема. Через любые $k+1$ точку $p_0, p_1, \dots, p_k \in S$ проходит плоскость размерности $\leqslant k$, если же эти точки не лежат в плоскости размерности меньше k, то через них проходит единственная $k-$мерная плоскость.
Доказательство.

1. Рассмотрим плоскость $P = p_0 + \langle \overrightarrow{p_0p_1}, \dots, \overrightarrow{p_0p_k} \rangle$. $p_0, p_1, \dots, p_k \in P$,
$\dim P = \mathrm{rk}\ \{\overrightarrow{p_0p_1}, \dots, \overrightarrow{p_0p_k}\} \leqslant k$.

2. Предположим, что $p_0, p_1, \dots, p_k$ не лежат в плоскости размерности меньше чем k. Тогда векторы $\overrightarrow{p_0p_1}, \dots, \overrightarrow{p_0p_k}$ линейно независимы, и плоскость $P = p_0 + \langle \overrightarrow{p_0p_1}, \dots, \overrightarrow{p_0p_k} \rangle$ является единственной плоскостью, содержащей все точки $p_0, p_1, \dots, p_k$. Действительно, пусть $P' = p_0 + U'$ - другая $k-$мерная плоскость, содержащая точки $p_0, p_1, \dots, p_k$. Тогда $\overrightarrow{p_0p_1}, \dots, \overrightarrow{p_0p_k} \in U \Rightarrow$
$\Rightarrow U = \langle \overrightarrow{p_0p_1}, \dots, \overrightarrow{p_0p_k} \rangle$. **Q.E.D.**

Def. Точки $p_0, p_1, \dots, p_k$ называются аффинно независимыми, если они не содержатся в плоскости размерности меньше чем k, то есть если векторы $\overrightarrow{p_0p_1}, \dots, \overrightarrow{p_0p_k}$ линейно независимы.
Пусть $M \subset S$ - произвольное непустое подмножество, $p_0 \in M$. Плоскость $P = p_0 + \langle \overrightarrow{p_0p} \ : \ p \in M \rangle$ является наименьшей плоскостью, содержащей M. Она называется аффинной оболочкой множества M и обозначается $\mathrm{aff}\, M$.

38 Взаимное расположение плоскостей в аффинном пространстве.

Рассмотрим две плоскости: $P_1 = p_1 + U_1$ и $P_2 = p_2 + U_2$. Если их пересечение непусто, то оно является плоскостью: $p_0 \in P_1 \cap P_2 \Rightarrow P_1 = p_0 + U_1;\ P_2 = p_0 + U_2 \Rightarrow P_1 \cap P_2 = p_0 + (U_1 \cap U_2)$.

Теорема. $P_1 \cap P_2 \neq \varnothing \;\Leftrightarrow\; \overrightarrow{p_1p_2} \in U_1 + U_2$.
Доказательство. $P_1 \cap P_2 \neq \varnothing \;\Leftrightarrow\; \exists\, u_1 \in U_1,\; u_2 \in U_2 \;:\; p_1 + u_1 = p_2 + u_2$. Но $p_1 + u_1 = p_2 + u_2 \;\Leftrightarrow\; \overrightarrow{p_1p_2} = u_1 + (-u_2)$. Поэтому существование таких векторов u_1 и u_2 равносильно тому, что $\overrightarrow{p_1p_2} \in U_1 + U_2$. **Q.E.D.**
Def. Плоскости P_1 и P_2 называются параллельными, если $U_1 \subset U_2$ или $U_2 \subset U_1$. Плоскости P_1 и P_2 называются скрещивающимися, если $P_1 \cap P_2 = \varnothing$ и $U_1 \cap U_2 = 0$.

39 Выпуклые множества. Выпуклая оболочка системы точек. Симплексы.

Пусть S - аффинное пространство над полем $\mathbb{R}$. Отрезком, соединяющим точки $p, q \in S$, называется множество $pq = \{\lambda p + (1-\lambda)q \;:\; 0 \leqslant \lambda \leqslant 1\}$. Множество $M \subset S$ называется выпуклым, если вместе с любыми двумя точками оно содержит и весь отрезо, их соединяющий: $\forall\; p, q \in M \;\; pq \subset M$.
Пересечение выпуклых множеств является выпуклым множеством, всякая плоскость является выпуклым множетвом.
Def. Выпуклой комбинацией точек пространства S называется их барицентрическая линейная комбинация с неотрицательными коэффициентами.
Теорема. Выпуклое множество M вместе с любыми точками $p_0, \ldots, p_k$ содержит любую их выпуклую оболочку.
Доказательство. Индукцией по k
При $k = 0$ доказывать нечего. При $k = 1$ по определению любая выпуклая оболочка двух точек лежит на отрезке, их соединяющем, который, в свою очередь, содержится в множестве M.
При $k > 1$ пусть $p = \lambda_0 p_0 + \cdots + \lambda_k p_k, \quad \sum\limits_i \lambda_i = 1,\; \lambda_i \geqslant 0 \;\forall\, i$.
Рассмотрим $p' = \frac{1}{\sum\limits_{i=0}^{k-1} \lambda_i} \left(\lambda_0 p_0 + \cdots + \lambda_{k-1} p_{k-1}\right) \in M$ по предположению индукции.
Но тогда $p = \left(\sum\limits_{i=0}^{k-1} \lambda_i\right) \cdot p' + \lambda_k p_k \in M$ по определению. **Q.E.D.**
Пусть $M \subset S$ - произвольное подмножество.
Теорема. Совокупность всех выпуклых линейных комбинаций точек множества M есть выпуклое множество.
Доказательство. Пусть $p' = \sum\limits_{i=0}^{k} \lambda'_i p_i,\; p'' = \sum\limits_{i=0}^{k} \lambda''_i p_i$ - две линейных комбинации точек $p_0, p_1, \ldots, p_k \in M$ (без ограничения общеости можно считать, что это линейные комбинации одинакового набора точек). Пусть $\mu', \mu'' \geqslant 0,\; \mu' + \mu'' = 1$. Тогда надо доказать, что $\mu' p' + \mu'' p'' \in M$.
Но $\mu' p' + \mu'' p'' = \sum\limits_{i=0}^{k} (\mu' \lambda' + \mu'' \lambda'') p_i$ - выпуклая комбинация точек $p_0, p_1, \ldots, p_k \in M$. **Q.E.D.** векторизация!
Def. Совокупность выпуклых линейных комбинаций точек из M называется выпуклой оболочкой множества M. Обозначается $\operatorname{conv} M$. Это наименьшее выпуклое множество, содержащее M.
Def. Выпуклая оболочка аффинно независимых точек $p_0, p_1, \ldots, p_k$ называется $k-$мерным симплексом, натянутым на $p_0, p_1, \ldots, p_k$. Нульмерный симплекс - это точка, одномерный - это отрезок. Двухмерный симплекс называется треугольником, трёхмерный - тетраэдром.

40 Полупространства. Выпуклые многогранники, их грани. Грани симплекса и параллелепиппеда.

Def. Полупространством называется множество, задаваемое линейным неравенством $a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n \geqslant b$, где не все $a_i = 0$. При этом гиперплоскость, задаваемая соответствующим равенством

$a_1x_1+\dots+a_nx_n = b$, называется граничной гиперплоскостью данного полупространства. Полупространство $a_1x_1+\dots+a_nx_n \leqslant b$ называется противоположным полупространством.
С каждой гиперплоскостью связаны два полупространства.
Утверждение. Полупространство является выпуклым множеством.
Доказательство. Линейное неравенство, задающее полупространство, на любой прямой превращается в неравенство вида $\alpha t+\beta \geqslant 0$ (если прямая имеет вид $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{x_0} + \overrightarrow{a}t$). Пересечение полупространства с любой прямой есть либо вся прямая, либо луч, либо оно пусто; то есть в любом случае это выпуклое множество. Значит, полуплоскость является выпуклым множеством. **Q.E.D.**
Def. Выпуклым многогранником называется пересечение конечного числа полупространств.
Иначе говоря, выпуклый многогранник есть множество решений системы линейных неравенств:

$$\begin{cases} a_{11}x_1+\dots+a_{1n}x_n \geqslant b_1; \\ \vdots \\ a_{m1}x_1+\dots+a_{mn}x_n \geqslant b_m. \end{cases}$$

(здесь и все a_{ij} могут быть нулями!).
Def. Функция вида $l(x) = a_1x_1+\dots+a_nx_n+b$ называется аффинно-линейной функцией (здесь $x_1, x_2, \dots, x_n$ - координаты точки x).
Можно переписать систему неравенств, задающую выпуклый многогранник:

$$\begin{cases} l_1(x) \geqslant 0\,; \\ \vdots \\ l_m(x) \geqslant 0. \end{cases}$$

Def. Гранью выпуклого многогранника M называется любое непустое подмножество $\Gamma \subset M$, которое может быть получено заменой некоторых из неравенств, задающих многогранник M, на равенства.
! Может оказаться, что какие-то из оставшихся неравенств выполняются всюду на этой грани как равенства.
! Грань грани Γ - это то же самое, что грань многогранника M, содержащаяся в Γ. Таким образом, выпуклый многогранник сам является своей гранью.
Нульмерные грани называются вершинами, одномерные - рёбрами, $(\dim M-1)$-мерные грани называются гипергранями.
Грани симплекса. Рассмотрим симплекс T, натянутый на репер $(p_0; \overrightarrow{p_0p_1}, \dots, \overrightarrow{p_0p_n})$.
Тогда $T = \{x = x_1p_1+\dots+x_1p_1 \ : \ x_i \geqslant 0, \sum x_i = 1\}$. Значит, неравенства:

$$\begin{cases} x_i \geqslant 0 \qquad i = 1, \dots, n; \\ \sum\limits_{j=1}^{n} x_i \leqslant 1 \end{cases}$$

задают симплекс T относительно репера $(p_0; \overrightarrow{p_0p_1}, \dots, \overrightarrow{p_0p_n})$.
Грани симплекса T, проходящие через p_0, суть пересечения координатных плоскостей с симплексом. Это будут симплексы, натянутые на точку p_0 и какие-то из точек $p_1, p_2, \dots, p_n$. Таким образом, все грани симплекса - это симплексы, натянутые на всевозможные непустые подмножества множества $\{p_0, p_1, \dots, p_n\}$. Их число $2^{n+1}-1$. Вершины этих симплексов - это какие-то из вершин исходного симплекса.
Грани параллелепиппеда. Пусть $(e_1, \dots, e_n)$ - базис пространства V. Параллелепиппед - это множество $P(p_0;\, e_1, e_2, \dots, e_n) = p_0 + P(e_1, e_2, \dots, e_n) = \left\{p_0 + \sum\limits_i x_ie_i \ : \ 0 \leqslant x_i \leqslant 1\right\}$. Таким образом, параллелепиппед задаётся неравенствами: $0 \leqslant x_i \leqslant 1 \quad (i = 1, \dots, n)$.
Найдем его грани. С точностью до нумерации координат, всякая грань размерности k задаётся соотношениями:

$$\begin{cases} 0 \leqslant x_i \leqslant 1, & i = 1, \dots, k; \\ x_j = \varepsilon_j, & j = k+1, \dots, n;\ \varepsilon_j \in \{0, 1\}. \end{cases}$$

Число $k-$мерных граней равно $C_n^k \cdot 2^{n-k}$. В частности, число вершин равно 2^n.

41 Теорема о том, что всякий ограниченный выпуклый многогранник есть выпуклая оболочка своих вершин. Задача линейного программирования.

Def. Выпуклое множество $M \subset S$ называется телесным (или выпуклым телом), если его аффинная оболочка совпадает со всем пространством: $\operatorname{aff} M = S$.
Лемма. Выпуклое тело содержит внутренние точки.
Доказательство. Пусть $p_0 \in M$. Тогда $\operatorname{aff} M = p_0 + \langle \overrightarrow{p_0 p} \ : \ p \in M \rangle = S$.
Значит, $\operatorname{rk} \{\overrightarrow{p_0 p} \ : \ p \in M\} = \dim S = n \ \Rightarrow \ \exists \ p_1, \ldots, p_n \in M$, такие, что $(\overrightarrow{p_0 p_1}, \ldots, \overrightarrow{p_0 p_n})$ - базис пространства V. Точки $p_0, p_1, \ldots, p_n$ аффинно независимы, и натянутый на них симплекс (в силу выпуклости M) содержится в M. Но симплекс, очевидно, содержит внутренние точки. **Q.E.D.**
Def. $\dim M \doteqdot \dim \operatorname{aff} M$.
Всякое выпуклое множество M является телом в $\operatorname{aff} M$. Допуская вольность речи, будем называть внутренними точками множества M точки, внутренние по отношению к $\operatorname{aff} M$.
Теорема (Минковского-Вейля). Всякий ограниченный выпуклый многогранник M совпадает с выпуклой оболочкой множества своих вершин.
Доказательство. Индукцией по $n = \dim M$.
При $n = 0$ доказывать нечего: M - это точка.
Пусть $n > 0$. Заменив S на $\operatorname{aff} M$, можно считать, что M - телесный выпуклый многогранник. Пусть p - какая-либо внутренняя точка M. Все определяющие M неравенства в точке p выполняются как строгие (иначе в любой окрестности точки p есть точки, в которых какое-либо из неравенств неверно). Проведём через p произвольную прямую l. Её пересечение с M есть ограниченное выпуклое множество - отрезок qr. В точках q и r какие-то из неравенств выполняются как равенства, значит, эти точки принадлежат собственным граням многогранника M. По предположению индукции, точки q и r принадлежат выпуклой оболочке множества вершин многогранникака $M \ \Rightarrow$
$\Rightarrow$ значит и qr, и точка p тоже принадлежат этой выпуклой оболочке. **Q.E.D.**
! На самом деле, верно и обратное (выпуклая оболочка конечного числа точек есть выпуклый многогранник) - без довазательства.
Задача линейного программирования. Требуется найти максимум аффинно-линейной функции на ограниченном выпуклом многограннике.
Теорема. Максимум аффинно-линейной функции l на ограниченном выпуклом многограннике M достигается хотя бы в одной из вершин (на самом деле, множество всех точек максимума аффинно-линейной функции есть грань многогранника M - без доказательства).
Доказательство. Воспользуемся тем, что $l(\sum\limits_i \lambda_i p_i) = \sum\limits_i \lambda_i l(p_i) \quad (\sum\limits_i \lambda_i = 1)$ - это очевидно.
Пусть $p_1, \ldots, p_k$ - все вершины M. Тогда $\forall \ p \in M \ : \ p = \sum\limits_i \lambda_i p_i \quad (\sum \lambda_i = 1;\ \lambda_i \geqslant 0 \ \forall \ i)$.
Значит, $l(p) = \sum\limits_i \lambda_i l(p_i) \leqslant \max\limits_i l(p_i)$. **Q.E.D.**
Метод решения задачи линейного программирования - "симплекс-метод": Возьмём одну вершину, посмотрим, как изменяется функция по рёбрам, выходящим из этой вершины. Если по всем уменьшается, то это - вершина максимума. Если где-то увеличивается, то пойдём по этому ребру.

42 Аффинные отображения, их свойства. Аффинные преобразования. Существование и единственность аффинного преобразования, переводящего один заданный репер в другой. Координатный признак равенства фигур в аффинной геометрии.

Def. Пусть S и S' - аффинные пространства, ассоциированные соответственно с векторными пространствами V и V'. Отображение $f : S \to S'$ называется аффинным, если существует такое линейное отображение $\varphi : V \to V'$, что $f(p + x) = f(p) + \varphi(x) \quad \forall\ p \in S,\ x \in V$.
Свойство: $\varphi(\overrightarrow{pq}) = \overrightarrow{f(p)f(q)} \quad \forall p, q \in S$.
Действительно, $f(q) = f(p + \overrightarrow{pq}) = f(p) + \varphi(\overrightarrow{pq})$.
Значит, φ однозначно определяется по f. Линейное отображение φ называется дифференциалом аффинного отображения f и обозначается df.
Если выбрать в S и S' начала отсчёта o и o', то получим $f(o + x) = f(o) + \varphi(x) = o' + \overrightarrow{o'f(o)} + \varphi(x)$.
Положим $\overrightarrow{o'f(o)} = b \in V'$. Тогда в векторизованной форме отображение f записывается в виде $f(o + x) = f(x) = \varphi(x) + b$. В координатной форме: если $f(x) = y$, то $y_i = \sum\limits_j a_{ij}x_j + b_i$ в некоторых базисах V и V'. В частности, аффинно-линейные функции - это аффинные отображения из S в K. В случае $K = \mathbb{R}$ понятие дифференциала аффинного отображения согласуется с общим понятием дифференциала гладкого отображения.
Свойства аффинного отображения:

1. Если $P \subset S$ - плоскость, то $f(P) \subset S'$ - тоже плоскость, причём если аффинное отображение f биективно, то $\dim f(P) = \dim P$.

   Действительно, $P = p_0 + U \ \Rightarrow\ f(P) = f(p_0) + df(U)$ - плоскость в S'.
   Если f биективно, то df тоже биективно (выберем согласованные начала отсчёта в S и S', где $f = df$) $\Rightarrow \dim df(U) = \dim U$.

2. $f\left(\sum\limits_i \lambda_i p_i\right) = \sum\limits_i \lambda_i f(p_i)$, где $\sum \lambda_i = 1$.

   По определению, $\sum\limits_i \lambda_i p_i = o + \sum\limits_i \lambda_i \overrightarrow{op_i}$. Значит,
   $f\left(\sum\limits_i \lambda_i p_i\right) = f(o) + \sum\limits_i \lambda_i df(\overrightarrow{op_i}) = f(o) + \sum\limits_i \lambda_i \overrightarrow{(f(o)f(p_i))} = \sum\limits_i \lambda_i f(p_i)$
   по определению барицентрических линейных комбинаций в S'.

Def. Простое отношение трёх точек на прямой в аффинном пространстве. Пусть точки p, q и r лежат на одной прямой. $q \neq r \ \Rightarrow\ \overrightarrow{pr} = c \cdot \overrightarrow{rq}$. Число c называется простым отношением $(p, q; r)$. Если $q = r$, но $p \neq q$, то можно считать $(p, q; r) = \infty$. Простое отношение сохраняется при аффинном отображении (если данная прямая не переходит в точку): $\quad (f(p), f(q); f(r)) = (p, q; r)$.
Def. Аффинным преобразованием пространства S называется аффинное отображение $f : S \to S$. $f(p + x) = f(p) + \mathcal{A}x$, где $\mathcal{A} = df$ - линейный оператор в пространстве V. В векторизованной форме $f(x) = \mathcal{A}x + b$, где $b = \overrightarrow{of(o)}$.
Теорема. Пусть $\{p_0, p_1, \dots, p_n\}$ и $\{q_0, q_1, \dots, q_n\}$ - две аффинно независимые системы точек в $n-$мерном аффинном пространстве S. Тогда существует единственное аффинное преобразование f, переводящее первую систему точек во вторую: $f(p_i) = q_i \quad i = 0, 1, \dots, n$.
Доказательство. Если такое f существует, то $f(p_0 + x) = q_0 + \varphi(x)$, где φ - такое линейное преобразование, что $\varphi(\overrightarrow{p_0p_i}) = \overrightarrow{q_0q_i} \quad (i = 1, \dots, n)$. Так как векторы $\overrightarrow{p_0p_1}, \dots, \overrightarrow{p_0p_n}$ образуют базис

пространства V, то существует единственное линенйое преобразование φ, для которого $\varphi(\overrightarrow{p_0p_i}) = \overrightarrow{q_0q_i} \quad (i = 1, \ldots, n)$. Значит, f единственно.
Обратно, если определить аффинное преобразование f по формуле $f(p_0 + x) = q_0 + \varphi(x)$, где φ определено выше, то $f(p_i) = q_i \quad (i = 0, 1, \ldots, n)$. **Q.E.D.**
Группа аффинных преобразований пространства S определяет аффинную геометрию. Две фигуры (то есть подмножества S) F_1 и F_2 называются равными (или конгруэнтными), если существует такое аффинное преобразование g, что $gF_1 = F_2$.
Координатный признак равенства фигур в аффинной геометрии.
Теорема. Фигуры F и F' равны в аффинной геометрии $\Leftrightarrow$ существуют такие реперы $(o; e_1, \ldots, e_n)$ и $(o'; e'_1, \ldots, e'_n)$, что $o + \sum\limits_i x_i e_i \in F \;\Leftrightarrow\; o' + \sum\limits_i x_i e'_i \in F'$, то есть F и F' одинаково выглядят по отношению к этим реперам.
Доказательство. Пусть $F' = f(F),\; f \in \mathrm{GA}(S)$. Пусть $(o; e_1, \ldots, e_n)$ - любой репер и рассмотрим репер $(f(o); df(e_1), \ldots, df(e_n))$. Тогда $p = o + \sum\limits_i x_i e_i \in F \;\Leftrightarrow\; f(p) = f(o) + \sum\limits_i x_i df(e_i) \in F'$.
Обратно, пусть $(o; e_1, \ldots, e_n)$ и $(o'; e'_1, \ldots, e'_n)$ - реперы, удовлетворяющие условиям теоремы. Рассмотрим $f \in \mathrm{GA}(S)$, определяемое условиями:

$$f(o) = o'; \qquad df(e_i) = e'_i \quad i = 1, \ldots, n.$$

Докажем, что $f(F) = F'$. Действительно, $p = o + \sum\limits_i x_i e_i \in F \;\Leftrightarrow\; f(p) = o' + \sum\limits_i x_i e'_i \in F'$. **Q.E.D.**

43 Дифференциал как гомоморфизм аффинной группы в линейную. Параллельные переносы и гомотетии.

Теорема. Пусть $f : S \to S'$ и $g : S' \to S''$ - аффинные отображения. Тогда отображение $gf : S \to S''$ также аффинно, причём $d(gf) = dg \cdot df$.
Доказательство. Действительно,
$gf(p + x) = g\,(f(p + x)) = g\,(f(p) + df(x)) = g\,(f(p)) + dg\,(df(x)) = (gf)(p) + (dg \cdot df)(x)$. **Q.E.D.**
Теорема. Аффинное отображение $f : S \to S'$ биективно $\Leftrightarrow$ df биективно.
При этом f^{-1} также аффинно, и $d\left(f^{-1}\right) = (df)^{-1}$.
Доказательство. Выберем согласованные начала отсчёта в S и S' таким образом, чтобы $o' = f(o)$. Тогда в векторизованной форме $f = df$. **Q.E.D.**
Биективные аффинные преобразования образуют группу $\mathrm{GA}(S)$, а невырожденные линейные преобразования - группу $\mathrm{GL}(V)$. Дифференциал есть гомоморфизм групп $d : \mathrm{GA}(S) \to \mathrm{GL}(V)$.
<u>Def</u>. Параллельным переносом на вектор $a \in V$ называется аффинное преобразование $t_a : p \mapsto p + a$. Параллельные переносы образуют подгруппу, так как $t_a t_b = t_{a+b};\; (t_a)^{-1} = t_{-a};\; id = t_0$. Эта подгруппа изоморфна группе V.
Теорема. Аффинное преобразование f является параллельным переносом $\Leftrightarrow$ $df = \mathcal{E}$.
Доказательство. $t_a(p + x) = p + x + a = t_a p + x = t_a p + \mathcal{E}x \;\Rightarrow\; dt_a = \mathcal{E}$.
Обратно, если $df = \mathcal{E}$, то $f(o + x) = f(o) + x = o + \overrightarrow{of(o)} + x = o + x + a$, где $a = \overrightarrow{of(o)}$. **Q.E.D.**
Теорема. Группа параллельных переносов является нормальной подгруппой в $\mathrm{GA}(S)$.
Доказательство. Подгруппа $H \subset G$ нормальна $\Leftrightarrow$ $\forall\, g \in G\; gHg^{-1} = H$. Докажем, что $\forall\, f \in \mathrm{GA}(S)\;\; ft_a f^{-1} = t_{df(a)}$. Действительно, $(ft_a f^{-1})(p) = f(f^{-1}(p) + a) = p + df(a)$. **Q.E.D.**
<u>Def</u>. Гомотетией с центром $o \in S$ и коэффициентом $\lambda \in K^*$ называется аффинное преобразование, определяемое по следующему правилу:

$$f(o + x) = o + \lambda x.$$

Гомотетия с коэффициентом -1 называется центральной симметрией относительно точки o.
Теорема. Аффинное преобразование f является нетождественной гомотетией $\Leftrightarrow$ $df = \lambda\mathcal{E},\; \lambda \neq 0, 1$.

Доказательство. Дифференциал гомотетии с коэффициентом λ равен $\lambda\mathcal{E}$.
Обратно, пусть $df = \lambda\mathcal{E}$. Достаточно доказать, что f имеет неподвижную точку.
В векторизованной форме: $f(x) = \lambda x + b$. Уравнение $\lambda x + b = x$ имеет единственное решение при $\lambda \neq 0, 1$. Это и будет центр гомотетии. **Q.E.D.**

44 Квадрики в аффинном пространстве. Центральные, конические и циллиндрические квадрики.

Будем далее считать, что $\operatorname{char} K \neq 2$.
Def. Аффинно-квадратичной функцией в пространстве S называется функция, которая в векторизованной форме записывается в виде $Q(x) = q(x) + l(x) + c$, где q - квадратичная функция, l - линейная функция, $c \in K$.
В координатах: $Q(p) = \sum\limits_{i,j} a_{ij}x_ix_j + \sum\limits_i b_i + c$, где $a_{ij} = a_{ji}$, а $(x_1, \dots, x_n)$ - координаты точки p.
Очевидно, что $c = Q(o),\ b_i = \dfrac{\partial Q}{\partial x_i}(o)$, где o - начало координат.
Def. Квадрикой (или гиперповерхностью второго порядка) в пространстве S называется множество, задаваемое уравнением $Q(p) = 0$, где Q - аффинно-квадратичная функция; при условии, что оно непусто и не является плоскостью (в частности, $q \neq 0$).
Введём обозначение: $X(Q)$ - множество точек, удовлетворяющее уравнению $Q(p) = 0$.
Def. Точка o называется центром квадрики X, если $o + x \in X \ \Rightarrow\ o - x \in X$, то есть $s_oX = X$.
Def. Вершиной квадрики называется принадлежащий ей центр.
Теорема. Если $X(Q_1)$ и $X(Q_2)$ - совпадающие квадрики, то уравнения Q_1 и Q_2 пропорциональны.
Доказательство. Возьмём в качестве точки o какую-нибудь точку квадрики X, не являющуюся её вершиной (такие точки есть, иначе квадрика была бы плоскостью). Тогда в векторизованной форме: $Q_1(x) = q_1(x) + l_1(x),\ Q_2(x) = q_2(x) + l_2(x)$, где $l_1, l_2 \neq 0$. Точки пересечения прямой $o + \langle x\rangle$ с квадрикой X определяются любым из уравнений $t^2q_1(x) + tl_1(x) = 0$ или $t^2q_2(x) + tl_2(x) = 0$. Так как относительно t эти уравнения должны иметь одинаковые решения, то при $l_1(x), l_2(x) \neq 0$ получаем, что
$$\frac{q_1(x)}{l_1(x)} = \frac{q_2(x)}{l_2(x)}.$$
Поэтому $q_1(x)l_2(x) = q_2(x)l_1(x)$. Умножая на $l_1(x)l_2(x)$, получаем, что
$$q_1(x)l_2(x)l_1(x)l_2(x) = q_2(x)l_1(x)l_1(x)l_2(x)$$
верно уже для всех x. Но так как в кольце многочленов нет делителей нуля, то можно сократить последнее равенство, поэтому можно считать, что $q_1(x)l_2(x) = q_2(x)l_1(x)$ верно тоже для всех x. Пусть l_1 и l_2 не пропорциональны. Тогда в подходящем базисе $l_1(x) = x_1,\ l_2(x) = x_2$. Поэтому $q_1(x)x_2 = q_2(x)x_1$. Рассматривая левые и правые части, видим, что должно быть:
$$q_1(x) = l(x)x_1,\ q_2(x) = l(x)x_2$$
для некоторой линейной функции $l(x)$. Значит, $Q_1(x) = (l(x)+1)x_1,\ Q_2(x) = (l(x)+1)x_2$. Так как $X = X(Q_1)$, то X содержит гиперплоскость $x_1 = 0$. Значит, Q_2 должна обащаться в ноль всюду на этой гиперплоскости. Но ни один из множителей x_2 и $l(x)+1$ не обращается на ней в ноль. Так как в кольце многочленов нет делителей нуля, то получаем противоречие. Поэтому линейные, а значит, и квадратичные части аффинно-квадратичных функций пропорциональны. **Q.E.D.**
Def. Квадрика называется центральной, если у неё есть хотя бы один центр.
Теорема. Множество всех центров квадрики $X(Q)$ задаётся системой линейных уравнений
$$\frac{\partial Q}{\partial x_i} = 0; \qquad i = 1, \dots, n.$$

Доказательство. Примем o - центр квадрики - за начало координат. Тогда в векторизованной форме $Q(x) = q(x) + l(x) + c$. Квадрика $s_o X(Q)$ задаётся уравнением $Q(-x) = 0$, то есть $q(x) - l(x) + c = 0$. Эти квадрики совпадают, значит, $Q(-x) = \lambda Q(x)$ для некоторого $\lambda \in K^*$. Сравнивая квадратичные части, видим, что $\lambda = 1$.
Поэтому $s_o X = X \Leftrightarrow l(x) \equiv 0$, то есть $\dfrac{\partial Q}{\partial x_i} = 0; \qquad i = 1, \ldots, n.$ **Q.E.D.**
Следстсвие. Множество всех центров либо пусто, либо является плоскостью.
Следстсвие. Если q невырожденна, то квадрика центральна, причём центр единствен.
Доказательство. $Q(p) = \sum\limits_{i,j} a_{ij} x_i x_j + \sum\limits_i b_i x_i + c.$
$\dfrac{\partial Q}{\partial x_i}(p) = 2 \sum\limits_j a_{ij} x_j + b_i$. Таким образом, множество всех центров задаётся системой линейных уравнений, матрица которой есть матрица квадратичной функции q. По теореме Крамера, центр существует и единствен. **Q.E.D.**
Теорема. Точка o является вершиной квадрики X тогда и только тогда, когда

$$o + x \in X \Rightarrow o + \lambda x \in X \ \ \forall \lambda \in K,$$

то есть квадрика инвариантна относительно всех гомотетий с центром в точке o.
Доказательство. Пусть в векторизованной форме $X = X(Q)$. Запишем уравнение квадрики, приняв за начало отсчёта точку o: $q(x) + c = 0$. Если o - вершина, то $c = 0$.
Обратно, пусть X инвариантна. Пусть h_λ - гомотетия с центром o и коэффициентом λ.
Если $h_\lambda X = X$, то уравнение квадрики $h_\lambda X$ имеет вид $\lambda^{-2} q(x) + c = 0$, так как $h_\lambda : x \mapsto \dfrac{x}{\lambda}$.
Это уравнение должно быть пропорционально уравнению квадрики X. Значит, $c = 0$. **Q.E.D.**
Def. Множество, которое вместе с каждой точкой $o + x$ содержит и точку $o + \lambda x \ \ \forall \lambda \in K$, то есть инвариантное относительно всех гомотетий с центром в точке o, называется конусом с вершиной в точке o. Квадрика, являющаяся конусом (то есть имеющая вершину), называется конической.
Def. Квадрика X называется циллиндрической, если $\exists \, a \in V, \ a \neq 0$, такой что $t_a X = X$, значит, $\forall \lambda \in K \ \ t_{\lambda a} X = X, \ \lambda \neq 0$.
Пусть α - симметрическая билинейная функция, соответствующая квадратичной функции q.
Теорема. Множество всех таких векторов a, что $t_a X = X$, является подпрстранством $\operatorname{Ker} \alpha \cap \operatorname{Ker} l$.
Доказательство. Пусть $Q(x) = q(x) + l(x) + c = 0$ - уравнение квадрики X. Уравнение квадрики $t_a X$ имеет вид

$$Q(x - a) = \alpha(x - a, x - a) + l(x - a) + c = q(x) - 2\alpha(x, a) + q(a) + l(x) + c - l(a) = 0.$$

$t_a X = X \Leftrightarrow$ эти уравнения пропорциональны. Сравнивая квадратичные части, видим, что коэффициент пропорциональности равен единице. Значит, $\alpha(x, a) = 0 \ \forall \, x \in V$, и $l(a) = 0$, так как $q(a) = \alpha(a, a) = 0$. Таким образом, $a \in \operatorname{Ker} \alpha \cap \operatorname{Ker} l$. **Q.E.D.**

45 Аффинная классификация невырожденных вещественных квадрик.

Выберем базис пространства V, согласованный с $U = \operatorname{Ker} \alpha \cap \operatorname{Ker} l$. Пусть $U = \langle e_{m+1}, \ldots, e_n \rangle$. Тогда уравнение квадрики не будет содержать членов с $x_{m+1}, \ldots, x_n$.
Def. Квадрики, не являющиеся циллиндрическими, называются невырожденными. Достаточно изучать только их, потому что вырожденные квадрики сводятся к невырожденным меньших размерностей.

Типы невырожденных квадрик.

1. Неконические центральные квадрики.

   Приняв центр за начало координат, приведём уравнение квадрики к виду $q(x_1, \ldots, x_n) = 1$, где q - невырожденная квадратичная функция.

2. Конические квадрики.

   Приняв центр за начало координат, приведём уравнение квадрики к виду $q(x_1, \ldots, x_n) = 0$, где q - невырожденная квадратичная функция.

3. Нецентральные квадрики.

   $\operatorname{Ker} q \neq 0$, $\operatorname{Ker} \alpha \cap \operatorname{Ker} l = 0$. Значит, $\dim \operatorname{Ker} l = n - 1$, $\dim \operatorname{Ker} q = 1$, и $V = \operatorname{Ker} l \oplus \operatorname{Ker} q$. Выберем базис в V так, чтобы $\operatorname{Ker} l = \langle e_1, \ldots, e_{n-1} \rangle$, $\operatorname{Ker} q = \langle e_n \rangle$. Начало отсчёта выберем на квадрике. Тогда уравнение квадрики приводится к виду $q_1(x_1, \ldots, x_{n-1}) = x_n$, где q - невырожденная квадратичная функция в $\langle e_1, \ldots, e_{n-1} \rangle$.

Рассмотрим случай $K = \mathbb{R}$.
За счёт выбора базиса в пространстве V уравнение невырожденной квадрики приводится в одному из следующих видов:

1. $x_1^2 + \cdots + x_k^2 - x_{k+1}^2 - \cdots - x_n^2 = 1 \quad (0 < k \leqslant n)$;
2. $x_1^2 + \cdots + x_k^2 - x_{k+1}^2 - \cdots - x_n^2 = 0 \quad \left(\left[\frac{n}{2} \right] \leqslant k < n \right)$;
3. $x_1^2 + \cdots + x_k^2 - x_{k+1}^2 - \cdots - x_{n-1}^2 = x_n \quad \left(\left[\frac{n-1}{2} \right] \leqslant k < n \right)$.

В случае $n = 2$:

1	$x_1^2 + x_2^2 = 1$	эллипс;
	$x_1^2 - x_2^2 = 1$	гипербола;
2	$x_1^2 - x_2^2 = 0$	пара пересекающихся прямых;
3	$x_1^2 = x_2$	парабола.

В случае $n = 3$:

1	$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$	эллипсоид;
	$x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 1$	однополостный гиперболоид;
	$x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 = 1$	двуполостный гиперболоид;
2	$x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0$	квадратичный конус;
3	$x_1^2 + x_2^2 = x_3$	эллиптический параболоид;
	$x_1^2 - x_2^2 = x_3$	гиперболический параболоид.

В силу координатного признака равенства фигур в аффинной геометрии, чтобы узнать, аффинно эквивалентны ли квадрики, над $\mathbb{R}$ надо уравнения обеих квадрик привести к каноническому виду. Если уравнения совпадут, то и квадрики совпадут.

46 Евклидовы аффинные пространства. Расстояние между точками и между плоскостями.

Def. Евклидовым аффинным пространством называется вещественное аффинное пространство, ассоциированное с евклидовым векторным пространством.
Def. Расстояние между точками определяется по следующей формуле: $\rho(p, q) \doteqdot |\overrightarrow{pq}|$.
Свойства:

1. $\rho(p, q) > 0$ при $p \neq q$, $\rho(p, p) = 0$;

2. $\rho(p,q)+\rho(q,r) \geqslant \rho(p,r)$.

   Действительно, $|\overrightarrow{pq}+\overrightarrow{qr}| \leqslant |\overrightarrow{pr}|$, что вытекает из неравенства Коши-Буняковского.

Таким образом, евклидово аффинное пространство является метрическим.
Def. Расстояние между подмножествами P и Q определяется следующим образом:

$$\rho(P,Q) = \inf_{p\in P,\ q\in Q} \rho(p,q).$$

Теорема. Для двух плоскостей P_1 и P_2 существует общий перпендикуляр, если $U_1 \cap U_2 = 0$, то он единствен. Его длина равна $\rho(P_1,P_2)$ (если плоскости пересекаются, то под общим перпендикуляром понимается точка).
Доказательство. Отрезок $[p_1+u_1, p_2+u_2]$ есть общий перпендикуляр $\Leftrightarrow$ он ортогонален U_1+U_2. Но этот отрезок равен $\overrightarrow{p_1p_2}-u_1+u_2$, то есть он является общим перпендикуляром $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{p_1p_2} = u_1-u_2+v$, где $u_1-u_2 \in U_1+U_2$, а значит, $v \in (U_1+U_2)^{\perp}$.
Далее, $\rho(P_1,P_2) = \inf\limits_{u_1\in U_1,\ u_2\in U_2} \rho(p_1+u_1, p_2+u_2) = \inf|\overrightarrow{p_1p_2}-u_1+u_2| = \rho(\overrightarrow{p_1p_2}, U_1+U_2) =$
$= |\mathrm{ort}_{\,U_1+U_2}\overrightarrow{p_1p_2}| = |v|$ - длина общего перпендикуляра.

47 Движения. Дифференциал как гомоморфизм группы движений в ортогональную группу. Собственные и несобственные движения.

Def. Движением аффинного пространства S называется аффинное преобразование, дифференциал которого есть ортогональное преобразование.
Так как $d(fg) = df \cdot dg$, и так как ортогональные преобразования образуют группу $\mathrm{O}(V)$, то и движения образуют группу $\mathrm{Isom}(S)$. Геометрия этой группы называется евклидовой геометрией.
В векторизованной форме движения записываются так: $f(x) = \mathcal{A}x+b$, где $\mathcal{A} = df \in \mathrm{O}(V)$, а вектор b зависит от начала отсчёта.
Значит, дифференциал осуществляет гомоморфизм $d : \mathrm{Isom}(S) \to \mathrm{O}(V)$.
Отображение $\det d : \mathrm{Isom}(S) \to \{\pm 1\}$ - тоже гомоморфизм.
Def. Движение f, для которого $\det df = 1$, называется собственным, для которого -1 - несобственным.
Собственные движения образуют подгруппу $\mathrm{Isom}_+(S)$, несобственные - смежный класс по этой подгруппе. Значит, $[\mathrm{Isom}(S);\ \mathrm{Isom}_+(S)] = 2$.
Классификация движений прямой:

1. Если движение f собственное, то $df = \mathcal{E}$, и f - параллельный перенос.

2. Если f - несобственное, то $df = -\mathcal{E}$. В векторизованной форме $f(x) = -x+b$, значит, $b/2$ - неподвижная точка, то есть f - центральная симметрия относительно этой неподвижной точки.

48 Ось движения. Геометрическое описание движений плоскости и трёхмерного пространства.

Теорема. Для любого движения f существует однозначно определённая плоскость $P = p_0 + U$ со следующими свойствами:

1. $f(P) = P$;

2. $f|_P$ - параллельный перенос;

3. df не имеет неподвижных векторов в $U^\perp$.

Доказательство. Если искомая плоскость P существует, то её направляющее пространство должно совпадать с пространством неподвижных векторов оператора $\mathcal{A} = df$. Обозначим это подпространство за U. В векторизованной форме $f(x) = \mathcal{A}x + b$. Пусть $b = b_0 + b_1;\ b_0 \in U,\ b_1 \in U^\perp$. Так как оператор $\mathcal{A} - \mathcal{E}$ невырожден на $U^\perp$, то существует единственный вектор $x_0 \in U$, такой, что $\mathcal{A}x_0 + b_1 = x_0$. Пусть p_0 - соответствующая ему точка. Тогда $f(p_0) = p_0 + b_0$. Плоскость $P = p_0 + U$ и является той единственной плоскостью, удовлетворяющей условиям теоремы. **Q.E.D.**

Def. Плоскость из теоремы называется осью движения.
Из канонического вида матицы ортогонального преобразования следует:
$\dim U^\perp$ чётно, если f - собственное движение, и нечётно в противном случае.

Геометрическое описание движений плоскости:

1. f - собственное $\Rightarrow$ df - поворот на угол α. В векторизованной форме $f(x) = \mathcal{A}x + b$, где матрица $\mathcal{A}$ есть $\Pi(\alpha)$.
   (a) Если $\alpha = 0$, то f - параллельный перенос.
   (b) Если $0 \leqslant \alpha \leqslant 2\pi$, то $\mathcal{A}$ не имеет неподвижных векторов, значит, уравнение $\mathcal{A}x + b = x$ имеет единственное решение (поскольку оно равносильно уравнению $(\mathcal{A} - \mathcal{E})x = -b$, и $\det(\mathcal{A} - \mathcal{E}) \neq 0$). Если это решение взять за начало координат, то $f(x) = \mathcal{A}x$, то есть f - поворот.
2. Если f - несобственное, то df - отражение относительно некоторого одномерного подпространства l. В векторизованной форме $f(x) = \mathcal{A}x + b$, и разложим: $b = b_0 + b_1,\ b_0 \in l,\ b_1 \perp l$. Рассмотрим прямую $\frac{b_1}{2} + l$. Она инвариантна относительно f: действительно, $f(\frac{b_1}{2} + u) = \mathcal{A}(\frac{b_1}{2} + u) + b = -\frac{b_1}{2} + u + b = (\frac{b_1}{2} + u) + b_0$.
   Если $o' = o + \frac{b_1}{2}$ - начало отсчёта, то $f(x) = \mathcal{A}x$. Значит, f - либо отражение, либо скользящая симметрия.

Геометрическое описание движений пространства:
Пусть $P = p_0 + U$ - ось движения f.

1. Если $\dim P = 3$, то f - параллельный перенос;
2. Если $\dim P = 2$, то ортогональное дополнение одномерно, значит, $df|_{U^\perp} = -\mathcal{E}$. Поэтому f есть либо отражение относительно P, либо скользящее отражение относительно P;
3. Если $\dim P = 1$, то $df|_{U^\perp}$ - либо поворот относительно P, либо винтовое движение;
4. Если $\dim P = 0$, то, взяв эту точку за начало отсчёта, имеем, что f - ортогональное преобразование, не имеющее неподвижных векторов, то есть зеркальный поворот (поворот плюс отражение).

49 Прямоугольные системы координат в евклидовом аффинном пространстве. Свойство максимальной подвижности и координатный признак равенства фигур в евклидовой геометрии.

Def. Репер $(o; e_1, \dots, e_n)$ называется ортонормированным, если базис $(e_1, \dots, e_n)$ ортонормированный. Система координат, связанная с таким репером, называется прямоугольной.

Теорема. Для любых двух ортонормированных реперов существует единственное движение f, переводящее первый репер во второй, то есть $f(o) = o'$; $df(e_i) = e'_i \quad (i = 1, \dots, n)$.
Доказательство. Существует единственное аффинное преобразование, переводящее первый репер во второй, но поскольку df переводит ортонормированный базис векторного пространства в ортонормированный, то df ортогонально, значит, f - движение. **Q.E.D.**
Координатный признак равенства фигур:
Теорема. Фигуры F и F' равны $\Leftrightarrow$ существуют такие ортонормированные реперы $(o; e_1, \dots, e_n)$ и $(o'; e'_1, \dots, e'_n)$, что $o + \sum\limits_i x_i e_i \in F \;\Leftrightarrow\; o' + \sum\limits_i x'_i e'_i \in F'$.
Доказательство.

1. Существует $f \in \mathrm{GA}(S)$, переводящее первый репер во второй, причём f - движение, и $f(F) = F'$. Значит, фигуры F и F' равны.

2. Пусть f - движение, переводящее первый репер во второй. Возьмём любой ортонормированный репер $(o; e_1, \dots, e_n)$ и рассмотрим репер $(f(o); f(e_1), \dots, f(e_n))$.
   Тогда $o + \sum\limits_i x_i e_i \in F \;\Leftrightarrow\; f(o) + \sum\limits_i x_i df(e_i) \in F'$. **Q.E.D.**

50 Приведение уравнения невырожденной квадрики в евклидовом пространстве к каноническому виду (без доказательства единственности в случае параболоида).

Найдём канонический вид уравнения невырожденной квадрики в прямоугольной системе координат:

1. Неконическая центральная квадрика.

   Выберем начало координат в центре квадрики. Свободный член сделаем равным -1.
   Получим $\lambda_1 x_1^2 + \dots + \lambda_n x_n^2 = 1$, где $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ определены однозначно с точностью до перестановки и $\lambda_i \neq 0 \;\; \forall\, i = 1, \dots, n$.

2. Конические квадрики.

   $\lambda_1 x_1^2 + \dots + \lambda_n x_n^2 = 0$, и $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ определены однозначно с точностью до перестановки и умножения на одно и то же число.

3. Нецентральные квадрики (параболоиды).

   Квадратичная функция приводится к виду $\lambda_1 x_1^2 + \dots + \lambda_n x_(n-1)^2 + b_1 x_1 + \dots + b_n x_n + c = 0$.
   С помощью переноса начала координат можно получить $\lambda_1 x_1^2 + \dots + \lambda_n x_(n-1)^2 + b_n x_n + c = 0$, причём $b_n \neq 0$, иначе квадрика вырождена. Сдвигая по x_n, уберём свободный член и сделаем $b_n = -1$. Получим уравнение вида $\lambda_1 x_1^2 + \dots + \lambda_n x_(n-1)^2 = x_n$.
   На самом деле, числа $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}$ определены однозначно с точностью до перестановки и умножения на -1 — без доказательства.

51 Проективные пространства, их аффинные карты. Однородные и неоднородные координаты.

Def. Проективным пространством, ассоциированным с векторным пространством V, называется множество PV одномерных подпространств пространства V. Множество PU одномерных подпространств, содержащихся в $(k+1)-$мерном подпространстве U, называется $k-$мерной плоскостью проективного пространства PV.

Ясно, что нульмерные плоскости — это точки, одномерные — прямые, $(n-1)-$мерные — гиперплоскости. Если $\dim V = n+1$, то положим $\dim PV \doteqdot n$. Обозначим: если $0 \neq x \in V$, то через $\widehat{x}$ обозначим $\langle x \rangle \in PV$.
Рассмотрим V, точку 0 и гиперплоскость S, не проходящую через 0. Пусть V_S - направляющее подпространство плоскости S. Любое одномерное подпространство, не лежащее в V_S, пересекает S и V_S. Положим $\varphi_S : PV \backslash PV_S \to S$, тогда φ_S - биекция.
Def. Гиперплоскость S вместе с отображением φ_S называется аффинной картой пространства PV.
Def. Точки гиперплоскости PV_S называются бесконечно удалёнными по отношению к аффинной карте S.
$k-$мерная плоскость пространства PV, не лежащая в бесконечно удалённой гиперплоскости, изображается на карте $k-$мерной плоскостью. Точнее, изображается не вся $k-$мерная плоскость, а её $k-$мерная часть.

Пусть $(e_0, e_1, \dots, e_n)$ - базис пространства V.
Def. Однородными координатами точки $\widehat{x}$ называются координаты вектора x. Они определены с точностью до одновременного умножения на любое число из K^*. Обозначение: $\widehat{x} \doteqdot (x_0 : x_1 : \dots : x_n)$, причём не все x_i нули.
Неоднородные координаты точки $\widehat{x} \in PV$ - это аффинные координаты её изображения на аффинной карте. Установим связь между однородными и неоднородными координатами.
Пусть $S = e_0 + \langle e_1, e_2, \dots, e_n \rangle$. Тогда $\widehat{x} = (x_0 : x_1 : \dots : x_n)$, и $x_0 \neq 0$.

$$x = x_0 e_0 + \dots + x_n e_n = x_0 \left(e_0 + \frac{x_1}{x_0} e_1 + \dots + \frac{x_n}{x_0} e_n \right)$$

- та же точка. Вектор $e_0 + \frac{x_1}{x_0} e_1 + \dots + \frac{x_n}{x_0} e_n$ имеет координаты $\frac{x_0}{x_0}, \dots, \frac{x_n}{x_0}$ относительно репера $(e_0;\ e_1, \dots, e_n)$. Таким образом, неоднородными координатами точки $\widehat{x}$ служат отношения $\frac{x_0}{x_0}, \dots, \frac{x_n}{x_0}$.
Def. Аффинным атласом называется система аффинных карт

$$S_i = e_i + \langle e_1, \dots, e_{i-1}, e_{i+1}, \dots, e_n \rangle ; \qquad i = 0, 1, \dots, n.$$

Аффинный атлас полностью покрывает пространство PV.

52 Плоскости в проективном пространстве, их взаимное расположение.

Теорема. Через любые $k+1$ точку $p_0, p_1, \dots, p_k \in PV$ проходит плоскость размерности $\leqslant k$. Если эти точки не содержатся в плоскости размерности меньше, чем k, то проходящая через них $k-$мерная плоскость единственна.
Доказательство. На языке векторного пространства V утверждение теоремы означает следующее: любые $k+1$ векторов $x_0, x_1, \dots, x_k \in V$ содержатся в подпространстве размерности не выше $k+1$, а если они не содержатся в подпространстве размерности меньше $k+1$, то они содержатся в единственном $(k+1)-$мерном подпространстве. Это очевидно. **Q.E.D.**
Теорема. Пусть π_1, π_2 - такие плоскости пространства PV, что $\dim \pi_1 + \dim \pi_2 \geqslant n$. Тогда $\pi_1 \cap \pi_2$ непусто, причём $\dim(\pi_1 \cap \pi_2) \geqslant \dim \pi_1 + \dim \pi_2 - n$.
Доказательство. Пусть $\pi_1 = PU_1,\ \pi_2 = PU_2$. Тогда по условию, $\dim U_1 + \dim U_2 \geqslant n+2 > n+1 = \dim V$. Значит, $U_1 \cap U_2 \neq 0$, то есть $\pi_1 \cap \pi_2$ непусто. Более точно, $\dim(U_1 \cap U_2) \geqslant \dim U_1 + \dim U_2 - (n+1)$, поэтому $\dim(\pi_1 \cap \pi_2) \geqslant \dim \pi_1 + \dim \pi_2 - n$. **Q.E.D.**

53 Проективные преобразования. Существование и единственность проективного преобразования n-мерного проективного пространства, переводящего одну заданую систему $n+2$ точек общего положения в другую.

Пусть $\mathcal{A}$ - невырожденный линейный оператор в пространстве V. Тогда $\mathcal{A}$ переводит каждое одномерное подпространство в одномерное подпространство. Тем самым, $\mathcal{A}$ определяет рекоторое преобразование $\widehat{\mathcal{A}}$ пространства PV. Оно называется проективным преобразованием.

Свойства: $\widehat{\mathcal{AB}} = \widehat{\mathcal{A}} \cdot \widehat{\mathcal{B}}$; $\widehat{\mathcal{E}} = id$; $\widehat{\mathcal{A}^{-1}} = \left(\widehat{\mathcal{A}}\right)^{-1}$.

Значит, проективные преобразования образуют группу. Она называется проективной группой и обозначается $\mathrm{PGL}(V)$. Отображение $\mathcal{A} \mapsto \widehat{\mathcal{A}}$ является гомоморфизмом групп. Но это необязательно изоморфизм.

Лемма. $\widehat{\mathcal{A}} = id \;\Leftrightarrow\; \mathcal{A} = \lambda\mathcal{E}$.

Доказательство. Ясно, что $\widehat{\lambda\mathcal{E}} = id$. Обратно, пусть $\widehat{\mathcal{A}} = id$. Тогда все ненулевые векторы являются собственными векторами оператора $\mathcal{A}$. Но так как сумма собственных векторов с различными собственными значениями не является собственным вектором, то все собственные значения оператора $\mathcal{A}$ одинаковы. **Q.E.D.**

Следстсвие. $\widehat{\mathcal{A}} = \widehat{\mathcal{B}} \;\Leftrightarrow\; \mathcal{B} = \lambda\mathcal{A}$.

Доказательство. $\widehat{\mathcal{A}} = \widehat{\mathcal{B}} \;\Leftrightarrow\; \widehat{\mathcal{A}^{-1}\mathcal{B}} = id \;\Leftrightarrow\; \mathcal{A}^{-1}\mathcal{B} = \lambda\mathcal{E} \;\Leftrightarrow\; \mathcal{B} = \lambda\mathcal{A}$. **Q.E.D.**

Запись в координатах:

Пусть $(e_0, e_1, \dots, e_n)$ - базис V. Рассмотрим аффинную карту $S_0 = e_0 + \langle e_1, \dots, e_n \rangle$.

Пусть $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) = e_0 + x_1e_1 + \dots + x_ne_n \in S_0$. Тогда $\mathcal{A}x = y_0e_0 + y_1e_1 + \dots + y_ne_n$, где $y_i = a_{i0} + a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n$.

Значит, $\mathcal{A}x = (z_1, \dots, z_n)$, где

$$z_i = \frac{y_i}{y_0} = \frac{a_{i0} + a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n}{a_{00} + a_{01}x_1 + \dots + a_{0n}x_n}.$$

Таким образом, проективное преобразование - это дробно-линейное преобразование.

При $n = 1$ оно выглядит как

$$x \mapsto \frac{ax+b}{cx+d}, \text{ где } \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0.$$

При этом $-\frac{d}{c} \mapsto \infty$, а $\infty \mapsto \frac{a}{c}$.

<u>Def</u>. Будем говорить, что точки $p_0, p_1, \dots, p_{n+1} \in PV$ находятся в общем положении, если никакие $n+1$ из них не лежат в одной гиперплоскости.

Теорема. Если точки $p_0, p_1, \dots, p_{n+1} \in PV$, а также точки $q_0, q_1, \dots, q_{n+1} \in PV$ находятся в общем положении, то существует единственное проективное преобразование f, для которого

$$f(p_i) = q_i, \quad i = 0, 1, \dots, n+1.$$

Доказательство. Пусть $p_i = \widehat{e_i}$, где $e_i \in V$. Тогда любые $n+1$ векторов из $e_0, \dots, e_{n+1}$ линейно независимы, и в частности, $e_0, e_1, \dots, e_n$ - базис пространства V. Тогда e_{n+1} раскладывается по этому базису. Но за счёт нормировки базисных векторов можно добиться $e_{n+1} = e_0 + e_1 + \dots + e_n$. При этом $e_0, e_1, \dots, e_n$ определены однозначно с точностью до одновременного умножения на одно и то же число.

Аналогично, существуют такие векторы $f_0, f_1 \dots, f_{n+1} \in V$, что $q_i = \widehat{f_i}$, и $f_{n+1} = f_0 + f_1 + \dots + f_n$.

Пусть $\mathcal{A}$ - линейное преобразование, переводящее базис (e) в базис (f), тогда $\mathcal{A}e_{n+1} = f_{n+1}$, поэтому $\widehat{\mathcal{A}}p_i = q_i \;\; \forall\, i$.

Теперь пусть $\mathcal{B}$ - линейное преобразование, такое, что $\widehat{\mathcal{B}}p_i = q_i, \quad i = 0, 1, \ldots, n+1$. Тогда $\mathcal{B}e_i = \lambda_i f_i$. Но так как $e_{n+1} = e_0 + e_1 + \cdots + e_n$, то $\mathcal{B}e_{n+1} = \mathcal{B}e_0 + \cdots + \mathcal{B}e_n = \lambda_0 f_0 + \cdots + \lambda_n f_n = \lambda_{n+1} f_{n+1}$. Значит, $\lambda_0 = \cdots = \lambda_n = \lambda_{n+1} \;\Rightarrow\; \mathcal{B} = \lambda\mathcal{A}$. **Q.E.D.**

54 Двойное отношение четвёрки точек, лежащих на одной прямой. Его инвариантность при проективных преобразованиях.

У проективного преобразования нет инварианта даже трёх точек, лежащих на одной прямой.
Пусть $L = PU \subset PV$ - прямая, то есть $\dim U = 2$. Пусть (e_1, e_2) - базис в U. Пусть $p_1, p_2, p_3, p_4 \in L$, $p_i = \widehat{u}_i$, где $u_1, u_2, u_3, u_4 \in U$.
Обозначим через $\det(u, v)$ ($\forall\, u, v \in U$) определитель матрицы, составленный из координат векторов u и v в базисе (e_1, e_2). Двойное отношение точек p_1, p_2, p_3, p_4 определяется по формуле

$$(p_1, p_2;\, p_3, p_4) = \frac{\det(u_1, u_3)}{\det(u_3, u_2)} : \frac{\det(u_1, u_4)}{\det(u_4, u_2)}.$$

Это выражение не зависит от выбора векторов $u_1, u_2, u_3, u_4 \in U$, также оно не зависит от базиса пространства U.
Выразим двойное отношение через неоднородные координаты точек p_i на прямой L.
Пусть S - аффинная карта PV. $u_1, u_2, u_3, u_4 \in S \cap L,\ u_i = e_2 + x_i e_1$. Пусть x_1, x_2, x_3, x_4 - неоднородные координаты точек p_i. Тогда

$$\det(u_i, u_j) = \begin{vmatrix} x_i & 1 \\ x_j & 1 \end{vmatrix} = x_i - x_j, \text{ таким образом, } (p_1, p_2;\, p_3, p_4) = \frac{x_1 - x_3}{x_3 - x_2} : \frac{x_1 - x_4}{x_4 - x_2} = \frac{(u_1, u_2;\, u_3)}{(u_1, u_2;\, u_4)}.$$

Теорема. Проуктивное преобразование $f \in \mathrm{PGL}(V)$ сохраняет двойное отношение, то есть

$$(f(p_1), f(p_2);\, f(p_3), f(p_4)) = (p_1, p_2;\, p_3, p_4).$$

Доказательство. Пусть $p_1, p_2, p_3, p_4 \in PU,\ \dim U = 2$. Пусть (e_1, e_2) - базис U, и $u_1, u_2, u_3, u_4 \in U$ таковы, что $\widehat{u}_i = p_i$.
Пусть $f = \widehat{\mathcal{A}},\ \mathcal{A} \in \mathrm{GL}(V)$. Пусть $v_i = \mathcal{A}u_i,\ \ f_1 = \mathcal{A}e_1,\ f_2 = \mathcal{A}e_2$. Тогда (f_1, f_2) - базис $\mathcal{A}U,\ \ \widehat{v}_i = f(p_i)$.

$$(f(p_1), f(p_2);\, f(p_3), f(p_4)) = \frac{\det(v_1, v_3)}{\det(v_3, v_2)} : \frac{\det(v_1, v_4)}{\det(v_4, v_2)}.$$

Но v_i выражается через (f_1, f_2) также, как u_i выражался через (e_1, e_2), поэтому $\det(v_i, v_j) = \det(u_i, u_j)$. Таким образом, двойное отношение сохраняется при проективном преобразовании. **Q.E.D.**

55 Квадрики в проективном пространстве, их аффинные изображения. Проективная классификация невырожденных вещественных квадрик, её сопоставление с аффинной классификацией.

<u>Def</u>. Конусом в векторном пространстве V называется подмножество $X \subset V$, облажающее свойством

$$x \in X \;\Rightarrow\; \lambda x \in X \;\forall\, \lambda \in K.$$

Проективизацией конуса $X \subset V$ называется множество $PX \subset PV$ всех одномерных подпространств, содержащихся в X. Изображение проективизации конуса X на аффинной карте S есть $X \cap S$.
Квадратичным конусом в пространстве V называется коническая квадрика с вершиной в нуле. Проективизация квадратичного конуса называется проективной квадрикой.
Квадратичный конус - это подмножество, задаваемое уравнением $Q(x_0, x_1, \dots, x_n) = 0$, где Q - квадратичная функция в пространстве V, при условии, что это множество не есть подпространство. Это же уравнение есть уравнение соответствующей проективной квадрики в однородных координатах. Изображение на аффинной карте $S_0 : \ x_0 = 1$ задаётся уравнением $Q(1, x_1, \dots, x_n) = 0$.
Если это не пустое множество и не плоскость, то это аффинная квадрика (на самом деле, можно доказать, что если поле K бесконечно, то это не может быть пустым множеством). Тип этой аффинной квадрики, безусловно, зависит от аффинной карты.
Бесконечно удалённая часть проективной квадрики задаётся уравнением $Q(0, x_1, \dots, x_n) = 0$. Это уравнение в однородных координатах на бесконечно удалённой гиперплоскости, и если это не пустое множество и не плоскость, то это квадрика.
Всякая аффинная квадрика X на S_0 является изображением однозначно определённой проективной квадрики $\widehat{X}$. Уравнение $\widehat{X}$ в однородных координатах получается из уравнения квадрики X путём вставления x_0 в члены первой степени и x_0^2 в свободный член.
Def. Проективная квадрика $Q(x_0, x_1, \dots, x_n) = 0$ называется невырожденной, если квадратичная функция Q невырождена, и вырожденной в противном случае.
Пусть Q вырождена, и F - соответствующая симметрическая билинейная функция.
Пусть $u \in \operatorname{Ker} F, \ u \neq 0$. Тогда $Q(x) = 0 \ \Rightarrow \ Q(\lambda x + \mu u) = 0 \ \forall \ \lambda, \mu \in K$, потому что
$Q(\lambda x + \mu u) = \lambda^2 Q(x) + 2\lambda\mu F(x, u) + \mu^2 Q(u) = 0$.
Это означает, что соответствующая проективная квадрика вместе с каждой точкой p содержит прямую, проходящую через p и точки $o = \widehat{u}$.
В аффинном изображении на карте S мы получим конус, если $o \in S$, и цилиндр в противном случае (если $o \notin S$, то это бесконечно удалённая точка, и $p \in$ изображению $\Rightarrow$ прямая, параллельная o, принадлежит изображению).
Таким образом, в проективной геометрии нет разницы между конусом и цилиндром.

Рассмотрим невырожденные проективные квадрики в вещественном проективном пространстве.
Канонический вид уравнения в однородных координатах:

$$x_0^2 + x_1^2 + \dots + x_k^2 - x_{k-1}^2 - \dots - x_n^2 = 0 \quad \left(\frac{n-1}{2} \leqslant k < n \right).$$

Рассмотрим случаи $n = 2$ и $n = 3$.
При $n = 2$ есть только одна возможность:
$x_0^2 + x_1^2 - x_3^2 = 0$. Эта квадрика называется коникой.
При $n = 3$ - две возможности:
$x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 - x_1^2 = 0$ - овальная квадрика, и
$x_0^2 + x_1^2 - x_2^2 - x_1^2 = 0$ - линейчатая квадрика.

Таблица:

n	Проективная квадрика	Аффинное изображение	Бесконечно удалённая часть
2	коника	эллипс	пусто
		парабола	точка
		гипербола	пара точек
3	овальная квадрика	эллипсоид	пусто
		эллиптический параболоид	точка
		двуполостный гиперболоид	коника
	линейчатая квадрика	однополостный гиперболоид	коника
		гиперболический параболоид	пара прямых

56 Векторные модели сферической и гиперболической геометрий. Плоскости, расстояние между точками и движения в этих моделях.

56.1 Сферическая геометрия.

Пусть E^{n+1} - $(n+1)-$мерное евклидово пространство со скалярным умножением

$$(x,x) = x_0^2 + x_1^2 + \dots + x_n^2.$$

Рассмотрим S^n — $n-$мерную сферу, задаваемую уравнением $(x,x) = 1$. $k-$мерные плоскости на S^n - это подмножества вида $S^n \cap U$, где U — $(k+1)-$мерное подпространство в E^{n+1}. Нульмерные плоскости - это пары диаметрально противоположных точек, одномерные - это большие круги, называемые прямыми в сферической геометрии.
Пусть $\dim \Pi_1 + \dim \Pi_2 \geqslant n$. Тогда $\Pi_1 \cap \Pi_2 \neq \emptyset$. В частности, любые две прямые на S^2 пересекаются. Через любые две точки проходит прямая.
Расстояние между точками определяется по формуле $\cos\rho(x,y) = (x,y)$, то есть равно длине дуги большого круга.
Групповой смысл:
Рассмотрим однопараметрическую группу поворотов в подпространстве $\langle x,y\rangle$. В ортонормированном базисе

$$\Pi(t) = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}.$$

$\Pi(t)\Pi(s) = \Pi(t+s)$. Если $y = \Pi(t)x,\ 0 \leqslant t \leqslant \pi$, то $\rho(x,y) = t$.
Отсюда следует, что расстояние аддитивно: дйествительно, для точек x,y,z, лежащих на одной полуокружности, и y - между x и z выполняется $\rho(x,y)+\rho(y,z) = \rho(x,z)$, так как $y = \Pi(t)x;\ z = \Pi(s)y$, тогда $z = \Pi(t+s)x$.
Группа движений сферической геометрии - это ортогональная группа O_{n+1}, так как эта группа сохраняет сферу.

56.2 Гиперболическая геометрия (геометрия Лобачевского).

Пусть $E^{n,1}$ - псевдоевклидово пространство сигнатуры $(n,1)$ (пространство Минковского) со скалярным умножением

$$(x,x) = -x_0^2 + x_1^2 + \dots + x_n^2.$$

Рассмотрим гиперболоид $L^n\ :\ (x,x) = -1;\ x_0 > 0$ (рассматривается только одна связная компонента).

Def. $(k+1)-$мерное подпространство $U \subset E^{n,1}$ называется гиперболическим, если ограничение скалярного умножения на него имеет сигнатуру $(k,1)$, то есть невырождено и неопределённо.
$k-$мерной плоскостью пространства L^n называется подмножество вида $L^n \cap U$, где
U — $(k+1)-$мерное гиперболическое подпространство.
Нульмерные плоскости - это точки, одномерные плоскости называются прямыми.
Расстояние между точками определяется по формуле

$$\operatorname{ch} \rho(x,y) = -(x,y).$$

Групповой смысл:
Рассмотрим однопараметрическую группу гиперболических поворотов в двумерном подпространстве $\langle x, y\rangle$. В ортонормированном базисе

$$H(t) = \begin{pmatrix} \operatorname{ch} t & \operatorname{sh} t \\ \operatorname{sh} t & \operatorname{ch} t \end{pmatrix}.$$

Групповое свойство: $H(t)H(s) = H(t+s)$. В подходящем базисе (где $(x,x) = x_0 x_1$)

$$H(t) = \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix}.$$

Такое преобразование называется ещё преобразованием Лоренца.
Если $y = H(t)x$, то $\rho(x,y) = t$. Действительно,пусть $(e_0 = x, e_1)$ - ортонормированный базис в $\langle x, y\rangle$.
Тогда $H(t)x = x \operatorname{ch} t + e_1 \operatorname{sh} t = y$. $(x,y) = -\operatorname{ch} t \Rightarrow \operatorname{ch} \rho(x,y) = -(x,y)$.
Свойство аддитивности расстояний между точками: если точки x, y, z лежат на одной прямой, причём y лежит между x и z, то

$$\rho(x,y) + \rho(y,z) = \rho(x,z).$$

Группа движений геометрии Лобачевского - это псевдоортогональная группа $O_{n,1}$ - группа линейных преобразований $E^{n,1}$, сохраняющая скалярное умножение. Точнее, её подгруппа индекса 2 ($O'_{n,1}$), сохраняющая каждую связную компоненту гиперболоида $(x,x) = -1$.

57 Свойство максимальной подвижности в сферической и гиперболической геометриях.

Def. Ортонормированным репером в пространстве S^n (соответственно, L^n) называется система $(e_0; e_1, \ldots, e_n)$, где $e_0 \in S^n$ (соответственно, L^n), а $(e_1, \ldots, e_n)$ - ортонормированный базис в касательном подпространстве $T_{e_0}(S^n) = \langle e_0 \rangle^{\perp}$ (соответственно, $T_{e_0}(L^n) = \langle e_0 \rangle^{\perp}$, а ортонормированный базис в $T_{e_0}(L^n)$ - это базис, для которого $(e_0, e_0) = -1$, $(e_i, e_i) = 1$ при $i > 0$, $(e_i, e_j) = 0$ при $i \neq j$).
Теорема. Для любых ортонормированных реперов $(e_0; e_1, \ldots, e_n)$ и $(e'_0; e'_1, \ldots, e'_n)$ существует единственное движение, переводящее первый репер во второй (в S^n и в L^n).
Доказательство. Для S^n существует единственный линейный оператор $\mathcal{A}$ в E^{n+1}, переводящий базис $(e_0, e_1, \ldots, e_n)$ в базис $(e'_0, e'_1, \ldots, e'_n)$, и так как оба базиса ортонормированные, то $\mathcal{A} \in O_{n+1}$;
Для L^n аналогично с тем замечанием, что $\mathcal{A}e_0 = e'_0$, поэтому $\mathcal{A} \in O'_{n,1}$. **Q.E.D.**

58 Сумма углов сферического и гиперболического треугольника.

Измерение углов между прямыми m и l:
Если $m = \Pi(t)l$, где $\Pi(t)$ - поворот вокруг точки $p = m \cap l$ на угол t в плоскости ml, то $\angle ml = t$.
Если e и f - единичные векторы, ортогональные l и m соответственно, то $\cos \angle lm = -(e,f)$.

Составим матрицу для треугольника с углами α, β и γ, вершинами p, q, r и единичными нормалями к сторонам e, f, g соответственно:

$$G(e,f,g) = \begin{pmatrix} 1 & -\cos\gamma & -\cos\beta \\ -\cos\gamma & 1 & -\cos\alpha \\ -\cos\beta & -\cos\alpha & 1 \end{pmatrix}.$$

Определитель этой матрицы обозначим $\Delta(\alpha,\beta,\gamma)$:

$$\Delta(\alpha,\beta,\gamma) = \det G(e,f,g) = 1 - 2\cos\alpha\cos\cos\gamma - \cos^2\alpha - \cos^2\beta - \cos^2\gamma.$$

Если E^2, то $\Delta(\alpha,\beta,\gamma) = 0$, если S^2, то $\Delta(\alpha,\beta,\gamma) > 0$, если L^2, то $\Delta(\alpha,\beta,\gamma) < 0$.
Теорема. Сумма углов сферического (гиперболического) треугольника больше π (соответственно, меньше π).
Доказательство. Докажем, что для сферического (гиперболического) треугольника $\alpha+\beta+\gamma \neq \pi$. Действительно, иначе существовал бы евклидовый треугольник с теми же углами, и тогда $\Delta(\alpha,\beta,\gamma) = 0$.
Из соображений непрерывности следует, что $\alpha+\beta+\gamma-\pi$ имеет один знак для всех треугольников.
Для S^2 есть тругольник с $\alpha = \beta = \gamma = \frac{\pi}{2}$.
Для L^2 - идеальный треугольник с $\alpha = \beta = \gamma = 0$. **Q.E.D**.
Рассмотрим равносторонний треугольник с $\alpha = \beta = \gamma$.
Тогда $\Delta(\alpha,\beta,\gamma) = \Delta(\alpha,\alpha,\alpha) = 1 - 3\cos^2\alpha - 2\cos^3\alpha = (1+\cos\alpha)^2(1-2\cos\alpha)$.

$$1 - 2\cos\alpha \begin{cases} > 0, & \text{для } S^2; \\ = 0, & \text{для } E^2; \\ < 0, & \text{для } L^2. \end{cases} \quad \text{Поэтому } \alpha \begin{cases} > \frac{\pi}{3}, & \text{для } S^2; \\ = \frac{\pi}{3}, & \text{для } E^2; \\ < \frac{\pi}{3}, & \text{для } L^2. \end{cases}$$

59 Тензорная алгебра векторного пространства.

Def. Полилинейной функцией, или $p-$линейной функцией на векторном пространстве V над полем K называется отображение $\alpha : \underbrace{V \times \cdots \times V}_{p} \to K$, линейное по каждому аргументу.
Пусть $(e_1, \ldots, e_n)$ - базис пространства V. Положим $\alpha(e_{i_1}, \ldots, e_{i_p}) \doteqdot a_{i_1 \ldots i_p}$.
В координатах $\alpha(x_1, \ldots, x_p) = \sum\limits_{i_1,\ldots,i_p} a_{i_1\ldots i_p} x_{1i_1} \ldots x_{pi_p}$. Здесь первый индекс - это номер вектора, второй - номер координаты.
Пространство $p-$линейных функций на V обозначается $T_p(V)$. Базис этого пространства составляют функции

$$\left\{\varepsilon_{i_1\ldots i_p} \ : \ i_1, \ldots, i_p\right\},$$

определяемые следующим образом:
$\varepsilon_{i_1\ldots i_p}(e_{i_1}, \ldots, e_{i_p}) = 1$;
$\varepsilon_{i_1\ldots i_p}(e_{j_1}, \ldots, e_{j_p})$ в остальных случаях.
Таким образом, $\alpha = \sum\limits_{i_1,\ldots,i_p} a_{i_1\ldots i_p}\varepsilon_{i_1\ldots i_p}$, значит, базис. Поэтому $\dim T_p(V) = (\dim V)^p$.
В частности, $T_0(V) = K;\ T_1(V) = V^*$.
Тензорное умножение определяется как операция

$$\otimes : T_p(V) \times T_q(V) \to T_{p+q}(V)$$

по следующему правилу: если $\alpha \in T_p(V),\ \beta \in T_q(V)$, то $\alpha\otimes\beta \in T_{p+q}(V)$, так, что

$$\alpha\otimes\beta(x_1, \ldots, x_{p+q}) = \alpha(x_1, \ldots, x_p)\cdot\beta(x_{p+1}, \ldots, x_{p+q}).$$

Свойства:

1. Линейность по обоим аргументам: по α и по β;

2. Ассоциативность: $\alpha \in T_p(V),\ \beta \in T_q(V),\ \gamma \in T_r(V)\ \Rightarrow\ (\alpha \otimes \beta) \otimes \gamma = \alpha \otimes (\beta \otimes \gamma)$;

3. $\varepsilon_{i_1,\ldots,i_p} \in T_p(V),\ \varepsilon_{i_{p+1},\ldots,i_{p+q}} \in T_q(V)\ \Rightarrow\ \varepsilon_{i_1,\ldots,i_p} \otimes \varepsilon_{i_{p+1},\ldots,i_{p+q}} = \varepsilon_{i_1,\ldots,i_{p+q}} \in T_{p+q}(V)$.

Def. Тензорным произведением векторных пространств V и U называется векторное пространство W вместе с билинейным отображением $\otimes : V \times U \to W,\ (x, y) \mapsto x \otimes y$, обладающим свойством: Если $(e_1, \ldots, e_n)$ - базис V, $(f_1, \ldots, f_m)$ - базис U, то $(e_i \otimes f_j\ :\ i = 1, \ldots, n;\ j = 1, \ldots, m)$ - базис W.
Обозначается: $W = V \otimes U,\ \dim W = \dim V \cdot \dim U$.
Таким образом, $T_{p+q}(V) = T_p(V) \otimes T_q(V)$.
Аналогично определяется тензорное произведение нескольких векторных пространств, поэтому $T_p(V) = \underbrace{V^* \otimes \ldots \otimes V^*}_{p}$. В частности, $\varepsilon_{i_1,\ldots,i_p} = \varepsilon_{i_1} \otimes \ldots \otimes \varepsilon_{i_p}$, где $\varepsilon_{i_1}, \ldots, \varepsilon_{i_p}$ - координатные функции из V^*. Для любых $\alpha_1, \ldots, \alpha_p \in V^*$ $\ (\alpha_1 \otimes \ldots \otimes \alpha_p)(x_1, \ldots, x_p) = \alpha_1(x_1) \ldots \alpha_p(x_p)$.
Рассмотрим $T(V^*) = \bigoplus\limits_{p=0}^{\infty} T_p(V) \doteqdot \{(\alpha_0, \alpha_1, \ldots)\ :\ \alpha_p \in T_p(V),\ \text{и лишь конечное число } \alpha_p \neq 0\}$.
Операции в $T(V^*)$ определяются покомпонентно. Таким образом, $T(V^*)$ - векторное пространство.
Также на $T(V^*)$ определена операция тензорного умножения: $(\alpha_0, \alpha_1, \ldots)(\beta_0, \beta_1, \ldots) = (\gamma_0, \gamma_1, \ldots)$, где

$$\gamma_p = \sum_{q+r=p} \alpha_q \otimes \beta_r.$$

Def. Алгеброй над полем K называется векторное пространство над K, в котором задана билинейная операция умножения $A \times A \to A,\ (a, b) \mapsto ab$. Всё должно удовлетворять аксиомам:

1. Относительно сложения и умножения A - кольцо;

2. Относительно сложения и умножения на элементы поля K A - векторное пространство;

3. $\lambda(ab) = (\lambda a)b = a(\lambda b)$.

Операция умножения в алгебре однозначно определяется произведениями базисных векторов:
$e_i e_j = \sum\limits_k c_{ijk} e_k$. Числа c_{ijk} называются структурными константами алгебры.
$T(V^*)$ - алгебра. Она называется тензорной алгеброй пространства V^*. Это ассоциативная алгебра с единицей (единицей служит единица поля $K = T_0(V)$).
Аналогично можно определить $T(V)$.
$T(V) = \bigoplus\limits_{p=0}^{\infty} T^p(V)$, где $T^p(V) = \underbrace{V \otimes \ldots \otimes V}_{p}$. Элементы $T^p(V)$ можно рассматривать как $p-$линейные функции на V^*: $\ (x_1 \otimes \ldots \otimes x_p)(\alpha_1, \ldots, \alpha_p) = x_1(\alpha_1) \ldots x_p(\alpha_p)$.
$T^1(V) = V$, потому что векторы - это линейные функции на V^*.

60 Симметрическая алгебра векторного пространства (над полем нулевой характеристики), её связь с алгеброй многочленов.

Пусть S_p - группа подстановок p элементов.
$\forall \sigma \in S_p\ \ \forall \alpha \in T_p(V)$ определим $\sigma\alpha \in T_p(V)$ по формуле

$$(\sigma\alpha)(x_1, \ldots, x_p) = \alpha\left(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(p)}\right).$$

Лемма. $(\sigma\tau)\alpha = \sigma(\tau\alpha)$.

Доказательство. $\sigma(\tau\alpha)(x_1,\ldots,x_p) = (\tau\alpha)\left(x_{\sigma(1)},\ldots,x_{\sigma(p)}\right) =$
$= (\tau\alpha)(y_1,\ldots,y_p) = \alpha\left(y_{\tau(1)},\ldots,y_{\tau(p)}\right) = \alpha\left(x_{\sigma\tau(1)},\ldots,x_{\sigma\tau(p)}\right) = ((\sigma\tau)\alpha)(x_1,\ldots,x_p)$. **Q.E.D.**
Def. $p-$линейная функция называется симметрической, если $\sigma\alpha = \alpha \ \forall\ \sigma \in S_p$.
Симметрические функции образуют подпространство $S_p(V) \subset T_p(V)$.
Пусть далее $\operatorname{char} K = 0$.
Рассмотрим отображение симметризации

$$\mathrm{Sym}\,: T_p(V) \to T_p(V), \quad \mathrm{Sym}\,\alpha = \frac{1}{p!}\sum_{\sigma\in S_p} \sigma\alpha.$$

Теорема. Оператор Sym есть проектор на подпространство $S_p(V)$.
Доказательство.

1. Если $\alpha \in S_p(V)$, то $\mathrm{Sym}\,\alpha = \alpha$;
2. $\forall\alpha \ \ \mathrm{Sym}\,\alpha \in S_p(V)$:
   $\forall\tau \quad \tau\mathrm{Sym}\,\alpha = \frac{1}{p!}\sum\limits_{\sigma\in S_p}\tau\sigma\alpha = \frac{1}{p!}\sum\limits_{\sigma'\in S_p}\sigma'\alpha = \mathrm{Sym}\,\alpha$;
3. Из доказательства следует, что $\mathrm{Sym}^2 = \mathrm{Sym}$, поэтому Sym — проектор. **Q.E.D.**

Лемма. $\mathrm{Sym}\,(\mathrm{Sym}\,\alpha\otimes\beta) = \mathrm{Sym}\,(\alpha\otimes\mathrm{Sym}\,\beta) = \mathrm{Sym}\,(\alpha\otimes\beta)$.
Доказательство. Действительно, $\mathrm{Sym}\,(\sigma\alpha\otimes\beta) = \mathrm{Sym}\,(\alpha\otimes\beta)$, потому что в $\sigma\alpha$ - перестановка аргументов, но в $\mathrm{Sym}\,(\alpha\otimes\beta)$ потос всё равно переставляем, поэтому ничего не меняется.
Суммируя по всем $\sigma\in S_p$ и деля на $p!$, получаем, что $\mathrm{Sym}\,(\mathrm{Sym}\,\alpha\otimes\beta) = \mathrm{Sym}\,(\alpha\otimes\beta)$.
Вторая часть доказывается аналогично. **Q.E.D.**
Def. Определим операцию симметрического умножения:

$$\vee : S_p(V)\times S_q(V) \to S_{p+q}(V); \quad \alpha\vee\beta = \mathrm{Sym}\,(\alpha\otimes\beta).$$

Свойства:

1. Линейность по обоим аргументам;
2. Коммутативность:
   $\beta\vee\alpha = \mathrm{Sym}\,(\beta\otimes\alpha) = \mathrm{Sym}\,(\rho(\alpha\otimes\beta)) = \alpha\vee\beta$ для некоторой $\rho\in S_{p+q}$.
3. Ассоциативность: вытекает из леммы "Sym − Sym".

Рассмотрим симметрическую алгебру пространства V^* :

$$S(V^*) = \bigoplus_{p=0}^{\infty} S_p(V),$$

где операция умножения продолжается с операции $\vee$ по линейности (аналогично $T(V^*)$).
Пусть $\alpha_1,\ldots,\alpha_p \in S_1(V) = V^*$.
$(\alpha_1\vee\cdots\vee\alpha_p)(x_1,\ldots,x_p) = \frac{1}{p!}\sum\limits_{\sigma\in S_p}\alpha_1\left(x_{\sigma(1)}\right)\ldots\alpha_p\left(x_{\sigma(p)}\right) = \frac{1}{p!}\mathrm{per}\,(\alpha_i(x_j))$ - перманент.
Пусть $(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n)$ - базис V^*; $(\varepsilon_1^*,\ldots,\varepsilon_n^*) = (e_1,\ldots,e_n)$ - базис V.
Теорема. $\varepsilon_{i_1}\vee\cdots\vee\varepsilon_{i_p} \quad (i_1\leqslant\ldots\leqslant i_p)$ — базис в $S_p(V)$.
Доказательство.

1. Произведения $\varepsilon_{i_1}\otimes\ldots\otimes\varepsilon_{i_p}$ образуют базис в $T_p(V)$, значит,
   произведения $\mathrm{Sym}\,\left(\varepsilon_{i_1}\otimes\ldots\otimes\varepsilon_{i_p}\right) = \varepsilon_{i_1}\vee\cdots\vee\varepsilon_{i_p}$ порождают пространство $S_p(V)$.
   Но ввиду коммутативности достаточно рассматривать только $\varepsilon_{i_1}\vee\cdots\vee\varepsilon_{i_p}$, где $(i_1\leqslant\ldots\leqslant i_p)$.

2. Пусть $\sum\limits_{i_1 \leqslant \ldots \leqslant i_p} a_{i_1 \ldots i_p} \varepsilon_{i_1} \vee \cdots \vee \varepsilon_{i_p} = 0$. Возьмём $j_1 \leqslant \ldots \leqslant j_p$ и рассмотрим значение суммы на $\left(e_{j_1}, \ldots, e_{j_p}\right)$. Если $(i_1, \ldots, i_p) \neq (j_1, \ldots, j_p)$, то $\left(\varepsilon_{i_1} \vee \cdots \vee \varepsilon_{i_p}\right)\left(e_{j_1}, \ldots, e_{j_p}\right) = 0$, в противном случае это значение не равно нулю. Значит, $a_{i_1 \ldots i_p} = 0$. **Q.E.D.**

Следстсвие. $\dim S_p(V) = CC_n^p = \dfrac{n(n+1)\ldots(n+p-1)}{p!}$ (число сочетаний с повторениями).
Def. Функция на V со значениями в K называется многочленом, если в координатах она записывается как многочлен.
Степень многочлена не зависит от базиса (так как замена координат линейна).
Многочлены образуют алгебру $K[V]$.

$$K[V] = \bigoplus_{p=0}^{\infty} K[V]_p,$$

где $K[V]_p$ - пространство однородных многочленов степени p.
Def. Для любой симметрической $p-$линейной функции $\alpha \in S_p(V)$ определён ассоциированный с ней многочлен $f_\alpha(x) = \alpha(x, x, \ldots, x) \in K[V]_p$.
Теорема. Отображение $\alpha \mapsto f_\alpha$ определяет изоморфизм алгебр $S(V^*)$ и $K[V]$.
Доказательство.

1. Докажем, что это гомоморфизм. Надо доказать, что $f_{\alpha\vee\beta} = f_\alpha f_\beta$. Действительно, $f_{\alpha\vee\beta}(x) = (\alpha \vee \beta)(\underbrace{x, x, \ldots, x}_{p+q}) = \alpha(\underbrace{x, \ldots, x}_{p})\beta(\underbrace{x, \ldots, x}_{q}) = f_\alpha(x) f_\beta(x)$.

2. $f_{\varepsilon_i}(x) = \varepsilon_i(x) = x_i \;\Rightarrow\; f_{\varepsilon_{i_1} \vee \cdots \vee \varepsilon_{i_p}}(x) = x_{i_1} \ldots x_{i_p}$.
Но одночлены $x_{i_1} \ldots x_{i_p}$ с $i_1 \leqslant \ldots \leqslant i_p$ образуют базис в пространстве многочленов, а $\varepsilon_{i_1} \vee \cdots \vee \varepsilon_{i_p}$ с $i_1 \leqslant \ldots \leqslant i_p$ образуют базис в пространстве $S_p(V)$, так как $\operatorname{char} K \neq 0$.
Поэтому $\alpha \mapsto f_\alpha$ - изоморфизм. **Q.E.D.**

Аналогично строится $S(V)$. Оно изоморфно $K[V^*]$.

61 Внешняя алгебра векторного пространства (над полем нулевой характеристики).

Def. $p-$линейная функция $\alpha \in T_p(V)$ называется кососимметрической, если $\forall \sigma \in S_p \;\; \sigma\alpha = (\operatorname{sgn}\sigma)\alpha$.
Кососимметрические функции образуют подпространство $\Lambda_p(V) \subset T_p(V)$.
Def. Операция альтернирования определяется следующим образом:

$$\operatorname{Alt} : T_p(V) \to T_p(V), \quad \operatorname{Alt}\alpha = \frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in S_p} (\operatorname{sgn}\sigma)\sigma\alpha.$$

Теорема. Alt - проектор на подпространство $\Lambda_p(V)$.
Доказательство.

1. $\alpha \in \Lambda_p(V) \;\Rightarrow\; \operatorname{Alt}\alpha = \alpha$.

2. $\forall \alpha \in T_p(V) \;\; \operatorname{Alt}\alpha \in \Lambda_p(V)$. Действительно,
$\forall \tau \in S_p \quad \tau\operatorname{Alt}\alpha = \frac{1}{p!} \sum\limits_{\sigma \in S_p} (\operatorname{sgn}\sigma)\tau\sigma\alpha = \operatorname{sgn}\tau \cdot \frac{1}{p!} \sum\limits_{\sigma \in S_p} (\operatorname{sgn}\sigma)\sigma\alpha = \operatorname{sgn}\tau \operatorname{Alt}\alpha$.

3. $\operatorname{Alt}^2 = \operatorname{Alt} \;\Rightarrow\;$ Alt - проектор на $\Lambda_p(V)$. **Q.E.D.**

Лемма. $\mathrm{Alt}\,(\mathrm{Alt}\,\alpha\otimes\beta)=\mathrm{Alt}\,(\alpha\otimes\mathrm{Alt}\,\beta)=\mathrm{Alt}\,(\alpha\otimes\beta)$.
Доказательство. $\forall\sigma\in S_p\quad \mathrm{Alt}\,(\sigma\alpha\otimes\beta)=(\mathrm{sgn}\,\alpha)\mathrm{Alt}\,(\alpha\otimes\beta)$. Суммируя по всем σ и деля на $p!$, получаем, что $\mathrm{Alt}\,(\mathrm{Alt}\,\alpha\otimes\beta)=\mathrm{Alt}\,(\alpha\otimes\beta)$. **Q.E.D.**
Def. Операция внешнего умножения определяется таким образом:

$$\wedge:\Lambda_p(V)\times\Lambda_q(V)\to\Lambda_{p+q}(V),\quad \alpha\wedge\beta=\mathrm{Alt}\,(\alpha\otimes\beta).$$

Свойства:

1. Билинейность;
2. Суперкоммутативность: $\beta\wedge\alpha=(-1)^{pq}\alpha\wedge\beta\ \ (\alpha\in\Lambda_p(V),\ \beta\in\Lambda_q(V))$ - доказывается аналогично симметрическому умножению: $\mathrm{sgn}\,\rho=(-1)^{pq}$.
3. Ассоциативность - вытекает из соответствующей леммы.

Можно построить внешнюю алгебру пространства V^*:

$$\Lambda(V^*)=\bigoplus_{p=0}^{\infty}\Lambda_p(V).$$

В ней три операции: сумма, умножение на число и внешнее умножение (продолжается по дистрибутивности операции $\wedge:\Lambda_p(V)\times\Lambda_q(V)\to\Lambda_{p+q}(V)$).
$\Lambda_0(V)=K,\ \ \Lambda_1(V)=V^*$.
Если $\alpha_1,\dots,\alpha_p\in V^*$, то $(\alpha_1\wedge\dots\wedge\alpha_p)(x_1,\dots,x_p)=\dfrac{1}{p!}\sum\limits_{\sigma\in S_p}(\mathrm{sgn}\,\sigma)\alpha_1\left(x_{\sigma(1)}\right)\dots\alpha_p\left(x_{\sigma(p)}\right)=$

$=\dfrac{1}{p!}\det\left(\alpha_i(x_j)\right)$ - обыкновенный определитель.
Теорема. Произведения $\varepsilon_{i_1}\wedge\dots\wedge\varepsilon_{i_p}$, где $i_1<\dots<i_p$, образуют базис подпространства $\Lambda_p(V)$.
Доказательство.

1. Так как произведения $\varepsilon_{i_1}\otimes\ldots\otimes\varepsilon_{i_p}$ образуют базис пространства $T_p(V)$, то $\mathrm{Alt}\,\left(\varepsilon_{i_1}\otimes\ldots\otimes\varepsilon_{i_p}\right)=\varepsilon_{i_1}\wedge\dots\wedge\varepsilon_{i_p}$ порождают $\Lambda_p(V)$. Если среди индексов есть одинаковые, то получается ноль. Если нет, то можно упорядочить по строгому возрастанию (при этом умножится на ±1). Поэтому произведения $\varepsilon_{i_1}\wedge\dots\wedge\varepsilon_{i_p}$, где $i_1<\dots<i_p$, порождают подпространство $\Lambda_p(V)$.
2. То, что это базис, доказывается аналогично симметрическому произведению. **Q.E.D.**

Следстсвие. $\dim\Lambda_p(V)=C_n^p$, в частности, $\dim\Lambda_p(V)=0$ при $p>n$.
$\dim\Lambda(V^*)=2^n,\ \dim\Lambda_n(V)=1$.
Аналогично строится внешняя алгебра $\Lambda(V)=\bigoplus\limits_{p=0}^{\infty}\Lambda^p(V)$.
Элементы $\Lambda^p(V)$ называются $p-$векторами.

62 Разложимые поливекторы и подпространства векторного пространства.

Теорема. Пусть $a_1,\dots,a_p\in V$. Тогда $a_1\wedge\dots\wedge a_p=0\ \Leftrightarrow$ векторы линейно зависимы.
Доказательство.

1. Пусть векторы линейно зависимы. Для определённости положим $a_p=\lambda_1a_1+\dots+\lambda_{p-1}a_{p-1}$. Тогда $a_1\wedge\dots\wedge a_p=a_1\wedge\dots\wedge a_{p-1}\wedge(\lambda_1a_1+\dots+\lambda_{p-1}a_{p-1})=\sum\limits_{i=1}^{p-1}\lambda_i(a_1\wedge\dots\wedge a_{p-1}\wedge a_i)=0.$

2. Пусть векторы линейно независимы. Включим их в базис $(e_1, \dots, e_n)$ пространства V, так чтобы $e_i = a_i \quad i = 1, \dots, p$. Тогда $a_1 \wedge \dots \wedge a_p = e_1 \wedge \dots \wedge e_p$ - один из базисных векторов пространства $\Lambda_p(V)$, значит, не равен нулю. **Q.E.D.**

Теорема. Пусть $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ и $\{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ - две линейно независимые системы векторов V. Тогда $a_1 \wedge \dots \wedge a_p$ и $b_1 \wedge \dots \wedge b_p$ пропорциональны $\Leftrightarrow \langle a_1, \dots, a_p \rangle = \langle b_1, \dots, b_p \rangle$.
Доказательство.

1. Пусть $\langle a_1, \dots, a_p \rangle = \langle b_1, \dots, b_p \rangle$. Тогда система (b) линейно выражается через систему (a). Подставляя это выражение в $b_1 \wedge \dots \wedge b_p$, получаем, что $b_1 \wedge \dots \wedge b_p$ линейно выражается через $a_{i_1} \wedge \dots \wedge a_{i_p}$. Но эти произведения линейно выражаются через $a_1 \wedge \dots \wedge a_p$, поэтому и $b_1 \wedge \dots \wedge b_p$ линейно выражается через $a_1 \wedge \dots \wedge a_p$.

2. Пусть $a_1 \wedge \dots \wedge a_p$ и $b_1 \wedge \dots \wedge b_p$ пропорциональны. Выберем базис $(e_1, \dots, e_n)$ пространства V, согласованный с $\langle a_1, \dots, a_p \rangle$ и $\langle b_1, \dots, b_p \rangle$. То есть, $\langle a_1, \dots, a_p \rangle = \langle e_1, \dots, e_p \rangle$ и $\langle b_1, \dots, b_p \rangle = \langle e_1, \dots, e_r \rangle \oplus \langle e_{p+1}, \dots, e_{2p-r} \rangle$. Тогда мы видим, что $a_1 \wedge \dots \wedge a_p$ пропорционально $e_1 \wedge \dots \wedge e_p$, а $b_1 \wedge \dots \wedge b_p$ пропорционально $e_1 \wedge \dots \wedge e_r \wedge e_{p+1} \wedge \dots \wedge e_{2p-r}$.
   Но $e_1 \wedge \dots \wedge e_p$ и $e_1 \wedge \dots \wedge e_r \wedge e_{p+1} \wedge \dots \wedge e_{2p-r}$ — (при $r < p$) два разных базисных вектора пространства $\Lambda_p(V)$, поэтому они непропорциональны. Значит, $r = p$. **Q.E.D.**

Таким образом, подпространство может характеризоваться лишь внешними произведениями базисных векторов. Пусть $U \subset V,\ \dim U = p$. Пусть $(a_1, \dots, a_p)$ - базис U. Разложим $a_1 \wedge \dots \wedge a_p \in \Lambda_p(V)$ по базису:

$$a_1 \wedge \dots \wedge a_p = \sum_{i_1 < \dots < i_p} M_{i_1 \dots i_p} e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_p},$$

где $(e_1, \dots, e_n)$ - базис пространства V. $M_{i_1 \dots i_p}$, где $i_1 < \dots < i_p$, называются плюккеровыми координатами подпространства U. Они однозначно определяют подпространство, но сами они однородны.
$a_i = \sum\limits_j a_{ij} e_j,\ A_{p \times n} = (a_{ij})$. $M_{1 \dots p} = \sum\limits_{\sigma \in S_p} (\operatorname{sgn} \sigma) \cdot a_{1\sigma(1)} \dots a_{p\sigma(p)}$ - угловой минор матрицы A. Таким образом, $M_{i_1 \dots i_p}$ - тоже минор, образованный столбцами $i_1, \dots, i_p$.
Def. $p-$вектор, представимый в виде $a_1 \wedge \dots \wedge a_p$, где $a_1, \dots, a_p \in V$, называется разложимым.
Только разложимые $p-$векторы соответствуют подпространствам.

63 Канонический вид и критерий разложимости бивектора.

Пусть $b \in \Lambda^2(V)$. Это можно рассматривать как кососимметрическую билинейную функцию на V^*.
$b(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = b_{ij}, \quad B = (b_{ij})$ - матрица бивектора. Она кососимметрическая.
Лемма. $b = \sum\limits_{i,j} b_{ij} e_i \wedge e_j$.
Доказательство. Найдём матрицу бивектора $e_i \wedge e_j$:

$$(e_i \wedge e_j)(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = -(e_i \wedge e_j)(\varepsilon_j, \varepsilon_i) = \frac{1}{2} e_i(\varepsilon_i) e_j(\varepsilon_j) = \frac{1}{2}.$$

Получаем $\frac{1}{2} b_{ij}$. Но в сумме будет b_{ij}, как раз. **Q.E.D.**
Теорема. $\forall b \in \Lambda^2(V)$ существует симплектический базис.
Доказательство. Вытекает из соответствующей теоремы. **Q.E.D.**
Теорема. Следующие условия эквивалентны:

1. Бивектор b разложим;

2. $\operatorname{rk} b \leqslant 2$;

3. $b \wedge b = 0$.

Доказательство. Пусть b разложим. Можно считать $b \neq 0$. Пусть $b = a_1 \wedge a_2$, и a_1, a_2 линейно независимы. Дополним a_1, a_2 до базиса $(e_1, \ldots, e_n)$ пространства V: $a_1 = e_1,\ a_2 = e_2$. Тогда $b = e_1 \wedge e_2$. Значит, $\operatorname{rk} b = 2$ и $b \wedge b = 0$.
Пусть b неразложим. Тогда существует базис, в котором

$$b = e_1 \wedge e_2 + e_3 \wedge e_4 + \cdots + e_{2k-1} \wedge e_{2k},$$

где $k \geqslant 2$ (иначе b разложим). Поэтому $\operatorname{rk} b = 2k > 2, \quad b \wedge b = 2e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 \wedge e_4 + \cdots \neq 0$.

64 Определитель как единственная кососимметрическая $n-$линейная функция в $n-$мерном пространстве.

Как известно, $\dim \Lambda_p(V) = C_n^p$, то есть $\dim \Lambda_(V) = 1$. Поэтому кососимметрическая $n-$линейная функция в $n-$мерном пространстве единственна с точностью до умножения на число.
Рассмотрим определитель n векторов в пространстве V: $a_1, \ldots, a_n$ — пусть $(e_1, \ldots, e_n)$ - фиксированный базис пространства V, тогда составим определитель координат $\det(a_{ij})$ - первая цифра означает номер вектора, вторая - номер координаты. При переходе к другому базису определитель (как кососимметрическая $n-$линейная функция в $n-$мерном пространстве) умножается на определитель матрицы перехода.