Задачи к коллоквиуму №3

I семестр, I поток, весна 2007 г.

ВНИМАНИЕ! АВТОР НЕ НЕСЁТ ОТВЕТСТВЕННОСТИ ЗА ЛЮБЫЕ ПОСЛЕДСТВИЯ, КОТОРЫЕ ПРЯМЫМ ИЛИ КОСВЕННЫМ ОБРАЗОМ МОГУТ БЫТЬ ВЫЗВАНЫ ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ВСЕГО НИЖЕНАПИСАННОГО ПО НАЗНАЧЕНИЮ И НЕТ!

1. Пусть $f(x) \in \mathcal{R}[a;b]$. Доказать, что точки непрерывности функции $f(x)$ на этом отрезке образуют сюду плотное множество.

Доказательство. Заметим, что если говорится о том, что функция интегрируема на отрезке, то она определена всюду на нём, за исключеним, быть может, конечного числа точек.

От противного: пусть существует такой отрезок или интервал $I, \quad |I| = \delta$, что f разрывна всюду на нём. Тогда для любого разбиения отрезка $[a;b]$ оценим величину $\Omega(T)$. Разобъём её на два слагаемых: $\Omega'(T)$ и $\Omega''(T)$. Во вторую сумму войдут все те слагаемые вида $\omega_k \cdot \Delta x_k$, для которых $\Delta_k \cap I \neq \varnothing$. Заметим, что $\omega_k \geqslant m$ для всех точек, лежащих внутри I, а сумма длин Δ_k больше δ. Поэтому и вся $\Omega(T) \geqslant m\delta$, что противоречит тому, что функция $f(x)$ интегрируема на этом отрезке. □

2. Пусть $f(x) \in \mathcal{R}[a;b]$. Доказать, что $\int\limits_a^b f^2(x)dx = 0 \quad \Leftrightarrow \quad f \equiv 0$ во всех точках её непрерывности.

Доказательство. В обратную сторону утверждение доказывается тривиальным образом, поэтому нас будет интересовать только доказательство «слева направо». От противного: пусть $f(x_0) = m \neq 0$ в какой-то точке своей непрерывности. Тогда $f^2(x_0) = m^2 > 0$, и, следовательно, искомый интеграл не равен нулю.

Доказательство вспомогательного утверждения: пусть x_0 точка непрерывности функции $g(x)$, $g(x_0) > 0$. Значит $\exists \delta > 0 \quad \forall x \colon |x - x_0| < \delta \quad \Rightarrow \quad g(x) > g(x_0)/2$. Значит для всех разбиений диаметром, меньших $\delta/2$, интегральная сумма будет не меньше $\frac{\delta g(x_0)}{2}$. □

3. Пусть $f(x) \in \mathcal{R}[a;b]$. Доказать, что $\lim\limits_{h \to 0} \int\limits_a^b |f(x+h) - f(x)|dx = 0$.

Доказательство. Разделим отрезок $[a;b]$ на $n = \left[\frac{b-a}{h}\right]$ равных частей. Самые крайние отрезки нас интересовать не будут, а для каждого из внутренних мы имеем следующее равенство:

$$\sup_{x \in \Delta_i} |f(x+h) - f(x)| \leqslant \omega_{i-1} + \omega_i + \omega_{i+1}.$$

Умножим обе части неравенства на $h > 0$ и просуммируем по всем i:

$$\sum_{i=1}^{n} h \sup_{x \in \Delta_i} |f(x+h) - f(x)| \leqslant 3 \sum_{i=1}^{n} h\omega_i$$

Устремив $n \to \infty$, что то же самое, что и $h \to 0$, получаем $\int\limits_a^b |f(x+h) - f(x)|dx < 3\varepsilon$, так как $\sum\limits_{i=1}^{n} h\omega_i$ есть выражение $\Omega(T)$ для функции $f(x)$, которое стремится к нулю, так как $f(x) \in \mathcal{R}[a;b]$. □

4. Найти $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(\sin\frac{\pi}{n}+\cdots+\sin\frac{(n-1)\pi}{n}\right)$

Доказательство. Воспользуемся специальным критерием интегрируемости. «Подпредельное» выражение есть не что иное, как верхняя или нижняя сумма Дарбу с некоторыми вариациями для функции $f(x) = \sin x$ на отрезке $[0;\pi]$. Поэтому искомый предел равен $\int\limits_0^\pi \sin x dx = \frac{2}{\pi}$. □

5. Пусть $f(x) \in \mathcal{C}[a;b]$ и $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A$. Найти $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_0^1 f(nx)dx$.

Доказательство. Опять воспользуемся специальным критерием интегрируемости:

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_0^1 f(nx)dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^n \frac{1}{n}\cdot f(k) = \lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{k=1}^n f(k)}{n}$$

Последний предел по теореме Штольца равен A. □

6. Пусть $f(x)$ – непрерывная периодическая функция с периодом T. Доказать, что функцию $F(x) = \int\limits_a^x f(u)du$ можно представить в виде суммы линейной функции и периодической функции с периодом T.

Доказательство. Обозначим $b = a+T$ и введём $g(u) = f(u) - \frac{\int\limits_a^b f(u)du}{b-a}$ (*); $\quad G(x) = \int\limits_a^x g(u)du$.

Очевидно, что $G(a) = G(b) = \int\limits_a^b g(u)du = 0$, что означает, что $G(x)$ периодична с периодом T.

В таком случае, если проинтегрировать выражение (*), то после группировки слагаемых нужным образом получаем $F(x) = G(x) + k(x-a)$, что является суммой периодичной и линейной функций. □

7. Пусть $f(x)$ – многочлен степени, большей 1. Доказать, что $\int\limits_0^\infty \sin f(x)dx$ сходится.

Доказательство. Очевидно, что для любого многочлена $f(x)$ существует такое число x_0, начиная с которого $f(x)$ монотонна. Разобьём исходный интеграл на два: $\int\limits_0^\infty \sin f(x)dx = {}$ $= \int\limits_0^{x_0} \sin f(x)dx + \int\limits_{x_0}^\infty \sin f(x)dx$, первый из которых очевидно существует и равен какому-то числу A.

Рассмотрим второй интеграл. Домножим и разделим подынтегральное выражение на $f'(x)$. Получим $\int\limits_{x_0}^\infty \frac{\sin f(x)\, df(x)}{f'(x)}$. Без лишних слов, по признаку Дирихле такой интеграл сходится. □

8. Пусть $f'(x)$ – монотонна и $|f'(x)| \geqslant A > 0$ на $[a;b]$. Доказать, что $\left|\int\limits_a^b \sin f(x)dx\right| \leqslant \frac{2}{A}$

Доказательство. Проделаем аналогичный трюк. Учитывая, что $\left|\int\limits_a^b \sin t\,dt\right| \leqslant 2$ имеем то, что требуется доказать. □

9. Пусть $f''(x)$ – непрерывна и $|f''(x)| \geqslant A > 0$ на $[a;b]$. Доказать, что $\left|\int\limits_a^b \sin f(x)dx\right| \leqslant \frac{6}{\sqrt{A}}$

Доказательство. Так как $f''(x)$ – непрерывна и по модулю больше какого-то числа, то $f'(x)$ монотонна на всём отрезке $[a;b]$. Разобъём отрезок $[a;b]$ на три части таким образом, что на первой и третьей части $|f'(x)| \geqslant \sqrt{A}$, а на второй $|f'(x)| < \sqrt{A}$.

По предыдущей задаче

$$\left|\int\limits_a^c \sin f(x)dx + \int\limits_d^b \sin f(x)dx\right| \leqslant \frac{4}{\sqrt{A}}.$$

Грубо оценим теперь значение $\left|\int\limits_c^d \sin f(x)dx\right| \leqslant d-c$, так как $|\sin x| \leqslant 1$. Далее улучшим эту оценку следующим образом: $\frac{2\sqrt{A}}{d-c} = \left|\frac{f'(d)-f'(c)}{d-c}\right| = |f''(\xi)| \geqslant A$ (такое ξ существует по теореме Лагранжа). Отсюда получаем, что $d-c \leqslant \frac{2}{\sqrt{A}}$, а, следовательно, весь интеграл меньше либо равен $\frac{6}{\sqrt{A}}$. □

10. Пусть $f(x)$ монотонна на интервале $(0;a)$ и существует интеграл $\int\limits_0^a x^p f(x)dx$. Доказать, что $\lim\limits_{x\to+0} x^{p+1}f(x) = 0$. Тогда

11. Пусть $f(x) \in \mathcal{R}[a;b]$. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_a^b f(x)\sin nx\,dx = 0$

12. Пусть $f(x) \in \mathcal{R}[a;b]$. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_a^b f(x)|\sin nx|dx = \frac{2}{\pi}\int\limits_a^b f(x)dx$

13. Пусть $f(x) \in \mathcal{R}[0;1]$. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2}{n}\sum\limits_{\nu=1}^{[n/2]} f\left(\frac{2\nu-1}{n}\right) = \int\limits_0^1 f(x)dx$

Доказательство. Так как дано, что функция уже является интегрируемой по Риману, то выполняется миллион замечательных свойств, из которых и следует то, что надо доказать. □

14. Пусть $f(x) \in \mathcal{R}[0;1]$. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{f(1/n)-f(2/n)+\dots+(-1)^n f((n-1)/n)}{n} = 0$

Доказательство. Разобъём «подпредельное» выражение на два очевидным образом. Тогда очевидно, что оба слагаемых будут являться интегральной суммой для функции $f(x)$ на отрезке $[0;1]$, где $\Delta_V = \frac{2}{n}$, а $\xi_i = \frac{2i+1}{n}$ или $\xi_i = \frac{2i}{n}$, $i \in \{0, 1, \dots, [n/2]\}$ (см. пред. задачу). В таком случае, так как $f(x) \in \mathcal{R}[a;b]$, то обе этих суммы при $n \to \infty$ будут сходиться к $I = \int\limits_0^1 f(x)dx$, а их разность, следовательно, к нулю. □

15. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\binom{n}{0}\binom{n}{1}\binom{n}{2}\dots\binom{n}{n}\right)^{2/(n(n+1))}=e$

Доказательство. Само собой разумеется, прологарифмируем обе части и рассмотрим предел

$$\lim_{n\to\infty}\ln\left(\binom{n}{0}\binom{n}{1}\binom{n}{2}\dots\binom{n}{n}\right)^{2/(n(n+1))}=2\lim_{n\to\infty}\frac{\ln\binom{n}{0}+\ln\binom{n}{1}+\dots+\ln\binom{n}{n}}{n(n+1)}=$$
$$=2\lim_{n\to\infty}\frac{\ln\binom{n+1}{0}+\ln\binom{n+1}{1}+\dots+\ln\binom{n+1}{n+1}-\ln\binom{n}{0}-\ln\binom{n}{1}-\dots-\ln\binom{n}{n}}{(n+1)(n+2)-n(n+1)}=$$
$$=2\lim_{n\to\infty}\frac{\ln\left(\binom{n+1}{0}/\binom{n}{0}\right)+\ln\left(\binom{n+1}{1}/\binom{n}{1}\right)+\dots+\ln\left(\binom{n+1}{n}/\binom{n}{n}\right)}{(n+1)(n+2)-n(n+1)}=\dots$$

Переход от первой строки ко второй был выполнен по теореме Штольца. Отдельно вычислим $\binom{n+1}{k}/\binom{n}{k}=\frac{(n+1)!}{k!\cdot(n-k+1)!}\cdot\frac{k!\cdot(n-k)!}{n!}=\frac{n+1}{n-k+1}$

$$\dots=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln\frac{n+1}{1}+\ln\frac{n+1}{2}+\dots+\ln\frac{n+1}{n}+\ln\frac{n+1}{n+1}}{n+1}=$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left(\ln\frac{n+2}{1}-\ln\frac{n+1}{1}+\dots+\ln\frac{n+2}{n+1}-\ln\frac{n+1}{n+1}+\ln\frac{n+2}{\ln n+2}\right)=$$
$$=\lim_{n\to\infty}(n+1)\ln\frac{n+2}{n+1}$$

Переход здесь от первой строки ко второй был также выполнен по теореме Штольца. Далее рассмотрим предел $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln\frac{x+2}{x+1}}{x^{-1}}$. По правилу Лопиталя этот предел равен 1, а значит по Гейне имеем, что любая бесконечно большая последовательность сходится к нему, в том числе и последовательность натуральных чисел. Следовательно, искомый предел равен 1, потенцируя получаем ответ: e.

P.S. И причём тут интегралы? □

16. Доказать формулу Валлиса $\pi=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^2\frac{1}{n}$, интегрируя по отрезку $[0;\pi/2]$ неравенство $\sin^{2n+1}x\leqslant\sin^{2n}x\leqslant\sin^{2n-1}x$.

Доказательство. Пусть $a_n=\int\limits_a^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x dx=-\sin^{n+1}\cos(x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+(n-1)\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 x\sin^{n-2}dx=$
$=(n-1)\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin^2 x)\sin^{n-2}dx$. Таким образом мы получили рекуррентную зависимость $a_n=\frac{(n-1)a_{n-2}}{n}$. В явном виде, учитывая $a_0=\frac{\pi}{2}$ и $a_1=1$, получаем $a_{2k}=\frac{(2k-1)!!}{(2k)!}\frac{\pi}{2}$ и $a_{2k+1}=\frac{(2k)!!}{(2k+1)!!}$.

Таким образом, так как $a_{2n+1}\leqslant a_{2n}\leqslant a_{2n-1}$, что тоже самое, что и $\frac{2n}{2n+1}\leqslant\frac{a_{2n}}{a_{2n-1}}\leqslant 1$. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n}{2n+1}=1$, то есть и $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{2n}}{a_{2n-1}}=1=\frac{\pi}{2}\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{(2n-1)!!}{(2n-2)!!}=\pi\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right)^2\cdot n$, откуда следует то, что и требуется доказать. □

17. Пусть функция $f(x)$ ограничена. Доказать, что для того, чтобы $f \in \mathcal{R}[a;b]$ необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ и любого $\delta > 0$ множество точек отрезка $[a;b]$, в которых $f(x)$ имеет колебание больше, чем ε, можно было покрыть конечным числом интервалов, сумма длин которых меньше δ (критерий Дюбуа – Реймона).

Доказательство. Рассмотрим множество точек $\mathbf{D}$, в которых колебание функции $\omega_k(x) > > \varepsilon$. Покажем, что это множество имеет меру Лебега нуль, т.е. $\mu(\mathbf{D}) = 0$. Это и будет означать, что функция $f(x)$ интегрируема по Риману, потому что во всех остальных точках она будет непрерывна.

Условие, что это множество можно покрыть конечным числом интервалов, общей длиной меньше δ и означает, что оно имеет меру Лебега нуль.

Примечание: при доказательстве необходимости следует воспользоваться леммой Бореля для выделения конечного покрытия из счётного. ☐

18. Пусть $f, g \in \mathcal{R}[a;b]$. Доказать, что $\max(f,g) \in \mathcal{R}[a;b]$ и $\min(f,g) \in \mathcal{R}[a;b]$.

Доказательство. Известно, что если функции f и g интегрируемы, то также интегрируемы функции $|f|$ и $f \pm g$. Остаётся воспользоваться выражениями $\max(f,g) = \frac{f+g+|f-g|}{2}$ и $\min(f,g) = \frac{f+g-|f-g|}{2}$. ☐

19. Пусть $u(t), v(t) \in \mathcal{C}[a;b]$ и $\int\limits_a^b (u(t)x'(t) + v(t)x(t))\,dt = 0 \quad \forall x(t) \in \mathcal{C}^{-1}[a;b], x(a) = x(b) = 0$. Доказать, что функция $u(t)$ дифференцируема и $u'(t) = v(t)$.

Доказательство. Возьмём такую функцию $w(t)$, что $w'(t) = v(t)$, и рассмотрим

$$\int\limits_a^b v(t)x(t)dt = w(t)x(t)\Big|_a^b - \int\limits_a^b w(t)x'(t)dt$$

Так как $x(a) = x(b) = 0$, то получаем, что $\int\limits_a^b \big(w(t)x'(t) + v(t)x(t)\big)dt = 0$. Учитывая равенство данного нам интеграла нулю, получаем, что $\int\limits_a^b x'(t)\big(u(t) - w(t)\big)dt = 0$. Так как функции $x'(t), u(t)$ и $w(t)$ непрерывные, и это равенство верно для любых $x(t)$, то это означает, что $u(t) \equiv w(t)$. ☐

20. Доказать, что при $s > 1$ верно $\zeta(s) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{-s} = s\int\limits_1^{\infty} \frac{\rho(x)}{x^{s+1}}dx + \frac{1}{s-1} + \frac{1}{2}$, $\rho(x) = \frac{1}{2} - \{x\}$.

Доказательство. Воспользуемся формулой суммирования Эйлера

$$\sum_{a<m\leqslant x} f(m) - \rho(x)f(x) = \int\limits_a^x f(u)du - \int\limits_a^x \rho(u)f'(u)du - \rho(a)f(a).$$

В данном случае $f(x) = x^{-s}, \quad f'(x) = -\frac{s}{x^{s+1}}$. Тогда можем записать

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sum_{1<m<x} m^{-s} - \rho(x)x^{-s}\right) = \int\limits_1^{\infty} x^{-s}dx + s\int\limits_1^{\infty}\frac{\rho(x)}{x^{s+1}}dx - \frac{1}{2}$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} m^{-s} = s\int\limits_{1}^{\infty}\frac{\rho(x)}{x^{s+1}}dx + \frac{1}{s-1} + \frac{1}{2}$$

$\square$

21. Доказать, что $\lim\limits_{s\to 1+}\left(\zeta(s) - \frac{1}{s-1}\right) = \gamma$

22. Пусть $f(x) > 0$ и не убывает на $[1;+\infty)$, и пусть при $x \to +\infty$ справедливо соотношение $\int\limits_{1}^{x}\frac{f(u)}{u}du \sim x$. Доказать, что $f(x) \sim x$ при $x \to +\infty$

23. Пусть $f(x) \geqslant 0$ на $[0;+\infty)$, и пусть при $\delta \to 0+$ справедливо равенство $\int\limits_{0}^{\infty} f(t)e^{-\delta t}dt \sim \frac{1}{\delta}$.

24. Пусть $f(x) \geqslant 0$ на $[a;b]$ и $f \in \mathcal{C}[a;b]$. Доказать, что

$$\lim_{n\to\infty}\left(\int\limits_{a}^{b} f^n(x)dx\right)^{1/n} = \sup_{x\in[a;b]} f(x).$$

Доказательство. Очевидно, что исходный предел меньше либо равен $\sup\limits_{x\in[a;b]} f(x)$. Докажем, что для $\forall\varepsilon > 0\ \exists n \left(\int_a^b f^n(x)dx\right)^{1/n} > \sup\limits_{x\in[a;b]} f(x) - \varepsilon$. Так как функция непрерывна на $[a;b]$, то по теореме Вейерштрасса она достигает своего максимума в какой-то точке x_0. В таком случае, существует δ-окрестность, что $\forall x \in (x_0 - \delta; x_0 + \delta) \quad f(x) > M - \frac{\varepsilon}{2}$.

$$M - \varepsilon < M - \frac{\varepsilon}{2} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\delta(M-\varepsilon/2)^n} \leqslant \lim_{n\to\infty}\left(\int\limits_{a}^{b} f^n(x)dx\right)^{1/n}$$

$\square$

Борис Агафонцев, 102 группа

Контакты: ICQ #216-059-136
или e-mail: agava@zelnet.ru

Верстка в $\LaTeX\,2_\varepsilon$.