Лекция 1. Скалярные поля

1.1. Вещественное скалярное поле. Лагранжиан, уравнение, решения. Пусть в каждой системе отсчета (в каждой системе ортонормированных координат) задана вещественнозначная функция $\varphi(x)$, причем для ортонормированных координат x' и x, связанных соотношением $x' = \Lambda x + b$, где Λ — элемент группы Лоренца, а b — четырехмерный вектор, выполняется равенство $\varphi'(x') = \varphi'(\Lambda x + b) = \varphi(x)$. В этом случае мы говорим о *вещественном скалярном поле*.

Свободное вещественное скалярное поле φ по определению задаётся лагранжианом

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\,\partial_\mu\varphi\partial^\mu\varphi - \frac{m^2}{2}\,\varphi^2.$$

Уравнение Эйлера–Лагранжа

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi} - \partial_\mu\,\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial_\mu\varphi} = 0.$$

для такой функции $\mathcal{L}$, как нетрудно проверить, имеет вид

$$-m^2\varphi - \partial_\mu\partial^\mu\varphi = 0.$$

Дифференциальный оператор $-\partial_\mu\partial^\mu$ называется оператор Даламбера и обозначается $\Box$. Уравнение

$$(\Box - m^2)\,\varphi = 0 \tag{1}$$

называется *уравнением Клейна—Гордона—Фока.*

Упражнение 1. Проверьте, что и лагранжиан свободного скалярного поля, и уравнение Клейна—Гордона—Фока инвариантны относительно действия группы Лоренца (Пуанкаре).

Теорема. *Решения уравнения* (1) *имеют вид*

$$\varphi(x) = \varphi^+(x) + \varphi^-(x),$$

где

$$\varphi^\pm(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int d^3\mathbf{k}\,\frac{e^{\pm ikx}}{\sqrt{2k_0}}\,a^\pm(\mathbf{k}), \tag{2}$$

где k_0 *— функция* $k_0 = \sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2}$ *от* $\mathbf{k}$, *а* $a^\pm(\mathbf{k})$ *— произвольные функции.*

Замечание. Здесь используются следующие стандартные обозначения: $k = (k^0, \mathbf{k})$, $\mathbf{k} = (k^1, k^2, k^3)$, $k_0 = k^0$ и $k_i = -k^i$ при $i = 1, 2, 3$. Произведение kx в экспоненте понимается как скалярное произведение в метрике Минковского: $kx = k_\mu x^\mu = k^\mu x_\mu = k^0x^0 - \mathbf{k}\cdot\mathbf{x}$.

Замечание. Кончено же можно было бы утверждать, что

$$\varphi^\pm(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int d^3\mathbf{k}\,e^{\pm ikx}b^\pm(\mathbf{k}),$$

где $b^\pm(\mathbf{k}) = \dfrac{a^\pm(\mathbf{k})}{\sqrt{2k_0}}$. Мы отдаем предпочтение формуле (2), потому что потом получим более простые формулы для P^μ, чем те, что получились бы, если бы мы пользовались формулой без $\sqrt{2k_0}$.

Замечание. Как будет ясно из доказательства, разложение функции φ в сумму $\varphi^+ + \varphi^-$ инвариантно относительно преобразований Λ из группы Лоренца, не обращающих направление времени, т. е. для которых $\Lambda_0^0 > 0$. Если же число $\Lambda_0^0 < 0$, то слагаемые φ^+ и φ^- меняются местами.

Доказательство. Рассмотрим преобразование Фурье функции $\varphi(x)$:

$$\varphi(x) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^4k \, e^{ikx} \widetilde{\varphi}(k).$$

Вспомним про то, что функция $\varphi(x)$ является решением уравнения

$$(\Box - m^2)\,\varphi(x) = 0.$$

Следовательно, образ $\widetilde{\varphi}(k)$ является решением уравнения

$$(k^2 - m^2)\,\widetilde{\varphi}(k) = 0.$$

Функция $k^2 - m^2$ на пространстве Минковского отлична от нуля на всюду плотном открытом множестве, а именно, вне поверхности $k^2 = m^2$, представляющей собой гиперболоид. Значит, вне гиперповерхности $k^2 = m^2$ должно быть выполнено равенство $\widetilde{\varphi}(k) = 0$. Но если функция $\widetilde{\varphi}(k)$ непрерывна, то тогда она может быть только нулевой. Значит, надо искать решение в классе обобщённых функций.

Будем искать $\widetilde{\varphi}(k)$ в виде функции

$$\widetilde{\varphi}(k) = \sqrt{2\pi}\,\delta(k^2 - m^2)\,\Phi(k),$$

где Φ — обобщённая функция без сингулярностей на гиперповерхности $k^2 = m^2$. Тогда

$$\varphi(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^4 \, e^{ikx}\,\delta(k^2 - m^2)\,\Phi(k).$$

Такой выбор множителя, содержащего 2π обусловлен, в частности, упрощением формул для вектора энергии–импульса, о котором речь будет идти ниже в этой лекции.

Упражнение 2. Пусть $f(x) \in C^\infty(\mathbb{R})$. Предположим, что $f(x)$ имеет лишь конечное число нулей $x_1, \ldots, x_n$, причем все они однократные. Тогда

$$\delta\big(f(x)\big) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\delta(x - x_i)}{|f'(x_i)|}. \tag{3}$$

Применяя утверждение задачи к $\delta(k^2 - m^2)$ как функции от k_0, получаем равенство

$$\delta(k^2 - m^2) = \frac{\delta\big(k_0 - \sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2}\,\big)}{2\sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2}} + \frac{\delta\big(k_0 + \sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2}\,\big)}{2\sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2}}. \tag{4}$$

Замечание. Нетрудно проверить, что это разложение инвариантно относительно преобразований из группы Лоренца, не обращающих время, т. е. относительно тех, для которых $\Lambda_0^0 > 0$. При преобразованиях из группы Лоренца с $\Lambda_0^0 < 0$ слагаемые меняются местами.

Итак, функция $\varphi(x)$ разложена в сумму двух слагаемых $\varphi^+(x)$ и $\varphi^-(x)$. Преобразуем их одновременно, используя знаки $\pm$ и $\mp$ (читать нужно либо одновременно верхние, либо одновременно нижние знаки):

$$\varphi^{\pm}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^4k\, e^{ikx}\, \frac{\delta\big(k_0 \mp \sqrt{\mathbf{k}^2+m^2}\,\big)}{2\sqrt{\mathbf{k}^2+m^2}}\, \Phi(k) =$$
$$= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3\mathbf{k} \frac{e^{i\,(\pm\sqrt{\mathbf{k}^2+m^2}\,x_0 - \mathbf{kx})}}{2\sqrt{\mathbf{k}^2+m^2}}\, \Phi\big(\pm\sqrt{\mathbf{k}^2+m^2}, \mathbf{k}\big). \tag{5}$$

В формуле для $\varphi^+(x)$ обозначим $k_0 = \sqrt{\mathbf{k}^2+m^2}$ и $a^+(\mathbf{k}) = \dfrac{\Phi(\sqrt{\mathbf{k}^2+m^2}, \mathbf{k})}{\sqrt{2\sqrt{\mathbf{k}^2+m^2}}}$, получим

$$\varphi^+(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3\mathbf{k}\, \frac{e^{i\,(k_0x_0 - \mathbf{kx})}}{2k_0}\, \Phi(k_0, \mathbf{k}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3\mathbf{k} \frac{e^{ikx}}{\sqrt{2k_0}}\, a^+(\mathbf{k}).$$

С формулой для $\varphi^-(x)$ потребуется чуть более длинное рассуждение. Снова положим $k_0 = \sqrt{\mathbf{k}^2+m^2}$, Получим

$$\varphi^-(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3\mathbf{k}\, \frac{e^{i\,(-\sqrt{\mathbf{k}^2+m^2}\,x_0 - \mathbf{kx})}}{2\sqrt{\mathbf{k}^2+m^2}}\, \Phi\big(-\sqrt{\mathbf{k}^2+m^2}, \mathbf{k}\big) =$$
$$= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3\mathbf{k}\, \frac{e^{i\,(-k_0x_0 - \mathbf{kx})}}{2k_0}\, \Phi\big(-k_0, \mathbf{k}\big).$$

В последнем интеграле стоящее в показателе экспоненты выражение не совпадает с $-kx$. Чтобы привести его к такому виду, сделаем в интеграле замену переменных $\mathbf{k}$ на $-\mathbf{k}$. k_0 как функция от $\mathbf{k}$ не изменится. Получим

$$\varphi^-(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3\mathbf{k}\, \frac{e^{i\,(-k_0x_0 + \mathbf{kx})}}{2k_0}\, \Phi\big(-k_0, -\mathbf{k}\big).$$

Осталось положить $a^-(\mathbf{k}) = \dfrac{\Phi\big(-k_0, -\mathbf{k}\big)}{\sqrt{2k_0}}$. Тогда

$$\varphi^-(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3\mathbf{k}\, \frac{e^{-ikx}}{\sqrt{2k_0}}\, a^-(\mathbf{k}),$$

что и требовалось. □

1.2. Комплексное скалярное поле. Лагранжиан, уравнение, решения.

Теперь будем рассматривать комплексное скалярное поле $\varphi(x) = \varphi_1(x) + i\varphi_2(x)$. Комплексное сопряжение и транспонирование будем обозначать звездочкой. В одномерном случае транспонирование ничего не меняет, однако мы будем придерживаться стандартных обозначений, принятых в физике, зарезервировав $\bar{\psi}$ для обозначения дираковского сопряжения, которое нам понадобится при обсуждении спинорного поля.

Лагранжиан комплексного свободного скалярного поля по определению имеет вид

$$\mathcal{L} = \partial_\mu\varphi^*\partial^\mu\varphi - m^2\varphi^*\varphi. \tag{6}$$

Для вывода уравнений этого поля нужно применить теорему об уравнении Эйлера—Лагранжа из лекции. Из-за того, что лагранжиан комплексного поля не является комплексно–дифференцируемым, для него не справедливо разложение в ряд Тейлора в форме

$$\mathcal{L}(\varphi+h,\partial_\mu\varphi+\partial_\mu h)=\mathcal{L}(\varphi,\partial_\mu\varphi)+\frac{\partial\mathcal{L}(\varphi,\partial_\mu\varphi)}{\partial\varphi}\,h+\frac{\partial\mathcal{L}(\varphi,\partial_\mu\varphi)}{\partial(\partial_\nu\varphi)}\,\partial_\nu h+O(\|h\|^2),$$

поэтому дословно повторить доказательство теоремы об уравнении Эйлера—Лагранжа, считая, что φ принимает значения в одномерном комплексном пространстве, не получится. Чтобы вывести уравнение комплексного скалярного поля, мы можем поступить двумя способами. Во–первых, можно разделить в $\varphi(x)$ вещественную и мнимую части $\varphi(x)=\operatorname{Re}\varphi(x)+i\operatorname{Im}\varphi(x)$, выразить лагранжиан через $\operatorname{Re}\varphi(x)$ и $\operatorname{Im}\varphi(x)$, а затем, считая, что функция $\varphi(x)$ принимает значения в двумерном вещественном пространстве, применить теорему об уравнении Эйлера—Лагранжа и получить уравнения на $\operatorname{Re}\varphi(x)$ и $\operatorname{Im}\varphi(x)$. Второй способ несколько более изящный. Он использует стандартный прием из комплексного анализа, когда приходится иметь дело не с комплексно–дифференцируемыми функциями, а лишь с вещественно дифференцируемыми. Лагранжиан $\mathcal{L}$ как функция переменных $\varphi,\varphi^*,\partial_\mu\varphi,\partial_\mu\varphi^*$ является гладким, поэтому для него справедливо разложение в ряд Тейлора вида

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(\varphi+h,\partial_\mu\varphi+\partial_\mu h)=&\mathcal{L}(\varphi,\partial_\mu\varphi)+\frac{\partial\mathcal{L}(\varphi,\partial_\mu\varphi)}{\partial\varphi}\,h+\frac{\partial\mathcal{L}(\varphi,\partial_\mu\varphi^*)}{\partial\varphi^*}\,h^*+\\&+\frac{\partial\mathcal{L}(\varphi,\partial_\mu\varphi)}{\partial(\partial_\nu\varphi)}\,\partial_\nu h+\frac{\partial\mathcal{L}(\varphi,\partial_\mu\varphi^*)}{\partial(\partial_\nu\varphi)}\,\partial_\nu h^*+O(\|h\|^2),\end{aligned}$$

Тогда приращение функционала действия с точностью до $O(\|h\|^2)$ можно представить в виде интеграла от

$$\left(\frac{\partial\mathcal{L}(\varphi,\partial_\nu\varphi)}{\partial\varphi}-\partial_\mu+\frac{\partial\mathcal{L}(\varphi,\partial_\nu\varphi)}{\partial(\partial_\mu\varphi)}\right)\,h+\left(\frac{\partial\mathcal{L}(\varphi,\partial_\nu\varphi)}{\partial\varphi^*}-\partial_\mu+\frac{\partial\mathcal{L}(\varphi,\partial_\nu\varphi)}{\partial(\partial_\mu\varphi^*)}\right)\,h^*.$$

Теперь взяв в качестве произвольную вариации вещественную функцию h, получим, что сумма двух выражений, стоящих в скобках, должна быть равна 0, а взяв в качестве h чисто мнимую функцию, получим, что равна нулю их разность. Отсюда следует, что выражения стоящие в скобках равны нулю по-отдельности. Подставив в качестве $\mathcal{L}$ наш лагранжиан, получим уравнения комплексного скалярного поля

$$(\Box-m^2)\,\varphi=0, \tag{7}$$
$$(\Box-m^2)\,\varphi^*=0. \tag{8}$$

Решения этих уравнений выглядят почти так же, как и для вещественного поля, а именно,

$$\varphi(x)=\varphi^+(x)+\varphi^-(x),\quad \overset{*}{\varphi}(x)=\overset{*}{\varphi}{}^+(x)+\overset{*}{\varphi}{}^-(x), \tag{9}$$

где

$$\varphi^\pm(x)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int d^3\mathbf{k}\,\frac{e^{\pm ikx}}{\sqrt{2k_0}}\,a^\pm(\mathbf{k}), \tag{10}$$

$$\overset{*}{\varphi}{}^\pm(x)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int d^3\mathbf{k}\,\frac{e^{\pm ikx}}{\sqrt{2k_0}}\,\overset{*}{a}{}^\pm(\mathbf{k}). \tag{11}$$

Упражнение 3. Доказать, что функции $a^{\pm}(k)$ и $\overset{*}{a}{}^{\pm}(k)$ должны удовлетворять соотношениям $\big(a^{\pm}(\mathbf{k})\big)^* = \big(\overset{*}{a}(\mathbf{k})\big)^{\mp}$.

1.3. Вектор энергии–импульса

Как мы хорошо знаем, закон сохранения энергии следует из того, что действие не меняется при сдвигах времени, а закон сохранения импульса — из того, что действие инвариантно при сдвигах по пространству. В релятивистском подходе нам придется объединить эти величины в один четырехмерный вектор, потому что ось времени меняется при действии группы Лоренца.

Зафиксируем произвольные вектор $e \in M^4$. Рассмотрим однопараметрическую группу

$$\Phi_\tau u(x) = u(x+\tau e). \tag{12}$$

Рассматриваемые в теории поля лагранжианы явно не зависят от координат (x) в пространстве Минковского. Проверим для произвольного лагранжиана с таким свойством условия теоремы Нетер.

Проверим условия теоремы Нётер:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial\tau}\bigg|_{\tau=0} &\mathcal{L}(u(x+\tau e), \partial_\mu u(x+\tau e)) = \\
&= \frac{\partial\mathcal{L}(u(x),\partial_\mu u(x))}{\partial u}\,\partial_\nu u e^\nu + \frac{\mathcal{L}(u(x),\partial_\mu u(x))}{(\partial_\mu u)}\partial_\nu\partial_\mu u e^\nu = \\
&= e^\nu\left(\frac{\mathcal{L}(u(x),\partial_\mu u(x))}{\partial u}\,\partial_\nu u + \frac{\mathcal{L}(u(x),\partial_\mu u(x))}{\partial(\partial_\mu u)}\,\partial_\nu\partial_\mu u\right) = \\
&= \partial_\nu(e^\nu \mathcal{L}(u(x),\partial_\nu u(x))).
\end{aligned} \tag{13}$$

Для рассматриваемой однопараметрической группы сдвигов условия теоремы Нетер выполнены, поэтому имеется ток Нетер

$$j^\mu = \Pi^\mu(\partial_\nu u e^\nu) - e^\mu\mathcal{L} == \Pi^\mu\partial^\nu u e_\nu - g^{\mu\nu}e_\nu\mathcal{L} = (\Pi^\mu\partial^\nu u - g^{\mu\nu}\mathcal{L})\,e_\nu. \tag{14}$$

Выражение $\Pi^\mu\partial^\nu u - g^{\mu\nu}\mathcal{L}$ обозначим через $T^{\mu\nu}$. Поскольку вектор e^ν произвольный, то по обратному тензорному признаку $T^{\mu\nu}$ является тензором. Он называется *тензором энергии–импульса*. Из теоремы Нетер следует, что для него выполнено соотношение $\partial_\mu T^{\mu\nu}$. Четырехмерный вектор

$$P^\nu = \int d^3\mathbf{x}\, T^{0\nu} \tag{15}$$

не зависит от координаты x^0, т. е. является динамическим инвариантом. Его нулевая компонента P^0 имеет смысл энергии, а (P^1, P^2, P^3) — сохраняющийся импульс. В другой системе отсчета (x') вектор $P^{\nu'}$ будет другим, он связан с P^ν стандартным тензорным законом.

Чуть позже мы получим выражения для P^ν для вещественного и комплексного скалярных полей.

1.4. Заряд комплексного поля. Рассмотрим произвольное комплексное поле. Предположим, что каждое слагаемое лагранжиана $\mathcal{L}$ содержит φ и $\overset{*}{\varphi}$ в одинаковых степенях. Таким свойством, в частности, обладает лагранжиан комплексного скалярного поля. Лагранжиан спинорного поля, о котором речь будет идти ниже, тоже удовлетворяет этому условию.

Рассмотрим однопарметрическую группу преобразований

$$\Phi_\tau \varphi(x) = e^{-i\tau} \varphi(x)$$
$$\Phi_\tau \overset{*}{\varphi}(x) = e^{i\tau} \overset{*}{\varphi}(x)$$

Наложенное на $\mathcal{L}$ условие гарантирует, что под действием этой однопараметрической группы лагранжиан не меняется, поэтому условия теоремы Нетер выполнены очевидным образом. Для упрощения формул положим

$$D = \frac{\partial}{\partial \tau}\bigg|_{\tau=0}. \tag{16}$$

В частности, $D\varphi(x) = -i\varphi(x)$, $D\overset{*}{\varphi}(x) = i\overset{*}{\varphi}(x)$.

Для тока Нетер, таким образом, получаем выражение

$$j^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi)}\, D\varphi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \overset{*}{\varphi})}\, D\overset{*}{\varphi} = i\Big(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \overset{*}{\varphi})}\, \overset{*}{\varphi} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi)}\, \varphi\Big). \tag{17}$$

В частности, для комплексного скалярного поля получаем

$$j^\mu = i\,(\partial^\mu \varphi\, \overset{*}{\varphi} - \partial^\mu \overset{*}{\varphi}\, \varphi). \tag{18}$$

Для любого комплексного поля с лагранжианом, обладающим указанным свойством, величина

$$Q = \int j^0\, d^3\mathbf{x} \tag{19}$$

имеет смысл электрического заряда.

1.5. Тензор углового момента. Эта сохраняющаяся величина в теории поля возникает из-за инвариантности функционала действия относительно преобразований из группы Лоренца. Сейчас мы вычислим эту величину для скалярных полей с лагранжианом достаточно общего вида. Оказывается, что она соответствует угловому моменту в классической механике. Однако для более сложных полей это утверждение может быть несправедливо. Например, для спинорного поля сохраняющаяся величина, которая возникает вследствие инвариантности действия $S[\psi]$ относительно лоренцевых поворотов, состоит из двух слагаемых: одно похоже на классический угловой момент, а второе — нет; оно получило интерпретацию как внутренний (орбитальный) угловой момент. В частности, так было объяснено, почему угловой момент электрона в два раза больше предсказанного классической механикой.

Пусть $Y \in T_E L$ — произвольная матрица из касательного пространства в единице к группе Лоренца. Тогда $e^{\tau Y} \in L$ для всех $\tau \in L$. В силу известного нам свойства $e^{\tau Y} e^{\sigma Y} = e^{(\tau+\sigma)Y}$ преобразования

$$\Phi_\tau u(x) = u(e^{\tau Y} x) \tag{20}$$

образуют однопарметрическую группу.

Условие $Y \in T_E$ на матричном языке равносильно кососимметричности матрицы $G_{1,3}Y$. Если положить $Y = (Y^\mu_\nu)$ и $G_{1,3} = (g_{\mu\nu}) = \mathrm{diag}\,(+1, -1, -1, -1)$, то произведению $G_{1,3}Y$ соответствует матрица $g_{\mu\beta}Y^\beta_\nu$. Условие кососимметричности принимает в таких обозначениях вид

$$g_{\mu\beta}Y^\beta_\nu + g_{\nu\beta}Y^\beta_\mu = 0. \tag{21}$$

Чтобы проверка условий теоремы Нетер не оказалась чересчур громоздкой проделаем некоторые вычисления заранее. Имеем равенство

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\Phi_\tau u(x) = \partial_\nu u(e^{\tau Y}x)\left(\frac{\partial}{\partial\tau}\,e^{\tau Y}x\right)^\nu,$$

где через $\left(\frac{\partial}{\partial\tau}\,e^{\tau Y}x\right)^\nu$ обозначена ν–тая координата вектора $\frac{\partial}{\partial\tau}\,e^{\tau Y}x$. Подставляя $\tau = 0$, получаем

$$Du = (Yx)^\nu\,\partial_\nu u = Y^\nu_\beta x^\beta \partial_\nu u. \tag{22}$$

Также легко видеть, что

$$\partial_\mu Du(x) = Y^\nu_\beta x^\beta \partial_\mu\partial_\nu u + Y^\nu_\mu \partial_\nu u \tag{23}$$

Теорема. *Пусть лагранжиан имеет вид*

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\,\partial_\mu u\,\partial^\mu u + V(u). \tag{24}$$

Тогда однопараметрическая группа (20) *удовлетворяет условиям теоремы Нетер. Соответствующий ток Нетер имеет вид*

$$M^{\mu\alpha\beta} = x^\alpha T^{\mu\beta} - x^\beta T^{\mu\alpha} \tag{25}$$

и удовлетворяет соотношению

$$\partial_\mu M^{\mu\alpha\beta} = 0. \tag{26}$$

Доказательство.

Нам понадобится следующее утверждение.

Лемма. *В условиях теоремы выполняется равенство*

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu u)}\partial_\alpha u Y^\alpha_\mu = 0. \tag{27}$$

Доказательство леммы. Воспользуемся тем, что нам известна часть лагранжиана, которая содержит производные. Имеем

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu u)}\partial_\alpha u Y^\alpha_\mu = \partial^\mu u \partial_\alpha u Y^\alpha_\mu = \underbrace{\partial^\mu u \partial^\alpha u}_{\text{симм.}}\ \underbrace{g_{\alpha\gamma} Y^\gamma_\mu}_{\text{кососимм.}} = 0, \tag{28}$$

потому что свёртка симметричного тензора с кососимметрическим равна нулю. $\square$

Вычислим $D\mathcal{L}$. Имеем

$$D\mathcal{L} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u}Du + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu u)}\partial_\mu Du = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u}Y^\nu_\beta x^\beta\partial_\nu u + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu u)}\big(Y^\nu_\beta x^\beta \partial_\mu\partial_\nu u + Y^\nu_\mu \partial_\nu u\big).$$

По лемме самое последнее слагаемое равно 0, поэтому

$$\begin{aligned} D\mathcal{L} &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u}Y^\nu_\beta x^\beta\partial_\nu u + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu u)}\,Y^\nu_\beta x^\beta \partial_\mu\partial_\nu u = \\ &= Y^\nu_\beta x^\beta\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u}\partial_\nu u + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu u)}\,\partial_\mu\partial_\nu u\right) = \\ &= Y^\nu_\beta x^\beta \partial_\nu \mathcal{L}. \end{aligned}$$

Наиболее сложная часть вычислений проделана, осталось сделать совсем простые:

$$
\begin{aligned}
D\mathcal{L} = Y^{\nu}_{\beta} x^{\beta} \partial_{\nu} \mathcal{L} &= x^{\beta} \partial_{\nu} (Y^{\nu}_{\beta} \mathcal{L}) = \\
&= \partial_{\nu} (x^{\beta} Y^{\nu}_{\beta} \mathcal{L}) - (\partial_{\nu} x^{\beta}) \, Y^{\nu}_{\beta} \mathcal{L} = \\
&= \partial_{\nu} (x^{\beta} Y^{\nu}_{\beta} \mathcal{L}) - \underbrace{\delta^{\beta}_{\nu} Y^{\nu}_{\beta}}_{0} \mathcal{L} = \\
&= \partial_{\nu} (x^{\beta} Y^{\nu}_{\beta} \mathcal{L}).
\end{aligned}
$$

Таким образом, условия теоремы Нетер выполнены для $f^{\mu} = x^{\beta} Y^{\mu}_{\beta} \mathcal{L}$. Вычислим соответствующий ток Нётер:

$$
\begin{aligned}
j^{\mu} = \Pi^{\mu} Du - f^{\mu} &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu} u)} \big(Y^{\alpha}_{\beta} x^{\beta} \partial_{\alpha} u \big) - x^{\beta} Y^{\mu}_{\beta} \mathcal{L} = \\
&= Y_{\alpha\beta} x^{\beta} \Big(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu} u)} \partial^{\alpha} u - g^{\mu\alpha} \mathcal{L} \Big) = Y_{\alpha\beta} x^{\beta} (\Pi^{\mu} \partial^{\alpha} u - g^{\mu\alpha} \mathcal{L}) = Y_{\alpha\beta} T^{\mu\alpha} x^{\beta}.
\end{aligned}
$$

По теореме Нётер имеем $\partial_{\mu} j^{\mu} = 0$, то есть

$$
Y_{\alpha\beta} \partial_{\mu} (x^{\beta} T^{\mu\alpha}) = 0.
$$

Отметим, что пока нельзя сказать, что $\partial_{\mu}(x^{\beta} T^{\mu\alpha}) = 0$, потому что матрица $Y_{\alpha\beta}$ имеет 6 независимых компонент, а о количестве независимых компонент матрицы (по индексам α и β) $\partial_{\mu}(x^{\beta} T^{\mu\alpha})$ нам ничего неизвестно.

Чтобы избавиться от произвольной матрицы $Y \in T_E L$ рассмотрим альтернированние $x^{\beta} T^{\mu\alpha}$:

$$
M^{\mu\alpha\beta} = x^{\beta} T^{\mu\alpha} - x^{\alpha} T^{\mu\beta}. \tag{29}
$$

Эта матрица кососимметрична, поэтому у нее тоже 6 независимых компонент, и из условия $Y_{\alpha\beta} \partial_{\mu} M^{\mu\alpha\beta} = 0$ следует, что

$$
\partial_{\mu} M^{\mu\alpha\beta} = 0. \tag{30}
$$

Величина $M^{\mu\alpha\beta}$ является тензором и называется тензором *углового момента.*