Структуры и сигнатуры, интерпретации и модели.

Определение: Элементарная математическая структура - это множество, которое называется носителем структуры, и выделенные объекты(элементы носителя, операции на носителях, отношения на носителях).

Пример

Группа - это множество М(носитель) + выделенные элементы носителя(единица, групповая операция, обратная операция)

Для упорядоченного множества выделено отношение порядка: $\prec, \preccurlyeq$

Пример

Запишем отношение инцидентности в геометрии: $\forall x \forall y [T_0(x) \& T_0(y) \Rightarrow \exists z(\text{ПР}(z) \& \text{И}(z,x) \& \text{И}(z,y))$.

В структуре все выделенные элементы снабжаются именами.

Определение: Сигнатура - это список имен выделенных объектов структуры, то есть сигнатура данной структуры.

Сигнатура - это:

1) Индивидные имена;
2) Функциональные имена(имена операций);
3) Предикатные имена(имена отношений).

Функциональные и предикатные имена имеют валентность - количество аргументов.

Рассмотрим изоморфизм между структурами. Он определен только для структур одинаковой сигнатуры(набор символов с валентностью).

Рассмотрим 2 структуры - M_1 и M_2 с выделенными объектами.

Определение: Изоморфизм - это биекция между носителями, такая что элемент сигнатуры из M_1 с именем а переходит в элемент сигнатуры M_2 с тем же именем и выполняются слудующие условия:

1) Для функции $f^{(n)} : f^{(n)}(x_1, ..., x_n) = U \Leftrightarrow f^{(n)}(\varphi x_1, ..., \varphi x_n) = \varphi U$
2) Для отношения $P^{(n)} : P^{(n)}(x_1, ..., x_n) \Leftrightarrow P^{(n)}(\varphi x_1, ..., \varphi x_n)$

Язык сигнатуры $\Sigma = <$индивиды, функционалы, предикаты$>$ (состоит из выражений вида: $f^{(2)}(a; b) = b$) или $P^{(3)}(a; b; a)$).

Если к элементарному языку - $), (, =, \neg, \&, \vee, \Rightarrow, \forall, \exists, \Sigma +$ индивиды x,y,z.. - добавить функциональные и предикатные переменные, то уже не элементарный язык.

Функциональные переменные: $\varphi^{(i)}, \psi^{(j)}$...

Определение: Функциональная буква - это функциональное имя или переменная.

Определение: Предикатная буква - это предикатное имя или переменная.

Определение: Индивидная буква - это индивидное имя или переменная.

Определим понятия терма, атомной формулы и формулы.

Определение: Терм:

1) Каждая индивидная буква есть терм;
2) Если $t_1, ..., t_n$ - термы, а q - функциональная буква валентности n, то $q(t_1, ..., t_n)$ - терм.

Определение: Атомная формула:

1) Если t_1, t_2 -термы, то $t_1 = t_2$ - атомная формула.
2) Если $t_1, ..., t_n$ - термы, а Q - предикатная буква валентности n, то $Q(t_1, ..., t_n)$ - атомная формула.

Определение: Формула:

1) Каждая атомная формула есть формула.
2) Если α - формула, то $\neg\alpha$ - формула.
3) Если α и β - формулы, то $\alpha \& \beta$,$\alpha \vee \beta$,$\alpha \Rightarrow \beta$ - формулы.
4) Если α - формула, а ξ - переменная, то $\forall\xi\alpha$ и $\exists\xi\alpha$ - тоже формулы.

Определение: Интерпретация языка (сигнатуры) - это любая матаематическая структура

данной сигнатуры.
Чтобы задать интерпретацию нужно:
1) Фиксировать непустое множество M - носитель;
2) Каждоя константе из сигнатуры сопоставить элемент из носителя;
3) Каждому k-местному функциональному символу из сигнатуры сопоставить k-местную функцию: $f : M^k \to M$;
4) Каждому k-местному предикатному символу из сигнатуры сопоставить k-местный предикат: $P : M^k \to$ И,Л;
Если P есть 0-местный предикатный символ, то ему сопоставляется одно из двух истинностных значений.
Пусть I - структура, F - формула.
Определение: $I \models F$ означает, что F истинна при интерпретации I(в основном только для замкнутых).
При заданной интерпретации можно сравнивать формулы на эквивалентность.
Определение: Формула называется общезначимой, если она истина в любой интерпретации.
Общезначимые формулы выражают законы логики, поскольку верны вне зависимости от интерпретации.
Примеры Общезначимые формулы:
1) $\forall x\alpha \Rightarrow \exists x\alpha$;
2) $\forall x\forall y(x = y \Rightarrow f(x) = f(y))$.
Обозначение: $\forall I(I \models F)$ обозначают $\models F$
Формула Лейбница
$\forall W(W(x) \Rightarrow W(y)) \equiv x = y$, где W - предикат.
Определение: Аксиомы - это зафиксированные выделенные формулы; список аксиом.
Определение: Модель данного списка аксиом - это такая интерпретация, при которой все аксиомы становятся истинными.
Пример
Группа - эта та интерпретация групп, в которой выполняются аксиомы групп, то есть это - модель списка аксиом группы.
Определение: Следствие списка аксиом - это формула, истинная в любой модели этих аксиом.
Пусть S - список аксиом, то $S \models F$ означает, что F - есть следствие S.
Все языки отличаются друг от друга только сигнатурой.
Пример
Рассмотрим язык арифметической логики: $< 0,' >$
x' - следующий за x. Наример, 2 - это $0''$.
Можно рассмотреть следующие аксиомы:
1) $\neg\exists x : (x' = 0)$;
2) $\forall x\forall y(x' = y' \Rightarrow x = y)$
Например, если $0'''' = 0'' \Rightarrow 0''' = 0' \Rightarrow 0'' = 0$, чего быть не может.
Определение: Стандартная модель - это модель, которая изоморфна тому замыслу, для которого написаны аксиомы.
Определение: Нестандартная модель - это модель, которая неизоморфна тому замыслу, для которого написаны аксиомы.
Например, плоскость $\to$ язык(точки, прямые, инциденетность...) $\to$ модель(выполняются все аксиомы).
Аксиома: $\forall W\{[W(0)\&\forall x(W(x) \Rightarrow W(x'))] \Rightarrow \forall xW(x)\}$
Это аксиома индукции. Если ее записать, то в качестве W можновзять свойство: "получаться из нуля n штрихами". Пусть этот предикат P, то есть: $[P(0)\&\forall x(P(x) \Rightarrow P(x'))] \Rightarrow \forall xP(x)$. Ясно, что он подходит для W. Тут модель единственна.
Пусть сигнатура $< 0,', +, \cdot, \prec, \preccurlyeq >$.

$x \prec y \equiv \exists z(x + z' \preccurlyeq y)$

$x \vdots 3 \equiv \exists z((z \cdot 0''') = x)$

Такая формула задает множество чисел $\vdots$ 3.
Определение: Арифметическое множество - множество, для которого существует выражающая его формула.
Пусть α - формула с единственной свободной переменной ξ.
Определение: $\widehat{\alpha}$ - это множество таких $n| \models \alpha(n/\xi)$, то есть те, для которых α верна.

Значит множество чисел $\vdots$ 3 - арифметическое.
1) Если множество арифметическое, то его дополнение арифметическое;
2) Для двух арифметических множеств, их пересечение/объединение также арифметическое, то есть класс арифметических множеств замкнут.
Так как всего формул счетно(это слова в конечном алфавите), а всего множеств несчетно, то существют неарифметические множества.
Определение: Если есть формула с двумя свободными элементами($\alpha(\xi, \eta)$), то $\widehat{\alpha} = \{(m;n)| \models \alpha(m/\xi)(n/\eta)\}$
Для формул нужно задавать порядок подстановки переменных, иначе это множество определено некорректно.

Ясно, что $(m;n)|m \vdots n$ - арифметическое.
Прямое произведение арифметических множеств - арифметическое.
Пример

$A = \{m|m \vdots 2\} = \widehat{\alpha}$; $\alpha \rightleftharpoons \exists z((z \cdot 0'') = x)$

$B = \{n|n \vdots 3\} = \widehat{\beta}$; $\beta \rightleftharpoons \exists z((z \cdot 0'') = y)$

Тогда $A \times B = \{< m;n > |m \vdots 2, n \vdots 3\}$.
Определение: Пусть дана функция $f(x_1, ..., x_n) = y$. Тогда график функции - это множество таких $\{< x_1, ..., x_n, y > |f(x_1, ..., x_n) = y\}$
Определение: Арифметическая функция - это функция, график которой есть арифметическое множество.
Определение: Проекция множества: $y \epsilon B \equiv \exists x : (< x; y > \epsilon A) \equiv \exists x : \alpha(x;y)$
Ясно, что проекция арифметического множества - арифметическая.
Теорема: Образ арифметического множества при арифметической функции является арифметическим.
Доказательство: ◄ ??? ►
Теорема: Полный прообраз арифметического множества при арифметической функции является арифметическим.
Определение: Вычислимая функция - это функция с существующим вычисляющим её алгоритмом.
Алгоритмов - счётное число(так как это - текст)
Вычислимых функций - счётное число.
Значит всякая вычислимая функция являтся арифметической.

Машина Тьюринга

Устройство машины:
Имеется лента(разбитая на ячейки) либо 1) бесконечная в обе стороны, либо 2) ограниченная слева.
Будем изучать 1).
Вдоль ленты разъезжает каретка(списывающая и записывающая). У нее есть состояния: $q_0, q_1, ...$, причем первые два состояния есть обязательно.

Имеется ленточный алфавит Б={#, ...}, причем # есть обязательно - это пустой символ, то есть если в ячейке ничего нет, то там записано #.
Машина работает шагами:
1) Смотрит, что в обозреваемой ячейке;
2) В зависимости от 1) и состояния печатает символ в обозреваемую ячейку и сдвигается(вправо/влево/на месте);
3) Переходит в другое состояние;
Обозначение: ∇ - сдвижение вправо/влево/на месте.
Определение: Команда машины Тьюринга: $q_k a_i \to a_j \nabla q_l$.
Определение: Программа машины Тьюринга - однозначный набор команд.
Принцип работы машины: Вначале каретка находится в состоянии q_1, вручную устанавливается в определенное место ленты и машина работает по программе до состояния q_0. Если машина приходит в состояние q_0 то это называют результативной остановкой.
Также возможна безрезультативная остановка: когда машина не находит нужной команды, или пытается сдвинуться сдвинуться за предел ленты.

Вычисление функции на машине Тьюринга

В ленточном алфавите выделяется конечная часть - рабочий алфавит. Пусть Б - алфавит, а Д(⊂Б) - рабочий алфавит.
Вычисляются функции: Д* → Д*.
Начальное состояние ленты: на ленте, в заданном месте записн x, и больше ничего на ленте нет. Каретка ставится на место, предществующее слову.
Необходимо вычислить $y = f(x)$
Возможны два варианта ответов:
1) **Слабый**:
На ленте между двумя символами α и β (причем $\alpha, \beta, \#$∈Д) записан y. Каретка стоит в произвольной ячейке слова y.
2) **Сильный**:
На ленте ничего кроме y нет. Каретка стоит на месте предществующем началу слова y.
Пусть дана f : Д* → Д*
Определение: f вычислима в слабом(сильном) смысле, если ∃Б∋Д и такая машина Тьюринга, что f вычисляется в слабом(сильном) смысле на этой машине.
Можно доказать, что из слабого ответа можно получить сильный. Сделать это можно, стирая нерабочие символы с лента(каждый раз проходя все дальше в обе стороны) и учитывая, что ответ ограничен двумя нерабочими символами.