Лекция 1. Группа Лоренца и пространство Минковского

1.1. Инерциальные системы отсчета. Законы Ньютона. Преобразования Галилея. *Принцип относительности* — это один из краеугольных камней физики. Он гласит, что закономерности, которым подчиняются физические явления, одинаковы во всех инерциальных системах отсчета. Впервые, по всей видимости, этот принцип был сформулирован Галилео Галилеем (1564–1642). В те времена понятие инерциальной системы отсчета еще не сформировалось, и Галилей писал о сравнении экспериментов на неподвижном и двигающемся равномерно и прямолинейно кораблях. В частности, он писал о том, что, находясь под палубой корабля, невозможно понять, стоит ли корабль на месте или двигается прямолинейно с постоянной скоростью.

В «Математических началах натуральной философии» Ньютона (1643—1727) этот принцип был уточнен. Напомним формулировку первого закона Ньютона.[1]

I. *Всякое тело продолжает удерживаться в своем состоянии покоя или равномерного и прямолинейного движения, пока и поскольку оно не понуждается приложенными силами изменять это состояние.*

Неявно здесь подразумевается выбор некоторой *системы отсчета*, т. е. задание системы координат в пространстве $\mathbb{R}^3$ и правила измерения времени.

Первый закон Ньютона по существу представляет собой утверждение о существовании так называемых *инерциальных систем отсчета*, т. е. таких, в которых тело, не подверженное действию каких–либо сил, покоится или двигается равномерно и прямолинейно.

Второй и третий законы Ньютона формулируются именно по отношению к инерциальным системам отсчета. Нетрудно привести примеры неинерциальных систем отсчета, в которой эти законы неверны.

Ясно,что если некоторая система отсчета двигается равномерно и прямолинейно относительно инерциальной системы отсчета, то она сама тоже инерциальная. Также нетрудно видеть, что мы выберем две инерциальные системы отсчета, то они будут двигаться друг относительно друга равномерно и прямолинейно.

Связь между пространственными и временными координатами в двух инерциальных системах отсчета довольно проста. Сделав при необходимости подходящее ортогональное преобразование, мы можем считать, что оси координат $Oxyz$ одной системы отсчета соответственно параллельны одноименным осям координат $O'x'y'z'$ другой системы отсчета, причем начало координат O' перемещается вдоль оси Ox. Тогда для координат (x, y, z) и времени t имеют место соотношения, выражающие их связь с (x', y', z') и t':

$$\left\{\begin{array}{lcl} t' & = & t - t_0, \\ x' & = & x - x_0 - vt, \\ y' & = & y - y_0, \\ z' & = & z - z_0. \end{array}\right. \tag{1}$$

Здесь (x_0, y_0, z_0) — координаты точки O' в системе координат $Oxyz$ в момент времени $t = 0$, t_0 — разница между показаниями часов, а v — скорость движения точки O' в системе координат $Oxyz$.

[1]Цитируется по переводу академика А. Н. Крылова, выполненному в 1914–1916 годах.

Таким образом, связь между двумя любыми инерциальными системами отсчета в ньютоновой механике задается композицией ортогонального преобразования пространства $\mathbb{R}^3$ и преобразования вида (1).

Запишем эти преобразования в матричном виде. Для этого объединим пространство $\mathbb{R}^3$ и временную ось $\mathbb{R}$ в четырехмерное пространство–время $\mathbb{R}^4 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ с координатами (t, x, y, z).

Тогда легко проверить, что если $Oxyzt$ и $O'x'y'z't'$ — две инерциальные системы отсчета, то

$$\begin{pmatrix} t' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \quad 0 \quad 0 \\ -v_x & \\ -v_y & \text{\Huge A} \\ -v_z & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} t_0 \\ x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}, \tag{2}$$

где (v_x, v_y, v_z) — скорость начала отсчета O' в системе координат $Oxyz$, (x_0, y_0, z_0) — координаты O' в системе отсчета $Oxyz$ при $t = 0$ и A — подходящая матрица из $O(3)$. Нетрудно убедиться, что всевозможные преобразования указанного вида образуют группу, а преобразования (2) с $(t_0, x_0, y_0, z_0) = 0$ образуют ее подгруппу; она называется *группой Галилея.*

Геометрические объекты, описывающие динамику системы при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой преобразуются по подходящим представлениям группы Галилея. Принцип относительности Галилея, согласно которому законы классической механики одинаковы во всех инерциальных системах отсчета, можно понимать как утверждение о том, что законы механики инвариантны относительно группы Галилея.

Отсюда следует *принцип относительности Галилея*, который утверждает, что законы механики одинаковы во всех инерциальных системах отсчета.

В конце XIX века был совершен ряд открытий, которые привели к пересмотру основных физических представлений, связанных с пространством и временем. В результате принцип относительности изменился и приобрел новую, более точную формулировку.

1.2. Электродинамика, теория Максвелла, волновое уравнение, опыты Герца. Хотя с электрическими и магнитными явлениями человечество знакомо давно, их связь долгое время оставалась неизвестной. В 1820 году Эрстед открыл отклонение магнитной стрелки вблизи проводника с током. Этот опыт привлек интерес многих выдающихся ученых. В скором времени были открыты основные законы, описывающие магнитное поле, порожденное электрическим током. В 1831 году Фарадей после почти десятилетних исследований открыл электромагнитную индукцию — так подтвердилась его идея, что в свою очередь магнитное поле может порождать электрическое. Стоит также отметить, что Фарадею удалось показать, что все известные тогда виды электричества имеют одну и ту же природу, поскольку могут произвести одни и те же действия: механические, магнитные, световые, физиологические, химические. Ему же принадлежит сам термин «поле».

Здесь будет Ганс Эрстед (1777–1851)

Здесь будет Майкл Фарадей (1791—1867)

Связь электричества, магнетизма, оптических явлений исследовалась чрезвычайно активно. Важной вехой в развитии электродинамики стали две работы Максвелла: «О физических силовых линиях» 1861 года и «Динамическая теория электромагнитного поля» 1865 года. В них были получены уравнения электромагнитного поля. В 1873 году был опубликован знаменитый «Трактат по электричеству и магнетизму», в котором Максвелл дал окончательное изложение своей теории.

Здесь будет Дж. К. Максвелл (1831—1879)

Тот вид уравнений электромагнитного поля, который используется в настоящее время, был получен независимо Оливером Хевисайдом (1850–1925) и Генрихом Герцем (1857–1894). Для свободного электромагнитного поля в вакууме эти уравнения имеют относительно простой вид:

$$\begin{cases} \operatorname{rot}\mathbf{E} &= -\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial\mathbf{H}}{\partial t}, \\ \operatorname{div}\mathbf{H} &= 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} \operatorname{rot}\mathbf{H} &= \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}, \\ \operatorname{div}\mathbf{E} &= 0, \end{cases} \tag{3}$$

где $\mathbf{E}$ — вектор напряженности электрического поля, $\mathbf{H}$ — вектор напряженности магнитного поля, а c — некоторая постоянная, имеющая размерность скорости.

Из уравнений Максвелла (3) следует, что каждый из векторов $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ удовлетворяют так называемому *волновому уравнению*

$$\begin{aligned} \left(\Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\mathbf{E} &= 0, \\ \left(\Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\mathbf{H} &= 0. \end{aligned} \tag{4}$$

Его решения описывают распространение в пространстве возмущения со скоростью c.

С этим уравнением связана одна из величайших догадок Максвелла. В работе «О физических силовых линиях» он строит изящную механическую модель, в которой «магнитное действие» рассматривается «как род некоторого давления или натяжения или, вообще говоря, напряжения в среде».[2] В этой работе Масксвелл вводит понятие тока смещения, который входит в правую часть третьего уравнения системы (3). Стоит подчеркнуть, что ток смещения был открыт теоретически. Примером тока смещения служит ток, протекающий через конденсатор при его зарядке; до Максвелла считалось, что ток через изоляторы течь не может. Как легко видеть, ток смещения важен для вывода волнового уравнения.

Теперь позволим себе привести цитату из этой работы: «Скорость поперечных волновых колебаний в нашей гипотетической среде, вычисленная из электромагнитных опытов Кольрауша и Вебера, столь точно совпадает со скоростью

[2] Цитируется по книге «Избранные сочинения по теории электромагнитного поля» Дж. Кл. Максвелл, Москва, 1952

света, вычисленной из оптических опытов Физо, что мы едва ли можем отказаться от вывода, что *свет состоит из поперечных колебаний той же самой среды, которая является причиной электрических и магнитных явлений.*»

Около 20 лет теория Максвелла ждала своего признания. Ее экспериментальное подтверждение дали опыты Герца 1887—1888 годов по получению и приему электромагнитных волн. Чуть позже были проведены опыты показавшие, что электромагнитные волны преломляются, обладают поляризацией, подвержены дифракции и прочее, иными словами, имеют те же свойства, что и свет.

Значение работ Максвелла по электродинамике Эйнштейн охарактеризовал следующим образом: «...тут произошел великий перелом, который навсегда связан с именами Фарадея, Максвелла, Герца. Львиная доля в этой революции принадлежит Максвеллу... После Максвелла физическая реальность мыслилась в виде непрерывных, не поддающихся механическому объяснению полей, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнеными в частных производных. Это изменение понятия реальности является наиболее глубоким и плодотворным из тех, которые испытала физика со времен Ньютона».[3]

1.3. Электродинамика и относительное движение. Природа среды, возмущения которой проявляются в виде электромагнитных волн, так называемого «светоносного эфира», занимала умы многих выдающихся ученых. Аналогии с механикой, теорией упругости или гидродинамикой были плодотворны для объяснения одних эффектов, но не согласовывались с другими.[4] Не будет преувеличением сказать, что изобретательность при построении моделей эфира и тонкость анализа их достоинств и недостатков, которые проявляли ученые, были совершенно удивительны.

В конце XIX–го века одним из наиболее важных являлся вопрос о влиянии относительного движения на оптические явления. Это влияние могло бы проявляться в отличии законов преломления и отражения света от земного источника и света от звезд. Более того, свет от звезд, распространяющийся перпендикулярно земной орбите, и свет распространяющийся параллельно ей, также могли бы вести себя по–разному.

Рассматриваемый вопрос теснейшим образом связан с тем, как выглядят уравнения электромагнитного поля в подвижной системе отсчета. Нетрудно проверить, что относительно преобразований Галилея уравнения Максвелла неинвариантны. Казалось бы, отсюда должно следовать неравноправие инерциальных систем отсчета для электродинамических и, в частности, для оптических явлений.

Иными словами, если принять, что уравнения Максвелла относятся к системе отсчета, покоящейся относительно эфира, то в земной лаборатории эти уравнения должны иметь поправки, происходящие из движения Земли относительно эфира.

Опыт Майкельсона—Морли. Считалось, что светоносный эфир заполняет все пространство и пронизывает материальные тела. Из-за движения Земли по орбите, скорость которого относительно Солнца равна около 30 км/с, на Земле должен существовать так называемый *эфирный ветер*, из-за которого свет вдоль направления движения Земли и перпендикулярно ему должен распространяться по–разному.

[3]Собрание научных трудов, т. 4, М., 1967, с. 138

[4]ССЫЛКА на Уиттекера

Очень красивый опыт по поиску эфирного ветра в 1887 году поставили Майкельсон (1852–1931) и Морли (1838–1923). Результат оказался был отрицательным — эфирный ветер обнаружен не был.

Здесь будет Майкельсон (1852–1931)

Для объяснения отрицательного результата опыта естественно было предположить, что вблизи поверхности Земли эфир полностью увлекается движением Земли, и что это явление, вероятно, ослабевает с высотой. Однако опыты по обнаружению эфирного ветра в горах потеряли свое значение в связи с гипотезой Фитцджеральда (1851–1901) и Лоренца (1853–1928) о сокращении расстояний, к которой мы обратимся позже, после того, как опишем схему опыта Майкельсона—Морли.

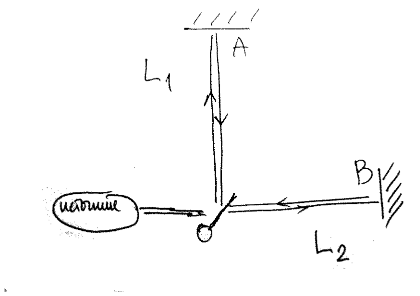

Рис. 1. Схема опыта Майкельсона—Морли

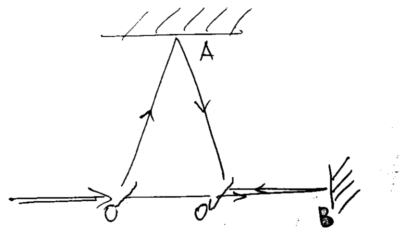

Рис. 2. Схема опыта Майкельсона—Морли

Монохроматический свет, см. рис. 1, направляется на полупрозрачное зеркало и расщепляется им на два взаимно перпендикулярных луча OA и OB, которые затем проходят расстояния L_1 и L_2 соответственно, отражаются от зеркал и возвращаются в точку O, где интерферируют. По картине интерференции можно судить о разности времен, за которые свет проходит вдоль плеч OA и OB прибора. Если все направления распространения света равноправны, то интерференционная картина не зависит от положения прибора в пространстве.

Предположим теперь, что прибор движется в эфире со скоростью v в направлении OB, см. рис. 2. В опыте Майкельсона—Морли этим движением является орбитальное движение Земли. За то время, пока свет пройдет вдоль плеч интерферометра, прибор относительно эфира сдвинется и интерференция будет наблюдаться не в точке O, а в точке O'. Время за которое свет пройдет путь OAO', как нетрудно видеть, равно

$$t_1 = \frac{2\sqrt{L_1^2 + (vL_1/c)^2}}{c} = \frac{2L_1}{c}\sqrt{1+\frac{v^2}{c^2}} = \frac{2L_1}{c}\left(1+\frac{v^2}{2c^2}+\dots\right),$$

а время, за которое свет пройдет OBO' равно

$$t_2 = \frac{L_2}{c-v} + \frac{L_2}{c+v} = \frac{2L_2c}{c^2-v^2} = \frac{2L_2}{c}\left(1 + \frac{v^2}{c^2} + \dots\right).$$

Таким образом, в точке O' лучи света имеют разность фаз, соответствующую разности времен t_1 и t_2, которая, казалось бы, должна измениться, если прибор повернуть в плоскости OAB так, чтобы плечо OA было направлено вдоль движения. Опыт Майкельсона—Морли показал, что при повороте прибора изменение интерференционной картины не происходило ни при каких условиях.

1.4. Гипотеза о сокращении.

Здесь будет Фитджаральд

Гипотеза Фитцджеральда—Лоренца состоит в том, что размеры материальных тел уменьшаются в направлении их движения. Фитцджеральд высказал свой вариант гипотезы в 1889 году, но не опубликовал ни саму гипотезу, ни ее возможные следствия. Независимо тремя годами позже такую же идею высказал Лоренц. В работах 1892 и 1895 годов он показал, что отрицательный результата Майкельсона—Морли можно объяснить с точностью до членов порядка $\frac{v^2}{c^2}$, если предположить, что движущееся со скоростью v тело сокращается в направлении движения в $1 - \frac{v^2}{2c^2}$ раз. Ему же принадлежит идея о том, что в движущейся системе отсчета время замедляется. Сначала так называемое *локальное время* было введено для упрощения формул, но потом довольно быстро стало ясно, что изменение времени при переходе к подвижной системе координат является важной частью более точной теории, учитывающей члены всех порядков, — *специальной теории относительности.*

Здесь будет Лоренц

1.5. Преобразования Лоренца. Как говорилось выше, уравнения Максвелла не инвариантны относительно группы Галилея. Иными словами, инерциальные системы отсчета равноправны при описании механических явлений и, казалось бы, неравноправны при описании электромагнитных и, в том числе, оптических явлений.

Равноправие инерциальных систем по отношению к электромагнитным явлениям восстановила специальная теория относительности, созданная в самом начале XX–го века усилиями ряда ученых, в первую очередь, Лоренца, Пуанкаре и Эйнштейна. Оказалось, что многочисленные опыты по изучению влияния относительного движения на оптические и электромагнитные явления можно объяснить, если изменить принцип относительности, заменив в нем группу Галилея на некоторую другую подгруппу $GL_4(\mathbb{R})$ — так называемую группу Лоренца.

В простейшем случае преобразование из группы Лоренца выглядит следующим образом. Пусть оси инерциальной системы отсчета $O'x'y'z'$ сонаправлены с осями инерциальной системы отсчета $Oxyz$, причем первая двигается вдоль оси Ox со скоростью v. Тогда

$$ct' = \frac{ct - \frac{v}{c}x}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}},\ x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}},\ y' = y,\ z' = z, \tag{5}$$

где c — скорость света. Лоренц показал, что отрицательный результат опыта Майкельсона—Морли можно объяснить, если время и пространственные координаты в подвижной и неподвижной системах отсчета связаны соотношениями (5). В частности, как пишет Лоренц, из этих формул следует, что нельзя обнаружить влияние движения Земли на оптические опыты с земными источниками света, в которых идет речь о геометрическом распределении света и тени.

Преобразования (5) Пуанкаре назвал *преобразованиями Лоренца*; он же указал на групповой характер этих преобразований,[5] на роль квадратичной формы $(ct)^2 - x^2 - y^2 - z^2$ и на естественность рассмотрения единого четырехмерного пространства–времени.[6]

Для механических явлений, в которых скорости намного ниже скорости света, преобразования Лоренца с достаточно хорошо приближаются преобразованиями Галилея, и поэтому принцип относительности Галилея справедлив для инерциальных системах отсчета, у которых относительная скорость движения v такова, что $v/c \ll 1$.

Теории, использующие новый вариант принципа относительности, называются *релятивистскими*.

1.6. Пространство Минковского. Считается, что «ареной» физических явлений служит четырехмерное аффинное пространство–время $M = \mathbb{R}^{1,3}$, в котором задано скалярное произведение с сигнатурой $(+, -, -, -)$. Чтобы подчеркнуть размерность, вместо M мы иногда будем писать M^4. Это пространство получило название *пространства Минковского*; в 1908 году Г. Минковский сделал доклад, начало которого уместно процитировать: «...Отныне пространство само по себе и время само по себе должны обратиться в фикции и лишь некоторый вид соединения обоих должен еще сохранить самостоятельность.» [7]

Как мы знаем из линейной алгебры, в пространстве M^4 можно выбрать аффинную систему координат, т. е. начало координат O и четыре линейно независимых вектора e_0, e_1, e_2, e_3, так, что попарные скалярные произведения базисных векторов имеют вид

$$\langle e_\mu, e_\nu \rangle = g_{\mu\nu}, \tag{6}$$

где

$$\begin{aligned} &g_{00} = 1, g_{11} = g_{22} = g_{33} = -1, \\ &g_{\mu\nu} = 0 \text{ при } \mu \neq \nu. \end{aligned}$$

Любую такую систему координат будем называть *ортонормированной*. Выбор ортонормированной системы координат в M^4 соответствует выбору инерциальной системы отсчета. Для координат точек пространства Минковского используется стандартное обозначение $x = (x^0, x^1, x^2, x^3)$, связанное с временем t и пространственными декартовыми координатами x, y, z соотношениями $x^0 = ct$, $x^1 = x$, $x^2 = y$ и $x^3 = z$. Здесь c — это скорость света, в частности, поэтому координата x^0 измеряется в единицах длины. Выбор точки O фиксирует начало отсчета времени и начало отсчета пространственных координат. Пространство, порожденное e_1, e_2 и e_3, будем обозначать через $\mathbb{R}^3$. Тем самым, трехмерное

[5] См. «О динамике электрона» Comptes Rendues, 1905, v. 140, p. 1504

[6] См. «О динамике электрона» Rendiconti Matematico di Palermo, 1906, v. XXI, p. 129

[7] Цитируется по сборнику «Принцип относительности», Москва, Атомиздат, 1973

пространство $\mathbb{R}^3$ и ось времени, натянутая на вектор e_0, в пространстве Минковского не определены однозначно, а зависят от выбора ортонормированного базиса в M^4, т. е. от выбора системы отсчета.

Как в этом контексте проявляется скорость движения одной инерциальной системы отсчета относительно другой и как возникают формулы 5, мы увидим позднее.

Напомним стандартные тензорные обозначения. Координаты вектора x принято обозначать той же буквой с верхним греческим индексом x^μ, где индекс μ принимает значения $0, 1, 2$ и 3. Матрицу Грама будем обозначать $G_{1,3} = \operatorname{diag}(+1, -1, -1, -1)$. Иногда для краткости вместо $G_{1,3}$ мы будем писать G. Ее элементы обозначаются $g_\mu \nu$. Матрица $(g^{\mu\nu})$ — это матрица, обратная к $(g_{\mu\nu})$. В нашем случае $(g^{\mu\nu}) = \operatorname{diag}(1, -1, -1, -1)$. Удобно пользоваться операцией поднятия и опускания индексов. Например, если дан вектор с координатами x^μ, то удобно рассматривать также $x_\mu = g_{\mu\nu} x^\nu$. Легко видеть, что в нашем случае

$$x_\mu = \begin{cases} x^0 & \text{при } \mu = 0, \\ -x^\mu & \text{при } \mu = 1, 2, 3. \end{cases}$$

Скалярный квадрат вектора $x = (x^0, x^1, x^2, x^3)$ равен

$$\|x\|^2 = g_{\mu\nu} x^\mu x^\nu = x^\mu x_\mu = (x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2. \tag{7}$$

1.7. Группы Лоренца и Пуанкаре. В специальной теории относительности важнейшую роль играют следующие две группы.

Определение 1.1. Группа аффинных преобразований пространства Минковского, сохраняющих скалярное произведение, называется *группой Пуанкаре*. Ее подгруппа, сохраняющая начало координат, называется *группой Лоренца L*.

Выберем в пространстве M ортонормированную систему координат $Oe_0e_1e_2e_3$. Тогда элементы группы Лоренца можно записать в виде матриц. Легко видеть, что группа Лоренца состоит в точности из таких невырожденных преобразований $A \in \mathrm{GL}_4(\mathbb{R})$, для которых $A^{\mathrm{T}} G_{1,3} A = G_{1,3}$, т. е. $L = O_{1,3}(\mathbb{R})$. Группа Пуанкаре является полупрямым произведением L на $\mathbb{R}^4$ — группу параллельных переносов. Напомним, что это по определению означает, что группа Лоренца L является нормальной подгруппой в группе Пуанкаре, а соответствующая факторгруппа изоморфна $\mathbb{R}^4$.

1.8. Структура группы Лоренца. Запишем $A \in L$ в виде матрицы

$$A = \begin{pmatrix} A_0^0 & \dots & A_3^0 \\ \vdots & & \vdots \\ A_0^3 & \dots & A_3^3 \end{pmatrix}.$$

Из условия $A^{\mathrm{T}} G A = G$, учитывая невырожденность матрицы Грама G, получаем $(\det A)^2 = 1$. Нетрудно проверить также, что в левом верхнем углу матрицы $A^{\mathrm{T}} G A$ стоит элемент вида $(A_0^0)^2 - (A_0^1)^2 - (A_0^2)^2 - (A_0^3)^2$. Поэтому из условия $A^{\mathrm{T}} G A = G$ также следует, что

$$(A_0^0)^2 = 1 + (A_0^1)^2 + (A_0^2)^2 + (A_0^3)^2.$$

В частности, $|A_0^0| \geq 1$. Аналогичным образом, рассматривая вместо A матрицу $A^{-1} = G A^T G$, получаем равенство

$$(A_0^0)^2 = 1 + (A_1^0)^2 + (A_2^0)^2 + (A_3^0)^2.$$

По отношению к знакам детерминанта $\det A$ и числа A_0^0 преобразования Лоренца подразделяются на четыре класса

$$L_+^\uparrow = \{\det A = +1\,, \quad A_0^0 > 0\}\,; \tag{8}$$
$$L_-^\uparrow = \{\det A = -1\,, \quad A_0^0 > 0\}\,; \tag{9}$$
$$L_+^\downarrow = \{\det A = -1\,, \quad A_0^0 < 0\}\,; \tag{10}$$
$$L_-^\downarrow = \{\det A = +1\,, \quad A_0^0 < 0\}\,. \tag{11}$$

Отметим, что хотя мы определили их используя выбор базиса $e_0e_1e_2e_3$, ниже мы увидим, что эти 4 множества являются компонентами связности группы Лоренца и поэтому не зависят от выбора базиса.

Важными представителями этих классов соответственно являются следующие:

(I) тождественное преобразование $Ix = x$;
(II) пространственное отражение $P(x^0, x^1, x^2, x^3) = (x^0, -x^1, -x^2, -x^3)$;
(III) обращение времени $T(x^0, x^1, x^2, x^3) = (-x^0, x^1, x^2, x^3)$;
(IV) полное отражение $PT(x) = -x$.

Утверждение 1.1. *Множество $L_+^\uparrow$ является подгруппой в L.*

Доказательство. Пусть $A, B \in L_+^\uparrow$. Проверим, что произведение AB также принадлежит $L_+^\uparrow$. Ясно, что $\det AB = 1$, поэтому остается убедиться, что число

$$A_0^0 B_0^0 + A_1^0 B_0^1 + A_2^0 B_0^2 + A_3^0 B_0^3,$$

стоящее в левом верхнем углу матрицы AB, положительно. Заметим, что

$$|A_1^0 B_0^1 + A_2^0 B_0^2 + A_3^0 B_0^3| \le \left((A_1^0)^2 + (A_2^0)^2 + (A_3^0)^2\right)^{1/2} \left((B_0^1)^2 + (B_0^2)^2 + (B_0^3)^2\right)^{1/2} = \\ = \sqrt{(A_0^0)^2 - 1}\sqrt{(B_0^0)^2 - 1}.$$

Откуда

$$A_0^0 B_0^0 + A_1^0 B_0^1 + A_2^0 B_0^2 + A_3^0 B_0^3 \ge A_0^0 B_0^0 - \sqrt{(A_0^0)^2 - 1}\sqrt{(B_0^0)^2 - 1} > 0,$$

поскольку A_0^0 и B_0^0 не меньше 1. □

Подгруппа $L_+^\uparrow$ называется *собственной ортохронной*. С учетом того, что $L_+^\uparrow$ является подгруппой, множества (8), (9), (10) и (11) являются классами смежности группы Лоренца по подгруппе $L_+^\uparrow$, причем представителями этих классов соответственно являются элементы I, P, T и PT. Как следует из предложения 1.4, доказанного ниже, эти четыре класса смежности линейно связны, а значит, и связны. Легко показать, что они образуют четыре компоненты связности. Для этого достаточно заметить, что множество элементов группы Лоренца, детерминант которых имеет определенный знак, открыто и замкнуто в L. То же самое верно для множества элементов группы Лоренца, у которых элемент Λ_0^0 имеет определенный знак. Из того, что разбиение группы Лоренца на указанные четыре класса является разбиением на компоненты связности, следует, что оно не зависит от выбора базиса, в котором преобразования из группы Лоренца записываются в виде матриц. В частности, подгруппа $L_+^\uparrow \subset L$ определена однозначно, как компонента единицы группы L.

Рассмотрим преобразование Лоренца Λ, сохраняющие две пространственные координаты, например, x^2 и x^3. Его матрица имеет вид

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \Lambda_0^0 & \Lambda_1^0 & 0 & 0 \\ \Lambda_0^1 & \Lambda_1^1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Упражнение 1. Покажите, что в этом случае матрица

$$\begin{pmatrix} \Lambda_0^0 & \Lambda_1^0 \\ \Lambda_0^1 & \Lambda_1^1 \end{pmatrix}$$

может быть записана в одном из следующих четырех видов:

$$\begin{pmatrix} \operatorname{ch}\chi & \operatorname{sh}\chi \\ \operatorname{sh}\chi & \operatorname{ch}\chi \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \operatorname{ch}\chi & -\operatorname{sh}\chi \\ \operatorname{sh}\chi & -\operatorname{ch}\chi \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -\operatorname{ch}\chi & \operatorname{sh}\chi \\ -\operatorname{sh}\chi & \operatorname{ch}\chi \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -\operatorname{ch}\chi & -\operatorname{sh}\chi \\ -\operatorname{sh}\chi & -\operatorname{ch}\chi \end{pmatrix}$$

Нетрудно заметить, что указанные четыре матрицы соответственно принадлежат четырем компонентам связности группы Лоренца.

Для преобразования первого вида, которое удовлетворяет условиям $\det\Lambda = 1,\ \Lambda_0^0 > 0$, положим

$$\operatorname{ch}\chi = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\,, \ \operatorname{sh}\chi = \frac{-\dfrac{v}{c}}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}\,; \quad x^0 = ct\,,\ x^1 = x\,.$$

В результате получаем хорошо известные формулы

$$t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}\,x}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \quad x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \quad y' = y, \quad z' = z. \tag{12}$$

Именно таким образом формулы для перехода из одной инерциальной системы отсчета в другую связаны с преобразованиями, сохраняющими метрику пространства Минковского.

1.9. Структура собственной ортохронной подгруппы $L_+^\uparrow$. Напомним, что мы зафиксировали в пространстве Минковского ортонормированную систему координат $Oe_0e_1e_2e_3$. В $L_+^\uparrow$ очевидным образом содержится подгруппа

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \ \ 0 \ \ 0 \\ 0 & \\ 0 & \text{SO}_3 \\ 0 & \end{pmatrix} \tag{13}$$

Она состоит из ортогональных поворотов пространственных осей, то есть из ортогональных преобразований пространства $\mathbb{R}^3$ с определителем 1.

Утверждение 1.2. *Преобразования Лоренца, сохраняющие временную прямую, т. е. такие, что $\Lambda e_0 = \lambda e_0$, переводят трехмерное пространство $\mathbb{R}^3$, натянутое на векторы e_1, e_2, e_3 в себя.*

Доказательство. Заметим, что $\lambda \neq 0$, так как в противном случае $\det\Lambda = 0$. Тогда из условия $(x, e_0) = 0$ следует равенство $0 = (\Lambda x, \Lambda e_0) = (\Lambda x, \lambda e_0)$, откуда $(\Lambda x, e_0) = 0\,.$ $\square$

Тем самым, преобразования Лоренца, сохраняющие временную прямую, суть ортогональные преобразования евклидова пространства $\mathbb{R}^3$. Все такие ортогональные преобразования образуют группу $O(3)$, входящую в качестве подгруппы в группу Лоренца L. Элементы группы $SO(3)$, как было сказано выше, образуют подгруппу собственной ортохронной группы $L_+^{\uparrow}$.

Кроме того, $L_+^{\uparrow}$ содержит так называемые *псевдоортогональные* или *гиперболические* повороты; эти повороты затрагивают ось времени.

Определение 1.2. Выберем произвольный ненулевой вектор $e = a^1e_1 + a^2e_2 + a^3e_3 \in \mathbb{R}^3$. Собственное ортохронное преобразование Лоренца, оставляющее неподвижными все векторы, ортогональные двумерной плоскости (e_0, e), называется *гиперболическим поворотом в этой плоскости.*

Обратим внимание на то, что произведение двух гиперболических поворотов в разных плоскостях, вообще говоря, не является гиперболическим поворотом. С другой стороны, множество гиперболических поворотов в одной и той же плоскости образуют группу. То же самое верно в отношении пространственных поворотов: композиция двух преобразований из группы Лоренца,которые являются пространственными поворотами по отношению в разным базисам, не является, вообще говоря, пространственным поворотом.

Нетрудно дать инвариантное описание пространственных и гиперболических поворотов. Пусть для данного преобразования $A \in L_+^{\uparrow}$ имеется инвариантное одномерное подпространство, на котором скалярное произведение отрицательно определено, т. е. скалярный квадрат любого ненулевого вектора из этого подпространства отрицателен. Тогда с помощью предложения 1.2 нетрудно показать, что A является ортогональным поворотом в плоскости, ортогональной инвариантному подпространству. Пусть для данного преобразования $A \in L_+^{\uparrow}$ имеется двумерное подпространство, на котором скалярное произведение положительно определено, а преобразование A тождественно. Тогда A является гиперболическим поворотом в плоскости, ортогональной рассматриваемому двумерному подпространству.

Утверждение 1.3. *Пусть выбрана ортонормированная система координат $Oe_0e_1e_2e_3$. Любой элемент $\Lambda \in L_+^{\uparrow}$ можно единственным образом разложить в произведение гиперболического поворота B и ортогонального поворота R в пространстве $\mathbb{R}^3$:*

$$\Lambda = B\,R. \tag{14}$$

Доказательство. В самом деле, пусть $\Lambda\, e_0 = e_0'$. Если $e_0' = e_0$, то достаточно положить $B = I$, $R = \Lambda$. Случай $\Lambda e_0 = -e_0$ исключается, поскольку для ортохронного преобразования должно быть выполнено неравенство $(\Lambda e_0,\, e_0) = \Lambda^0_0 > 0$. Если $e_0' \neq \pm e_0$, то векторы e_0 и e_0' линейно независимы и, стало быть, задают в M двумерную плоскость. Выберем в этой плоскости вектор e, ортогональный вектору e_0, Ясно, что он лежит в $\mathbb{R}^3$. Рассмотрим гиперболический поворот в плоскости (e_0, e), отображающий e_0 в $e_0' = \Lambda e_0$. Этот поворот существует и определяется единственным образом. Для того, чтобы показать это, выберем базис, состоящий из векторов $e_0, e_1 = e$ и двух произвольных векторов e_2 и e_3, дополняющих их до ортонормированного базиса.

Тогда

$$e_0' = \alpha e_0 + \beta e_1\,,$$

где $\alpha = (\Lambda e_0,\, e_0) > 0$ и $(e_0',\, e_0') = (\Lambda e_0,\, \Lambda e_0) = (e_0,\, e_0) = 1$, откуда $\alpha^2 - \beta^2 = 1$. Следовательно, существует единственное значение χ, для которого

$\alpha = \operatorname{ch}\chi\,,\ \beta = \operatorname{sh}\chi$.

Обозначим преобразование

$$\begin{cases} x^{0'} &= \operatorname{ch}\chi\, x^0 + \operatorname{sh}\chi\, x^1\,, \\ x^{1'} &= \operatorname{sh}\chi\, x^0 + \operatorname{ch}\chi\, x^1 \end{cases}$$

через B и положим $R = B^{-1}\Lambda$. Тогда $R\,e_0 = e_0$ и, таким образом, R — пространственный поворот, что доказывает существование разложения (14).

Для доказательства единственности положим

$$\Lambda = B_1\,R_1 = B_2\,R_2\,,$$

где B_1 и B_2 — гиперболические повороты, а R_1 и R_2 — пространственные. Тогда $B_2^{-1}\,B_1 = R_2\,R_1^{-1}$ и $B_2^{-1}\,B_1$ — пространственный поворот, т. е. $B_2^{-1}\,B_1\,e_0 = e_0$. Но тогда $B_1\,e_0 = B_2\,e_0$ и вектор e_0' для двух гиперболических поворотов один и тот же. Значит, $B_1 = B_2$, откуда $R_1 = R_2$. □

Замечание. Аналогично доказывается, что каждый элемент $\Lambda \in L_+^\uparrow$ однозначно представляется в виде $\Lambda = R\,B$.

Утверждение 1.4. *Подгруппа $L_+^\uparrow$ линейно связна.*

Доказательство. Воспользуемся разложением из предложения 1.3 и представим Λ в виде произведения гиперболического поворота B и ортогонального поворота R. Пусть гиперболическому повороту соответствует параметр χ_0, см. доказательство предложения 1.3. Будем обозначать гиперболический поворот в той же плоскости, в которой действует B, с параметром χ через $B(\chi)$. В частности, $B = B(\chi_0)$.

Напомним также, что любой ортогональный поворот в $\mathbb{R}^3$ является поворотом вокруг некоторой оси l на подходящий угол. Пусть R — это поворот вокруг оси l на угол φ_0. Обозначим через $R(\varphi)$ поворот вокруг той же оси l на угол φ, так что $R = R(\varphi_0)$.

Нетрудно видеть, что непрерывная (и даже гладкая) кривая

$$\gamma : t \mapsto B(t\chi_0)R(t\chi_0)$$

в группе $L_+^\uparrow$ соединяет $E = \gamma(0)$ с $\Lambda = \gamma(1)$. □

Определение 1.3. Вектор e называется *изотропным*, если $\langle e, e\rangle = 0$.

Определение 1.4. Для неизотропного вектора e ортогональные ему векторы образуют плоскость π_e. *Отражением* в плоскости π_e называется линейное отображение

$$x \mapsto x - \frac{\langle x, e\rangle}{\langle e, e\rangle}\,e$$

Упражнение 2. Проверьте, что такое отражение сохраняет метрику Минковского.

Мы докажем, что любое преобразование из группы Лоренца разлагается в произведение отражений. Этот факт нам понадобится в лекции **??** про спинорную группу.

Утверждение 1.5. *Любое преобразование Λ из группы $L_+^\uparrow$ разлагается в произведение не более чем четырех отражений.*

Доказательство. Пусть $\Lambda \in L_+^\uparrow$ Воспользуемся предложением 1.3 и запишем Λ в виде произведения BR. Покажем, что как пространственный, так и гиперболический повороты можно представить в виде композиции двух отражений.

В случае пространственного поворота воспользуемся теоремой из элементарной геометрии о том, что в $\mathbb{R}^3$ композиция двух отражений в плоскостях является поворотом на удвоенный угол между плоскостями вокруг прямой, по которой пересекаются эти плоскости. В явном виде эти отражения можно описать следующим образом. Выберем ортонормированный базис так, чтобы поворот B происходил в плоскости (e_2, e_3) и записывался в этой плоскости матрицей

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}.$$

Упражнение 3. Проверьте, что этот поворот является композицией отражений сначала в плоскости, ортогональной вектору e_2, а затем в плоскости, ортогональной вектору $\cos\dfrac{\varphi}{2}\, e_2 + \sin\dfrac{\varphi}{2}\, e_3$.

Чтобы представить гиперболический поворот в виде композиции двух отражений, выберем в пространстве Минковского ортонормированный базис так, чтобы поворот происходил в плоскости (e_0, e_1). Тогда в этой плоскости он задается матрицей

$$\Lambda' = \begin{pmatrix} \operatorname{ch}\chi & \operatorname{sh}\chi \\ \operatorname{sh}\chi & \operatorname{ch}\chi \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим матрицу

$$R(\chi) = \begin{pmatrix} \operatorname{ch}\chi & -\operatorname{sh}\chi \\ \operatorname{sh}\chi & -\operatorname{ch}\chi \end{pmatrix}.$$

Упражнение 4. Проверьте, что такое преобразование $R(\chi)$ оставляет неподвижным вектор $(\operatorname{ch}\chi/2, \operatorname{sh}\chi/2)$ и меняет знак у вектора $(\operatorname{sh}\chi/2, \operatorname{ch}\chi/2)$. Проверьте также, что эти векторы ортогональны, а вектор $(\operatorname{sh}\chi/2, \operatorname{ch}\chi/2)$ неизотропен. Тогда ясно, что $R(\chi)$ является отражением в плоскости, ортогональной вектору $(\operatorname{sh}\chi/2, \operatorname{ch}\chi/2)$.

Для завершения доказательства остается непосредственным вычислением проверить равенство $\Lambda' = R(\chi/2)R(-\chi/2)$, или, еще проще, $\Lambda' = R(\chi)R(0)$ $\square$

Следствие 1.6. *Любое преобразование из полной группы Лоренца разлагается в произведение отражений.*

Доказательство. Достаточно заметить, что преобразование T является отражением в $\mathbb{R}^3$, а P разлагается в композицию трех последовательных отражений, в плоскостях, ортогональным базисным векторам e_1, e_2 и e_3. $\square$

В действительности преобразование из группы Лоренца представляется в виде композиции не более чем 4 отражений. Этот факт является частным случаем теоремы Картана—Дьедонне, которая утверждает, что любое ортогональное преобразование (псевдо)евклидова пространства размерности n независимо от сигнатуры скалярного произведения разлагается в произведение не более чем n отражений. [8]

1.10. Структура пространства—времени. Вектор, скалярный квадрат которого положителен, называется *времениподобным*, а вектор, скалярный квадрат которого отрицателен, — *пространственноподобным.* Смысле этих названий проясняет следующее утверждение, доказательство которого является несложным упражнением из линейной алгебры.

Утверждение 1.7. (a) *Пусть для вектора e выполнено равенство $\langle e, e\rangle = 1$. Тогда существует ортонормированный базис e_0, e_1, e_1, e_3, для которого $e_0 = e$.*

[8] Доказательство можно найти в книге Э. Артина «Геометрическая алгебра»

(b) *Пусть для вектора e выполнено равенство $\langle e, e\rangle = -1$. Тогда существует ортонормированный базис e_0, e_1, e_1, e_3, для которого $e_1 = e$.* $\square$

Далее, выберем в пространстве Минковского точку O. Относительно точки O пространство Минковского разбиваются на 3 области:
• световой конус (l), состоящий из точек X, для которых вектор OX изотропен (светоподобен), т. е. $\|OX\|^2 = 0$;
• времениподобную область (t), находящуюся внутри светового конуса и состоящую из точек X, для которых вектор OX времениподобен, т. е. $\|OX\|^2 > 0$;
• пространственноподобную область (s), находящуюся вне светового конуса и состоящую из точек X, для которых вектор OX пространственноподобен, т. е. $\|OX\|^2 < 0$;
Преобразования из группы Пуанкаре, сохраняющие точку O, образуют группу Лоренца. Поскольку при таких преобразованиях величина $\|OX\|^2$ сохраняется, разбиение пространства Минковского на эти три области инвариантно относительно группы Лоренца.

Предложение 1.7 имеет любопытное физическое следствие. Отметим сначала, что в релятивистской механике нет абсолютного, не зависящего от выбора системы отсчета, понятия одновременности. Иными словами, если в одной системе отсчета два события были одновременными, то им соответствуют точки с координатами $(x_1^0, x_1^1, x_1^2, x_1^3)$ и $(x_2^0, x_2^1, x_2^2, x_2^3)$, причем $x_1^0 = x_2^0$. В другой системе координат, связанной с первой гиперболическим поворотом, равенство временных координат уже не будет выполняться. Аналогично, отсутствует абсолютное, т. е. не зависящее от системы отсчета понятие о событиях, происходящих в одной точке пространства $\mathbb{R}^3$. В самом деле, если в одной системе отсчета два события происходили в разное время, но в одной точке $\mathbb{R}^3$, то им соответствуют точки с координатами $(x_1^0, x_1^1, x_1^2, x_1^3)$ и $(x_2^0, x_2^1, x_2^2, x_2^3)$, причем $x_1^j = x_2^j$, $j = 1, 2, 3$. В другой системе координат, связанной с первой гиперболическим поворотом, равенство пространственных координат уже не будет выполняться.

Оказывается, что если интервал между событиями O и X времениподобен, то существует система отсчета, к которой эти события происходят в одной точке пространства. В самом деле, пусть $e = \dfrac{OX}{\sqrt{\|OX\|^2}}$. Тогда по предложению 1.7 вектор e можно дополнить до ортонормированного базиса векторами из $\mathbb{R}^3$. Этот базис задает систему отсчета, в которой у вектора OX пространственные координаты нулевые. Аналогично можно показать, что если интервал между событиями O и X пространственноподобен, то существует система отсчета, к которой эти события происходят одновременно.

Для физики важно, что если интервал между событиями O и X светоподобен, т. е. $\|OX\| < 0$, то между ними отсутствует причинная связь.

1.11. Гладкость группы Лоренца. Касательное пространство в единице. В этом и следующем параграфах и следующем параграфах мы обсудим несколько вопросов, связанных с гладкостью группы Лоренца L. В первую очередь нас интересуют гладкие однопараметрические подгруппы группы L. Они понадобятся нам в дальнейшем при изучении симметрий уравнений поля и при выводе выражений для сохраняющихся величин (динамических инвариантов полей). Затем мы покажем, что группа L, рассматриваемая как подмножество в $M_4(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^{16}$, является в нем гладким подмногообразием. Аналогичное рассуждение понадобится нам при изучении спинорной группы.

Сначала опишем свойства вложения $L \subset M_4(\mathbb{R})$ более подробно. Группа Лоренца является *группой Ли* — гладким многообразием с гладкими операциями умножения и взятия обратного элемента. Кроме того, L — подгруппа в $GL_4(\mathbb{R})$. Напомним, что $GL_4(\mathbb{R})$ является открытым множеством в $M_4(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^{16}$, так как состоит из матриц с отличным от нуля определителем. Нетрудно видеть, что $GL_4(\mathbb{R})$ является группой Ли. Группа Лоренца является подмногообразием в $GL_4(\mathbb{R})$, т. е. L — подгруппа Ли в $GL_4(\mathbb{R})$.

Теорема 1.8. *Группа Лоренца L является гладким подмногообразием в $\mathbb{R}^{16} = M_4(\mathbb{R})$. Кроме того, L замкнуто в $\mathbb{R}^{16} = M_4(\mathbb{R})$.*

Доказательства гладкости операций умножения и взятия обратного элемента намного проще и мы оставляем их читателю в качестве упражнения.

Напомним определение и основные свойства матричной экспоненты. Рассмотрим в пространстве матриц $M_n(\mathbb{R})$ норму $\|A\|^2 = \operatorname{tr} A^T A = \sum\limits_{j,k} a_{jk}$. Эта норма является матричной, т. е. $\|AB\| \le \|A\| \cdot \|B\|$. Кроме того, $\|A\| = \|A^T\|$. В случае, когда $A \in M_4(\mathbb{R})$, легко проверить, что $\|GA\| = \|AG\| = \|A\|$, где $G = G_{1,3}$. Последние два свойства несколько упростят дальнейшие рассуждения.

Пусть $X \in M_n(\mathbb{R})$. Тогда *экспонентой* $e^X = \exp X$ матрицы X называется сумма ряда $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{X^k}{k!}$.

Утверждение 1.9. (a) *Ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{X^k}{k!}$ сходится по норме для любой матрицы X*

(b) *Отображение* $\exp : M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})$, $X \mapsto \exp X$, *является C^∞–гладким, если рассматривать его как функцию элементов матрицы X.*

(c) *Отображение* $t \mapsto e^{tX}$ *является C^∞–гладким отображением $\mathbb{R} \to M_n(\mathbb{R})$ для любой матрицы $X \in M_n(\mathbb{R})$.*

(d) *Имеет место равенство* $\dfrac{d}{dt} e^{tX} = X\, e^{tX} = e^{tX}\, X$.

(e) *Если $[X, Y] = XY - YX = 0$, то $e^{X+Y} = e^X e^Y = e^Y e^X$. В частности, $e^{sX} e^{tX} = e^{(t+s)\,X}$. Кроме того, e^X всегда обратима.*

(f) *Имеет место равенство* $\det e^X = e^{\operatorname{tr} X}$. *В частности,* $\det e^X \ne 0$.

□

Замечание. Пункт (c) мы привели в явном виде потому, что в ряде случаев достаточно опираться на него (например, см. утверждение 1.10), а не более общий пункт (b). Кроме того, доказательство пункта (c) проще.

Определение 1.5. Будем говорить, что задана *однопараметрическая группа* в группе Лоренца, если задан гомоморфизм $A : \mathbb{R} \to L$. Это означает, что в группе Лоренца задана кривая $A(t)$, которая при $t = 0$ проходит через единицу группы, т. е. $A(0) = E$, и кроме того, для всех $s, t \in \mathbb{R}$ выполнено равенство

$$A(s)A(t) = A(s+t).$$

Мы будем рассматривать только *гладкие* однопараметрические подгруппы, т. е. такие, что элементы матрицы $A(t)$ являются гладкими функциями от t.

Обозначим через $T_E L$ пространство матриц $Y \in M_4(\mathbb{R})$, для которых матрица GY кососимметрична. Если матрица Y состоит из элементов y_μ^ν, где $\mu, \nu =$

$0, \dots, 3$, то

$$GY = \begin{pmatrix} y_0^0 & y_1^0 & y_2^0 & y_3^0 \\ -y_0^1 & -y_1^1 & -y_2^1 & -y_3^1 \\ -y_0^2 & -y_1^2 & -y_2^2 & -y_3^2 \\ -y_0^3 & -y_1^3 & -y_2^3 & -y_3^3 \end{pmatrix}.$$

Поэтому Y имеет вид

$$Y = \begin{pmatrix} 0 & y_1^0 & y_2^0 & y_3^0 \\ y_1^0 & 0 & y_2^1 & y_3^1 \\ y_2^0 & -y_2^1 & 0 & y_3^2 \\ y_3^0 & -y_3^1 & -y_3^2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Пространство $T_E L$ имеет размерность 6. В дальнейшем мы увидим, что $T_E L$ является касательным пространством к L в точке E.

Утверждение 1.10. (a) *Если $A(t)$ — однопараметрическая подгруппа группы Лоренца, то $A'(0) \in T_E L$.*

(b) *Пусть $Y \in T_E L$. Тогда $A(t) = \exp(tY)$ является однопараметрической группой группы Лоренца. Для различных Y получаются разные однопараметрические группы.*

(c) *Однопараметрическая подгруппа $A(t)$ однозначно определяется значением своей производной $A'(t)$ в 0. Именно, $A(t) = \exp(tY)$, где $Y = A'(0)$.*

Доказательство. Пункт (a). Имеем равенство $A(t)^t G A(t) = G$. Дифференцируя его по t и подставляя $t = 0$, получаем $(A')^{\mathrm{T}}(0)G + GA'(0) = 0$. Отсюда получаем, что $GA'(0)$ кососимметрическая. Пункт (b) очевидным образом следует из предложения 1.9.

Для доказательства пункта (c) выведем дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет однопараметрическая группа $A(t)$. Для этого продифференцируем соотношение $A(s+t) = A(s)A(t)$ по s и подставим $s = 0$. Получим

$$\frac{d}{dt} A(t) = YA(t),$$

где $Y = A'(0)$. Из предложения 1.9(d) следует, что функция $\exp(tY)$ также удовлетворяет этому уравнению. Остается заметить, что начальные условия $A'(0) = Y$ и $\left.\frac{d}{dt}\exp(tY)\right|_{t=0} = Y$ совпадают, поэтому $A(t) = \exp(tY)$ по теореме о единственности решения дифференциального уравнения. $\square$

Из равенства 1.9(d) следует, что $\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} e^{tX} = X$. Это в точности означает, что дифференциал отображения $X \to e^X$ при $X = 0$ является тождественным отображением:

$$d_0 = \mathrm{id} : M_n(\mathbb{R}) = T_0 M_n(\mathbb{R}) \to T_E M_n(\mathbb{R}) = M_n(\mathbb{R}).$$

Отсюда следует, что существуют окрестность U_1 точки $0 \in M_n(\mathbb{R})$ и окрестность V_1 точки $E \in M_n(\mathbb{R})$, для которых $\exp : U_1 \to V_1$ является диффеоморфизмом. Без ограничения общности можно считать, что если $Y \in V_1$, то $\|Y - E\| < 1$. Тогда нетрудно проверить, что обратное к exp отображение $V_1 \to U_1$ задается рядом логарифма

$$\ln Y = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}(Y-E)^k}{k}.$$

Стоит отметить, что матричная экспонента не является вложением, поэтому об обратном отображении можно говорить только сузив область определения экспоненты.

Упражнение 5. (a) Приведите пример матрицы Y, для которой $\ln\exp Y \neq Y$.

(b) Приведите пример матрицы Y, для которой $\exp\ln Y \neq Y$.

(c) Покажите, что exp, вообще говоря, не является ни наложением, ни вложением.

Утверждение 1.11. *Существуют окрестность* $U \subset U_1$ *точки* $0 \in M_4(\mathbb{R})$ *и окрестность* $V \subset V_1$ *точки* $E \in M_4(\mathbb{R})$, *для которых* $\exp : U \to V$ *диффеоморфизм, причем выполнены условия:*
(i) *если* $Y \in V$, *то* $Y^{-1} \in V$,
(ii) *если* $Y_1, Y_2 \in U$, *то* $Y_1 + Y_2 \in U_1$,
(iii) *если* $Y \in U$, *то* $Y^T \in U$ *и* $-Y \in U$,
(iv) *если* $Y \in U$, *то* $GYG \in U$,
(v) *окрестность* U *ограничена.*

Доказательство. Поскольку множество U_1 открыто в $M_4(\mathbb{R})$, то существует шар с центром в 0 и некоторым радиусом ρ, целиком содержащийся в U_1. В качестве U рассмотрим открытый шар с центром в 0 и радиусом $\rho/2$. Легко видеть, что тогда свойства (iii) и (iv) выполняются в силу нашего выбора нормы в $M_4(\mathbb{R})$. Свойство (ii) выполняется, так как если $\|Y_1\|$ и $\|Y_2\|$ меньше $\rho/2$, то $\|Y_1 + Y_2\| \leq \|Y_1\| + \|Y_2\| < \rho$.

Положим $V = \exp(U)$. Пусть $Z \in V$. Тогда $Z = e^Y$, для некоторой (впрочем, единственной) матрицы $Y \in U$. Как показывает (iii), $-Y \in U$. Из утверждения 1.9(e) получаем, что $e^{-Y}e^Y = E$, т. е. $Z^{-1} = e^{-Y} \in V$. □

Следствие 1.12. *Существуют окрестности* $U' \subset U$ *точки* $0 \in M_4(\mathbb{R})$ *и окрестность* $V' \subset V$ *точки* $E \in M_4(\mathbb{R})$, *для которых* $\exp : U' \to V'$ *диффеоморфизм и выполнены условия:*
(i) *если* $Y \in V'$, *то* $Y^{-1} \in V'$,
(ii) *если* $Y_1, Y_2 \in V'$, *то* $Y_1^{-1}Y_2 \in V$.

Доказательство. Поскольку умножение в $M_4(\mathbb{R})$ непрерывно, то найдется такая окрестность V_2 точки $E \in M_4(\mathbb{R})$, для которой $V_2 \cdot V_2 \subset V$, где V — окрестность из предыдущего утверждения. Теперь в качестве U' рассмотрим произвольный открытый шар с центром в 0, содержащийся в окрестности $\ln V_2$, и положим $V' = \exp(U')$. Тогда первое свойство выполнено потому, что шар U' симметричен относительно 0, а второе — потому, что $V' \subset V_2$. □

Основная трудность в теореме 1.8 состоит в доказательстве следующего факта.

Утверждение 1.13. $Y \in T_E L \cap U$ *тогда и только тогда, когда* $e^Y \in L \cap V$.

Доказательство. Пусть $Y \in T_E L \cap U$, тогда $e^Y \in V$ по построению окрестностей U и V. Из утверждения 1.10 следует, что e^tY принадлежит L для всех $x \in \mathbb{R}$. Следовательно, $e^Y \in L \cap V$.

Обратно, предположим, что $Z \in L \cap V$. Покажем, что $Y = \ln Z \in U \cap T_E L$. Ясно, что $Y \in U$; остается проверить, что $Y \in T_E L$, иными словами, что выполняется равенство $(GY)^T + GY = 0$. Нам удобнее проверять равенство $GY^TG + Y = 0$. Заметим, что $G\left(\sum\limits_{k=1}^{N} \dfrac{(Z-E)^k}{k}\right)^T G = \sum\limits_{k=1}^{N} \dfrac{(GZ^TG - E)^k}{k}$. Переходя к пределу при $N \to \infty$, получаем равенство $G(\ln Z)^T G = \ln(GZ^TG)$. По предположению $Z \in L$, поэтому $\ln(GZ^TG) = \ln(Z^{-1})$. Таким образом, нам осталось показать, что $\ln(Z^{-1}) + \ln Z = 0$.

Теперь заметим, что $Z^{-1} - E$ и $Z - E$ коммутируют, поэтому коммутируют любые многочлены от них, следовательно, $\ln(Z^{-1})$ и $\ln Z$ также коммутируют. Таким образом, $e^{\ln(Z^{-1})+\ln Z} = e^{\ln(Z^{-1})}e^{\ln Z} = Z^{-1}Z = E$.

Напомним, что $Z^{-1} \in V$ по построению окрестностей U и V, поэтому $\ln(Z^{-1}) \in U$. По утверждению 1.11(ii) $\ln(Z^{-1}) + \ln Z \in U_1$. Поскольку экспонента задает взаимно однозначное отображение окрестности U_1 на окрестность V_1, то матрица $\ln(Z^{-1}) + \ln Z$ равна 0. $\square$

Доказательство теоремы 1.8. Напомним, что множество N является *подмногообразием размерности* k в $\mathbb{R}^N$, если для любой точки $A \in N$ найдутся такая ее окрестность $V_A \subset \mathbb{R}^N$ и система локальных координат $(y^1, \ldots, y^N)$ в V_A, что пересечение $N \cap V_A$ задается системой уравнений $h^1(y) = h^2(y) = \ldots = h^{N-k}(y) = 0$ для подходящих гладких функций $h^j, j = 1, \ldots, N-k$ на V_A, причем в точках $N \cap V_A$ ранг матрицы частных производных $\operatorname{rk}\left(\dfrac{\partial h^j}{\partial y^k}\right)$ максимален и равен $N - k$.

В нашем случае такие окрестности указать просто, именно, для $A \in L$ положим $V_A = A \cdot V$, где V — окрестность из утверждения 1.11. Более точно, V_A состоит из всевозможных произведений вида $A \cdot Y$, где $Y \in V$. Теперь выберем координаты в V_A. Можно было бы в качестве координат взять матричные элементы матрицы $Z \in V_A$. Но в этом случае нам будет не очень удобно вычислять ранг матрицы, составленной из частных производных функций, задающих $L \cap V_A$.

Для $Z \in V_A$ обозначим через y^μ_ν элементы матрицы $Y(Z) = \ln(A^{-1} \cdot Z)$. Их можно взять за координаты в V_A, поскольку отображение $Z \mapsto \ln A^{-1}Z$ является диффеоморфизмом V_A на U. Как следует из утверждения 1.13, $Z \in V_A \cap L$ тогда и только тогда, когда матрица $G \cdot \ln(A^{-1} \cdot Z)$ кососимметрична, то есть выполнено равенство

$$g_{\alpha\mu}y^\mu_\beta + g_{\beta\mu}y^\mu_\alpha = 0.$$

Таким образом, в выбранных нами координатах y^μ_ν пересечение $V_A \cap L$ задается просто напросто системой линейных уравнений. Легко среди этих 16 уравнений, соответствующих всевозможным значениям индексов $\alpha, \beta = 0, \ldots, 3$, имеется 6 пар совпадающих — они соответствуют неравным значениям α и β, записанным в разном порядке. Тем самым, пересечение $V_A \cap L$ задается десятью уравнениями $g_{\alpha\mu}y^\mu_\beta + g_{\beta\mu}y^\mu_\alpha = 0$ при $\alpha \leq \beta$. Предоставляем читателю возможность самому убедиться в том, что матрица, составленная из частых производных десяти функций $g_{\alpha\mu}y^\mu_\beta + g_{\beta\mu}y^\mu_\alpha$, $\alpha \leq \beta$, по всевозможным переменным y^μ_ν, имеет ранг 10. Тем самым, мы проверили, что L — гладкое подмногообразие в $\mathbb{R}^16$.

Осталось показать, что L замкнуто в $\mathbb{R}^{16}$. Пусть последовательность, состоящая из $A_k \in L$ сходится к $A \in M_4(\mathbb{R})$. Докажем, что $A \in L$. Заметим, прежде всего, что в силу непрерывности определителя $\det A = \pm 1$, поэтому A обратима. Рассмотрим окрестность $A \cdot V'$, где V' — окрестность точки $E \in M_4(\mathbb{R})$ из следствия 1.12. Тогда существует такое натуральное число N, что для всех $n \geq N$ выполнено $A_n \in A \cdot V'$. Отсюда $A^{-1}A_n \in V'$ для всех $n \geq N$. По следствию 1.12 имеем $A_N^{-1}A_n = (A^{-1}A_N)^{-1}(A^{-1}A_n) \in V$. Рассмотрим последовательность $Y_n = \ln(A_N^{-1}A_n)$. Она содержится в окрестности U, которая по построению ограничена. Поэтому, при необходимости переходя к подпоследовательности, можно считать, что Y_n сходится к некоторому $Y \in \bar{U}$.

Легко видеть, что $Y \in T_E L$. Отсюда получаем, что A представляется в виде $\lim\limits_{n\to\infty} A_N(A_N^{-1}A_n) = \lim\limits_{n\to\infty} A_N \exp(Y_n) = A_N \exp(Y)$ и поэтому принадлежит L. □

1.12. Дополнение. Наконец зададимся вопросом — почему при изучении преобразований, сохраняющих метрику пространства Минковского, мы ограничиваемся только аффинными преобразования. Оказывается, это неслучайно.
Утверждение 1.14. *Пусть диффеоморфизм $\varphi : M \to M$ сохраняет метрику пространства Минковского*

$$ds^2 = (dx^0)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2.$$

Тогда φ является аффинным преобразованием и, следовательно, лежит в группе Пуанкаре.

Доказательство. В самом деле, пусть

$$x \to y = y(x)$$

является таким диффеоморфизмом. Тогда должно выполняться условие

$$g_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta} \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^\delta} \frac{\partial y^\beta}{\partial x^\delta}.$$

Дифференцируя это соотношение по x^ε, имеем

$$g_{\alpha\beta} \frac{\partial^2 y^\alpha}{\partial x^\gamma \partial x^\varepsilon} \frac{\partial y^\beta}{\partial x^\delta} + g_{\alpha\beta} \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^\gamma} \frac{\partial^2 y^\beta}{\partial x^\delta \partial x^\varepsilon} = 0 \ . \tag{15}$$

Для того, чтобы вычислить вторые производные, прибавим к этому выражению такое же уравнение с переставленными индексами γ и ε и вычтем уравнение с переставленными индексами ε и δ. В результате получим

$$g_{\alpha\beta} \left(\frac{\partial^2 y^\alpha}{\partial x^\gamma \partial x^\varepsilon} \frac{\partial y^\beta}{\partial x^\delta} + \frac{\partial^2 y^\beta}{\partial x^\delta \partial x^\varepsilon} \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^\gamma} + \frac{\partial^2 y^\alpha}{\partial x^\varepsilon \partial x^\gamma} \frac{\partial y^\beta}{\partial x^\delta} + \right. \\ \left. + \frac{\partial^2 y^\beta}{\partial x^\delta \partial x^\gamma} \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^\varepsilon} - \frac{\partial^2 y^\alpha}{\partial x^\gamma \partial x^\delta} \frac{\partial y^\beta}{\partial x^\varepsilon} - \frac{\partial^2 y^\beta}{\partial x^\varepsilon \partial x^\partial} \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^\gamma} \right) = 0 \ . \tag{16}$$

Так как $g_{\alpha\beta} = g_{\beta\alpha}$, то последнее и предпоследнее слагаемые сокращаются соответственно со вторым и четвертым, а первое и третье слагаемые оказываются равными. Отсюда вытекает, что

$$2g_{\alpha\beta} \frac{\partial^2 y^\alpha}{\partial x^\gamma \partial x^\varepsilon} \frac{\partial y^\beta}{\partial x^\delta} = 0 \ . \tag{17}$$

Поскольку $y = y(x)$ —диффеоморфизм, то $\dfrac{\partial y^\beta}{\partial x^\delta}$ —невырожденная матрица. Следовательно

$$\frac{\partial^2 y^\alpha}{\partial x^\gamma \partial x^\varepsilon} = 0 \ . \tag{18}$$

Общее решение этого уравнения — линейная функция

$$y^\alpha = \Lambda^\alpha_\beta x^\beta + a^\alpha, \tag{19}$$

что и требовалось. □