

План:

1. Предмет и методы механики сплошной среды.
2. Основные гипотезы.
3. Изучение движения сплошной среды с точки зрения Лагранжа и с точки зрения Эйлера.

1. Предмет МСС.

Ранее в *теоретической механике* изучалось движение материальной точки, дискретных систем материальных точек и абсолютно твердого тела. При этом, в модели абсолютно твердого тела считалось, что расстояние между его точками в процессе движения не меняется.

Механика сплошной среды—обширная часть механики, посвященная движению деформируемых тел: газообразных, жидких и твердых.

В *механике сплошной среды* рассматривается движение таких материальных тел, которые заполняют пространство непрерывно, сплошным образом, и *расстояние между точками которых во время движения меняется*.

Моделями механики сплошной являются модели жидкости, газа, плазмы, упругого тела, пластических сред и т.д. Рассматриваются также *особые среды - поля*: *электромагнитное поле, поле излучения, поле тяготения*.

Методы МСС.

Важнейшей целью механики сплошной среды является установление общих свойств и законов движения деформируемых тел.

В механике сплошной среды разрабатываются **методы сведения механических задач к математическим**, т.е. к задачам об отыскании некоторых чисел или числовых функций с помощью различных математических операций.

Само **решение конкретных задач механики сплошной среды также относится к механике сплошной среды**.

Это объясняется тем, что **даже в простейших случаях** математически поставленные задачи механики сплошной среды получаются **очень трудными и неразрешимыми** эффективно **современно средствами математики**. Поэтому приходится видоизменять постановки задач и находить приближенные решения на основе различных механических гипотез и соображений.

Под влиянием механики сплошной среды ряд отраслей математики получил большое развитие: теория функций комплексного переменного, уравнения в частных производных, интегральные уравнения, вычислительные методы и др.

Проблемы МСС:

Назовем основные разрабатываемые механики сплошной среды:

- **Воздействие жидкости, газа и других деформируемых сред на движущиеся в них тела.**

Особым стимулом развития этой проблемы послужили технические задачи о движении самодетов, вертолетов, дирижаблей, снарядов, ракет, кораблей, подводных лодок; Защита тел от сгорания и сильного оплавления при входе тел с большими скоростями в плотные слои атмосферы.

задачи о создании различных двигательных приспособлений - таких, как водяные и воздушные винты.

-**Движение жидкости в ограниченных объемах.**

Например, в трубопроводах, насосах, турбинах, гидравлических машинах.

В этих задачах основное значение имеют законы взаимодействия жидкости с границами потока, в частности величина сопротивления твердых стенок.

-**Фильтрация - движение жидкости сквозь пористые среды.**

Нефтеотдача, движение грунтовых вод.

-**Гидростатика – равновесие жидкостей и тел, плавающих внутри и на поверхности жидкости.**

Звуковые волны, сейсмические процессы, волны на поверхности жидкости.

-**Неустановившиеся движения сред с химическими и физическими превращениями.**

Взрыв, детонация, горение, химическая технология, динамика теплоносителей.

-**Теория турбулентных движений.**

Очень сложные, нерегулярные, случайные движения, пульсирующие около средних регулярных процессов.

Такими свойствами обладают большинство движений газов и жидкостей.

-**Магнитная гидродинамика и движение ионизованных сред.**

Движение и равновесие твердых деформируемых тел. Теория упругости. Пластичность, остаточные деформации. Ползучесть, нарастание деформаций при неизменных внешних нагрузках.

-**Прочность и разрушение конструкций, образование и распространение трещин.**

-**Движение многофазных сред.**

Жидкость с пузырьками, газ с каплями, водонасыщенные грунты, пористые материалы, нефтеносные пласти, суспензии, эмульсии.

-**Композиционные материалы, прочность.**

-**Прогнозирование атмосферных потоков, метеорология.**

Прогнозирование динамики естественных и техногенных загрязнений в почве, воде, атмосфере, озоновом слое, околоземном космическом пространстве.

-**Биологическая механика.**

Движение крови, сокращение мышц.

Вытеснение одного биологического вида другим.

Распространение эпидемии.

-**Динамика транспортных потоков.**

-**Применение методов механики в экономике.**

2. Основные гипотезы.

При построении моделей описывающих поведение сплошных сред естественным с точки зрения физики является *подход основанный на кинетической теории* газов и плазмы. При этом учитывается, что все тела состоятся из элементарных частиц и методами статистической физики описывается взаимодействие этих частиц. При этом, основные уравнения (уравнения баланса , и уравнения переноса) в некоторых случаях (при $Kn \ll 1$) могут быть найдены точно если известны потенциалы взаимодействия между частицами.

Однако, сложное строение частиц и удерживающие их электрические силы взаимодействия не всегда известны. Приходится вводить дополнительные гипотезы о свойствах частиц и их взаимодействии.

Для газов низкой плотности и сильно плотных газов методы кинетической теории даже не разработаны.

Мы будем пользоваться *феноменологическим подходом*, основанным на применении основных законов механики и термодинамики к макроскопическому объему сплошной среды. Указанные законы являются основными аксиомами при таком подходе.

Кроме того, для замыкания полученной таким образом *системы уравнений баланса* постулируются линейные зависимости потоков от градиентов искомых функций-уравнения переноса. Коэффициенты этих уравнений можно определить экспериментально или взять из кинетической теории газов, если они там получены.

Заметим, что линейные уравнения переноса следуют и из кинетической теории газов.

Феноменологическая теория является эффективным средством построения моделей механики сплошной среды и решения практических важных задач.

1. Подчеркнем, что механика сплошной среды основана на **гипотезе сплошности**: предполагается, что среда занимает пространство непрерывно, сплошным образом.

Поля также считаются непрерывным континуумом.

Данные из физики свидетельствуют, что такой подход во многих случаях правомерен.

На первый взгляд это не так. Вообще все тела представляют собой совокупности разного сорта молекул, атомов, ионов и электронов.

Основная масса вещества сосредоточена в ядрах атомов. Например, плотность железа $\rho_{Fe} = 7,8 \text{ г/см}^3$, а плотность его ядерного вещества $\rho = 1,16 \cdot 10^{14} \text{ г/см}^3$, таким образом, $\frac{\rho_{Fe}}{\rho} = 7 \cdot 10^{-14}$.

При этом радиус ядра атома имеет порядок $R = 10^{-13} \text{ см}$, а радиус молекулы на пять порядков больше.

Т.е. по существу все тела "состоят из пустоты", так как объемы занимаемые телами много больше тех в которых сосредоточено само вещество.

Однако, хотя все тела и состоят из отдельных частиц, но их много в любом существенном для нас объеме.

Например, при обычных условиях ($0^\circ C, 1 atm$) один кубический сантиметр воздуха содержит $N = 2,687 \cdot 10^{19}$ молекул. В кубике с ребрами в одну тысячную сантиметра (**предел точности измерений в технике**) будет находиться $N = 27 \cdot 10^9$ частиц.

Кроме того, частицы находятся в постоянном хаотическом движении. Они постоянно сталкиваются между собой. Путь свободного пробега молекулы водорода в обычных условиях $l = 11,2 \cdot 10^{-6} \text{ см}$, $v_{cp} = 1692 \text{ м/с}$, для кислорода $l = 6,5 \cdot 10^{-6} \text{ см}$, $v_{cp} = 425 \text{ м/с}$, т.е. **одна молекула за одну секунду сталкивается примерно $6,54 \cdot 10^9$ раз**.

Поэтому тело можно приближенно рассматривать как среду заполняющую пространство сплошным образом.

Таким образом, гипотеза сплошности, используемая в механике сплошной среды эквивалентна предположению, что число Кнудсена $Kn = \frac{l}{L} \ll 1$. Здесь l - длина свободного пробега молекул, L - характерный размер задачи.

Другие гипотезы являются основой механики Ньютона. Мы не будем учитывать эффекты теории относительности.

Ньютонианская механика – это механика в евклидовых пространствах с абсолютным временем.

2. **Пространство – Длина вектора.** Введем метрику пространства, т.е. укажем способ определения длин в пространстве. Длина любого вектора выражается через его компоненты и скалярные произведения векторов базиса. Для определения длины вектора достаточно определить скалярные произведения векторов базиса

$$\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = g_{ij},$$

которые, вообще говоря в данной точке могут быть произвольными числами.

Квадрат длины вектора $d\vec{r}$ по определению будет равен

$$|d\vec{r}|^2 = ds^2 = d\vec{r} \cdot d\vec{r} = d\xi^i d\xi^j \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = g_{ij} d\xi^i d\xi^j,$$

а квадрат длины любого вектора

$$|\vec{A}|^2 = g_{ij} A^i A^j$$

Из условия инвариантности длины вектора $d\vec{r}$ относительно выбора системы координат следуют тензорные формулы преобразования g_{ij} .

Действительно,

$$|d\vec{r}|^2 = g'_{pq} d\eta^p d\eta^q = g_{ij} d\xi^i d\xi^j = g_{ij} \frac{\partial \xi^i}{\partial \eta^p} \frac{\partial \xi^j}{\partial \eta^q} d\eta^p d\eta^q = g_{ij} a_p^i a_q^j d\eta^p d\eta^q$$

где

$$a_p^i = \frac{\partial \xi^i}{\partial \eta_p}$$

коэффициенты, которые задают связь приращений координат $d\xi^i$ и $d\eta^p$.

Таким образом, величины g_{ij} следует рассматривать как ковариантные компоненты тензора g , который называется **фундаментальным метрическим тензором**.

Согласно определению скалярного произведения **метрический тензор является симметричным тензором**:

$$g_{ij} = g_{ji}$$

Квадратичная относительно приращений координат $d\xi^i$ форма $g_{ij} d\xi^i d\xi^j$ называется **фундаментальной квадратичной формой**, задающей метрику – расстояние между близкими точками пространства.

Из алгебры известно, что всякую квадратичную форму с постоянными коэффициентами можно привести к каноническому виду, т.е. в каждой выбранной точке можно найти такие координаты x^1, x^2, x^3 , что квадратичная форма записывается в виде суммы квадратов:

$$ds^2 = (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2$$

Заметим, что выполнить такого рода преобразование сразу во всем пространстве, вообще говоря нельзя, т.е. нельзя найти такую систему координат x^1, x^2, x^3 , чтобы во всем пространстве фундаментальная квадратичная форма могла быть записана в виде суммы квадратов.

Если такая система координат существует, то пространство называется **евклидовым**, если нет то **неевклидовым**. Пространство называется **псевдоевклидовым** если

$$ds^2 = \alpha_i dx_i^2$$

где

$$\alpha_i = \mp 1$$

В механике сплошной среды рассматриваются **Евклидовы пространства** - метрические пространства, в каждом из которых можно ввести единую для всех точек декартову систему координат. и расстояния между точками которого определяются по формуле

$$r = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$$

Напоминание. Пространство – совокупность точек, задаваемых с помощью чисел. Метрические пространства – в которых определены расстояния между точками.

На плоскости всегда можно ввести единую для всего пространства декартову систему координат. На поверхности сферы этого сделать нельзя.

3. Время -

Время, вообще говоря может зависеть от применяемой системы отсчета наблюдателя.

В МСС используется абсолютное время – время течет одинаково для всех наблюдателей (в поезде, самолете, аудитории....).

4. Система отсчета. Принцип относительности Галилея – Ньютона.

В ньютонианской механике **особенное физическое значение имеет рассмотрение движения относительно инерциальных систем координат**, движущихся относительно друг друга поступательно с постоянной скоростью. Наличие таких систем координат тесно связано с постулатами о евклидовости физического пространства и об абсолютном и одинаковом собственном времени для разных точек. Оно является основным постулатом механики Ньютона.

Все физические законы в физике Ньютона обычно формулируются в инерциальных системах координат и не зависят от выбора инерциальной системы координат. В этом состоит знаменитый

принцип относительности Галилея – Ньютона.

На практике в качестве исходной инерциальной системы координат можно выбрать декартову систему координат с центром в центре масс солнечной системы, в которой далекие звезды можно считать неподвижными.

3. Изучение движения сплошной среды с точки зрения Лагранжа и с точки зрения Эйлера.

1). Движение континиума. Об индивидуализации точек континиума.

Движение определяется по отношению к некоторой системе отсчета - системе координат. С ее помощью устанавливается соответствие между числами (координатами) и точками пространства.

Материальная точка движется относительно системы координат x^1, x^2, x^3 , если ее координаты меняются со временем

$$x^i = f^i(t), \quad (i = 1, 2, 3)$$

Таким образом, движущаяся точка в разные моменты времени отождествляется с разными точками пространства.

Движение точки известно, если известны функции f^i , называемые законом движения.

Изучение движения сплошной среды как целого, вообще говоря, недостаточно.

Определение. **Знать движение сплошной среды – это значит знать движение непрерывной совокупности точек (континиума), представляющей среду.**

Для этого необходимы правила индивидуализации отдельных, совершенно одинаковых с геометрической точки зрения точек континиума.

Индивидуальные точки сплошной среды можно, например задавать значениями их начальных координат ξ^1, ξ^2, ξ^3 .

Таким образом, для любой точки континиума, выделенной координатами ξ^1, ξ^2, ξ^3 , можно написать **закон движения**, в который входят функции уже не одной, как в случае движения точки, а четырех переменных – начальных координат ξ^1, ξ^2, ξ^3 и времени t .

$$x^i = x^i(\xi^1, \xi^2, \xi^3, t)$$

Если ξ^1, ξ^2, ξ^3 будут фиксированы, а t переменным, то эти функции дадут закон движения одной фиксированной точки континиума.

Если же ξ^1, ξ^2, ξ^3 будут переменными, а t –фиксировано, то они дадут распределение точек континиума в данный момент времени.

Если же переменными будут ξ^1, ξ^2, ξ^3 и t , то формулы определяют движение сплошной среды.

Для всякой частицы ξ^1, ξ^2, ξ^3 во всякий момент времени t закон движения указывает ее положение (относительно выбранной системы отсчета) – вектор $\vec{r}(\xi^1, \xi^2, \xi^3)$ трехмерного евклидова пространства.

Координаты ξ^1, ξ^2, ξ^3 , индивидуализирующие точки сплошной среды (или иногда функции от них), и время t называются **переменными Лагранжа**.

Непрерывность и взаимнооднозначность функций, задающих закон движения.

Будем предполагать, что функции входящие в закон движения континуума, непрерывны и имеют непрерывные частные производные по всем аргументам.

В последующем увидим, что во многих случаях предположение о непрерывности движения придется ослаблять и рассматривать такие движения, сами характеристики которых или их производные терпят разрывы на отдельных поверхностях (ударные волны).

Предположим также, что в каждый фиксированный момент времени $t = \text{const}$ функции $x^i = x^i(\xi^1, \xi^2, \xi^3, t)$ являются взаимнооднозначными функциями.

В этом случае якобиан преобразования $\Delta \neq 0$ во всех точках некоторого конечного объема. Закон движения в этом случае можно разрешить относительно ξ^1, ξ^2, ξ^3 и представить решение в виде непрерывных однозначных функций

$$\xi^i = \xi^i(x^1, x^2, x^3, t)$$

Точка зрения Лагранжа и точка зрения Эйлера. Отличие точек зрения Лагранжа и Эйлера на изучение движения сплошной среды. Переход от переменных Лагракжа к переменным Эйлера и наоборот.

Использование в качестве независимых переменных ξ^1, ξ^2, ξ^3 и времени t составляет **точку зрения Лагранжа** на изучение движения сплошной среды. Она существенно опирается на описание истории движения каждой точки сплошной среды в отдельности.

Такое описание на практике часто оказывается слишком подробным и сложным, однако оно всегда подразумевается при формулировке физических законов.

С **точки зрения Эйлера** нас интересует не история движения индивидуальных точек сплошной среды, а то, что происходит в разные моменты времени в данной геометрической точке пространства, связанного с системой отсчета наблюдателя.

Пример: движение воды в реке.

Геометрические координаты пространства x^1, x^2, x^3 и время t носят название **переменных Эйлера**.

Движение с точки зрения Эйлера считается известным, если параметры течения скорость, ускорение, температура и т.д. заданы как функции x^1, x^2, x^3 и времени t .

$$\vec{v} = \vec{v}(x^1, x^2, x^3, t), \quad \vec{a} = \vec{a}(x^1, x^2, x^3, t), \quad T = T(x^1, x^2, x^3, t)$$

При фиксированных x^1, x^2, x^3 и переменном t эти функции определяют изменение со временем скорости, ускорения и температуры в данной точке пространства. При фиксированном t и переменных x^1, x^2, x^3 –распределение характеристик движения в пространстве в данный момент времени.

При переменных x^1, x^2, x^3, t –распределение характеристик движения в пространстве в разные моменты времени.

Таким образом, с точки зрения Лагранжа мы интересуемся законами изменения скорости, ускорения, температуры и других величин для данной индивидуальной точки сплошной среды, а с точки зрения Эйлера в данном месте. С точки зрения Эйлера мы выделяем некоторую область пространства и хотим знать все данные о частицах которые в нее приходят.

Ясно, что математически точка зрения Эйлера отличается от точки зрения Лагранжа только тем, что в первой переменными являются координаты точек пространства x^1, x^2, x^3 и время t , а во второй – параметры индивидуализирующие среду ξ^1, ξ^2, ξ^3 , и время t .

Задания движения с точек зрения Эйлера и Лагранжа в механическом отношении эквивалентны друг другу.

Основной кинематической характеристикой при эйлеровом описании является поле скоростей $\vec{v}(x, t)$, где $x = (x^1, x^2, x^3)$.

Если параметры движения известны с точки зрения Лагранжа

$$A_i = A_i(\xi^1, \xi^2, \xi^3, t),$$

разрешив закон движения получим

$$\xi^i = \xi^i(x^1, x^2, x^3, t)$$

Используя эти выражения перейдем к переменным Эйлера при определении параметров движения.

Если параметры движения известны с точки зрения Эйлера, то используя закон также движения легко перейти к переменным Лагранжа.

Закон движения легко получить используя распределение скоростей, заданное с точки зрения Эйлера.

Если задано распределение скорости с точки зрения Эйлера, то на соотношения

$$\frac{dx}{dt} = u(x, y, z, t), \quad \frac{dy}{dt} = v(x, y, z, t), \quad \frac{dz}{dt} = w(x, y, z, t),$$

можно смотреть как на систему трех обыкновенных дифференциальных уравнений относительно x, y, z .

Решив эту систему найдем x, y, z как функции t и трех произвольных постоянных C_1, C_2, C_3 , которые определяются по значениям x, y, z в некоторый данный момент t_0 и, следовательно, являются параметрами индивидуализирующими точку сплошной среды - переменными Лагранжа.

Общие свойства взаимно-однозначных непрерывных отображений.

Заметим, что совокупность значений x^1, x^2, x^3 образует в пространстве область D , занимаемую телом в данный момент времени t .

Если координаты ξ^1, ξ^2, ξ^3 рассматривать как значения координат x^1, x^2, x^3 в некоторый другой момент времени t_0 , то область D_0 соответствует объему, занятому телом в момент t_0 .

Закон движения можно рассматривать как взаимнооднозначное и непрерывное отображение областей D и D_0 .

Общие топологические свойства таких преобразований заключаются в том, что любой объем V_0 переходит в объем V , поверхность S_0 в поверхность S , линия L_0 в линию L . Причем, замкнутая поверхность переходит в замкнутую поверхность, а замкнутая линия – в замкнутую линию.

Например, объем не может перейти в точку, так как при этом нарушилось бы условие взаимной однозначности. Замкнутая линия не может перейти в незамкнутую линию, так как при этом нарушилось бы условие непрерывности.

Сопутствующая система координат.

В случае движения сплошной среды можно ввести сопутствующую систему координат.

При этом, наряду с координатами x^1, x^2, x^3 лагранжевы координаты индивидуальных точек ξ^1, ξ^2, ξ^3 можно рассматривать как другие координаты тех же точек пространства в области D .

Соответствующая система координат ξ^1, ξ^2, ξ^3 в том же пространстве образует подвижную деформируемую криволинейную систему координат, которая называется сопутствующей системой координат.

Так, если в начальный момент t_0 выбрать в сплошной среде некоторые координатные линии ξ^1, ξ^2, ξ^3 , состоящие из точек сплошной среды (начальную лагранжеву систему координат), то в следующий момент времени они вместе с точками континуума вновь перейдут в координатные линии сопутствующей системы. Однако, если в начальный момент они были выбраны прямыми, то в следующий момент времени они будут, вообще говоря, искривленными.

Таким образом, если рассматривать систему координат, связанную с частицами сплошной среды, то она с течением времени меняется. Выбор такой системы координат в любой момент времени в нашей власти, но в следующие моменты времени она уже не подвластна нам, так как она "вморожена" в среду и деформируется вместе с ней. **Такая вмороженная в среду система координат и определяется как сопутствующая система координат.**

Все точки сплошной среды всегда покоятся относительно подвижной сопутствующей системы координат.

Понятие сопутствующей системы координат является обобщением на случай сплошной среды собственной системы координат твердого тела в теоретической механике.

Всегда, когда мы говорим о движении сплошной среды, необходимо индивидуализировать точки, и следовательно пользоваться лагранжевыми координатами. Поэтому всегда при рассмотрении движения сплошной среды подразумевается наличие системы отсчета x^1, x^2, x^3 , относительно которой рассматривается движение, и сопутствующей системы координат.

Определения скорости, ускорения частицы сплошной среды; индивидуальной (материальной или полной производной).

Скорость и ускорение частиц сплошной среды определяются соотношениями

$$\vec{v}(\xi, t) = \frac{\partial \vec{r}(\xi, t)}{\partial t}, \quad \vec{a}(\xi, t) = \frac{\partial \vec{v}(\xi, t)}{\partial t},$$

где

$$\xi = (\xi^1, \xi^2, \xi^3)$$

Вообще скорость изменения некоторой величины A в индивидуальной частице сплошной среды называется **индивидуальной, материальной, или полной производной по времени этой величины**. При лагранжевом описании – это просто частная производная

$$\frac{\partial A(\xi, t)}{\partial t}$$

Индивидуальная производная по времени величины A при эйлеровом описании будет

$$\frac{\partial A(\xi, t)}{\partial t} = \frac{dA(x, t)}{dt} = \frac{\partial A(x, t)}{\partial t} + v^1 \frac{\partial A(x, t)}{\partial x^1} + v^2 \frac{\partial A(x, t)}{\partial x^2} + v^3 \frac{\partial A(x, t)}{\partial x^3}$$

Здесь $v^1 = v^1(x, t)$, $v^2 = v^2(x, t)$, $v^3 = v^3(x, t)$ – компоненты вектора скорости среды $\vec{v}(x, t)$ в системе координат x^i .

При этом, первое слагаемое носит название **локальной производной**, а последние три в сумме составляют **конвективную производную**.

В частности ускорение $\vec{a}(x, t)$ при эйлеровом описании находится по формуле

$$\vec{a} = \frac{\partial \vec{v}(x, t)}{\partial t} + v^1 \frac{\partial \vec{v}(x, t)}{\partial x^1} + v^2 \frac{\partial \vec{v}(x, t)}{\partial x^2} + v^3 \frac{\partial \vec{v}(x, t)}{\partial x^3}$$

План:

1. Введение.
2. Тензор.
3. Тензор Леви–Чевиты. Вектор двойственный тензору второго ранга. Векторное произведение.
4. Главные оси симметричного тензора второго ранга.
5. Тензорные поля.
6. Интегральные теоремы.
7. Криволинейные координаты.

1. Введение.

Геометрические или физические величины, например, скорость частицы, удобно рассматривать в соответствующих системах координат. В то же время подобные величины не зависят от выбора системы координат, что может быть использовано при их изучении. По координатам в *одной* системе можно однозначно определить координаты этих величин в любой другой системе отсчета.

Способ преобразования координат при переходе от одной системы к другой можно положить в основу классификации физических или геометрических величин. Стремясь к тому, чтобы структура геометрических или физических уравнений не отражала особенностей используемой системы координат уравнения записывают в такой форме, чтобы они были справедливы в любой системе координат.

Осуществление этой идеи в самом общем виде приводит к **тензорному исчислению**. Его изложение в общем виде здесь не предоставляется целесообразным, в частности, потому, что это отвлечет внимание от механического содержания математических соотношений. Поэтому в дальнейшем будет использоваться прямоугольная декартова система координат и **декартовы тензоры**.

2. Тензор.

Термин тензор (от слова tension - напряжение) вначале появился в механике сплошной среды, где каждому элементу поверхности, проходящему через фиксированную точку, ставится в соответствие отнесенный к этому элементу вектор напряжений. Условия равновесия показывают, что **соотношение между направлением нормали рассматриваемого элемента поверхности и вектором напряжений линейно и однородно относительно направляющих косинусов нормали**. Таким образом, напряженное состояние в какой-либо точке сплошной среды определяется при помощи тензора – **тензора напряжений** в этой точке.

Определение 1.

Для любого направления в пространстве тензору ранга n можно поставить в соответствие тензор ранга $n - 1$ посредством линейного и однородного относительно направляющих косинусов соотношения.

При этом скаляр соответствует тензору нулевого ранга, а вектор – тензору первого ранга.

Например, относительно системы координат x_i тензор $\hat{\cdot}$ ранга n определяется при помощи трех тензоров $n - 1$ ранга, а именно, своими проекциями $\hat{1}, \hat{2}, \hat{3}$ на координатные направления. Значение $\hat{\cdot}$ для направления μ дается формулой

$$\hat{(\mu)} = \hat{1}\cos(\mu, x_1) + \hat{2}\cos(\mu, x_2) + \hat{3}\cos(\mu, x_3)$$

Можно получить также определение связанное с преобразованием систем координат.

Если направление μ будет совпадать с направлением x'_p второй системы координат, то, вследствие равенства $\mu_i = c_{pi}$, значение тензора $\hat{\cdot}$ по направлению x'_p определяется **тензорным уравнением**

$$\hat{'}_p = c_{ip} \hat{i}$$

где Θ_i , Θ'_p – тензоры ранга $n - 1$, представляющие собой проекции тензора $\tilde{\Theta}$ по направлениям x_i и x'_p соответственно.

Переходя к компонентам этого тензора в штрихованной системе координат и используя полученную ранее формулу для преобразования компонент тензоров ранга $n - 1$, получаем формулу для преобразования компонент тензора ранга n :

$$\Theta'_{pqr\dots} = c_{ip}c_{jq}c_{kr}\dots\Theta_{ijk\dots}$$

Действительно, если обозначить проекцию тензора Θ'_p на направление x'_q – тензор ранга $n - 2$ через Θ'_{pq} , а проекцию тензора Θ_i на направление x_j – также тензор ранга $n - 2$ через Θ_{ij} , то в соответствии с тензорным уравнением, получим

$$\hat{\Theta}'_{pq} = \mathbf{c}_{ip}\mathbf{c}_{jq}\hat{\Theta}_{ij}$$

Аналогично, обозначая проекцию тензора Θ'_{pq} на направление x'_r – тензор ранга $n - 3$ через Θ'_{pqr} , а проекцию тензора Θ_{ij} на направление x_k – также тензор ранга $n - 2$ через Θ_{ijk} , то в соответствии с тензорным уравнением, получим

$$\hat{\Theta}'_{pqr} = \mathbf{c}_{ip}\mathbf{c}_{jq}\mathbf{c}_{kr}\hat{\Theta}_{ijk}$$

Этот процесс можно продолжить пока не получим в качестве проекций тензоры нулевого ранга.
Следовательно приходим к следующему определению:

Определение 2.

В любой прямоугольной декартовой системе координат тензор ранга n определяется 3^n компонентами, которые при преобразовании координат

$$x'_j = c_{ij} x_i$$

преобразуются по формуле

$$\Theta'_{pqr\dots} = c_{ip}c_{jq}c_{kr}\dots\Theta_{ijk\dots}$$

Тензорные операции.

1. Умножение на скаляр. Умножение всех компонент тензора на один и тот же скаляр дает второй тензор того же ранга, который называется **произведением тензора на скаляр**.

$$\mathbf{T} = \lambda \mathbf{S}$$

2. Сложение тензоров. Сложение соответствующих компонент двух тензоров одинакового ранга дает третий тензор того же ранга, который называется **суммой двух тензоров**.

$$T_{ij} = R_{ij} + S_{ij}$$

3. Умножение тензоров. Совокупность всех произведений, содержащих по одной компоненте каждого из двух тензоров, образует третий тензор, называемый **произведением двух тензоров**. Ранг произведения равен сумме рангов сомножителей.

Например, произведение $T_{ijk} = R_{ij} S_k$ тензора второго ранга R_{ij} и вектора S_k представляет собой тензор третьего ранга.

Другой пример. Произведение $T = \vec{u} \vec{v}$ ($T_{ij} = u_i v_j$) называется **диадным произведением векторов**. Заметим, что это произведение двух векторов не обладает свойством коммутативности $\vec{v} \vec{u} = T^T$ – результат транспонирования тензора $T = \vec{u} \vec{v}$.

4. Свертка. Приравнивание двух буквенных индексов тензора ранга n дает тензор ранга $n - 2$ и называется **свертыванием тензора по этим индексам**.

Например, свертывание тензора второго ранга T_{ij} дает скаляр $T_{ii} = T_{11} + T_{22} + T_{33}$, который называется **следом** $Sp\mathbf{T}$ тензора.

Скалярное произведение векторов \vec{a} и \vec{b} можно рассматривать как след тензора $T_{ij} = a_i b_j$.

Другим примером свертывания служит **образование целых положительных степеней тензора второго ранга**.

Квадрат тензора T^2 определяется как тензор $= T_{ip} T_{pj}$, **куб T^3** – как $T_{ip} T_{pq} T_{qj}$, **четвертая степень T^4** – как $T_{ip} T_{pq} T_{qr} T_{r,j}$ и т.д.

5. Образование изомеров.

Перестановка двух индексов тензора дает другой тензор того же ранга, называемый **изомером тензора**.

Например, результат транспонирования тензора второго ранга – единственный изомер этого тензора.

Тензор называется **симметричным** относительно двух индексов если он равен своему изомеру, полученному при перестановке этих индексов.

Если же тензор равен своему изомеру с обратным знаком, то он называется **антисимметричным** относительно рассматриваемых индексов.

Утверждение. Любой тензор можно представить в виде симметричного и антисимметричного тензоров

$$T_{ij} = \frac{1}{2}(T_{ij} + T_{ji}) + \frac{1}{2}(T_{ij} - T_{ji})$$

Утверждение. Если тензор $S_{pqij\dots}$ симметричен, а тензор $T_{pqmn\dots}$ антисимметричен относительно индексов p и q , то справедливо равенство

$$S_{pqij\dots} T_{pqmn\dots} = 0$$

Действительно, сумма определяемая немыми индексами p и q , содержит, например, член соответствующий $p = 1, q = 2$, а также член, отвечающий $p = 2, q = 1$. Сумма этих двух членов равна нулю, так как $S_{12ij\dots} = S_{21ij\dots}$ и $T_{12mn\dots} = -T_{21mn\dots}$.

Используя этот факт, легко установить для произвольных тензоров второго ранга следующее тождество:

$$S_{ij} T_{ji} = (S_{(ij)} + S_{|ij|}) (T_{(ji)} + T_{|ji|}) = S_{(ij)} T_{(ji)} + S_{|ij|} T_{|ji|}$$

Где $A_{(ij)}$ – представляет собой симметричную, а $A_{|ij|}$ – антисимметричную часть тензора A_{ij} .

Критерии тензора – Теорема деления тензоров.

1). Пусть некоторая величина в прямоугольных декартовых координатах x_i и x'_i определяется при помощи чисел A_{ijk} и A'_{ijk} соответственно, и пусть при любом наборе векторов $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ справедливо равенство

$$A'_{pqr} u'_p v'_q w'_r = A_{ijk} u_i v_j w_k$$

Тогда можно показать, что числа A_{ijk} и A'_{ijk} являются компонентами тензора третьего ранга относительно координатных систем x_i и x'_i

Доказательство

Выразим в этом равенстве нештрихованные компоненты трех векторов через штрихованные компоненты, используя формулы преобразования компонент векторов при переходе от одной системы координат к другой.

В результате получим следующее соотношение:

$$(A'_{pqr} - c_{ip} c_{jq} c_{kr} A_{ijk}) u'_p v'_q w'_r = 0$$

Левая часть этого равенства представляет собой трилинейную форму компонент векторов $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$, которая тождественно обращается в ноль только тогда, когда обращаются в ноль все коэффициенты. Это условие устанавливает тот факт, что величины A_{ijk} и A'_{ijk} представляют собой компоненты тензора третьего ранга относительно нештрихованной и штрихованной систем координат.

2). Аналогично можно показать, что величины A_{ijk} представляют собой тензор третьего ранга, если известно, что $A_{ijk} B_{ij}$ – есть вектор при любом выборе тензора второго ранга B_{ij} .

Легко получить обобщение указанных свойств для тензора любого ранга.

3. Тензор Леви–Чевиты. Вектор двойственный тензору второго ранга. Векторное произведение.

В качестве примера тензора рассмотрим часто используемый **тензор Леви-Чевиты**. Введем следующую величину

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 \\ -1 \\ 0 \end{cases}$$

в зависимости от того, что i, j, k образуют четную, нечетную или не образуют перестановку 1,2, 3.

Пусть $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ представляют собой векторы, проведенные из начала координат O в точки U, V, W . Предполагается, что эти четыре точки не лежат в одной плоскости и никакие три из них не лежат на одной прямой. При этом их направления представляют собой направления правосторонней системы координат.

Рассмотрим параллелепипед с ребрами OU, OV, OW . Из аналитической геометрии известно, что абсолютная величина детерминанта

$$D = \begin{vmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_3 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{vmatrix}$$

определяет объем параллелепипеда.

При помощи ε_{ijk} можно детерминант D записать в виде

$$D = \varepsilon_{ijk} u_i v_j w_k$$

При любом выборе векторов $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ D представляет собой скаляр. Тогда согласно теореме деления тензоров величины ε_{ijk} задают тензор третьего ранга. Он называется ε -тензором или тензором Леви-Чевиты.

Посредством зависимости

$$t_i = \varepsilon_{ijk} T_{jk}$$

любому тензору второго ранга ставится в соответствие вектор \vec{t} .

Этот вектор называется **вектором двойственным тензору T** .

Его компоненты будут:

$$t_1 = T_{23} - T_{32}, t_2 = T_{31} - T_{13}, t_3 = T_{12} - T_{21}$$

Из этих соотношений следует, что вектор **двойственный тензору второго ранга, зависит только от антисимметричной части тензора**. Вектор, **двойственный симметричному тензору равен нулю**.

Верно и обратное: равенство нулю двойственного вектора указывает на симметрию тензора.

Неопределенное или диадное произведение $u_i v_j$ двух векторов представляет собой тензор.

Двойственный ему вектор

$$w_i = \varepsilon_{ijk} u_j v_k$$

называется **векторным произведением** векторов \vec{u} и \vec{v} .

Соотношение

$$T_{jk} = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} t_i$$

позволяет каждому вектору поставить в соответствие **тензор, двойственный данному вектору**.

4. Главные оси симметричного тензора второго ранга.

I. Определение. Направление, определяемое единичным вектором $\vec{\mu}$ называется **главным направлением симметричного тензора T_{ij} второго ранга**, если соответствующий вектор $T_{ij}\mu_i$ параллелен вектору $\vec{\mu}$, т.е. если этот вектор можно записать в виде $\lambda\vec{\mu}$, где λ скаляр.

Таким образом, для главного направления $\vec{\mu}$ имеем

$$(T_{ij} - \lambda\delta_{ij})\mu_i = 0$$

Приведенное соотношение представляет собой линейную однородную систему трех уравнений относительно компонент единичного вектора $\vec{\mu}$.

Условием существования нетривиального решения является равенство нулю детерминанта, составленного из коэффициентов уравнений

$$\|T_{ij} - \lambda \delta_{ij}\| = 0$$

Если развернуть детерминант, то получим **независящее от системы координат кубическое уравнение для величины λ – характеристическое или вековое уравнение симметричного тензора T**

$$\lambda^3 - I_{(1)}\lambda^2 - I_{(2)}\lambda - I_{(3)} = 0$$

Коэффициенты этого уравнения являются скалярами – **основные инварианты симметричного тензора T** . Первый инвариант равен сумме элементов главной диагонали, второй – сумме миноров элементов главной диагонали, взятой со знаком минус, третий – представляет детерминант матрицы T_{ij} .

$$I_{(1)} = T_{ii}, I_{(2)} = \frac{1}{2}(T_{ij}T_{ji} - T_{ii}T_{jj}), I_{(3)} = \|T_{ij}\| = \frac{1}{6}(2T_{ij}T_{jk}T_{ki} - T_{ij}T_{ji}T_{kk} + T_{ii}T_{jj}T_{kk})$$

Корни характеристического уравнения называются – **главными значениями симметричного тензора T** .

II. Утверждения.

- 1). Симметричный тензор 2-го ранга имеет только действительные главные значения.
- 2). Главные направления, соответствующие различным главным значениям, являются ортогональными.
- 3). Если главные значения различны, то главные направления определяются однозначно.
- 4). Если два главных значения равны, но отличимы от первого, то имеем однопараметрическое семейство систем главных осей, которые можно получить одну из другой в результате поворота вокруг первой главной оси.
- 5). Если все три главных значения равны, то любая система ортогональных осей является системой главных осей.

Доказательство: 1). По крайней мере, одно из этих главных значений является действительным. Обозначим его через λ_1 . При $\lambda = \lambda_1$ система однородных уравнений определяет по меньшей мере одно главное направление $\vec{\mu}^1$. Если это направление принять за ось x'_1 новой системы координат, то $T'_{11} = \lambda_1$, $T'_{12} = T'_{13} = 0$. Тогда характеристическое уравнение этого тензора будет иметь вид

$$\begin{vmatrix} \lambda_I - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & T'_{22} - \lambda & T'_{23} \\ 0 & T'_{23} & T'_{22} - \lambda \end{vmatrix}$$

или

$$(\lambda_I - \lambda)[\lambda^2 - (T'_{22} + T'_{33})\lambda + T'_{23}T'_{33} - T'^2_{33}] = 0$$

Следовательно два других главных значения λ_{II} и λ_{III} являются корнями квадратного уравнения, дискриминант которого положителен

$$(T'_{22} + T'_{33})^2 - 4(T'_{23}T'_{33} - T'^2_{33}) = (T'_{22} - T'_{33})^2 + 4T'^2_{23}$$

2). Если векторы μ^{II}, μ^{III} определяют главные направления, соответствующие главным значениям $\lambda_{II}, \lambda_{III}$, то имеем

$$(T_{ij} - \lambda_{II}\delta_{ij})\mu_i^{II} = 0, (T_{ij} - \lambda_{III}\delta_{ij})\mu_i^{III} = 0$$

Умножая эти соотношения на μ_j^{III}, μ_j^{II} соответственно и вычитая друг из друга получим

$$(\lambda_{III} - \lambda_{II})\mu_i^{II}\mu_i^{III} = 0$$

Откуда, если λ_{II} не равно λ_{III} , следует, что эти направления ортогональны.

3). Допустив многозначность, получим, что каждое первое главное направление должно быть ортогонально каждому второму и третьему главным направлениям, а каждое второе главное направление – ортогонально каждому третьему. Этот вывод противоречит тому, что в трехмерном пространстве не может быть более трех взаимно ортогональных направлений.

Таким образом, предыдущие рассуждения показывают, что **симметричный тензор второго ранга имеет по крайней мере одну систему главных осей.**

В случае не равных между собой главных значений существует только одна система главных осей.

Если $\lambda_{II} = \lambda_{III}$, то дискриминант квадратного уравнения равен нулю: $T'_{22} = T'_{33}, T'_{23} = 0$. Его корни $\lambda_{II} = \lambda_{III} = T'_{22} = T'_{33}$. Матрица рассматриваемого тензора в этом случае имеет диагональную форму независимо от выбора осей x'_2, x'_3 если направление оси x'_1 совпадает с первым главным направлением \vec{p}_1 .

Таким образом, если два главных значения равны, но отличимы от первого, то любой единичный вектор – линейная комбинация векторов $\vec{\mu}^I, \vec{\mu}^{II}, \vec{\mu}^{III}$ определяет главное направление. Следовательно, имеем однопараметрическое семейство систем главных осей, которые можно получить одну из другой в результате поворота вокруг первой главной оси.

Если все три главных значения равны то любой единичный вектор, представляющий собой линейную комбинацию векторов $\vec{\mu}^I, \vec{\mu}^{II}, \vec{\mu}^{III}$, представляет главное направление и любая система ортогональных осей – системой главных осей.

III. Тензор с различными главными направлениями $\lambda_I, \lambda_{II}, \lambda_{III}$ и соответствующими главными направлениями $\vec{\mu}^I, \vec{\mu}^{II}, \vec{\mu}^{III}$, можно записать в виде

$$T_{ij} = \lambda_I \mu_i^I \mu_j^I + \lambda_{II} \mu_i^{II} \mu_j^{II} + \lambda_{III} \mu_i^{III} \mu_j^{III}$$

В самом деле, тензор T_{ij} ставит в соответствие направлению μ^I вектор $\lambda_I \mu_j^I$, который имеет то же направление; аналогичное замечание относится к направлениям $\vec{\mu}^I, \vec{\mu}^{II}$.

Если координатные оси выбрать по главным направлениям, то тензор определится **диагональной матрицей**

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} \lambda_I & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_{II} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{III} \end{pmatrix}$$

Обратно, три взаимоортогональные оси называются **главными осями симметричного тензора второго ранга**, если матрица этого тензора принимает диагональную форму.

IV. Степени тензоров 2-го ранга. Уравнение Гамильтона–Кэли.

Рассмотрим образование целых положительных степеней тензора второго ранга.

Квадрат тензора \mathbf{T}^2 определяется как тензор $T_{ip} T_{pj}$, **куб \mathbf{T}^3** – как $T_{ip} T_{pq} T_{qj}$, **четвертая степень \mathbf{T}^4** – как $T_{ip} T_{pq} T_{qr} T_{r,j}$ и т.д.

Приведение матрицы симметричного тензора второго ранга к диагональной форме позволяет дать простое определение степеням такого тензора.

Если матрица тензора \mathbf{T} имеет относительно системы главных осей диагональный вид, то матрица тензора \mathbf{T}^n относительно той же системы координат имеет вид

$$\mathbf{T}^n = \begin{pmatrix} \lambda_I^n & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_{II}^n & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{III}^n \end{pmatrix}$$

Так как эта матрица имеет диагональную форму, то **тензоры \mathbf{T} и \mathbf{T}^n имеют одни и те же главные оси.**

Каждое из трех значений λ_I, λ_{II} и λ_{III} тензора \mathbf{T} , удовлетворять характеристическому уравнению, а матрицы \mathbf{T}^n имеют диагональный вид. Поэтому сам тензор \mathbf{T} должен удовлетворять характеристическому уравнению.

Следовательно, имеет место **уравнение Гамильтона–Кэли:**

$$\mathbf{T}^3 = \mathbf{I}_{(1)}\mathbf{T}^2 + \mathbf{I}_{(2)}\mathbf{T} + \mathbf{I}_{(3)}\delta$$

Это уравнение позволяет получить более высокие степени тензора \mathbf{T} в виде линейных комбинаций тензоров $\mathbf{T}^2, \mathbf{T}, \delta$. Коэффициенты этих линейных комбинаций представляют собой полиномы относительно основных инвариантов $I_{(1)}, I_{(2)}, I_{(3)}$. Действительно, если каждый член уравнения умножить на \mathbf{T} , то получим равенство

$$\mathbf{T}^4 = \mathbf{I}_{(1)}\mathbf{T}^3 - \mathbf{I}_{(2)}\mathbf{T}^2 + \mathbf{I}_{(3)}\mathbf{T}$$

Подставив \mathbf{T}^3 имеем

$$\mathbf{T}^4 = (\mathbf{I}_{(1)}^2 + \mathbf{I}_{(2)})\mathbf{T}^2 + (\mathbf{I}_{(1)}\mathbf{I}_{(2)} + \mathbf{I}_{(3)})\mathbf{T} + \mathbf{I}_{(1)}\mathbf{I}_{(3)}\delta$$

Продолжая действовать таким образом, можно получить более высокие степени тензора \mathbf{T} .

5. Тензорные поля.

Определение. Пусть каждой точке P конечной области R пространства соответствует тензор \mathbf{T} ранга n , компоненты которого представляют собой непрерывные функции положения точки P . Тогда говорят, что в области R определено непрерывное **тензорное поле** ранга n .

В произвольной точке \vec{r}^0 области R имеет место разложение в ряд Тейлора

$$T_{ijk\dots} = T_{ijk\dots}(\vec{r}^0) + (x_p - x_p^{(0)})\partial_p T_{ijk\dots}(r^0) + \dots$$

Здесь

$$\partial_p = \frac{\partial}{\partial x_p}$$

Каждый член разложения представляет собой тензор ранга n . Так как, независимо от выбора вектора $\vec{r} - \vec{r}^0$, это относится и к последнему из явно записанных, то согласно теореме деления тензоров, величины $\partial_p T_{ijk\dots}$ представляют собой компоненты тензора ранга $n+1$.

Таким образом, при переходе от одной декартовой системы координат к другой **оператор** ∂_p **ведет себя как вектор, оператор** $\partial_{pq} = \partial_p \partial_q = \frac{\partial}{\partial x_p} \frac{\partial}{\partial x_q}$ **как тензор второго ранга и т.д.**

В символической записи оператор ∂_p представляется при помощи символического вектора ∇ – оператора набла.

Градиент скалярного поля представляет собой вектор $\partial_p \phi$ (Обозначается одним из способов $grad\phi = \nabla\phi = \partial_p \phi$).

Направление $\nabla\phi$ в точке P совпадает с направлением нормали к поверхности уровня $\phi = const$ в точке P .

При перемещении из точки P поля на бесконечно малый отрезок ds в направлении единичного вектора $\vec{\mu}$ значение ϕ изменяется на величину

$$d\phi^{(\mu)} = \mu_i \partial_i \phi ds = \vec{\mu} \cdot grad\phi ds$$

Таким образом, **градиент скалярного поля ϕ ставит в соответствие каждому направлению $\vec{\mu}$ скаляр $d\phi^{(\mu)}/ds$, который называется скоростью изменения ϕ в направлении $\vec{\mu}$.**

При этом градиент $\nabla\phi$ указывает направление наибольшей скорости изменения, а модуль $\nabla\phi$ представляет величину этой скорости изменения.

Действительно, если единичный вектор $\vec{\mu}$ касается поверхности уровня ϕ , проведенной через точку P , то скорость изменения ϕ в направлении $\vec{\mu}$ равна нулю, т.е. скалярное произведение векторов $\vec{\mu}$ и $grad\phi$ обращается в нуль.

Определение. **Векторным градиентом векторного поля \vec{v}** называется тензор второго ранга $\partial_i v_k$, полученный путем применения оператора ∂_i к векторному полю \vec{v} .

При перемещении из какой-либо точки P поля на бесконечно малый отрезок ds в направлении единичного вектора $\vec{\mu}$ значение компонент v_k вектора \vec{v} изменяется на величину

$$d v_k^{(\mu)} = \mu_j \partial_j v_k d s$$

или символически

$$d\vec{v}^{(\mu)} = (\vec{\mu} \cdot \nabla) \vec{v} d s$$

Определение. След векторного градиента $\partial_j v_k$ представляет собой скаляр $\partial_j v_j$, который называется **дивергенцией векторного поля** $\vec{v}(x)$ и символически обозначается через $\operatorname{div} \vec{v}$

$$\operatorname{div} \vec{v} = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3}$$

Определение. Вектор $\epsilon_{ijk} \partial_j v_k$, двойственный векторному градиенту $\partial_j v_k$ называется **вихрем или ротором векторного поля** $\vec{v}(x)$ и символически записывается в виде $\nabla \times \vec{v}$ или $\operatorname{rot} \vec{v}$. Его компоненты определяются следующим образом

$$(\operatorname{rot} \vec{v})_1 = \frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3}, \quad (\operatorname{rot} \vec{v})_2 = \frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1}, \quad (\operatorname{rot} \vec{v})_3 = \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2}$$

Определение. Свертывание оператора ∂_{ij} приводит к **оператору Лапласса**

$$\partial_{ii} = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}$$

Символически этот оператор записывается как ∇^2 или как Δ .

6. Интегральные теоремы.

В области определения тензорного поля $T_{jkl\dots}$ рассмотрим некоторую регулярную область V , ограниченную поверхностью S . Обозначим через $\vec{\nu}$ единичный вектор внешней нормали к граничной поверхности S .

Тогда имеет место **Теорема Гаусса –Остроградского**, которая дает преобразование интеграла по объему в интеграл по поверхности:

$$\int_V \partial_i T_{jkl\dots} dV = \int_S \nu_i T_{jkl\dots} dS$$

В обычной формулировке теорема Гаусса–Остроградского используется для векторного поля и утверждает, что

$$\int_V \operatorname{div} \vec{A} dV = \int_S \vec{A} \cdot \vec{\nu} dS$$

Следствием теоремы Гаусса–Остроградского является теорема Стокса, которая относится к замкнутому плоскому контуру L и к ограниченной им области.

$$\int_{\Sigma} \vec{\nu} \cdot \operatorname{rot} \vec{v} d\sigma = \int_L \vec{v} \cdot d\vec{L}$$

где направление обхода кривой L и направление единичного вектора нормали $\vec{\nu}$ к dS соответствуют правилу правого винта.

Интеграл $\int_L \vec{v} \cdot d\vec{L}$ называется **циркуляцией вектора \vec{v} вдоль контура L** .

Другие примеры интегральных теорем:

1. **Первое тождество Грина.**

$$\int \phi \Delta \psi dV = \int \phi \frac{\partial \psi}{\partial \nu} dS - \int \operatorname{grad} \phi \cdot \operatorname{grad} \psi dV$$

2. **Второе тождество Грина.**

$$\int (\phi \Delta \psi - \psi \Delta \phi) dV = \int (\phi \frac{\partial \psi}{\partial \nu} - \psi \frac{\partial \phi}{\partial \nu}) dS$$

Здесь $\frac{\partial \psi}{\partial \nu}$ представляет собой скорость изменения ψ в направлении внешней нормали ν к поверхности S .

Примеры применения интегральных теорем.

1. Доказать, что векторное поле, имеющее нулевой ротор (безвихревое), является градиентным полем (потенциальным):

векторное поле \vec{v} , определенное в односвязной области и имеющее в этой области тождественно равный нулю ротор, можно представить как градиент скалярного поля ϕ .

$$\phi = \int_0^P \vec{v} \cdot d\vec{L}$$

2. В регулярной области векторное поле определено однозначно, если всюду в объеме заданы его дивергенция и ротор, а на граничной поверхности задана его нормальная составляющая.

Формула дифференцирования по времени интеграла, взятого по подвижному объему.

Пусть имеется произвольная функция f (она может быть и тензором), зависящая от координат точек пространства и от времени t . Рассмотрим интеграл

$$\int_V f(x, y, z, t) d\tau$$

где от времени зависит не только подинтегральная функция, но и область интегрирования. Тогда с учетом формулы Гаусса–Остроградского получим

$$\frac{d}{dt} \int_V f(x, y, z, t) d\tau = \int_V \left[\frac{\partial f}{\partial t} + \operatorname{div}(f \vec{v}) \right] d\tau = \int_V \left[\frac{df}{dt} + f \operatorname{div} \vec{v} \right] d\tau$$

Здесь использовано также следующее кинематическое равенство

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla f$$

7. Криволинейные координаты.

При обсуждении основных положений механики сплошной среды и при выводе общих уравнений можно ограничиться декартовыми координатами. Однако, при решении отдельных задач бывает удобнее пользоваться системой ортогональных криволинейных координат.

Разумеется, общее тензорное исчисление дает возможность вывести уравнения, справедливые в любой системе координат. При рассмотрении отдельных задач мы будем использовать уравнения в криволинейных координатах, в том числе цилиндрических и сферических.

План:

1. Масса, плотность. Массовые и поверхностные силы.
Внутренние поверхностные напряжения.
2. Тензор напряжений.
3. Условия равновесия.
4. Главные нормальные напряжения и главные касательные напряжения.
5. Поверхности напряжений Коши.

1. Масса, плотность. Массовые и поверхностные силы. Внутренние поверхностные напряжения.

Свойство инерции характеризуется **массой** m . Массу можно ввести как для всего тела, так и для его частей. В механике Ньютона масса аддитивна: масса всего тела равна сумме масс m_i его частей

$$m = \sum_i m_i$$

Согласно гипотезе сплошности в механика сплошных сред рассматривает равновесие и движение газов, жидкостей и деформируемых тел, масса которых считается распределенной непрерывно.

Определение 1.

Плотность ρ в произвольной точке P непрерывной среды определяется с помощью предельного перехода

$$\rho = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta V}$$

Это определение эквивалентно утверждению: элемент объема ΔV , содержащий точку P , имеет массу $\Delta m = \rho \Delta V$.

Для конечного объема верно равенство

$$m = \int_V \rho d\tau$$

где интеграл берется по подвижному индивидуальному объему.

Силы, распределенные по объему V , называются объемными или массовыми силами. Заметим, что **массовые силы это силы дальнодействия**. Они действуют без соприкосновения. Примерами массовых сил являются сила тяжести $\vec{F} = -\vec{g}$, сила инерции $\vec{F} = -\vec{a}$, пондеромоторные силы или силы Лоренца:

$$\vec{F} = z_i (\vec{E} + \vec{v}_i \times \vec{B})$$

Вместе с массой в пространстве непрерывно распределены и силы, обусловленные наличием массы.

Определение 2. Если \vec{F} – главный вектор массовых сил действующий на элемент массы Δm . Тогда плотность \vec{F} массовой силы в данной точке есть

$$\vec{F} = \lim_{\Delta m \rightarrow 0} \frac{\vec{\text{vec}}\mathbf{F}}{\Delta m}$$

Для малой частицы

$$\tilde{\mathbf{F}} \approx \vec{F} \Delta m$$

Иногда рассматривают силы $\tilde{\Phi}$, приходящуюся не на единицу массы, а на единицу объема. Определение

$$\tilde{\Phi} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\tilde{\mathbf{F}}}{\Delta V}$$

Очевидно,

$$\tilde{\Phi} = \rho \vec{F}$$

Кроме пространственно распределенных массовых сил на частицу сплошной среды действуют также **поверхностные распределенные силы**. В механике сплошной среды они играют основную роль.

Поверхностные силы сводятся к передаче импульса при столкновениях. Они действуют на любой элемент поверхности объема и на его границе Σ .

Определение 4. Пусть $\Delta \vec{P}$ – главный вектор поверхностных сил, действующих на элемент $\Delta \sigma$ поверхности S , тогда плотность поверхностных сил, определяется следующим образом:

$$\vec{p} = \lim_{\Delta \sigma \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{P}}{\Delta \sigma}$$

Определение 5. Силы называются **внутренними**, если они вызваны объектами принадлежащими системе и **внешними**, если они вызваны внешними по отношению к рассматриваемой системе объектами.

Понятие внешних и внутренних сил относительно.

Мысленно выделим в сплошной среде некоторый произвольный объем V и разобъем его сечением S на две части V_1 и V_2 . Если мы будем рассматривать движение одной из частей, например, V_1 , то при этом действие на нее второй части необходимо заменить распределенными по V_1 массовыми силами и распределенными по S поверхностными силами. Так введенные силы взаимодействия будут внешними для V_1 . Если же мы будем рассматривать движение объема V как целого, то эти силы будут внутренними.

Определение 6. Плотность внутренних поверхностных сил называется **внутренним поверхностным напряжением**.

2. Тензор напряжений

Выделим объем V сплошной среды, ограниченный регулярной поверхностью S . Пусть dS элемент поверхности, содержащий точку P . Положение элемента поверхности задается единичным вектором $\vec{\nu}$ внешней нормали к поверхности.

Предположим, что на элемент dS действует внешняя сила, равная $T^{(\nu)} dS$, а момент отсутствует. Примем, что напряжение зависит только от положения точки P и направления вектора нормали к ней $\vec{\nu}$, но не зависит от формы элемента поверхности dS и вида поверхности S .

Таким образом, для рассматриваемой точки P мы имеем соответствие между векторами $\vec{T}^{(\nu)}$ и направлениями $\vec{\nu}$ пространства. Покажем, что это соответствие выражается линейной и однородной зависимостью напряжений от направляющих косинусов.

Будем исходить из постулируемого в механике **принципа равновесия**. Он формулируется следующим образом.

Если часть сплошной среды V , ограниченная замкнутой поверхностью S покоится или движется, то массовые силы, действующие в данный момент на эту часть среды, находятся в равновесии с поверхностными силами, действующими в данный момент на поверхность S . Кроме того, должны быть уравновешены и моменты создаваемые массовыми и поверхностными силами.

При движении среды в массовые силы должны включаться и силы инерции.

Применим принцип равновесия к бесконечно малому тетраэдру, три ребра PQ_1, PQ_2, PQ_3 которого имеют направления координатных осей (Рис.). Пусть грань Q_1, Q_2, Q_3 имеет площадь dS и внешнюю нормаль $\vec{\nu}$. Тогда площади граней $PQ_2Q_3, PQ_3Q_1, PQ_1Q_2$ можно записать в виде

$$dS_1 = dS \cos(\nu, x_1), dS_2 = dS \cos(\nu, x_2), dS_3 = dS \cos(\nu, x_3)$$

Внешние нормали к этим граням направлены по отрицательным направлениям координатных осей.

Действующее на площадки dS_1, dS_2, dS_3 напряжения обозначим через $\vec{T}_1, \vec{T}_2, \vec{T}_3, \vec{T}^{(\nu)}$ соответственно.

Тогда результирующая сила поверхностных сил, действующих на грани тетраэдра, выразится в виде

$$\vec{T}^{(\nu)} dS - \vec{T}_1 dS_1 - \vec{T}_2 dS_2 - \vec{T}_3 dS_3 = [\vec{T}^{(\nu)} - \vec{T}_1 \cos(\nu, x_1) - \vec{T}_2 \cos(\nu, x_2) - \vec{T}_3 \cos(\nu, x_3)] dS$$

Она пропорциональна площади рассматриваемой площадки.

Результирующая же массовых сил $\rho \vec{F} dV$ пропорциональна объему тетраэдра dV .

Если мы уменьшим все линейные размеры тетраэдра в одинаковом отношении, то равнодействующая массовых сил будет стремиться к нулю быстрее, чем равнодействующая поверхностных сил.

В пределе в точке P необходимо выполнение следующего соотношения:

$$\vec{T}^{(\nu)} = \vec{T}_1 \cos(\nu, x_1) + \vec{T}_2 \cos(\nu, x_2) + \vec{T}_3 \cos(\nu, x_3)$$

Таким образом, **напряженное состояние в точке определяется тензором напряжений T , который любому направлению $\vec{\nu}$ пространства ставит в соответствие напряжение $\vec{T}^{(\nu)}$, действующий на элемент поверхности, перпендикулярный вектору $\vec{\nu}$.**

Определение.

Компоненты векторов $\vec{T}_1, \vec{T}_2, \vec{T}_3$ обозначим через $T_{11}, T_{12}, T_{13}; T_{21}, T_{22}, T_{23}; T_{31}, T_{32}, T_{33}$ и будем их называть компонентами тензора напряжений.

Механическое значение компонент тензора напряжений.

В силу приведенного выше определения компонент тензора составляющие T_{ii} представляют собой **нормальные напряжения**, а T_{ij} – **касательные напряжения** или **напряжения сдвига** для элементов поверхности перпендикулярных осям x_i .

Напряжение, направленное по нормали к элементу поверхности с вектором нормали $\vec{\nu}$ (**нормальное напряжение**) определяется выражением

$$T^{(\nu\nu)} = \vec{T}^{(\nu)} \cdot \vec{\nu} = T_{ij} \nu_i \nu_j$$

Модуль **касательного напряжения** T_S , действующего параллельно элементу площади определяется из соотношения

$$T_S^2 = \vec{T}^{(\nu)} \cdot \vec{T}^{(\nu)} - T_N^2$$

Замечание. Применив принцип равновесия к трем объемам V_1, V_2 и V можно показать, что для непрерывных движений выполняется еще одно свойство внутренних напряжений:

$$\vec{T}^{(\nu)} = -\vec{T}^{(-\nu)}$$

Доказательство:

Влияние объема V_2 на V_1 будем заменять распределенными поверхностными силами $\vec{T}^{(\nu)} dS$ и массовыми силами, плотность которых \vec{F}' , а влияние объема V_1 на V_2 будем заменять распределенными поверхностными силами $\vec{T}^{(-\nu)} dS$ и массовыми силами, плотность которых \vec{F}''

Из принципа равновесия следует

$$\int_{V_1} \rho \vec{a} = \int_{V_1} \rho \vec{F}' + \int_{\Sigma_1} \vec{T}^{(\nu)} d\sigma + \int_S \vec{T}^{(\nu)} d\sigma$$

$$\int_{V_2} \rho \vec{a} = \int_{V_2} \rho \vec{F}'' + \int_{\Sigma_2} \vec{T}^{(\nu)} d\sigma + \int_S \vec{T}^{(-\nu)} d\sigma$$

$$\int_V \rho \vec{a} = \int_V \rho \vec{F} + \int_{\Sigma} \vec{T}^{(\nu)} d\sigma$$

После сложения двух первых равенств и вычитания из их суммы третьего при условии, что для внутренних массовых сил всегда выполняется закон действия и противодействия, т.е.

$$\int_{V_1} \rho \vec{F}' + \int_{V_2} \rho \vec{F}'' = \int_V \rho \vec{F}$$

будем иметь

$$\int_S (\vec{T}^{(\nu)} + \vec{T}^{(-\nu)}) d\sigma = 0$$

Отсюда в силу произвольности объемов V_1, V_2 и V и сечения S вытекает, что

$$\vec{T}^{(\nu)} = -\vec{T}^{(-\nu)}$$

3. Условия равновесия.

Симметричность тензора напряжений в классическом случае.

Пусть удельные массовые силы заданы полем $\vec{F}(x)$, напряжения – полем $T_{ij}(x)$.

Массовая сила $\rho F dV$, действующая на произвольный элемент объема, радиус вектора которого равен \vec{r} , создает момент относительно центра координат, равный

$$\vec{r} \times \rho \vec{F} dV = \{\varepsilon_{ijk} x_j \rho F_k dV\}$$

Поверхностная сила $\vec{T}^{(\nu)} = \{T_{lk} \nu_l dS\}$, действующая на элемент S создает относительно начала координат момент, равный

$$\vec{r} \times \vec{T}^{(\nu)} dS = \{\varepsilon_{ijk} x_j T_{lk} \nu_l dS\}$$

где x_j означает компоненты радиус-вектора, F_k – компоненты вектора плотности массовых сил.

Принцип равновесия требует чтобы были уравновешены силы и моменты действующие на объем, т.е. выполнения условий

$$\int_S T_{lk} \nu_l dS + \int_V \rho F_k dV = 0$$

$$\int_S \varepsilon_{ijk} x_j T_{lk} \nu_l dS + \int_V \varepsilon_{ijk} x_j \rho F_k dV = 0$$

Используя формулу Гаусса, интегралы по поверхности преобразуем

$$\int_S T_{lk} \nu_l dS = \int_V \partial_l T_{lk} dV$$

$$\int_S \varepsilon_{ijk} x_j T_{lk} dS = \int_V \partial_l (\varepsilon_{ijk} x_j T_{lk}) dV = \int_V \varepsilon_{ijk} T_{jk} dV + \int_V \varepsilon_{ijk} x_j \partial_l T_{jk} dV$$

При этом использовалось, что компоненты ε_{ijk} не зависят от координат, и что $\partial_l x_j = \delta_{lj}$. Условия равновесия, тогда записутся в виде

$$\int_V (\partial_l T_{lk} + \rho F_k) dV = 0$$

$$\int_V \varepsilon_{ijk} [T_{jk} + x_j (\partial_l T_{lk} + \rho F_k)] dV = 0$$

Так как эти интегралы по объему с непрерывными подинтегральными выражениями обращаются в нуль при произвольном выборе объема V , то подинтегральные выражения должны тождественно равняться нулю. Следовательно

$$\begin{aligned}\partial_l T_{lk} + \rho F_k &= 0 \\ \vec{t} = \varepsilon_{ijk} T_{jk} &= 0\end{aligned}$$

Левая часть последнего равенства представляет собой вектор, двойственный тензору напряжений $\vec{t} = \{T_{23} - T_{32}, T_{31} - T_{13}, T_{12} - T_{21}\}$. Равенство нулю этого вектора означает, что что **тензор напряжений симметричен**

$$T_{ij} = T_{ji}$$

Вследствие этой симметрии поле напряжений определяется только шестью функциями координат.

Первых трех уравнений недостаточно для определения шести функций координат, задающих поле напряжений. Обычно, в таких случаях напряженное состояние сплошной среды называется **статически неопределенным**. Для того, чтобы определить поле напряжений, нужно дополнить условия равновесия некоторыми другими уравнениями нестатического происхождения. Например в гидростатике предполагается, что касательные напряжения отсутствуют, что приводит к тому, что тензор напряжений имеет вид

$$T_{ij} = -p\delta_{ij}$$

4. Главные нормальные напряжения и главные касательные напряжения.

В силу симметрии тензора напряжений в любой точке P сплошной среды существует по крайней мере одна система трех взаимно ортогональных осей, таких, что на элементах поверхности перпендикулярным к этим осям, действуют только нормальные напряжения, а касательные напряжения отсутствуют. Такая система называется системой главных осей напряженного состояния в точке P .

Таким образом, любое напряженное состояние в данной точке сплошной среды можно рассматривать как совокупность трех чистых растяжений или сжатий вдоль главных осей тензора напряжений.

5. Поверхности напряжений Коши.

Для исследования напряженного состояния в точке P континуума совместим начало координат x_i с исследуемой точкой P и рассмотрим скалярное поле ϕ , определенное для фиксированных значений T_{ij} формулой

$$\phi = T_{ij} x_i x_j$$

Поверхности уровня этого скалярного поля представляют собой подобные поверхности второго порядка, которые имеют общий центр подобия и центр симметрии в рассматриваемой точке P и называются **поверхностями напряжений Коши**.

Пусть луч, проведенный из точки P в направлении единичного вектора $\vec{\nu}$, пересечет поверхность напряжений в точке Q . Координаты точки Q можно записать как $x_i = r\nu_i$

Градиент скалярного поля ϕ в точке Q определяется формулой

$$\partial_j \phi = 2T_{ij} x_i = 2r T_{ij} \nu_i = 2r T_j^{(\nu)}$$

Таким образом,

$$2r \vec{T}^{(\nu)} = \text{grad } \phi$$

где $\vec{T}^{(\nu)}$ – напряжение, соответствующее направлению $\vec{\nu}$, а $T_j^{(\nu)}$ – его составляющая по оси j .

Следовательно, напряжение $\vec{T}^{(\nu)}$ перпендикулярно к касательной плоскости поверхности уровня ϕ_1 в точке Q и направлено в то полупространство, ограниченное этой плоскостью, которое не содержит

точку P . Отсюда сразу следует, что **оси поверхности напряжений совпадают с главными осями напряженного состояния.**

Зная тензорную поверхность $\phi = const$, можно геометрически следующим образом найти направление напряжения $\vec{T}^{(\nu)}$, действующего на площадке с нормалью \vec{r} . Из точки P перпендикулярно к заданной площадке проводится вектор \vec{r} . В точке пересечения \vec{r} с поверхностью $\phi = const$ проводится касательная плоскость $d\sigma$ к тензорной поверхности. Очевидно, вектор $\vec{T}^{(\nu)}$ ортогонален этой площадке.

1. Лекция 4 (3). Деформации

План Лекции

1. Конфигурация сплошной среды. Деформация и течение.
2. Сопутствующая система координат
3. Векторы базиса
4. Лемма.
5. Замечание – Длина вектора.
6. Тензор деформаций.
7. Коэффициент относительного удлинения.
8. Геометрический смысл ковариантных компонент тензоров деформаций.
9. Главные оси и главные компоненты тензоров деформаций.
10. Коэффициент кубического расширения.
11. Вектор перемещения.
12. Выражение тензора деформаций через компоненты вектора перемещения.
13. О существовании уравнений совместности деформаций.
14. Преобразование при перемещении бесконечно малой частицы сплошной среды.

1.1. Конфигурация сплошной среды. Деформация и течение.

Определения 1. Для обозначения фиксированной точки пространства будем пользоваться термином **точка**, а для материальной точки – точки сплошной среды будем пользоваться термином **частица**.

При описании геометрических объектов, например элементов линий или поверхностей будем использовать соответственно прилагательные **пространственный** и **материальный**.

В любой момент времени t объем V сплошной среды, ограниченной поверхностью S , занимает некоторую область R физического пространства.

Определение 2. Если в определенной системе координат указано соответствие частиц некоторого объема сплошной среды и точек пространства, которые они занимают в данный момент времени, то говорят, что в этот момент времени указана **конфигурация сплошной среды**.

Определения 3. Термин **деформация** относится к изменению формы континуума от некоторой начальной (недеформированной) конфигурации до последующей (деформированной) конфигурации.

Если начальное и мгновенное положение окрестности частицы P соответствуют двум положениям твердого тела, то мы будем говорить, что эту окрестность можно перевести из ее начальной конфигурации в мгновенную конфигурацию без деформации.

При изучении деформации учитываются только начальная и конечная конфигурация; промежуточным состояниям, или частной последовательности конфигураций, по которым происходит деформация, внимание не уделяется.

Определения 4. В противоположность этому термин **течение** используется для обозначения непрерывного состояния движения континуума. Изучение истории конфигурации является неотъемлемой частью исследования течения, для которого задано переменное по времени поле скоростей.

1.2. Сопутствующая система координат

Всегда, когда мы говорим о движении сплошной среды, необходимо индивидуализировать точки, и следовательно пользоваться лагранжевыми координатами. Поэтому всегда при рассмотрении движения сплошной среды подразумевается наличие системы отсчета x^1, x^2, x^3 , относительно которой рассматривается движение, и **сопутствующей системы координат**.

Она вводится следующим образом. Наряду с координатами x^1, x^2, x^3 системы координат наблюдателя лагранжевы координаты индивидуальных точек ξ^1, ξ^2, ξ^3 рассматриваются как другие координаты тех же точек пространства в области D .

Соответствующая система координат ξ^1, ξ^2, ξ^3 в том же пространстве образует подвижную деформируемую криволинейную систему координат, которая называется сопутствующей системой координат.

Так, если в начальный момент t_0 выбрать в сплошной среде некоторые координатные линии ξ^1, ξ^2, ξ^3 , состоящие из точек сплошной среды (начальную лагранжеву систему координат), то в следующий момент времени они вместе вместе с точками континуума вновь перейдут в координатные линии сопутствующей системы. Однако, если в начальный момент они были выбраны прямыми, то в следующий момент времени они будут, вообще говоря, искривленными.

Таким образом, если рассматривать систему координат, связанную с частицами сплошной среды, то она с течением времени меняется. Выбор такой системы координат в любой момент времени в нашей власти, но в следующие моменты времени она уже не подвластна нам, так как она "вморожена" в среду и деформируется вместе с ней. **Такая вмороженная в среду система координат и определяется как сопутствующая система координат.**

Все точки сплошной среды всегда покоятся относительно подвижной сопутствующей системы координат.

Понятие сопутствующей системы координат является обобщением на случай сплошной среды собственной системы координат твердого тела в теоретической механике.

1.3. Лемма о преобразовании бесконечно малого отрезка сплошной среды в сопутствующей системе координат.

В сопутствующей системе координат любой бесконечно малый материальный отрезок прямой, выходящий из частицы P , в процессе движения сплошной среды переходит в бесконечно малый материальный отрезок прямой, выходящий из этой же частицы.

Действительно, наряду с бесконечно малым элементом сплошной среды $d\vec{r}$ в момент времени t , можно ввести элемент сплошной среды $k d\vec{r}_0$, где k – некоторое число.

В пространстве ξ^1, ξ^2, ξ^3 в момент $t = 0$ этому элементу соответствовал элемент $k d\vec{r}_0$, так как в этом пространстве в силу сохранения лагранжевых координат всех точек сплошной среды должно иметь разложение по векторам базиса

$$k d\xi^i e_i^0 = k d\vec{r}_0$$

При разных конечных k и данном $d\vec{r}$ элементы $k d\vec{r}$ определяют в момент t малый отрезок прямой, которому в пространстве ξ^1, ξ^2, ξ^3 в момент $t = 0$ соответствовал малый отрезок прямой $k d\vec{r}_0$.

1.4. Преобразование при перемещении бесконечно малой частицы сплошной среды.

Замечание 1. Ясно, что в интересующий нас момент времени t величины деформации зависят не только от рассматриваемого состояния тела, но и от того, по отношению к какому состоянию эти деформации вычисляются.

Как выбрать это состояние? Отметим, что его можно определить по разному. Это начальное состояние не обязательно должно реально существовать.

Например, за начальное состояние можно принять такое мысленно введенное состояние, в котором структура каждого элемента сплошной среды упорядочена и элемент предоставлен самому себе, т.е. на него не действуют никакие силы.

Однако, если ввести метрику в таком начальном состоянии, то она может оказаться неевклидовой. Например, в случае движения пленки в плоскости если за начальное состояние выбрать такое, когда к пленке не приложены никакие силы, то в этом состоянии пленка оставаясь двумерной будет покоробленной, морщинистой. Установить взаимно однозначное соответствие между точками плоской пленки

в данный момент и покоробленной (в случае снятия всех нагрузок) можно, но для этого, вообще говоря, нужно выйти в трехмерное пространство; оставаясь в двумерном пространстве, с сохранением евклидова типа метрики, этого сделать нельзя.

Вектор перемещений. В случае, когда начальное состояние может реально осуществляться и его метрика g_{ij}^0 как и метрика актуального пространства является евклидовой можно ввести **вектор перемещения** \vec{w}

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{w}$$

где \vec{r}, \vec{r}_0 – радиусы–векторы относительно некоторой точки одной и той же точки сплошной среды в начальный момент времени и в данный момент времени.

Связь между базисными векторами начального, актуального состояний и компонент вектора перемещений Имеем

$$\frac{\partial \vec{w}}{\partial \xi^i} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \xi^i} - \frac{\partial \vec{r}_0}{\partial \xi^i} = \vec{e}_i - \vec{e}_i^0$$

Откуда

$$\vec{e}_i = \vec{e}_i^0 + \frac{\partial \vec{w}}{\partial \xi^i}, \quad \vec{e}_i^0 = \vec{e}_i - \frac{\partial \vec{w}}{\partial \xi^i},$$

Бесконечно малая частица сплошной среды. Под бесконечно малой частицей сплошной среды будем понимать совокупность точек среды с координатами $\xi^i + d\xi = \xi^i + \rho^i$, удаленных от данной точки O с координатами ξ^1, ξ^2, ξ^3 , называемой центром частицы на бесконечно малое расстояние ρ .

Пусть в момент времени $t = 0$ положение всех точек бесконечно малой окрестности точки M сплошной среды задается вектором $d\vec{r}_0$, причем

$$d\vec{r}_0 = d\xi^i \vec{e}_i^0$$

Положение всех точек окрестности M' , в которую в рассматриваемый момент времени t перейдет точка M , определяется вектором $d\vec{r}$

$$d\vec{r} = d\xi^i \vec{e}_i$$

Совместим точки M и M' и разложим $d\vec{r}$ по векторам базиса \vec{e}_i^0

$$d\vec{r} = d\eta^i \vec{e}_i^0$$

Связь между $d\eta^i$ и $d\xi^i$ определяет **преобразование малой частицы сплошной среды**.

Для бесконечно малой частицы сплошной среды $d\xi^i$ и $d\eta^i$ можно рассматривать как декартовы координаты в одной и той же косоугольной системе координат с базисом \vec{e}_i^0 .

Возникающее при деформации тела преобразование имеет самый общий вид. Мы предполагаем лишь, что оно удовлетворяет свойствам взаимнооднозначности, непрерывности и дифференцируемости по координатам.

Однако, если рассмотреть бесконечно малую окрестность точки M сплошной среды, то это преобразование с точностью до малых первого порядка можно считать аффинным.

Действительно. Это преобразование следует из равенства

$$d\vec{r} = d\xi^i \vec{e}_i = d\eta^i \vec{e}_i^0$$

Так как

$$\vec{e}_i = \vec{e}_i^0 + \frac{\partial \vec{w}}{\partial \xi^i} = \vec{e}_i^0 + \nabla_i^0 w^{0k} \vec{e}_k^0 = (\delta_i^k + \nabla_i^0 w^{0k}) \vec{e}_k^0 = c_i^k \vec{e}_k^0$$

Где

$$c_i^k = (\delta_i^k + \nabla_i^0 w^{0k})$$

то

$$d\vec{r} = d\xi^i \vec{e}_i = d\xi^i c_i^k \vec{e}_k^0 = d\eta^k \vec{e}_k^0$$

Откуда получим

$$d\eta^k = c_i^k d\xi^i$$

Преобразование от $d\xi^i$ к $d\eta^i$ однородное линейное преобразование, с матрицей $\|c_i^k\|$, компоненты которой могут зависеть только от координат точки M и не зависят от дифференциалов $d\xi^i$, т.е. приближенных координат близких точек. Следовательно, коэффициенты c_i^k для малой частицы постоянны и это преобразование афинное.

Свойства афинных преобразований.

- При афинных преобразованиях прямые переходят в прямые, плоскости – в плоскости, причем параллельные прямые и плоскости переходят в параллельные прямые и плоскости. (В частности параллелограмм переходит в параллелограмм).

Отсюда следует, что все равные одинаково направленные отрезки растягиваются (или сжимаются одинаково).

- Отношение длин любого отрезка до и после преобразования (в силу того, что оно является отношением однородных функций первого порядка) не зависит от первоначальной длины отрезка, а зависит только от его направления. Отсюда следует, что коэффициент относительного удлинения любого отрезка $l = (ds - ds_0)/ds_0$ также не зависит от длины отрезка, а зависит от его направления. Отрезок переходит в отрезок, причем отношение, в котором точка делит отрезок остается неизменным.
- Алгебраическая кривая или поверхность переходит в алгебраическую кривую или поверхность того же порядка. Например, поверхность второго порядка переходит в поверхность второго порядка: сфера переходит в эллипсоид или сферу, причем сопряженные диаметры переходят в сопряженные. У сферы все сопряженные диаметры ортогональны, у эллипсоида в общем случае существует единственная тройка ортогональных сопряженных диаметров. Следовательно, всегда существует, по крайней мере, один ортогональный триэдр, который переходит в ортогональный триэдр, т.е. существуют главные оси тензора деформаций.
- Объемы при аффинных преобразованиях меняются, но величина относительного изменения объема

$$\theta = \frac{V - V_0}{V_0}$$

не зависит от первоначальной формы и размеров объема.

1.5. Тензор деформаций.

Рассмотрим два произвольных положения деформируемого тела и, в частности, его точек P и P' , в моменты времени $t = 0$ и t . Тогда будем иметь

$$d\vec{r}_0 = d\xi^i \vec{e}_i^0, \quad d\vec{r} = d\xi^i \vec{e}_i$$

Введем метрики пространств сопутствующей системы координат в моменты времени $t = 0$ и t . В момент времени $t = 0$ метрика задается метрическим тензором

$$g_{ij}^0 = \vec{e}_i^0 \cdot \vec{e}_j^0$$

Длина вектора $d\vec{r}_0$ будет

$$|d\vec{r}_0| = ds_0, \quad ds_0^2 = g_{ij}^0 d\xi^i d\xi^j,$$

В момент времени t имеем

$$g_{ij} = \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j$$

длина соответствующего ему вектора $d\vec{r}$ будет

$$|d\vec{r}| = ds, \quad ds^2 = g_{ij} d\xi^i d\xi^j,$$

Подчеркнем, что координаты точек в разные моменты времени в сопутствующей системе координат одинаковые, а компоненты метрических тензоров разные из-за того, что при движении меняются базисные вектора сопутствующей системы координат.

Введем обозначение

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (g_{ij} - g_{ij}^0)$$

Тогда

$$ds^2 - ds_0^2 = 2\varepsilon_{ij} d\xi^i d\xi^j$$

Компоненты ε_{ij} можно рассматривать как компоненты тензора, так как он образован разностью метрических тензоров.

Можно образовать два тензора ε^0 и $\hat{\varepsilon}$, имеющих одинаковые ковариантные компоненты, но отнесенные к разным базисам \vec{e}_j^0 и \vec{e}_i .

Тензор $\varepsilon^0 = \varepsilon_{ij} \vec{e}^{0i} \vec{e}^{0j}$, отнесенный к начальному пространству, называется **тензором деформаций Грина**, а

тензор $\hat{\varepsilon} = \varepsilon_{ij} \vec{e}^i \vec{e}^j$ отнесенный к актуальному пространству, называется **тензором деформаций Альманси**.

1.6. Физический смысл компонент тензора деформаций

Коэффициент относительного удлинения. Назовем коэффициентом относительного удлинения l отношение

$$l = \frac{ds - ds_0}{ds_0} = \frac{ds}{ds_0} - 1$$

где ds и ds_0 проходят в соответствующие моменты времени через одни и те же точки сплошной среды.

Ниже покажем, что **коэффициент относительного удлинения зависит от точки P и направления элемента для которого он вычисляется, но не зависит от длины $d\vec{r}$** .

Бесконечно малая деформация и конечная деформация. Деформация называется **бесконечно малой** если коэффициент относительного удлинения l в каждой точке сплошной среды и для каждого направления мал.

Если коэффициент относительного удлинения имеет конечное значение, то деформация называется **конечной**.

Для абсолютно твердого тела все коэффициенты относительного удлинения равны нулю.

Выражение компонент тензора деформаций через относительные удлинения и углы между базисными векторами. Запишем компоненты метрических тензоров в следующем виде

$$g_{ij} = \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = |\vec{e}_i| \cdot |\vec{e}_j| \cos \psi_{ij}, \quad g_{ij}^0 = \vec{e}_i^0 \cdot \vec{e}_j^0 = |\vec{e}_i^0| \cdot |\vec{e}_j^0| \cos \psi_{ij}^0$$

Где ψ_{ij} , ψ_{ij}^0 – углы между векторами \vec{e}_i , \vec{e}_j и \vec{e}_i^0 , \vec{e}_j^0 соответственно.

Отношение модулей соответствующих базисных векторов базисов актуального и начального пространства будет

$$\frac{|\vec{e}_i|}{|\vec{e}_i^0|} = \frac{\left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \xi^i} \right|}{\left| \frac{\partial \vec{r}_0}{\partial \xi^i} \right|} = \frac{|d\vec{r}_i|}{|d\vec{r}_{i0}|} = \frac{|d\vec{s}_i|}{|d\vec{s}_{i0}|} = l_i + 1$$

Где ds_i и ds_{i0} – элементы дуг координатных линий ξ^i , а l_i – коэффициенты относительных удлинений в направлениях ξ^i .

Теперь метрический тензор актуального пространства можно записать в следующем виде

$$g_{ij} = |\vec{e}_i^0| \cdot |\vec{e}_j^0| (1 + l_i)(1 + l_j) \cos \psi_{ij}$$

Тогда для ковариантных компонент тензора деформаций имеем

$$2\varepsilon_{ij} = [(1 + l_i)(1 + l_j) \cos \psi_{ij} - \cos \psi_{ij}^0] |\vec{e}_i^0| \cdot |\vec{e}_j^0|$$

Это выражение удобно для геометрического истолкования ε_{ij} .

Истолкование компонент тензора деформаций.

- **Компоненты ε_{ii} с одинаковыми индексами.** Из полученного выше соотношения имеем

$$2\varepsilon_{ii} = [(1 + l_i)^2 - 1] g_{ii}^0$$

Откуда

$$l_i = \sqrt{1 + \frac{2\varepsilon_{ii}}{g_{ii}^0}} - 1$$

Если деформации малы, то ε_{ij} малы и разложив в ряд получим

$$l_i \approx \frac{\varepsilon_{ii}}{g_{ii}^0}$$

Кроме того, если сопутствующая система в начальном состоянии взята декартовой, то

$$l_i \approx \varepsilon_{ii}$$

Таким образом, **ковариантные компоненты тензоров деформаций с одинаковыми индексами в случае бесконечно малых деформаций совпадают с коэффициентами относительных удлинений вдоль декартовых осей координат начального состояния.**

- **Компоненты ε_{ij} с различными индексами.**

В начальном состоянии выберем в данной точке такую систему координат, в которой \vec{e}_i^0 взаимно ортогональны, т.е.

$$\psi_{ij}^0 = \frac{\pi}{2}$$

Пусть

$$\psi_{ij} = \frac{\pi}{2} - \chi_{ij}$$

получим

$$2\varepsilon_{ij} = (1 + l_i)(1 + l_j) |\vec{e}_i^0| |\vec{e}_j^0| = |\vec{e}_i| \cdot |\vec{e}_j| \sin \chi_{ij}$$

или

$$\sin \chi_{ij} = \frac{2\varepsilon_{ij}}{\sqrt{g_{ii}} \sqrt{g_{jj}}}$$

Откуда видно, что **ковариантные компоненты ε_{ij} с разными индексами характеризуют скашивание первоначально прямого координатного угла.**

Если деформации бесконечно малы и система координат в начальном состоянии декартова, то

$$g_{ii}^0 = 1, \quad g_{ii} = 1 + O(\varepsilon)$$

С помощью разложения в ряд получим

$$\sin \chi_{ij} = 2\varepsilon_{ij}$$

или

$$\chi_{ij} = 2\varepsilon_{ij}$$

Отсюда видно, что в общем случае углы, бывшие в начальном состоянии прямыми, после деформации перестают быть прямыми и **ковариантные компоненты ε_{ij} с разными индексами ($i \neq j$) характеризуют скашивание первоначально прямого координатного угла.**

1.7. Главные оси и главные компоненты тензоров деформаций.

Главные оси. Напомним, что тензор деформаций является симметричным тензором, так как он определяется разностью метрических тензоров.

С каждым симметричным тензором, в том числе и с тензором деформаций, можно связать квадратичную форму $\varepsilon_{ij}d\xi^id\xi^j$. При этом, можно найти такую ортогональную систему координат η^1, η^2, η^3 , в которой она приведется к виду

$$\varepsilon_{ij}d\xi^id\xi^j = \varepsilon_{11}(d\eta^1)^2 + \varepsilon_{22}(d\eta^2)^2 + \varepsilon_{33}(d\eta^3)^2$$

Преобразование от ξ^i к η^i зависит от компонент ε_{ij} , поэтому соответствующий ортогональный триэдр η^i будет разным в разные моменты времени.

Если взять в пространстве g_{ij}^0 такие оси, то в результате движения они перейдут в пространстве g_{ij} (для сопутствующей системы) в соответствующие направления осей η^i , которые также будут ортогональны. Действительно, для таких осей η^i компоненты ε_{ij} при $i \neq j$ равны нулю, а следовательно $\chi_{ij} = 0$, т.е. оси остаются ортогональными.

Таким образом для переменных η^1, η^2, η^3 кординатные триэдры в пространствах g_{ij}^0 и g_{ij}^0 совпадают с главными осями тензоров ε^0 и $\hat{\varepsilon}$. Подчеркнем, что главные оси тензоров ε^0 и $\hat{\varepsilon}$ проходят через одни и те же точки сплошной среды.

Образуемый главными осями тензора деформаций в начальном состоянии ортогональный триэдр при данном перемещении остается ортогональным. Углы между главными осями не скашиваются. Однако, ортогональный триэдр главных осей может перемещаться как абсолютно твердое тело: смещаться поступательно и поворачиваться. Заметим, что элементы $d\vec{r}$, взятые вдоль главных осей, во время движения могут сжиматься или растягиваться.

Главные компоненты тензоров деформаций. Вдоль главных осей η^1, η^2, η^3 тензора деформаций в момент времени t квадрат длины произвольно направленного элемента $d\vec{r}$ может быть представлен в виде суммы

$$ds^2 = ds_1^2 + ds_2^2 + ds_3^2$$

где

$$ds_i^2 = g_{ii}(d\eta^i)^2, \quad (d\eta^i)^2 = \frac{ds_i^2}{g_{ii}}.$$

(суммирование по i отсутствует).

Аналогично в начальном состоянии имеем

$$ds_0^2 = ds_{01}^2 + ds_{02}^2 + ds_{03}^2, \quad ds_{0i}^2 = g_{ii}^0(d\eta^i)^2, \quad (d\eta^i)^2 = \frac{ds_{0i}^2}{g_{ii}^0}$$

Для разности квадратов длин получим

$$ds^2 - ds_0^2 = 2 \sum_i \varepsilon'_{ii}(d\eta^i)^2 = 2 \sum_i \frac{\varepsilon'_{ii}}{g_{ii}} ds_i^2 = 2 \sum_i \frac{\varepsilon_{ii}}{g_{ii}^0} ds_{0i}^2$$

Штрих у ε'_{ij} указывает, что ковариантные компоненты тензора деформаций взяты в главных осях. Так как матрицы $\|\varepsilon_{ii}\|, \|g_{ij}\|$ и $\|g_{ij}^0\|$ в главных осях имеют диагональный вид, то обратные им матрицы $\|\varepsilon^{ii}\|, \|g^{ij}\|$ и $\|g^{ij0}\|$ в главных осях также имеют диагональный вид и

$$g^{ii0} = \frac{1}{g_{ii}^0}, \quad g^{ii} = \frac{1}{g_{ii}}.$$

Поэтому

$$\frac{\varepsilon'_{ii}}{g_{ii}^0} = \varepsilon_i^{i0} = \varepsilon_i^0, \quad \frac{\varepsilon'_{ii}}{g_{ii}} = \varepsilon_i^i = \varepsilon_i,$$

Здесь суммирование по i отсутствует. Величины $\varepsilon_i^{i0}, \varepsilon_i^i$ являются смешанными компонентами в соответствующих тензоров в соответствующих главных осях. Поэтому

$$ds^2 - ds_0^2 = 2(\varepsilon_1 ds_1^2 + \varepsilon_2 ds_2^2 + \varepsilon_3 ds_3^2) = 2(\varepsilon_1^0 ds_{01}^2 + \varepsilon_2^0 ds_{02}^2 + \varepsilon_3^0 ds_{03}^2)$$

Итак, с каждой точкой среды можно связать обычные ортогональные декартовы системы координат (s_01, s_02, s_03) и (s_1, s_2, s_3) , оси которых в результате перемещения переходят друг в друга. Соответствующие компоненты тензоров деформаций ε_i и ε_{0i} в этих системах являются главными компонентами.

Связь между величинами главных компонент Грина и Альманси, относительными удлинениями вдоль главных осей и главными компонентами тензоров деформаций.

- Связь главных компонент тензоров деформаций ε^0 и $\hat{\varepsilon}$.

Для направления $d\vec{r}_i$, взятого вдоль i — ой главной оси имеем

$$ds_i^2 - ds_{0i}^2 = 2\varepsilon_i ds_i^2$$

Откуда

$$2\varepsilon_i = 1 - \frac{ds_{0i}^2}{ds_i^2}$$

Аналогично,

$$2\varepsilon_i^0 = \frac{ds_i^2}{ds_{0i}^2} - 1$$

Откуда

$$2\varepsilon_i = 1 - \frac{1}{1 + 2\varepsilon_{0i}} = \frac{2\varepsilon_{0i}}{1 + 2\varepsilon_{0i}}$$

- Выражения коэффициента относительного удлинения через главные компоненты

Так как

$$l_i = \frac{ds_i - ds_{i0}}{ds_{i0}},$$

то

$$l_i = \sqrt{\frac{1}{1 - 2\varepsilon_i}} - 1, \quad l_i = \sqrt{1 + 2\varepsilon_{0i}} - 1$$

Если деформации бесконечно малы, то после разложения в ряд получим

$$l_i = \varepsilon_{0i} = \varepsilon_i$$

Коэффициенты относительных удлинений вдоль главных осей в случае бесконечно малых деформаций совпадают как с главными компонентами тензора деформаций $\hat{\varepsilon}$, так и с главными компонентами тензора деформаций ε^0 в начальном пространстве.

1.8. Способ определения главных компонент тензора

Главные компоненты являются корнями кубического уравнения

$$\lambda^3 - I_1 \lambda^2 + I_2 \lambda - I_3 = 0,$$

которое следует из уравнения

$$|\lambda \delta_i^j - \varepsilon_i^j| = 0$$

инвариантного относительно выбора системы координат. Здесь

$$I_1 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = \varepsilon_\alpha^\alpha, \quad I_2 = \varepsilon_1 \varepsilon_2 + \varepsilon_2 \varepsilon_3 + \varepsilon_3 \varepsilon_1 = \frac{1}{2}[(\varepsilon_\alpha^\alpha)^2 - \varepsilon_\alpha^\beta \varepsilon_\beta^\alpha], \quad I_3 = \varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3 = \text{Det}||\varepsilon_i^j||$$

1.9. Коэффициент кубического расширения

Возьмем в главных осях тензора деформаций в начальном состоянии параллелепипед с ребрами $ds_{01}, ds_{02}, ds_{03}$. Его объем $dV_0 = ds_{01}ds_{02}ds_{03}$. В момент t ему соответствует параллелепипед с объемом

$$dV = ds_1ds_2ds_3 = \sqrt{1 + 2\varepsilon_1^0}ds_{01}\sqrt{1 + 2\varepsilon_2^0}ds_{02}\sqrt{1 + 2\varepsilon_3^0}ds_{03}$$

Коэффициентом кубического расширения называется величина

$$\theta = \frac{dV - dV_0}{dV_0} = \sqrt{(1 + 2\varepsilon_1^0)(1 + 2\varepsilon_2^0)(1 + 2\varepsilon_3^0)} - 1 = \sqrt{1 + 2I_1^0 + 4I_2^0 + 8I_3^0} - 1$$

Коэффициент кубического расширения определен как инвариантная геометрическая характеристика. Последнее выражение для θ пригодно при использовании любой системы координат.

В случае бесконечно малых деформаций

$$\theta \approx I_1 = \sum_i \varepsilon_i \approx \sum_i \varepsilon_i^0$$

Таким образом, **первый инвариант тензора деформаций** в случае бесконечно малых деформаций можно рассматривать как **коэффициент кубического расширения**.

1.10. Выражение компонент тензора деформаций через компоненты вектора перемещений

Напомним, что в случае, когда начальное состояние может реально осуществляться и его метрика g_{ij}^0 как и метрика актуального пространства является евклидовой можно ввести **вектор перемещения** \vec{w}

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{w}$$

где \vec{r}, \vec{r}_0 – радиусы-векторы относительно некоторой точки одной и той же точки сплошной среды в начальный момент времени и в данный момент времени.

Выражение компонент тензора деформаций через компоненты вектора перемещений Имеем

$$\frac{\partial \vec{w}}{\partial \xi^i} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \xi^i} - \frac{\partial \vec{r}_0}{\partial \xi^i} = \vec{e}_i - \vec{e}_i^0$$

Откуда

$$\vec{e}_i = \vec{e}_i^0 + \frac{\partial \vec{w}}{\partial \xi^i}, \quad \vec{e}_i^0 = \vec{e}_i - \frac{\partial \vec{w}}{\partial \xi^i},$$

Поэтому

$$g_{ij} = \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \vec{e}_i^0 \cdot \vec{e}_j^0 + \vec{e}_i^0 \cdot \frac{\partial \vec{w}}{\partial \xi^j} + \vec{e}_j^0 \cdot \frac{\partial \vec{w}}{\partial \xi^i} + \frac{\partial \vec{w}}{\partial \xi^i} \cdot \frac{\partial \vec{w}}{\partial \xi^j}$$

и

$$g_{ij}^0 = \vec{e}_i^0 \cdot \vec{e}_j^0 = \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j - \vec{e}_i \cdot \frac{\partial \vec{w}}{\partial \xi^j} - \vec{e}_j \cdot \frac{\partial \vec{w}}{\partial \xi^i} + \frac{\partial \vec{w}}{\partial \xi^i} \cdot \frac{\partial \vec{w}}{\partial \xi^j}$$

Следовательно

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij} &= \frac{1}{2}(g_{ij} - g_{ij}^0) = \frac{1}{2} \left[\vec{e}_i^0 \cdot \frac{\partial \vec{w}}{\partial \xi^j} + \vec{e}_j^0 \cdot \frac{\partial \vec{w}}{\partial \xi^i} + \frac{\partial \vec{w}}{\partial \xi^i} \cdot \frac{\partial \vec{w}}{\partial \xi^j} \right] = \\ &= \frac{1}{2} \left[\vec{e}_i \cdot \frac{\partial \vec{w}}{\partial \xi^j} + \vec{e}_j \cdot \frac{\partial \vec{w}}{\partial \xi^i} - \frac{\partial \vec{w}}{\partial \xi^i} \cdot \frac{\partial \vec{w}}{\partial \xi^j} \right] \end{aligned}$$

Эти формулы верны при любом выборе вообще криволинейных лагранжевых координат ξ^1, ξ^2, ξ^3 . Заметим, что в выражения для компонент тензора деформаций входят лишь первые производные вектора перемещений по координатам ξ^i , которые характеризуют относительные перемещения точек сплошной среды.

1.11. Выражение тензора деформаций через ковариантные производные компонент вектора перемещения .

Для компонент тензора деформаций используя эти обозначения можно получить

$$\varepsilon_{ij}^0 = \frac{1}{2} [\nabla_i^0 w_j^0 + \nabla_j^0 w_i^0 + \nabla_i^0 w_k^0 \nabla_j^0 w^{0k}]$$

или

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} [\nabla_i w_j + \nabla_j w_i - \nabla_i w_k \nabla_j w^k]$$

В случае бесконечно малых относительных перемещений после отбрасывания квадратичных по $|\vec{w}|$ членов получим

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} [\nabla_i^0 w_j^0 + \nabla_j^0 w_i^0] = \frac{1}{2} [\nabla_i w_j + \nabla_j w_i]$$

Очевидно, что ε_{ij} в этом случае совпадает с компонентами симметризованного тензора

$$\nabla_i w_j \vec{e}_i \vec{e}_j$$

1.12. О существовании уравнений совместности деформаций.

Тензор деформаций имеет девять компонент, из которых в силу симметрии ε_{ij} различных только шесть. При наличии вектора перемещений эти шесть компонент выражаются в каждой точке через девять производных $\nabla_j w_i$ и, следовательно, могут быть в данной точке пространства произвольными числами. Однако, ε_{ij} не могут быть произвольными функциями точек пространства, так как шесть функций ε_{ij} выражаются через производные только трех функций $w_i(\xi^1, \xi^2, \xi^3)$. Поэтому ε_{ij} должны удовлетворять определенным уравнениям, которые называются уравнениями совместности деформаций.

В общем случае уравнения совместности деформаций следуют из условия существования вектора перемещений и сводятся к условиям евклидовости начального и актуального пространств. При этом, тензоры Римана–Кристоффеля, составленные для фундаментальных тензоров g_{ij}^0 и g_{ij} , должны обращаться в нуль.

В случае бесконечно малых деформаций уравнения совместности имеют вид

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{\nu i}}{\partial \xi^j \partial \xi^\mu} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{\mu j}}{\partial \xi^i \partial \xi^\nu} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{\mu i}}{\partial \xi^j \partial \xi^\nu} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{\nu j}}{\partial \xi^i \partial \xi^\mu} = 0.$$

и называются **уравнениями совместности Сен–Венана**.

Уравнения совместности в случае бесконечно малых деформаций представляют собой шесть независимых линейных дифференциальных уравнений с частными производными второго порядка относительно ε_{ij}

Наборы комбинаций индексов для независимых уравнений следующие : (1212), (1313), (2323), (1213), (2123), (3132)

1.13. Геометрическая картина преобразования малой частицы сплошной среды при деформации.

Всякая выделенная в сплошной среде бесконечно малая сфера преобразуется при деформации в эллипсоид. Если при этом главные направления не меняют своей ориентации в пространстве, то имеем **чистую деформацию**. Она сводится к растяжению или сжатию по трем главным взаимно перпендикулярным главным осям. Заметим, что во время чистой деформации любые отрезки в частице, не направленные по главным осям, меняют вообще говоря, свое направление в пространстве.

Если сфера преобразуется в эллипсоид, так что главные направления меняют свою ориентацию в пространстве, то говорят, что имеет место **общий случай аффинного преобразования**, который сводится к чистой деформации и повороту в пространстве.

Итак, произвольное перемещение бесконечно малой частицы сплошной среды сводится к поступательному перемещению в пространстве, повороту и чистой деформации (сжатию или растяжению по трем взаимно перпендикулярным главным осям

При движении частицы как абсолютно твердого тела сфера переходит в сферу того же радиуса, причем все взаимно перпендикулярные триэдры можно рассматривать как главные, все они поворачиваются около одной и той же оси и на один и тот же угол. В этом случае говорят, что произошел **чистый поворот**.

Замечание 1. Матрица аффинного преобразования $|c_i^k|$ определяется девятью производными от компонент вектора перемещения \vec{w} по координатам ξ^1, ξ^2, ξ^3 .

В общем случае в данной точке эта матрица образована из произвольных девяти чисел. Чистая деформация характеризуется тремя главными компонентами тензора деформаций и тремя параметрами характеризующими направления главных осей в пространстве (или шестью компонентами тензора деформаций); поворот в пространстве характеризуется тремя оставшимися параметрами.

Замечание 2. Тензор деформаций играет основную и определяющую роль в теории деформирования твердых тел. В теории движения жидкости и газа играет большую роль другая характеристика тензор скоростей деформаций. (Сами деформации несущественны, а существенно насколько быстро они происходят).

2. Приложения

2.1. Векторы базиса. Контрвариантный и ковариантный законы преобразования

Через каждую точку пространства проходят три координатные линии, и в каждой точке пространства $M(x^1, x^2, x^3)$ можно рассмотреть элементарные прямолинейные направления $\Delta\vec{r}_1, \Delta\vec{r}_2, \Delta\vec{r}_3$, выходящие из точки M и соединяющие его с точками $M_1(x^1 + \Delta x^1, x^2, x^3), M_2(x^1, x^2 + \Delta x^2, x^3), M_3(x^1, x^2, x^3 + \Delta x^3)$ соответственно. В каждой точке пространства можно ввести векторы

$$\vec{e}_i = \lim_{\Delta x^i \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{r}_i}{\Delta x^i}$$

или

$$\vec{e}_i = \lim_{\Delta\xi^i \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{r}_i}{\Delta\xi^i}$$

Векторы \vec{e}_i и \vec{e}_i направлены по касательным к соответствующим координатным линиям в точке M .

В евклидовом пространстве эти пределы будут частными производными от \vec{r} по соответствующим координатам.

$$\vec{e}_i = \frac{\partial \vec{r}}{\partial x^i}$$

или

$$\vec{e}_i = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \xi^i}$$

Если под Δx^i или под $\Delta\xi^i$ понимать длины дуг вдоль соответствующих координатных линий, то производные $\frac{\partial \vec{r}}{\partial x^i}, \frac{\partial \vec{r}}{\partial \xi^i}$ по величине будут равны единице.

Так введенные векторы \vec{e}_i и \vec{e}_i называются **векторами базиса** для системы отсчета и для сопутствующей системы соответственно.

Если система координат x^i или ξ^i криволинейная, то векторы \vec{e}_i и \vec{e}_i меняются от точки к точке пространства и образуют, вообще говоря, в каждой точке пространства неортогональный триэдр.

Обратите внимание, что здесь индексы в обозначениях координат стоят вверху, а индексы в обозначениях векторов базиса внизу. Базис \vec{e}_i называется **ковариантным базисом**.

Взаимным базису \vec{e}_i называется базис \vec{e}^k удовлетворяющий соотношениям

$$\vec{e}^k \cdot \vec{e}_j = \delta_j^k$$

Он существует и единственен. Базис \vec{e}^k называется также **контрвариантным базисом**.

Если $g_{ij} = \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j$, а g^{ij} набор элементов матрицы $\|g^{ij}\|$, обратной матрице $\|g_{ij}\|$, то справедливы утверждения

$$\vec{e}^i = g^{ik} \vec{e}_k, \quad \vec{e}_j = g_{ik} \vec{e}^k, \quad g^{ij} = \vec{e}^i \cdot \vec{e}^j$$

Если выбрана система координат x^i , то векторное поле представляют используя локальные базисы \vec{e}_i или \vec{e}^j , в виде

$$\vec{A} = A^i \vec{e}_i, \quad \vec{A} = A_j \vec{e}^j,$$

где

$$A^i = g^{ik} A_k, \quad A_j = g_{jk} A^k$$

Величины A^i называются **контрвариантными компонентами векторного поля \vec{A} в системе координат x^i** , а величины A_i его **ковариантными компонентами**.

Если наряду с системой координат x^i рассматривается система координат ξ^k , то ее базис, взаимный базис и компоненты векторного поля \vec{A} в системе координат ξ связаны с базисами \vec{e}_i, \vec{e}_j и компонентами векторного поля \vec{A} законами преобразования :

$$\vec{e}_i = \frac{\partial x^k}{\partial \xi^i} \vec{e}_k, \quad A'_i = \frac{\partial x^k}{\partial \xi^i} A_k \quad \text{ковариантный закон}$$

$$\vec{e}^i = \frac{\partial \xi^i}{\partial x^k} \vec{e}^k, \quad A'^i = \frac{\partial \xi^i}{\partial x^k} A_k \quad \text{контрвариантный закон}$$

Если выбрана система координат, то тензорное поле представляется например в случае тензоров второго ранга в виде

$$T = T^{ij} \vec{e}_i \vec{e}_j = T_k^j \vec{e}^k \vec{e}_j = T_k^i \vec{e}_i \vec{e}^k = T_{ki} \vec{e}_k \vec{e}_i$$

Соответствующие компоненты тензора называются контрвариантными (T^{ij}), ковариантными (T_{ij}) и смешанными (T_i^j).

Компоненты тензора в системе координат ξ^k связаны с его компонентами в системе координат x^i **тензорным законом преобразования**: для каждого нижнего индекса используется ковариантный, для каждого верхнего индекса используется контрвариантный закон преобразования

$$\hat{T}_k^{ij} = \frac{\partial \xi^i}{\partial x^p} \frac{\partial \xi^j}{\partial x^q} \frac{\partial x^r}{\partial \xi^k} T_r^{pq}$$

2.2. Растояние между частицами.

Существенным моментом при деформации является изменение расстояний между частицами. Поэтому необходимо указать способ определения длин в пространстве.

Длина любого вектора выражается через его компоненты и скалярные произведения векторов базиса. Для определения длины вектора достаточно определить скалярные произведения векторов базиса

$$\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = g_{ij},$$

которые, вообще говоря в данной точке могут быть произвольными числами.

Квадрат длины вектора $d\vec{r}$ по определению будет равен

$$|d\vec{r}|^2 = ds^2 = d\vec{r} \cdot d\vec{r} = d\xi^i d\xi^j \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = g_{ij} d\xi^i d\xi^j,$$

а квадрат длины любого вектора

$$|\vec{A}|^2 = g_{ij} A^i A^j$$

Из условия инвариантности длины вектора $d\vec{r}$ относительно выбора системы координат следуют тензорные формулы преобразования g_{ij} . Действительно,

$$|d\vec{r}|^2 = g'_{pq} d\eta^p d\eta^q = g_{ij} d\xi^i d\xi^j = g_{ij} \frac{\partial \xi^i}{\partial \eta^p} \frac{\partial \xi^j}{\partial \eta^q} d\eta^p d\eta^q = g_{ij} a_p^i a_q^j d\eta^p d\eta^q$$

зде

$$a_p^i = \frac{\partial \xi^i}{\partial \eta^p}$$

-коэффициенты, которые задают связь приращений координат $d\xi^i$ и $d\eta^p$.

Таким образом, величины g_{ij} следует рассматривать как ковариантные компоненты тензора g , который называется **фундаментальным метрическим тензором**.

Согласно определению скалярного произведения метрический тензор является симметричным тензором:

$$g_{ij} = g_{ji}$$

Квадратичная относительно приращений координат $d\xi^i$ форма $g_{ij}d\xi^i d\xi^j$ называется **фундаментальной квадратичной формой**, задающей метрику – расстояние между близкими точками пространства.

Из алгебры известно, что всякую симметричную квадратичную форму с постоянными коэффициентами можно привести к каноническому виду, т.е. в каждой выбранной точке можно найти такие координаты x^1, x^2, x^3 , что квадратичная форма записывается в виде суммы квадратов:

$$ds^2 = (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2$$

Заметим, что выполнить такого рода преобразование сразу во всем пространстве, вообще говоря нельзя, т.е. нельзя найти такую систему координат x^1, x^2, x^3 , чтобы во всем пространстве фундаментальная квадратичная форма могла быть записана в виде суммы квадратов.

Если такая система координат существует, то пространство называется **евклидовым**, если нет то **неевклидовым**. Пространство называется **псевдоевклидовым** если

$$ds^2 = \alpha_i dx_i^2$$

где

$$\alpha_i = \mp 1$$

2.3. Ковариантные производные.

Величины

$$\frac{\partial w^k}{\partial \eta^i}$$

не являются компонентами тензора, так как при переходе к другой системе координат

$$w^k = w'^j \frac{\partial \eta^i}{\partial \xi^i}$$

и дифференцировать нужно будет и

$$\frac{\partial \eta^i}{\partial \xi^i}.$$

Поэтому тензорного закона преобразования

$$\frac{\partial w^k}{\partial \eta^i}$$

не получается.

Символы Кристофеля 1) симметричны по нижним индексам:

$$\Gamma_{kj}^i = \Gamma_{jk}^i$$

так как

$$\frac{\partial \vec{e}_j}{\partial \eta^k} = \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial \eta^k \eta^j} = \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial \eta^j \eta^k} = \frac{\partial \vec{e}_k}{\partial \eta^j}$$

или

$$\Gamma_{jk}^i \vec{e}_i = \Gamma_{kj}^i \vec{e}_j$$

2) Выражаются через компоненты метрического тензора следующим образом:

$$\Gamma_{jk}^i = \frac{1}{2} g^{is} \left(\frac{\partial g_{js}}{\partial \eta^k} + \frac{\partial g_{ks}}{\partial \eta^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial \eta^s} \right)$$

3) Заметим, что **символы Кристофеля не являются компонентами какого либо тензора**, так как в криволинейной системе координат они не равны нулю, а в декартовой равны нулю.

Ковариантные производные контравариантных компонент тензора Рассмотрим тензор

$$T = T^{jk} \vec{e}_j \vec{e}_k.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial \eta^i} &= \frac{\partial T^{jk}}{\partial \eta^i} \vec{e}_j \vec{e}_k + T^{jk} \frac{\partial \vec{e}_j}{\partial \eta^i} \vec{e}_k + T^{jk} \frac{\partial \vec{e}_k}{\partial \eta^i} \vec{e}_j = \frac{\partial T^{jk}}{\partial \eta^i} + T^{jk} \Gamma_{ji}^l \vec{e}_l \vec{e}_k + T^{jk} \Gamma_{ki}^l \vec{e}_j \vec{e}_l = \\ &\frac{\partial T^{jk}}{\partial \eta^i} \vec{e}_i \vec{e}_j + T^{lk} \Gamma_{li}^j \vec{e}_j \vec{e}_k + T^{jl} \Gamma_{li}^k \vec{e}_j \vec{e}_k = \left(\frac{\partial T^{jk}}{\partial \eta^i} + T^{lk} \Gamma_{li}^j + T^{jl} \Gamma_{li}^k \right) \vec{e}_j \vec{e}_k = (\nabla_i T^{jk}) \vec{e}_j \vec{e}_k \end{aligned}$$

В связи с тензором второго ранга можно ввести следующие тензоры третьего ранга

$$T_1 = \nabla_i T^{jk} \vec{e}_i \vec{e}_j \vec{e}_k, \quad T_2 = \nabla_i T^{jk} \vec{e}_j \vec{e}_k \vec{e}_i, \quad T_3 = \nabla_i T^{jk} \vec{e}_j \vec{e}_i \vec{e}_k$$

Свойства дифференцирования ковариантных производных те же, что и у обычных производных:

$$\nabla_i(v^k + \nabla_i w^k) = \nabla_i v^k + \nabla_i w^k, \quad \nabla_i(v^j w^k) = w^k \nabla_i v^j + v^j \nabla_i w^k.$$

Ковариантные производные ковариантных компонент вектора.

Пусть вектор представлен через свои ковариантные производные

$$\vec{w} = w_j \vec{e}^j.$$

Тогда

$$\frac{\partial \vec{w}}{\partial \eta^i} = \frac{\partial w^j}{\partial \eta^i} \vec{e}_j + w^k \frac{\partial \vec{e}_j}{\partial \eta^i}$$

Покажем, что

$$\frac{\partial \vec{e}_j}{\partial \eta^i} = -\Gamma_{ki}^j \vec{e}^k$$

Действительно, дифференцируя

$$\vec{e}^j \cdot \vec{e}_k = \delta_k^j$$

получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{e}_j}{\partial \eta^i} \vec{e}_k + \vec{e}_j (\Gamma_{ki}^l \vec{e}_l) &= 0 \implies \frac{\partial \vec{e}_j}{\partial \eta^i} \vec{e}_k + \delta_l^j \Gamma_{ki}^l = 0 \\ \implies \frac{\partial \vec{e}_j}{\partial \eta^i} \vec{e}_k + \Gamma_{ki}^j &= 0 \implies \frac{\partial \vec{e}_j}{\partial \eta^i} \vec{e}_k = -\Gamma_{ki}^j \end{aligned}$$

Откуда и следует требуемое утверждение.

Таким образом,

$$\frac{\partial \vec{w}}{\partial \eta^i} = \frac{\partial w^j}{\partial \eta^i} \vec{e}_j + w_j \Gamma_{ki}^j \vec{e}^k = \left(\frac{\partial w^j}{\partial \eta^i} - w_k \Gamma_{jl}^k \right) \vec{e}^k = (\nabla_i w_j) \vec{e}^k$$

Заметим, что $\nabla_i w_j$ являются ковариантными, а $\nabla_i w^j$ смешанными компонентами одного и того же тензора

$$T = \frac{\partial \vec{w}}{\partial \eta^i} \vec{e}^i = \nabla_i w_j \vec{e}^j \vec{e}^i = \nabla_i w^j \vec{e}_j \vec{e}^i$$

Отсюда следует, что **компоненты метрического тензора g^{jk} и g_{jk} несмотря на то, что они зависят от координат должны вести себя по отношению к ковариантному дифференцированию как постоянные величины: их можно вносить и выносить за знак ковариантной производной.**

Действительно, для различных компонент одного и того же тензора существует связь:

$$\nabla_i w^j = g^{jk} \nabla_i w_k,$$

но

$$w^j = g^{jk} w_k,$$

поэтому

$$\nabla_i(g^{jk} w_k) = g^{jk} \nabla_i w_k$$

т.е

$$\nabla_i g^{jk} = 0$$

Аналогично

$$\nabla_i g_{jk} = 0$$

и

$$\nabla_i(g_{jk} w^k) = g_{jk} \nabla_i w^k$$

1. Тензор скоростей деформаций

План:

1. Определение
2. Кинематическое истолкование компонент тензора скоростей деформаций.
3. Главные оси и главные компоненты тензора скоростей деформаций.
4. Условия совместности.
5. Бесконечно малое аффинное преобразование малой частицы среды.
О коммутативности бесконечно малых аффинных преобразований.
6. Теорема Коши–Гельмгольца о разложении скорости точек бесконечно малой частицы сплошной среды.
Распределение скоростей в бесконечно малой частице сплошной среды.
Разложение преобразования бесконечно малой частицы на сумму простейших.
7. Скорость относительного удлинения отрезка среды.
8. Скорость относительного изменения объема.

1.1. Тензор бесконечно малых деформаций, соответствующий перемещению за время Δt и основные свойства тензора скоростей деформаций

Тензор деформаций играет основную и определяющую роль в теории деформирования твердых тел. В теории движения жидкости и газа играет большую роль другая характеристика тензора скоростей деформаций. (Сами деформации несущественны, а существенно насколько быстро они происходят).

Напомним, что тензор деформаций вводился в связи с двумя состояниями среды: данным g_{ij} и начальным g_{ij}^0 :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(g_{ij} - g_{ij}^0)$$

Если начальное состояние реализуется в действительности, то существует вектор перемещения \vec{w} всех точек сплошной среды из начального состояния, достигаемого в момент t_0 , в рассматриваемый момент времени t . В этом случае компоненты тензора деформаций могут быть выражены через компоненты вектора перемещений.

Определение тензора скоростей деформаций. Тензор деформаций вводился для в результате сравнения двух состояний сплошной среды, а тензор скоростей деформаций является характеристикой данного состояния в данный момент времени.

Рассмотрим состояние в момент времени $t' = t + \Delta t$, близкий к моменту времени t . Пусть

$$\Delta\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(g'_{ij} - g_{ij}) = \frac{1}{2}[\nabla_i w_j + \nabla_j w_i + \nabla_i w_k \nabla_j w^k]$$

— компоненты тензора деформаций по отношению к этим моментам времени.

Тензором скоростей деформаций называется тензор с ковариантными компонентами

$$e_{ij} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\varepsilon_{ij}}{\Delta t} = \frac{1}{2} \frac{dg_{ij}}{dt} = \frac{1}{2}(\nabla_i v_j + \nabla_j v_i),$$

где

$$\vec{w} = \vec{v}\Delta t, \quad w_i = v_i\Delta t$$

Замечание 1. Если начальное состояние не зависит от времени, то

$$e_{ij} = \frac{d\varepsilon_{ij}}{dt}$$

2. Кинематическое истолкование компонент тензора скоростей деформаций. Из определения следует, что компоненты $e_{ij}\Delta t$ являются компонентами тензора бесконечно малых деформаций, соответствующего перемещению за время Δt . Заметим также, что перемещения имеют порядок Δt и являются бесконечно малыми перемещениями если время Δt мало.

Отсюда ясно кинематическое истолкование компонент тензора скоростей деформаций e_{ij} с точностью до множителя Δt совпадающих с компонентами тензора бесконечно малых деформаций Δe_{ij} .

1. Компоненты тензора скоростей деформаций с одноименными индексами e_{ii} являются скоростями относительных удлинений отрезков среды, первоначально направленных параллельно соответствующим декартовым координатным осям.

2. Компоненты e_{ij} при $i \neq j$ равны половине скорости сдвигивания первоначально прямых углов, образованных отрезками сплошной среды, в данный момент времени параллельными соответствующим координатным осям

3. Главные оси и главные компоненты тензора скоростей деформаций. Тензорная поверхность. Как для всякого симметричного тензора второго ранга, для тензора скоростей деформаций можно ввести **главные оси**; в декартовой системе координат направленной по главным осям, матрица тензора скоростей деформаций имеет диагональный вид. Главные оси тензора скоростей деформаций можно указать в любой данный момент времени t и в любой точке O среды. Если знак главного элемента (e_i) положителен, то имеем растяжение; в противном случае ($e_i < 0$) имеем сжатие.

Как и со всяким симметричным тензором, с тензором скоростей деформаций, можно связать **тензорную поверхность**. Она будет эллипсоидом, если все e_i одного знака, и гиперболоидом, если e_i имеют разные знаки. Главные оси тензора деформаций и тензора скоростей деформаций, вообще говоря, разные.

4. Условия совместности для компонент тензора скоростей деформаций. Ясно, что компоненты $e_{ij}\Delta t$ должны удовлетворять условиям совместности для тензора бесконечно малых деформаций – условиям Сен–Венана. Подставив их в указанные условия и перейдя к пределу при $\Delta t \rightarrow 0$ получим следующие условия для компонент тензора скоростей деформаций

$$\frac{\partial^2 e_{\nu i}}{\partial \xi^j \partial \xi^\mu} + \frac{\partial^2 e_{\mu j}}{\partial \xi^i \partial \xi^\nu} - \frac{\partial^2 e_{\mu i}}{\partial \xi^j \partial \xi^\nu} - \frac{\partial^2 e_{\nu j}}{\partial \xi^i \partial \xi^\mu} = 0.$$

Эта система уравнений содержит шесть независимых линейных уравнений в частных производных второго порядка. Наборы комбинаций индексов для независимых уравнений следующие : (1212), (1313), (2323), (1213), (2123), (3132).

Решения уравнений совместности. Выражения компонент тензора скоростей деформаций через компоненты вектора скорости дают общий интеграл условий совместности через произвольные функции – компоненты вектора скорости v_i .

1.2. Бесконечно малое преобразование малой частицы среды.

Бесконечно малое преобразование малой частицы сплошной среды является аффинным преобразованием. Напомним, что под бесконечно малой частицей сплошной среды мы понимаем совокупность точек среды с координатами $\xi^i + d\xi^i = \xi^i + \rho^i$, удаленных от данной точки O с координатами ξ^1, ξ^2, ξ^3 , называемой центром частицы на бесконечно малое расстояние ρ .

Поле скоростей \vec{v} будем предполагать непрерывным и имеющим производные по крайней мере первого порядка.

Если \vec{v}_0 – скорость точки O , а \vec{v}_1 – скорость точки O_1 , то за бесконечно малое время Δt вектор $\vec{\rho} = O\vec{O}_1$ перейдет в вектор $\vec{\rho}' = O'\vec{O}'_1$.

Очевидно,

$$\vec{\rho}' = \vec{\rho} + (\vec{v}_1 - \vec{v}_0)\Delta t.$$

Разложим \vec{v} в окрестности O с точностью до малых первого порядка по ρ

$$\vec{v}_1 = \vec{v}_0 + \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial \xi^j} \right)_0 \rho^j + \rho O(\rho), \quad \lim_{\rho \rightarrow 0} O(\rho) = 0$$

Следовательно, получим

$$\vec{\rho}' = \vec{\rho} + \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial \xi^j} \right)_0 \rho^j \Delta t + \vec{\rho} O(\rho) \Delta t \implies$$

или

$$\rho'^i = \rho^i + \nabla_j v^i \rho^j \Delta t + \rho O(\rho), \quad \text{так как } \frac{\partial \vec{v}}{\partial \xi^j} = (\nabla_j v^k) \vec{e}_k$$

где ρ'^j, ρ^j – компоненты $\vec{\rho}', \vec{\rho}$; Отсюда видно, что с точностью до величин порядка $\rho \Delta t$ малая частица сплошной среды за бесконечно малое время Δt претерпевает бесконечно малое аффинное преобразование, так как значения производных от \vec{v} по ξ^i берутся в центре частицы O .

Заметим, что второй член бесконечно малого аффинного преобразования имеет порядок малости $\rho \Delta t$.

Запишем это выражение в виде

$$\rho'^i = \rho^i + c_j^i \rho^j = (\delta_j^i + c_j^i) \rho^j$$

Заметим что компоненты c_j^i имеют порядок Δt

Замечание. В случае конечных деформаций бесконечно малая частица также испытывает аффинное, но конечное преобразование.

Бесконечно малые аффинные преобразования коммутативны с точностью до членов второго порядка. Пусть мы имеем два последовательных аффинных преобразования

$$I. \quad \rho'^i = (\delta_j^i + a_j^i) \rho^{*j}$$

и

$$II. \quad \rho^{*j} = (\delta_p^j + b_p^j) \rho^p$$

Составим результирующее преобразование

$$\rho'^i = (\delta_p^i + a_p^i + b_p^i + a_j^i b_p^j) \rho^p$$

соответствующее сначала преобразованию I затем II.

Если же, наоборот, сначала выполнить преобразование II а затем I, то получим

$$\rho'^i = (\delta_p^i + a_p^i + b_p^i + b_j^i a_p^j) \rho^p$$

Так как вообще $a_j^i b_p^i \neq b_j^i a_p^i$, то аффинные преобразования в общем случае некоммутативны. Однако если аффинные преобразования бесконечно малы, то члены матриц $\|b_j^i a_p^j\|, \|a_j^i b_p^i\|$ имеют второй порядок малости; бесконечно малые аффинные преобразования с точностью до этих членов коммутативны.

1.3. Теорема Коши–Гельмгольца о разложении скорости точек бесконечно малой частицы сплошной среды.

Теорема. Скорость \vec{v}_1 любой точки O_1 бесконечно малой частицы сплошной среды с центром в точке O складывается из скоростей поступательного и вращательного движения частицы как абсолютно твердой и скорости чистой деформации.

$$\vec{v}_1 = \vec{v}_0 + \vec{v}_{\text{справ}} + \vec{v}^*$$

1.3.1. Формула для распределения скоростей в бесконечно малой частице сплошной среды.

Разложим \vec{v} в окрестности O с точностью до малых первого порядка по ρ

$$\vec{v}_1 = \vec{v}_0 + \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial \xi^i} \right)_0 \vec{\rho} + \vec{\rho} O(\rho), \quad \lim_{\rho \rightarrow 0} O(\rho) = 0$$

Если выделить члены содержащие симметричную и антисимметричную части, то это выражение запишется в виде

$$\begin{aligned} \vec{v}_1 &= \vec{v}_0 + \nabla_i v_k \rho^i \vec{e}^k + \rho O(\rho) = \vec{v}_0 + \frac{1}{2} (\nabla_i v_k + \nabla_k v_i) \rho^i \vec{e}^k + \frac{1}{2} (\nabla_i v_k - \nabla_k v_i) \rho^i \vec{e}^k + \rho O(\rho) = \\ &= \vec{v}_0 + e_{ki} \rho^i \vec{e}^k + \omega_{ki} \rho^i \vec{e}^k + \rho O(\rho) \end{aligned}$$

Введем **квадратичную форму**

$$\Phi = \frac{1}{2} e_{pq} \rho^p \rho^q$$

Тогда

$$e_{ki} \rho^i = \frac{\partial \Phi}{\partial \rho^k}$$

Обозначим **вектор двойственный антисимметричному тензору** ω_{ij} через $2\vec{\omega}$.

$$\omega_i = \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} \nabla_j v_k = \frac{1}{2} (\text{rot } \vec{v})_i$$

или

$$\omega_1 = \frac{1}{2} (\nabla_2 v_3 - \nabla_3 v_2), \quad \omega_2 = \frac{1}{2} (\nabla_3 v_1 - \nabla_1 v_3), \quad \omega_3 = \frac{1}{2} (\nabla_1 v_2 - \nabla_2 v_1)$$

Тогда получим следующую формулу для распределения скоростей в бесконечно малой частице сплошной среды.

$$\vec{v}_1 = \vec{v}_0 + \text{grad } \Phi + \vec{\omega} \times \vec{\rho} + \rho O(\rho)$$

1.3.2. Кинематическое истолкование каждого члена формулы для скоростей точек малой частицы сплошной среды

Разложение преобразования бесконечно малой частицы на сумму простейших. Напомним

$$\vec{\rho}' = \vec{\rho} + (\vec{v}_1 - \vec{v}_0) \Delta t.$$

Поэтому в соответствии с формулой для распределения скоростей в бесконечно малой частице сплошной среды получим

$$\vec{\rho}' = \vec{\rho} + \text{grad } \Phi \Delta t + (\vec{\omega} \times \vec{\rho}) \Delta t + \vec{\rho} O(\rho) \Delta t$$

Т.к. бесконечно малые аффинные преобразования коммутативны с точностью до членов второго порядка, то разложим это преобразование на два не заботясь о последовательности проведения преобразований.

I. Первое преобразование определяется тензором скоростей деформаций

$$\vec{\rho}^* = \vec{\rho} + \text{grad } \Phi \Delta t$$

II. Второе – определяется вектором вихря

$$\vec{\rho}' = \vec{\rho}^* + (\vec{\omega} \times \vec{\rho}^*) \Delta t$$

Рассмотрим **первое преобразование**. Квадратичную форму

$$\Phi = \frac{1}{2} e_{ij} \rho^i \rho^j$$

можно привести к каноническому виду

$$\Phi = \frac{1}{2}(e_1x^2 + e_2y^2 + e_3z^2)$$

Тогда первое преобразование в главных осях запишется в виде

$$x^* = (1 + e_1\Delta t)x, \quad y^* = (1 + e_2\Delta t)y, \quad z^* = (1 + e_3\Delta t)z$$

где

$$e_1 \approx \frac{x^* - x}{x\Delta t}, \quad e_2 \approx \frac{y^* - y}{y\Delta t}, \quad e_3 \approx \frac{z^* - z}{z\Delta t}$$

являются главными скоростями удлинений или сжатий.

Это преобразование может быть заменено тремя преобразованиями вида

$$x^{**} = (1 + e_1\Delta t)x, \quad y^{**} = y, \quad z^{**} = z$$

каждое из которых представляет собой чистое растяжение или сжатие по одной из главных осей.

Рассмотрим **второе преобразование**. Составим изменение вектора $\vec{\rho}^*$, вызванное этим преобразованием

$$\vec{\rho}' - \vec{\rho}^* = d\vec{\rho}^*$$

Заметим, что скалярное произведение

$$\vec{\rho}^* \cdot d\vec{\rho}^* = \vec{\rho}^* \cdot (\vec{\omega} \times \vec{\rho}^*)\Delta t = 0.$$

Т.е. изменение вектора $\vec{\rho}^*$ ортогонально самому вектору $\vec{\rho}^*$, а значит все скорости относительного удлинения $e_{\vec{\rho}'} = 0$.

Следовательно, при преобразовании II бесконечно малая частица ведет себя как абсолютно твердое тело, и мы можем истолковать $(\vec{\omega} \times \vec{\rho})\Delta t$ как перемещение с мгновенной скоростью $\vec{\omega}$ бесконечно малой частицы сплошной среды, мгновенно затвердевшей до или после прошедшей деформации. Скорость $v_{\text{вращ}} = (\vec{\omega} \times \vec{\rho})$ называется **вращательной скоростью**.

Вектор $\vec{\omega}$ следует толковать как мгновенную угловую скорость вращения тела, связанного с бесконечно малой частицей среды, которое за время Δt остается твердым, т.е. триэдра главных осей тензора скоростей деформаций.

Вектор $\vec{\omega}$, называемый вектором вихря скорости, является мгновенной угловой скоростью вращения главных осей тензора скоростей деформаций.

Замечание. В случае конечной деформации бесконечно малой частицы среды движение также сводится к повороту и чистой деформации. Найти вектор поворота, зная компоненты матрицы аффинного преобразования $\|c_j^i\|$, можно, но эта задача сложна.

Скорость относительного удлинения отрезка среды. Член с *grad* Φ в формуле для скоростей точек бесконечно малой окрестности сплошной среды ответственен за деформацию частицы. Вычислим скорость относительного удлинения отрезка сплошной среды в направлении $\vec{\rho}$.

$$e_{\rho} = \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} = \frac{1}{2} \frac{1}{\rho^2} \frac{d\rho^2}{dt} = \frac{1}{2} \frac{1}{\rho^2} \frac{d(\vec{\rho} \cdot \vec{\rho})}{dt} = \frac{1}{\rho^2} \left(\vec{\rho} \cdot \frac{d\vec{\rho}}{dt} \right)$$

Так как

$$\vec{\rho}' = \vec{\rho} + (\vec{v}_1 - \vec{v}_0)\Delta t$$

то

$$\frac{d\vec{\rho}}{dt} = \vec{v}_1 - \vec{v}_0 = \text{grad}\Phi + \vec{\omega} \times \vec{\rho} + \rho O(\rho)$$

Следовательно,

$$e_\rho = \frac{1}{\rho^2} \left(\vec{\rho} \cdot \frac{d\vec{\rho}}{dt} \right) = \frac{1}{\rho^2} (\vec{\rho} \cdot \text{grad}\Phi) + \vec{\rho} \cdot (\vec{\omega} \times \vec{\rho}) = \\ \frac{1}{\rho^2} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} x + \frac{\partial \Phi}{\partial y} y + \frac{\partial \Phi}{\partial z} z \right) = \frac{2\Phi}{\rho^2} = e_{ij} \frac{x_i}{\rho} \frac{x_j}{\rho} = e_{ij} \alpha^i \alpha^j$$

где

$$\alpha^j = \cos(\rho, x^i)$$

если функция Φ взята в декартовой системе координат.

Итак если известны компоненты тензора скоростей деформаций e_{ij} и направление $\vec{\rho}$, то можно вычислить скорость относительного удлинения в этом направлении.

Введем обозначение

$$\vec{v}^* = \text{grad}\Phi$$

и назовем эту **скорость скоростью чистой деформации**.

Если $\vec{v}^* = 0$, то все $e_\rho = 0$ и деформация отсутствует, т.е. длины отрезков $\vec{\rho}$, взятых в любом направлении не меняются.

Наоборот, если деформация отсутствует, то все $e_\rho = 0$ и тогда

$$\vec{v}^* = \text{grad}\Phi = 0$$

Скорость относительного изменения объема. Составив выражение для скорости относительного изменения объема для тензора малых деформаций $e_{ij}\Delta t$ и перейдя к пределам получим

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0, V_0 \rightarrow 0} \frac{V - V_0}{V_0 \Delta t} = I_1 = e_1 + e_2 + e_3$$

Сумма $e_1 + e_2 + e_3$ является, очевидно, инвариантной величиной – первым инвариантам тензора скоростей деформаций.

В произвольной криволинейной системе координат

$$e_1 + e_2 + e_3 = \nabla_\alpha v^\alpha = \text{div } \vec{v}$$

Таким образом, **дивергенция вектора скорости равна скорости относительного изменения объема.**

1. Закон сохранения массы.

- План:
1. Закон сохранения массы индивидуального объема.
 2. Уравнение неразрывности в переменных Эйлера.
 3. Закон сохранения массы для геометрического объема.
 4. Стационарное течение.
 5. Примеры уравнений неразрывности.
 6. Результаты связанные со свойствами гармонических функций.
 7. Уравнение неразрывности в переменных Лагранжа.

1.1. Закон сохранения массы индивидуального объема. Уравнение неразрывности в переменных Эйлера.

Рассмотрим законы движения материальных тел.

Материальными телами называются, тела обладающие свойством инерции.

Свойство инерции характеризуется **массой** m . Массу можно ввести как для всего тела, так и для его частей. В механике Ньютона масса аддитивна: масса всего тела равна сумме масс m_i его частей

$$m = \sum_i m_i$$

Фундаментальным законом ньютонианской механики является закон сохранения массы m любого индивидуального объема (состоящего из одних и тех же частиц сплошной среды). Этот закон можно рассматривать как опытно установленный закон природы, верный в определенном приближении. Он формулируется следующим образом- *масса индивидуального объема сохраняется во время движения:*

$$m = \text{const} \quad \text{или} \quad \frac{dm}{dt} = 0$$

Если ввести плотность

$$\rho = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta V},$$

то закон сохранения массы индивидуального объема V запишется в виде

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho d\tau = 0$$

Используя формулу дифференцирования интеграла по подвижному объему это соотношение можно записать в виде

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho d\tau = \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} d\tau + \int_{\Sigma} \rho \vec{v} \cdot \vec{n} d\sigma = \int_V \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{v}) \right] d\tau = 0$$

Если ρ и ее первые производные непрерывны, то для непрерывного движения получим **уравнение неразрывности**

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{v}) = 0$$

Уравнение неразрывности можно записать в виде

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \vec{v} = 0$$

1.2. Закон сохранения массы для геометрического объема.

Проинтегрировав уравнение неразрывности для фиксированного геометрического объема с учетом формулы Гаусса-Остроградского получим

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} d\tau + \int_{\Sigma} \rho \vec{v} \cdot \vec{n} d\sigma = 0$$

или

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho d\tau = - \int_{\Sigma} \rho \vec{v} \cdot \vec{n} d\sigma$$

Первый член этого соотношения представляет собой скорость увеличения массы в фиксированной части V пространства вследствие зависимости поля плотности от времени, а второй определяет скорость, с которой масса вытекает через граничную поверхность S этой части пространства.

Равенство нулю суммы этих интегралов говорит о том, что **масса, содержащаяся в фиксированной части V пространства, может увеличиваться только вследствие притока дополнительной массы через поверхность S .**

1.3. Примеры уравнений неразрывности.

Несжимаемая среда. Среда называется несжимаемой, если любой ее индивидуальный объем остается во время движения постоянным по величине.

Напомним, что на прошлой лекции было показано, что скорость относительного изменения объема

$$\Theta = \lim_{\Delta t \rightarrow 0, V_0 \rightarrow 0} \frac{V - V_0}{V_0 \Delta t} = I_1 = e_1 + e_2 + e_3 = \nabla_{\alpha} v^{\alpha} = \operatorname{div} \vec{v}$$

Откуда следует

Условие несжимаемости среды:

$$\operatorname{div} \vec{v} = 0.$$

Плотность несжимаемой среды в частице не меняется. Действительно, из уравнения неразрывности

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \vec{v} \text{ при } \vec{v} = 0$$

в этом случае имеем

$$\frac{d\rho}{dt} = 0.$$

Векторный потенциал. Солеидальное поле, в том числе и поле вектора скорости в случае несжимаемой среды может быть представлено в виде

$$\vec{v} = \operatorname{rot} \vec{u}$$

где \vec{u} – называется **векторным потенциалом** \vec{v} .

Однородная и неоднородная среда. Среда называется **однородной**, если плотность ρ одинакова во всех частичках среды, т.е. она не зависит от пространственных координат x, y, z . Среда называется **неоднородной**, если плотность $\rho = \rho(x, y, z)$ –разная в разных частичках среды.

Установившиеся (стационарные) процессы. Процессы называются **стационарными** или **уставновившимися**, если все характеризующие эти процессы параметры в случае задания их с точки зрения Эйлера не зависят от времени.

В случае **стационарного движения** уравнение неразрывности будет

$$\operatorname{div} \rho \vec{v} = 0$$

Из закона сохранения массы для стационарного течения имеем

$$\int_{\Sigma} \rho \vec{v} \cdot \vec{n} d\sigma = 0$$

В случае стационарных процессов **вектор скорости перпендикулярен градиенту плотности**:

$$\operatorname{div}(\rho \vec{v}) = \rho \operatorname{div} \vec{v} + \vec{v} \cdot \operatorname{grad} \rho = \vec{v} \cdot \operatorname{grad} \rho = 0.$$

Линия тока. Линия тока - это линия, в каждой точке которой вектор скорости потока направлен по касательной к этой линии.

Трубка тока. Трубкой тока называется тело, образованное линиями тока, проходящими через точки замкнутой кривой.

Утверждение. При стационарном течении несжимаемой среды скорость вдоль трубы тока изменяется обратно пропорционально площади поперечного сечения трубы.

Доказательство. Пусть dS_1 и dS_2 –площади двух нормальных сечений трубы тока и движение направлено от dS_1 к dS_2 . При этом нормальная скорость в указанных сечениях соответственно равна v_1 и v_2 , а плотность ρ_1 и ρ_2 . Заметим, что нормальная скорость на боковой поверхности трубы тока равна нулю ($\vec{v} \cdot \vec{n} = 0$). Применив к отрезку трубы, ограниченному этими нормальными сечениями полученное уравнение, найдем, что

$$\rho_1 v_1 dS_1 = \rho_2 v_2 dS_2$$

Безвихревое движение. Движение называется безвихревым если вектор вихря $\vec{\omega}$, который определяется ротором скорости такого движения равен нулю:

$$\vec{\omega} = \frac{1}{2} \operatorname{rot} \vec{v} = 0$$

Напомним, что в случае безвихревых движений **волокна, расположенные в данный момент времени вдоль главных осей тензора скоростей деформаций, сохраняют в течении бесконечно малого промежутка времени свою ориентацию в пространстве**.

Теорема. Поле скоростей безвихревого движения можно представить в виде градиента скалярного поля, который называется потенциалом скорости:

$$\vec{v} = \operatorname{grad} \phi$$

Поэтому движение такого вида называется **потенциальным течением**.

Доказательство. Доказательство следует из теоремы Стокса.

Формулировка теоремы Стокса. Для любого вектора \vec{A} , удовлетворяющего необходимым условиям непрерывности и дифференцируемости имеем

$$\int_C \vec{A} d\vec{s} = \int_{\Sigma} (\operatorname{rot} \vec{A})_n d\sigma$$

Где C - замкнутый контур, на который можно натянуть гладкую поверхность Σ , и который можно стянуть в точку, оставаясь в области непрерывности и дифференцируемости \vec{A} .

Возьмем между данными точками A и B два контура L_1 и L_2 (Рис.), которые можно деформировать друг в друга в области непрерывного безвихревого движения. Рассмотрим циркуляцию Γ вектора скорости по замкнутому контуру $L_1 + L_2$

По теореме Стокса для безвихревого движения имеем

$$\Gamma = \int_{L_1 + L_2} (u dx + v dy + w dz) = 2 \int_{\Sigma} \omega_n d\sigma = 0.$$

поэтому

$$\Gamma_{AB} = \int_{L_1} (u dx + v dy + w dz) = \int_{-L_2} (u dx + v dy + w dz).$$

Так как контуры L_1 и L_2 произвольные, то отсюда следует, что циркуляция скорости между точками A и B не зависит от пути интегрирования, а зависит только от координат конечной точки B , если начальная точка A фиксирована. Таким образом,

$$\int_{AB} (u dx + v dy + w dz) = \phi(x, y, z)$$

Приращение циркуляции Γ на любом бесконечно малом участке BB' , очевидно будет равно

$$u dx + v dy + w dz = d\phi(x, y, z)$$

В силу произвольности dx, dy, dz будем иметь

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x}, v = \frac{\partial \phi}{\partial y}, w = \frac{\partial \phi}{\partial z}$$

Теорема. Потенциальное движение является безвихревым.

Доказательство. Формальной проверкой легко получить, что если $\vec{v} = \operatorname{grad} \phi$, то $\vec{\omega} = \frac{1}{2} \operatorname{rot} \vec{v} = 0$.

Уравнение неразрывности для потенциального течения. Для потенциального течения уравнение неразрывности принимает вид

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \Delta \phi = 0.$$

Уравнение неразрывности для потенциального течения несжимаемой среды. В случае потенциального течения несжимаемой среды имеем уравнение Лапласса

$$\Delta \phi = 0.$$

1.4. Результаты связанные со свойствами гармонических функций.

Определение. Функции удовлетворяющие уравнению Лапласса называются гармоническими.

1.4.1. Свойства гармонических функций

Теорема о среднем. Значение гармонической функции в данной точке M , равно среднему по поверхности любой сферы с центром в точке M :

$$\phi_M = \frac{1}{4\pi R^2} \int_S \phi d\sigma$$

Можно показать, и обратно что всякая функция, непрерывная вместе со своими вторыми производными и удовлетворяющая в области D теореме о среднем для сфер S с произвольными радиусами (принадлежащим D) является гармонической функцией в этой области.

Доказательство теоремы о среднем:

Если взять в качестве поверхности S сферу радиуса R с центром в некоторой точке M , то на основании предыдущего получим

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \phi}{\partial R} R^2 d\omega = R^2 \frac{\partial}{\partial R} \int_{\Omega} \phi d\omega = 0$$

где $d\omega$ – телесный угол, Ω – единичная сфера концентрическая S , значения подинтегральных функций берутся в точках S , соответствующих точкам Ω . Отсюда следует, что независимо от радиуса сферы S

$$\int_{\Omega} \phi d\omega = \text{const}$$

m.e.

$$\int_{\Omega} \phi = \phi_M 4\pi R^2.$$

Последнее равенство можно переписать в виде

$$\phi_M = \frac{1}{4\pi R^2} \int_S \phi d\sigma$$

Теорема. Гармоническая функция не может достигать ни максимума, ни минимума внутри области D .

Доказательство. Действительно. Предположим противное. Пусть в некоторой M внутри D потенциал ϕ достигает минимума, тогда во всех точках N сколь угодно малой окрестности точки M должно выполняться неравенство

$$\phi_M < \phi_N$$

Но при наличии такого неравенства теорема о среднем не может выполняться.

Аналогично доказывается, что внутри D нет максимума функции ϕ .

Следовательно, максимальные и минимальные значения потенциала ϕ регулярного течения несжимаемой жидкости в области D достигаются только на границе области D .

Так как производные гармонической функции ϕ

$$\frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad \frac{\partial \phi}{\partial y}, \quad \frac{\partial \phi}{\partial z}$$

также являются гармоническими функциями, то указанные свойства выполняются и для них.

Теорема 1. Поток несжимаемой жидкости через любую замкнутую поверхность, расположенную внутри области D равен нулю.

Доказательство. Это утверждение следует непосредственно из определения гармонической функции.

Пусть S некоторая замкнутая поверхность, расположенная в области D , внутри которой происходит *регулярное* потенциальное течение *нестжимаемой жидкости*. (Поверхность S может совпадать с областью D). V – объем ограниченный поверхностью S .

Используя теорему Гаусса–Остроградского с учетом уравнения неразрывности получим

$$\int_S v_n d\sigma = \int_S \frac{\partial \phi}{\partial n} d\sigma = \int_V \operatorname{div} \vec{v} d\tau = 0 \int_V \Delta \phi d\tau = 0$$

Теорема 2. Максимальное значение величины скорости при потенциальном движении несжимаемой жидкости достигается на границе регулярного потока жидкости.

Рассмотрим квадрат величины скорости

$$v^2 = \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^2$$

Ни величина скорости ни ее квадрат гармоническими функциями не являются, тем не менее имеет место следующая теорема.

Доказательство. Предположим противное: пусть в некоторой M внутри области величина скорости достигает максимума. Тогда

$$v_M^2 > v_N^2$$

где N – любая точка в достаточно малой окрестности точки M . Направим ось x параллельно скорости в точке M , тогда

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_M = v > 0, \quad \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)_M = 0, \quad \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)_M = 0$$

Так как гармоническая функция $\frac{\partial \phi}{\partial x}$ в точке M не может иметь максимума, то в любой малой окрестности точки M найдется такая точка N , что

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_N > \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_M$$

но при наличии этого неравенства подавно должно выполняться неравенство

$$\left[\left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^2 \right]_N > \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_M^2 = v_M^2$$

Таким образом, внутри потока невозможна реализация максимума скорости.

Максимальные значения скорости при потенциальном движении несжимаемой жидкости всегда достигаются на границах потока. При непрерывном обтекании тел безграничным потоком максимальная скорость достигается на поверхности обтекаемых тел.

Как будет показано позже при этом на поверхности оказывается минимальное давление, которое может вызвать явление кавитации, а из-за перепада давления на верхней и нижней поверхностях крыла возникает динамическая подъемная сила.

1.5. Уравнение неразрывности в переменных Лагранжа.

Получим дифференциальную форму уравнения неразрывности в переменных Лагранжа.

Введем декартову прямоугольную систему отсчета с векторами базиса $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$.

Пусть координаты точек среды относительно этой декартовой системы координат в момент времени t_0 будут x_0^i , а в момент времени $t - x^i$. Они являются значениями функций, задающих распределение частиц в соответствие с законом движения в моменты времени t_0 и t соответственно

$$x_0^i = x^i(\xi^1, \xi^2, \xi^3, t_0), \quad x^i = x^i(\xi^1, \xi^2, \xi^3, t)$$

Пусть радиус-вектор точки M относительно декартовой системы отсчета

$$\vec{r} = x^k \vec{e}_k.$$

Тогда

$$\hat{\vec{q}} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \xi^i} = \frac{\partial x^k}{\partial \xi^i} \vec{e}_k$$

В данный момент времени t в произвольной точке M сплошной среды на малых векторах $\hat{\vec{q}} d\xi^1, \hat{\vec{q}} d\xi^2, \hat{\vec{q}} d\xi^3$ направленных вдоль осей сопутствующей системы координат ξ^1, ξ^2, ξ^3 построим элементарный малый косоугольный параллелепипед.

Его объем будет равен

$$V = |\hat{\vec{q}} \cdot (\hat{\vec{e}}_2 \times \hat{\vec{e}}_3) d\xi^1 d\xi^2 d\xi^3|.$$

В другой произвольный момент t_0 времени ему соответствовал параллелепипед, построенный на векторах $\vec{e}_1^0 d\xi^1, \vec{e}_2^0 d\xi^2, \vec{e}_3^0 d\xi^3$, с объемом

$$V_0 = |\vec{e}_1^0 \cdot (\vec{e}_2^0 \times \vec{e}_3^0) d\xi^1 d\xi^2 d\xi^3|.$$

Если плотность среды в моменты t_0 и t соответственно ρ_0 и ρ , то по закону сохранения массы будем иметь

$$\rho_0 V_0 = \rho V$$

или

$$\rho = \rho_0 \frac{V_0}{V} = \rho_0 \left| \frac{\vec{e}_1^0 \cdot (\vec{e}_2^0 \times \vec{e}_3^0)}{\hat{\vec{q}} \cdot (\hat{\vec{e}}_2 \times \hat{\vec{e}}_3)} \right|$$

Представим смешанное произведение в виде детерминанта

$$\hat{\vec{q}} \cdot (\hat{\vec{e}}_2 \times \hat{\vec{e}}_3) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial \xi^1} & \frac{\partial x^2}{\partial \xi^1} & \frac{\partial x^3}{\partial \xi^1} \\ \frac{\partial x^1}{\partial \xi^2} & \frac{\partial x^2}{\partial \xi^2} & \frac{\partial x^3}{\partial \xi^2} \\ \frac{\partial x^1}{\partial \xi^3} & \frac{\partial x^2}{\partial \xi^3} & \frac{\partial x^3}{\partial \xi^3} \end{vmatrix} = \hat{\Delta}$$

Здесь $\hat{\Delta}$ якобиан преобразования от переменных ξ^1, ξ^2, ξ^3 к переменным x^1, x^2, x^3 . Аналогично,

$$\hat{\vec{q}} \cdot (\hat{\vec{e}}_2 \times \hat{\vec{e}}_3) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_0^1}{\partial \xi_0^1} & \frac{\partial x_0^2}{\partial \xi_0^1} & \frac{\partial x_0^3}{\partial \xi_0^1} \\ \frac{\partial x_0^1}{\partial \xi_0^2} & \frac{\partial x_0^2}{\partial \xi_0^2} & \frac{\partial x_0^3}{\partial \xi_0^2} \\ \frac{\partial x_0^1}{\partial \xi_0^3} & \frac{\partial x_0^2}{\partial \xi_0^3} & \frac{\partial x_0^3}{\partial \xi_0^3} \end{vmatrix} = \Delta^0$$

Где Δ^0 – якобиан преобразования от переменных ξ^1, ξ^2, ξ^3 к переменным x_0^1, x_0^2, x_0^3 .

Тогда используя свойство якобианов, получим уравнение неразрывности в виде

$$\rho = \rho_0 \frac{\Delta^0}{\hat{\Delta}} = \rho_0 \text{Det} \left| \frac{\partial x_0^i}{\partial x^k} \right|$$

6) Выпишем уравнение неразрывности в переменных Лагранжа с использованием метрических тензоров начального и актуального пространства.

Обозначим для наглядности компоненты $\frac{\partial x^k}{\partial \xi^i}$ векторов $\hat{\vec{q}}$ в системе x, y, z через e_{ix}, e_{iy}, e_{iz} . Тогда

$$\left[\hat{\vec{q}} \cdot (\hat{\vec{e}}_2 \times \hat{\vec{e}}_3) \right]^2 = \hat{\Delta}^2 = \begin{vmatrix} e_{1x} & e_{1y} & e_{1z} \\ e_{2x} & e_{2y} & e_{2z} \\ e_{3x} & e_{3y} & e_{3z} \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} e_{1x} & e_{1y} & e_{1z} \\ e_{2x} & e_{2y} & e_{2z} \\ e_{3x} & e_{3y} & e_{3z} \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} e_{1x} & e_{2x} & e_{3x} \\ e_{1y} & e_{2y} & e_{3y} \\ e_{1z} & e_{2z} & e_{3z} \end{vmatrix} = \text{Det} \|g_{ik}\| = \hat{g}$$

Аналогично,

$$|\hat{\xi}_1^0 \cdot (\hat{\xi}_2^0 \times \hat{\xi}_3^0)|^2 = \text{Det} \|g_{ik}^0\| = g^0$$

И следовательно уравнение неразрывности можно представить в виде

$$\rho = \rho_0 \sqrt{\frac{g^0}{\hat{g}}}$$

с) Можно рассуждать также следующим образом. Для сохранения массы в индивидуальном объеме сплошной среды требуется, чтобы выполнялось уравнение

$$\int_{V_0} \rho_0(\xi^i, t_0) dV_0 = \int_V \rho(x^i, t) dV$$

где оба интеграла взяты по одним и тем же частицам, т.е. V – это объем, который занимает среда в момент времени t , заполнившая в момент t_0 объем V_0 .

Используя закон движения сплошной среды получим

$$\int_V \rho(x^i, t) dV = \int_{V_0} \rho(x^i(\xi^i, t), t) J dV_0 = \int_{V_0} \rho(\xi^i, t) J dV_0$$

Где

$$J = \text{Det} \left| \frac{\partial x^i}{\partial \xi^k} \right|$$

Следовательно, имеем

$$\int_{V_0} \rho_0(\xi^i, t_0) dV_0 = \int_{V_0} \rho(\xi^i, t) J dV_0$$

Откуда в силу произвольности рассматриваемого объема

$$\rho_0 = \rho J$$

А это обозначает, что произведение ρJ не зависит от времени, т.е. что

$$\frac{d}{dt} (\rho J) = 0$$

Замечания.

1. Уравнение неразрывности носит универсальный характер и выполняется при движениях любой материальной среды (воды, воздуха, металла и т.д.), его вид не зависит от свойств среды. В общем случае в него входят четыре неизвестные функции, а для несжимаемой среды – три.

Очевидно, что для решения задач механики сплошной среды одного уравнения неразрывности недостаточно.

2. Для распределения f любой величины ϕ сохраняющей свои значения в индивидуальном объеме можно получить уравнения аналогичные уравнению неразрывности в переменных Эйлера

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \text{div}(f \vec{v}) = 0 \quad \text{и} \quad \frac{df}{dt} + f \text{div} \vec{v} = 0, \quad f = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta \phi}{\Delta V}$$

и в переменных Лагранжа

$$f = f_0 \sqrt{\frac{g^0}{\hat{g}}}, \quad f_0 = f J, \quad \frac{d}{dt} (f J) = 0$$

План:

Закон изменения количества движения.

1. Формулировка для конечного объема.
2. Следствия из закона изменения количества движения.
3. Дифференциальные уравнения движения сплошной среды.
4. Теорема живых сил.

Закон изменения момента количества движения.

1. О существовании внутренних моментов, а также распределенных массовых и поверхностных пар.
2. Интегральная формулировка, в том числе и в классическом случае.
3. Уравнение моментов количества движения в дифференциальной форме.
4. Симметрия тензора напряжений в классическом случае.

Теорема о кинетической энергии (живых сил).

1. Теорема о кинетической энергии для конечного объема.
2. Теорема о кинетической энергии для бесконечно малого объема.

1. Закон изменения количества движения

1. Формулировка для конечного объема.

Фундаментальным законом ньютонианской механики является также закон изменения количества движения для любого индивидуального объема объема сплошной среды. Этот закон также можно рассматривать как опытно установленный закон природы, верный в определенном приближении. В механике сплошной среды он постулируется. Его формулировка такова: **изменение количества движения объема сплошной среды происходит за счет действующих на него внешних сил.**

Математическая формулировка следующая

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho \vec{v} d\tau = \int_V \rho \vec{F} d\tau + \int_{\Sigma} \vec{p}_n d\sigma$$

Здесь

$\int_V \rho \vec{v} d\tau$ по определению есть количество движения сплошной среды, занимающей объем V , а $\int_V \rho \vec{F} d\tau$ и $\int_{\Sigma} \vec{p}_n d\sigma$ суммы внешних массовых и поверхностных сил и поверхностных, действующих на среду в объеме V соответственно.

Это уравнение является исходным уравнением для любых движений сплошной среды, в том числе и для разрывных движений, когда характеристики движения и состояния сплошной среды не являются всюду в объеме V непрерывными функциями координат, и для ударных процессов, когда они являются разрывными функциями времени

Используя закон сохранения массы его можно записать в виде

$$\int_V \rho \frac{d\vec{v}}{dt} d\tau = \int_V \rho \vec{F} d\tau + \int_{\Sigma} \vec{p}_n d\sigma$$

2. Следствия из закона изменения количества движения.

В случае непрерывных движений сплошной среды уравнение количества движения накладывает ряд ограничений на возможный вид зависимости напряжений \vec{p}_n от ориентации соответствующих площадок, взятых в данной точке.

Утверждение 1). В каждой точке сплошной среды имеет место следующая связь между напряжениями действующими с разных сторон выбранной элементарной площадки

$$\vec{p}_n = -\vec{p}_{-n}$$

Утверждение 2). Напряжение \vec{p}_n на любой площадке $d\sigma$, взятой в любой точке сплошной среды всегда выражается линейно через напряжения $\vec{p}^1, \vec{p}^2, \vec{p}^3$ на взятых в той же точке фиксированных площадках, параллельных координатным плоскостям прямоугольной декартовой системы координат:

$$\vec{p}_n = \vec{p}^1 \cos(\vec{n}, x) + \vec{p}^2 \cos(\vec{n}, y) + \vec{p}^3 \cos(\vec{n}, z)$$

Следовательно в каждой точке сплошной среды можно ввести **тензор напряжений** \hat{P} , такой что напряжение p_n на площадке с нормалью \vec{n} будет

$$\vec{p}_n = \hat{P} \cdot \vec{n}$$

Докажем утверждение 1.

Возьмем мысленно объем V и разделим его произвольным сечением S на две части V_1 и V_2 . Применим уравнение количества движения отдельно к V_1 и V_2 и ко всему объему V . Взаимодействие разделенных частей может осуществляться с помощью массовых распределенных сил и посредством поверхностных сил, распределенных по сечению S , движущемуся вместе с индивидуальными точками сплошной среды.

$$\begin{aligned} \int_{V_1} \rho \frac{d\vec{v}}{dt} d\tau &= \int_{V_1} \rho \vec{F}' d\tau + \int_{\Sigma_1} \vec{p}_n d\sigma + \int_S \vec{p}_n d\sigma \\ \int_{V_2} \rho \frac{d\vec{v}}{dt} d\tau &= \int_{V_2} \rho \vec{F}'' d\tau + \int_{\Sigma_2} \vec{p}_n d\sigma + \int_S \vec{p}_{-n} d\sigma \\ \int_V \rho \frac{d\vec{v}}{dt} d\tau &= \int_V \rho \vec{F} d\tau + \int_S \vec{p}_n d\sigma \end{aligned}$$

где через \vec{F}', \vec{F}'' обозначены плотности массовых распределенных сил, действующих соответственно на объемы V_1 и V_2 .

После сложения первых двух равенств и вычитания из суммы третьего при условии, что для массовых сил всегда выполняется

$$\int_{V_1} \rho \vec{F}' d\tau + \int_{V_2} \rho \vec{F}'' d\tau = \int_V \rho \vec{F} d\tau$$

получим

$$\int_S (\vec{p}_n + \vec{p}_{-n}) d\sigma = 0$$

Отсюда в силу произвольности объемов V, V_1, V_2 и сечения S вытекает, что

$$\vec{p}_n = -\vec{p}_{-n}$$

Докажем утверждение 2.

Предполагая характеристики движения непрерывными и конечными, составим выражение

$$\vec{\Omega} = \int_V \rho \vec{F} d\tau + \int_S \vec{p}_n d\sigma - \int_V \rho \frac{d\vec{v}}{dt} d\tau,$$

которое для любого индивидуального объема равно нулю.

Вычислим его для бесконечно малого тетраэдра три грани которого параллельны координатным плоскостям, а четвертая грань ориентирована произвольно. Ее ориентация задается единичным вектором нормали

$$\vec{n} = \vec{i} \cos(\vec{n}, x) + \vec{j} \cos(\vec{n}, y) + \vec{k} \cos(\vec{n}, z)$$

Напряжения на площадках с нормалью $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ обозначим соответственно через $\vec{p}^1, \vec{p}^2, \vec{p}^3$, а площадь грани ABC – через S . Площади граней MBC, MAB, MAC при этом будут равны соответственно $S \cos(\vec{n}, x), S \cos(\vec{n}, y), S \cos(\vec{n}, z)$, а объем тетраэдра $V = \frac{1}{3}hS$.

Для такого тетраэдра

$$\vec{\Omega} = - \left(\rho \frac{d\vec{v}}{dt} \right)_M \frac{1}{3} hS + \left(\rho \vec{F} \right)_M \frac{1}{3} hS + \vec{p}_n S - \vec{p}^1 S \cos(\vec{n}, x) - \vec{p}^2 S \cos(\vec{n}, y) - \vec{p}^3 S \cos(\vec{n}, z) + O(h^{2+\lambda}), \quad \lambda > 0$$

Если тетраэдр стягивать в точку, оставляя подобным самому себе, то h будет бесконечно малой первого порядка, S – второго порядка, а объем V – бесконечно малой третьего порядка.

Так как $\vec{\Omega} = 0$, то должны выполняться предельные равенства

$$\lim_{V \rightarrow 0} \frac{\vec{\Omega}}{h} = 0, \quad \lim_{V \rightarrow 0} \frac{\vec{\Omega}}{S} = 0, \quad \lim_{V \rightarrow 0} \frac{\vec{\Omega}}{V} = 0$$

Первый предел в случае непрерывных и конечных характеристик движения, очевидно всегда равен нулю.

Из условия

$$\lim_{V \rightarrow 0} \frac{\vec{\Omega}}{S} = 0,$$

вытекает, что должно выполняться равенство

$$\vec{p}_n = \vec{p}^1 \cos(\vec{n}, x) + \vec{p}^2 \cos(\vec{n}, y) + \vec{p}^3 \cos(\vec{n}, z)$$

Разложим векторы \vec{p}^i по векторам базиса $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$,

$$\vec{p}^1 = p^{k1} \vec{e}_k, \quad \vec{p}^2 = p^{k2} \vec{e}_k, \quad \vec{p}^3 = p^{k3} \vec{e}_k$$

Тогда компоненты p_n^i вектора напряжений $\vec{p}_n = p_n^i \vec{e}_i$ будут

$$p_n^1 = p^{11} \cos(\vec{n}, x) + p^{12} \cos(\vec{n}, y) + p^{13} \cos(\vec{n}, z) = p^{1i} n_i,$$

$$p_n^2 = p^{21} \cos(\vec{n}, x) + p^{22} \cos(\vec{n}, y) + p^{23} \cos(\vec{n}, z) = p^{2i} n_i$$

$$p_n^3 = p^{31} \cos(\vec{n}, x) + p^{32} \cos(\vec{n}, y) + p^{33} \cos(\vec{n}, z) = p^{3i} n_i$$

Таким образом матрица $\hat{P} = \{p^{ki}\}$ определяет линейное преобразование от компонент вектора \vec{n} к компонентам вектора \vec{p}_n . Оно может быть записано в любой криволинейной системе координат, так как является соотношением между векторами.

$$\vec{p}_n = \vec{p}^i n_i = p^{ki} \vec{e}_k n_i = \vec{p}^i (\vec{e}_i \cdot \vec{n}) = p^{ki} \vec{e}_k (\vec{e}_i \cdot \vec{n})$$

С помощью этого равенства в произвольных криволинейных системах координат можно ввести величины p^{ki} , которые следует рассматривать как контравариантные компоненты тензора – **тензора внутренних напряжений**

$$\hat{P} = p^{ki} \vec{e}_k \vec{e}_i$$

При этом в любой системе координат

$$\vec{p}_n = \hat{P} \cdot \vec{n} = \vec{p}^i n_i$$

где \vec{p}_n – напряжение на площадке с нормалью \vec{n} , а n_i – ковариантные компоненты вектора \vec{n} .

1.1. Дифференциальные уравнения движения

1. Уравнения движения сплошной среды в декартовой системе координат.

Утверждение 2. позволяет с помощью формулы Гаусса–Острогадского преобразовать сумму поверхностных сил –поверхностный интеграл преобразовать в интеграл, взятый по объему

$$\int_{\Sigma} \vec{p}_n d\sigma = \int_V \left(\frac{\partial \vec{p}^1}{\partial x} + \frac{\partial \vec{p}^2}{\partial y} + \frac{\partial \vec{p}^3}{\partial z} \right) d\tau$$

Следовательно

$$\vec{\Omega} = \int_V \rho \vec{F} d\tau + \int_V \left(\frac{\partial \vec{p}^1}{\partial x} + \frac{\partial \vec{p}^2}{\partial y} + \frac{\partial \vec{p}^3}{\partial z} \right) d\tau - \int_V \rho \frac{d\vec{v}}{dt} d\tau,$$

и из условия

$$\lim_{V \rightarrow 0} \frac{\vec{\Omega}}{V} = 0$$

получим

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = \rho \vec{F} + \frac{\partial \vec{p}^1}{\partial x} + \frac{\partial \vec{p}^2}{\partial y} + \frac{\partial \vec{p}^3}{\partial z}$$

Подчеркнем, что уравнение получено при допущении
непрерывности и дифференцируемости векторов \vec{p}^i .

Это уравнение является основным дифференциальным уравнением движения сплошной среды. Оно выполняется для любых непрерывных движений сред и в этом случае полностью эквивалентно интегральному уравнению количества движения, так как из него следует $\vec{\Omega} = 0$ для любого объема V . Интегральное уравнение постулируется для более общих случаев.

Если разложить векторы $\vec{p}^1, \vec{p}^2, \vec{p}^3$ по векторам базиса $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$

$$\vec{p}^i = p^{ki} \vec{e}^k,$$

то уравнение движения запишется в проекциях на декартовы оси координат через компоненты тензора напряжений в виде

$$\begin{aligned} \rho \frac{du}{dt} &= \rho F_x + \frac{\partial p^{11}}{\partial x} + \frac{\partial p^{12}}{\partial y} + \frac{\partial p^{13}}{\partial z} \\ \rho \frac{dv}{dt} &= \rho F_y + \frac{\partial p^{21}}{\partial x} + \frac{\partial p^{22}}{\partial y} + \frac{\partial p^{23}}{\partial z} \\ \rho \frac{dw}{dt} &= \rho F_z + \frac{\partial p^{31}}{\partial x} + \frac{\partial p^{32}}{\partial y} + \frac{\partial p^{33}}{\partial z} \end{aligned}$$

4. Уравнения движения сплошной среды в произвольной системе координат.

Из векторного уравнения количества движения

$$\int_V \rho \frac{d\vec{v}}{dt} d\tau = \int_V \rho \vec{F} d\tau + \int_{\Sigma} \vec{p}_n d\sigma$$

и теоремы Гаусса–Остроградского

$$\int_{\Sigma} \vec{p}_n d\sigma = \int_{\Sigma} \vec{p}^i n_i d\sigma = \int_V \nabla_i \vec{p}^i d\tau$$

получим, что в случае непрерывных движений выполняется следующее уравнение движения

$$\rho \vec{a} = \rho \vec{F} + \nabla_i \vec{p}^i$$

или

$$\rho a^k = \rho F^k + \nabla_i p^{ki}$$

где

$$a^k = \frac{\partial v^k}{\partial t} + v^i \nabla_i v^k$$

и

$$\nabla_i \vec{p}^i = (\nabla_i p^{ki}) \vec{e}_k$$

Замечание.

1. Векторное уравнение верно как в подвижной, так и в неподвижной системе координат, в частности как в системе отсчета, так и в сопутствующей системе. Однако нужно иметь в виду, что вектор \vec{a} является ускорением индивидуальных точек среды относительно какой либо инерциальной системы координат, а \vec{F} является плотностью заданных массовых сил.

Если же движение и ускорение рассматривать относительно неинерциальной системы координат, то в выражение для \vec{F} нужно включать силы инерции.

2. Это уравнение можно рассматривать как условие равновесия относительно сопутствующей системы координат: сумма всех сил действующих на частицу равна нулю.

Действительно, выделим в сплошной среде бесконечно малую частицу с массой $\rho d\tau$. На нее будут действовать массовые силы $\rho \vec{F} d\tau$, силы $-\rho \vec{a} d\tau$, которые в сопутствующей системе координат являются силами инерции, силы $\nabla_i \vec{p}^i d\tau = (\nabla_i p^{ki}) \vec{e}_k d\tau$, которые можно рассматривать как массовые силы, возникшие за счет действия поверхностных сил на границе частицы.

2. Уравнение моментов количества движения

Определение. Моментом количества движения объема V сплошной среды называется вектор

$$\vec{K} = \int_V \vec{r} \times \rho \vec{v} d\tau + \int_V \rho \vec{k} d\tau$$

где \vec{k} обозначает **плотность** так называемых собственных или **внутренних моментов количества движения**.

О внутреннем momente количества движения.

Физическая сторона представления о внутреннем momente количества движения объема сплошной среды может быть понята из таких соображений.

Рассмотрим атом-систему из ядра и врачающегося вокруг него электрона. Электрон вращается по орбите со скоростью порядка скорости света, и поэтому, несмотря на малый размер атома, система ядро атом обладает значительным собственным моментом количества движения. Этот момент называется орбитальным моментом количества движения. Кроме того, электрон, а также ядро обладают собственным моментом количества движения – спином, наличие которого нельзя объяснить с помощью введения соответствующего механического движения.

Все атомы обладают собственным моментом количества движения. Но сумма этих моментов количества движения для всех атомов в силу хаотичности движения в большинстве случаев равна нулю. Однако, если упорядочить движение элементарных частиц, например, магнитное поле, то сумма внутренних моментов всех атомов будет отлична от нуля.

Таким образом, если мы хотим в механике сплошной среды описывать движение реальных сред в электромагнитных полях, то мы должны вводить в рассмотрение собственные моменты и определять момент количества движения сплошной среды с учетом этих моментов.

О массовых и поверхностных парах сил.

На каждую частицу сплошной среды действуют распределенные массовые и поверхностные силы. Но может случиться так, что действие внешних материальных объектов на частицу сплошной среды нельзя заменить только этими силами, а потребуется **вводить также массовые и поверхностные пары**.

Обозначим через \vec{h} и \vec{Q}_n отнесенные к единице массы и поверхности моменты соответственно массовых и поверхностных пар.

Примером распределенных массовых пар – могут служить пары, действующие на каждый элемент стрелки компаса, помещенной в магнитное поле Земли.

Пример Гиромагнитный эффект объясняется за счет наличия внутренних моментов и распределенных массовых пар.

Уравнение моментов количества движения для конечного объема сплошной среды.

Этот закон формулируется следующим образом: **Изменение во времени момента количества движения произвольного индивидуального объема V сплошной среды (с учетом собственных моментов)** происходит за счет моментов внешних массовых и поверхностных сил, действующих на этот объем, и моментов действующих на этот объем распределенных массовых и поверхностных пар, вызванных внешними по отношению к объему материальными телами.

Математическая формулировка закона следующая

$$\frac{d}{dt} \left(\int_V \vec{r} \times \rho \vec{v} d\tau + \int_V \rho \vec{k} d\tau \right) = \int_V \vec{r} \times \rho \vec{F} d\tau + \int_{\Sigma} \vec{r} \times \vec{p}_n d\sigma + \int_V \rho \vec{h} d\tau + \int_{\Sigma} \vec{Q}_n d\sigma$$

Замечание.

Уравнение моментов количества движения, как и уравнение количества движения, постулируется для индивидуального объема V сплошной среды. Оно не вытекает из уравнения моментов количества движения системы материальных точек. Более того, уравнение моментов количества движения не является следствием уравнения количества движения.

В классическом случае (если отсутствуют внутренние моменты и распределенные внешние массовые и поверхностные пары) имеем следующую математическую формулировку закона об изменении момента количества движения

$$\frac{d}{dt} \left(\int_V \vec{r} \times \rho \vec{v} d\tau \right) = \int_V \vec{r} \times \rho \vec{F} d\tau + \int_{\Sigma} \vec{r} \times \vec{p}_n d\sigma$$

Уравнение моментов количества движения в

дифференциальной форме.

Воспользовавшись равенствами

$$\vec{p}_n = \vec{p}^i n_i, \quad \vec{Q}_n = \vec{Q}^i n_i$$

и теремой Гаусса–Остроградского получим

$$\int_{\Sigma} \vec{Q}_n d\sigma = \int_{\Sigma} \vec{Q}^i n_i d\sigma = \int_V \nabla_i \vec{Q}_i d\tau, \quad \int_{\Sigma} (\vec{r} \times \vec{p}_n) d\sigma = \int_{\Sigma} (\vec{r} \times \vec{p}_i) n_i d\sigma = \int_V \nabla_i (\vec{r} \times \vec{p}_i) d\tau$$

Имеют место также следующие преобразования

$$\int_V \nabla_i (\vec{r} \times \vec{p}_i) d\tau = \int_V \vec{r} \times \nabla_i \vec{p}_i d\tau + \int_V \nabla_i \vec{r} \times \vec{p}_i d\tau = \int_V \vec{r} \times \nabla_i \vec{p}_i d\tau + \int_V (\vec{e}_i \times \vec{e}_k) p^{ki} d\tau$$

так как

$$\nabla_i \vec{r} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial x^i} = \vec{e}_i$$

Заметим также что

$$\frac{d}{dt} \int_V \vec{r} \times \vec{v} \rho d\tau = \int_M \frac{d}{dt} (\vec{r} \times \vec{v}) dm = \int_M \frac{d}{dt} \vec{r} \times \vec{v} dm + \int_M \vec{r} \times \frac{d}{dt} \vec{v} dm = \int_V \vec{r} \times \frac{d}{dt} \vec{v} \rho d\tau$$

и, кроме того

$$\frac{d}{dt} \int_V \vec{k} \rho d\tau = \frac{d}{dt} \int_M \vec{k} dm = \int_M \frac{d}{dt} \vec{k} dm = \int_V \rho \frac{d}{dt} \vec{k} \rho d\tau$$

Теперь при условии, что масса $dm = \rho d\tau$ постоянна, теорему моментов количества движения можно записать в виде

$$\int_V \left[\vec{r} \times \left(\frac{d\vec{v}}{dt} - \vec{F} - \frac{1}{\rho} \nabla_i \vec{p}_i \right) \right] \rho d\tau + \int_V \frac{d\vec{k}}{dt} \rho d\tau = \int_V \vec{h} \rho d\tau + \int_V \nabla_i \vec{Q}^i d\tau + \int_V (\vec{e}_i \times \vec{e}_k) p^{ki} d\tau$$

Отсюда, так как объем V сплошной среды произволен, получим уравнение моментов количества движения в случае непрерывных движений сплошной среды

в дифференциальной форме

$$\frac{d\vec{k}}{dt} = \rho \vec{h} + \nabla_i \vec{Q}^i + (\vec{e}_i \times \vec{e}_k) p^{ki}$$

Симметрия тензора напряжений в классическом случае. В классическом случае имеем

$$(\vec{e}_i \times \vec{e}_k) p^{ki} = 0$$

Или

$$(\vec{e}_i \times \vec{e}_k) p^{ki} (k < i) + (\vec{e}_i \times \vec{e}_k) p^{ki} (k > i) = 0$$

Поменяв местами индексы суммирования в последней сумме и воспользовавшись свойством векторных произведений получим

$$(\vec{e}_i \times \vec{e}_k) (k < i) (p^{ki} - p^{ik}) = 0$$

Отсюда вытекает

$$p^{ki} = p^{ik}, \quad i \neq k, \quad \text{т.е тензор напряжений симметричен.}$$

3. Теорема живых сил

Одним из важных следствий динамических уравнений движения сплошной среды является теорема живых сил.

Введем определение кинетической энергии сплошной среды.

Определение. Кинетической энергией объема сплошной среды называется величина

$$E = \int_V \frac{\rho \vec{v}^2}{2} d\tau$$

В предположении, что внутри объема V компоненты тензора напряжений p^{ij} и компоненты вектора скорости v^i – непрерывные дифференцируемые функции пространственных координат и времени верна теорема об изменении кинетической энергии, которая и называется теоремой живых сил.

Теорема.

Для действительного движения дифференциал кинетической энергии конечного индивидуального объема сплошной среды равен сумме элементарных работ внешних и внутренних сил, действующих на этот объем (внешних массовых, внутренних массовых, внешних поверхностных и внутренних поверхностных).

Доказательство Пусть $d\vec{r} = \vec{v}dt$ – вектор перемещения бесконечно малого объема сплошной среды $d\tau$ за время dt . Умножим скалярно уравнение импульсов на $d\vec{r}$ и проинтегрируем по объему V .

Получим

$$\int_V \rho \vec{a} \cdot \vec{v} dt d\tau = \int_V \rho \vec{F} \cdot d\vec{r} dt d\tau + \int_V (\nabla_j p^{ij}) v_i dt d\tau$$

1. Так как

$$\vec{a} \cdot \vec{v} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \vec{v}^2,$$

то первый интеграл запишется в виде

$$\int_V \vec{a} \cdot \vec{v} dt \rho d\tau = \int_M d \left(\frac{1}{2} \vec{v}^2 \right) dm = d \int_M \frac{1}{2} \vec{v}^2 dm = d \int_V \frac{\rho \vec{v}^2}{2} d\tau = dE$$

2. Если разбить массовые силы на две группы: внешние \vec{F}^e и внутренние \vec{F}^i , то

$$\int_V \rho \vec{F} \cdot d\vec{r} dt = \int_V \rho \vec{F}^e \cdot d\vec{r} dt + \int_V \rho \vec{F}^i \cdot d\vec{r} dt = dA_m^e + dA_m^i$$

Где dA_m^e и dA_m^i – элементарные работы внешних и внутренних по отношению к объему V массовых сил, действующих на этот объем при бесконечно малом перемещении.

Замечание. Сумма всех внутренних массовых сил действующих на весь объем V всегда равна нулю, а работа этих сил может отличаться от нуля.

3. Последний интеграл запишем в виде суммы

$$\begin{aligned} \int_V (\nabla_j p^{ij}) v_i dt d\tau &= \int_V \nabla_j (p^{ij} v_i) dt d\tau - \int_V p^{ij} \nabla_j v_i dt d\tau = \\ \int_{\Sigma} p^{ij} v_i n_j d\sigma dt - \int_V p^{ij} \nabla_j v_i dt d\tau &= \int_{\Sigma} \vec{p}_n \cdot d\vec{r} d\sigma dt - \int_V p^{ij} \nabla_j v_i dt d\tau = dA_{nos}^e + dA_{nos}^i \end{aligned}$$

Где через dA_{nos}^e – обозначена работа внешних поверхностных сил, действующих на поверхности Σ выделенного объема V , при бесконечно малых перемещениях $d\vec{r} = \vec{v}dt$ точек поверхности.

Через

$$dA_{nos}^i = - \int_V p^{ij} \nabla_j v_i dt d\tau$$

– обозначена работа внутренних поверхностных напряжений в объеме V .

Таким образом имеем

$$dE = \delta A_m^e + \delta A_m^i + \delta A_{nos}^e + \delta A_{nos}^i$$

и теорема живых сил доказана.

Дальнейшие преобразования дают

$$\begin{aligned} dA_{nos}^i = - \int_V p^{ij} \nabla_j v_i dt d\tau &= - \int_V p^{ij} \frac{1}{2} (\nabla_j v_i + \nabla_i v_j) dt d\tau - \int_V p^{ij} \frac{1}{2} (\nabla_j v_i - \nabla_i v_j) dt d\tau = \\ &- \int_V p^{ij} e_{ij} dt d\tau - \int_V p^{ij} \omega_{ij} dt d\tau \end{aligned}$$

Замечание. В классическом случае, когда тензор напряжений симметричен последний интеграл обращается в нуль в силу антисимметрии тензора ω_{ij} .

Как известно, антисимметричному тензору ω_{ij} можно поставить в соответствие вектор вихря ω . Из приведенных выражений следует, что **наличие вихрей в движущейся сплошной среде в случае симметричного тензора напряжений не оказывает непосредственного влияния на величину элементарной работы внутренних поверхностных сил, а следовательно на изменение кинетической энергии.**

Теорема живых сил для бесконечно малого объема сплошной среды.

Теорема.

В каждой точке сплошной среды дифференциал плотности кинетической энергии равняется сумме плотностей элементарных работ внешних массовых, внешних поверхностных и внутренних поверхностных сил, действующих на эту бесконечно малую частицу.

Выберем объем ΔV так, чтобы интересующая нас точка сплошной среды находилась внутри него.

При стягивании объема в эту точку теорема живых сил написанная для ΔV и разделенная на массу $\Delta m = \rho d\tau$ частицы дает

$$d\frac{v^2}{2} = \vec{F} \cdot d\vec{r} + \frac{1}{\rho} \nabla_j (p^{ij} v_i) dt - \frac{1}{\rho} p^{ij} \nabla_j v_i dt$$

Величины $\frac{dv^2}{2}$, $\vec{F} \cdot d\vec{r}$, $\frac{1}{\rho} \nabla_j (p^{ij} v_i) dt$, $-\frac{1}{\rho} p^{ij} \nabla_j v_i dt$ называются плотностями кинетической энергии, работы массовых и поверхностных внешних и внутренних сил.

Замечание. В теорему живых сил для бесконечно малого объема сплошной среды не входит элементарная работа внутренних массовых сил, так как она стремится к нулю при $\Delta V \rightarrow 0$ и $\Delta m \rightarrow 0$. Это непосредственно следует из допущения о существовании плотности массовой силы как предела отношения внешней массовой силы действующей на объем, к массе заключенной в этом объеме.

Теорема живых сил имеет энергетическую природу, но это соотношение не является в общем случае законом сохранения энергии. Его можно трактовать как закон сохранения энергии только в том случае, когда механическая энергия рассматриваемой системы не переходит в тепловую и другие виды энергии. Подчеркнем, что теорема живых сил является непосредственным следствием уравнений уравнений импульсов.

1. Газы и жидкости

1.1. Уравнения баланса

На предыдущих лекциях были получены основные уравнения механики сплошной среды, которые должны выполняться для всех процессов и движений, какие могут происходить в сплошной среде: а) уравнение неразрывности

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \vec{v} = 0$$

б) уравнения движения

$$\rho a^k = \rho F^k + \nabla_i p^{ki}$$

в) уравнение энергии (притока тепла)

$$\rho \frac{du}{dt} = p^{ij} e_{ij} + \rho \frac{dq}{dt} + \rho \frac{dq^{**}}{dt}, \quad \rho \frac{dq}{dt} = -\operatorname{div} \vec{q}$$

г) уравнение моментов в классическом случае сводится к симметрии тензора напряжений

$$p^{ij} = p^{ji}$$

При условии, что массовые силы F^k и распределенные источники тепла $\frac{dq^{**}}{dt}$ заданы, указанные уравнения составляют систему пяти независимых уравнений, содержащих четырнадцать неизвестных функций координат и времени.

Неизвестными являются: плотность ρ , три компонента скорости v_i (или, что равносильно, компоненты перемещения u_i), шесть независимых компонент тензора напряжения p_{ij} , три компонента вектора потока тепла q_i , и плотность внутренней энергии u .

В дополнению к этому должен быть выполнен второй закон термодинамики предписывающий также неотрицательность производства энтропии в адиабатических процессах

$$\rho \frac{ds}{dt} = \frac{\rho}{T} \left(\frac{dq}{dt} + \frac{dq'}{dt} \right), \quad \frac{dq'}{dt} \geq 0.$$

Он добавляет еще три неизвестные — плотность энтропии s и абсолютную температуру T и некомпенсированное тепло dq' .

Значит, чтобы сделать систему замкнутой нужно изыскать еще одиннадцать уравнений.

1.2. Определяющие уравнения и уравнения переноса.

Механические и физические свойства среды описываются соотношениями между тензорами и тензорными функциями. Такие соотношения называются определяющими уравнениями, которые характеризуют частные свойства изучаемой среды.

Назначение определяющих уравнений состоит в том, чтобы установить математические соотношения между статическими, кинематическими и термодинамическими параметрами, описывающими поведение материала при наличии механических и термодинамических воздействий.

К ним относятся термодинамические уравнения состояния. В случае двухпараметрических сред их два. Соотношения, задающие закон теплопроводности (закон Фурье) (три проекции на оси координат). Еще шесть задают зависимости для тензора напряжений.

Так как реальные среды реагируют на реальные нагрузки крайне сложным образом, определяющие уравнения не пытаются отразить все наблюдаемые явления, связанные с конкретным материалом, а скорее служат для того, чтобы ввести некоторые идеализированные среды, такие, например, как идеально упругое тело или идеальная жидкость.

Такие идеализации, или как они иногда называются модели сред, очень полезны тем, что они разумно отражают поведение реальных сред в определенном интервале нагрузок и температур.

1.3. Тензор напряжений. Давление и вязкие напряжения.

Гидростатическое давление. В любой жидкости (газе) в состоянии покоя вектор напряжения \vec{p}_n на произвольном элементе поверхности коллинеарен нормали \vec{n} к поверхности и одинаков по величине для всех напряжений в данной точке

$$\vec{p}_n = -p\vec{n}$$

Здесь p — величина напряжения, или гидростатическое давление. Отрицательный знак указывает на сжимающее действие напряжения при положительном значении давления.

Каждое направление является главным, и

$$p^{ij} = -pg^{ij}$$

Касательные напряжения. Тензор вязких напряжений. Касательные компоненты тензора напряжений равны нулю в покоящейся жидкости. При движении компоненты касательных напряжений в общем случае не равны нулю, и обычно в этом случае тензор напряжений представляется обычно в виде суммы двух слагаемых

$$p^{ij} = -pg^{ij} + \tau^{ij}$$

при этом τ^{ij} называют **тензором вязких напряжений**, а p — **давлением**.

Все реальные жидкости — сжимаемые и вязкие. Однако эти свойства очень различны у различных жидкостей, и часто бывает возможным пренебречь этими в некоторых ситуациях без существенной потери точности.

Идеальная жидкость. Это такая жидкость, в которой τ^{ij} тождественно равны нулю даже если происходит движение, т.е.

$$\vec{p}_n = -p\vec{n}, \quad p^{ij} = -pg^{ij}$$

Вязкие жидкости. Это такие жидкости при описании движения которых необходимо учитывать касательные напряжения τ^{ij} .

$$p^{ij} = -pg^{ij} + \tau^{ij}$$

1.4. Модель идеальной жидкости (газа)

Определение. Идеальной жидкостью или идеальным газом называется такая среда, которая отвечает 3-м условиям:

- вектор напряжения \vec{p}_n на любой площадке с нормалью \vec{n} ортогонален площадке. Следовательно, тензор напряжений в идеальной жидкости шаровой:

$$p^{ij} = -pg^{ij};$$

- это двухпараметрическая среда, в которой внутренняя энергия зависит от двух параметров, например, ρ и s ,

$$u = u(\rho, s);$$

- это среда, в которой в случае непрерывных движений все механические процессы обратимы и следовательно

$$dq' = 0.$$

Экспериментальные данные и общие физические соображения показывают, что любая среда при не очень больших температурах и давлениях обладает такими свойствами.

Эти три предположения при условии что $u(\rho, s)$ задано, полностью фиксируют модель идеального газа или идеальной жидкости как в механическом, так и в термодинамическом смысле.

Действительно, если массовые силы \vec{F} и внешний приток тепла заданы, то уравнение неразрывности

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \vec{v} = 0$$

три уравнения Эйлера

$$a_i = F_i - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x^i}$$

два уравнения состояния

$$T = \left(\frac{\partial u}{\partial s} \right)_\rho, \quad p = \rho^2 \left(\frac{\partial u}{\partial \rho} \right)_s$$

уравнение притока тепла

$$du = -pd \frac{1}{\rho} + dq$$

и второй закон термодинамики

$$Tds = dq$$

представляют собой замкнутую систему для определения семи неизвестных функций ρ, v_i, p, s, T .

Адиабатические процессы. В этом случае $dq = 0$, поэтому при $dq' = 0$ имеем

$$ds = 0,$$

и

$$s = f(\xi^1, \xi^2, \xi^3).$$

т.е. в каждой индивидуальной частице энтропия сохраняется.

Значение энтропии в частицах должно быть задано или определено из дополнительных условий, вытекающих из постановки конкретных задач.

Баротропные процессы. Если при адиабатическом процессе энтропия s у всех частиц одинакова $s = \text{const}$, то из уравнений состояния следует, что давление p и температура T зависят только от ρ , т.е. процесс является баротропным и система механических уравнений оказывается замкнутой, когда функция $u(\rho, s)$ известна.

Изотермические процессы. Если независимыми термодинамическими переменными будут ρ и T , то для определения модели сплошной среды выгодно задавать свободную энергию $F(\rho, T) = u - Ts$. Уравнения состояния в случае будут

$$s = - \left(\frac{\partial F}{\partial T} \right)_\rho, \quad p = \rho^2 \left(\frac{\partial F}{\partial \rho} \right)_T$$

Эти уравнения состояния справедливы для любых процессов, но их вид особенно удобен для изучения изотермических процессов. Действительно, в этом случае при заданной функции $T(\xi^1, \xi^2, \xi^3)$ или при $T = \text{const}$ сразу получается, что давление p есть известная функция от ρ (если $\operatorname{grad} T = 0$, то P является функцией только от ρ и не зависит от ξ^i). Система механических уравнений в этом случае замкнута если известна функция $F(\rho, T)$. При этом энтропия определена из первого уравнения состояния, а уравнение притока тепла

$$dq = -Td \left(\frac{\partial F}{\partial T} \right)_\rho$$

позволяет вычислить внешний приток тепла, необходимый для поддержания изотермического процесса.

1.4.1. Модель идеальной несжимаемой жидкости.

Из условия несжимаемости вытекает, что для любой частицы

$$\rho(\xi^1, \xi^2, \xi^3) = const$$

В случае неоднородной жидкости плотность ρ можно рассматривать как заданную функцию лагранговых координат; для однородной жидкости плотность одинакова для всех частиц.

В этом случае имеем 4 уравнения для определения 4-х неизвестных: давления $p(x, t)$ и вектора скорости $\vec{v}(x, t)$.

условие несжимаемости

$$div \vec{v} = 0$$

и три уравнения Эйлера

$$a_i = F_i - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x^i}$$

Если идеальная несжимаемая жидкость неоднородная, то к этим уравнениям следует добавить пятое уравнение

$$\frac{d\rho}{dt} = 0,$$

которое служит для определения с точки зрения Эйлера функции $\rho(x^i, t)$.

1.4.2. Модель совершенного газа.

Для совершенного газа плотность ρ , давление p и температура T связаны уравнением Клайперона—Менделеева

$$p = \rho RT$$

где R – газовая постоянная.

На основании этого уравнения и уравнения притока тепла с учетом второго закона термодинамики для обратимых процессов в идеальных средах имеем

$$du = Td(s + R \ln(\rho/\rho_0))$$

Следовательно, для газов подчиняющихся уравнению Клайперона–Менделеева комбинация

$$s + \int R \frac{d\rho}{\rho}$$

зависит только от u , а так как

$$T = \frac{du}{d(s + R \ln \rho)},$$

то T является функцией только u . Поэтому ясно, что внутренняя энергия u и комбинация $s + \int R \frac{d\rho}{\rho}$ могут зависеть только от температуры и не зависят от плотности.

Этот вывод сохраняется и в том случае, когда величина R является не константой, а является любой функцией плотности ρ .

Полагая

$$du = c_V(T)dT$$

получим

$$s = \int \frac{c_V(T)dT}{T} - R \ln\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)$$

Таким образом, для задания модели совершенного газа необходимо задать постоянную R в уравнении Клайперона — Менделеева и задать удельную внутреннюю энергию как функцию температуры T . Последнее с точностью до постоянной равносильно заданию теплоемкости при постоянном объеме как функции температуры.

1.4.3. Газ Ван–дер–Ваальса.

Уравнение состояния Клайперона не соответствует действительности для сильно сжатых газов, когда плотность очень велика. Это уравнение неверно также для состояний, близким к точкам конденсации газов в жидкость, и для жидкостей. Кроме того, при очень малых температурах, близким к абсолютному нулю, уравнение состояния Клайперона — Менделеева перестают удовлетворять общим законам термодинамики. Рассмотрим идеальный газ, подчиняющийся уравнению состояния Ван–дер–Ваальса, которое является уточнением уравнения Клайперона–Менделеева

$$p = \frac{\rho RT}{1 - b\rho} - a\rho^2$$

Введение в уравнение состояния знаменателя $1 - b\rho = 1 - \frac{\rho}{\rho^*}$ приводит к резкому возрастанию давления при приближению плотности ρ к значению ρ^* , которое выбирается большим.

Добавочный член $-a\rho^2$ также существен только при больших плотностях ρ . С помощью этого члена учитывается проявление сил отталкивания между молекулами, которые проявляются только при их сближении, возникающем при большой плотности.

Это уравнение описывает процессы вблизи точек конденсации газа и действительные связи для некоторых диапазонов изменения параметров жидкой фазы.

Для газа Ван–дер–Ваальса внутренняя энергия представляется формулой

$$u = \int_{T_0}^T c_V(T) dT - a\rho + const = \Phi \left[\frac{1}{\rho} (p + a\rho^2)(1 - b\rho) \right] - a\rho,$$

а энтропия формулой

$$s = \int_{T_0}^T \frac{c_V(T) dT}{T} + R \ln \frac{(1 - b\rho)\rho_0}{\rho} + const$$

1.4.4. Среда, в которой давление зависит только от плотности.

Рассмотрим еще случай двупараметрической среды, для внутренней энергии которой верна формула следующего вида

$$u = f(\rho) + \phi(s)$$

Из уравнений состояния при этом получим

$$T = \phi'(s) \quad \text{и} \quad p = \rho^2 f'(\rho)$$

Следовательно в этом случае для любых процессов давление зависит только от плотности, а температура — от энтропии. Эти уравнения состояния полностью заменяют собой уравнения притока тепла.

1.5. Вязкие жидкости. Стоксовы жидкости. Ньютоновы жидкости

При установлении определяющих соотношений для вязких жидкостей в общем случае считают, что тензор вязких напряжений τ^{ij} является функцией тензора скоростей деформаций e_{ij} .

Стоксовская жидкость. Если эта функциональная связь нелинейная

$$\tau^{ij} = f^{ij}(e_{pq}),$$

то жидкость называется **стоксовской**.

Ньютоновская жидкость. Если эта функция линейная, т.е

$$\tau^{ij} = K^{ijkl} e_{kl},$$

то жидкость называется **ニュтоновской**.

Коэффициенты K^{ijkl} называются коэффициентами вязкости. Они определяются свойствами среды и могут зависеть от температуры, но не зависят от напряжений и скоростей деформаций.

Так как левая часть τ^{ij} определяющего соотношения представляет собой симметричный тензор второго ранга при любом выборе симметричного тензора e_{kl} , то **коэффициенты K^{ijkl} , образуют тензор четвертого ранга**.

Кроме того, из симметрии тензора напряжений следует равенство

$$K^{ijkl} = K^{jikl}$$

А, вследствие симметрии тензора скоростей деформаций e_{kl} без ограничения общности можно положить

$$K^{ijkl} = K^{ijlk}$$

Таким образом, вследствие общих условий симметрии этот тензор вместо $9 \times 9 = 81$ компоненты имеет самое большое $6 \times 6 = 36$ различных компонент.

Во многих условиях это число еще уменьшается благодаря специальным условиям симметрии, отражающим структуру среды.

Симметрия среды. Среда обладает симметрией, если существует группа преобразований координат, содержащая не только тождественное преобразование, такая, что компоненты тензоров, задающих свойства среды, не меняются при преобразованиях принадлежащих этой группе.

Ортогональные преобразования. Ортогональные преобразования можно определить как преобразования не меняющие компоненты метрического тензора (не меняются скалярные произведения векторов базиса)

$$g'_{ij} = g_{\alpha\beta} \frac{\partial x^\alpha}{\partial y^i} \frac{\partial x^\beta}{\partial y^j} = g_{ij}$$

Полная группа ортогональных преобразований содержит преобразования вращения (детерминант преобразования равен 1) и преобразования вращения, сочетающиеся с зеркальными отражениями (детерминант преобразования равен -1).

Изотропная, анизотропная и гиротропная среды. Среда называется изотропной, если компоненты тензоров, определяющих ее свойства, не меняются при любых ортогональных преобразованиях. Свойства изотропной среды (например, вязкие) одинаковы по всем направлениям. В противном случае среду называют анизотропной. Если свойства среды инвариантны только относительно группы вращений и не инвариантны относительно зеркальных отражений, то среда называется гиротропной.

Наибольшее сокращение числа отличных друг от друга компонент получается для изотропной среды.

В этом случае только два коэффициента K^{ijkl} являются независимыми.

Определяющие соотношения для изотропной однородной ньютоновской жидкости можно записать в виде

$$p^{ij} = -pg^{ij} + \lambda g^{ij} \operatorname{div} \vec{v} + 2\mu e^{ij}$$

где λ и μ – коэффициенты вязкости жидкости.

1.6. Модель вязкой жидкости.

Тензор напряжений. Вязкой жидкостью называется среда, в которой компоненты тензора напряжений и компоненты тензора скоростей деформаций связаны соотношениями вида

$$p^{ij} = -pg^{ij} + \tau^{ij}(e_{\alpha\beta})$$

где τ^{ij} – вязкие напряжения, $2e_{\alpha\beta} = \nabla_\alpha v_\beta + \nabla_\beta v_\alpha$, а p не зависит от $e_{\alpha\beta}$.

Для ньютоновской жидкости зависимость τ^{ij} от $e_{\alpha\beta}$ линейная. Если при этом жидкость изотропная, то

$$\tau^{ij} = \lambda g^{ij} \operatorname{div} \vec{v} + 2\mu e^{ij}$$

Таким образом, для изотропной ньютоновской вязкой жидкости

$$p^{ij} = -pg^{ij} + \lambda g^{ij} \operatorname{div} \vec{v} + 2\mu g^{i\alpha} g^{j\beta} e_{\alpha\beta}$$

Коэффициенты вязкости для различных сред различны и могут быть функциями температуры либо постоянными для данной среды физическими коэффициентами. В некоторых приложениях требуется рассматривать также среды, для которых величины λ и μ являются функциями скалярных инвариантов тензора e_{ij} , температуры T и других термодинамических характеристик. В дальнейшем будем рассматривать практически важный случай, когда коэффициенты вязкости являются постоянными.

Уравнения движения линейной вязкой жидкости. Если подставить выражение для тензора напряжений в уравнения движения, то получим уравнения Навье – Стокса

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = \rho \vec{F} - \operatorname{grad} p + (\lambda + \mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{v} + \mu \Delta \vec{v}$$

Вместо коэффициента λ часто вводят коэффициент второй вязкости

$$\zeta = \lambda + \frac{2}{3}\mu$$

Тогда уравнения Навье – Стокса записывают в виде

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = \rho \vec{F} - \operatorname{grad} p + \left(\zeta + \frac{\mu}{3} \right) \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{v} + \mu \Delta \vec{v}$$

Выражение для внутренней энергии. Для определения модели вязкой жидкости следует задать еще внутреннюю энергию как функцию, например, ρ и s

$$u = u(\rho, s),$$

Выражение для некомпенсированного тепла. Необходимо дать сведения о величине dq' , так как движение вязкой жидкости является, вообще говоря, необратимым процессом ($dq' \neq 0$).

Рассмотрим уравнение притока тепла. С учетом второго закона термодинамики его можно записать в виде

$$du = -dA^{(i)} + dq = -dA^{(i)} + Tds - dq'$$

Элементарная работа внутренних напряжений на единицу массы в случае вязкой жидкости будет

$$dA^{(i)} = -\frac{p^{ij}}{\rho} e_{ij} dt = \frac{p}{\rho} g^{ij} e_{ij} dt - \frac{\tau^{ij}}{\rho} e_{ij} dt = \frac{p}{\rho} \operatorname{div} \vec{v} dt - \frac{\tau^{ij} e_{ij}}{\rho} dt$$

С учетом уравнения неразрывности

$$\operatorname{div} \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt}$$

получим

$$dA^{(i)} = pd\frac{1}{\rho} - \frac{\tau^{ij}e_{ij}}{\rho}dt$$

Следовательно,

$$du = -pd\frac{1}{\rho} + \frac{\tau^{ij}e_{ij}}{\rho}dt + Tds - dq'$$

Считается, что и для вязкой сжимаемой жидкости температура и давление в покоящейся вязкой жидкости должны совпадать с соответствующими параметрами в покоящейся идеальной жидкости. Иными словами, **температура и давление для любых процессов определяются из тождества Гиббса**

$$du = -pd\frac{1}{\rho} + Tds$$

т.е. имеют место формулы

$$p = - \left(\frac{\partial u}{\partial 1/\rho} \right)_s, \quad T = \left(\frac{\partial u}{\partial s} \right)_\rho$$

Тогда выражение для некомпенсированного тепла будет

$$dq' = \frac{\tau^{ij}e_{ij}}{\rho}dt$$

Диссипации механической энергии в вязкой жидкости. Наличие некомпенсированного тепла приводит к диссипации механической энергии в вязкой жидкости. Действительно, записав теорему живых сил получим

$$d\frac{v^2}{2} = dA^{(e)} + dA^{(i)} = dA^{(e)} + pd\frac{1}{\rho} - \frac{\tau^{ij}e_{ij}}{\rho}dt$$

или

$$d\frac{v^2}{2} = dA^{(e)} + pd\frac{1}{\rho} - dq'$$

Так как $dq' \geq 0$, то за счет работы вязких напряжений кинетическая энергия в жидкости может только уменьшаться.

Коэффициенты вязкости положительны. В случае линейной и изотропной жидкости

$$dq' = \frac{\tau^{ij}e_{ij}}{\rho}dt = \frac{dt}{\rho} \left[\left(\zeta - \frac{2}{3}\mu \right) (e_i^i)^2 + 2\mu e^{ij}e_{ij} \right] = \frac{dt}{\rho} \left[\zeta I_1^2 + 2\mu \left(I_2 - \frac{I_1^2}{3} \right) \right]$$

где $I_1 = g^{ij}e_{ij}$, $I_2 = e^{ij}e_{ij}$ — первый и второй инварианты тензора скоростей деформаций.

Легко видеть, что в главных осях

$$I_2 - \frac{I_1^2}{3} = \left(e_1 - \frac{I_1}{3} \right)^2 + \left(e_2 - \frac{I_1}{3} \right)^2 + \left(e_3 - \frac{I_1}{3} \right)^2$$

Отсюда непосредственно вытекает, что для произвольных движений в произвольной системе координат

$$I_2 - \frac{I_1^2}{3} \geq 0$$

Так как по условию ζ и μ не зависят от e_{ij} , то из второго закона термодинамики $dq' \geq 0$ следует, что

$$\zeta > 0, \quad \mu > 0$$

1.7. Уравнение притока тепла для вязкой теплопроводной жидкости.

Напомним, что тепло к среде может поступать за счет различных механизмов: за счет теплопроводности, излучения, электрического тока, химических реакций и т.д.

Передача тепла за счет теплопроводности. При передаче тепла за счет теплопроводности имеет место **вектор потока тепла**, такой что общий приток тепла $dQ^{(e)}$ к объему V может быть представлен в следующем виде

$$dQ^{(e)} = - \int_{\Sigma} \vec{q} \cdot \vec{n} d\sigma dt = - \int_V \operatorname{div} \vec{q} d\tau dt$$

где \vec{n} – внешняя нормаль к поверхности Σ

Количество тепла, поступающее к бесконечно малому объему $d\tau$ за время dt , будет равно $dQ^{(e)} = -\operatorname{div} \vec{q} d\tau dt$, а к единице массы среды

$$dq^{(e)} = -\frac{1}{\rho} \operatorname{div} \vec{q} dt$$

Выражение для вектора потока тепла. Закон Фурье определяет зависимость вектора потока тепла от температуры

$$\vec{q} = -\lambda \operatorname{grad} T$$

Вектор потока тепла и градиент температуры имеют естественно противоположные направления поэтому коэффициент теплопроводности ($\lambda > 0$). Можно рассматривать частные важные примеры, когда коэффициент теплопроводности постоянен или зависит только от температуры T .

Выражение для притока тепла к единице массы среды за единицу времени за счет теплопроводности записывается

$$\frac{dq^{(e)}}{dt} = \frac{\lambda}{\rho} \operatorname{div} \operatorname{grad} T = \frac{\lambda}{\rho} \nabla^2 T = \frac{\lambda}{\rho} \Delta T$$

Уравнение притока тепла для вязкой жидкости будет иметь вид

$$\frac{du}{dt} = -p \frac{d1/\rho}{dt} + \frac{1}{\rho} \tau^{ij} e_{ij} + \frac{\lambda}{\rho} \Delta T.$$

Уравнение для производства энтропии в вязкой жидкости

$$T \frac{ds}{dt} = \frac{du}{dt} + p \frac{d1/\rho}{dt} = \frac{1}{\rho} \tau^{ij} e_{ij} + \frac{\lambda}{\rho} \Delta T$$

Для жидкости, удовлетворяющей закону Навье–Стокса это уравнение можно записать в виде

$$T \frac{ds}{dt} = \frac{\zeta}{\rho} (\operatorname{div} \vec{v})^2 + \frac{2}{\rho} \left[e^{ij} e_{ij} - \frac{1}{3} (\operatorname{div} \vec{v})^2 \right] + \frac{\lambda}{\rho} \Delta T$$

Это уравнение может служить для определения распределения температуры в жидкости. Внутренняя энергия u или энтропия при этом должны быть известны как функция температуры и плотности.

Например, если

$$u = \int c_v dT + \text{const},$$

то

$$\frac{du}{dt} = c_V \frac{dT}{dt} = c_V \left(\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} + w \frac{\partial T}{\partial z} \right)$$

В случае покоящейся несжимаемой среды имеем обычное **уравнение теплопроводности**

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\lambda}{\rho c_V} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right)$$

Итак, **полная система уравнений движения вязкой жидкости** будет состоять из уравнений Навье–Стокса, уравнения неразрывности, уравнения притока тепла, уравнений состояния.

Примером модели вязкой сжимаемой среды может служить **модель вязкого теплопроводного совершенного газа**, в котором

$$p = \rho R T, \quad u = c_V T + \text{const}$$

Дополнительная литература: И.П. Базаров. Термодинамика.

План:

1. Термодинамическая система, состояние, процессы.
2. Общее начало термодинамики.
3. Нулевое начало термодинамики.
4. Эмпирическая температура.
5. Энергия системы. Работа и теплота.
6. Первое начало термодинамики. Закон сохранения и превращения энергии.
7. Внутренняя энергия. Уравнение притока тепла для конечного объема.
8. Вектор потока тепла. Дифференциальная форма уравнения притока тепла.

1. Термодинамическая система, состояние, процесс.

Определение 1. Всякий материальный объект, всякое тело, состоящее из большого числа частиц, называется **макроскопической системой**.

Размеры макроскопических систем всегда значительно больше размеров атомов и молекул.

Определение 2. Макроскопические признаки, характеризующие макроскопическую систему и ее отношение к окружающим телам, называются **макроскопическими параметрами**.

Определение 2а). Параметры, определяемые положением не входящих в нашу систему внешних тел, называются **внешними параметрами** a_i . Например, объем системы, напряженность силового поля и т.д.

Определение 2б). Параметры, определяемые совокупным движением и распределением в пространстве входящих в систему частиц, называются **внутренними параметрами** b_j . Например, плотность, давление, энергия, поляризованность, намагниченность и др.

Различие между внешними и внутренними параметрами зависит от того, где мы проводим границу между системой и внешними телами. Более того, какие параметры являются внешними, а какие внутренними, зависит от задачи.

Примеры.

Сосуд с газом : p -внутренний параметр, а V - внешний.

Поршень: V -внутренний параметр, а p - внешний.

Определение 3. Совокупность независимых макроскопических параметров определяет **состояние системы**.

Состояние системы характеризуется точкой в некотором **пространстве возможных состояний**. Будем обозначать его буквами А, В, С.

Определение 4. Величины, не зависящие от предыстории системы и полностью определяемые ее состоянием в данный момент (т.е. совокупностью независимых параметров) называются **функциями состояния**.

Мы изучаем закономерности различных форм движения (механического, теплового, электромагнитного и др.) соответствующих структурных видов материи.

Определение 6. Общая мера этих форм движения при их превращении из одной в другую называется **энергией**.

Определение 7. Состояние называется **стационарным**, если параметры системы с течением времени не изменяются.

Определение 8. Если в системе все параметры постоянны во времени и нет никаких стационарных потоков энергии за счет действия каких-либо внешних источников, то такое **состоиние системы называется термодинамически равновесным**.

Определение 9 **Термодинамическими системами** обычно называют не всякие, а только те макроскопические системы, которые находятся в термодинамическом равновесии. **Термодинамическими параметрами** называют те параметры, которые характеризуют систему в термодинамическом равновесии.

Определение 10. **Процесс** это изменение состояния со временем. Процесс, начинающийся в состоянии А и заканчивающийся в состоянии В будем обозначать π_{AB} .

Определение 11. **Циклическим процессом** называется процесс, начинающийся и заканчивающийся в одном состоянии.

2. Общее начало термодинамики

Определение 12. Система, не обменивающаяся с внешними телами ни энергией, ни веществом, называется **изолированной**.

Общее начало термодинамики постулирует, что **изолированная макроскопическая (конечная) система с течением времени приходит в состояние термодинамического равновесия и никогда самопроизвольно выйти из него не может**.

Являясь результатом обобщения опыта, это первое исходное положение термодинамики является основой всей термодинамики и определяет рамки ее применимости.

Таким образом, если изолированная система выведена из состояния равновесия и предоставлена самой себе, то, согласно основному положению термодинамики, через некоторое время она снова придет в равновесное состояние.

Определение 13. Процесс перехода системы из неравновесного состояния в равновесное называется **релаксацией**, а промежуток времени, в течении которого система возвращается в состояние равновесия, называется **временем релаксации**.

Определение 14. **Физически бесконечно медленным или равновесным изменением какого - либо параметра a** называется такое его изменение со временем, когда скорость $\frac{da}{dt}$ значительно меньше средней скорости изменения этого параметра при релаксации. Так если при релаксации параметр a изменился на Δa , а время релаксации равно τ , то при равновесных процессах

$$\frac{da}{dt} \ll \frac{\Delta a}{\tau}$$

Определение 15. Процесс называется **равновесным или квазистатическим**, если все параметры системы изменяются физически бесконечно медленно, так что **система все время находится в равновесных состояниях**.

Определение 16. Если изменение какого - либо параметра a происходит за время t , меньшее или равное времени релаксации $\tau(t \leq \tau)$, так, что скорость изменения параметра больше или равна скорости изменения этого параметра при релаксации

$$\frac{da}{dt} \geq \frac{\Delta a}{\tau},$$

то такой процесс называется **неравновесным или нестатическим**.

Представление о равновесном процессе и все рассуждения, связанные с ним, оказываются возможными лишь на основе общего начала термодинамики о самонеразрушаемости равновесного состояния. Действительно, направление равновесного процесса будет вполне определено характером внешних воздействий только в том случае, если исключены спонтанные изменения термодинамического состояния системы.

Замечание.

Изучение равновесных процессов важно потому, что как оказывается, при этих процессах ряд важных величин (работа, коэффициент полезного действия машин и др.) имеют предельные значения. Поэтому выводы, получаемые термодинамикой для равновесных процессов, играют в ней роль своего рода предельных теорем.

Определение 17. Процесс перехода системы из состояния A в состояние B называется **обратимым**, если возвращение этой системы в исходное состояние можно осуществить без каких либо изменений в других телах

Определение 18. Процесс называется **необратимым** если обратный переход системы из B в состояние A нельзя осуществить без изменений в окружающих телах.

Замечание (Л. И. Седов): Процесс, протекающий из состояния A в состояние B называется **обратимым**, если для каждого промежуточного состояния все уравнения для бесконечно малых значений параметров удовлетворяются при замене знаков этих приращений на обратные. Таким образом, если некоторая последовательность состояний образует в пространстве состояний обратимый процесс, то эту последовательность состояний система может проходить как в прямом, так и в обратном направлении, причем соответствующие каждому элементу пути внешние притоки энергии $\delta A^e, \delta Q^e, \delta Q^{**}$ в прямом и обратном процессе отличаются только знаками. Если процесс не обладает таким свойством, то он называется **необратимым**.

Замечание (Л. И. Седов): Обычно рассматривают обратимые процессы, которые одновременно являются равновесными. Понятия равновесных и обратимых процессов в общем случае различны. Однако бесконечно медленные равновесные процессы, для которых в конечных соотношениях между определяющими параметрами не только скорости, но и вообще направления изменения определяющих параметров несущественны (не являются существенными аргументами) можно рассматривать как обратимые.

С другой стороны, примером необратимого процесса для системы в целом может служить явление установившейся теплопередачи теплопроводностью в покоящейся среде; в этом случае состояния всех малых частиц среды можно рассматривать как равновесные.

Если действующие силы и взаимодействия в рассматриваемой макроскопической системе зависят существенно от направления скорости изменения параметров состояния (например, процессы с участием силы трения), то соответствующие явления необратимы.

Подчеркнем, что как обратимые, так и необратимые явления могут состоять из последовательности ряда неравновесных или равновесных состояний частиц вещества.

Замечание.

Строго говоря, все реальные процессы в макроскопических масштабах протекают с конечными скоростями, направления их существенны, и поэтому они являются в действительности необратимыми, но практически многие процессы можно считать термодинамически обратимыми.

Примеры необратимых процессов дают процессы с трением, процесс теплопередачи при конечной разности температур, процесс расширения газа в пустоту и процесс диффузии.

3. Нулевое начало термодинамики

Нулевое начало термодинамики связано со свойствами термодинамического равновесия как особого вида теплового движения.

Опыт показывает, что если две равновесные системы A и B привести в тепловой контакт, то даже при равенстве у них внешних параметров a_i они или

- 1) останутся по прежнему в состоянии термодинамического равновесия,
или
- 2) равновесие в них нарушается и спустя некоторое время в процессе теплообмена (обмена энергией) обе системы приходят в другое равновесное состояние.
- 3) Кроме того, если имеются три равновесные системы A, B, C и если системы A и B порознь находятся в равновесии с системой C , то и системы A и B находятся в термодинамическом равновесии между собой (свойство транзитивности термодинамического равновесия).

Следовательно, состояние термодинамического равновесия системы определяется не только ее внешними параметрами a_i , но и еще одной величиной θ , характеризующей ее внутреннее состояние. Эта величина, выражающая состояние внутреннего движения равновесной системы и называется **температура**.

Нулевое начало термодинамики.

У равновесной системы существует однозначная функция состояния, которая называется температурой. При этом состояние термодинамического равновесия определяется совокупностью внешних параметров и температурой. Т.е. все равновесные внутренние параметры системы являются функциями внешних параметров и температуры.

Нулевое начало термодинамики позволяет определить изменение температуры тела по изменению какого - либо его внутреннего параметра, на чем основано устройство различных термометров.

Свойство транзитивности состояний термодинамического равновесия позволяет сравнивать значение величины θ у разных систем не приводя их в непосредственный тепловой контакт между собой, а пользуясь одним каким-нибудь телом.

Замечание. Принцип изотермической недостижимости.

Положение о существовании температуры θ у всякой равновесной системы можно сформулировать в виде **принципа изотермической недостижимости**: около каждого состояния равновесной системы существуют такие состояния, которые недостижимы изотермически (т.е. при условиях, когда система все время находится в тепловом контакте с термостатом).

Действительно, из состояния системы с температурой $\theta = \theta_1$ нельзя изотермически перевести систему в состояние с температурой $\theta = \theta_2$.

4. Эмпирическая температура

Определение 17. **Эмпирической температурой тела** называют установленную опытным путем меру отклонения термодинамического состояния тела от состояния теплового равновесия с тающим льдом, находящимся при нормальном атмосферном давлении.

При практическом определении температуры приходится пользоваться какой - либо определенной шкалой, связанной с тем или иным веществом.

В качестве термодинамического параметра обычно используют объем этого вещества, а **шкалу выбирают по Цельсию** : разность объемов тела при тепловом равновесии с кипящей водой при нормальном атмосферном давлении и тающим льдом при том же давлении равномерно делят на 100; каждое деление соответствует одному градусу, температура тающего льда принимается за 0°C :

$$\theta = \frac{V - V_0}{V_{100} - V_0} \times 100^{\circ}\text{C}.$$

Показания двух термометров с различными термодинамическими веществами, вообще говоря никогда не совпадают, кроме как при 0°C и при 100°C . Эта произвольность отчасти устраняется, если в качестве термодинамического вещества использовать достаточно разреженные (идеальные газы). Их коэффициент теплового расширения α не зависит ни от температуры, ни от природы газа.

Шкала газового термометра градуируется также, как и шкала Цельсия, но за нуль температуры принимается $-273.16^{\circ}\text{C} = -\frac{1}{\alpha}$ градусов Цельсия (**шкала Кельвина**).

Температура по шкале Кельвина T связана с температурой по шкале Цельсия θ

$$T = \frac{1}{\alpha} + \theta = 273.16 + \theta$$

Показания всех других термометров приводятся к газовому термометру.

Как будет показано в дальнейшем второе начало термодинамики полностью устраниет произвольность в определении температуры, позволяет строго установить абсолютную шкалу температуры (шкалу Кельвина), не зависящую ни от выбранного вещества ни от того или иного термометра.

Замечания

о статистическом и феноменологическом методе изучения макроскопических систем.

I. Статистическая физика, исходя из определенной молекулярной модели строения вещества, позволяет вычислить равновесные значения внутренних параметров системы.

Однако и не проводя вычислений можно выявить закономерности поведения систем в равновесном состоянии, имея в виду, что во многих случаях эти параметры могут быть определены экспериментально. Этот первый этап в теории равновесных состояний и предоставляет термодинамику.

Основанные на макроскопическом опыте представления об особенностях термодинамического равновесия конечных систем принимаются в термодинамике в качестве постулатов, опираясь на которые с помощью основных законов (начал) термодинамики изучаются свойства равновесных систем и закономерности при их приближении к равновесию.

Статистический метод изучения свойств макроскопических тел с самого начала основан на модельных атомно-молекулярных представлениях. Основную задачу статистической физики можно сформулировать следующим образом: зная законы поведения частиц, из которых построена система, установить законы поведения макроскопического вещества.

Феноменологический подход не связан с модельными представлениями, поэтому он обладает большей общностью. Кроме того, он отличается большой простотой и ведет, после ряда формально математических процедур, к решению целого ряда конкретных задач, не требуя никаких сведений о свойствах атомов и молекул. Однако, при феноменологическом рассмотрении остается не вскрытым внутренний (атомно-молекулярный) механизм явлений.

Вместе с тем, статистический подход к исследованию явлений позволяет в принципе решить ряд задач, вообще неразрешимых в рамках феноменологическим метода (вывод уравнений состояния макроскопических систем, теория теплоемкости, некоторые вопросы теории излучения). Он позволяет, с одной стороны, дать обоснование законов термодинамики, а с другой стороны, - установить границы их применимости, а также предсказать нарушения законов классической термодинамики и оценить их масштаб.

Однако, выводы статистической физики справедливы лишь в той мере, в какой справедливы предположения, сделанные о поведении мельчайших частиц.

II. Равновесное значение любого внутреннего параметра представляет собой среднее за большой промежуток времени значение соответствующей этому параметру функции координат и скоростей.

Например,

$$\tilde{\rho} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_{\tau-t/2}^{\tau+t/2} \rho(\tau) d\tau$$

Аналогично, макроскопическую скорость \vec{v} можно водить как скорость центра тяжести совокупности молекул в физически малом объеме; температуру T как среднюю энергию хаотического движения атомов и молекул относительно макроскопического движения, приходящуюся на одну степень свободы; напряжение \vec{p}_n на некоторой площадке - как среднюю характеристику импульса, переносимого молекулами через эту площадку при их хаотическом движении.

III. Как показывает опыт и статистическая физика относительные спонтанные отклонения макроскопической системы от равновесия при других равных условиях тем меньше, чем больше частиц в системе.

Из статистической физики следует, что постулат о самопроизвольном переходе изолированной системы в равновесие и неограниченно долгое ее пребывание в нем не является абсолютным законом природы, а выражает лишь наиболее вероятное поведение системы; никогда не прекращающиеся движение частиц системы приводят ее к спонтанным отклонениям (флуктуациям) от равновесного состояния.

Вероятностное поведение макроскопических систем, состоящих из громадного числа механически движущихся частиц, является характерной особенностью теплового движения, качественно отличающей его от классического механического движения с присущей ему однозначностью. Наличие огромного числа частиц в термодинамических системах обуславливает второстепенность механических закономерностей отдельных частиц и возникновение закономерностей их совокупного, массового движения.

Принимая основной постулат, термодинамика ограничивает себя, исключая из рассмотрения системы, для которых равновесное состояние невозможно (процессы в таких системах не завершаются

наступлением равновесия), а также все явления связанные с большими самопроизвольными отклонениями от равновесного состояния.

Основной постулат о термодинамическом равновесии приводит не только к нижнему пределу применимости термодинамики (системы с малым числом частиц), но и ограничивает ее применение к реальным системам сверху. Так для систем галактических размеров этот постулат не имеет места: не учитываемое обычно в земных условиях гравитационное взаимодействие между частицами в случае очень больших систем приводит к качественно новому их поведению - возникновению непрерывно сменяющих друг друга больших флюктуаций. Такие системы одинаково часто как приближаются к некоторому среднему равновесию, так и удаляются от него.

5. Энергия системы

Всякая термодинамическая система состоит из огромного числа непрерывно движущихся частиц. Общая мера различных форм движения при их превращении из одной в другую называется **энергией**.

Определение 18. Энергия непрерывно движущихся и взаимодействующих частиц, из которых состоит система называется **энергией системы**.

Полная энергия системы разделяется на внешнюю и внутреннюю.

Определение 19. Часть энергии, состоящая из энергии движения системы как целого и потенциальной энергии системы в поле внешних сил называется **внешней энергией**.

Определение 20. Остальная часть энергии системы называется **внутренней энергией**.

В статистической физике внутренняя энергия системы состоит из энергии разных видов движения и взаимодействия входящих в систему частиц: энергии поступательного и вращательного движения молекул и колебательного движения атомов, энергии молекулярного взаимодействия, внутриатомной энергии заполненных электронных уровней, внутриядерной энергии и др.

Внутренняя энергия U является внутренним параметром и, следовательно, при равновесии зависит от внешних параметров a_i и температуры θ :

$$U = U(a_1, \dots, a_n; \theta)$$

6. Работа и теплота

При взаимодействии термодинамической системы с окружающей средой происходит обмен энергией.

При этом возможны **два различных способа передачи энергии** от системы к внешним телам.

Определение 21. Первый способ передачи энергии, связанный с **изменением внешних параметров** называется **работой**.

Работа предоставляет собой макроскопическую упорядоченную форму передачи энергии путем взаимного действия тел друг на друга.

При бесконечно малом изменении параметров a_i работа совершаемая системой равна

$$\delta A = \sum_i A_i da_i,$$

где F_i - сопряженные внешним параметрам a_i обобщенные силы, являющиеся при равновесии функциями внешних параметров a_i и температуры T .

Как следует из определения работы и как видно из выражения для элементарной работы δA не является полным дифференциалом, так как в это выражение не входит дифференциал температуры.

Определение 22. Второй способ передачи энергии - **без изменения внешних параметров - теплообмен**.

Теплообмен с молекулярной точки зрения связан с движением атомов и молекул, из которых состоят тела и представляет собой микрофизическую форму передачи энергии от одного тела к другому путем непосредственного молекулярного взаимодействия, т.е. посредством обмена энергией между хаотически движущимися частицами обоих тел.

Энергия, переданная системе с изменением ее внешних параметров, также называется работой A, а энергия, переданная системе без изменения ее внешних параметров, - количеством теплоты Q.

Принято считать работу A положительной, если она совершается системой над внешними телами, а количество теплоты Q, считается положительным, если энергия передается системе без изменения внешних параметров.

Как видно из определения эти два различных способа передачи энергии не являются равнозначными.

В то время как, затрачиваемая **работа может непосредственно пойти на увеличение любого вида энергии системы**(электрической, упругой, потенциальной и т.д.), **количество теплоты непосредственно, т.е. без предварительного преобразования в работу, может пойти только на увеличение внутренней энергии системы.**

Несмотря на то, что между понятиями работы и количества теплоты существует глубокое качественное различие, они являются родственными: и то и другое выражает энергию, переданную системе с изменением, или без изменения внешних параметров. Благодаря этому родству теплоту часто называют **термической работой**.

Примеры.

1. Элементарная работа однородной деформации единицы объема твердого тела равна

$$\delta A = - \sum_{i,j}^3 \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}, \quad (F = -\sigma_{ij}, a = \varepsilon_{ij})$$

где σ_{ij} - нормальные и сдвиговые компоненты напряжения, ε_{ij} - компоненты деформации.

2. При квазистатическом расширении системы, подверженной действию всестороннего равномерного давления элементарная работа

$$\delta A = pdV, \quad (F = p, a = V)$$

где p - давление газа или жидкости, dV - увеличение объема системы.

(Работа при расширении газа в пустоту равна нулю, так как при этом газ не испытывает никакого сопротивления.

3. Работа сил поверхностного натяжения при изменении площади поверхности на Σ равна

$$\delta A = -\sigma d\Sigma, \quad (F = -\sigma, a = \Sigma)$$

где σ - поверхностное натяжение.

7. Первое начало термодинамики. Закон сохранения и превращения энергии

Первое начало термодинамики является математическим выражением количественной стороны закона сохранения и превращения энергии. Он был установлен в результате экспериментальных и теоретических исследований в области физики и химии.

Сформулируем вначале ряд предположений, которые необходимы при формулировке и доказательстве первого закона термодинамики.

Предположение 1.

Для любых двух состояний А и В существует процесс π_{AB} , начинающийся в А и заканчивающийся в В.

Предположение 2.

Для любых процессов π_{AB} и π_{BC} можно осуществить процесс π_{AC} , заключающийся в их последовательном выполнении.

$$\pi_{AC} = \pi_{AB}\pi_{BC}$$

Предположение 3.

Для данной системы для каждого процесса определены
 -**работа внешних сил над системой** $\delta A^e(\pi_{AB})$
 -**приток тепла извне** $\delta Q^e(\pi_{AB})$
 -**приток других видов энергии извне** $\delta Q^{**}(\pi_{AB})$
 Причем, все они аддитивны в следующем смысле

$$\begin{aligned}\delta A^e(\pi_{AB}\pi_{BC}) &= \delta A^e(\pi_{AB}) + \delta A^e(\pi_{BC}) \\ \delta Q^e(\pi_{AB}\pi_{BC}) &= \delta Q^e(\pi_{AB}) + \delta Q^e(\pi_{BC}) \\ \delta Q^{**}(\pi_{AB}\pi_{BC}) &= \delta Q^{**}(\pi_{AB}) + \delta Q^{**}(\pi_{BC})\end{aligned}$$

При этих предположениях имеет место следующее утверждение, которое называется первым началом термодинамики:

Для всякого циклического процесса, совершающегося системой, сумма притоков энергии извне равна нулю:

$$\delta A^e(\pi_{AA}) + \delta Q^e(\pi_{AA}) + \delta Q^{**}(\pi_{AA}) = 0$$

Этому утверждению эквивалентная формулировка о **невозможности существования вечного двигателя первого рода, а именно невозможно циклически работающее устройство, которое за цикл выделяло бы или поглощало бы энергию извне**.

В случае выделения энергии мы имели бы вечный двигатель, а в случае поглощения энергии имело место бы гибель энергии.

Положение о вечном двигателе первого рода т.е. невозможности такого периодически действующего устройства, которое бы совершало работу не заимствуя энергии извне допускает обращение: работу нельзя ни создать из ничего (без затрат энергии, ни превратить в ничто (без выделения энергии).

Историческая справка:

- Еще в XVIII веке отмечается невозможность механического вечного двигателя.
- 1748 г. М.В. Ломоносов в письме Эйлеру: " Тело, которое своим толчком возбуждает другое тело к движению, столько же теряет от своего движения, сколько сообщает другому".
- 1755 - Французская академия наук отказалась от рассмотрения проектов вечного двигателя ("раз и навсегда")
- 1840 - Гесс сформулировал закон о независимости теплового эффекта реакций от промежуточных стадий.
- 1842 - 1850 г.г. пришли к открытию принципа эквивалентности теплоты и работы: **превращение теплоты в работу и работы в теплоту осуществляется всегда в одном и том же строгом постоянном отношении** (Майер, Джоуль и др.)

Установление принципа эквивалентности было последним этапом в формировании количественной стороны закона сохранения и превращения энергии.

Потребовался ряд столетий, чтобы наука могла найти путь от простого убеждения о невозможности вечного двигателя до современного закона сохранения и превращения энергии.

Заметим, что из первого закона термодинамики следуют следующие утверждения:

Утверждение 1) Для любого процесса π_{AB} сумма притоков энергии

$$\delta A^e(\pi_{AB}) + \delta Q^e(\pi_{AB}) + \delta Q^{**}(\pi_{AB})$$

не зависит от от процесса π_{AB} , а зависит от лишь от начального и конечного состояний.

Утверждение 2) Существует функция состояния $\varepsilon(C)$, такая что для любого процесса π_{AB}

$$\varepsilon(B) - \varepsilon(A) = \delta A^e(\pi_{AB}) + \delta Q^e(\pi_{AB}) + \delta Q^{**}(\pi_{AB})$$

Утверждение 3) Функции $\varepsilon(C)$, обладающие свойством 2) отличаются лишь на аддитивную постоянную

$$\varepsilon_1(C) - \varepsilon_2(C) = const (= \varepsilon_1(O) - \varepsilon_2(O))$$

(Для термодинамики этого вполне достаточно, так как в устанавливаемые ею соотношения входят лишь изменения энергии.)

Доказательство утверждений 1,2,3.

Доказательство утверждения 1)

Рассмотрим состояния A и B и процесс π_{AB} . Возьмем фиксированный процесс π_{BA}^0 из B в A . Согласно первому закону термодинамики

$$\delta A^e(\pi_{AB}\pi_{BA}^0) + \delta Q^e(\pi_{AB}\pi_{BA}^0) + \delta Q^{**}(\pi_{AB}\pi_{BA}^0) = 0$$

Так как согласно предположению 3 притоки энергии аддитивны, то

$$\delta A^e(\pi_{AB}\pi_{BA}^0) = \delta A^e(\pi_{AB}) + \delta A^e(\pi_{BA}^0)$$

$$\delta Q^e(\pi_{AB}\pi_{BA}^0) = \delta Q^e(\pi_{AB}) + \delta Q^e(\pi_{BA}^0)$$

$$\delta Q^{**}(\pi_{AB}\pi_{BA}^0) = \delta Q^{**}(\pi_{AB}) + \delta Q^{**}(\pi_{BA}^0)$$

Следовательно,

$$\delta A^e(\pi_{AB}) + \delta Q^e(\pi_{AB}) + \delta Q^{**}(\pi_{AB}) = -\delta A^e(\pi_{BA}^0) - \delta Q^e(\pi_{BA}^0) - \delta Q^{**}(\pi_{BA}^0)$$

и утверждение доказано: для всякого процесса π_{AB} сумма притоков энергии не зависит от процесса, а зависит лишь от начального и конечного состояния.

Доказательство утверждения 2)

Рассмотрим фиксированное состояние O и введем функцию

$$\varepsilon(C) = \delta A^e(\pi_{OC}) + \delta Q^e(\pi_{OC}) + \delta Q^{**}(\pi_{OC})$$

Эта функция определена корректно, так как не зависит от процесса π_{OC} , а зависит от точек O и C .

Рассмотрим процесс $\pi_{OA}\pi_{AB}$. Тогда

$$\varepsilon(B) = \delta A^e(\pi_{OA}\pi_{AB}) + \delta Q^e(\pi_{OA}\pi_{AB}) + \delta Q^{**}(\pi_{OA}\pi_{AB}) =$$

$$\delta A^e(\pi_{OA}) + \delta A^e(\pi_{AB}) + \delta Q^e(\pi_{OA}) + \delta Q^e(\pi_{AB}) + \delta Q^{**}(\pi_{OA}) + \delta Q^{**}(\pi_{AB})$$

$$\varepsilon(A) = \delta A^e(\pi_{OA}) + \delta Q^e(\pi_{OA}) + \delta Q^{**}(\pi_{OA})$$

Вычитая из первого второе получим соотношение

$$\varepsilon(B) - \varepsilon(A) = \delta A^e(\pi_{AB}) + \delta Q^e(\pi_{AB}) + \delta Q^{**}(\pi_{AB})$$

Доказательство утверждения 3) Доказательство третьего утверждения следует из второго. Пусть две функции ε_1 и ε_2 обладают таким свойством. Рассмотрим процесс π_{OC} .

$$\varepsilon_1(C) - \varepsilon_1(O) = \delta A^e(\pi_{OC}) + \delta Q^e(\pi_{OC}) + \delta Q^{**}(\pi_{OC})$$

$$\varepsilon_2(C) - \varepsilon_2(O) = \delta A^e(\pi_{OC}) + \delta Q^e(\pi_{OC}) + \delta Q^{**}(\pi_{OC})$$

Вычитая из второго соотношения первое получим

$$\varepsilon_2(C) - \varepsilon_1(C) = \varepsilon_2(O) - \varepsilon_1(O)$$

Определение 23.

Функция состояния $\varepsilon(C)$ введенная выше называется **энергией системы**.

Следствие.

Первое начало термодинамики эквивалентно **закону сохранения и превращения энергии**: у **всякой системы существует однозначная функция состояния называемая энергией $\varepsilon(B)$** ,

которая не изменяется при отсутствии внешних воздействий при любых процессах внутри системы.

Если внешние воздействия имеют место то энергия системы изменяются согласно уравнению

$$\varepsilon(B) - \varepsilon(A) = \delta A^e(\pi_{AB}) + \delta Q^e(\pi_{AB}) + \delta Q^{**}(\pi_{AB})$$

Доказательство

1) Выше было показано, что из первого закона термодинамики следует закон сохранения энергии.

2) Покажем, что из закона сохранения энергии следует первый закон термодинамики.

Действительно, для циклического процесса из закона сохранения энергии следует

$$0 = \varepsilon(A) - \varepsilon(A) = \delta A^e(\pi_{AA}) + \delta Q^e(\pi_{AA}) + \delta Q^{**}(\pi_{AA})$$

Дифференциальная форма закона сохранения энергии получится если рассмотреть процесс за интервал времени $(t, t + dt)$. В этом случае закон сохранения энергии принимает вид

$$d\varepsilon = \delta A^e + \delta Q + \delta Q^{**},$$

где $\delta A^e, \delta Q, \delta Q^{**}$ - притоки энергии в процессе π_{AB} за время dt .

Предупреждение.

$\delta A^e, \delta Q, \delta Q^{**}$ не являются дифференциалами какой-либо функции состояния, в отличие от $d\varepsilon$

Пример. Совершенный газ в сосуде с поршнем.

$$\delta A^e = -pSdl = -pSd\left(\frac{V}{S}\right) = -pdV = -pd\frac{M}{\rho} = -p\frac{M}{-\rho^2}d\rho = M\frac{p}{\rho^2}d\rho$$

Является ли δA^e полным дифференциалом ?

$$\delta A^e = a_1(p, \rho)d\rho + a_2(p, \rho)dp$$

является полным дифференциалом тогда и только тогда если

$$\frac{\partial a_1}{\partial p} = \frac{\partial a_2}{\partial \rho}$$

В нашем случае

$$a_1 = M\frac{p}{\rho^2}, a_2 = 0.$$

Поэтому нужное условие не выполняется.

8. Внутренняя энергия. Уравнение притока тепла для конечного объема.

Рассмотрим в качестве термодинамической системы индивидуальный объем V сплошной среды. Его кинетическая энергия

$$E = \int_V \rho \frac{v^2}{2} d\tau$$

Определение 24.

Внутренней энергией индивидуального объема называется

$$U_V = \varepsilon - E,$$

где ε его энергия.

Предположение 4.

Внутренняя энергия обладает массовой плотностью. Т.е. для индивидуального объема V существует функция u такая, что

$$U_V = \int_V \rho u d\tau$$

Тогда

$$1) u = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{U_V}{\rho \Delta V}$$

2) Внутренняя энергия аддитивна по частям тела

$$U_{V_1+V_2} = U_{V_1} + U_{V_2}$$

9. Уравнение притока тепла для конечного объема.

Напомним уравнение живых сил (теорему о кинетической энергии)

$$dE = \delta A^e + \delta A^i$$

Из закона сохранения энергии

$$d\varepsilon = \delta A^e + \delta Q^e + \delta Q^{**},$$

с учетом теоремы о кинетической энергии следует **уравнение притока тепла для конечного объема сплошной среды**:

$$dU = -\delta A^i + \delta Q^e + \delta Q^{**}$$

Напомним, что здесь работа внутренних сил

$$\delta A^i = \delta A_m^i + \delta A_{noe}^i$$

Где

$$\delta A_m^i = \int_V \rho \vec{F}^i \vec{v} dt d\tau, \quad \delta A_{noe}^i = - \int_V p^{ij} e_{ij} dt d\tau \quad (\text{в класс. случае})$$

Притоки тепла могут быть поверхностные и массовые.

Например теплопроводность - поверхностный приток, а излучение массовый приток тепла.

Предположение 5. Приток тепла к индивидуальному объему можно представить в виде

$$\delta Q^e = - \int_{\Sigma} q_{\vec{n}} d\sigma dt + \int_V \rho dq d\tau$$

Где $q_{\vec{n}}$ - количество тепла, протекающего через ds за единицу времени в направлении внешней нормали

Предположение 6.

Приток энергии δQ^{**} обладает массовой плотностью.

$$\delta Q_V^{**} = \int_V \rho dq^{**} d\tau$$

т.е. существует функция dq^{**} такая, что

$$1) dq^{**} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\delta Q^{**}}{\rho \Delta V}$$

2) δQ^{**} - аддитивная функция по частям объема.

Тогда уравнение притока тепла для индивидуального объема запишется в виде

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho u d\tau = \int_V p^{ij} e_{ij} d\tau - \int_{\Sigma} q_n d\sigma + \int_V \rho \frac{dq}{dt} d\tau + \int_V \rho \frac{dq^{**}}{dt} d\tau - \int_V \rho \vec{F}^i \cdot \vec{v} dt d\tau.$$

Замечание. Предложения 4, 5 выполняются часто но не всегда. Например, в случае самогравитации аддитивности нет.

9.1. Вектор потока тепла.

Утверждение 1.

При выполнении условий:

- 1) Если границы двух объемов проходят через точку X и имеют в ней общую внешнюю нормаль, то $q_{\vec{n}}$ для них одинаков.
- 2) Движение достаточно гладкое (нет поверхностей разрыва скорости).
- 3) На поверхности S $q_{\vec{n}}$ непрерывно зависит от точки поверхности.

$$q_{\vec{n}} = -q_{-\vec{n}}.$$

Доказательство.

Следует из уравнения притока тепла и аналогично доказательству утверждения

$$\vec{p}_{\vec{n}} = -\vec{p}_{-\vec{n}}$$

Утверждение 2.

В условиях утверждения 1. существует вектор \vec{q} , зависящий от точки пространства и от момента времени, такой, что

$$q_n = \vec{q} \cdot \vec{n} = q^i \cdot n_i$$

Определение 25. Вектор \vec{q} называется **вектором потока тепла**.

Доказательство.

Аналогично доказательству утверждения о существовании тензора напряжений.

Схема доказательства.

- 1) Ввести $q^i = q_{e_i}$, $i = 1, 2, 3$
- 2) Записать уравнение притока тепла для тетраэдра. В него войдут q^i .
- 3) Перейти к пределу

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^2} (\text{уравнение притока тепла})$$

Где h - высота тетраэдра.

9.2. Дифференциальная форма уравнения притока тепла.

Утверждение 3.

Если выполнены условия утверждения 1 и массовые силы отсутствуют, то уравнение притока тепла эквивалентно

$$\rho \frac{du}{dt} = p^{ij} e_{ij} - \operatorname{div} \vec{q} + \rho \frac{dq}{dt} + \rho \frac{dq^{**}}{dt}$$

Доказательство.

Запишем уравнение притока тепла для индивидуального объема

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho u d\tau = \int_V p^{ij} e_{ij} d\tau - \int_{\Sigma} q_n d\sigma + \int_V \rho \frac{dq}{dt} d\tau + \int_V \rho \frac{dq^{**}}{dt} d\tau - \int_V \rho \vec{F}^i \cdot \vec{v} dt d\tau$$

Так как

$$q_n = \vec{q} \cdot \vec{n},$$

то

$$\int_{\Sigma} q_n d\sigma = \int_V \operatorname{div} \vec{q} d\tau$$

Кроме того,

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho u d\tau = \int_V \rho \frac{du}{dt} d\tau$$

Следовательно

$$\int_V \left(\rho \frac{du}{dt} - p^{ij} e_{ij} + \operatorname{div} \vec{q} - \rho \frac{dq}{dt} - \rho \frac{dq^{**}}{dt} \right) d\tau = \int_V \rho \vec{F}^i \cdot \vec{v} dt d\tau$$

Откуда в силу произвольности V для непрерывных движений имеем

$$\rho \frac{du}{dt} = p^{ij} e_{ij} - \operatorname{div} \vec{q} + \rho \frac{dq}{dt} + \rho \frac{dq^{**}}{dt}$$

т.к.

$$\int_V \rho \vec{F}^i \cdot \vec{v} dt d\tau \rightarrow 0$$

при стягивании объема в точку.

Замечание.

$$1) \frac{dq}{dt}, \quad \frac{dq^{**}}{dt}$$

не являются производными по времени от какой-нибудь функции состояния, а $\frac{du}{dt}$ является.

Закон теплопроводности Фурье. Уравнение теплопроводности .

Законы определяющие вектор \vec{q} могут быть различны. Наиболее распространенным, хорошо оправдывающимся во многих случаях на практике законом, определяющим \vec{q} , является закон теплопроводности Фурье, который имеет вид

$$\vec{q} = -\lambda \operatorname{grad} T, \quad \lambda > 0$$

Если $\lambda = \text{const}$, то для притока тепла на единицу массы среды получим

$$\frac{dq^{(e)}}{dt} = -\operatorname{div} \vec{q} = \frac{\lambda}{\rho} \operatorname{div} \operatorname{grad} T = \frac{\lambda}{\rho} \Delta T$$

Для совершенного газа калорическим уравнением состояния является уравнение

$$u = c_V T + u_0$$

Если предположить , что

$$\rho \frac{dq}{dt} = 0, \quad \rho \frac{dq^{**}}{dt} = 0,$$

то уравнение притока тепла для совершенного газа будет

$$\rho c_V \frac{dT}{dt} = \lambda \Delta T + p^{ij} e_{ij}, \quad \frac{dT}{dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla T.$$

В покоящейся среде или при $\vec{v} = \text{const}$ имеем уравнение теплопроводности.

$$\rho c_V \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \Delta T$$

Лекция 9(8)
Исходные положения термодинамики II.
II.

Дополнительная литература: И.П. Базаров. Термодинамика.

План:

1. Термическое и калорическое уравнения состояния.

2. Основные термодинамические процессы.

3. Совершенный газ.

Термическое и калорическое уравнения состояния.

Уравнение притока тепла для совершенного газа.

Основные термодинамические процессы и их уравнения.

4. Цикл Карно и машина Карно. Цикл Карно для совершенного газа.

1. Термические и калорическое уравнения состояния

Нулевое начало термодинамики—положение о том, что равновесные внутренние параметры являются функциями внешних параметров и температуры, приводит к существованию термических и калорического уравнений состояния системы, т.е. уравнений, связывающих температуру θ , внешние параметры a_i и какой либо внутренний равновесный параметр b_k :

$$b_k = f_k(a_1, \dots, a_n; \theta)$$

Определение. Если внутренним параметром b_k является внутренняя энергия U , то уравнение

$$U = U(a_1, \dots, a_n; \theta)$$

называется **уравнением энергии или калорическим уравнением состояния**.

Определение. Если внутренним параметром b_k является сопряженная к внешнему параметру a_i обобщенная сила A_i , то уравнения

$$A_i = A_i(a_1, \dots, a_n; \theta)$$

называются **термическими уравнениями состояния**.

Общее число термических и калорического уравнений состояния системы равно **числу ее степеней свободы**, т.е. числу независимых параметров, характеризующих состояние системы.

Если калорическое и термические уравнения состояния системы известны, то с помощью начал термодинамики можно определить все термодинамические свойства системы.

Вывести сами уравнения состояния на основе начал термодинамики нельзя: они либо устанавливаются из опыта, либо находятся методами статистической физики.

Пример: Уравнения состояния совершенного газа.

Для такой простой системы как **совершенный газ** термическим уравнением состояния является уравнение Клайперона –Менделеева

$$p = \rho R \theta$$

$$u = \int c_V d\theta = c_V \theta + u_0 \text{ (для одноатомного газа)}$$

Совершенный газ – можно определить как газ, в котором молекулы взаимодействуют только при столкновениях.

Совершенный газ может быть как идеальным

$$p^{ij} = -pg^{ij}$$

так и вязким

$$p^{ij} = -pg^{ij} + \lambda e_k^k g^{ij} + 2\mu e^{ij} = -pg^{ij} + \lambda g^{ij} \operatorname{div} \vec{v} + 2\mu e^{ij}$$

При медленных процессах скорость деформации мала:

$$e^{ij} \sim \frac{V}{L}, \quad \mu e \ll p, \quad \mu \frac{V}{L} \ll p$$

и вязкими напряжениями можно пренебречь.

Замечание.

Для реальных газов эмпирически установлено более 150 термических уравнений состояния. Наиболее простым из них и качественно правильно передающим поведение реальных газов даже при переходе их в жидкость является уравнение Ван–дер–Ваальса

$$\left(p + \frac{a}{V^2} \right) (V - b) = R\theta$$

Это уравнение отличается от уравнения Клайперона–Менделеева двумя поправками: на объем b самих молекул и на внутреннее давление $-a/V^2$, определяемое внутренним притяжением молекул газа (a и b – константы не зависящие от θ и p , но разные для разных газов). Необходимость введения поправок на объем впервые обосновывал М.В. Ломоносов, исходя из молекулярно–кинетических представлений о природе теплоты.

2. Термические и калорические свойства систем. Теплоемкость.

Изучаемые в термодинамике свойства систем (и соответственно величины, характеризующие эти свойства) могут быть разделены на два класса – термические и калорические.

Определение Те свойства, которые определяются только термическим уравнением состояния системы называются ее **термическими свойствами**.

Определение Те свойства, которые определяются или только калорическим уравнением состояния системы или совместно калорическим и термическими уравнениями состояния называются ее **калорическими свойствами**.

К калорическим свойствам (величинам) относятся прежде всего **теплоемкости** и теплоты изотермического изменения внешних параметров.

Определение **Теплоемкость** определяет количество теплоты, необходимое для изменения температуры на 1^0 K :

$$c = \frac{\delta Q}{d\theta}$$

Так как количество теплоты δQ , необходимое для изменения температуры системы на $d\theta$, зависит от характера происходящего при этом процесса, то теплоемкость с системы также зависит от условий при которых определяется $\frac{\delta Q}{d\theta}$. Это значит, что **теплоемкость является не функцией состояния системы, а функцией процесса**.

3. Основные термодинамические процессы

Во всякой термодинамической системе возможны три процесса: **изотермический** ($\theta = const$), **адиабатический** ($\delta Q = 0$) и **политропный** ($c = const$). Число и характер других процессов зависят от природы системы.

При изучении свойств равновесных систем термодинамика прежде всего рассматривает свойства простых систем.

Определение. **Простыми** будем называть системы, состояние которых определяется только одним внешним параметром a и температурой θ .

Иначе говоря, простые системы – это однофазные системы, определяемые двумя параметрами.

Термическое и калорическое уравнения простой системы имеют вид

$$A = A(a, \theta), \quad u = u(a, \theta)$$

Если $A = p$ – давление и, следовательно $a = V$ – объем системы, то уравнения состояния

$$p = p(V, \theta), \quad u = u(V, \theta)$$

В простой системе с внешним параметром a и сопряженным ему силовым параметром A кроме названных трех процессов можно наблюдать также процесс при $a = const$ и процесс при $A = const$. Если внешним параметром является объем системы ($a = V$) и, следовательно, $A = p$, то процесс при $V = const$, называется **изохорным**, а при $p = const$ – **изобарным**.

Эти пять процессов (изотермический, адиабатический, политропный, изохорный и изобарный) считаются основными в термодинамике, причем адиабатный процесс является, очевидно, частным случаем политропного.

3.1. Цикл Карно. Машина Карно. Пример цикла Карно для совершенного газа

Определение. **Тепловым резервуаром** для данного класса процессов называется система, которая

1) исходно находится в состоянии равновесия;

2) участвуя в процессах обменивается теплом при постоянных внешних параметрах; при этом

3) изменение состояния самой этой системы пренебрежимо мало.

Пример. Очень большая масса газа может служить тепловым резервуаром для процессов, происходящих с малыми массами газа.

Определения 1 и 2. **Машиной Карно** называется система, совершающая циклический процесс, в течении которого она обменивается теплом только с двумя тепловыми резервуарами. Такой процесс называется **циклом Карно**.

Пусть имеем тепловую машину Карно, которая включает в себя два тепловых резервуара B_1 и B_2 .

Обозначим $Q_1 = \delta Q_1^e$ – тепло, полученное за цикл из резервуара B_1 , а $Q_2 = -\delta Q_2^e$ – тепло отданное за цикл резервуару B_2 , $A = -\delta A^e$ – работа системы над внешними телами.

Запишем для данного цикла первый закон термодинамики (закон сохранения энергии)

$$0 = \delta A^e + \delta Q^e$$

В нашем случае $\delta A^e = -A$, $\delta Q^e = Q_1 - Q_2$. Следовательно,

$$A = Q_1 - Q_2$$

3.2. Пример – цикл Карно для совершенного газа

Для совершенного газа

$$u = c_V \theta + u_0, \quad (c_V = const), \quad p = \rho R \theta \quad (R = const).$$

Рассмотрим следующий цикл Карно для совершенного газа (рис.), который состоит из отрезков двух изотерм и двух изобат.

Температура в исходной точке A пусть равна θ_1 , а температура в точке $C - \theta_2$.

Подсчитаем количество тепла полученного системой при прохождении этого цикла. Уравнение при тока тепла для совершенного газа будет

$$du = -pd\frac{1}{\rho} + dq^{(e)}$$

На отрезках изотерм $du = c_v d\theta = 0$. Следовательно,

$$dq^{(e)} = pd\frac{1}{\rho}$$

Если обозначить через $Q_1 = \int_A^B dq^{(e)}$ – количества тепла на отрезке AB , то так как на этом отрезке $d\frac{1}{\rho} > 0$, то и $Q_1 > 0$ и здесь тепло поступает в систему. На отрезке CD – тепло отводится, так как $dq^{(e)} = pd\frac{1}{\rho} < 0$. Обозначим отведенное тепло через $Q_2 = -\int_C^D dq^{(e)} > 0$ На отрезках адиабат тепло не подводится, поэтому общее количество тепла за цикл подведенное к системе равно $Q_1 - Q_2$.

Рассмотрим количество совершенной работы. По теореме живых сил

$$dE = dA^i + dA^e$$

Если рассматривать очень медленные (равновесные) процессы , то

$$E \approx 0, \quad dE \approx 0, \quad dA^e = -dA^i$$

Здесь dA^e – работа, совершаемая внешними силами над системой. Работа совершаемая системой над внешними телами

$$\begin{aligned} dA &= -dA^e = dA^i \\ dA^i &= dA_\sigma^i = \int_V -p^{ij} e_{ij} dt dV = -V p^{ij} e_{ij} dt = -V g^{ij} e_{ij} dt = V p \operatorname{div} \vec{v} = \\ &V p \frac{-d\rho/dt}{\rho} dt = \frac{-V}{\rho} pd\rho = -V \rho p \frac{d\rho}{\rho^2} = M p d\frac{1}{\rho} \end{aligned}$$

Таким образом, элементарная работа, совершаемая системой над внешними телами

$$dA = M p d\frac{1}{\rho}$$

За цикл работа будет

$$A = \int dA = M \int pd\frac{1}{\rho}$$

Графически она выразится заштрихованной площадью $ABCD$.

Если рассмотреть при $\theta_1 > \theta_2$ обратный цикл Карно, то будем иметь холодильник.

Пример машины, работающей по обратимому циклу Карно.

Цилиндр, один конец, которого закрыт неподвижной стенкой, а другой – уравновешенным в начальный момент подвижным поршнем. Сначала заставим поршень расширяться при $\theta_1 = \text{const}$. Пусть боковые стенки и поршень теплоизолированы...

3.3. Основные термодинамические процессы для совершенного газа

Выпишем уравнение притока тепла для совершенного газа

$$(u = c_V \theta + u_0, \quad p = \rho R \theta)$$

$$\begin{aligned} du &= \frac{1}{\rho} p^{ij} e_{ij} dt + dq^e \\ dq^e &= -\frac{1}{\rho} \operatorname{div} \vec{q} dt + dq + dq^{**} \end{aligned}$$

Используя уравнение неразрывности **для идеального** совершенного газа получим

$$\frac{1}{\rho} p^{ij} e_{ij} = \frac{1}{\rho} (-p) g^{ij} e_{ij} = \frac{1}{\rho} (-p) \operatorname{div} \vec{v} = \frac{1}{\rho} (-p) (-1) \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} = p \frac{1}{\rho^2} \frac{d\rho}{dt} = -p \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\rho} \right)$$

Подставляя в уравнение притока тепла с учетом калорического уравнения состояния имеем

$$c_V d\theta = -pd\frac{1}{\rho} + dq^e$$

a) процессы при постоянном объеме ($V = \frac{1}{\rho} = \text{const}, \rho = \text{const}$) - **изохорические**.

$$c_V d\theta = dq^e, c_V = \left(\frac{dq^e}{d\theta} \right)_{V=\text{const}}$$

Следовательно, **физический смысл коэффициента c_V - теплоемкость при постоянном объеме** - количество тепла, которое нужно передать газу, чтобы при постоянном объеме увеличить его температуру на 1°.

б) Процессы при постоянном давлении ($p = \text{const}$) - **изобарические**.

$$\text{const} = p = \rho R \theta, \quad \rho d\theta + \theta d\rho = 0$$

Подставляя в уравнение притока тепла

$$pd\frac{1}{\rho} = p \left(-\frac{1}{\rho^2} \right) d\rho = p \left(-\frac{1}{\rho^2} \right) \left(-\frac{\rho}{\theta} \right) d\theta = p \frac{1}{\rho\theta} d\theta = R d\theta$$

получим

$$\left(\frac{c_V}{R} + 1 \right) R d\theta = dq^e$$

или

$$(c_V + R) d\theta = dq^e (p = \text{const})$$

Обозначим $c_p = c_V + R$. Тогда

$$c_p = \left(\frac{dq^e}{d\theta} \right)_{p=\text{const}}$$

Таким образом, **физический смысл c_p – теплоемкость при постоянном давлении**.

Она связана с теплоемкостью при постоянном объеме формулой Майера:

$$c_p - c_V = R$$

Откуда следует, что $c_p > c_V$.

г) **Изотермический процесс** ($\theta = \text{const} \Rightarrow U = \text{const}, dU = 0$)

$$p = \rho R \theta = \frac{R\theta}{\frac{1}{\rho}} = \text{const} \cdot \left(\frac{1}{\rho} \right)^{-1}$$

Таким образом, **изотерма** - гипербола на плоскости $(p, \frac{1}{\rho})$

д) адиабатические процессы (нет обмена теплом с внешней средой, т.е $dq^e = 0$).

Из уравнения притока тепла получим

$$c_V d\theta = -pd \frac{1}{\rho}$$

Кроме того,

$$p = \rho R \theta, \quad \theta = \frac{1}{R} p \frac{1}{\rho}, \quad d\theta = \frac{1}{R} \left(\frac{1}{\rho} dp + pd \frac{1}{\rho} \right)$$

Подставим в первое соотношение

$$\frac{c_V}{R} \frac{1}{\rho} dp + \frac{c_V}{R} pd \frac{1}{\rho} = -pd \frac{1}{\rho}$$

Откуда

$$\frac{c_V}{R} \frac{1}{\rho} dp = - \left(\frac{c_V}{R} + 1 \right) pd \frac{1}{\rho}$$

Следовательно,

$$\frac{1}{\rho} dp = - \frac{c_p}{c_V} pd \frac{1}{\rho}$$

или

$$\frac{dp}{p} = -\gamma \left(\frac{1}{\rho} d \frac{1}{\rho} \right)$$

где

$$\gamma = \frac{c_p}{c_V}$$

Проинтегрировав получим **уравнение адиабаты.**

$$p = const \cdot \left(\frac{1}{\rho} \right)^{-\gamma} = const \cdot \rho^\gamma$$

Замечание.

Адиабата в плоскости $(p, \frac{1}{\rho})$ наклонена к оси абсцисс круче изотермы. Действительно, соответственно для изотермы и адиабаты имеем

$$\left(\frac{\partial p}{\partial V} \right)_{\theta=const} = -\frac{p}{V}, \quad \left(\frac{\partial p}{\partial V} \right)_{dq^e=0} = -\gamma \frac{p}{V}.$$

Поэтому

$$\left(\frac{\partial p}{\partial V} \right)_{dq^e=0} = \gamma \left(\frac{\partial p}{\partial V} \right)_{\theta=const}.$$

4. Второй закон термодинамики

Из второго начала термодинамики фактически следует существование у всякой равновесной системы еще одной функции состояния - энтропии, которая у изолированной системы в отличие от внутренней энергии не изменяется только при обратимых процессах и всегда возрастает при необратимых процессах; аналогично ведет себя энтропия и адиабатных систем.

Таким образом, если первое начало есть закон сохранения и превращения энергии, то второе начало термодинамики представляет собой закон об изменении энтропии.

Открытие второго начала связано с анализом работы тепловых машин, чем и определяется его исходная формулировка.

Впервые работа тепловых машин была теоретически рассмотрена в 1824 г. Сади Карно, который в своем исследовании "Размышления о движущей силе огня и о машинах, способных развивать эти силы", доказал, что к.п.д. тепловых машин, работающих по предложенному им циклу (циклу Карно) не зависит от природы вещества, совершающего этот цикл.

Позднее Клазиус и В. Томсон, по-новому обосновывая эту теорему Карно, почти одновременно положили основание тому, что теперь входит в содержание второго начала.

4.1. Вечный двигатель второго рода

Из принципа невозможности теплового вечного двигателя первого рода (первого начала термодинамики) следует, что если в циклическом процессе Карно один термостат с температурой θ_1 теряет тепло Q_1 и другой термостат с температурой θ_2 приобретает тепло Q_2 , то работа A , совершаемая телом в этом циклическом квазиравновесном процессе, равна их разности $A = Q_1 - Q_2$.

Первому началу термодинамики не противоречит такая мыслимая возможность, когда изолированная машина Карно совершила бы циклический квазиравновесный процесс и производила бы работу положительную работу. При этом еще больше остывал бы нагреватель и все горячее становился бы холодильник, так что тепло, теряемое нагревателем частично передавалось бы холодильнику, а частично шло бы на совершение телом полезной работы.

Казалось бы, стоит только найти вещество с подходящими свойствами и из него сделать тела и будем иметь машину, которая работает практически даром.

Такая фантастическая машина называется **вечным двигателем второго рода**.

Однако все попытки построить такой двигатель оказались безуспешными. Опыт показывает, что если изолировать машину Карно и если работа, совершаемая ее рабочим телом, положительна, то машина Карно будет работать до тех пор, пока сохранится разность температур термостатов.

В результате было сформулировано второе начало термодинамики, содержание которого заключено в принципе невозможности вечного двигателя второго рода.

Так же как и первое начало, второе начало термодинамики является обобщением данных опыта. Многолетняя человеческая практика привела к установлению определенных закономерностей превращения теплоты в работу и работы в теплоту.

Неравноценность форм передачи энергии. В то время как работа может непосредственно пойти на увеличение любого вида энергии, теплота непосредственно, без предварительного превращения в работу, приводит лишь к увеличению внутренней энергии системы.

При превращении работы в теплоту явление может ограничиться изменением термодинамического состояния одного лишь теплоизлучающего тела (например, при нагревании посредством трения, или при электронагреве), В то время как при преобразовании теплоты в работу наряду с охлаждением теплоотдающего тела происходит изменение термодинамического состояния других тел, участвующих в этом процессе: или рабочего тела при незамкнутом процессе, или других тел в замкнутом круговом процессе, когда этим телам рабочее тело непременно отдает часть полученной им от нагревателя теплоты. В качестве таких "других тел" в тепловых машинах обычно служат холодильники.

Результаты опытов показывают, что без компенсации ни один джоуль теплоты в работу превратить нельзя. В то же самое время работа в теплоту превращается без всякой компенсации.

Такая неравноправность приводит к **односторонности естественных процессов: самопроизвольные процессы в замкнутых системах идут в направлении исчезновения потенциально возможной работы**.

В практике не обнаружено случаев самопроизвольного перехода теплоты от холодного тела к горячему. При тепловом контакте двух тел различной температуры теплота переходит от горячего тела к холодному до тех пор, пока их температуры не станут равными.

4.2. Формулировка второго закона термодинамики.

Примем за исходную такую его формулировку, которая непосредственно связана с особенностями превращения теплоты в работу и работы в теплоту – формулировку о невозможности существования

вечного двигателя второго рода.

Определение.

Изменение состояния рабочего тела (если процесс незамкнутый) или отдача части теплоты рабочим телом другим телам и изменение термодинамического состояния этих тел при циклическом превращении теплоты в работу называется **компенсацией**.

Определение

Вечным двигателем второго рода называется устройство, которое без компенсации периодически превращало бы теплоту какого-либо тела в работу.

Второй закон термодинамики

Постулируется, что вечный двигатель второго рода невозможен и это утверждение не допускает обращения.

Таким образом второе начало термодинамики содержит совокупность двух утверждений:

I. Первое – о невозможности вечного двигателя второго рода означает, теплоту нельзя превратить в работу полностью без компенсации.

Иначе говоря, если теплота превращается в работу и за весь цикл у какого-либо тела или у различных тел было взято положительное количество теплоты

$$Q = \int_C \delta Q > 0 \text{ и совершена работа } A, \text{ то всегда}$$

$$Q > A.$$

Как будет показано

первое положение приводит в случае равновесных систем к установлению существования термодинамической температуры и новой однозначной функции состояния – энтропии.

II. Второе утверждение – о невозможности обращения предложения о вечном двигателе второго рода означает, что работу в теплоту можно превратить без всяких компенсаций, так как не представляет никаких затруднений построить машину, вся деятельность которой сводилась бы к затрате работы и нагреванию резервуара.

Т.е если работа превращается в теплоту, то всегда

$$A = Q.$$

Совместно первое и второе положения второго закона термодинамики устанавливают односторонний характер изменения энтропии при естественных процессах в замкнутых системах.

Замечание.

Напомним, что положение о невозможности вечного двигателя первого рода, т.е. о невозможности такого периодически действующего устройства, которое бы совершало работу не заимствуя энергии извне допускает обращение: работу нельзя ни создать из ничего (без затрат энергии), ни превратить в ничто (без выделения энергии).

4.3. Принцип изотермической недостижимости. Принцип адиабатной недостижимости Каратаедори.

Определение. **Термически однородная система** – система, все части которой имеют одинаковую температуру

Принцип изотермической недостижимости. Напомним, что положение о существовании температуры θ у всякой равновесной системы можно сформулировать в виде **принципа изотермической недостижимости: около каждого состояния равновесной системы существуют такие состояния, которые недостижимы изотермически** (т.е. при условиях когда система находится в тепловом контакте с термостатом). Действительно, из состояния с температурой $\theta = \theta_1$ нельзя изотермически перевести систему в состояние с температурой $\theta = \theta_2$.

Утверждение – Принцип адиабатической недостижимости Каратаедори.

Около всякого равновесного состояния термически однородной системы существуют такие состояния, которые недостижимы из него адиабатическим обратимым путем.

Доказательство.

Пусть из состояния A система с помощью обратимого процесса переходит в состояние B , получая от какого-либо тела положительное количество тепла δQ и совершая работу δA .

Тогда согласно первому закону термодинамики

$$\delta Q = d\varepsilon + \delta A$$

Предположим, что из состояния B система адиабатически ($\delta Q_1 = 0$) может перейти в состояние A с помощью обратимого процесса, совершив работу δA_1 . Тогда

$$0 = -d\varepsilon + \delta A_1$$

Складывая эти уравнения получим, что за весь круговой процесс была совершена работа $\delta A + \delta A_1$ за счет некомпенсированного превращения теплоты

$$\delta Q = \delta A + \delta A_1 > 0$$

Так как по второму закону термодинамики такой процесс невозможен, то состояние A адиабатически недостижимо из состояния B .

Замечание.

Если при обратном переходе системы из состояния A в состояние B

$\delta Q < 0$, то, предполагая возможным адиабатическое возвращение системы из состояния B в состояние A , для всего кругового процесса получим

$$\delta Q = \delta A + \delta A_1 < 0$$

Это неравенство указывает на отдачу системой за цикл количества теплоты δQ за счет произведенной над системой работы $\delta A + \delta A_1$. Такой круговой процесс не противоречит второму началу. Однако, так как он является обратимым, то проведя его в обратном порядке, получим предыдущую формулу

$$-\delta Q = -(\delta A + \delta A_1) > 0,$$

что противоречит второму началу.

Физический и математический смысл принципа адиабатической недостижимости состоит в утверждении, что у всякой равновесной системы существует некоторая новая функция состояния σ , которая при обратимых адиабатических процессах не изменяется ($d\sigma = 0$ при $\delta Q = 0$).

$$\sigma = \sigma(a_1, \dots, a_n, \theta) = \text{const} \quad \text{при адиабатических процессах} \quad (\delta Q = 0).$$

Поэтому, невозможность адиабатически (т.е в условиях, когда система теплоизолирована) перевести равновесную систему из состояния B в состояние A означает, что в состоянии B система имеет значение некоторой функции состояния

$$\sigma_B = \sigma(a_{1B}, \dots, a_{nB}, \theta_B),$$

а в состоянии A значение этой функции состояния

$$\sigma_A = \sigma(a_{1A}, \dots, a_{nA}, \theta_A).$$

При этом,

$$\sigma_A \neq \sigma_B.$$

4.4. Существование интегрирующего множителя у дифференциальной формы притока тепла

Согласно первому началу δQ равно сумме полного дифференциала $d\varepsilon$ и неполного δA и, следовательно, δQ не является полным дифференциалом какой либо функции параметров состояния системы.

$$\delta Q = d\varepsilon + \delta A$$

Поскольку состояние системы определяется внешними параметрами a_i и температурой θ , то

$$\delta Q = \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial \theta} \right)_{a_1, \dots, a_n} d\theta + \sum_i \left[\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial a_i} \right)_{a_k \neq i, \theta} + A_i \right] da_i$$

Это выражение представляет собой линейную форму в полных дифференциалах независимых переменных θ, a_1, \dots, a_n (форму Пфаффа).

Имеет ли эта дифференциальная форма интегрирующий множитель?

Установление на основании принципа адиабатической недостижимости существования новой функции состояния –энтропии $\sigma = \sigma(a_1, \dots, a_n, \theta)$ приводит к тому, что пфаффова форма для количества теплоты δQ всегда имеет интегрирующий множитель, т.е. она **является голономной**.

Действительно, так как δQ и $d\sigma$ являются линейными дифференциальными формами одних и тех же независимых переменных и одновременно обращаются в нуль, то, следовательно, они пропорциональны

$$\delta Q = \lambda d\sigma \quad \text{или} \quad \frac{\delta Q}{\lambda} = d\sigma, \quad \lambda = \lambda(a_1, \dots, a_n, \theta)$$

4.5. Математическое обоснование существования энтропии и термодинамической температуры. Часть 1: существование интегрирующего множителя, зависящего только от температуры

Теорема. Среди интегрирующих множителей пффиавовой формы количества тепла есть такой, который зависит только от температуры ($\lambda = \phi(\theta)$). При этом его численное значение одинаково для произвольных систем находящихся в тепловом равновесии.

Он и определяет энтропию системы

$$dS = \frac{\delta Q}{\phi(\theta)}$$

Подчеркнем, что хотя вид функции $\phi(\theta)$ связан с выбором эмпирической температуры θ числовое значение этой функции от такого выбора не зависит.

Доказательство.

1) Существование интегрирующего множителя, зависящего только от температуры. Введение энтропии.

Пусть имеются две подсистемы находящиеся в тепловом равновесии. Состояние первой определяется параметрами a_1, \dots, a_n, θ , а второй – c_1, \dots, c_m, θ . Состояние всей системы –параметрами $a_1, \dots, a_n; c_1, \dots, c_m$.

Пусть в некотором процессе первой и второй системам сообщается количество тепла δQ_1 и δQ_2 соответственно, а всей системе (по предположению притоки тепла аддитивны).

$$\delta Q = \delta Q_1 + \delta Q_2.$$

По доказанному все эти элементы теплоты голономны

$$\delta Q_1 = \lambda_1 d\sigma_1, \quad \delta Q_2 = \lambda_2 d\sigma_2, \quad \delta Q = \lambda d\sigma$$

Подставляя в предыдущее выражение получим

$$d\sigma = \frac{\lambda_1}{\lambda} d\sigma_1 + \frac{\lambda_2}{\lambda} d\sigma_2$$

Здесь $\sigma, \sigma_1, \sigma_2$ – функции состояния первой и второй систем, а $\lambda, \lambda_1, \lambda_2$ – соответствующие интегрирующие делители;

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= \lambda_1(a_1, \dots, a_n; \theta), & \lambda_2 &= \lambda_2(c_1, \dots, c_m; \theta), & \lambda &= \lambda(a_1, \dots, a_n; c_1, \dots, c_m; \theta) \\ \sigma_1 &= \sigma_1(a_1, \dots, a_n; \theta), & \sigma_2 &= \sigma_2(c_1, \dots, c_m; \theta), & \sigma &= \sigma(a_1, \dots, a_n; c_1, \dots, c_m; \theta)\end{aligned}$$

Функции σ_1 и σ_2 можно взять в качестве независимых переменных каждой из этих систем, например вместо параметра a_1 первой системы и параметра c_1 второй системы, так что

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= \lambda_1(\sigma_1, a_2, \dots, a_n; \theta), & \lambda_2 &= \lambda_2(\sigma_2, c_2, \dots, c_m; \theta), & \lambda &= \lambda(\sigma_1, \sigma_2, a_2, \dots, a_n; c_2, \dots, c_m; \theta) \\ \sigma &= \sigma(\sigma_1, \sigma_2, a_2, \dots, a_n; c_2, \dots, c_m; \theta); \\ d\sigma &= \frac{\partial \sigma}{\partial \sigma_1} d\sigma_1 + \frac{\partial \sigma}{\partial \sigma_2} d\sigma_2 + \sum_{i=2}^n \frac{\partial \sigma}{\partial a_i} da_i + \sum_{k=2}^m \frac{\partial \sigma}{\partial c_k} dc_k + \frac{\partial \sigma}{\partial \theta} d\theta\end{aligned}$$

Сравнивая с полученным ранее выражением для $d\sigma$ находим

$$\frac{\partial \sigma}{\partial \sigma_1} = \frac{\lambda_1}{\phi}; \quad \frac{\partial \sigma}{\partial \sigma_2} = \frac{\lambda_2}{\phi};$$

а коэффициенты при $d\theta, da_2, \dots, da_n; dc_2, \dots, dc_m$ равны нулю:

$$\frac{\partial \sigma}{\partial \theta} = 0, \quad \frac{\partial \sigma}{\partial a_i} = 0, \quad \frac{\partial \sigma}{\partial c_i} = 0; \quad (i = 2, \dots, n; k = 2, \dots, m)$$

Приравнивая смешанные производные нулю, находим

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial \sigma_1} \left(\frac{\partial \sigma}{\partial \theta} \right) &= \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial \sigma}{\partial \sigma_1} \right) = \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\lambda_1}{\phi} \right) = 0, \\ \text{аналогично} \quad \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\lambda_2}{\phi} \right) &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial a_i} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda} \right) &= 0, \quad \frac{\partial}{\partial a_i} \left(\frac{\lambda_2}{\lambda} \right) = 0, \\ \frac{\partial}{\partial c_k} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda} \right) &= 0, \quad \frac{\partial}{\partial c_k} \left(\frac{\lambda_2}{\lambda} \right) = 0 \\ (i &= 2, \dots, n; k = 2, \dots, m)\end{aligned}$$

Из первых двух равенств следует, что если в зависимости интегрирующих делителей входит параметр θ , то в виде одной и той же функции $\phi(\theta)$, так что

$$\lambda_1 = \phi(\theta) \cdot f_1(\sigma_1, a_2, \dots, a_n); \quad \lambda_2 = \phi(\theta) \cdot f_2(\sigma_2, c_2, \dots, c_m); \quad \lambda = \phi(\theta) \cdot f(\sigma_1, \sigma_2; a_2, \dots, a_n; c_2, \dots, c_m);$$

Так как λ_1 не зависит от c_k , а λ_2 не зависит от a_i , то из последних равенств следует, что λ не зависит от a_i и c_k , λ_1 не зависит от a_i а λ_2 не зависит от c_k .

Таким образом,

$$\lambda_1 = \phi(\theta) \cdot f_1(\sigma_1); \quad \lambda_2 = \phi(\theta) \cdot f_2(\sigma_2); \quad \lambda = \phi(\theta) \cdot f(\sigma_1, \sigma_2);$$

Входящие сюда функции $f_1(\sigma_1), f_2(\sigma_2), f(\sigma_1, \sigma_2)$ являются произвольными, поскольку если имеется хотя бы один интегрирующий делитель λ_1 дифференциальной формы dQ_1 , такой, что $\frac{\delta Q}{\lambda_1} = d\sigma_1$, произведение λ_1 на произвольную функцию $\psi(\sigma_1)$ также будет интегрирующим делителем.

Отсюда следует, что среди бесконечного множества интегрирующих делителей есть имеются и такие, что $f_1(\sigma_1) = f_2(\sigma_2) = 1$. Так что $\lambda_1 = \lambda_2 = \phi(\theta)$.

Докажем, что тогда интегрирующий делитель λ также равен $\phi(\theta)$.

Действительно, рассмотрим три подсистемы находящиеся в тепловом равновесии (Рис.). Пусть λ – относится к системе, объединяющей подсистемы 1 и 2.

Согласно доказанному $\lambda_1 = \lambda_2 = \phi(\theta)$, $\lambda_2 = \lambda_3 = \phi(\theta)$, $\lambda = \lambda_3 = \phi(\theta)$. Следовательно, $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda = \phi(\theta)$.

План:

1. Математическое обоснование существования энтропии и термодинамической температуры. (Продолжение).

1.1. Числовое значение интегрирующего множителя от выбора термометрического вещества (эмпирической температуры) не зависит.
Термодинамическая шкала температур.

Используемая эмпирическая температура θ определялась по изменению какого-либо параметра (например по расширению того или иного термометрического вещества – ртути, спирта и т.д.). Как отмечалось, термометры с различными термометрическими веществами, кроме основных точек $0^\circ C$ и $100^\circ C$ будут показывать во всех других условиях разную температуру.

Выше показано, что среди интегрирующих делителей элемента теплоты δQ имеется такой $\phi(\theta)$, который зависит только от температуры θ и одинаков для произвольных систем, находящихся в тепловом равновесии.

Поскольку интегрирующий делитель $\phi(\theta)$ определяется только температурой, он может служить мерой температуры.

Покажем, что числовое значение $T = \phi(\theta)$ от выбора термометрического вещества не зависит, хотя вид этой функции зависит от выбора термометрического вещества (эмпирической температуры).

Таким образом **второе начало термодинамики** позволяет установить температурную шкалу, температура по которой не зависит от термометрического вещества и поэтому называется **абсолютной**. Температура $T = \phi(\theta)$ и является термодинамической или абсолютной температурой.

Выражение для термодинамической (абсолютной температуры) через параметры системы. Так как множитель $T = \phi(\theta)$ для всех систем находящихся в состоянии термодинамического равновесия одинаков, то рассмотрим простую систему. Пусть эмпирическая температура системы, измеряемая по величине какого либо параметра некоторого термометрического вещества, равна θ , а ее термодинамическая температура $T = \phi(\theta)$. Состояние термометрического вещества определяется внешним параметром a и эмпирической температурой θ (или абсолютной температурой T). В этом случае

$$\theta = \psi(T), \quad \varepsilon = \varepsilon(a, \theta) = \varepsilon(a, T); \quad \sigma = \sigma(a, \theta) = \sigma(a, T);$$

Тогда для этого вещества по первому началу

$$\delta Q = d\varepsilon + Ada$$

По второму началу

$$\frac{\delta Q}{T} = d\sigma$$

И следовательно

$$\frac{(\partial \varepsilon / \partial T)_a dT + [(\partial \varepsilon / \partial a)_T + A] da}{T} = \left(\frac{\partial \sigma}{\partial T} \right)_a dT + \left(\frac{\partial \sigma}{\partial a} \right)_T da$$

Откуда

$$\left(\frac{\partial\sigma}{\partial T}\right)_a = \frac{1}{T} \left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial T}\right)_a, \left(\frac{\partial\sigma}{\partial a}\right)_T = \frac{1}{T} \left[\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial a}\right)_T + A\right]$$

Так как

$$\frac{\partial^2\sigma}{\partial a\partial T} = \frac{\partial^2\sigma}{\partial T\partial a}$$

то

$$\frac{\partial}{\partial a} \left[\frac{1}{T} \left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial T}\right)_a \right] = \frac{\partial}{\partial T} \left\{ \frac{1}{T} \left[\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial a}\right)_T + A \right] \right\}$$

или

$$T \left(\frac{\partial A}{\partial T}\right)_a = \left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial a}\right)_T + A$$

Так как $T = \phi(\theta)$, ($\theta = \psi(T)$), то

$$T \left(\frac{\partial A}{\partial \theta}\right)_a \frac{d\theta}{dT} = \left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial a}\right)_\theta + A$$

Откуда

$$\frac{dT}{T} = \frac{(\partial A / \partial \theta)_a d\theta}{(\partial\varepsilon / \partial a)_\theta + A}$$

После интегрирования получаем

$$\ln \frac{T}{T_0} = \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{(\partial A / \partial \theta)_a d\theta}{(\partial\varepsilon / \partial a)_\theta + A} = I$$

или

$$\frac{T}{T_0} = e^I, \quad \text{или} \quad T = T_0 e^I$$

где T и T_0 – температуры по термодинамической шкале, соответствующие эмпирическим температурам θ и θ_0 .

Для эмпирической температуры θ_1 термодинамическая температура

$$T_1 = T_0 \exp I_1,$$

откуда

$$T_1 - T_0 = T_0 (\exp I_1 - 1)$$

где

$$I_1 = \int_{\theta_0}^{\theta_1} \frac{(\partial A / \partial \theta)_a d\theta}{(\partial\varepsilon / \partial a)_\theta + A}$$

Используя это соотношение запишем выражение для термодинамической температуры в виде

$$\frac{T}{T_1 - T_0} = \frac{\exp I}{\exp I_1 - 1} \quad \text{или} \quad T = (T_1 - T_0) \frac{\exp I}{\exp I_1 - 1}$$

Выберем температурную шкалу такой, чтобы разности между основными точками $\theta_1 - \theta_0 = 100^0C$ и $T_1 - T_0 = 100^0K$ соответствовали друг другу. Тогда

$$T = 100 \times \frac{\exp I}{\exp I_1 - 1}$$

Эта формула позволяет найти термодинамическую температуру T по данной эмпирической температуре θ , определяемой по какому-либо свойству того или иного термодинамического вещества.

Следствие 1. Независимость термодинамической температуры от выбора термометрического тела .

Термодинамическая температура T в данном состоянии не зависит от выбора термометрического тела.

Действительно, пусть состояние некоторой системы характеризуется помимо эмпирической температуры θ еще другой эмпирической температурой $\tau = \tau(\theta)$. Термодинамическая (абсолютная) температура Θ , определяемая с помощью эмпирической температуры τ (при той же разности между основными точками $\Theta_1 - \Theta_0 = \tau_1 - \tau_0 = 100$ равна

$$\Theta = 100 \times \frac{\exp I_\tau}{\exp I_{1\tau} - 1}$$

где

$$I_\tau = \int_{\tau_0}^{\tau} \frac{(\partial A / \partial \tau)_a d\tau}{(\partial \varepsilon / \partial a)_\tau + A} = \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{(\partial A / \partial \theta)_a (d\theta / d\tau) d\tau}{(\partial \varepsilon / \partial a)_\theta + A} = I$$

$$I_{1\tau} = \int_{\tau_0}^{\tau_1} \frac{(\partial A / \partial \tau)_a d\tau}{(\partial \varepsilon / \partial a)_\tau + A} = \int_{\theta_0}^{\theta_1} \frac{(\partial A / \partial \theta)_a (d\theta / d\tau) d\tau}{(\partial \varepsilon / \partial a)_\theta + A} = I_1$$

Следовательно, $\Theta = T$.

Вычисление термодинамической температуры в случае, когда термометрическим телом выбран совершенный газ Для вычисления термодинамической температуры в качестве термометрического тела можно взять совершенный газ газ, находящийся под действием всестороннего давления ($A = p$, $a = V$).

Для разреженного совершенного газа при постоянном объеме если θ – температура по шкале Цельсия.

$$p = p_0(1 + \alpha\theta), \quad \alpha = 0,003661 K^{-1} = \frac{1}{273,15} K^{-1}$$

$$\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial V} \right)_\theta = 0$$

Интегралы в этом случае равны

$$I = \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{(\partial p / \partial \theta)_V d\theta}{(\partial \varepsilon / \partial V)_\theta + p} = \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{\alpha d\theta}{1 + \alpha\theta} = \ln \frac{1 + \alpha\theta}{1 + \alpha\theta_0}, \quad I_1 = \ln \frac{1 + \alpha\theta_1}{1 + \alpha\theta_0}$$

Следовательно имеем

$$T = 100 \frac{1 + \alpha\theta}{\alpha(\theta_1 - \theta_0)} = \frac{1}{\alpha} + \theta = 273,15 + \theta$$

если выбрать $\theta_1 - \theta_0 = 100^0 C$.

Абсолютный нуль температуры по шкале Цельсия равен $-273,15^0 C$

При сделанном выборе величины 100 для разности температур $T_1 - T_0$, соответствующих основным точкам, т.е при выборе градуса Цельсия в качестве единицы температуры **термодинамическая температура совпадает с газовой температурой, измеренной по шкале Кельвина.**

Если пользоваться градусом Реомюра, т.е. положить

$$\theta - \theta_0 = 80^0 R \quad u \quad T_1 - T_0 = 80^0 K$$

то

$$\frac{1}{\alpha} = 273,15 \times 80/100 = 218,4 \quad u \quad T = \theta + 218,4$$

Абсолютный нуль температуры по шкале Рейнхольда равен $-218,4^0R$.

Замечание. Кельвин $-\frac{1}{273,16}$ термодинамической температуры тройной точки воды.

Это определение было дано в резолюции Десятой Генеральной конференции по мерам и весам (1954). Вместе с тем, по международной практической температурной шкале для тройной точки воды принята температура $\theta = 0,01^0C$ точно.

Поэтому формула перехода от практической к термодинамической температурной шкале имеет вид

$$T = \theta^0C + 273,15^0C$$

Следствие 2. Из выражения для температуры видно, что при обратимом переходе из одного состояния в другое температура T не может менять знак.

Ее знак определяется дополнительным условием, связанным с определением того, какая температура больше, а какая меньше. Считается, что в случае обратимого равновесного сообщения телу теплоты при постоянных внешних параметрах его температура увеличивается, т.е.

$$C_a = \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_a > 0$$

Такое дополнительное условие приводит к положительной термодинамической температуре ($T > 0$).

1.2. Энтропия

Определение

Функция определяемая дифференциальным уравнением

$$\frac{\delta Q}{T} = dS,$$

где T –абсолютная температура называется **энтропией**.

Утверждение 1.

Энтропия является аддитивной величиной, пропорциональной числу частиц системы.

Действительно,

Если функция

$$dS_1 = \frac{\delta Q_1}{T} - \text{энтропия первой системы},$$

а функция

$$dS_2 = \frac{\delta Q_2}{T} - \text{энтропия второй системы},$$

и эти системы приведены в тепловой контакт и находятся в состоянии равновесия, то так как суммарное количество тепла подведенное к их объединению $\delta Q = \delta Q_1 + \delta Q_2$, для энтропии всей системы имеем

$$\frac{\delta Q}{T} = dS_1 + dS_2 = d(S_1 + S_2) = dS$$

Утверждение 2.

Энтропия является однозначной функцией состояния. (Это следует уже из того, что dS является полным дифференциалом.)

В самом деле, неоднозначность энтропии означает, что две разные адиабаты S_1 и S_2 могут пересекаться и следовательно возможен круговой процесс, изображенный отрезком изотермы 1–2 и отрезками пересекающихся адиабат 2–3 и 3–1 (рис.).

Если на участке изотермического процесса 1–2 такого цикла у термостата берется теплота $Q(Q > 0)$, то, по первому началу, за счет этой теплоты за цикл производится положительная работа $A = Q = \int \delta Q$ и мы имеем, таким образом, вечный двигатель второго рода.

Невозможность вечного двигателя второго рода приводит к невозможности пересечения адиабат, т.е. к однозначности энтропии.

Математически это выражается следующим образом

$$\int_C dS = 0$$

при любом обратимом циклическом процессе.

Таким образом, второе начало термодинамики для обратимых процессов сводится к существованию у всякой термодинамической системы новой однозначной функции состояния – энтропии S , которая при адиабатических обратимых процессах не меняется.

Математически второе начало записывается уравнением

$$\frac{\delta Q}{T} = dS, \quad \text{или} \quad \delta Q = TdS$$

Это выражение для элементарного количества теплоты имеет тот же вид, что и выражение для элементарной работы

$$\delta A^{(e)} = A da$$

Причем температура T является обобщенной силой, а энтропия S – обобщенной координатой.

Сходство выражений для δQ и $\delta A^{(e)}$ обусловлено родственностью природы этих величин: и то и другое выражает энергию получаемую системой.

Интегральным уравнением второго начала для обратимых круговых процессов является равенство Клаузуса

$$\int_C \frac{\delta Q}{T} = 0$$

1.3. Физический смысл энтропии в случае обратимых процессов

При анализе обратимых процессов понятие энтропии может быть в какой–то степени уяснено из следующих рассуждений поясняющих смысл уравнения

$$dS = \frac{\delta Q}{T},$$

определенного дифференциал энтропии.

Первое начало устанавливает, что элемент теплоты δQ не является полным дифференциалом. Физический смысл этого утверждения состоит в том, что количество теплоты, необходимое при переходе из одного состояния в другое зависит от пути (условий перехода).

Рассмотрим переход системы из состояния 1 в 2 по пути I или II (рис.)

Разобъем эти пути на элементы, на которых система получает соответствующее количество теплоты δQ при температуре T . Полные количества теплоты, необходимые для перехода из состояния 1 в 2 по этим путям, соответственно равны

$$Q_I = \int_{(I)} \delta Q, \quad Q_{II} = \int_{(II)} \delta Q$$

Причем $Q_I \neq Q_{II}$.

Однако, если количество теплоты δQ_i , получаемое системой на некотором элементе какого либо пути, разделить на температуру T_i , при которой сообщается это тепло, и найти сумму (интеграл) этих приведенных теплот, то согласно второму началу термодинамики для обратимых процессов эти суммы (интегралы) приведенных теплот для всех путей перехода одинаковы:

$$\int_{(I)} \frac{\delta Q}{T} = \int_{(II)} \frac{\delta Q}{T}$$

это указывает на существование некоторой однозначной функции состояния, которая называется энтропией, и изменение которой определяется интегралом

$$S_2 - S_1 = \int_1^2 \frac{\delta Q}{T}$$

1.4. Второе начало термодинамики для необратимых процессов. основное уравнение и основное неравенство термодинамики.

Рассмотрим два близких состояния равновесия 1 и 2 некоторой системы (рис.). Пусть при необратимом переходе из одного состояния в другое системе сообщается от какого-либо тела количество теплоты δQ_n и она совершает работу δA_n . По первому началу

$$\delta Q_n = d\varepsilon + \delta A_n.$$

Если же система переходит из состояния 1 в состояние 2 обратимо и количество теплоты, получаемое от того же тела, равно δQ , а совершаемая работа δA , то

$$\delta Q = d\varepsilon + \delta A.$$

Первый переход является необратимым, поэтому возвращение системы в начальное состояние без компенсации невозможно; второй переход обратим и систему можно вернуть в исходное состояние без всяких изменений в окружающих телах.

Вычитая получим

$$\delta Q_n - \delta Q = \delta A_n - \delta A.$$

Эта разность не может быть равна нулю, так как в противном случае это означало бы, что необратимый процесс перехода системы из одного состояния в другое можно обратить без изменения в окружающих телах отдав теплоисточнику количество теплоты $\delta Q = \delta Q_n$ и произведя работу $\delta A = \delta A_n$.

Разность не может быть положительной, так как это означало бы, что за круговой процесс системой произведена работа $\delta A_n - \delta A > 0$ только за счет теплоты теплоисточнику $\delta Q_n - \delta Q > 0$ без всякой компенсации.

Разность может быть отрицательной. Это соответствует тому, что при возвращении системы в начальное состояние часть теплоты $\delta Q - \delta Q_n > 0$ передается теплоисточнику за счет внешней работы $\delta A - \delta A_n > 0$, что по второму началу (второй его части) возможно.

Таким образом,

$$\delta Q > \delta Q_n > 0, \quad \delta A > \delta A_n > 0$$

Так как $\delta Q = TdS$, то $TdS > \delta Q_n$.

Следовательно

$$TdS > \frac{\delta Q_n}{T}, \quad S_2 - S_1 > \int_1^2 \frac{\delta Q_n}{T}$$

Запишем последнее соотношение в виде

$$TdS = \delta Q_n + \delta Q^*, \quad \delta Q^* > 0$$

где величина δQ^* называется **некомпенсированным теплом**.

Для необратимого цикла получаем **неравенство Клаузиуса**

$$\int_C \frac{\delta Q}{T} < 0$$

Это неравенство выражает **второе начало для необратимых процессов в адиабатически неизолированных системах**. В случае обратимых процессов $\delta Q^* = 0$.

Следствие 1.

При адиабатическом необратимом процессе ($\delta Q_n = 0$)

$$dS > 0, \quad \text{и} \quad S_2 - S_1 > 0$$

т.е. при адиабатическом необратимых процессах энтропия системы возрастает.

Следствие 2.

Переход системы из одного состояния в другое совершающийся адиабатически обратимо ($\delta Q = TdS = 0$), нельзя осуществить адиабатически необратимо ($\delta Q_n = 0, dS > 0$) и наоборот.

1.5. Физический смысл энтропии в случае необратимых процессов.

Положение о возрастании энтропии в адиабатически замкнутой системе при необратимых процессах выражает **второе начало термодинамики для необратимых процессов в адиабатически замкнутых системах (закон возрастания энтропии)**. Оно позволяет характеризовать **энтропию как меру необратимости процессов в замкнутой системе**. В этом состоит физический смысл энтропии если подходить к ней учитывая особенности неравновесных процессов.

Так как естественные, самопроизвольные процессы проходят с конечной скоростью и направления изменения параметров важны, то при таких процессах в замкнутых системах энтропия всегда возрастает.

Более глубокий смысл энтропии раскрывается в **статистической физике**, согласно которой **энтропия системы в данном состоянии характеризует вероятность этого состояния**:

$$S = k \ln W \quad - \text{принцип Больцмана}$$

где k —постоянная Больцмана; W –термодинамическая вероятность состояния, определяемая числом микросостояний, реализующих данное макроскопическое состояние.

Односторонний характер изменения энтропии в замкнутой системе определяется переходом системы из менее вероятного состояния в более вероятное.

Замечание об отличии термодинамической энтропии от информационной (знаком).

Замечание 1.

Приведенные здесь неравенства не следует понимать в том смысле, что при необратимом переходе системы из состояния 1 в состояние 2 изменение энтропии больше, чем при обратимом переходе.

Энтропия есть однозначная функция состояния, и в каждом состоянии система имеет одно определенное значение энтропии.

Следовательно, разность значений энтропии $S_2 - S_1$ не зависит от того, обратимым или необратимым путем система перешла из состояния 1 в состояние 2.

Знак неравенства Клаузиуса указывает на то, что интеграл в правой части формулы, взятой по необратимому пути, не определяет разности значений энтропий начального и конечного состояний, а меньше ее.

Аналогично дифференциальное неравенство показывает, что адиабатически необратимым путем система переходит в такие состояния, в которых ее энтропия больше.

Замечание 2.

Второе начало для необратимых процессов показывает относительность принципа адиабатической недостижимости для обратимых процессов и устанавливает абсолютную адиабатическую недостижимость состояний с энтропией $S < S_0$.

Действительно, при адиабатически обратимых процессах достижимы лишь состояния с неизменной энтропией $S = S_0 = \text{const}$ и недостижимы как состояния с $S > S_0$, так и состояния с $S < S_0$. С помощью необратимых процессов можно достичь состояний с $S > S_0$, но нельзя достичь состояний с $S < S_0$. Таким образом, **состояния с $S < S_0$ абсолютно недостижимы**.

1.6. Теоремы Карно

Второе начало термодинамики было установлено в результате анализа работы тепловых машин.
В первом сочинении по термодинамике (С. Карно, 1824 г.) была поставлена и решена проблема возможного повышения коэффициента полезного действия тепловых двигателей.

Относительно к.п.д. тепловых машин Карно установил две теоремы, которые совместно эквивалентны второму началу термодинамики.

Определение. Коэффициентом полезного действия теплового двигателя η называется отношение работы A , произведенной машиной за цикл, к количеству теплоты Q_1 , получаемой машиной за этот цикл

$$\eta = \frac{A}{Q_1}$$

Теорема Карно 1

К.п.д. цикла Карно не зависит от природы рабочего вещества и предельных адиабат, а определяется только температурами теплоотдатчика и теплоприемника.

Доказательство:

По первому началу

$$A = \int \delta Q = Q_1 - Q_2$$

где Q_2 – абсолютное значение количества теплоты, отдаваемое рабочим телом за цикл, поэтому

$$\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1}$$

Вычислим к.п.д. цикла Карно, состоящего из двух изотермических и адиабатических процессов.
На диаграмме (S, T) это будет цикл изображенный на рис.

На изотерме 1–2 теплота Q_1 берется от теплоотдатчика, на изотерме 3–4 теплота Q_2 отдается теплоприемнику

$$Q_1 = T_1(S_2 - S_1), \quad Q_2 = T_2(S_2 - S_1)$$

Работа за цикл будет

$$A = Q_1 - Q_2 = (T_1 - T_2)(S_2 - S_1)$$

И следовательно

$$\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = \frac{T_1 - T_2}{T_1}$$

Теорема Карно 2

К.п.д. необратимой машины Карно меньше к.п.д. обратимой машины Карно.

Доказательство:

Если машина при заданных внешних условиях работает по некоторому циклу и получает при необратимом цикле то же количество теплоты Q_1 , что и при обратимом, то поскольку работа $A_{\text{необр}}$ за необратимый цикл меньше работы A за обратимый цикл (следствие второго закона термодинамики), то

$$\eta_{\text{необр}} < \eta_{\text{обр}}$$

1.7. Примеры.

Энтропия для совершенного газа .

В случае совершенного газа

$$U = c_V dT + U_0, \quad p = \rho R T$$

Подставив эти соотношения в выражение для удельной энтропии (на единицу массы)

$$ds = \frac{dq}{T} = \frac{dU + pd\frac{1}{\rho}}{T}$$

получим

$$ds = \frac{c_V dT}{T} + \frac{R d\frac{1}{\rho}}{\frac{1}{\rho}}$$

или

$$s = c_V \ln \frac{T}{\rho^{\gamma-1}} + const = c_p \ln \frac{T}{\rho^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}} + const_1 = c_V \ln \frac{p}{\rho^\gamma} + const_2 = c_V \ln \frac{p}{\rho^\gamma} - c_V \frac{p_0}{\rho_0^\gamma} + s_0$$

Самопроизвольный переход теплоты. Второе начало термодинамики указывает определенное направление естественных процессов. Пример – самопроизвольный переход тепла при тепловом контакте двух тел с различными температурами T_1 и T_2 .

Пусть от первого тела ко второму за некоторое время dt перейдет количество теплоты $\delta Q > 0$. Тогда изменение энтропии первого тела равно

$$dS_1 = -\frac{\delta Q}{T_1},$$

а изменение энтропии второго тела

$$dS_2 = \frac{\delta Q}{T_2},$$

Изменение энтропии всей системы при таком процессе

$$dS = dS_1 + dS_2 = \delta Q \left(\frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1} \right) > 0$$

По второму началу энтропия этой системы при таком процессе должна возрасти.

Откуда

$$T_1 > T_2$$

т.е. температура переходит от тела с большей температурой к телу с меньшей температурой.

Теплопроводность как необратимый процесс. Второй закон термодинамики для конечных объемов сплошной среды в силу аддитивности энтропии можно записать в виде

$$\frac{dS}{dt} = \frac{d}{dt} \int_V \rho s d\tau = \int_V \frac{1}{T} \left(\frac{dq^{(e)}}{dt} + \frac{dq'}{dt} \right) \rho d\tau.$$

Рассмотрим процесс теплопроводности в неподвижном теле.

Примем, что $dq' = 0$ и, что приток тепла обусловлен только теплопроводностью. Тогда

$$dq^{(e)} = -\frac{1}{\rho} \operatorname{div} \vec{q} dt$$

Следовательно имеем

$$\frac{dS}{dt} = - \int_V \frac{1}{T} \operatorname{div} \vec{q} = - \int_V \operatorname{div} \frac{\vec{q}}{T} d\tau + \int_V \vec{q} \cdot \operatorname{grad} \frac{1}{T} = - \int_{\Sigma} \frac{q_n}{T} d\sigma + \int_V \left(\vec{q} \cdot \operatorname{grad} \frac{1}{T} \right) d\tau$$

Согласно этому равенству энтропия может возрастать или убывать в частности за счет притока или оттока тепла через поверхность (первый интеграл справа).

Если тело теплоизолировано, то $q_n = 0$. Однако, внутри тела из-за неравномерности распределения температур вектор \vec{q} может быть отличен от нуля. В этом случае

$$\frac{dS}{dt} = - \int_V \left(\frac{\vec{q} \cdot \operatorname{grad} T}{T^2} \right) d\tau$$

Согласно закону Фурье

$$\vec{q} = -\lambda \operatorname{grad} T, \quad \lambda > 0$$

Поэтому

$$\frac{dS}{dt} = \int_V \frac{\lambda}{T^2} |\operatorname{grad} T|^2 d\tau > 0$$

Таким образом, несмотря на отсутствие притока тепла извне к телу в целом, при условии $Tds = dq^{(e)}$, $dq' = 0$ получается, что энтропия тела в целом растет. Из приведенного рассуждения ясно, что **условие $dq' = 0$ не является достаточным условием обратимости процесса.**

1.8. Условия, налагаемые фактом существования энтропии на вид уравнений состояния. Термодинамические потенциалы двухпараметрических сред.

Комбинация первого и второго законов термодинамики дает **основное уравнение и основное неравенство термодинамики**.

$$Tds \geq dU + \sum_i A_i da_i$$

где знак неравенства относится к необратимым процессам, а знак равенства — к обратимым.

Например, для идеального газа основным термодинамическим соотношением является **тождество Гибса**

$$Tds = dU + pd\frac{1}{\rho}$$

1. Факт существования энтропии налагает некоторые условия на вид уравнений состояния, которые сводятся к условиям интегрируемости, так как энтропия является полным дифференциалом.

Рассмотрим идеальный газ.

Если задать внутреннюю энергию как функцию давления p и плотности ρ , то условие существования энтропии показывают, что температура $T(p, \rho)$ не может быть произвольной функцией этих параметров, а должна удовлетворять следующим соотношениям

$$\frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{1}{T} \frac{\partial U}{\partial p} \right) = \frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{1}{T} \frac{\partial U}{\partial \rho} - \frac{p}{\rho^2 T} \right)$$

или

$$\frac{\partial T}{\partial \rho} \frac{\partial U}{\partial p} = \frac{\partial T}{\partial p} \left(\frac{\partial U}{\partial \rho} - \frac{p}{\rho^2} \right) + \frac{T}{\rho^2}$$

Следовательно, при заданной функции $U(p, \rho)$ функции $T(p, \rho)$ не могут быть произвольными, хотя существует много различных решений выписанного выше уравнения в частных производных.

Чтобы устранить это неоднозначность, необходимо взять одно из частных решений. После этого энтропия определяется с точностью до аддитивной постоянной.

2. За определяющие термодинамические переменные двухпараметрической среды часто удобно брать различные пары переменных. Нельзя ли задать какую-нибудь термодинамическую функцию от таких переменных, чтобы в результате этого задания другие термодинамические функции определялись бы полностью и однозначно?

В случае идеального газа из тождества Гиббса имеем следующие **термодинамические потенциалы**.

1). Энтропия s как функция U и ρ — термодинамический потенциал.

Это следует непосредственно из тождества Гиббса

$$\frac{1}{T} = \left(\frac{\partial s}{\partial U} \right)_\rho, \quad \frac{p}{T} = \left(\frac{\partial s}{\partial 1/\rho} \right)_U$$

2). Внутренняя энергия как функция ρ и s — термодинамический потенциал.

Действительно,

$$dU = \left(\frac{\partial U}{\partial s} \right)_\rho ds + \left(\frac{\partial U}{\partial \rho} \right)_s d\rho = Tds - pd\frac{1}{\rho}$$

Откуда

$$T = \left(\frac{\partial U}{\partial s} \right)_\rho, \quad p = \rho^2 \left(\frac{\partial U}{\partial \rho} \right)_s$$

Т.е. T и p в этом случае определены однозначно.

3). Свободная энергия – термодинамический потенциал переменных ρ, T .

Запишем тождество Гибса в виде

$$d(U - Ts) = -sdT + \frac{p}{\rho^2} d\rho$$

или

$$dF = -sdT + \frac{p}{\rho^2} d\rho$$

где через $F = U - Ts$ обозначена функция состояния называемая **свободной энергией**. Если F известна как функция переменных ρ и T то однозначно определяются p и s :

$$s = - \left(\frac{\partial F}{\partial T} \right)_\rho, \quad p = \rho^2 \left(\frac{\partial F}{\partial \rho} \right)_T$$

4). Энталпия – термодинамический потенциал переменных p, s .

Запишем тождество Гибса в виде

$$d \left(U + \frac{p}{\rho} \right) = Tds + \frac{dp}{\rho}$$

или

$$dh = Tds + \frac{dp}{\rho}$$

где функция состояния $h(p, s) = U + p/\rho$ называется энталпийей или теплосодержанием. При этом

$$T = \left(\frac{\partial h}{\partial s} \right)_p, \quad \frac{1}{\rho} = \left(\frac{\partial h}{\partial p} \right)_s$$

5) Термодинамический потенциал Гиббса – функция p и T .

Запишем тождество Гибса в виде

$$d \left(U - Ts + \frac{p}{\rho} \right) = -sdT + \frac{dp}{\rho}$$

или

$$d\Psi = -sdT + \frac{dp}{\rho}$$

Через термодинамический потенциал Гиббса $\Psi(p, T)$ однозначно определяются ρ и s

$$s = - \left(\frac{\partial \Psi}{\partial T} \right)_p, \quad \frac{1}{\rho} = \left(\frac{\partial \Psi}{\partial p} \right)_T$$

Замечание. Свободная и термодинамический потенциал Гиббса определяются с точностью до линейной функции от температуры.

1. Поверхности разрыва

1.1. О поверхностях разрыва в механике сплошной среды

До сих пор предполагалось, что в области, занятой сплошной средой, в точках в которых должны выполняться соответствующие дифференциальные уравнения, задаваемые и искомые функции непрерывны и имеют нужное число непрерывных производных.

Такое предположение является очень сильным ограничением, неприемлемым в ряде важных приложений.

Поверхности разрыва, по разные стороны которых находятся разные среды. Примерами являются жидкости и погруженные в них тела. Например, виски со льдом. Другие примеры: поверхности взаимодействия с водой тающего или намерзающего льда погруженного в воду; поверхности взаимодействия с продуктами горения порохового заряда; поверхности космических аппаратов, движущихся в атмосфере.

На поверхности раздела этих сред характеристики состояний и движения (плотность, скорость, перемещения и т. п. могут быть вообще разрывными функциями координат.

В этом случае поверхности раздела можно рассматривать как поверхности разрыва, на которых необходимо выставлять для искомых функций специальные условия, играющие роль краевых условий на подвижных и неизвестных заранее границах.

Поверхности разрыва в одной среде. В ряде задач газовой динамики для идеального совершенного газа и во многих других случаях требование непрерывности по координатам искомых решений приводит к отсутствию существования решений (поршень в канале, обтекание затупленного тела с отошедшей ударной волной, ...). Допущение кусочной гладкости искомых решений обеспечивает при соответствующей постановке задачи существование и единственность решения. Получающиеся разрывные решения могут хорошо соответствовать реальным эффектам.

В некоторых случаях разрывное решение может быть получено в рамках одной модели как **предел последовательности непрерывных решений, стремящихся к данному разрывному решению.** Такое положение дел имеет место далеко не всегда даже в случае систем линейных уравнений. Это связано с тем, что разрывные движения вообще необратимы и характеризуют конечные потери механической энергии даже тогда, когда непрерывные движения обратимы.

О структуре разрыва. Существует распространенная точка зрения, что при описании реальных явлений в рамках механики сплошной среды можно, и, вообще говоря, нужно рассматривать только непрерывные движения.

В случае если непрерывное решение не существует или перестает существовать, начиная с некоторого времени, для получения непрерывных решений необходимо обращаться к другой, более сложной модели. Необходимо вводить в уравнения движения дополнительные члены и соотношения для учета в тонких слоях внутри или на границе области диссипативных эффектов, возникающих за счет резких градиентов в распределении скоростей, температур, плотностей.

Можно указать случаи, когда нет непрерывного решения поставленной задачи в рамках модели идеальной жидкости, но есть непрерывное решение с резкими изменениями параметров движения и состояния в рамках модели вязкой жидкости (обтекание затупленного тела с образованием ударной волны).

Задача об установлении структуры скачка заключается в исследовании непрерывных решений усложненной модели, отвечающих разрывам в упрощенной модели.

Слабые и сильные разрывы. Поверхности, на которых сами функции непрерывны, но разрывные только некоторые из производных по координатам и времени называются **слабыми разрывами**.

Поверхности, на которых терпят разрыв сами функции называются **поверхностями сильного разрыва**.

1.2. Условия на поверхностях сильного разрыва.

1.2.1. Некоторые определения и факты.

Поверхности сильного разрыва можно вводить как заданные поверхности с заданными законами их движения в виде внешних связей, или как носители заданных или искомых силовых и других внешних воздействий, форма и движение которых заранее неизвестны и, вообще говоря, должны быть найдены в процессе решения задачи.

Единичный вектор нормали к поверхности. Рассмотрим подвижную поверхность S , уравнение которой представлено в виде $f(x, y, z, t) = 0$. Вследствие движения поверхность S в разные моменты времени t и $t + \Delta t$ занимает разные положения S и S_1 (рис.).

Возьмем на S точку M и предположим, что в точке M существует определенная нормаль к S . (Она существует в точках поверхности, когда вектор $\text{grad}f$ определен однозначно в каждой точке поверхности. При этом исключаются случаи поверхности с изломами и другими особенностями). Единичный вектор нормали \vec{n} в точке M поверхности S направим в сторону вектора \vec{MN} , где точка N является точкой пересечения перемещенной поверхности S_1 с нормалью к S в точке M . Знак функции $f(x, y, z, t)$ определим их условия $f(M, t) = 0, f(N, t) > 0$ и поэтому

$$\vec{n} = \frac{\text{grad}f}{|\text{grad}f|}.$$

Скорость перемещения в пространстве поверхности S в точке M . Скоростью перемещения в пространстве поверхности S в точке M называется вектор \vec{D} , нормальный к S и определенный как следующий предел

$$\vec{D} = \vec{n} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{MN}{\Delta t}$$

Если задано уравнение поверхности, то

$$\vec{D} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial t}}{|\text{grad}f|} \vec{n}$$

Действительно,

Обозначим компоненты единичного вектора \vec{n} через

$$n_x = \frac{1}{|\text{grad}f|} \frac{\partial f}{\partial x}, \quad n_y = \frac{1}{|\text{grad}f|} \frac{\partial f}{\partial y}, \quad n_z = \frac{1}{|\text{grad}f|} \frac{\partial f}{\partial z}.$$

Тогда, так как точка N принадлежит поверхности в момент времени $t + \Delta t$, то

$$f(x + MNn_x, y + MNn_y, z + MNn_z, t + \Delta t) = 0.$$

Отсюда с точностью до малых высшего порядка имеем

$$MN \left(\frac{\partial f}{\partial x} n_x + \frac{\partial f}{\partial y} n_y + \frac{\partial f}{\partial z} n_z \right) + \frac{\partial f}{\partial t} \Delta t = 0$$

или

$$MN |\text{grad}f| + \frac{\partial f}{\partial t} \Delta t = 0.$$

Из последнего равенства и следует выражение для скорости движения поверхности.

Очевидно, что $\vec{D} = 0$ в каждой точке M поверхности S , если функция f не зависит от времени. Вектор \vec{D} зависит от выбора системы координат.

Собственная система координат. Для каждой точки M можно указать "собственную систему координат" – систему отсчета K^* , в которой скорость этой точки M в данный момент времени обращается в нуль ($\vec{D} = 0$).

Пусть при переходе через гладкую поверхность S (с определенными нормалями), задаваемую уравнением $f(x, y, z, t) = 0$, различные характеристики состояний и движения среды терпят разрыв. Возьмем на S некоторую(любую) точку M . Так как все механические, термодинамические, электродинамические и вообще физические уравнения сохраняют свой вид в любой инерциальной системе координат, то для вывода искомых условий в точке M в качестве системы отсчета можно выбрать "собственную систему" K^* , в которой скорость данной точки в данный момент времени равна нулю $\vec{D} = 0$.

Выделение объема, стягиваемого к поверхности разрыва. В связи с некоторой частью изолированной поверхности разрыва S введем в рассмотрение замкнутую поверхность Σ как границу объема, полученного следующим образом.

Проведем в каждой точке выделенной части поверхности S нормаль и отложим по нормали в обе стороны от S отрезки длиной $h/2$, где h – малая постоянная длина. Совокупность таких отрезков, проведенных из всех точек рассматриваемого участка поверхности S , образует в данный момент времени **соответствующий объем V , ограниченный поверхностью Σ** .

В выбранной системе координат K^* определенный выше объем V будем рассматривать как **неподвижный геометрический объем**. Кроме него, будем рассматривать совпадающий с ним в момент времени t подвижный – **субстанциональный объем V^* связанный с точками среды**.

В следующий момент времени $t + dt$ объем V^* сдвигается относительно своего положения V в момент времени t . Этот объем неподвижен только в том случае, когда точки среды на поверхности Σ в системе K^* неподвижны или имеют равные нулю нормальные составляющие скорости на Σ . Поверхность разрыва S тоже перемещается внутри объема V , однако рассматриваемая точка M за бесконечно малое время dt сохраняет свое положение, так как ее скорость в системе K^* равна нулю.

Интегральные законы сохранения. Выпишем для выбранного таким образом субстанционального объема V^* интегральные законы сохранения, которые были получены на предыдущих лекциях. Интегральная формулировка законов механики и термодинамики обладает большей общностью чем дифференциальная. Она и используется при исследовании разрывных решений.

1. Уравнение неразрывности

$$\frac{d}{dt} \int_{V^*} \rho d\tau = 0$$

2. Уравнение импульсов

$$\frac{d}{dt} \int_{V^*} \rho \vec{v} d\tau = \int_V \rho \vec{F} d\tau + \int_{\Sigma} \vec{p}_n d\sigma$$

3. Уравнение моментов

$$\frac{d}{dt} \int_{V^*} \vec{r} \times \rho \vec{v} d\tau + \frac{d}{dt} \int_{V^*} \rho \vec{k} d\tau = \int_V \vec{r} \times \rho \vec{F} d\tau + \int_{\Sigma} \vec{r} \times \vec{p}_n d\sigma + \int_V \rho \vec{h} d\tau + \int_{\Sigma} \vec{Q}_n d\sigma$$

4. Уравнение энергии

$$\frac{d}{dt} \int_{V^*} \rho \left(u + \frac{v^2}{2} \right) d\tau = \int_V \rho \vec{F} \cdot \vec{v} d\tau + \int_{\Sigma} \vec{p}_n \cdot \vec{v} d\sigma - \int_{\Sigma} q_n^* d\sigma + \int_V \rho \frac{dq^*}{dt} d\tau$$

Здесь q_n^* – внешний поток добавочной энергии, как тепловой, так и не тепловой (в том числе работа поверхностных пар и т.д.) через граничную поверхность Σ , а $\frac{dq^*}{dt}$ – полный удельный добавочный приток энергии за счет массовых источников энергии за единицу времени по сравнению с притоком механической энергии равным работе макроскопических массовых и поверхностных сил, входящих в уравнение импульсов.

5. Уравнение для энтропии.

$$\frac{d}{dt} \int_{V^*} \rho s d\tau = \int_V \frac{\rho}{T} \left(\frac{dq^{(e)}}{dt} + \frac{dq'}{dt} \right) d\tau, \quad \frac{dq'}{dt} \geq 0$$

1.2.2. Переход к пределу.

Разделив выписанные уравнения на $\Delta\sigma$, где $\Delta\sigma$ – элемент поверхности S стягивающейся к M , и перейдя к пределу при $\Delta\sigma \rightarrow 0, h \rightarrow 0$ получим соотношения на разрывах.

Предел производной в левой части интегральных законов при стягивании объема к точке поверхности разрыва. Из формулы дифференцирования по времени интеграла взятого по подвижному объему следует, что для любой кусочно гладкой функции $A(x, y, z, t)$ в системе K^* имеем

$$\frac{d}{dt} \int_{V^*} A d\tau = \frac{d}{dt} \int_V A d\tau + \int_{\Sigma} A v_n d\sigma,$$

где v_n – проекция скорости точек среды относительно K^* на внешнюю нормаль к поверхности Σ .

Первое слагаемое. Если поверхность разрыва внутри объема V неподвижна, то для производной от интеграла по неподвижному в системе K^* объему V можно написать

$$I = \frac{d}{dt} \int_V A d\tau = h \frac{d}{dt} \int_S A^* d\sigma$$

где A^* – среднее значение функции A на соответствующем отрезке длиной h .

Если A явно не зависит от времени, то эта производная равна нулю.

При неустановившемся движении, когда функция A конечна и непрерывна вместе со своими производными по координатам и по времени с обеих сторон от неподвижной поверхности S (на S могут быть разрывы), величина I является непрерывной функцией от t , исчезающей при стремлении к нулю величины h .

Выбор системы K^* определен условием $\vec{D} = 0$ в точке M . В соседних точках поверхности $\vec{D} \neq 0$, и поэтому поверхность S – вообще подвижная поверхность внутри объема V . Для бесконечно малого элемента поверхности S вблизи точки M скорости \vec{D} соседних точек бесконечно малы, поэтому при стягивании объема V к точке M получим

$$\lim_{\Delta\sigma \rightarrow 0, h \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta\sigma} \frac{d}{dt} \int_V A d\tau = 0$$

Второе слагаемое. Будем обозначать характеристики движения и состояния и состояния на одной стороне индексом 1, на другой – индексом 2. Выберем нумерацию так, чтобы направление нормали соответствовало переходу со стороны 2 на сторону 1.

Тогда для поверхностного интеграла переходя к пределу при $h \rightarrow 0, \Delta\sigma \rightarrow 0$ очевидно получим

$$\lim_{h \rightarrow 0, \Delta\sigma \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta\sigma} \int_{\Sigma} A v_n d\sigma = A_1 v_{n1} - A_2 v_{n2},$$

где v_{n1}, v_{n2} – проекции скоростей точек среды с двух сторон поверхности на одно и то же положительное направление нормали к S .

Таким образом имеем

$$\lim_{h \rightarrow 0, \Delta\sigma \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta\sigma} \frac{d}{dt} \int_{V^*} A d\tau = A_1 v_{n1} - A_2 v_{n2}$$

Пределы интегралов в правой части интегральных законов. Будем предполагать, что 1) все подинтегральные функции в поверхностных интегралах по Σ при стягивании Σ к S имеют конечные значения, но, вообще говоря, различные на разных сторонах S и 2) при $h \rightarrow 0$ имеют место следующие предельные равенства:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_V \rho \vec{F} d\tau = \int_S \vec{R} d\sigma, \quad \lim_{h \rightarrow 0} \int_V \rho \vec{h} d\tau = \int_S \vec{M} d\sigma, \quad \lim_{h \rightarrow 0} \int_V \left(\rho \vec{F} \cdot \vec{v} + \frac{dq^*}{dt} \right) d\tau = \int_S W d\sigma,$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_V \frac{\rho}{T} \left(\frac{dq^{(e)}}{dt} + \frac{dq'}{dt} \right) d\tau = \int_S \Omega d\sigma,$$

где \vec{R}, \vec{M} и W –поверхностные плотности на S соответствующих внешних для среды сил, моментов и притока энергии, а величина Ω дает плотность распределения на S изменения энтропии за счет внешних притоков тепла и роста энтропии за счет необратимости процесса перехода через скачок.

1.2.3. Условия на поверхностях разрыва в "собственной системе координат".

Используя принятые выше обозначения и полученные соотношения имеем

Из закона сохранения масс

$$\rho_1 v_{n1} = \rho_2 v_{n2}$$

Из уравнения импульсов

$$\vec{R} + \vec{p}_{n1} - \rho_1 \vec{v}_1 v_{n1} = \vec{p}_{n2} - \rho_2 \vec{v}_2 v_{n2}$$

Из уравнения моментов с учетом уравнения импульсов

$$\vec{M} + \vec{Q}_{n1} - \rho_1 \vec{k}_1 v_{n1} = \vec{Q}_{n2} - \rho_2 \vec{k}_2 v_{n2}$$

Из уравнения энергии

$$W + \vec{p}_{n1} \cdot \vec{v}_1 - \rho_1 v_{n1} \left(u_1 + \frac{v_1^2}{2} \right) - q_{n1}^* = \vec{p}_{n2} \cdot \vec{v}_2 - \rho_2 v_{n2} \left(u_2 + \frac{v_2^2}{2} \right) - q_{n2}^*$$

Из уравнения для энтропии

$$\rho_1 v_{n1} s_1 - \rho_2 v_{n2} s_2 = \Omega$$

1.2.4. Типичные условия для поверхностных плотностей внешних сил, моментов и притоков энергии.

Условия на разрывах для газовых потоков в аэродинамике. Равенство нулю внешних воздействий на скачках является типичным условием, используемым в этих приложениях механики сплошной среды.

Очевидно, что если $\rho \vec{F}, \rho \vec{h}, \rho \vec{F} \cdot \vec{v} + \rho dq^*/dt$ конечны в объеме V , то

$$\vec{R} = 0, \quad \vec{M} = 0, \quad W = 0.$$

В частности так будет обстоять дело, когда внешние массовые силы являются силами тяжести или силами инерции при рассмотрении относительных движений и вообще для любого непрерывного поля массовых сил, в том числе и для действующих на среду пондеромоторных сил, моментов и притоков энергии, обусловленных электромагнитным полем, когда электромагнитное поле непрерывно на поверхности S .

В общем случае

$$\Omega \neq 0.$$

Поверхность характеристик электромагнитного поля. В этом случае величины \vec{R}, W могут быть отличны от нуля:

$$\vec{R} \neq 0, \quad W \neq 0.$$

Разрывы, моделирующие несущие поверхности крыльев, водяные или воздушные винты, создающие тягу. В этих случаях также могут быть отличны от нуля внешние воздействия \vec{R}, W и, может быть \vec{M} .

$$\vec{R} \neq 0, \quad \vec{M} \neq 0, \quad W \neq 0.$$

1.2.5. Общие замечания.

Замечание о втором законе термодинамики. При адиабатических процессах ($dq^{(e)} = 0$) величина Ω когда $\rho_1 v_{n1} = \rho_2 v_{n2} \neq 0$, вообще говоря отлична от нуля. Так как ввиду необратимости $dq' \geq 0$, то

$$\Omega = \rho_1 v_{n1}(s_1 - s_2) \geq 0$$

При адиабатических процессах это равенство можно рассматривать как определение величины Ω , которая для реально осуществимых процессов должна быть неотрицательной.

О распаде произвольного разрыва. Установленные соотношения при заданных или найденных из решения задач значениях скачков всех входящих в них величин могут служить для вычисления внешних воздействий \vec{R}, \vec{M}, W .

При

$$\vec{R} = 0, \quad \vec{M} = 0, \quad W = 0$$

полученные условия показывают, что скачки различных характеристик движения и состояния не могут быть произвольными.

Если задать начальные данные произвольно, так что соотношения на скачках могут не выполняться, то в следующие моменты времени данный разрыв не может существовать, произойдет распад начального разрыва, вообще на несколько разрывов, среди которых могут быть сильные и слабые разрывы.

Аналогичное положение возникает при столкновении нескольких разрывов.

О неустойчивости разрывов. На некоторых сильных разрывах могут выполняться все установленные условия и, в том числе, условия связанные с ростом энтропии. Тем не менее существуют разрывы, которые не могут реализоваться из-за их неустойчивости, обусловленной видом скачка и свойствами системы дифференциальных уравнений, описывающих непрерывное движение по обеим сторонам от скачка.

Дополнительные соотношения физической природы. Нужно иметь ввиду, что при исследовании физически допустимых разрывов (устойчивых и удовлетворяющим универсальным условиям механики и термодинамики) для обеспечения единственности и соответствия действительности искомых решений в некоторых задачах требуется устанавливать на скачках дополнительные соотношения физической природы.

О граничных условиях. Установленные условия на скачках могут служить источником получения граничных условий для решения дифференциальных уравнений в области непрерывных движений среды.

В ряде случаев можно задать свойства, движение и состояние частиц среды с одной стороны поверхности разрыва, тогда соответствующие характеристики с другой стороны должны удовлетворять найденным соотношениям.

В частности таким путем можно получить граничные условия на свободных границах жидкости, на границах твердых тел и т.п.

1.2.6. Условия на поверхностях разрыва в произвольной системе координат

При неустановившихся движениях в разных системах координат поверхности разрыва могут иметь различные по величине и по направлению скорости \vec{D} . Дадим вид соотношений на скачках в любой системе отсчета, не связанной с движением каких-либо точек поверхности разрыва.

Для этого достаточно заменить вектор скорости \vec{v}^* движения относительно системы K^* вектором скорости $\vec{v} = \vec{v}^* + \vec{D}$ ($\vec{v}^* = \vec{v} - \vec{D}$) относительно фиксированной системы координат K .

Скорости $(D - v_{n1})$, $(D - v_{n2})$ можно рассматривать как **скорости поверхности разрыва относительно частиц среды на различных сторонах разрыва**.

Соответствующие условия после использования уравнения сохранения массы и уравнения импульсов можно написать в форме

$$\rho_1(D - v_{n1}) = \rho_2(D - v_{n2}), \quad \vec{R} + \vec{p}_{n1} + \rho_1 \vec{v}_1 (D - v_{n1}) = \vec{p}_{n2} + \rho_2 \vec{v}_2 (D - v_{n2}),$$

$$W_1 + \vec{p}_{n1} \cdot \vec{v}_1 + \rho_1(D - v_{n1}) \left(u_1 + \frac{v_1^2}{2} \right) - q_{n1}^* = \vec{p}_{n2} \cdot \vec{v}_2 + \rho_2(D - v_{n2}) \left(u_2 + \frac{v_2^2}{2} \right) - q_{n2}^*,$$

$$\rho_1(v_{n1} - D)(s_1 - s_2) = \Omega$$

Здесь $W_1 = W(\vec{v}^*) + \vec{R} \cdot \vec{D}$.

Выписанные соотношения на скачках верны в любой системе координат (инерциальной или инерциальной) и во всех точках поверхности разрыва.

Условия для моментов не выписаны, потому что в дальнейшем рассматриваются только такие модели, для которых

$$\vec{M} = \vec{Q}_n = \vec{k} = 0$$

во всех точках области движения.

1.2.7. Тангенциальный и контактный разрыв.

Тангенциальный или касательный разрыв. Если $(D - v_{n1}) = (D - v_{n2}) = 0$, то частицы среды не переходят с одной стороны разрыва на другую, а $v_{n1} = v_{n2}$. В этом случае, вообще говоря, возможен разрыв касательной составляющей скорости на различных сторонах разрыва ($v_{\tau 1} \neq v_{\tau 2}$) и произвольный разрыв плотностей ($\rho_1 \neq \rho_2$). Такой разрыв называется тангенциальным или касательным.

Остальные условия для тангенциального разрыва будут

$$\vec{R} = \vec{p}_{n2} - \vec{p}_{n1}, \quad W_1 = q_{n1}^* - q_{n2}^* - \vec{p}_{n1} \cdot \vec{v}_1 + \vec{p}_{n2} \cdot \vec{v}_2, \quad \Omega = 0.$$

Следовательно при $\vec{R} = 0$ напряжения на площадке касательного разрыва непрерывны, а работа сил напряжения на разности касательных (по отношению к разрыву) скоростей при $W_1 = 0$ равна разности потоков энергии q^* через разрыв.

Тангенциальный разрыв в идеальной жидкости. Для идеальной жидкости условия на тангенциальном разрыве при $\vec{R} = 0$, $W_1 = 0$ сводятся к непрерывности давления и нормальной компоненты вектора потока энергии на поверхности разрыва, например, на поверхности контакта двух разных тел.

Контактный разрыв. Частным случаем тангенциальных разрывов являются разрывы, в которых скорость непрерывна и испытывает скачок только плотность (а с ней и другие термодинамические величины за исключением давления). Такие разрывы называются **контактными**.

1.2.8. Скачки уплотнения и разрежения.

Если $v_{n1} \neq v_{n2}$, то частицы среды переходят с одной стороны поверхности S на другую, изменяя свои характеристики состояния и движения скачком (ударом).

Разность $(v_{n2} - v_{n1}) \neq 0$ не зависит от выбора системы отсчета и от способа нумерации разных сторон S , так как перемена нумерации меняет направление нормали, переставляет нормальные составляющие скорости и меняет их знаки.

Установим нумерацию сторон поверхности S таким образом, чтобы среда переходила через S со стороны 1 на сторону 2. Если воспользоваться системой отсчета в которой $\vec{v}_1 = 0$, то очевидно что в такой системе координат $D_n = D > 0$. При этом способе рассмотрения получим, что поверхность S распространяется в покоящейся среде, отмеченной индексом 1. Закон сохранения массы в этой системе координат запишется в виде

$$\rho_1 D = \rho_2(D - v_{n2})$$

Скачки уплотнения. Если

$$v_{n2} - v_{n1} > 0,$$

то в этой системе отсчета

$$v_{n2} > 0$$

и среда за скачком S набегает на покоящуюся среду перед скачком. Из закона сохранения массы следует

$$\rho_2 > \rho_1$$

то есть плотность за скачком возрастает. Такие скачки называются скачками уплотнения.

Скачки разрежения. Если

$$v_{n2} - v_{n1} < 0,$$

то в этой системе отсчета

$$v_{n2} < 0,$$

и нормальная по отношению к S составляющая скорости среды за скачком направлена в сторону обратную скорости распространения скачка в неподвижной среде. Поэтому в среде наступает разрежение ($\rho_2 < \rho_1$). Такие скачки называются скачками разрежения.

1.2.9. Соотношения на разрывах в идеальном газе.

Рассмотрим более подробно соотношения на разрывах в идеальном сжимаемом газе ($\vec{p}_n = -p\vec{n}$).

Для идеальной среды при $R = 0$ соотношение для уравнения импульсов дает

$$\vec{v}_{\tau 1} = \vec{v}_{\tau 2}.$$

Здесь $\vec{v}_{\tau 1}$ и $\vec{v}_{\tau 2}$ – векторные составляющие вектора скорости \vec{v} , параллельные касательной плоскости к S в точке M .

Можно поэтому выбрать систему координат, в которой рассматриваемый элемент поверхности разрыва поконится, а тангенциальная компонента скорости газа по обе стороны поверхности разрыва равна нулю. В такой системе координат соотношения на скачках запишутся

$$\rho_1 v_{n1} = \rho_2 v_{n2} = j, \quad p_1 + \rho_1 v_{n1}^2 = p_2 + \rho_2 v_{n2}^2, \quad \rho_1 v_{n1}(s_1 - s_2) = \Omega$$

$$u_1 + \frac{v_{n1}^2}{2} + \frac{p_1}{\rho_1} = u_2 + \frac{v_{n2}^2}{2} + \frac{p_2}{\rho_2} \quad \text{или} \quad h_1 + \frac{v_{n1}^2}{2} = h_2 + \frac{v_{n2}^2}{2}, \quad \text{или} \quad H_1 = H_2$$

где H – полная энталпия, а h – термодинамическая энталпия.

1.2.10. Ударная адиабата или адиабата Гюгонио.

Введем удельные объемы $V_1 = \frac{1}{\rho_1}$, $V_2 = \frac{1}{\rho_2}$. Тогда

$$v_{n1} = jV_1, v_{n2} = jV_2$$

и следовательно

$$p_1 + j^2 V_1 = p_2 + j^2 V_2$$

Откуда

$$j^2 = \frac{p_2 - p_1}{V_1 - V_2}, j = \sqrt{\frac{p_2 - p_1}{V_1 - V_2}}$$

Для разности скоростей

$$v_{n1} - v_{n2} = j(V_1 - V_2),$$

получим

$$v_{n1} - v_{n2} = \sqrt{(p_2 - p_1)(V_1 - V_2)}$$

Кроме того энергетическое соотношение дает

$$h_1 + \frac{j^2 V_1^2}{2} = h_2 + \frac{j^2 V_2^2}{2}$$

Подставляя j^2 получим соотношение для термодинамической энтропии

$$h_1 - h_2 + \frac{1}{2}(V_1 + V_2)(p_2 - p_1) = 0$$

и для внутренней энергии $u = h - pV$

$$u_1 - u_2 + \frac{1}{2}(V_1 - V_2)(p_1 + p_2) = 0$$

Эти соотношения определяют связь между термодинамическими величинами по обе стороны разрыва.

Для однородной идеальной материальной среды внутренняя энергия является функцией удельного объема V (плотности ρ), давления p и некоторых других параметров, задающих физические и химические свойства среды. Физическими параметрами могут быть векторы поляризации и намагничивания. Эти параметры могут измениться скачком при переходе через поверхность разрыва.

Например, для совершенного газа имеем

$$u = c_v T + u_0 = \frac{c_V}{c_p - c_V} \frac{p}{\rho} + u_0.$$

При переходе через скачок состав газа может меняться, и поэтому c_p, c_V, u_0 могут претерпевать скачок.

Таким образом, при заданных p_1, V_1 – последние уравнения определяют зависимость между p_2 и V_2 . Об этой зависимости говорят как об ударной адиабате или адиабате Гюгонио. Адиабата Гюгонио не содержит скоростей, выполняется в любой системе отсчета и удобно для изучения изменения плотности и давления части, проходящих через скачок. Если скачок плотности задан, то в ряде важных случаях с помощью адиабаты Гюгонио можно определить скачок давления. После этого определяются соответствующие скорости.

Графически она изображается в плоскости (p, V) кривой проходящей через заданную точку p_1, V_1 , отвечающую состоянию газа 1 перед ударной волной.

1.2.11. О существовании только скачков уплотнения.

Поскольку $j^2 > 0$, то должно быть одновременно

$$p_2 > p_1, V_1 > V_2, \quad \text{или} \quad p_2 < p_1, V_1 < V_2$$

Покажем, что в действительности возможен лишь первый случай – скачки уплотнения.

Ударные волны слабой интенсивности. Будем считать, что все величины испытывают в ударной волне лишь слабый скачок. Преобразуем соотношение выраждающее ударную адиабату производя разложения по малым разностям давления и энтропии.

В этом случае имеем

$$h_2 - h_1 = \left(\frac{\partial h}{\partial s} \right)_p (s_2 - s_1) + \left(\frac{\partial h}{\partial p} \right)_s (p_2 - p_1) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 h}{\partial p^2} \right)_s (p_2 - p_1)^2 + \frac{1}{6} \left(\frac{\partial^3 h}{\partial p^3} \right)_s (p_2 - p_1)^3 + \dots$$

Так как

$$dh = Tds + Vdp$$

то

$$\left(\frac{\partial h}{\partial s} \right)_p = T, \quad \left(\frac{\partial h}{\partial p} \right)_s = V$$

Поэтому

$$h_2 - h_1 = T_1(s_2 - s_1) + V_1(p_2 - p_1) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V}{\partial p} \right)_s (p_2 - p_1)^2 + \frac{1}{6} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial p^2} \right)_s (p_2 - p_1)^3 + \dots$$

Разложим объем

$$V_2 - V_1 = \left(\frac{\partial V}{\partial p} \right)_s (p_2 - p_1) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial p^2} \right)_s (p_2 - p_1)^2 + \dots$$

Объем V достаточно разложить только по $(p_2 - p_1)$ поскольку во втором члене адиабаты Гюгонио уже имеется малая разность $(p_2 - p_1)$ и разложение по $s_2 - s_1$ дало бы член порядка $(s_2 - s_1)(p_2 - p_1)$ не интересующий нас.

Подставляя эти разложения в адиабату Гюгонио получим

$$s_2 - s_1 = \frac{1}{12T_1} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial p^2} \right)_s (p_2 - p_1)^3 + \dots$$

Таким образом скачок энтропии в ударной волне слабой интенсивности является малой величиной третьего порядка по сравнению со скачком давления.

Адиабатическая сжимаемость вещества

$$-\left(\frac{\partial V}{\partial p} \right)_s$$

практически всегда падает с увеличением давления, т.е вторая производная

$$\left(\frac{\partial^2 V}{\partial p^2} \right)_s > 0$$

Подчеркнем, однако, что это неравенство не является термодинамическим соотношением и, в принципе возможны его нарушения.

При предположении положительности этой производной для ударных волн слабой интенсивности условие возрастания энтропии с необходимостью приводит к неравенствам

$$p_2 > p_1, \quad V_2 < V_1, \quad (\rho_2 > \rho_1), \quad v_1 > v_2$$

Эти неравенства означают, что при переходе газа через ударную волну происходит его сжатие – его давление и плотность возрастают.

Можно показать, что при таком предположении о знаке производной эти неравенства справедливы и для ударных волн любой интенсивности.

Этот вывод существенно связан с принятыми допущениями, во – первых с неравенством

$$\left(\frac{\partial^2 V}{\partial p^2} \right)_s > 0,$$

и, во – вторых с условием

$$h_1(p, \rho) = h_2(p, \rho) \quad \text{или} \quad u_1(p, \rho) = u_2(p, \rho)$$

Предполагается, что эти функции являются одними и теми же по разные стороны от разрыва.

Скачки разрежения осуществимы. Если после перехода частиц газа через скачок химические или физические свойства газовой смеси изменяются так, что второе из этих условий не удовлетворяется, то появляется возможность реализации в действительных движениях скачков разрежения. Примерами таких осуществляющихся в действительности скачков разрежения могут служить фронты горения.

1.2.12. Адиабата Пуассона.

В непрерывных адиабатических движениях при изменении состояний частицы энтропия сохраняется, т.е.

$$s_2(p, V) - s_1(p_1, V_1) = 0$$

Это уравнение определяет связь между p и V при фиксированных p_1 и V_1 и называется **адиабата Пуассона**. На основании полученного выше соотношения при малой интенсивности скачка для адиабаты Гюгонио имеем

$$V - V_1 = f(p - p_1, s = \text{const}) + k(p - p_1)^3 + \dots$$

Здесь коэффициент k зависит только от V_1 и p_1 . Вблизи точки V_1 и p_1 ударная адиабата и адиабата Пуассона одинаковые кривые. Они имеют одинаковые касательные и одинаковые кривизны.

$$\left(\frac{dV}{dp} \right)_G = \left(\frac{dV}{dp} \right)_P = \left(\frac{\partial V}{\partial p} \right)_s$$

$$\left(\frac{d^2V}{dp^2} \right)_G = \left(\frac{d^2V}{dp^2} \right)_P = \left(\frac{\partial^2 V}{\partial p^2} \right)_s$$

Если ввести систему отсчета K в которой скорость перед скачком равна нулю, а $D_n = D > 0$, то можно показать, что в этой системе отсчета

$$D = V_1 \sqrt{\frac{p_2 - p_1}{V_1 - V_2}}.$$

Для слабых скачков при $p_2 \rightarrow p_1$ и $V_2 \rightarrow V_1$ верны равенства

$$D^2 = -V^2 \left(\frac{dp}{dV} \right)_G = \left(\frac{dp}{dp} \right)_G = \left(\frac{dp}{dp} \right)_P = \left(\frac{\partial V}{\partial p} \right)_s = a^2.$$

Величина a называется скоростью звука, и видно, что **бесконечно малые возмущения распространяются по частицам со скоростью звука**.

1.3. Слабые разрывы.

Наряду с поверхностями разрыва, на которых испытывают скачок сами функции \vec{v}, ρ, p, \dots могут существовать также и такие поверхности, на которых эти величины обладают какими-либо особенностями, оставаясь сами непрерывными. Эти особенности могут быть самого разнообразного характера. Так, на поверхности разрыва могут испытывать скачок первые производные по координатам или же эти производные могут обращаться в бесконечность. То же самое может иметь место для производных более высоких порядков. Все такие поверхности называются **поверхностями слабого разрыва**.

Отметим, что ввиду непрерывности самих этих величин на поверхности слабого разрыва непрерывны также их и тангенциальные производные; разрыв непрерывности испытывают лишь нормальные к поверхности производные.

Легко убедиться простыми рассуждениями, что **поверхности слабого разрыва распространяются относительно среды со скоростью, равной скорости звука**.

Можно также показать, что **поверхность слабого разрыва совпадает с одной из характеристических поверхностей**, так как физический смысл характеристических поверхностей—поверхности распространения малых возмущений.

Слабые разрывы не могут возникать сами по себе. Их появление связано с какими-либо особенностями в граничных или начальных условиях движения.

(Наличие углов на поверхности обтекаемого тела. Скачок кривизны поверхности тела без угла на нем. Всякая особенность в изменении движения со временем влечет за собой возникновение нестационарного слабого разрыва).

При стационарном движении газа слабые разрывы могут появляться только при скоростях равных или превышающих скорость звука.

1. Упругое тело.

- План:
1. Упругое тело. Определение. Замечание об используемых системах координат.
 2. Закон Гука.
 3. Уравнения движения в перемещениях для упругого тела в случае малых деформаций – Уравнения Ламе. Случаи замкнутых систем уравнений.
 4. Основные уравнения теории упругости. Уравнения состояния.
 5. О потенциале напряжений.
 6. Закон Гука с учетом температурных напряжений.
 7. О постановке задач теории упругости.
 8. Суперпозиция решений.
 9. Уравнение Клайперона.
 10. Теорема о единственности решения статических задач теории упругости.
 11. Принцип Сен – Венана.

1.1. Определение.

Упругие и пластические деформации. Если по прекращению действия вызвавших деформацию внешних сил тело возвращается в исходное недеформированное состояние, то такие деформации называют **упругими**. Как следует из опыта, обычно так бывает при достаточно малых деформациях (*Пример: мяч*).

При больших деформациях прекращение действия внешних сил не приводит к полному исчезновению деформации, – остается, как говорят некоторые **остаточная деформация**, так что состояние тела отличается от того, в каком оно находилось до приложения к нему сил. Такие деформации называются **пластическими** (*Пример: пластилин*).

На этой лекции мы будем рассматривать упругие деформации.

Упругим телом называется среда, в которой

- компоненты тензора напряжений в каждой частице являются **функциями компонент тензора деформаций** ε_{kl} , компонент метрического тензора g^{mn} , температуры T и, возможно, других параметров физико–химической природы χ_n :

$$p^{ij} = f^{ij}(\varepsilon_{kl}, g^{mn}, T, \chi_1, \dots, \chi_n)$$

Характерным свойством модели упругого тела является предположение о независимости метрики начального пространства от времени.

- Вторым главным признаком по которому теория упругости выделяется из других теорий деформируемых твердых тел (теории пластичности, теории ползучести), является тот, что непрерывные процессы деформирования упругих тел являются **обратимыми**.

При этом, предполагается, что процесс деформирования совершается настолько медленно, что в каждый момент времени в теле успевает установится состояние термодинамического равновесия, соответствующее тем внешним условиям, в которых тело в данный момент времени находится. Таким образом принимается, что для малых частиц упругого тела **можно ввести температуру**.

Замечание об используемых системах координат. В задачах теории упругости, как правило, требуется найти смещение индивидуальных частиц среды, например изменение внешних границ "твёрдого тела". Поэтому в задачах теории упругости обычно используют точку зрения Лагранжа и лагранжеву систему координат. Вообще можно применять начальную и актуальную лагранжевы системы координат.

Уравнения составляются для состояния среды в определенный актуальный момент времени. Поэтому как уравнения импульсов для сплошной среды, так и получившиеся на их основе уравнения Ламе в компонентах, соответствующих лагранжевой актуальной системе координат, имеют такой же вид как в системе отсчета. Так как начальное и актуальное пространство отличаются метриками из-за деформаций, то при переходе от актуальной системы координат к начальной лагранжевой системе координат уравнения в компонентах изменяют свой вид. Это связано с тем, что формулы перехода не совпадают с обычными формулами преобразования компонент тензоров от одной системы координат к другой в одном и том же пространстве. Однако, если деформации и перемещения малы, то начальная и актуальная системы координат отличаются мало, и с точностью до малых первого порядка можно считать, что уравнения в компонентах в этих системах координат совпадают.

Использование начальной лагранжевой системы координат может оказаться более удобным, чем использование актуальной системы координат, так как при применении актуальной системы координат надо определять еще ее положение по отношению к системе отсчета.

В дальнейшем величины относящиеся к начальному пространству будем помечать индексом ноль сверху.

1.2. Закон Гука.

Нелинейно упругое тело. Конкретный вид функций f^{ij} может быть различным для различных материалов. Будем вначале считать, что температура не меняется. Рассмотрим вначале зависимость f^{ij} от ε_{kl} и g^{mn} . В общем случае имеем нелинейную зависимость и **нелинейно упругое тело**.

Линейно упругое тело. Опыт показывает, что напряжения и деформации во многих твердых телах, например, в металлах при обычных условиях (при не очень больших температурах, напряжениях и деформациях) связаны между собой **законом Гука**.

Он следует из следующих соображений. Предположим, что функции f^{ij} могут быть разложены в ряд Тейлора по ε_{kl} и что в отсутствии напряжений ($p^{ij} = 0$) деформации также отсутствуют ($\varepsilon_{kl} = 0$), и наоборот. Если деформации малы, то в этом разложении в ряд можно сохранить только линейные члены.

$$p^{ij} = A^{ijkl}\varepsilon_{kl}$$

Полученные соотношения называются **обобщенным законом Гука**, а тела, при деформировании которых напряжения и деформации связаны таким образом **линейно упругими телами**.

Из инвариантности относительно выбора системы координат полученного соотношения следует, что A^{ijkl} являются компонентами тензора четвертого ранга. Из свойств симметрии тензоров напряжений и деформаций следует, что независимых компонент A^{ijkl} всего 36.

Для **изотропных и гиротропных тел** только две компоненты являются независимыми. Поэтому закон Гука для изотропной среды может быть записан в виде

$$p^{ij} = \lambda_1 I_1(\varepsilon) g^{ij} + 2\mu_1 \varepsilon^{ij} = \lambda_1 I_1(\varepsilon) g^{ij} + 2\mu_1 g^{ik} g^{jl} \varepsilon_{kl}$$

В декартовой системе координат закон Гука запишется

$$p_{ij} = \lambda_1 \varepsilon_{kk} + 2\mu_1 \varepsilon_{ij}$$

Вместо коэффициентов Ламе λ_1 и μ в теории упругости принято вводить **модуль Юнга**

$$E = \mu_1 \frac{(3\lambda_1 + 2\mu_1)}{(\lambda_1 + \mu_1)}$$

и **коэффициент Пуассона**

$$\sigma = \frac{\lambda_1}{2(\lambda_1 + \mu_1)}$$

При одноосном растяжении эти модули служат коэффициентами в соотношениях

$$p_{11} = E \varepsilon_{11}, \quad p_{22} = p_{33} = -\sigma \varepsilon_{11}$$

1.3. Уравнения движения в перемещениях для упругого тела в случае малых деформаций – Уравнения Ламе.

В случае малых деформаций подставив закон Гука

$$p^{ij} = \lambda_1 I_1(\varepsilon) g^{ij} + 2\mu_1 \varepsilon^{ij}$$

в уравнения движения

$$\rho a^k = \rho F^k + \nabla_i p^{ki}$$

с учетом выражений для тензора деформаций через вектор перемещений

$$\varepsilon^{ij} = \frac{1}{2}(\nabla_j w^i + \nabla_i w^j), \quad I_1(\varepsilon) = \nabla_i w^i$$

где w^i – компоненты вектора перемещения;

получим **уравнения Ламе**

$$\rho \frac{d^2 \vec{w}}{dt^2} = \rho \vec{F} + (\lambda_1 + \mu_1) \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{w} + \mu_1 \Delta \vec{w}$$

Уравнения Ламе получены в предположении, что деформации малы, в частности, мало изменение плотности:

$$\rho = \rho_0 + \rho'_0, \quad \rho' \ll \rho_0$$

Поэтому в этих уравнениях с точностью до малых первого порядка можно писать ρ_0 вместо ρ .

Уравнение неразрывности в теории упругости с малыми деформациями можно не рассматривать. Оно входит для определения ρ' , которое не входит в уравнения Ламе.

В случае, когда малы не только деформации, но и сами перемещения, скорости и ускорения

$$\frac{d^2 \vec{w}}{dt^2} = \frac{\partial^2 \vec{w}}{\partial t^2}$$

и уравнения принимают вид

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \vec{w}}{\partial t^2} = \rho_0 \vec{F} + (\lambda_1 + \mu_1) \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{w} + \mu_1 \Delta \vec{w}$$

1.4. Основные уравнения теории упругости.

Выпишем основные уравнения механики для упругой среды.

В этом случае имеем:

- уравнение неразрывности (уравнение для определения плотности)

$$\rho \sqrt{g} = \rho_0 \sqrt{g^0},$$

- уравнения импульсов

$$\rho a^k = \rho F^k + \nabla_i p^{ki},$$

Будем считать, что метрика начального состояния g_{ij}^0 не зависит от времени, а тензор напряжений симметричен. Тогда

$$e_{ij} = \frac{d\varepsilon_{ij}}{dt},$$

и

- уравнение притока тепла, с учетом второго закона термодинамики будет

$$dU = \frac{p^{ij}}{\rho} d\varepsilon_{ij} + T ds, \quad \text{при } dq^{**} = 0,$$

или для свободной энергии $F = U - Ts$

$$dF = \frac{p^{ij}}{\rho} d\varepsilon_{ij} - s dT, \quad \text{при } dq^{**} = 0,$$

Замечание. При учете усложненного поверхностного или объемного взаимодействия выделенной частицы среды соседними частицами той же среды появляется возможность вводить $dq^{**} \neq 0$ даже при отсутствии взаимодействия данной среды с какими-либо другими внешними объектами. Однако, при основных предположениях теории упругости, перечисленных выше, можно считать $dq^{**} = 0$.

- уравнение моментов в классическом случае сводится к симметрии тензора напряжений

$$p^{ij} = p^{ji}.$$

- Определяя модель упругой среды нужно задать плотность внутренней энергии U или свободную энергию F . Их задание связано с установлением модели, отделением рассматриваемой среды от внешних объектов.

$$U = (s, g_{ij}^0, \varepsilon_{ij}, \chi_i), \quad \text{при} \quad F = (T, g_{ij}^0, \varepsilon_{ij}, \chi_i)$$

Здесь χ_i – некоторые физические переменные, характеризующие физико-химические свойства среды. Например, с их помощью можно задавать свойства симметрии кристаллов и т.п.

Задав внутреннюю энергию U или свободную энергию F используя уравнение притока тепла получим общие **уравнения состояния для упругой среды**.

Действительно,

$$\frac{\partial U}{\partial \varepsilon_{ij}} d\varepsilon_{ij} + \frac{\partial U}{\partial s} ds + \frac{\partial U}{\partial \chi_k} d\chi_k = \frac{p^{ij}}{\rho} d\varepsilon_{ij} + T ds$$

Аналогичное соотношение получается если задана свободная энергия F :

$$\frac{\partial F}{\partial \varepsilon_{ij}} d\varepsilon_{ij} + \frac{\partial F}{\partial T} dT + \frac{\partial F}{\partial \chi_k} d\chi_k = \frac{p^{ij}}{\rho} d\varepsilon_{ij} - s dT.$$

Изменяя систему внешних сил, величину притока тепла, условия на границе и другие внешние условия, можно осуществить бесконечное число различных процессов, в которых для данной малой частицы в данный момент времени величины $g_{ij}^0, \varepsilon_{ij}, s, \chi_i, p^{ij}, T, \rho$ – одни и те же, а приращения $d\varepsilon_{ij}, ds$ или dT и $d\chi_i$ различны. Если существуют система независимых приращений $d\varepsilon_{ij}, ds$ или dT и $d\chi_i$, то при дополнительном условии, что p^{ij} зависят только от $g_{ij}^0, \varepsilon_{ij}, \chi_k, s$ (или и что $dq^{**} = 0$ получим

- уравнения состояния упругой среды.

$$p^{ij} = \rho \left(\frac{\partial U}{\partial \varepsilon_{ij}} \right)_{s, \chi_k}, \quad T = \left(\frac{\partial U}{\partial s} \right)_{\varepsilon_{ij}, \chi_k},$$

$$p^{ij} = \rho \left(\frac{\partial F}{\partial \varepsilon_{ij}} \right)_{T, \chi_k}, \quad s = - \left(\frac{\partial F}{\partial T} \right)_{\varepsilon_{ij}, \chi_k},$$

$$\left(\frac{\partial U}{\partial \chi_k} \right)_{\varepsilon_{ij}, s} = 0, \quad \left(\frac{\partial F}{\partial \chi_k} \right)_{\varepsilon_{ij}, T} = 0$$

Выражения для компонент тензора напряжений здесь представляют собой **соотношения, обобщающие закон Гука на случай учета нелинейных эффектов, влияния температуры и возможного присутствия переменных физических параметров χ_i** .

Полученные соотношения вместе с уравнением неразрывности, уравнениями движения и

- уравнением энергии, которое в данном случае может быть записано в виде

$$dq = \frac{\partial U}{\partial s} ds \quad \text{или} \quad dq = -Td \left(\frac{\partial F}{\partial T} \right)$$

образуют замкнутую систему уравнений для описания различных процессов в упругом теле если

- добавить к ним соотношения, связывающие скорости и деформации с перемещениями.

Для статических задач и задач теории упругости в напряжениях используются **уравнения совместности деформаций**. В случае малых деформаций они будут

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{\nu i}}{\partial \xi^j \partial \xi^\mu} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{\mu j}}{\partial \xi^i \partial \xi^\nu} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{\mu i}}{\partial \xi^j \partial \xi^\nu} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{\nu j}}{\partial \xi^i \partial \xi^\mu} = 0.$$

Замечание. Для адиабатических процессов удобно пользоваться группой соотношений, куда входит внутренняя энергия U . Для изотермических процессов удобнее пользоваться соотношениями, в которые входит свободная энергия F . В этом случае температура известна и постоянна. Соотношение

$$s = - \left(\frac{\partial F}{\partial T} \right)_{\varepsilon_{ij}, \chi_k},$$

служит для вычисления энтропии, а соотношение

$$dq = -Td \left(\frac{\partial F}{\partial T} \right)$$

—для вычисления dq необходимого для поддержания изотермического процесса.

1.5. Потенциал напряжений.

Если деформации бесконечно малы, то уравнения состояния с точностью до малых высшего порядка можно написать в виде

$$p^{ij} = \rho_0 \frac{\partial F}{\partial \varepsilon_{ij}} = \frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon_{ij}},$$

где ρ_0 — начальная плотность, $\Phi = \rho_0 F$ — **свободная энергия единицы объема**.

Следовательно, в случае малых деформаций напряжения имеют потенциал.

Для плотности энтропии s имеем

$$s = - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \Phi}{\partial T}$$

1.6. Постановка задач в теории упругости.

Статические и динамические задачи теории упругости. В статических задачах требуется найти распределение перемещений и напряжений внутри упругого тела, находящегося в равновесии под действием заданной системы внешних сил или других заданных внешних условиях.

В теории упругости рассматриваются и динамические задачи, например, о колебании упругих тел. При постановке динамических задач уравнения равновесия нужно заменить уравнениями движения — добавить силы инерции (заменить $\rho_0 \vec{F}$ на $\rho_0(\vec{F} - \vec{a})$).

Типичные статические задачи.

- I. На всей поверхности тела заданы перемещения, требуется найти перемещения внутри тела и напряжения внутри тела и на границе.
- II. На всей поверхности тела заданы поверхностные силы. Требуется найти напряжения внутри тела и перемещения всех его точек, в том числе и перемещения точек границы.
- III. На части границы заданы перемещения, а на части границы заданы внешние силы.

Отметим, что в задачах упругости поверхность деформируемого твердого тела, вообще говоря, заранее неизвестна и должна быть найдена в процессе решения. Однако, в линейной теории упругости, предполагается, что **деформируемая поверхность мало отличается от недеформируемой поверхности**.

В этом случае считается, что граничные условия должны выполняться на недеформируемой – известной поверхности.

При решении задач теории упругости можно использовать различные эквивалентные системы уравнений. Они представляют собой записанные в разных формах **уравнения импульсов**, **закон Гука** и **уравнения совместности**. К этим уравнениям в случае необходимости добавляется **уравнение неразрывности** и **уравнение притока тепла**.

Постановка задач в перемещениях. Если на границе заданы перемещения, удобно в качестве основных уравнений брать уравнения Ламе. С учетом температурных напряжений эти уравнения можно записать в виде

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \vec{w}}{\partial t^2} = \rho_0 \vec{F} + (\lambda_1 + \mu_1) \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{w} + \mu_1 \Delta \vec{w} - (3\lambda_1 + 2\mu_1) \alpha \operatorname{grad} T$$

Если известны объемные силы и температура как функции координат и на границе заданы перемещения, то из этого уравнения с известными начальными данными можно найти перемещения внутренних точек тела. С помощью закона Гука находятся напряжения. Уравнения совместности деформаций при такой постановке выполняются автоматически, так как формулы выражают деформации через перемещения представляют собой общее решение уравнений совместности.

Постановка задач в напряжениях. В этом случае используются уравнения равновесия в напряжениях:

$$\rho_0 F^i + \nabla_j p^{ij} = 0.$$

Они содержат шесть компонент тензора напряжений и составляют незамкнутую систему.

Статически определимые задачи. В некоторых случаях, например, из симметрии задачи, можно заранее заключить, что в уравнения входят только три независимые компоненты тензора напряжений, а остальные известны или равны нулю. Если на границе известны напряжения \vec{p}_n , то в этом случае можно найти напряжения, пользуясь только уравнениями равновесия.

Такие задачи называются статически определимыми.

В общем случае имеем незамкнутую систему уравнений равновесия.

Уравнения Бельтрами–Мичелла. С помощью закона Гука из уравнений совместности деформаций можно получить дополнительные уравнения – уравнения Бельтрами–Мичелла, которым должны удовлетворять компоненты тензора напряжений.

$$\Delta p_{ij} + \frac{1}{1+\sigma} \nabla_i \nabla_j P + \frac{\sigma}{1-\sigma} \operatorname{div} \rho_0 \vec{F} g_{ij} + \nabla_i \rho_0 F_j + \nabla_j \rho_0 F_i + \frac{\alpha E}{1+\sigma} \nabla_i \nabla_j T + \frac{\alpha E}{1-\sigma} \Delta T g_{ij} = 0$$

Если объемные силы и температура постоянны, то уравнения Бельтрами-Мичела будут

$$\Delta p_{ij} + \frac{1}{1+\sigma} \nabla_i \nabla_j P = 0$$

Здесь первый инвариант тензора напряжений $P = g^{kl} p_{kl}$.

Умножая это уравнение на g^{ij} и суммируя по i и по j получим

$$\Delta P = 0$$

Следовательно

$$\Delta \Delta p_{ij} = 0$$

Таким образом, **каждая из компонент тензора напряжений** в рассматриваемом случае при использовании ортогональных декартовых систем координат является **бигармонической функцией**.

Первый инвариант тензора напряжений является гармонической функцией.

1.7. Суперпозиция решений – решение.

Вследствие того, что в линейной теории упругости уравнения и граничные условия линейны, можно использовать принцип суперпозиции для получения новых решений из ранее найденных.

Пусть имеются два решения: \vec{w}_I, p_I^{ij} и $\vec{w}_{II}, p_{II}^{ij}$, описывающие напряженно – деформированное состояние одного и того же тела при действии на него внешних массовых сил \vec{F}_I и \vec{F}_{II} при следующих условиях на границе тела $\Sigma = \Sigma_1 + \Sigma_2$

$$\bar{p}_I^n = p_1^n \quad \text{на } \Sigma_1, \vec{w}_I = \vec{w}_1 \quad \text{на } \Sigma_2$$

$$\bar{p}_{II}^n = p_2^n \quad \text{на } \Sigma_1, \vec{w}_I = \vec{w}_2 \quad \text{на } \Sigma_2$$

Тогда

$$\vec{w} = \vec{w}_I + \vec{w}_{II}, \quad p^{ij} = p_I^{ij} + p_{II}^{ij}$$

дают решение задачи о перемещениях и напряжениях в этом теле под действием массовых сил

$$\vec{F} = \vec{F}_I + \vec{F}_{II}$$

при заданных поверхностных силах

$$\bar{p}^n = \bar{p}_I^n + \bar{p}_{II}^n$$

на части границы Σ_1 и при заданных перемещениях

$$\vec{w} = \vec{w}_I + \vec{w}_{II}$$

на части границы Σ_2

1.8. Уравнение Клайперона.

Уравнение принципа возможных перемещений. Запишем уравнения равновесия в декартовой системе координат

$$\rho_0 F^i + \frac{\partial p^{ij}}{\partial x^j} = 0$$

Умножим их на соответствующие компоненты вектора перемещений \vec{w}

$$\rho_0 F^i w_i + \frac{\partial p^{ij} w_i}{\partial x^j} - p^{ij} \frac{\partial w_i}{\partial x^j} = 0$$

В случае симметричного тензора напряжений ($p^{ij} = p^{ji}$) последний член этого уравнения можно преобразовать следующим образом

$$p^{ij} \frac{\partial w_i}{\partial x^j} = \frac{1}{2} \left(p^{ij} \frac{\partial w_i}{\partial x^j} + p^{ji} \frac{\partial w_j}{\partial x^i} \right) = p^{ij} \varepsilon_{ij}$$

где

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_i}{\partial x^j} + \frac{\partial w_j}{\partial x^i} \right)$$

Проинтегрировав по всему объему V , воспользовавшись теоремой Гаусса–Остроградского и тем, что

$$p^{ij} w_i n_j d\sigma = (\vec{p}_n)^i w_i d\sigma$$

получим

$$\int_V \rho_0 \vec{F} \cdot \vec{w} d\tau + \int_{\Sigma} \vec{p}_n \cdot \vec{w} d\sigma = \int_V p^{ij} \varepsilon_{ij} d\tau$$

Это равенство, когда \vec{w} – мыслимое бесконечно малое смещение можно рассматривать как уравнение принципа возможных перемещений.

Уравнение Клайперона. Для малых деформаций можно ввести свободную энергию единицы объема $\Phi = \rho_0 F$ так, что

$$p^{ij} = \frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon_{ij}}$$

Тогда имеем уравнение Клайперона

$$\int_V \rho_0 \vec{F} \cdot \vec{w} d\tau + \int_{\Sigma} \vec{p}_n \cdot \vec{w} d\sigma = \int_V \varepsilon_{ij} \frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon_{ij}} d\tau$$

Если тело подчиняется закону Гука, то в случае изотермических процессов Φ можно считать однородной квадратичной формой ε_{ij}

$$\Phi = A^{ijkl} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} + const$$

В случае изотропного тела отбрасывая несущественную постоянную имеем

$$\Phi = \frac{1}{2} \lambda_1 I_1^2 + \mu_1 I_2$$

По теореме об однородных функциях получим

$$\varepsilon_{ij} \frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon_{ij}} = 2\Phi$$

Следовательно, равенство Клайперона можно записать в виде

$$\int_V \rho_0 \vec{F} \cdot \vec{w} d\tau + \int_{\Sigma} \vec{p}_n \cdot \vec{w} d\sigma = 2\Phi$$

где Φ – полная свободная энергия тела в целом.

1.9. Теорема о единственности решения статических задач теории упругости.

При решении многих задач теории упругости, значения неизвестных величин частично подбираются из каких-либо интуитивных или опытных соображений, а частично определяются из основных уравнений. В связи с этим требуется исключить существование других решений. В общем случае единственности решений задач теории упругости нет. Например, стержень под нагрузкой может изогнуться при больших приложенных силах, а при малых нет.

В случае малых относительных перемещений можно доказать теорему о единственности решений задач теории упругости.

Теорема. Решения статических задач теории упругости единственны в случае $T = T_0$ и в предположениях, что среда подчиняется закону Гука, а относительные перемещения однозначны, непрерывны и малы.

Доказательство: Допустим поставленная задача имеет два решения:

$$\vec{w}^I, \varepsilon_{ij}^I, p_{ij}^I$$

и

$$\vec{w}^{II}, \varepsilon_{ij}^{II}, p_{ij}^{II}.$$

Рассмотрим разности

$$\vec{w} = \vec{w}^I - \vec{w}^{II}, \quad \varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^I - \varepsilon_{ij}^{II}, \quad p_{ij} = p_{ij}^I - p_{ij}^{II}.$$

Если первое и второе решения, согласно сделанному допущению о существовании двух решений задачи, соответствуют одинаковым граничным условиям и массовым силам, то введенные разности являются решением, соответствующим заданным нулевым граничным значениям поверхностных сил и перемещений и отсутствию внешних массовых сил. Поэтому применив равенство Клайперона получим

$${}^\vee = \mathbf{0}.$$

В силу положительной определенности квадратичной формы \cdot^\vee в случае изотермических процессов в изотропной среде отсюда следует, что

$$\varepsilon_{ij} = 0,$$

а из закона Гука, что

$$p^{ij} = 0.$$

Если $\varepsilon_{ij} = 0$, то перемещения \vec{w} могут представлять собой только перемещения упругого тела как абсолютно твердого. Если при формулировке задачи используются одни и те же предположения, исключающие такие перемещения, то и $\vec{w} = 0$.

Таким образом

$$\vec{w}^I = \vec{w}^{II}, \quad \varepsilon_{ij}^I = \varepsilon_{ij}^{II}, \quad p_{ij}^I = p_{ij}^{II},$$

и единственность решения задач типа I, II, III доказана.

1.10. Принцип Сен–Венана.

Если в некоторой области внутри или на поверхности тела, малой по сравнению с основными размерами тела, на него действует система массовых или поверхностных сил и тело находится в равновесии, то в областях удаленных от места приложения этих сил, деформированное состояние определяется в основном только главным вектором и главным моментом этих сил и приближенно не зависит от детального характера распределения этих сил. Влияние деталей распределения сил практически сказывается, только в непосредственной окрестности области их приложения.

Принцип Сен–Венана позволяет получать приближенные решения различных задач теории упругости с помощью решения аналогичных задач для частных распределений действующих сил.

Он подтверждается множеством опытных данных и подкреплен многими численными расчетами на частных примерах.

Принцип Сен–Венана вытекает из следующего общего свойства решений задач теории упругости. Если в какой–либо малой части части тела А приложена статически уравновешенная система сил, то она вызывает в нем напряжения очень быстро убывающие по мере удаления от А.

Пример: проволока зажатая в тисках.

1.11. Уравнения состояния несжимаемого упругого материала.

Уравнения состояния получены в предположении, что величины $d\varepsilon_{ij}, ds, d\chi_i$ линейно независимы. Для несжимаемого материала имеется дополнительная связь

$$g^{ij}d\varepsilon_{ij} = 0$$

В этом случае, если ввести множители Лагранжа l и l' получим равенства

$$p^{ij} = -lg^{ij} + \rho \left(\frac{\partial U}{\partial \varepsilon_{ij}} \right)$$

или

$$p^{ij} = -l' g^{ij} + \rho \left(\frac{\partial F}{\partial \varepsilon_{ij}} \right)$$

1.12. Закон Гука с учетом температурных напряжений.

Свободная энергия единицы объема в случае малых относительных смещений и малых изменений температуры. Рассмотрим упругое тело, в котором компоненты тензора деформаций ε_{ij} и относительные смещения w^i малы, а в качестве начального состояния, отвечающего метрике g_{ij}^0 выбрано состояние, которое может быть реально осуществлено, т.е. существуют перемещения из начального состояния в актуальное деформированное состояние.

Пусть лагранжева система координат ξ^i в начальном состоянии выбрана совпадающей с системой отсчета. Тогда координаты x^i точек среды в деформированном состоянии представляются в виде

$$x^i = \xi^i + \Delta^i(\xi^k, t)$$

причем $\Delta^i, \frac{\partial \Delta^i}{\partial \xi^k}$ малы так как относительные смещения малы. В этом случае компоненты всех тензоров в лагранжевой системе координат и в системе отсчета отличаются на малые высшего порядка по сравнению с величиной самих компонент.

Если

$$\varepsilon_{ij} \ll 1, \quad T = T_0 + \Delta T, \quad \Delta T \ll T_0$$

то разлагая свободную энергию единицы объема функцию Φ в ряд до членов второго порядка получим

$$\begin{aligned} \Phi = \Phi_0 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon_{ij}} \right)_0 \varepsilon_{ij} + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial T} \right)_0 (T - T_0) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \varepsilon_{kl}} \right)_0 \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} + \\ \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varepsilon_{ij} \partial T} \right)_0 \varepsilon_{ij} (T - T_0) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial T^2} \right)_0 (T - T_0)^2 + \dots \end{aligned}$$

Если начальное состояние выбрано так, что в этом состоянии напряжения равны нулю $p^{ij} = 0$, при $\varepsilon_{ij} = 0$, и $T = T_0$, то

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon_{ij}} \right)_0 = 0$$

Кроме того,

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial T} \right)_0 = -\rho_0 s_0$$

Обозначим

$$A^{ijkl} = \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \varepsilon_{kl}} \right)_0, \quad B^{ij} = \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varepsilon_{ij} \partial T} \right)_0, \quad c = \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial T^2} \right)_0$$

Оставляя малые второго порядка получим следующие выражения для свободной энергии

$$\Phi = \Phi_0 - \rho_0 s_0 (T - T_0) + \frac{1}{2} A^{ijkl} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} + B^{ij} \varepsilon_{ij} (T - T_0) - \rho_0 \frac{c}{2T_0} (T - T_0)^2 + \dots$$

Чтобы задать конкретную модель термоупругого тела с малыми ε_{ij} и ΔT нужно задать численные значения констант A^{ijkl}, B^{ij} и c .

Из определения A^{ijkl} видно, что эти величины симметричны по i, j и по k, l , а также не меняются при замене i, j на k, l . Поэтому число различных A^{ijkl} не может быть больше 21.

Величины B^{ij} также симметричны, их максимальное число равно 6.

Следовательно в линейной термоэластике произвольное анизотропное тело характеризуется 28 константами A^{ijkl}, B^{ij}, c .

В случае изотропного упругого тела для получения более конкретного вида свободной энергии можно воспользоваться тем, что функция Φ может зависеть только от инвариантов тензора деформаций. Вводя подходящие обозначения для инвариантов ее можно представить в виде

$$\Phi = \frac{1}{2} \lambda_1 I_1^2 + \mu_1 I_2 - (3\lambda_1 + 2\mu_1)\alpha I_1(T - T_0) - f(T), \quad I_2 = \varepsilon_{ij}\varepsilon^{ij}$$

Закон Гука с учетом температурных напряжений. Таким образом имеем

$$p^{ij} = \frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon_{ij}} = \lambda_1 I_1 g^{ij} + 2\mu_1 \varepsilon^{ij} - (3\lambda_1 + 2\mu_1)\alpha(T - T_0)g^{ij}$$

Для плотности энтропии s имеем

$$s = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \Phi}{\partial T} = \frac{1}{\rho_0} (3\lambda_1 + 2\mu_1)\alpha I_1(T - T_0) + \frac{1}{\rho_0} f'(T)$$

Выражающие закон Гука формулы легко разрешаются относительно компонент тензора деформаций

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{E} [(1 + \sigma)p_{ij} - \sigma P g_{ij}] + \alpha(T - T_0)g_{ij}$$

где $P = p^{ij}g_{ij}$ – первый инвариант тензора напряжений, E – модуль Юнга, σ – коэффициент Пуассона.

Если напряжения равны нулю ($p^{ij} = 0$), то из этих соотношений видно, что деформации ε_{ij} могут быть отличны от нуля за счет изменения температуры.

В этом случае тензор деформаций получается шаровым и в декартовых координатах будем иметь

$$\varepsilon_{11} = \alpha(T - T_0), \quad \varepsilon_{22} = \alpha(T - T_0), \quad \varepsilon_{33} = \alpha(T - T_0), \quad \varepsilon_{ij} = 0 \quad \text{при } i \neq j$$

Следовательно, коэффициент α представляет собой **коэффициент линейного расширения материала**.

1. Теория пластичности

- План:
1. Основные положения.
 2. Идеализированные диаграммы пластического поведения.
 3. Пространство напряжений. Тензоры пластических и полных деформаций.
 4. Условия пластичности.
 5. Критерии Треска и Мизеса.
 6. Изотропное и кинематическое упрочнение. Энергетическая и деформационная гипотезы упрочнения.
 7. Соотношения между напряжениями и деформациями в пластическом состоянии. Пластический потенциал.
 8. Работа на пластических деформациях. Принцип минимума работы на пластических деформациях.
 9. О деформационной теории пластичности.
 10. О постановке задач упругопластичности.
 11. Термодинамические соотношения. Уравнение притока тепла и второй закон термодинамики.

1.1. Введение.

Напомним что упругие деформации обладают свойством полного восстановления недеформированного состояния после снятия приложенных нагрузок. Кроме того, упругие деформации зависят только от величина напряжений и не зависят от истории деформирования или нагружения.

Любая деформация, не удовлетворяющая определяющим законам классической теории упругости, рассматривается как **неупругая деформация**.

В частности, необратимые смещения, которые *получаются в результате скольжения или дислокаций на атомном уровне* и приводящие к остаточным деформациям называются **пластическими деформациями**. Изучение пластических деформаций с микроскопической точки зрения относится к физике твердого тела. Пластические деформации, в отличие от вязких и упругих, появляются только в том случае, когда напряжения переходят некоторый предел, который называется **пределом упругости или пределом текучести**. При достаточно малых деформациях материал ведет себя как упругий (или как жесткий, если упругими деформациями пренебрегают).

1.2. Идеализированные диаграммы пластического поведения.

Многие основные понятия теории пластичности можно ввести непосредственно, рассматривая диаграммы зависимости напряжений от деформаций при испытании некоторого гипотетического материала на простое одноосное растяжение (сжатие).

Одна из таких диаграмм представлена на рис.

Здесь σ – условное напряжение (сила, деленная на начальную площадь сечения), а величина деформации определяется формулой

$$\varepsilon = \frac{(L - L_0)}{L_0},$$

где L – текущая длина образца, а L_0 – его начальная длина.

1.2.1. Основные понятия.

Предел текучести или предел упругости – точка P , соответствующая предельному напряжению σ_p , **разделяет** кривую напряжение – деформация **на упругую и пластическую области**.

Предел упругости разные авторы определяют по разному. Иногда он берется как предел пропорциональности и лежит в верхнем конце линейной части кривой. Иногда за него принимается точка J , которая называется пределом текучести Джонсона и представляет собой точку, где наклон кривой достигает 50% от своего первоначального значения. В одном из способов за предел текучести принимают такое значение напряжения, которое дает 0.2% остаточной деформации.

Упругая область. Важно то, что в упругой области, которая может быть как линейной, так и нелинейной, увеличение нагрузки заставляет точку, изображающую напряженно – деформированное состояние, двигаться вверх по кривой, а уменьшение нагрузки ведет к движению точки вниз по тому же самому пути.

Таким образом, в упругой области существует **взаимно однозначное соответствие между напряжениями и деформацией**.

Пластическая область. В пластической области дело обстоит иначе. При разгрузке от некоторого состояния, например B , точка, изображающая состояние, следует по пути BC , практически параллельному линейной упругой части кривой. В точке C , где напряжение достигает нуля, обнаруживается **остаточная пластическая деформация** ε^p . Символом ε^e обозначим восстановленную упругую деформацию, соответствующую точке B .

При повторной нагрузке точка, движется из C обратно к B по пути очень близкому BC , но не попадает точно в B , из – за потери энергии в цикле разгрузка – нагрузка. Образуется **петля гистерезиса**.

Пластические деформации не определяются однозначно значениями напряжений. (См. рис.). Одному и тому же значению напряжения σ может соответствовать бесчисленное множество значений деформации ε . Если при нагружении образца был момент, когда внешняя нагрузка превысила предел упругости, то значение деформации, соответствующее данному значению напряжению, зависит от того, как было достигнуто это значение напряжения. Итак, ясно, что **в пластической области напряжение зависит от всей истории нагружения или деформирования среды**.

1.2.2. Некоторые явления, связанные с деформацией материалов.

Упрочнение материала. После возвращения к точке B требуется увеличение нагрузки, чтобы вызвать дальнейшую деформацию. Это явление связано со свойством упрочнения материала.

Суть этого явления состоит в следующем. После перехода материала в пластическую область, материал ведет себя как упругое тело (нагрузка и разгрузка идут по одной и той же кривой). Поэтому можно говорить, что точка B также играет роль предела упругости для материала полученного из исходного с помощью пластического деформирования. Для многих материалов $\sigma_B > \sigma_p$, по крайней мере для некоторых участков диаграммы. Такие участки называют **участками упрочнения материала**.

Для некоторых материалов на диаграмме напряжение – деформация существует горизонтальный участок, называемый **площадкой текучести**. При деформировании соответствующему этому участку упрочнения не происходит.

Эффект Баушингера. Диаграмма напряжение – деформация, изображенная на этом рисунке имеет кривой растяжения. Кривая сжатия для недеформированного предварительно образца (при отсутствии истории пластического деформирования) обычно представляет собой отражение кривой растяжения относительно начала координат: $\sigma(\varepsilon) = -\sigma(-\varepsilon)$. Однако, имеются среды, например, горные породы, для которых такая симметрия отсутствует (см. рис.).

Пусть пределу упругости на диаграмме сжатия при первоначальном нагружении соответствует точка P_1 . После растяжения до точки B с последующей разгрузкой и сжатием предел упругости материала на сжатие на участке упругих деформаций BB_2 может соответствовать B_2 . Величины предельных значений напряжений σ в точках B_1 и B_2 могут быть, вообще говоря, разными.

Таким образом, если изменение напряжения на обратное (растяжения на сжатие или наоборот) производится для материала, уже находящегося в пластическом состоянии, то наблюдается определенное уменьшение предела упругости при втором типе нагрузки. Это явление называется **эффектом Баушингера**. Седов Л.И.: **Эффект изменения предела упругости на сжатие после предварительного растяжения за предел упругости называется эффектом Баушингера**.

Ползучесть. Пусть имеется некоторый стержень (рис.) верхний конец которого закреплен, а к нижнему приложенна постоянная сила \vec{F} . Если стержень надолго оставить в таком состоянии, то, как показывает опыт, относительное удлинение стержня будет расти с течением времени. Если в некоторый момент времени нагрузку снять, то образовавшиеся деформации не пропадут. Это явление, которое наблюдается при любой, даже малой величине силы \vec{F} , называется ползучестью.

Релаксация напряжений. Если растянутый стержень, в поперечных сечениях которого действуют напряжения σ закрепить на обеих его концах (т.е. зафиксировать деформацию), то, как показывает опыт с течением времени напряжение в стержне будут падать, для одних материалов до некоторого конечного значения, для других материалов – до нуля. При релаксации имеющаяся первоначально упругая деформация за счет ползучести частично или полностью превращается в пластическую, для поддержания (сохранения) которой не требуется прикладывать силу, это и вызывает уменьшение напряжений.

Усталость материалов. Опыт показывает, что образец под действием периодически изменяющейся нагрузки, приложенной на его свободном конце, может разрушаться после достаточно большого, но все же конечного числа колебаний, даже если максимальные напряжения не превосходят предела упругости.

1.2.3. Модели пластических сред.

Имеют место два основных типа моделей пластических сред:

1. Модели идеальных упруго – пластических или жестко–пластических сред, в которых не учитывается упрочнение и эффект Баушингера. При отсутствии упрочнения деформации называются идеально пластическими.

На нижеследующем рисунке упругая область и явление упрочнения полностью отсутствуют.

На втором рисунке существует упругая зона, предшествующая пределу текучести, а упрочнения нет:

Такие представления полезны при изучении ограниченных пластических деформаций, когда большие деформации запрещены.

Модели пластических тел в которых учитывается упрочнение. На приведенном рисунке имеется упругая зона, а упрочнение предполагается линейным. Эта модель широко используется при изучении неограниченного внешними условиями пластического течения.

Замечания. 1. Термин **пластическое течение** широко используется для обозначения процесса пластического деформирования. Однако в отличие от течения жидкости, при котором предполагается движение частиц сплошной среды, понятие пластического течения относится к непрерывному изменению суммарной деформации, а скорость представляет собой скорость деформации. В самом деле, твердое тело в состоянии пластичности может испытывать касательные напряжения оставаясь в покое.

2. Хотя температура оказывает существенное влияние на пластическое поведение реального материала, в теории пластичности часто принимается, что процессы протекают изотермически и **температуру считают просто параметром**.

3. Точно также в теории пластичности обычно пренебрегают влиянием скорости нагружения на диаграмму напряжение – деформации. В соответствии с этим **пластические деформации считаются не зависящими от времени и изучаются отдельно от таких явлений как ползучесть и релаксация**.

1.3. Трехмерные пластические течения.

Многие из трехмерных течений, изучающих пластическое поведение, можно рассматривать как некоторое обобщение ряда идеализированных одномерных диаграмм зависимости напряжения от деформации. Основные проблемы теории пластичности состоят 1) в установлении количественных критериев начала наступления пластичности и 2) в математической формулировке соотношений между напряжениями и деформациями, соответствующих феноменологическому описанию пластических деформаций.

1.3.1. Тензоры упругих, пластических и полных деформаций.

Для произвольного состояния конечным образом деформированной упруго – пластической среды можно определить понятия упругих и пластических деформаций и ввести следующие три пары тензоров деформаций:

- 1) тензоры пластических деформаций с компонентами

$$\varepsilon_{ij}^p = \frac{1}{2}(g_{ij}^* - g_{ij}^0)$$

- 2) тензоры упругих деформаций с компонентами

$$\varepsilon_{ij}^e = \frac{1}{2}(\hat{g}_{ij} - g_{ij}^*)$$

- 3) тензоры полных деформаций с компонентами

$$\hat{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2}(\hat{g}_{ij} - g_{ij}^0)$$

Здесь g_{ij}^0, \hat{g}_{ij} задают метрики начального и актуального пространства, а g_{ij}^* – метрику пространства, в котором сняты все напряжения, и остались только остаточные деформации.

Таким образом, при изучении действительного процесса деформирования для каждого момента времени наряду с полными деформациями можно рассматривать пластические, т.е. те, которые остались бы в частице, если бы ее из данного состояния полностью разгрузить, и упругие деформации, т.е. те, которые снимаются при разгрузке и возникают вновь при повторном нагружении.

Из определений следует, что в лагранжевой системе координат верно равенство

$$\hat{\varepsilon}_{ij} = \varepsilon_{ij}^e + \varepsilon_{ij}^p$$

т.е. полные деформации равны сумме упругих и пластических. Отметим, что для конечных деформаций это свойство аддитивности не выполняется, т.к. компоненты тензоров здесь берутся в разных базисах, хотя в одной и той же Лагранжевой системе координат.

В случае бесконечно малых относительных перемещений с точностью до малых высшего порядка это равенство выполняется для компонент с любым строением индексов и в любой системе координат.

1.3.2. Пространство напряжений. Условия пластичности. Поверхность текучести.

В трехмерном случае необходимо рассматривать многомерное пространство напряжений. Пространство напряжений определяется тем, что в качестве меры расстояний вдоль осей координат берутся величины напряжений.

В связи с основным свойством пластической среды в пространстве напряжений, т.е. в девятимерном пространстве точки которого задаются значениями компонент тензора напряжений p^{ij} , можно отметить область D_p такую, что если для данного процесса точка p^{ij} лежит строго внутри области D_p , то частица ведет себя как упругое тело. В противном случае в частице могут возникать пластические (остаточные) деформации.

Пространство напряжений Хея–Вестергарда В пространстве главных напряжений (Хея–Вестергарда) по осям координат откладываются главные значения тензора напряжений.

Каждая точка такого пространства соответствует некоторому напряженному состоянию. Радиус-вектор OP любой точки P может быть разложен на две компоненты: OA – вдоль прямой OZ , которая составляет равные углы с осями координат, и OB – в плоскости перпендикулярной OZ и проходящей через начало координат (эта плоскость известна под названием Π – плоскости).

Компонента вдоль OZ , для которой $p_I = p_{II} = p_{III}$ представляет гидростатическое давление, а компонента в Π – плоскости – девиаторную часть напряжения. Легко показать, что Π – плоскость имеет уравнение

$$p_I + p_{II} + p_{III} = 0$$

Если принять, что условие пластичности не зависит от гидростатического напряжения всестороннего сжатия, то соответствующие поверхности текучести являются цилиндрами с образующими параллельными осями OZ .

Точки пространства напряжений, которые лежат внутри цилиндрической поверхности текучести соответствуют упругому напряженному состоянию, а точки лежащие на поверхности текучести, представляют начальное пластическое напряженное состояние.

Пересечение поверхности текучести с Π – плоскостью называется кривой текучести.

Условие или критерий пластичности является обобщением на трехмерное напряженное состояние понятия предела текучести, который был введен для одноосного растяжения. Оно определяет некоторую поверхность – **поверхность текучести или поверхность нагружения**. Этой поверхностью является граница Σ_p области D_p представляющая собой **совокупность пределов упругости для всевозможных напряженных состояний**.

С математической точки зрения это условие представляет собой соотношение между компонентами напряжений в точке, которое должно быть выполнено, когда в этой точке начинается пластическое поведение.

Функция текучести. В общем случае условие пластичности может быть записано в виде

$$f(p_{ij}) = C_Y$$

или

$$f_1(p_{ij}) = 0.$$

Функция $f_1(p_{ij})$ называется функцией текучести.

Для изотропного материала условие пластичности не должно зависеть от направлений и, поэтому, может быть выражено в виде функции инвариантов напряжения, или в виде симметричной функции главных напряжений:

$$f_2(p_I, p_{II}, p_{III}) = C_Y.$$

Кроме того, эксперименты показывают, что для многих сред (в частности для металлов) напряжение всестороннего сжатия не вызывает пластических деформаций. Поэтому обычно считают, что в условиях пластичности фигурирует функция инвариантов девиатора напряжений

$$f_3(I_1(p_{ij}^{(d)}), I_2(p_{ij}^{(d)}), I_3(p_{ij}^{(d)})) = 0.$$

Напомним, что шаровой составляющей $\mathbf{t}^{(s)}$ и девиатором $\mathbf{t}^{(d)}$ симметричного тензора \mathbf{t} второго ранга называются соответственно тензоры

$$t_{ij}^{(s)} = \frac{1}{3}t_{kk}\delta_{ij}, \quad t_{ij}^{(d)} = t_{ij} - \frac{1}{3}t_{kk}\delta_{ij}$$

Первый, второй и третий инварианты тензора определяются следующим образом

$$I_1(t_{ij}) = t_{ij}g^{ij} = t_i^i = t_1^1 + t_2^2 + t_3^3, \quad I_2(t_{ij}) = \frac{1}{2}(t_{ii}t_{jj} - t_{ij}t_{ij}), \quad I_3(t_{ij}) = \det||t_{ij}||$$

Некоторые критерии plasticности. Из многочисленных условий, plasticности которые были предложены мы рассмотрим два. Они приемлемо просты математически и в то же время достаточно точны, чтобы быть весьма полезными при изучении начальной стадии plasticности изотропных материалов.

1. Критерий текучести Треска (теория максимального касательного напряжения). Согласно этому критерию, пластическое поведение начинается тогда, когда максимальное касательное напряжение достигает заданной величины C_{1p} .

Проще всего критерий Треска записывается в главных напряжениях. Если $p_I > p_{II} > p_{III}$ критерий Треска будет

$$\frac{1}{2}(p_I - p_{III}) = C_{1p} = \text{const}$$

2. Критерий текучести Мизеса (теория энергии искажения формы). Согласно этому критерию, пластическое поведение начинается тогда, когда второй инвариант девиатора напряжений достигает некоторого критического значения. Математически критерий Мизеса записывается так:

$$I_2(p_{ij}^{(d)}) = C_{2p}$$

или через главные напряжения так:

$$(p_I - p_{II})^2 + (p_{II} - p_{III})^2 + (p_{III} - p_I)^2 = 6C_{2p}$$

Существуют несколько вариантов записи этих соотношений, когда используются другие компоненты напряжений, отличные от главных.

1.3.3. Изотропное и кинематическое упрочнение. Энергетическая и деформационная гипотезы упрочнения.

Продолжение нагружения после достижения начального предела текучести приводит к пластическим деформациям, которые могут сопровождаться изменением первоначальной поверхности текучести.

Если материал предполагается идеально пластическим, то поверхность текучести не изменяется в процессе пластического деформирования и начальное условие plasticности остается в силе. Однако, для материала с упрочнением пластическое деформирование в общем случае сопровождается изменениями поверхности текучести.

Для учета таких изменений необходимо обобщить функцию текучести $f_1(p_{ij})$, чтобы она могла задавать изменение поверхности текучести при деформировании.

Функция нагрузжения. Такое обобщение достигается введением функции нагрузжения

$$f_1^*(p_{ij}, \varepsilon_{ij}^p, K) = 0,$$

которая зависит не только от напряжений, но и от пластических деформаций ε_{ij}^p и характеристик упрочнения, представленных параметром K .

Это уравнение дает поверхность нагрузжения, что означает следующее:

$f_1^* = 0$ – определяет границу упругой зоны,

$f_1^* < 0$ – соответствует упругой зоне внутри этой поверхности,

$f_1^* > 0$ – соответствует области вне поверхности нагрузжения.

Последняя область смысла не имеет.

Полный дифференциал функции нагрузжения будет

$$df_1^* = \frac{\partial f_1^*}{\partial p_{ij}} dp_{ij} + \frac{\partial f_1^*}{\partial \varepsilon_{ij}^p} d\varepsilon_{ij}^p + \frac{\partial f_1^*}{\partial K} dK$$

Процессы пластического нагружения и разгрузки. Разгрузка при одноосном растяжении—это уменьшение величины напряжения σ .

При произвольном деформировании разгрузка определяется как процесс, при котором точка p^{ij} в пространстве напряжений перемещается с поверхности нагрузления Σ_p внутрь области D_p . Очевидно, что при этом некоторые из компонент p^{ij} могут возрастать. При разгрузке по определению $\varepsilon_{ij}^p = 0$.

Пластическое нагружение. Определяется как процесс, в котором

$$f^* = 0, \quad df^* = 0.$$

Процесс разгрузки. Если

$$f_1^* = 0, \quad \frac{\partial f_1^*}{\partial p_{ij}} dp_{ij} < 0,$$

то говорят, что имеет место процесс разгрузки.

Нейтральное нагружение. Если

$$f_1^* = 0, \quad \frac{\partial f_1^*}{\partial p_{ij}} dp_{ij} = 0,$$

то имеем нейтральное нагружение.

Активное нагружение. При

$$f_1^* = 0, \quad \frac{\partial f_1^*}{\partial p_{ij}} dp_{ij} > 0$$

происходит процесс активного нагружения.

Закон упрочнения. Тот способ, каким пластические деформации ε_{ij}^p входят в функцию упрочнения в процессе нагружения определяется законом упрочнения.

Гипотеза изотропного упрочнения при нагружении постулирует, что поверхность текучести просто увеличивается в размерах, сохраняя при этом свою начальную форму. Кривые текучести в П–плоскости для критерии Мизеса и Треска будут концентрическими окружностями и правильными шестиугольниками

При **кинематическом упрочнении** начальная поверхность текучести поступательно перемещается в новое положение в пространстве напряжений без изменения размеров и формы. В одномерном случае кривая текучести Треска переносилась бы так как показано на рисунке.

Из всех гипотез, предложенных для расчета мгновенных пластических напряжений при пластическом деформировании материала с изотропным упрочнением наибольшее распространение получили две: энергетическая и деформационная.

Энергетическая гипотеза упрочнения заключается в том, что мгновенная поверхность текучести зависит только от полной работы на пластических деформациях

$$A^p = \int_V p_{ij} d\varepsilon_{ij}^p.$$

Через полную работу на пластических деформациях критерий пластичности выражается равенством

$$f_1(p_{ij}) = F(A^p),$$

в котором вид функциональной зависимости должен быть определен экспериментально.

Деформационная гипотеза упрочнения состоит в том, что упрочнение определяется величиной пластических деформаций.

Через полную эквивалентную пластическую деформацию

$$\varepsilon_{\text{экв}}^p = \int_V d\varepsilon_{\text{экв}}^p, \quad d\varepsilon_{\text{экв}}^p = \sqrt{\frac{2}{3}\varepsilon_{ij}^p\varepsilon_{ij}^p}$$

закон упрочнения представляется соотношением

$$f_1(p_{ij}) = H(\varepsilon_{\text{экв}}^p),$$

в которой вид функциональной связи находится из экспериментальной зависимости напряжение–деформация при одноосном испытании материала.

Можно показать, что для критерия Мизеса эти законы упрочнения эквивалентны.

1.3.4. Соотношения между напряжениями и деформациями в пластическом состоянии.

Как только возникают пластические деформации, определяющие уравнения теории упругости перестают быть верными.

Подчеркнем, что при разнообразных способах нагружения пластические деформации в каждый момент времени не могут определяться однозначно значениями компонент тензора напряжений в тот же момент времени.

Деформационная теория plasticности. Для тел с упрочнением для каждого вполне фиксированного закона нагружения можно написать конечные соотношения, причем эти соотношения будут зависеть от выбранного пути нагружения. Вместе с этим нередко получается так, что для некоторых различных, вообще говоря, близких путей нагружения можно применять одно и тоже соотношение.

Нужно, однако, твердо помнить, что эти соотношения верны только для одного или нескольких определенных процессов нагружения рассматриваемой частицы среды и не определяют ее поведение в других случаях пластического деформирования.

Существует так называемая **деформационная теория plasticности Генки**, в которой предполагается зависимость между напряжениями и полными деформациями. Эти соотношения имеют вид

$$\varepsilon_{ij} = [\phi + \frac{1}{2G}]p_{ij}^{(d)}, \quad \varepsilon_{ii} = (1 - 2\nu)\frac{1}{p_{ii}}E$$

Здесь параметр Генки

$$\phi = \frac{3}{2}\frac{\varepsilon_{\text{экв}}^p}{p_{\text{экв}}}.$$

Где эквивалентное или эффективное, напряжение

$$\sigma_{\text{экв}} = \sqrt{3p_{ij}^{(d)}p_{ij}^{(d)}} = \sqrt{-3I_2(p_{ij}^{(d)})},$$

эквивалентное, или эффективное, приращение пластической деформации

$$d\varepsilon_{\text{экв}}^p = \sqrt{\frac{2}{3}\varepsilon_{ij}^p\varepsilon_{ij}^p}$$

Теории течения (инкрементальные теории). В силу того, что пластические деформации зависят от всей истории нагружения материала, в теории plasticности соотношения между напряжением и деформацией очень часто формулируют через приращения деформаций. Это так называемые теории течения (инкрементальные теории).

1. Уравнения Леви – Мизеса. Например уравнения Леви – Мизеса, связывают **приращения полной деформации с компонентами девиатора напряжений** следующим образом

$$d\varepsilon_{ij} = p_{ij}^{(d)} d\lambda$$

Эти соотношения представляют закон течения для жестко–идеально–пластического материала. Считается, что главные оси тензоров приращения деформаций и напряжений совпадают,

Коэффициент пропорциональности $d\lambda$ дается в дифференциальной форме, чтобы подчеркнуть, что приращения деформации связаны с конечными компонентами напряжений. Этот множитель может меняться в процессе нагружения и является поэтому скалярной функцией, а не фиксированной постоянной. Для коэффициента $d\lambda$ можно получить

$$d\lambda = \frac{3}{2} \frac{d\varepsilon_{\text{экв}}^p}{\sigma_{\text{экв}}}.$$

2. Уравнениям Прандтля – Рейса. Разложив приращения деформации на упругую и пластическую части:

$$d\varepsilon_{ij} = d\varepsilon_{ij}^e + d\varepsilon_{ij}^p$$

и связав **приращения пластической деформации с компонентами девиатора напряжений**

$$d\varepsilon_{ij}^p = p_{ij}^{(d)} d\lambda_1$$

мы приходим к уравнениям Прандтля – Рейса. Эти формулы представляют закон течения упруго – идеально – пластического материала. Они устанавливают связь между приращениями пластической деформации и девиатором текущих напряжений, но не дают самих величин приращений деформации.

3. Пластический потенциал. Функция компонент напряжения $G(p_{ij})$, которая обладает следующим свойством

$$d\varepsilon_{ij}^p = \frac{\partial G(p_{ij})}{\partial p_{ij}}$$

называют пластическим потенциалом.

Для идеального пластического материала такая функция существует и тождественно совпадает с функцией текучести. Если к тому же функция текучести взята в виде

$$f_1(p_{ij}) = I_2(p_{ij}^{(d)}),$$

то последние равенства превращаются в уравнения Прандтля–Рейса.

1.4. О постановке задач упругопластичности.

Ситуации, в которых и упругие и пластические деформации имеют примерно одинаковый порядок, обычно относят к задачам упругопластичности.

В общем случае постановка задач в упругой зоне, пластической зоне и на границе между ними включает следующие соотношения:

a) **Упругая область:**

уравнения равновесия; связь между напряжениями и деформациями; условия совместности; граничные условия, наложенные на напряжения или перемещения

b) **Пластическая область:**

уравнения равновесия; связи между напряжениями и приращениями деформациями; условия совместности полных деформаций; условие пластичности; граничные условия на границе пластической области, если таковая граница существует

c) **Граница между упругой и пластической областями:**

условия непрерывности напряжений и перемещений

1.5. Термодинамические соотношения. Уравнение притока тепла и второй закон термодинамики.

Рассмотрим термодинамические соотношения. Они необходимы для замыкания системы механических уравнений в случае, когда важны эффекты изменения температуры в процессе деформирования тела.

Постулируется, что процессы пластического деформирования являются необратимыми. При этом

$$dq' = \frac{1}{\rho} \hat{\tau}^{ij} d\varepsilon_{ij}^p.$$

где $\hat{\tau}^{ij}$ — компоненты некоторого тензора, который характеризует диссипацию энергии.

Уравнение притока тепла и второй закон термодинамики можно записать в виде

$$dF = \frac{1}{\rho} p^{ij} d\varepsilon_{ij} - d(sT) + dq + dq^{**}, \quad Tds = dq + dq', \quad dq' \geq 0$$

Будем предполагать, что

$$F = F(g_{ij}^0, \varepsilon_{ij}^e, \varepsilon_{ij}^p, T), \quad \varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^e + \varepsilon_{ij}^p, \quad dq = -\frac{1}{\rho} \operatorname{div} \vec{q} dt, \quad dq^{**} = 0,$$

где \vec{q} — вектор потока тепла.

С учетом этих предположений уравнение притока тепла запишется в виде

$$\left(\frac{\partial F}{\partial \varepsilon_{ij}^e} - \frac{p^{ij}}{\rho} \right) d\varepsilon_{ij}^e + \left(\frac{\partial F}{\partial \varepsilon_{ij}^p} - \frac{p^{ij}}{\rho} + \frac{\hat{\tau}^{ij}}{\rho} \right) d\varepsilon_{ij}^p + \left(\frac{\partial F}{\partial T} + s \right) dT = 0.$$

а второй закон термодинамики

$$\rho ds = -\frac{\operatorname{div} \vec{q}}{T} dt + \frac{\hat{\tau}^{ij}}{T} d\varepsilon_{ij}^p.$$

Полученные соотношения позволяют получить уравнения состояния.

Действительно, эти равенства выполняются как в упругих так и в пластических областях. А так как, от всякого пластического состояния можно провести процесс разгрузки, то напряжения в частице в пластическом состоянии, примыкающем к упругому процессу разгрузки, можно определить с помощью уравнения состояния теории упругости.

Таким образом, с помощью рассмотрения упругих процессов разгрузки, когда $d\varepsilon_{ij}^p = 0$, получим что из этих равенств следуют уравнения состояния упругой модели. Примем, что в упругой области и в пластической области имеют место соотношения

$$p^{ij} = \rho \frac{\partial F}{\partial \varepsilon_{ij}^e}, \quad s = -\frac{\partial F}{\partial T}.$$

Поэтому для процесса пластического деформирования имеем

$$\left(\frac{\partial F}{\partial \varepsilon_{ij}^p} - \frac{p^{ij}}{\rho} + \frac{\hat{\tau}^{ij}}{\rho} \right) d\varepsilon_{ij}^p = 0.$$

Откуда

$$\hat{\tau}^{ij} = p^{ij} - \rho \frac{\partial F}{\partial \varepsilon_{ij}^p}.$$

Замечание. В предыдущем равенстве, вообще говоря, нельзя считать $d\varepsilon_{ij}^p$ независимыми. Например, если принимается ассоциативный закон, то шесть приращений $d\varepsilon_{ij}^p$ выражаются через одно из них.

Несмотря на это для наших целей всегда можно считать, что выполнены равенства, полученные для $\hat{\tau}^{ij}$.

Действительно положим

$$\hat{\tau}^{ij} = p^{ij} - \rho \frac{\partial F}{\partial \varepsilon_{ij}^p} + \tau_1^{ij}.$$

Тогда имеем

$$\tau_1^{ij} d\varepsilon_{ij}^p = 0$$

т.е. добавки к $\hat{\tau}^{ij}$ не влияют на dq'

1.6. Принцип минимума работы на пластических деформациях.

Рассмотрим приращение работы напряжений на деформациях в единице объема

$$dA = -\frac{p_{ij} d\varepsilon_{ij}}{\rho} = -\frac{p_{ij} (d\varepsilon_{ij}^e \rho + d\varepsilon_{ij}^p)}{\rho} = dA^e + dA^p$$

Пусть элементарная **работа внутренних напряжений** \dot{p}_{ij} , отвечающих любой точке **упругой области** D_p , на рассматриваемых приращениях пластических деформаций $d\varepsilon_{ij}^p$

$$d\dot{A}^p = -\dot{p}_{ij} d\varepsilon_{ij}^p$$

Постулат, выражающийся неравенством

$$d\dot{A}^p - dA^p = \frac{(p_{ij} - \dot{p}_{ij}) d\varepsilon_{ij}^p}{\rho} \geq 0$$

носит название принципа минимума работы истинных напряжений на пластических деформациях.

Согласно этому постулату **работка, совершаемая действительными напряжениями на заданных приращениях пластических деформаций, всегда меньше или равна работе, которую совершили бы любые другие напряжения из упругой области на тех же приращениях пластических деформаций.**

Если компоненты тензоров $d\varepsilon_{ij}^p$ и $p_{ij} - \dot{p}_{ij}$ трактовать как компоненты векторов в девятимерном евклидовом пространстве компонент тензора напряжений, то этот постулат можно истолковать как условие, что скалярное произведение этих векторов неотрицательно.

Отсюда ясно, что поверхность нагружения со стороны упругой области выпуклая...

Для пластики несжимаемого материала приращение работы на пластических деформациях будет равно

$$dA^p = p_{ij} d\varepsilon_{ij}^p = p_{ij}^{(d)} d\varepsilon_{ij}^p$$

Если к тому же этот материал подчиняется уравнениям Прандтля–Рейса, то приращения работы на пластических деформациях представляются выражением

$$dA^p = p_{\sigma\kappa\theta} d\varepsilon_{\sigma\kappa\theta}^p$$

При этом уравнения Прандтля – Рейса запишутся

$$d\varepsilon_{ij}^p = \frac{3}{2} \frac{dA^p}{p_{\sigma\kappa\theta}^2} p_{ij}^{(d)}$$

План: 1. Уравнения Эйлера. Уравнения движения идеальной жидкости в форме Громеки—Лемба.

2. Общая теория установившихся движений идеальной жидкости и газа. Интеграл Бернули.
3. Потенциальные течения идеальной жидкости. Интеграл Коши—Лагранжа.
4. Потенциальные течения идеальной жидкости и газа при наличии баротропии. Система уравнений.
5. Потенциальные движения несжимаемой жидкости. Примеры потенциалов.
6. Потенциальные движения сжимаемой жидкости или газа, представляющие собой малые возмущения известного состояния равновесия или движения. Волновое уравнение.
7. Решения волнового уравнения с плоскими и сферическими волнами. Эффект Доплера. Конус Маха.
8. Упругие волны в изотропной среде.

1. Уравнения Эйлера. Уравнения движения идеальной жидкости в форме Громеки—Лемба.

1. Уравнения движения сплошной среды в любой криволинейной системе координат

$$\rho a^k = \rho F^k + \nabla_i p^{ki}$$

для идеальной жидкости ($p^{ki} = -pg^{ki}$) записывается в виде

$$\rho a^k = \rho F^k - g^{ki} \nabla_i p$$

или в векторном виде

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = \rho \vec{F} - \operatorname{grad} p$$

В проекциях на декартовы оси координат эти уравнения записываются в следующем виде

$$\begin{aligned}\rho \frac{du}{dt} &= \rho F_x - \frac{\partial p}{\partial x} \\ \rho \frac{dv}{dt} &= \rho F_y - \frac{\partial p}{\partial y} \\ \rho \frac{dw}{dt} &= \rho F_z - \frac{\partial p}{\partial z}\end{aligned}$$

Уравнения движения идеальной жидкости называются **уравнениями Эйлера**.

2. Легко видеть, что ускорение всегда можно записать следующим образом

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \operatorname{grad} \frac{v^2}{2} + 2\vec{\omega} \times \vec{v}$$

где $\vec{\omega} = \frac{1}{2} \operatorname{rot} \vec{v}$ — вектор вихря.

Действительно, используя декартову систему координат, для проекции ускорения на ось Ox имеем

$$\begin{aligned}\frac{du}{dt} &= \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} (u^2 + v^2 + w^2) - v \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) + w \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) = \\ &\quad \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial v^2}{\partial x} + 2(\omega_y w - \omega_z v) = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial v^2}{\partial x} + 2(\vec{\omega} \times \vec{v})_x\end{aligned}$$

Аналогичные формулы получаются и для проекций ускорения на оси Oy и Ox . Поэтому уравнения движения идеальной жидкости можно записать в виде

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + grad \frac{v^2}{2} + 2\vec{\omega} \times \vec{v} = \vec{F} - \frac{1}{\rho} grad p$$

Эти уравнения носят название **уравнений Эйлера в форме Громеки—Лемба**.

2. Общая теория установившихся движений идеальной жидкости и газа. Интеграл Бернули.

Установим первый интеграл уравнений движения идеальных жидкости или газа в случае установившихся движений.

Так как **движение установившееся**, то

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = 0$$

Примем также, что **внешние массовые силы обладают потенциалом**

$$\vec{F} = grad U$$

Функция давления

Рассмотрим в потоке жидкости некоторую произвольную линию L и введем вдоль нее направление отсчета длины l , начиная от некоторой точки O . Заданием длины l будет фиксироваться точка на этой линии. Через dl обозначим элемент касательной к линии L в произвольной точке M (рис.)

Проектируя уравнения Эйлера в форме Громеки—Лемба на направление касательной к L в произвольной точке M с учетом сделанных предположений получим

$$\frac{\partial}{\partial l} \left(\frac{v^2}{2} \right) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial l} - \frac{\partial U}{\partial l} = -2(\vec{\omega} \times \vec{v})_l$$

Вдоль данной линии плотность и давление являются функциями длины дуги l . Эти функции вообще различны для различных линий:

$$\rho = \rho(l, L) \quad u \quad p = p(l, L)$$

Однако, вдоль данной линии плотность всегда можно считать функцией давления

$$\rho = \rho(p, L)$$

Поэтому можно ввести функцию давления P :

$$P = P(p, L) = \int \frac{dp}{\rho(p, L)} + const = \int_{p_1}^p \frac{dp}{\rho(p, L)}, \quad p_1 = const$$

так что

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial l} = \frac{\partial P}{\partial l}$$

Подчеркнем, что это равество и определенная функция давления $P(p, L)$ имеют место только для данной линии L .

В случае баратропных процессов, если известна зависимость

$$p = p(\rho)$$

функция давления не зависит от линии L , если p_1 не зависит от L .

Примеры

1. Для однородной несжимаемой жидкости

$$P = \frac{p}{\rho} + const$$

2. Для изотермических процессов в совершенном газе

$$P = RT \ln p + const$$

Интеграл Бернулли вдоль линии тока и вихревой линии.

Введя функцию давления проекцию уравнений движения можно записать в виде

$$\frac{\partial}{\partial l} \left[\frac{v^2}{2} + P(p, L) - U \right] = -2(\vec{\omega} \times \vec{v})_l$$

В случаях если L является линией тока или вихревой линией проекция векторного произведения $(\vec{\omega} \times \vec{v})_l = 0$, так как векторное произведение $\vec{\omega} \times \vec{v}$ будет перпендикулярно к этой линии, и мы имеем

$$\frac{\partial}{\partial l} \left[\frac{v^2}{2} + P(p, L) - U \right] = 0$$

или

$$\frac{v^2}{2} + P(p, L) - U = i^*(L)$$

В тех случаях, когда функция давления известна полученное соотношение является первым интегралом уравнений движения и называется **интегралом Бернулли**.

Замечание.

При наличии баротропии постоянная интеграла Бернулли одинакова для части или всей массы жидкости и не зависит от линии тока или вихревой линии, если векторное произведение $\vec{\omega} \times \vec{v} = 0$ в этой массе жидкости. Это может быть в трех случаях: 1) гидростатика ($\vec{v} = 0$); 2) потенциальное движение ($\vec{\omega} = 0$); 3) когда вектор вихря $\vec{\omega}$ коллинеарен вектору скорости \vec{v} (например винтовое движение).

В этих случаях для определения постоянной в интеграле Бернулли достаточно знать входящие в левую часть интеграла характеристики движения жидкости только в одной произвольной точке области.

Пример–интеграл Бернулли для несжимаемой тяжелой жидкости.

Пусть несжимаемая однородная жидкость движется в поле сил тяжести. Если направить ось Oz вертикально вверх, то

$$U = -gz + const$$

и интеграл Бернулли примет вид

$$\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gz = i^* = \frac{v_1^2}{2} + \frac{p_1}{\rho_1} + gz_1$$

Здесь постоянная i^* определена по значениям параметров в точке с координатой z_1 .

Примеры: водослив, трубка Пито–Прандтля, динамическое и гидростатическое давление, течение несжимаемой жидкости в трубе переменного поперечного сечения, кавитация.

Динамическое и гидростатическое давление.

Из интеграла Бернулли следует

$$p = p_1 + \rho g(z_1 - z) + \frac{\rho v_1^2}{2} - \frac{\rho v^2}{2}.$$

Видно, что давления в двух точках на линии тока, как и в гидростатике, отличаются на величину $\rho g(z_1 - z)$, вызванную разностью уровней и, кроме того, на величину $\frac{\rho v_1^2}{2} - \frac{\rho v^2}{2}$, связанную с разностью скоростей в этих точках. Назовем

$$p_1 + \rho g(z_1 - z) = p_{gcm} \quad \text{гидростатическим давлением, а}$$

$$\frac{\rho v_1^2}{2} - \frac{\rho v^2}{2} = p_{дин} \quad \text{динамическим давлением}$$

Если поместить тело в поток жидкости или газа, то на тело будут действовать силы, связанные во первых, с неравномерностью распределения гидростатического давления (сила Архимеда) и, во вторых, с неравномерностью распределения динамического давления по поверхности тела.

Можно показать, что разность давлений в точках 1 и 2 на верхней и нижней частях крыла за счет даже сравнительно небольшой разницы в скоростях ($\approx 10\text{ м/сек}$) на два порядка больше разности давлений за счет разности уровней.

При установившемся горизонтальном полете самолета полная подъемная сила равна конечно весу самолета, а сила Архимеда равна весу воздуха с плотностью, отвесающей высоте полета, в объеме самолета. Ясно, что сила Архимеда меньше тысячных долей полной подъемной силы.

3. Потенциальные течения идеальной жидкости. Интеграл Коши—Лагранжа.

Для потенциальных течений идеальной жидкости как установившихся, так и неустановившихся, может быть получен первый интеграл уравнений Эйлера. Этот интеграл носит название интеграла Коши—Лагранжа.

Запишем уравнения движения идеальной жидкости в форме Громеки—Лемба

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + grad \frac{v^2}{2} + 2\vec{\omega} \times \vec{v} = \vec{F} - \frac{1}{\rho} grad p$$

Предположим, что 1) движение потенциальное ($\vec{\omega} = 0, \vec{v} = grad \phi$);

2) имеет место баротропия ($p = p(\rho)$) и, следовательно, можно ввести единую для всего потока функцию давления

$$P(p) = \int \frac{dp}{\rho(p)}, \quad \frac{1}{\rho} grad p = grad P$$

Тогда массовые силы обладают потенциалом ($\vec{F} = grad U$) и имеет место интеграл Коши—Лагранжа

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + P - U = f(t)$$

где $f(t)$ —произвольная функция времени.

Действительно, при предположениях 1) и 2) уравнение Громеки—Лемба записывается в виде

$$grad \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + P \right) = \vec{F}$$

откуда и следует это утверждение.

Для того, чтобы найти $f(t)$, достаточно знать левую часть интеграла как функцию времени в какой-либо точке потока.

Пользуясь тем, что потенциал ϕ определен с точностью до произвольной функции времени, вместо потенциала ϕ можно ввести потенциал $\phi_1 = \phi - \int f(t)dt$. Поле скоростей при этом не изменится $\vec{v} = grad \phi = grad \phi_1$. После такой замены в правой части интеграла Коши—Лагранжа будет стоять нуль. В этом случае потенциал определяется с точностью до аддитивной функции по времени и по координатам.

Интеграл Коши—Лагранжа может служить для тех же целей, что интеграл Бернулли: если потенциалы скоростей ϕ и внешних сил U известны, то с его помощью можно определить распределение давления.

В частном случае, когда потенциальное движение жидкости или газа установившееся интеграл Коши—Лагранжа имеет вид

$$\frac{v^2}{2} + P - U = const = i^*$$

и совпадает с интегралом Бернулли, в котором постоянная i^* одинакова для всей массы жидкости, а функция давления зависит только от давления (из-за баротропии).

4. Потенциальные течения идеальной жидкости и газа при наличии баротропии. Система уравнений.

Основными уравнениями потенциальных течений идеальной жидкости в случае баротропных процессов ($\rho = \rho(p)$) являются:

уравнение неразрывности

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} + \operatorname{div}(\operatorname{grad} \phi) = 0$$

и интеграл Коши–Лагранжа

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} (\operatorname{grad} \phi)^2 + P - U = f(t)$$

Для дифференциала функции давления

$$P = \int \frac{dp}{\rho(p)}$$

имеем

$$dP = \frac{dp}{\rho} = \frac{a^2}{\rho} d\rho, \quad a = \sqrt{\frac{dp}{d\rho}}$$

Следовательно,

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} = \frac{1}{a^2} \frac{dP}{dt}, \quad a = a(P)$$

Система уравнений тогда записется в виде

$$\begin{aligned} \frac{1}{a^2} \frac{dP}{dt} + \Delta\phi &= 0, \\ \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} (\operatorname{grad} \phi)^2 + P - U &= 0 \end{aligned}$$

Неизвестными в этой системе являются функция давления P и потенциал скоростей ϕ . В общем случае эту нелинейную систему дифференциальных уравнений проинтегрировать трудно. Рассмотрим важные классы движений, для которых методы решения системы уравнений хорошо разработаны.

5. Потенциальные движения несжимаемой жидкости. Примеры потенциалов.

Класс потенциальных движений несжимаемой жидкости мы рассматривали ранее. В этом случае

$$a^2 = \left(\frac{dp}{d\rho} \right) \rightarrow \infty$$

и первое уравнение системы сводится к **уравнению Лапласа**

$$\Delta\phi = 0$$

Второе уравнение системы в этом случае служит для определения давления.

В такой постановке рассматриваются задачи о движении воды, возникающих при перемещении в ней твердых тел, задачи о волнах на поверхности воды, задачи о струйных течениях жидкости и многие другие.

Примером потенциального течения может служить поступательное течение с постоянной скоростью вдоль оси Ox :

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = u_0, \quad \frac{\partial \phi}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \phi}{\partial z} = 0$$

Другими важными примерами потенциального течения являются **течения от точечных источников и стоков**. В этом случае

$$\phi = -\frac{Q}{4\pi r}$$

где

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, Q = const, \text{ или } Q = Q(t)$$

Поверхностями равного потенциала (эквипотенциальными поверхностями) в этом случае являются поверхности

$r = const$ — концентрические сферы с центром в начале координат.

Скорость $\vec{v} = grad \phi$ ортогональна этим сферам, т.е. направлена по радиусам. Линии тока являются лучами, выходящими из начала координат. Если $Q > 0$, то так как $grad\phi$ направлен в сторону роста ϕ , вектор скорости \vec{v} направлен по \vec{r} . Если $Q < 0$, то вектор скорости направлен по $-\vec{r}$ (к началу координат).

При $Q > 0$ имеем вытекание жидкости из начала координат по всем направлениям — течение от точечного пространственного источника; при $Q < 0$ — втекание жидкости в начало координат — сток.

Величина скорости равна

$$|(grad\phi)_r| = \left| \frac{\partial \phi}{\partial r} \right| = \frac{|Q|}{4\pi r^2}$$

Скорость стремится к нулю при $r \rightarrow \infty$ и к бесконечности при $r \rightarrow 0$.

Через элемент сферы $d\sigma$ за единицу времени протекает объем жидкости $v d\sigma$, а через всю сферу

$$\int_S v d\sigma = v \int_S d\sigma = 4\pi r^2 v = Q$$

Вычисленный объем жидкости не зависит от сферы. Постоянная Q в формуле для потенциала ϕ является объемом жидкости, протекающей за единицу времени через каждую такую сферу (расход, мощность источника или стока).

Решения уравнения Лапласа в силу его линейности можно складывать, дифференцировать, интегрировать и получать таким образом новые частные уравнения Лапласа.

Например, частное решение уравнения Лапласа можно получить путем дифференцирования решения $\phi = 1/r$ по некоторому направлению \vec{s} . В этом случае имеем

$$\phi = C \frac{\partial \phi}{\partial s} \left(\frac{1}{r} \right) = -C \frac{\vec{r} \cdot \vec{s}^0}{r^3} = -C \frac{(x-x_0)\alpha + (y-y_0)\beta + (z-z_0)\gamma}{r^3}$$

Где $C = const$, $\alpha = \frac{dx}{ds}$, $\beta = \frac{dy}{ds}$, $\gamma = \frac{dz}{ds}$ — направляющие косинусы вектора \vec{s}

Такое течение называется **течением от точечного диполя в пространстве**; C — называется моментом диполя, а направление \vec{s} — его осью.

Имеют важное значение также течения определяемые **потенциалом объемного распределения источников**

$$\phi = -\frac{1}{4\pi} \int_{V_0} \frac{Q(x_0, y_0, z_0) dx_0 dy_0 dz_0}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}},$$

а также **потенциалами простого и двойного слоев**

$$\phi = \int_{\Sigma} \frac{q(M) d\sigma_0}{r}, \quad \phi = \int_{\Sigma} \mu(M) \frac{\partial}{\partial n_0} \left(\frac{1}{r} \right) d\sigma_0$$

Здесь $q(M), \mu(M)$ — некоторые произвольные интегрируемые функции точек поверхности Σ , \vec{n}_0 — вектор нормали к ней.

6. Потенциальные движения сжимаемой жидкости или газа, представляющие собой малые возмущения известного состояния равновесия или движения.

В этом случае предполагается, что скорость, плотность, давление и их производные представляют собой известные функции плюс неизвестные малые добавки. Если пренебречь малыми величинами порядка выше, чем первый, то система уравнений становится линейной.

Например, если движение представляет собой малое возмущение *около состояния покоя*, в котором отношение $|grad\rho|/\rho$ мало, то имеем

$$\frac{1}{a_0^2} \frac{\partial P}{\partial t} + \Delta\phi = 0,$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} + P - U = 0$$

где a_0^2 —значение производной $dp/d\rho$, вычисленное для невозмущенного состояния покоя.

Если потенциал массовых сил не зависит от времени, то получим **волновое уравнение** для ϕ

$$\Delta\phi = \frac{1}{a_0^2} \frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}$$

Если жидкость несжимаемая, то волновое уравнение переходит в уравнение Лапласа.

При рассмотрении конкретных задач необходимо находить решения волнового уравнения, удовлетворяющего соответствующим дополнительным условиям: краевым, начальным и другим.

7. Решения волнового уравнения с плоскими и сферическими волнами .

В случае движения газа с плоскими волнами, потенциал ϕ зависит только от координаты x и времени t . Волновое уравнение в этом случае будет

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} = \frac{1}{a_0^2} \frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}$$

Общее решение этого уравнения имеет вид

$$\phi(x, t) = f_1(x - a_0t) + f_2(x + a_0t) = f_1(\xi) + f_2(\eta)$$

где $f_1(\xi), f_2(\eta)$ —произвольные дважды дифференцируемые функции своих аргументов

$$\xi = x - a_0t, \quad \eta = x + a_0t$$

Действительно

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} = f_1''(\xi) + f_2''(\eta) = \frac{1}{a_0^2} \frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = \frac{1}{a_0^2} a_0^2 [f_1''(\xi) + f_2''(\eta)]$$

Прогрессивные волны.

Рассмотрим случай

$$\phi = f_1(x - a_0t) = f_1(\xi)$$

и допустим, что в момент времени $t = 0$ потенциал возмущенного движения имеет вид, изображенный на рис.

т.е. функция $f_1(\xi)$ отлична от нуля только на участке от 0 до $x_0 = \xi_0$.

В любой последующий момент времени $t > 0$

$$\phi(x, t) = f_1(x - a_0t) = f_1(\xi)$$

и потенциал $\phi(x, t)$ отличен от нуля только при $0 \leq x - a_0t \leq x_0$, т.е. при $a_0t \leq x \leq x_0 + a_0t$.

Следовательно, область возмущенного движения переместится вправо по оси Ox на расстояние a_0t .

Поступательная скорость распространения первоначального возмущения вдоль оси Ox будет равна

$$a_0 = \sqrt{\left(\frac{dp}{d\rho}\right)_0} -- \text{"скорости звука" в невозмущенном состоянии покоя}$$

Отсюда непосредственно видно, что **скорость a_0 действительно представляет собой скорость распространения слабых возмущений, этим и оправдывается название a_0 - "скорость звука"**, так как в частности звуковые колебания можно рассматривать как малые механические возмущения в жидкостях, газах и вообще в деформируемых средах.

Рассматриваемое возмущенное движение представляет собой перемещающуюся поступательно вправо прогресивную волну неизменного вида.

Существенной особенностью решения для плоских волн при малых возмущениях является свойство сохранения в пространстве формы возмущения.

Аналогично, решение

$$\phi(x, t) = f_2(x + a_0 t) = f_1(\eta)$$

представляет собой прогресивную волну, распространяющуюся влево со скоростью a_0 , а сумма решений представляет собой сумму двух прогресивных волн, одна из которых распространяется вправо, а другая влево вдоль оси Ox со скоростью звука a_0 . В общем случае если f_1, f_2 отличны от нуля только на конечном интервале $0 \leq \xi \leq x_0$ и $0 \leq \eta \leq x_0$ с течением времени произойдет разделение первоначального возмущения на две отдельные прогресивные волны, распространяющиеся в разные стороны. Это разделение произойдет за конечное время $t_1 = x_0/a_0$.

В случае возмущенного движения со сферическими волнами предполагается, что движение газа обладает сферической симметрией относительно начала координат. При этом потенциал возмущенного движения зависит только от $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ и от времени t . Так как в этом случае

$$\Delta\phi = \frac{1}{r} \frac{\partial^2(r\phi)}{\partial r^2}$$

то волновое уравнение со сферическими волнами имеет вид

$$\frac{\partial^2(r\phi)}{\partial r^2} = \frac{1}{a_0^2} \frac{\partial^2(r\phi)}{\partial t^2}$$

Общее решение уравнения со сферическими волнами можно представить в виде

$$\phi = \frac{f_1(r - a_0 t)}{r} + \frac{f_2(r + a_0 t)}{r}$$

где f_1, f_2 – произвольные дважды дифференцируемые функции своего аргумента $r \pm a_0 t$.

Рассмотрим решение вида

$$\phi = -\frac{Q(a_0 t - r)}{4\pi r}$$

где Q – аналитическая функция своего аргумента. Этот потенциал скоростей, удовлетворяющий волновому уравнению, можно рассматривать как обобщение соответствующего потенциала от источника в несжимаемой жидкости

$$\phi = -\frac{Q(t)}{4\pi r},$$

удовлетворяющего уравнению Лапласа.

Действительно, при малых r , разложив Q в ряд Тейлора получим

$$\phi = -\frac{Q(a_0 t)}{4\pi r} + \frac{Q'(a_0 t)}{4\pi} + O(r),$$

главный член которого совпадает с выражением для потенциала скоростей течения от источника, расположенного в точке $r = 0$ в несжимаемой жидкости. Переменный объемный расход этого источника определяется функцией $Q(a_0 t)$.

Рассматриваемое решение представляет собой **движение с расходящимися от точки $r = 0$ сферическими волнами**.

Пусть в точке $r = 0$ безграничной массы жидкости имеется источник, который действует некоторый малый промежуток времени τ . Зависимость расхода этого источника $Q(a_0 t)$ от времени t имеет вид, изображенный на рис.

Из вида решения ясно, что при $t > 0$ и $r > 0$ потенциал возмущенного течения будет отличен от нуля только тогда, когда $a_0 t - r$ будет лежать в пределах $0 \leq a_0 t - r \leq a_0 \tau$. Т.е. в каждый фиксированный момент времени $t > 0$ потенциал ϕ будет отличен от нуля только для тех r , которые удовлетворяют неравенству

$$a_0(t - \tau) \leq r \leq a_0 t$$

Таким образом область возмущенного течения будет расположена между двумя сферами S_1 и S_2 радиусов $r_1 = a_0(t - \tau)$ и $r_2 = a_0 t = r_1 + a_0 \tau$ с центрами в точке $r = 0$.

Указанная область возмущений подвижна. Ее передний и задний фронты возмущения распространяются по жидкости со скоростью

$$\frac{dr_1}{dt} = \frac{dr_2}{dt} = a_0$$

В противоположность плоским волнам, форма которых при их распространении сохраняется, интенсивность сферических волн при их распространении со временем падает благодаря наличию множителя $1/r$. Это связано с тем, что распространяясь возмущения захватывают область пространства между двумя сферами S_1 и S_2 объем которой возрастает пропорционально r^2 .

Аналогично можно рассмотреть решение волнового уравнения вида

$$\phi = \frac{Q(r + a_0 t)}{4\pi r},$$

которое представляет собой **сходящиеся из бесконечности к точке $r = 0$ сферические волны (источник в бесконечности)**.

Запаздывающие потенциалы. Эффект Доплера.

Возмущения, посланные источником в несжимаемой жидкости мгновенно распространяются на всю массу жидкости.

В сжимаемых средах возмущения распространяются с конечной скоростью, причем малые возмущения распространяются со скоростью звука a_0 .

Таким образом, возмущения посланные из точки $r = 0$ доходят до некоторой точки через определенное время. Поэтому решения такого вида называются **запаздывающими потенциалами**.

С помощью рассмотренных решений можно строить другие решения.

Изучим поле возмущений от источника, движущегося в бесконечной массе жидкости вдоль прямой с постоянной дозвуковой скоростью $U_0 < a_0$.

Пусть в некоторый начальный момент времени t_1 источник находился в точке с координатой x_1 , все возмущения от него также сосредоточены в этой же точке. За промежуток времени $t_2 - t_1$ источник передвинется на расстояние $U_0(t_2 - t_1)$ и попадет в точку M_2 с координатой x_2 . Возмущения за это время из точки M_1 распространятся до поверхности сферы радиуса $r_1 = (t_2 - t_1)a_0$ с центром в точке M_1 и обгонят источник ($r_1 > x_2 - x_1 = M_1 M_2$).

Итак, возмущения от источника обгоняют сам источник, и он движется уже по возмущенной среде.

Во-вторых возмущения посланные источником из предыдущих положений всегда обгоняют возмущения посланные источником из последующих положений, и если он двигался бесконечно долго, то вся среда перед и за источником возмущена.

В третьих, картина распространения возмущений от подвижного источника несимметрична. Впереди источника звук имеет большую частоту, чем за ним.

Последнее обстоятельство объясняет так называемый **эффект Доплера**, который заключается в том, что наблюдатель, стоящий впереди приближающегося подвижного источника слышит звук более высокого тона, чем наблюдатель, стоящий позади удаляющегося источника.

Аналогично подвижный, удаляющийся от Земли источник света (например звезда) дает отклонение в сторону красных спектральных линий, соответствующих световым волнам большой длины. Приближающийся к Земле подвижный источник света дает отклонение в сторону фиолетовой части спектра, соответствующей более коротким световым волнам. По величине отклонения спектральных линий можно судить о скорости движения звезды относительно Земли.

Распространение возмущений от источника, движущегося со сверхзвуковой скоростью.

В этом случае возмущения от источника, расположенного в момент t_1 в точке M_1 , в момент времени t_2 достигнут поверхности сферы радиуса $r_1 = (t_2 - t_1)a_0$ с центром в точке M_1 . В силу того, что $U_0 > a_0$ путь пройденный источником $(t_2 - t_1)U_0$ будет больше r_1 . Возмущения, посланные источником в моменты времени t большие t_1 и меньшие t_2 достигнут поверхностей соответствующих сфер радиусов $r = (t_2 - t)a_0$ с центрами в точках $M(x)$, и все эти возмущения будут оставаться позади источника.

Таким образом, среда впереди источника движущегося со сверхзвуковой скоростью не возмущена. Наблюдатель стоящий впереди источника движущегося со сверхзвуковой скоростью не знает, что к нему приближается источник возмущений.

Конус и угол Маха

Очевидно, что все возмущения от источника, начавшего двигаться с постоянной сверхзвуковой скоростью бесконечно давно, в произвольный момент времени t_{02} будут заключены внутри кругового конуса, вершина которого находится в точке M_2 , а боковая поверхность является огибающей сфер радиусов $r = a_0(t_{02} - t_0)$, где $t_0 \leq t_{02}$.

Этот конус отделяет возмущенную область от невозмущенной и называется конусом Маха. Половина угла полураствора конуса Маха называется углом Маха. Его синус равен обратной величине числа Маха

$$M = \frac{U_0}{a_0}$$

Действительно,

$$\sin \alpha = \frac{r_1}{M_1 M_2} = \frac{a_0}{U_0} = \frac{1}{M}$$

Скорость распространения конуса Маха по среде равна скорости звука.

Замечание.

На поверхности конуса Маха сопрягаются два решения волнового уравнения, соответствующие состоянию покоя ($\phi = 0$) и состоянию возмущенного движения ($\phi = \phi(x, y, z)$). Подобные поверхности сопряжения решений с различными аналитическими свойствами называются характеристическим поверхностью уравнений с частными производными. Характеристическая поверхность является в общем случае поверхностью разрыва возмущений. В нашем случае это будет поверхность слабого разрыва.

8. Упругие волны в изотропной среде .

Уравнения Ламе в случае малых относительных перемещений, не сопровождающихся изменением температуры ($T = const$) имеют вид

$$\rho \frac{\partial^2 \vec{w}}{\partial t^2} = (\lambda_1 + \mu_1) \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{w} + \mu_1 \Delta \vec{w} + \rho \vec{F}$$

Рассмотрим случай распространения плоской упругой волны в неограниченной изотропной среде, т.е. волны, в которой перемещения зависят только от одной из декартовых координат, например x и времени t . Будем предполагать, что массовые силы отсутствуют ($\vec{F} = 0$).

В этом случае для компонент вектора \vec{w} получим следующие уравнения

$$\frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} = \frac{1}{a_1^2} \frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2} = \frac{1}{a_2^2} \frac{\partial^2 w_2}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial^2 w_3}{\partial x^2} = \frac{1}{a_2^2} \frac{\partial^2 w_3}{\partial t^2},$$

где

$$a_1 = \sqrt{\frac{\lambda_1 + 2\mu_1}{\rho}}, \quad a_2 = \sqrt{\frac{\mu_1}{\rho}}$$

Эти уравнения представляют собой обычные волновые уравнения. Видно, что скорости распространения возмущения компоненты w_1 и компоненты w_2 и w_3 различны.

Следовательно плоская упругая волна представляет собой две независимо распространяющиеся волны. В одной из них (w_1) смещение совпадает с направлением распространения самой волны. Такая волна называется **продольной и распространяется со скоростью a_1** , в другой смещение ($\vec{w}' = w_2 \vec{j} + w_3 \vec{k}$) лежит в плоскости ортогональной его направлению. Такая волна называется **поперечной и распространяется со скоростью a_2** .

Разделение упругой волны на две независимо распространяющиеся части можно провести и в случае произвольной (не плоской волны) распространяющейся в безграничном пространстве.

Лекция 16(15)
О начальных и граничных условиях.
Вязкая жидкость II.

План:

1. Начальные и граничные условия.
2. Число Рейнольдса. Закон подобия движения вязкой жидкости.
3. Приближение Стокса для движения с малыми числами Рейнольдса.
4. Понятие о пограничном слое.
5. Слоистые течения. Другие точные решения уравнений Навье–Стокса.
6. Опыт Рейнольдса. Турублентность. Уравнения Рейнольдса.

1. О граничных условиях в задачах механики сплошной среды.

Необходимость дополнительных условий, выделяющих отдельные движения.

После выбора модели для выделения определенного явления или класса явлений (движений) требуется выставлять еще дополнительные условия.

Действительно, в рамках модели несжимаемой идеальной жидкости можно рассматривать разнообразные движения воды, воздуха, нефти и многих других жидкостей и газов когда сжимаемостью можно пренебречь.

Например, это могут быть течения и волновые движения воды в океанах, движения воды в струях, вытекающих из сосудов, движения воды через водосливы в плотинах, движения воды вызванные движением кораблей, движения воздуха, вызванные движением дирижаблей и самолетов и т.д.

Во многих перечисленных случаях можно пользоваться одной и той же системой дифференциальных уравнений, выполняющихся в каждой точке объема, занятого жидкостью.

Однако, этой замкнутой системы уравнений недостаточно для решения математической задачи об определении поля скоростей и давления в объеме. **Общие решения дифференциальных уравнений движения содержат произвольные функции и постоянные, которые нужно определять из специальных условий.**

К этим специальным условиям в первую очередь относятся **начальные и граничные условия**.

Начальные условия. В качестве дополнительных данных для нестационарных движений, в зависимости от вида уравнений, необходимо задавать искомые функции и некоторые производные от них по времени при $t = t_0$.

В теории дифференциальных уравнений (обыкновенных или частных производных) большое значение имеет задача Коши, которая, например, для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка

$$\frac{d^2x}{dt^2} = f\left(t, x, \frac{dx}{dt}\right)$$

формулируется следующим образом. Найти такое решение $x(t)$ уравнения, для которого при $t = t_0$ выполняются условия

$$(x)_{t=t_0} = x_0, \quad \left(\frac{dx}{dt}\right)_{t=t_0} = x'_0$$

где t_0, x_0, x'_0 —заданные числа.

Аналогичным образом можно ввести задачу Коши для дифференциальных уравнений в частных производных.

Из теории дифференциальных уравнений известно, что во многих важных случаях задача Коши имеет единственное решение. **Такие дополнительные данные называются начальными данными или данным Коши.**

Краевые условия.

Если область движения D конечна или бесконечна, но имеет границу S , то кроме начальных условий, для получения определенных решений необходимо еще выставлять и **пользоваться специальными условиями на границе S . Эти условия называются краевыми или граничными условиями.**

Эти условия могут быть самого разнообразного вида. Они выставляются на основе дополнительных физических соображений. При формулировке граничных условий следует опираться на общие условия на поверхностях сильных разрывов.

Замечание 1.

1. При решении задач для области D , включающей **бесконечность**, на основе предположений физического характера необходимо задавать дополнительные условия в бесконечности.

В качестве таких условий **во многих случаях предполагается, что исследуемое явление носит характер местного возмущения и что при удалении в бесконечность состояние и движение среды заданы.**

Примеры: движение тела в безграничной массе жидкости, обтекание неподвижных тел потоком газа.

Могут быть более сложные условия (например, заданы по разным направлениям волны разного типа и т.п.)

2. Для учета воздействий на среду или поле **можно вводить особые точки** в конечной области D в которых асимптотическое поведение функций задано. (Точечные диполи и мультиполи по массовому расходу, заряды, и т.д.). Их присутствие может быть обусловлено наличием некоторых внешних воздействий, которые не учитываются в уравнениях движения.

Рассмотрим некоторые типичные примеры.

Условия прилипания на границах для перемещений и скоростей.

Предположим, что положение и движение всей граничной поверхности S или какой либо ее части S_1 известны. При подходе к граничной поверхности S_1 со стороны среды по определению мы имеем контакт между средой и ее границей S_1 , поэтому **перемещения индивидуальных точек среды на S_1 и самой поверхности S_1 должны быть связаны условием сохранения контакта**. При отсутствии проскальзывания точек среды по касательной к поверхности S_1 векторы перемещений точек среды $\vec{w}_{\text{среды}}$ и точек поверхности $\vec{w}_{\text{границы}}$ будут одинаковы.

При этом на поверхности S_1 имеют место соотношения:

$$\vec{w}_{\text{среды}} = \vec{w}_{\text{границы}}, \quad \vec{v}_{\text{среды}} = \vec{v}_{\text{границы}}$$

В теории упругости главное значение имеют условия для перемещений, так как перемещениями определяются тензоры деформаций и напряжений.

В теории движения жидких и газообразных тел перемещения частиц не входят непосредственно в уравнения движения, в них входят компоненты скорости, поэтому в гидродинамике основную роль играет условие для скоростей.

Очевидно, что при непрерывных движениях условие для скоростей выполняется автоматически, если удовлетворяется условие для перемещений.

Условия обтекания идеальной жидкостью.

Число начальных и граничных условий зависит от порядка системы уравнений, и поэтому граничные условия и их число различны для разных моделей.

Например, динамические уравнения идеальной жидкости —уравнения Эйлера содержат частные производные только первого порядка от компонент скорости по координатам.

Условия прилипания для идеальной жидкости черезтур сильны. При условии полного прилипания к стенкам не существует решения уравнений Эйлера, поэтому для идеальной жидкости и газа необходимо допускать возможность проскальзывания частиц жидкости на границе с твердыми или деформируемыми телами.

Для идеальной жидкости условие прилипания ослабляется и заменяется одним скалярным условием

$$v_{n \text{ жидк}} = v_{n \text{ границы}} \quad \text{на} \quad S_1$$

где v_n — нормальные к S_1 составляющие скоростей частиц жидкости и граничной поверхности. Это условие выражает собой сохранение контакта между жидкостью и заданной поверхностью. По этому условию жидкость не может протекать внутрь тел, соприкасающихся с ней по поверхности S_1 , и не может отрываться от поверхности S_1 . Поэтому оно называется **условием непротекания**.

При этом может быть проскальзывание жидкости вдоль поверхности

$$v_{\tau \text{ жидк}} \neq v_{\tau \text{ гран}}$$

Если движение жидкости потенциально ($\vec{v} = \operatorname{grad}\phi$), то условие непротекания можно записать в следующем виде

$$v_{n \text{ жидк}} = \frac{\partial \phi}{\partial n} = v_{n \text{ границы}} \quad \text{на} \quad S_1$$

Если дополнительно граница неподвижна, то

$$v_{n \text{ жидк}} = \frac{\partial \phi}{\partial n} = 0 \quad \text{на} \quad S_1$$

Условия на неизвестной и свободной границах.

Во многих задачах граница S или некоторая ее часть S_2 области непрерывного движения сплошной среды заранее неизвестна и должна быть определена в результате решения задачи. **На неизвестной границе S_2 обычно задаются внешние нагрузки.**

На площадках поверхности S_2 могут быть известны плотности поверхностных сил

$$\vec{p}_n = p_{nn} \vec{n} + p_{n\tau} \vec{\tau} = \vec{f}(M, t)$$

где M — точка поверхности S_2 .

При изучении вопросов о распространении упругих или сейсмических волн, в задачах о движении вязкой жидкости и др. можно рассматривать **поверхности, называемые свободными, на площадках которых поверхностные напряжения могут сводиться просто к атмосферному давлению, действующему по нормали \vec{n} к этим площадкам**. В этом случае получим условия

$$p_{nn} = -p_0, \quad \vec{p}_{n\tau} = 0$$

где p_0 — величина атмосферного давления.

Условия на свободной границе в идеальной жидкости..

В соответствие с определением идеальной жидкости

$$\vec{p}_n \cdot \vec{\tau} = 0.$$

Поэтому на свободной границе в идеальной жидкости имеем только одно условие

$$p = p_0$$

где p_0 — заданная величина давления во внешней среде.

Замечание 2.

1. На границах могут быть и **другие условия, которые связаны с другими уравнениями системы**. Например, на границе может быть задана температура или поток тепла, условия для векторов электромагнитного поля.

2. Число Рейнольдса. Закон подобия движения вязкой жидкости.

Закон подобия.

При изучении движения сплошных сред, в том числе и вязких жидкостей можно получить ряд существенных результатов из простых соображений, связанных с размерностью различных физических величин.

Основной теоремой теории размерностей и подобия является $\Pi - \text{теорема}$.

Согласно Π -теореме связь между $n + 1$ размерными величинами a, a_1, \dots, a_n независимая от выбора системы единиц измерения, принимает вид между соотношениями между $n + 1 - k$ величинами $\Pi, \Pi_1, \dots, \Pi_{n-k}$, представляющие собой безразмерные комбинации из $n + 1$ размерных величин. Здесь k — число параметров с независимыми размерностями.

Будем рассматривать движение тел одинаковой формы в жидкости.

Определения. **Телами одинаковой формы** называются тела геометрически подобные, т.е. такие, которые могут быть получены друг из друга изменением всех размеров в одинаковое количество раз. Если форма тела задана, то для полного определения его размеров достаточно указать какой-либо из его линейных размеров (радиус шара или цилиндрической трубы и т.д.).

Течения называются подобными если они могут быть получены друг из друга простым изменением масштаба измерения координат и искомых параметров.

Найдем условия того, чтобы течения были подобны.

Будем рассматривать движение вязкой жидкости. Динамические уравнения определяющие это движение будут уравнения Навье–Стокса:

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = \rho \vec{F} - \operatorname{grad} p + \left(\zeta + \frac{\mu}{3} \right) \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{v} + \mu \Delta \vec{v}$$

Они существенно упрощаются если жидкость можно считать несжимаемой. Будем считать также, что внешние массовые силы на жидкость не действуют. В этом случае имеем

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = -\operatorname{grad} p + \mu \Delta \vec{v}$$

Рассмотрим вначале стационарные движения несжимаемой жидкости. Из параметров, характеризующих саму жидкость, в уравнения входит только вязкость μ и плотность ρ . Кроме того, течение жидкости зависит посредством граничных условий от формы и размеров движущегося в жидкости тела и от его скорости. Поскольку форма тела считается заданной (рассматриваем геометрически подобные тела), то его геометрические свойства определяются всего одним каким-либо линейным размером L . Скорость набегающего потока обозначим через U .

Неизвестными же функциями являются

скорость \vec{v} и давление p

Таким образом, каждый тип движения жидкости определяется параметрами: ρ, μ, U, L . Их размерности:

$$[\rho] = \text{г/см}^3, [\mu] = \text{см} \cdot \text{с}, [L] = \text{см}, [U] = \text{см/с}$$

Из этих величин можно составить всего одну независимую безразмерную комбинацию

$$Re = \frac{\rho LU}{\mu} = \frac{LU}{\nu}, \quad \nu = \frac{\mu}{\rho}$$

Эту комбинацию называют числом Рейнольдса.

Будем измерять длины в единицах L , скорости в единицах U , т.е. введем безразмерные переменные $\vec{r}/L, \vec{v}/U$.

Тогда получающееся в результате решения гидродинамических уравнений распределение скоростей определяется функцией вида

$$\vec{v} = U \vec{f} \left(\frac{\vec{r}}{L}, Re \right)$$

Из этого выражения видно, что в двух различных течениях одного и того же типа (например, обтекание шаров различного радиуса жидкостями различной вязкости) безразмерные скорости \vec{v}/U являются одинаковыми функциями отношения \vec{r}/L , если числа Рейнольдса для этих отношений одинаковы.

Таким образом, имеем **закон подобия Рейнольдса** (*O. Reynolds, 1883*): течения одинакового типа с одинаковым числом Рейнольдса подобны.

Аналогичную формулу можно написать и для распределения давления в жидкости

$$p = \rho U^2 f \left(\frac{\vec{r}}{L}, Re \right)$$

Наконец, аналогичные соображения применимы к величинам, характеризующим течение жидкости, но не являющиеся функциями координат.

Сила сопротивления

$$F = \rho U^2 L^2 f (Re)$$

Если влияние силы тяжести на движение существенно, то движение определяется не тремя, а четырьмя параметрами: ρ, L, U, μ и ускорением силы тяжести g . Из этих переменных можно составить уже не одну, а две независимые безразмерные комбинации. В качестве их можно выбрать, например, число Рейнольдса и **число Фруда**, равное

$$Fr = \frac{U^2}{Lg}$$

Течение будет подобным, лишь при равенстве этих двух чисел.

Нестационарное движение характеризуется еще значением какого-либо характерного для этого движения интервала времени τ , определяющего изменение движения со временем. Из величин ρ, L, U, μ, τ можно составить не одну, а две независимые безразмерные переменные, в качестве которых можно взять число Рейнольдса и **число Струхала**

$$St = \frac{U\tau}{L}$$

Подобие движений имеет место при равенстве этих чисел.

Напомним, что если **существенна сжимаемость**, то возникает еще один безразмерный параметр, характеризующий течение — **число Маха**

$$M = \frac{U}{a}$$

где a — скорость звука.

3. Приближение Стокса для движения с малыми числами Рейнольдса.

Рассмотрим прямолинейное и равномерное медленное движение шара в вязкой жидкости (G.G. Stokes, 1851). Эта задача эквивалентна задаче об обтекании шара потоком жидкости имеющим на бесконечностии заданную скорость \vec{U} . Если мы рассматриваем движение как стационарное, то нужно говорить об обтекании жидкостью неподвижного шара, так как при движущемся шаре скорость жидкости в каждой точке пространства меняется со временем.

Для стационарного движения несжимаемой жидкости уравнения Навье–Стокса имеют вид

$$(\vec{v}) \nabla \vec{v} = -\frac{1}{\rho} grad p + \nu \Delta \vec{v}$$

Сравним инерционный и вязкий члены уравнения.

Инерционный член $(\vec{v}) \nabla \vec{v}$ имеет порядок величины U^2/L , а выражение $\nu \Delta \vec{v} \approx \nu U/L^2$.

Отношение первой величины ко второй есть число Рейнольдса.

Поэтому при $Re \ll 1$ инерционным членом $(\vec{v})\nabla\vec{v}$ можно пренебречь и уравнения движения сводятся к линейным

$$\mu\Delta\vec{v} - \text{grad } p = 0$$

Вместе с уравнением неразрывности

$$\text{div } \vec{v} = 0$$

оно полностью определяет движение.

Если от обеих частей уравнения взять операцию rot , то получим

$$\Delta \text{rot}\vec{v} = 0$$

Заметим также, что из уравнения движения и уравнения неразрывности следует, что

$$\Delta p = 0$$

Границными условиями будут заданная скорость на бесконечности

$$\vec{v} = \vec{U} \quad \text{при} \quad \vec{r} \rightarrow \infty$$

и условия прилипания на поверхности шара

$$\vec{v} = 0 \quad \text{при} \quad r = R$$

Из математической постановки задачи заметим, что плотность здесь не является определяющим параметром. Системой определяющих параметров в этом случае служат три параметра: диаметр шара d , скорость U и вязкость μ . Их произведение дает размерность силы. Следовательно, сила действующая на тело в этом случае будет

$$F = \mu d U f(\alpha), \quad [F] = \text{г} \cdot \text{см}/\text{с}^2$$

где α – угол атаки (направление скорости существенно).

Отсюда видно, что сопротивление и подъемная сила пропорциональны скорости, коэффициенту вязкости и линейному масштабу. Этот закон, который называется **законом Стокса** хорошо согласуется с опытами при малой скорости движения малых тел, например при оседании мелких частиц в жидкости.

Таким образом, с помощью теории размерности мы установили, что если пренебречь инерционными членами в уравнениях Навье–Стокса, то закон Стокса справедлив для тел любой формы. Функцию $f(\alpha)$ можно определить экспериментально или теоретически, решая упрощенные уравнения Навье–Стокса.

Для шара функция

$$f(\alpha) = c = \text{const}$$

т.е. не зависит от угла α .

Теоретическое значение коэффициента c для медленных движений шара было вычислено Стоксом. Оно оказалось равным 3π (если d – диаметр шара).

4. Понятие о пограничном слое. Уравнения пограничного слоя.

1. Введение.

Перейдем к рассмотрению второго предельного случая, случая очень малых сил вязкости или, в более общем виде, случая очень большого числа Рейнольдса.

Большинство практически важных задач, в том числе задач гиперзвуковой аэродинамики, характеризуется высокими скоростями и телами больших размеров, движением в средах малой вязкости (воздух, другие газы). Характерные числа Рейнольдса в этом случае весьма велики.

В указанных задачах часто используются приближенные модели.

Некоторые из них мы уже рассматривали.

1. Если пренебречь вязкими членами в уравнениях Навье – Стокса (и другими, связанными с молекулярным переносом), то имеем **уравнения Эйлера**. Они на порядок ниже уравнений Навье –

Стокса. Поэтому одно из граничных условий для реальных жидкостей не может быть удовлетворено (условие прилипания).

Если в областях, далеких от твердой стенки решения уравнений Эйлера дают хорошие результаты, то в областях вблизи поверхности хорошего соответствия с действительностью не наблюдается.

Многие важные явления, такие как поверхностное трение и теплопередачу, нельзя исследовать с помощью уравнений Эйлера. Необходимо использовать другие приближенные модели.

2. Знаменательный успех в исследовании движений жидкости при больших числах Рейнольдса был достигнут в 1904 г. Л. Прандтлем, показавшим, каким образом проявляет себя вязкость при больших числах Рейнольдса и каким путем можно упростить уравнения Навье–Стокса для того, чтобы получить их решения в предельном случае малых сил вязкости.

Развитая им теория –**теория пограничного слоя** остается до последнего времени наиболее эффективной приближенной теорией при исследовании движения тел с большими скоростями.

Суть этой теории заключается в следующем.

Считается, что влияние вязкости и других процессов связанных с молекулярным переносом ограничивается очень тонким пограничным слоем вблизи поверхности, величина которого стремится к нулю при увеличении числа Рейнольдса.

Вне пограничного слоя течение считается невязким и описывается уравнениями Эйлера. При этом влияние пограничного слоя на течение не учитывается.

В пограничном слое считается, что вязкие и инерционные члены имеют один порядок, при этом уравнения Навье - Стокса упрощаются, однако их порядок сохраняется и, следовательно, все граничные условия могут быть сохранены.

Граничные условия на внешней границе пограничного слоя не совпадают с граничным условием на бесконечности. Они будут соответствовать условиям в реальном течении непосредственно за пределами пограничного слоя. Обычно принимается, что в силу тонкости пограничного слоя они соответствуют невязкому решению на поверхности.

Таким образом, предполагается, что взаимодействие между пограничным слоем и основным потоком мало и, первоначально решается задача для невязкого течения, а затем для пограничного слоя.

2. Уравнения пограничного слоя.

Для наглядности остановимся на простом примере плоскопаралельного течения около тонкого цилиндрического тела.

Рассмотрим картину течения.

На некотором расстоянии от поверхности тела внутри жидкости преобладают силы инерции, действие вязкости там почти не проявляется. Скорость течения почти до самой поверхности тела имеет порядок скорости на бесконечности U . Картина линий тока, а также распределение скорости имеет практически такой же вид, как и при потенциальном течении жидкости без трения.

Однако, вблизи поверхности жидкость не скользит по поверхности тела, а прилипает к ней. Переход от нулевой скорости на поверхности к полной скорости совершается в очень тонком пограничном слое, называемом пограничным или слоем трения.

Таким образом, имеем две области течения:

1. Тонкий слой вблизи поверхности. В этой области градиент скорости в направлении перпендикулярном стенке $\frac{\partial u}{\partial y}$ очень велик, а вязкость μ как бы мала она ни мала, оказывает существенное влияние на течение, поскольку здесь касательное напряжение $\tau = \mu \frac{\partial u}{\partial y}$ может принимать большие значения.

2. Все остальное течение вне пограничного слоя. В этой области градиент скорости не достигает таких больших значений, как в пограничном слое, поэтому действие вязкости здесь не играет роли и течение можно считать потенциальным.

Пограничный слой тем тоньше, чем меньше вязкость или, в более общей формулировке, число Рейнольдса.

Будем предполагать, что толщина пограничного слоя δ много меньше, чем характерный размер тела L

$$\delta \ll L$$

Считая вязкость постоянной и пренебрегая массовыми силами запишем уравнения Навье-Стокса в виде

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\mu}{\rho} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\mu}{\rho} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0\end{aligned}$$

Границными условиями будут
условия прилипания при $y = 0$

$$u = v = 0,$$

$$u = U, \quad v = 0, \quad (\text{условия в набегающем потоке})$$

Запишем уравнения в безразмерном виде. Все скорости обезразмерим на U , длины на L , давление на ρU^2 , время на L/U . Толщину пограничного слоя δ отнесем к L .

В результате уравнения Навье-Стокса в безразмерных переменных запишутся в виде

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} &= -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0\end{aligned}$$

Здесь для безразмерных переменных принятые те же обозначения, что и для размерных.

Заметим, что вязкие члены уравнений входят в уравнения с малым множителем $\frac{1}{Re}$. Тем не менее некоторые из этих членов должны быть одного порядка с инерционными членами, по крайней мере в непосредственной близости от стенки. Следовательно, в непосредственной близости от поверхности некоторые из вторых производных от скорости должны быть велики.

Оценим порядки членов в полученных уравнениях.

1. Величины u , $\frac{\partial u}{\partial x}$ и $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ имеют порядок единицы в соответствии с выбором характерного размера.

2. Будем предполагать, что величина локального ускорения имеет тот же порядок, что и величина конвективного ускорения, т.е порядок единицы. Это предположение означает, что из рассмотрения исключаются внезалные ускорения, подобные тем, что возникают при сильных волнах давления.

3. Из уравнения неразрывности следует, что величина $\frac{\partial v}{\partial y}$ также имеет порядок единицы.

Так как на поверхности $v = 0$, то в пограничном слое величина скорости v имеет порядок δ :

$$v = - \int_0^\delta \frac{\partial u}{\partial x} dy \sim \delta$$

4. Далее оценки показывают, что

$$\frac{\partial v}{\partial x} \sim \delta, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \sim \delta, \quad \frac{\partial v}{\partial y} \sim \frac{\delta}{\delta} \sim 1, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \sim \frac{1}{\delta}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} \sim \frac{1}{\delta}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \sim \frac{1}{\delta^2},$$

Подписав эти оценки под соответствующими членами уравнений, из первого уравнения заметим, что величина членов зависящих от вязкости может быть одного порядка с величиной инерционных членов только при условии

$$\frac{1}{Re} = \delta^2$$

Если отбросить члены порядка δ и перейти к размерным переменным, то получим уравнения пограничного слоя Прандтля

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\ \frac{\partial p}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0\end{aligned}$$

С граничными условиями прилипания при $y = 0$

$$u = v = 0$$

и совпадения скорости на внешней границе пограничного слоя со скоростью внешнего течения при $y \rightarrow \infty$

$$u = V, \quad v = 0$$

Таким образом, для течений с большими числами Рейнольдса уравнение неразрывности остается неизменным.

В первом уравнении можно отбросить величину $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ как малую по сравнению с величиной $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$.

Из второго уравнения следует, что величина $\frac{\partial p}{\partial y}$ имеет порядок δ . Следовательно, величина разности давлений поперек пограничного слоя имеет порядок δ^2 . Ее можно вычислить интегрированием поперек слоя второго уравнения. Подчеркнем, что давление поперек пограничного слоя практически не меняется. Его можно принять равным тому давлению, которое имеет место на внешней границе пограничного слоя и которое определяется течением идеальной жидкости.

Градиент давления вдоль поверхности $\frac{\partial p}{\partial x}$ определяется из уравнений движения для внешней области течения в проекции на продольную координату

$$\frac{\partial V}{\partial t} + V \frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}$$

Скорость $V(x, t)$ следует рассматривать как известную функцию определяющую распределение давления. Она является решением внешней невязкой задачи. При этом решаются уравнения Эйлера с граничными условиями снесеными на обтекаемую поверхность. Потенциальное обтекание рассматриваемого тела с равной нулю нормальной составляющей скорости на поверхности является хорошим приближением для внешнего течения вязкой жидкости.

Действительно, на внешней границе пограничного слоя продольная скорость u перейдет в скорость $V(x, t)$ внешнего течения. Так как здесь уже нет сильного градиента скорости в направлении, перпендикулярном стенке, то теперь в проекции уравнений Навье–Стокса отпадают все члены зависящие от вязкости. Поэтому для внешнего течения имеем

$$\frac{\partial V}{\partial t} + V \frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}$$

В стационарном течении несжимаемой жидкости, проинтегрировав получим интеграл Бернуlli

$$p + \frac{\rho}{2} V^2 = \text{const}$$

IV. Пример Прандтля.

Поясним суть теории пограничного слоя одним очень простым примером, указанным Прандтлем - автором теории пограничного слоя.

Рассмотрим затухающие колебания материальной точки на жесткой пружинке. Такого рода движение определяется дифференциальным уравнением

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + k \frac{dx}{dt} + cx = 0$$

Где m - масса колеблющейся точки, k - коэффициент затухания, c - коэффициент востанавливающей силы, x - расстояние от колеблющейся точки до положения равновесия, t - время.

Будем считать, что при $t = 0$, $x = 0$.

Рассмотрим случай очень малой массы m .

Исследуем решение дифференциального уравнения при малых m сначала путем подстановки $m = 0$ в заданное дифференциальное уравнение, а затем путем подстановки $m = 0$ в полное решение дифференциального уравнения.

1. При $m = 0$ получим дифференциальное уравнение более низкого порядка

$$k \frac{dx}{dt} + cx = 0$$

Его решением будет

$$x = A \exp\left(\frac{-ct}{k}\right)$$

Заметим, что его решение не удовлетворяет граничному условию при $t = 0$.

2. Общее решение первоначального (полного) уравнения

$$x = A_1 \exp\left(\frac{-ct}{k}\right) + A_2 \exp\left(\frac{-kt}{m}\right)$$

Если при $t = 0$, $x = 0$, то $A_2 = -A_1 = -A$.

Следовательно,

$$x = A \exp\left(\frac{-ct}{k}\right) - A \exp\left(\frac{-kt}{m}\right)$$

При $m \rightarrow 0$ полное решение переходит в решение упрощенного уравнения везде, кроме $t = 0$.

Это хорошо видно на графиках построенных для разных значений m .

Заметим, что решение полного дифференциального уравнения состоит из двух членов.

Первый член, равный A при $t = 0$, медленно уменьшается с возрастанием t (медленно меняющееся решение). Этот член тождественно совпадает с решением упрощенного дифференциального уравнения.

Второй член, равный A при $t = 0$, при возрастании t очень быстро затухает для малых m . Благодаря этому быстро меняющемуся решению общее решение дифференциального уравнения удовлетворяет граничному условию.

Наблюдается полная аналогия с теорией пограничного слоя.

Полное дифференциальное уравнение соответствует уравнениям Навье-Стокса, а упрощенное уравнение течения идеальной жидкости - уравнениям Эйлера.

Начальное условие соответствуют условиям прилипания.

Медленно меняющееся решение соответствует решению без учета трения, т.е. тому решению, которое не удовлетворяет условию прилипания на стенке.

Быстро меняющееся решение отвечает решению, зависящему от вязкости. Оно не равно нулю только в узком слое у стенки.

Присоединением решения, учитывающего картину течения в пограничном слое, становится возможным удовлетворить условию прилипания на стенке, благодаря чему полное решение приобретает физический смысл.

Замечание.

При предельном переходе $Re \rightarrow \infty$ не требуется сохранять все члены уравнений, зависящие от вязкости. Некоторые как пренебрежимо малые отбросить можно. Важно не отбрасывать все члены, которые зависят от вязкости, так как этот путь приводит бы к недопустимому понижению порядка уравнений.

План:

1. Слоистые течения: течение в канале, течение Куэтта, течение Хагена–Пуазейля в трубе.

Другие точные решения уравнений Навье–Стокса.

2. Опыт Рейнольдса. Тurbулентность. Уравнения Рейнольдса.

1. Слоистые течения: течение в канале, течение Куэтта, течение Хагена–Пуазейля.

Отыскание точных решений Уравнений Навье–Стокса в общем случае наталкивается на непреодолимые математические трудности из–за их нелинейности.

Тем не менее, в некоторых частных случаях все же можно найти точные решения уравнений Навье–Стокса. Такими частными случаями являются главным образом те, в которых нелинейные конвективные члены сами собой исчезают.

Мы рассмотрим некоторые точные решения и увидим, что их большая часть в предельном случае очень малой вязкости имеет такой же характер как в пограничном слое, т.е. в течениях, соответствующих этим решениям, действие трения проявляется только в тонком слое вблизи стенок.

Слоистые течения.

Особенно простой класс точных решений представляют так называемые **слоистые течения**, характерным признаком которых является существование в них лишь одной составляющей скорости. В таких течениях отдельные слои скользят один по другому, и притом так, что скорость везде имеет осевое направление. Движение такого вида называется **ламинарным течением** (от латинского слова "lamina" –слой).

Пусть, например, не равна нулю только составляющая скорости u . Составляющие же v и w всюду равны нулю. Тогда из уравнения неразрывности для несжимаемой жидкости следует, что

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

и

$$u = u(y, z, t), \quad v = 0, \quad w = 0$$

Из проекций уравнений Навье–Стокса на направления y и z получим

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial z} = 0,$$

Это означает, что давление в слоистом течении зависит только от координаты x и времени t :

$$p = p(x, t).$$

В проекции на ось x **выпадают все конвективные члены**, поэтому оно принимает более простой вид

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} = - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right)$$

Это уравнение является линейным дифференциальным уравнением относительно $u(y, z, t)$. Из него следует, что

$$\frac{\partial p}{\partial x} = const, \quad m.k. \quad u = u(y, z, t)$$

Течение в канале.

Эти уравнения очень просто решаются для стационарного плоского течения в канале ограниченном двумя плоскими стенками.

В этом случае имеем

$$\frac{dp}{dx} = \mu \frac{d^2 u}{dy^2}$$

Границными условиями будут

$$u = 0, \quad \text{при } y = \pm b$$

где расстояние между стенками равно $2b$.

Проинтегрировав уравнение получим

$$u = -\frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x} (b^2 - y^2)$$

Следовательно, в канале имеет место параболическое распределение скоростей.

Течение Куэтта.

Рассмотрим течение между двумя параллельными плоскими стенками, из которых одна поконится, а другая движется в своей плоскости с постоянной скоростью U .

Такое течение называется **течением Куэтта**.

Пусть расстояние между стенками равно h . Границными условиями будут

$$u = 0, \quad \text{при } y = 0, \quad u = U, \quad \text{при } y = h$$

Решение, тогда будет иметь вид

$$u = \frac{y}{h} U - \frac{h^2}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \frac{y}{h} \left(1 - \frac{y}{h}\right)$$

Распределение скоростей, даваемое этим решением для различных перепада давления, изображены на рис. .

В частности для нулевого перепада давления получается линейное распределение скоростей

$$u = \frac{y}{h} U$$

Течение с таким распределением скоростей называется **простым течением Куэтта или течением чистого сдвига**.

Течение Куэтта в более широком смысле, т.е. с перепадом давления, не равным нулю, представляет собой **наложение простого течения Куэтта и течения в канале**.

Течение Хагена–Пуазеля в трубе.

Пространственным осесимметричным слоистым течением является течение в прямолинейной трубе с круглым поперечным сечением с постоянным по всей длине диаметром $d = 2R$.

Скорость течения на стенках трубы вследствие прилипания равна нулю, в середине же трубы она имеет наибольшее значение.

В точках цилиндрических поверхностей, с осями совпадающими с осью трубы, скорость течения постоянна.

На достаточно большом расстоянии от входа в трубу распределение скоростей течения вдоль радиуса не зависит от координаты в продольном направлении.

Движение жидкости в трубе происходит под действием перепада давления в направлении оси трубы, но в каждом поперечном сечении, перпендикулярном к оси трубы, давление можно рассматривать как постоянное.

Вследствие трения от одного цилиндрического слоя к другому передается касательное напряжение, пропорциональное градиенту скорости $\frac{du}{dy}$. Следовательно, движение каждого элемента жидкости

ускоряется вследствие перепада давления и замедляется вследствие напряжения сдвига, вызванного трением. Другие силы на жидкость не действуют, в частности не действуют силы инерции, так как для каждой жидкокой струйки скорость в продольном направлении постоянна.

Для составления уравнения равновесия мысленно вырежем из жидкости, содержащейся в трубе цилиндр длиной l , радиусом y и с осью, совпадающей с осью трубы. В направлении оси x на вырезанный цилиндр действуют силы давления $p_1\pi y^2$ и $p_2\pi y^2$, приложенные к левому и правому основаниям цилиндра, и касательная сила $2\pi y l \cdot \tau$, действующая на боковую поверхность цилиндра. Приравняв разность сил давления $(p_1 - p_2)\pi y^2$ касательной силе, мы получим в качестве условия равновесия в направлении оси x уравнение

$$\tau = \frac{p_1 - p_2}{l} \frac{y}{2}$$

Для рассматриваемого случая скорость u уменьшается с увеличением координаты y . Поэтому на основании элементарного элементарного закона трения следует принять, что

$$\tau = -\mu \frac{du}{dy}$$

Подставив это значение в уравнение равновесия получим

$$\frac{du}{dy} = -\frac{p_1 - p_2}{\mu l} \frac{y}{2}$$

Или после интегрирования

$$u(y) = \frac{p_1 - p_2}{\mu l} \left(C - \frac{y^2}{4} \right)$$

Постоянную интегрирования C следует определять из условия прилипания жидкости к стенкам трубы

$$u(y) = 0 \quad \text{при} \quad y = R$$

Отсюда $C = \frac{R^2}{4}$, следовательно

$$u(y) = \frac{p_1 - p_2}{4\mu l} (R^2 - y^2)$$

Распределение скоростей в поперечном сечении изображается параболоидом вращения. Максимальная скорость течения имеет место в середине трубы и равна

$$u_m = \frac{p_1 - p_2}{4\mu l} R^2$$

Средняя скорость в поперечном сечении

$$\bar{u} = \frac{u_m}{2} = \frac{R^2}{8\mu} \left(-\frac{dp}{dx} \right)$$

Здесь

$$\frac{dp}{dx} = -\frac{p_1 - p_2}{l}$$

В единицу времени через поперечное сечение протекает количество жидкости (расход)

$$Q = \pi R^2 \bar{u} = \frac{\pi R^4}{8\mu} \left(-\frac{dp}{dx} \right)$$

Этот закон впервые был выведен Хагеном (1839) и вскоре повторно был найден Пуазейлем (1846). Если ввести коэффициент сопротивления c_p

$$\left(-\frac{dp}{dx} \right) = \frac{c_p \rho}{d} \frac{\bar{u}^2}{2}$$

получим

$$c_p = \frac{2d}{\rho u^2} \frac{8\mu \bar{u}}{R^2} = \frac{32\mu}{\rho \bar{u} R}$$

или

$$c_p = \frac{64}{Re}$$

где

$$Re = \frac{\rho \bar{u} d}{\mu}$$

Особая простота слоистых течений, рассмотренных выше, заключается в том, что для всех них конвективное ускорение, делающее уравнения нелинейными, всюду тождественно равно нулю.

Имеются и другие точные решения уравнений Навье–Стокса, когда конвективное ускорение не обращается в нуль. К таким решениям относятся :

плоское и пространственное течение вблизи критической точки,

течение вблизи вращающегося диска, течения в суживающемся и расширяющемся каналах.

2. Опыт Рейнольдса. Тurbulentность. Основы теории устойчивости ламинарного течения. Уравнения Рейнольдса.

Течения реальной жидкости во многих случаях резко отличаются от ламинарных течений, рассмотренных выше. Они обладают некоторым особым свойством, которое называется **турбулентностью**. При возрастании числа Рейнольдса в течениях реальной жидкости как в трубах и каналах, так и в пограничном слое на обтекаемом теле наблюдается отчетливо выраженный переход ламинарной формы течения в турбулентную. Этот переход имеет фундаментальное значение для всей аэрогидродинамики.

Раньше всего явление перехода было замечено при наблюдении течений в прямых трубах и каналах.

Опыт Рейнольдса.

Напомним, что в длинной прямой трубе с постоянным поперечным сечением и с гладкими стенками каждая частица жидкости движется при небольших числах Рейнольдса с постоянной скоростью по прямолинейной траектории. Вследствие вязкости частицы жидкости близкие к стенкам текут медленнее, чем частицы более удаленные от стенок. Течение происходит упорядоченным образом в виде движущихся один относительно другого слоев (слоистое или ламинарное течение).

Однако, наблюдения показывают, что при более высоких числах Рейнольдса течение перестает быть упорядоченным. Возникает сильное перемешивание, которое в случае течения в трубе **легко сделать видимым, если ввести в поток окрашенную струйку жидкости**. Впервые это сделал Рейнольдс (1883). До тех пор, пока течение остается ламинарным, введенная в него окрашенная жидкость движется в трубе в виде резко очерченной струйки, но, как только течение становится турбулентным, эта струйка расплывается и почти равномерно окрашивает всю движущуюся в трубе жидкость.

Это показывает, что при турбулентном течении на главное течение жидкости, происходящее в направлении оси трубы налагаются поперечные движения. Эти поперечные движения и приводят к перемешиванию в движущейся жидкости.

В результате такого перемешивающего движения происходит обмен импульсом в поперечном направлении, в то время как в продольном направлении каждая частица сохраняет свой импульс. Это приводит к тому, что распределение скоростей по поперечному сечению трубы получается значительно более равномерным, чем при ламинарном (Рис.)

Более подробный анализ турбулентного течения показывает, что его самым **основным признаком является следующий: скорость и давление в каждой фиксированной точке пространства не остаются постоянными во времени, а изменяются, претерпевая весьма не регулярные пульсации высокой частоты**. Скорость в фиксированной точке пространства можно рассматривать как величину, постоянную во времени, только в среднем и притом для сравнительно большого промежутка времени (квазистационарное движение).

Согласно закону подобия, открытому Рейнольдсем, переход ламинарной формы течения в турбулентную происходит при приблизительно одинаковом числе Рейнольдса

$$Re_{\text{критич}} = \frac{\rho \bar{w} d}{\mu} \approx 2300$$

где $\bar{w} = Q/S$ – средняя скорость течения.

Значение критического числа Рейнольдса существенно зависит от условий входа в трубу и условий притекания жидкости к этому входу. Уже Рейнольдс высказал предположение, что критическое число Рейнольдса тем больше, чем меньше возмущений в жидкости, притекающей к входу в трубу.

С переходом ламинарного течения в турбулентное связано также резкое изменение сопротивления в трубе. В то время как при ламинарном течении перепад давления, под действием которого происходит течение, пропорционален первой степени скорости течения, при турбулентном течении этот перепад пропорционален приблизительно квадрату средней скорости течения. Очевидно, что причиной повышения сопротивления является турбулентное перемешивание.

Основы теории устойчивости ламинарного течения.

Теоретические исследования, имевшие целью объяснить описанное выше явление перехода ламинарного течения в турбулентное, начались еще в прошлом столетии, но к успеху привели лишь в 1930 году (Прандтль).

В основе представлений о переходе ламинарного течения в турбулентное лежит представление о том, что ламинарное течение подвергается воздействию некоторых малых возмущений (условия на входе в трубу, шероховатость) и под их воздействием теряет устойчивость.

Каждая теория стремилась проследить за развитием во времени возмущений, наложенных на основное течение, причем форма этих возмущений особо определялась в каждом конкретном случае. Решающим вопросом, подлежащим решению, было установление того, затухают или нарастают возмущения с течением времени.

Предпосылкой для создания таких теорий служило впервые высказанное О. Рейнольдсем предположение о том, что ламинарное течение представляя собой решение гидродинамических уравнений и являясь поэтому всегда возможным течением, после перехода через определенную границу, а именно после достижения числом Рейнольдса критического значения, становится неустойчивым и переходит в турбулентное течение.

Только в начале тридцатых годов Прандтлю и его сотрудникам удалось на основе теории устойчивости теоретически найти критическое число Рейнольдса. Спустя еще десять лет Драйдену и его сотрудникам удалось подтвердить теорию устойчивости экспериментально.

Математическое исследование устойчивости движения по отношению к бесконечно малым возмущениям происходит по следующей схеме. На исследуемое стационарное течение, распределение скоростей в котором пусть будет $\vec{v}_0(\vec{r})$ накладывается нестационарное малое возмущение $\vec{v}_1(\vec{r})$, которое должно быть определено таким образом, чтобы результирующее решение $\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{v}_1(\vec{r})$ удовлетворяло уравнениям движения.

Уравнения для $\vec{v}_1(\vec{r})$ получаются подстановкой в уравнения суммарной скорости и давления $p = p_0 + p_1(\vec{r})$, причем считается, что известные функции \vec{v}_0, p_0 удовлетворяют уравнениям

$$(\vec{v}_0 \nabla) \vec{v}_0 = -\frac{\nabla p_0}{\rho} + \nu \Delta \vec{v}_0, \quad \operatorname{div} \vec{v}_0 = 0$$

Опуская члены малых порядков по величине \vec{v}_1 , получим

$$\frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t} + (\vec{v}_0 \nabla) \vec{v}_1 + (\vec{v}_1 \nabla) \vec{v}_0 = -\frac{\nabla p_1}{\rho} + \nu \Delta \vec{v}_1$$

Границным условием является исчезновение \vec{v}_1 на твердых неподвижных стенках.

Таким образом, \vec{v}_1 удовлетворяет системе линейных однородных дифференциальных уравнений с коэффициентами, являющимися функциями только от координат, но не от времени. Общее решение таких уравнений может быть представлено в виде частных решений, в которых \vec{v}_1 зависит от времени посредством множителей типа $e^{-i\omega t}$.

Для устойчивости движения необходимо, чтобы у всех возможных частот ω мнимая часть была отрицательна. Тогда возникающие возмущения будут экспоненциально затухать со временем.

Такое математическое исследование устойчивости, однако, крайне сложно. До настоящего времени не разработан теоретически вопрос об устойчивости стационарного обтекания тел конечных размеров.

Осредненное движение и пульсационное движение.

В случае турбулентного режима течения изучать истинные движения частиц жидкости весьма сложно, да и, вообще говоря ненужно. Во многих вопросах турбулентные течения жидкости целесообразно изучать только в среднем. При этом вводят средние значения компонент скорости $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$, давления \bar{p} , плотности $\bar{\rho}$, температуры \bar{T} и других характеристик. Таким образом, в случае турбулентных течений сложное движение континуума вторично осредняется.

Говоря об осредненных значениях мы имеем здесь ввиду средние значения во времени в фиксированной точке пространства, следовательно под осредненной величиной \bar{f} мы подразумеваем величину

$$\bar{f} = \frac{1}{\tau} \int_{t_0}^{t_0 + \tau} f dt$$

где промежуток времени τ достаточно велик по отношению ко времени отдельных пульсаций и мал по отношению ко времени заметного изменения средних характеристик (осредненное движение может быть нестационарным).

После введения среднего значения \bar{f} истинное значение f представляется в виде

$$f = \bar{f} + f'$$

где f' – пульсация f .

Свойства осреднения

1) Среднее значение пульсации равно нулю

$$\bar{f}' = 0$$

2) Среднее значение суммы равняется сумме средних

$$\overline{f + g} = \bar{f} + \bar{g}$$

3) среднее значение произведения постоянной величины на исходную функцию равно произведению постоянной на среднее от функции

$$\overline{cf} = c\bar{f}$$

4) Среднее значение производной равняется производной от среднего

$$\overline{\frac{\partial f}{\partial x}} = \frac{\partial \bar{f}}{\partial x}$$

5) Среднее значение интеграла равняется интегралу от среднего

$$\overline{\int f} = \int \bar{f}$$

5) Среднее значение произведения двух сомножителей равняется сумме произведения средних величин и среднего значения произведения пульсаций этих величин

$$\overline{f \cdot g} = \bar{f} \cdot \bar{g} + \overline{f' \cdot g'}$$

В случае переменной плотности применяется осреднение по Фавру

$$\tilde{f} = \frac{\overline{\rho f}}{\bar{\rho}}, \quad f = \tilde{f} + f'', \quad \overline{\rho f} = \bar{\rho} \tilde{f}, \quad \overline{\rho f''} = 0, \quad \overline{f''} \neq 0$$

Если мы осредним уравнение Клайперона первым способом, то получим

$$\bar{p} = R\overline{\rho T} + R\overline{\rho' T'}$$

В то время как при осреднении по Фавру имеем

$$\tilde{p} = \bar{\rho}R\tilde{T}$$

и уравнение Клайперона будет выполнятся для средних величин.

Можно показать, что

$$\overline{\rho f g} = \bar{\rho} \tilde{f} \tilde{g} + \overline{\rho f'' g''}$$

Действительно,

$$\rho f g = \rho(\tilde{f} + f'')(\tilde{g} + g'') = \rho \tilde{f} \tilde{g} + \rho \tilde{f} g'' + \rho \tilde{g} f'' + \rho f'' g''$$

Осредняя получим

$$\overline{\rho f g} = \bar{\rho} \tilde{f} \tilde{g} + \tilde{f} \overline{\rho g''} + \tilde{g} \overline{\rho f''} + \overline{\rho f'' g''} = \bar{\rho} \tilde{f} \tilde{g} + \overline{\rho f'' g''}$$

т.к.

$$\tilde{g} \overline{\rho f''} = \overline{\rho f'' g''} = 0$$

Уравнение неразрывности осредняется следующим образом. Запишем его в виде

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho v_j}{\partial x_j} = 0$$

После осреднения имеем

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial \overline{\rho v_j}}{\partial x_j} = 0$$

Так как при осреднении по Фавру

$$\overline{\rho v_j} = \bar{\rho} \tilde{v}_j$$

то

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{\rho} \tilde{v}_j}{\partial x_j} = 0$$

При обычном осреднении

$$\overline{\rho v_j} = \bar{\rho} \bar{v}_j + \overline{\rho' v'_j}$$

Следовательно

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{\rho} \bar{v}_j}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{\rho' v'_j}}{\partial x_j} = 0$$

Вид уравнения неразрывности изменился: появился дополнительный член.

Запишем уравнения движения в виде

$$\frac{\partial \rho v_k}{\partial t} + \frac{\partial \rho v_k v_j}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_k} + \frac{\partial \tau_{jk}}{\partial x_j}$$

Осредним его

$$\frac{\partial \overline{\rho v_k}}{\partial t} + \frac{\partial \overline{\rho v_k v_j}}{\partial x_j} = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_k} + \frac{\partial \overline{\tau_{jk}}}{\partial x_j}$$

Если использовать осреднение по Фавру, то будем иметь

$$\frac{\partial \bar{\rho} \tilde{v}_k}{\partial t} + \frac{\partial \bar{\rho} \tilde{v}_k \tilde{v}_j}{\partial x_j} = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_k} + \frac{\partial (\overline{\tau_{jk}} - \overline{\rho v''_k v''_j})}{\partial x_j}$$

Полученные уравнения называются **уравнениями Рейнольдса**.

Они имеют такой же вид, как и в ламинарном течении. Однако, появились дополнительные члены $-\rho v_k'' v_j''$ —турбулентные напряжения, или **Рейнольдсовые напряжения**. Заметим, что истинные напряжения в газе представляются такого же рода формулами через скорости молекул.

Таким образом, после осреднения получается большее, чем число уравнений число неизвестных. Содержание многих работ по исследованию турбулентных течений сводится к изучению справедливости различных гипотез о зависимости турбулентных напряжений от средних скоростей и их градиентов.

В настоящее время не существует общей математической постановки задачи о произвольных осредненных турбулентных напряжениях и вообще не выяснена возможность такой формулировки задачи.

Иногда по аналогии с законом Навье—Стокса полагают

$$\overline{\tau_{jk}} - \overline{\rho v_k'' v_j''} = \mu^* \overline{e_{jk}}, \quad \mu^* = \mu + \mu_t$$

где μ_t —коэффициент турбулентной вязкости, зависящий от переменных кинематических характеристик осредненного движения жидкости.