Лекция №1

Числовые ряды.

Определение:

Возьмём последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ и построим по ней ещё одну последовательность

$$\left\{S_k = \sum_{n=1}^{k} a_n\right\}_{k=1}^{\infty}$$

Пара последовательностей $(\{a_n\}_{n=1}^{\infty}, \{S_k\}_{k=1}^{\infty})$ называется *числовым рядом* и обозначается

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

a_n – общий член ряда, n-й член ряда

S_k – k-я частичная сумма ряда

$$\forall m \in N\ b_1 = a_m, b_2 = a_{m+1,\dots,} b_l = a_{m+l-1}$$

$$\sum_{l=1}^{\infty} b_l - \text{ m} - \text{й остаток исходного ряда и обозначается}\, r_m = \sum_{n=m}^{\infty} a_n.$$

Определение:

Числовой ряд сходится, если $\exists \lim\limits_{k\to\infty} S_k = S$.

Число S называется суммой ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$$

Числовой ряд расходится, если $\nexists \lim\limits_{k\to\infty} S_k$.

Утверждение:

Пусть c $\in R, c \neq 0$. Тогда:

$$c * \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} c * a_n$$

Доказательство:

Для конечных сумм верно тождество:

$$\forall k \in N \quad c * \sum_{n=1}^{k} a_n = \sum_{n=1}^{k} c * a_n$$

При предельном переходе k→ ∞ получаем:

$$c * \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} c * a_{n.} \quad \blacksquare$$

Утверждение:

Пусть ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ сходятся. Тогда сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$, и

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

<u>Доказательство:</u>

$$\lim_{k\to\infty}\sum_{n=1}^{k}(a_n+b_n)=\lim_{k\to\infty}\sum_{n=1}^{k}a_n+\lim_{k\to\infty}\sum_{n=1}^{k}b_n$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n+\sum_{n=1}^{\infty}b_n. \quad \blacksquare$$

<u>Теорема (необходимый признак сходимости ряда):</u>

Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ сходится, то $\lim_{n\to\infty}a_n=0.$

<u>Доказательство:</u>

$$\lim_{k\to\infty}S_k=S$$

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}(S_n-S_{n-1})=\lim_{n\to\infty}S_n-\lim_{n\to\infty}S_{n-1}=S-S=0. \quad \blacksquare$$

<u>Примеры:</u>

1) Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ расходится, так как $\nexists\lim_{k\to\infty}\sum_{n=1}^{k}\frac{1}{n}$.

2) Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$ сходится:

$$\lim_{k\to\infty}\sum_{n=1}^{k}\frac{1}{n(n+1)}=\lim_{k\to\infty}\sum_{n=1}^{k}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=\lim_{k\to\infty}\sum_{n=1}^{k}\left(1-\frac{1}{k+1}\right)=1 .$$

3) Если $|q|<1$, то ряд $\sum_{k=1}^{\infty}q^k$ сходится.

4) Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}$ расходится.

<u>Утверждение:</u>

Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ сходится, то сходится и любой его остаток $\sum_{n=m}^{\infty}a_n$.

Если какой — то остаток $\sum_{n=m}^{\infty}a_n$ сходится, то сходится и сам ряд $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$.

<u>Доказательство:</u>

$\forall m$ при $k>m$ верно следующее равенство:

$$\sum_{n=1}^{k}a_n=\sum_{n=1}^{m-1}a_n+\sum_{n=m}^{k}a_n.$$

При предельном переходе по k получаем:

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\sum_{n=1}^{m-1}a_n+\sum_{n=m}^{\infty}a_n$$

откуда и получаем утверждение, так как первое слагаемое в правой части – число. ■

<u>Теорема (критерий Коши сходимости числового ряда):</u>

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n - \text{ сходится } \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \;\; \exists N_\varepsilon \in N \;\; \forall\, k, m > N_\varepsilon \quad \left|\sum_{n=k}^{m} a_n\right| < \varepsilon$$

<u>Доказательство:</u>

$\exists \lim\limits_{l\to\infty} S_l \;\; \Leftrightarrow \;\; \forall \varepsilon > 0 \;\; \exists N_\varepsilon \in N \;\; \forall\, k, m > N_\varepsilon \quad |S_m - S_{k-1}| < \varepsilon$

так как $|S_m - S_{k-1}| = \left|\sum\limits_{n=k}^{m} a_n\right|$, то теорема доказана. ■

<u>Знакопостоянные ряды.</u>

<u>Определение:</u>

Если $\forall n \;\; a_n \le 0$ или $a_n \ge 0$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ называется знакопостоянным.

<u>Утверждение:</u>

Пусть ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n -$ знакопостоянный (для определённости $\forall n \;\; a_n \ge 0$). Тогда:

$$1) \text{ если } \{S_k\} - \text{ ограничена, то } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ сходится.}$$

$$2) \text{ если } \exists \{S_{k_m}\}_{m=1}^{\infty} \text{ такая, что } \exists \lim_{m\to\infty} S_{k_m} = S, \text{ то } \sum_{n=1}^{\infty} a_n = S.$$

<u>Доказательство:</u>

1) ряд — знакопостоянный, значит $\{S_k\} -$ монотонна:

$S_k = \sum\limits_{n=1}^{k} a_n$, и так как $\forall n \;\; a_n \ge 0$, то $S_{k+1} \ge S_k \;\; \forall k$.

Последовательность частичных сумм ограничена и монотонна, следовательно имеет предел.

2) $S \ge S_k \;\; \forall k$ (так как монотонная последовательность сходится к своему супремуму S).

$\forall k \;\; \exists k_m > k$, и последовательность $S_k -$ монотонна, значит $S_{k_m} \ge S_k$.

Значит, $\forall \varepsilon > 0 \; \exists k_m \;\; \left|S - S_{k_m}\right| < \varepsilon$, и так как S_{k_m} монотонна, то $\forall n > k_m \;\; |S - S_n| < \varepsilon \;\Rightarrow\; \lim\limits_{n\to\infty} S_n =$
$= S.$ ■

<u>Теорема (признак сравнения, признак Вейерштрасса):</u>

Пусть $a_n \ge 0, \; b_n \ge 0 \; \forall n \in N$ и пусть $a_n \le b_n \; \forall n \in N$. Тогда:

1) если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n -$ расходится, то и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ расходится.

2) если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n -$ сходится, то и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится.

<u>Доказательство:</u>

1) $a_n -$ расходится $\Rightarrow \lim\limits_{k\to\infty} \sum\limits_{n=1}^{k} a_n = +\infty \;\Rightarrow\; \lim\limits_{k\to\infty} \sum\limits_{n=1}^{k} b_n = +\infty \;\to\; b_n -$ расходится.

2) $b_n -$ сходится $\Leftrightarrow \;\exists \lim\limits_{k\to\infty} \sum\limits_{n=1}^{k} b_k = B$, но $\sum\limits_{n=1}^{k} a_k \le \sum\limits_{n=1}^{k} b_k = B$.

Последовательность частичных сумм ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ монотонно возрастает и ограничена сверху, значит, она имеет предел, и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится. ■

<u>Следствие (признак сравнения в предельной форме):</u>

Пусть даны два ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, $a_n \geq 0,\ b_n \geq 0.$

Если $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = k > 0,$ то ряды сходятся или расходятся одновременно.

<u>Доказательство:</u>

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_\varepsilon \in N \quad \forall m > N_\varepsilon \qquad \left|\frac{b_m}{a_m} - k\right| < \varepsilon$

Пусть $\varepsilon = {k}/{2}$, тогда:

$$\frac{k}{2} < \frac{b_m}{a_m} < \frac{3}{2}k$$

$$\frac{k}{2} * a_m < b_m < \frac{3}{2}k * a_m$$

Из этого двойного неравенства и признака сравнения следует: если $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится, то сходится и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{k}{2} * a_n$ и, следовательно, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Аналогичными рассуждениями можно показать, что если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ расходится, то и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится; если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится; если если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится, то и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ расходится. ■

<u>Примеры:</u>

1) при $\alpha < 1$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ расходится, так как $\frac{1}{n^\alpha} > \frac{1}{n}$.

2) $\forall n \geq 2 \quad \frac{1}{n^2} < \frac{1}{n(n-1)} \quad \rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} -$ сходится.

Лекция №2

Теорема (признак Д'Аламбера):

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n,\ a_n > 0$$

1) если $\exists \alpha > 1, \exists n_0 \in N,$ что $\forall n > n_0\quad \frac{a_n}{a_{n+1}} \geq \alpha,$ то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится.

2) если $\exists n_0 \in N,$ что $\forall n > n_0\quad \frac{a_n}{a_{n+1}} \leq 1,$ то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится.

Доказательство:

1) $\frac{a_{n_0}}{a_{n_0+1}} \geq \alpha, \frac{a_{n_0+1}}{a_{n_0+2}} \geq \alpha, \dots$

$a_{n_0+1} \leq \frac{1}{\alpha} * a_{n_0}, a_{n_0+2} \leq \frac{1}{\alpha} * a_{n_0+1}, \dots \quad \rightarrow \quad \forall k \in N \quad a_{n_0+k} \leq \left(\frac{1}{\alpha}\right)^k * a_{n_0}$

Ряд с общим членом $\left(\frac{1}{\alpha}\right)^k * a_{n_0}$ сходится, так как $\left|\frac{1}{\alpha}\right| < 1.$ По признаку сравнения сходится и остаток $\sum\limits_{n=n_0+1}^{\infty} a_n,$ а значит, и сам ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

2) $\frac{a_{n_0}}{a_{n_0+1}} \leq 1, \frac{a_{n_0+1}}{a_{n_0+2}} \leq 1, \dots$

$a_{n_0} \leq a_{n_0+1}, a_{n_0+1} \leq a_{n_0+2}, \dots$

ряд расходится, так как не выполняется необходимый признак сходимости ряда. ■

Следствие (признак Д'Аламбера в предельной форме):

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n,\ a_n > 0$$

1) если $\varliminf\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} \geq \alpha > 1,$ то ряд сходится.

2) если $\varlimsup\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \alpha < 1,$ то ряд расходится.

Доказательство:

1) $\varliminf\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \alpha > 1 \implies \forall \varepsilon > 0\ \ \exists N_\varepsilon \in N\ \ \forall n > N_\varepsilon\quad \frac{a_n}{a_{n+1}} \geq \alpha - \varepsilon.$ Так как $\alpha > 1,$ то мы можем выбрать такой $\varepsilon,$ что $\alpha - \varepsilon > 1.$ Значит, $\exists N_\varepsilon \in N\ \ \forall n > N_\varepsilon\quad \frac{a_n}{a_{n+1}} \geq \alpha - \varepsilon > 1,$ и по признаку Д$'$Аламбера, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится.

2) $\varlimsup\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \alpha < 1 \implies \forall \varepsilon > 0\ \ \exists N_\varepsilon \in N\ \ \forall n > N_\varepsilon\quad \frac{a_n}{a_{n+1}} \leq \alpha + \varepsilon.$ Так как $\alpha < 1,$ то мы можем выбрать такой $\varepsilon,$ что $\alpha + \varepsilon < 1.$ Значит, $\exists N_\varepsilon \in N\ \ \forall n > N_\varepsilon\quad \frac{a_n}{a_{n+1}} \leq \alpha - \varepsilon < 1,$ и по признаку Д$'$Аламбера, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится.

Теорема (признак Коши):

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n,\ a_n > 0$$

1) если $\exists\beta < 1, \exists n_0 \in N$, что $\forall n \geq n_0 \quad \sqrt[n]{a_n} \leq \beta$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится.

2) если $\exists\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ такая, что $\sqrt[n_k]{a_{n_k}} \geq 1$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится.

Доказательство:

1) $\sqrt[n]{a_n} \leq \beta \;\; \rightarrow \;\; a_n \leq \beta^n$, ряд с общим членом β^n сходится $\;\Rightarrow\; \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится.

2) $\sqrt[n_k]{a_{n_k}} \geq 1 \;\; \rightarrow \;\; a_{n_k} \geq 1 \;\; \Rightarrow \;\; \lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0 \;\; \rightarrow \;\; \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится. ■

Следствие (признак Коши в предельной форме):

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n, \; a_n > 0$

1) если $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{a_n} = q < 1$, то ряд сходится.

2) если $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{a_n} = q > 1$, то ряд расходится.

Доказательство:

1) $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{a_n} = q < 1 \;\; \Rightarrow \;\; \forall\varepsilon > 0 \;\; \exists N_\varepsilon \in N \;\; \forall n > N_\varepsilon \quad \sqrt[n]{a_n} \leq q + \varepsilon$. Так как $q < 1$, то мы можем выбрать такой ε, что $q + \varepsilon < 1$. Значит, $\exists N_\varepsilon \in N \;\; \forall n > N_\varepsilon \quad \sqrt[n]{a_n} \leq q + \varepsilon < 1$, и по признаку Коши ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится.

2) $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{a_n} = q > 1 \;\; \Rightarrow \;\; \forall\varepsilon > 0 \;\; \exists N_\varepsilon \in N \;\; \forall n > N_\varepsilon \quad \sqrt[n]{a_n} \leq q - \varepsilon$. Так как $q > 1$, то мы можем выбрать такой ε, что $q - \varepsilon > 1$. Значит, $\exists N_\varepsilon \in N \;\; \forall n > N_\varepsilon \quad \sqrt[n]{a_n} \geq q - \varepsilon > 1$, и по признаку Коши ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится.

Теорема (интегральный признак Коши):

Пусть $f(x) \geq 0$ на $[1;\; +\infty)$ и монотонно убывает. Тогда ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$ сходится одновременно с несобственным интегралом $\int\limits_{1}^{+\infty} f(x)dx$.

Доказательство:

$\forall k \in N \;\; \forall x \in [k; k+1] \qquad f(k+1) \leq f(x) \leq f(k)$.

Проинтегрируем это неравенство на отрезке $[k; k+1]$:

$$\int\limits_{k}^{k+1} f(k+1)dx \leq \int\limits_{k}^{k+1} f(x)dx \leq \int\limits_{k}^{k+1} f(k)dx$$

$$f(k+1) \leq \int\limits_{k}^{k+1} f(x)dx \leq f(k)$$

$$\sum_{k=2}^{N+1} f(k) \leq \int\limits_{1}^{N+1} f(x)dx \leq \sum_{k=1}^{N} f(k)$$

Производя предельный переход по N, получаем неравенство:

$$\sum_{k=2}^{+\infty} f(k) \leq \int_{1}^{+\infty} f(x)dx \leq \sum_{k=1}^{+\infty} f(k)$$

Из этого неравенства получаем: если интеграл сходится, то сходится и ряд, если интеграл расходится, то расходится и ряд, если ряд сходится, то сходится и интеграл, если ряд расходится, то расходится и интеграл. ■

Примеры:

1) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ – расходится, так как расходится интеграл $\int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x}$.

$$\boxed{\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} \sim \ln N}$$

2) $\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{n * \ln n}$ – расходится, так как интеграл $\int_{3}^{+\infty} \frac{dx}{x * \ln x} = \int_{3}^{+\infty} \frac{d \ln x}{\ln x}$ расходится.

3) $\sum_{n=10}^{+\infty} \frac{1}{n * \ln n * \ln \ln n}$ – расходится, так как интеграл $\int_{10}^{+\infty} \frac{1}{x * \ln x * \ln \ln x}$ расходится.

1′) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}, \alpha \neq 1.$

$\int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}}$ – сходится при $\alpha > 1$, расходится при $\alpha < 1$.

2′) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n * \ln^{\beta} n}, \beta \neq 1.$

$\int_{2}^{+\infty} \frac{dx}{x * \ln^{\beta} x}$ – сходится при $\beta > 1$, расходится при $\beta < 1$.

Теорема (признак Куммера):

1) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, a_n > 0$. Если $\exists \{c_n\}_{n=1}^{\infty}, c_n > 0, \exists \alpha > 0$ и $\exists n_0 \in N$ такие, что $\forall n \geq n_0$

$$c_n - c_{n+1} * \frac{a_{n+1}}{a_n} \geq \alpha,$$

то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится.

2) Если $\exists \{c_n\}_{n=1}^{\infty}, c_n > 0$ и $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{c_n}$ – расходится, и $\exists n_0 \in N$, что $\forall n \geq n_0$

$c_n - c_{n+1} * \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq 0$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится.

Доказательство:

1) $\begin{cases} c_{n_0}a_{n_0} - c_{n_0+1}a_{n_0+1} \geq \alpha * a_{n_0} \\ c_{n_0+1}a_{n_0+1} - c_{n_0+2}a_{n_0+2} \geq \alpha * a_{n_0+1} \\ \dots\dots\dots \\ c_{n_0+k}a_{n_0+k} - c_{n_0+k+1}a_{n_0+k+1} \geq \alpha * a_{n_0+k} \end{cases}$

Складываем все неравенства и получаем:

$$c_{n_0}a_{n_0} - c_{n_0+k+1}a_{n_0+k+1} \geq \alpha * \sum_{n=n_0}^{n_0+k} a_n$$

Так как $c_{n_0}a_{n_0} - c_{n_0+k+1}a_{n_0+k+1} \leq c_{n_0}a_{n_0}$, то $\alpha * \sum_{n=n_0}^{n_0+k} a_n \leq c_{n_0}a_{n_0}$. Так как ряд знакопос – тоянен, и частичные суммы ограничены, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится.

2) $c_n \leq c_{n+1} * \frac{a_{n+1}}{a_n}$

$\frac{c_n}{c_{n+1}} \leq \frac{a_{n+1}}{a_n}$

$\frac{\frac{1}{c_{n+1}}}{\frac{1}{c_n}} \leq \frac{a_{n+1}}{a_n}$

Запишем $(k+1)$ неравенств:

$\begin{cases} \frac{\frac{1}{c_{n_0+1}}}{\frac{1}{c_{n_0}}} \leq \frac{a_{n_0+1}}{a_{n_0}} \\ \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \\ \frac{\frac{1}{c_{n_0+k+1}}}{\frac{1}{c_{n_0+k}}} \leq \frac{a_{n_0+k+1}}{a_{n_0+k}} \end{cases}$

Перемножим все неравенства, получим:

$\frac{\frac{1}{c_{n_0+k+1}}}{\frac{1}{c_{n_0}}} \leq \frac{a_{n_0+k+1}}{a_{n_0}}$

$a_{n_0} * \frac{1}{c_{n_0+k+1}} \leq \frac{1}{c_{n_0}} * a_{n_0+k+1}$

Ряд $a_{n_0} * \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{c_n}$ – расходится, значит, по признаку сравнения расходится и ряд с большими членами $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. ■

Теорема (признак Гаусса):

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, a_n > 0$, и пусть $\frac{a_n}{a_{n+1}} = \alpha + \frac{\beta}{n} + O\left(\frac{1}{n^{1+\varepsilon}}\right), n \to \infty, \varepsilon > 0$ и ε не зависит от n.

тогда:

- если $\alpha > 1$, то ряд сходится;

- если $\alpha < 1$, то ряд расходится;
- если $\alpha = 1, \beta > 1$, то ряд сходится;
- если $\alpha = 1, \beta \leq 1$, то ряд расходится.

Доказательство:
Без доказательства.

Комментарий к признаку Куммера:
Если взять в качестве c_n последовательность $c_n = \frac{1}{n}$, то получится признак Раабе.
Если взять в качестве c_n последовательность $c_n = n * \ln n$, то получится признак Бертрана.

Лекция №3

Знакопеременные ряды.

Определение:

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ называется абсолютно сходящимся, если сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$.

Определение:

Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ расходится, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ называется условно сходящимся.

Теорема:

Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ абсолютно сходится, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится.

Доказательство:

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ сходится $\Leftrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists N_\varepsilon \ \ \forall k, m > N_\varepsilon \ \ \left|\sum_{n=k}^{m} |a_n|\right| < \varepsilon$. Тогда:

$$\left|\sum_{n=k}^{m} a_n\right| < \left|\sum_{n=k}^{m} |a_n|\right| < \varepsilon,$$

и по критерию Коши ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится. ■

Определение:

Будем называть биекцию $\sigma: N \to N$ перестановкой N.

Теорема:

Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится абсолютно, то $\forall \sigma$ $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$ тоже сходится абсолютно, и

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}.$$

Доказательство:

1) Пусть сначала $a_n \geq 0 \ \forall n$. Рассмотрим $\sum_{n=1}^{N} a_{\sigma(n)}$ и пусть $M = \max\limits_{1 \leq n \leq N} \sigma(n)$. Тогда:

$\sum_{n=1}^{N} a_{\sigma(n)} \leq \sum_{n=1}^{M} a_n \leq S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ $\rightarrow$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$ сходится, так как он знакопостоянен, и его частичные суммы ограничены, и $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)} = S_\sigma \leq S$.

Так как ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ можно получить из $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$ перестановкой σ^{-1}, то аналогично можно показать, что $S \leq S_\sigma$. Значит, $S = S_\sigma$.

2) Теперь рассмотрим общий случай абсолютно сходящегося ряда.

$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ сходится $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$.

$\forall\sigma \sum_{n=1}^{\infty}|a_{\sigma(n)}|$ сходится, и $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n| = \sum_{n=1}^{\infty}|a_{\sigma(n)}| \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)} = S_\sigma$ − сходится.

Рассмотрим $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + |a_n|)$. Он сходится, и он знакопостоянный $\Rightarrow$ сходится и ряд

$\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_{\sigma(n)} + |a_{\sigma(n)}|\right)$, и $\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_{\sigma(n)} + |a_{\sigma(n)}|\right) = \sum_{n=1}^{\infty}(a_n + |a_n|)$. Так как $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n| = \sum_{n=1}^{\infty}|a_{\sigma(n)}|$, то

$\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$. ■

Рассмотрим два ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, сходящихся абсолютно, и рассмотрим множество

$$\{a_n b_k\}_{n=1,k=1}^{\infty,\ \infty}$$

Теорема:

Если ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходятся абсолютно, то ряд, составленный из $\{a_n b_k\}_{n=1,k=1}^{\infty,\ \infty}$, тоже сходится абсолютно, и сумма этого ряда равна $\sum_{n=1}^{\infty} a_n * \sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Доказательство:

Запишем произведения в таблицу:

a_1b_1	a_2b_1	a_3b_1	a_4b_1	...
a_1b_2	a_2b_2	a_3b_2	a_4b_2	...
a_1b_3	a_2b_3	a_3b_3	a_4b_3	...
a_1b_4	a_2b_4	a_3b_4	a_4b_4	...
...	...	...	...	...

Введём определенный порядок на множестве произведений (на рисунке этот порядок показан стрелками). Первый элемент − a_1b_1, потом увеличиваем первый индекс на 1 − a_2b_1, и начинаем увеличивать второй индекс, пока он не станет равным первому; потом умень – шаем первый индекс до единицы, и так далее:

$a_1b_1, a_2b_1, a_2b_2, a_1b_2, a_3b_1, a_3b_2, a_3b_3, a_2b_3, a_1b_3, a_4b_1, a_4b_2, a_4b_3, a_4b_4, a_3b_4, a_2b_4, a_1b_4, \ldots$

Рассмотрим $S_{k^2} = \sum_{n=1}^{k} a_n * \sum_{n=1}^{k} b_n \Rightarrow \exists \lim_{k\to\infty} S_{k^2} = A * B$.

$$\sum_{n=1,m=1}^{k,k}|a_n b_m| = \sum_{n=1}^{k}|a_n| * \sum_{m=1}^{k}|b_m|$$

Теперь рассмотрим частичную сумму с произвольным порядковым номером N:

$S_N = S_{k^2} + \sum_{n=k^2+1}^{N}(\text{произведений})$, причём $k^2 < N < (k+1)^2$.

$$\left|\sum_{n=k^2+1}^{N}(\text{произведений})\right| \le \sum_{n=k^2+1}^{N}|\text{произведений}| \le \sum_{n=k^2+1}^{(k+1)^2}|\text{произведений}| =$$

$= |b_{k+1}| * (|a_1 + \dots + \ a_{k+1}|) + |a_{k+1}| * (|b_1 + \dots + \ b_k|)$

$|a_{k+1}|$ и $|b_{k+1}| -$ бесконечно малые величины при $k \to \infty$ (по необходимому признаку сходимости рядов). $(|a_1| + \dots + |a_{k+1}|)$ и $(|b_1| + \dots + |b_k|)$ ограничены сверху суммами рядов $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |b_n|$ соответственно. Значит, вся величина $\left|\sum\limits_{n=k^2+1}^{N} (\text{произведений})\right| -$ бесконечно малая, значит:

$$\lim_{N\to\infty} S_N = \lim_{k\to\infty} S_{k^2} + \lim_{k\to\infty} \sum_{n=k^2+1}^{N} (\text{произведений}) = A * B + 0 = A * B. \qquad \blacksquare$$

Определение:

Ряд — знакочередующийся, если все члены ряда с чётными номерам имеют одинаковый знак, и все члены с нечётными номерами имеют одинаковый знак (причём противоположный знаку членов с чётными номерами).

Теорема (признак Лейбница):

Рассмотрим $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$, где $a_n > 0$ (или $a_n < 0$). Пусть a_n монотонна и $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Тогда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ сходится, и $\left|\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n\right| \le |a_1|$.

Доказательство:

Пусть $a_n < 0, b_n = -a_n, \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} b_n$.

$S_{2k} = (b_1 - b_2) + (b_3 - b_4) + \dots + (b_{2k-1} - b_{2k})$, значит, S_{2k} возрастают, так как $b_{2n-1} \ge b_{2n} \ \ \forall n$.
$S_{2k} = b_1 - (b_2 - b_3) - (b_4 - b_5) - \dots - (b_{2k-2} - b_{2k-1}) - b_{2k} \implies S_{2k} < b_1, S_{2k}$ ограничена сверху.
Так как S_{2k} возрастают и ограничены сверху, то $\exists \lim\limits_{k\to\infty} S_{2k} = S$, и $0 \le S \le b_1$.
$\lim\limits_{k\to\infty} S_{2k+1} = \lim\limits_{k\to\infty} (S_{2k} + b_{2k+1}) = S$, так как $\lim\limits_{k\to\infty} b_{2k+1} = 0$. $\blacksquare$

Утверждение:

Рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и выберем какую-нибудь монотонно возрастающую инъекцию $\tau: N \to N$. Рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$, где при $k = \tau(n) \ \ b_k = a_n$, а при $k \ne \tau(n) \ \ b_k = 0$ (другими словами, добавим в ряд нулевых членов). Тогда если $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится, то ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ расходится, если $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ сходится, и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$.

Доказательство:

Очевидно.

<u>*Лекция №4*</u>

<u>*Определение:*</u>

Пусть дан ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Обозначим через $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$ новый ряд, такой, что $a_n^+ = a_n$, если $a_n > 0$ и $a_n^+ = 0$, если $a_n \le 0$. Также обозначим через $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$ такой ряд, что $a_n^- = a_n$, если $a_n < 0$ и $a_n^- = 0$, если $a_n \ge 0$.

<u>*Теорема:*</u>

Если $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится условно, то $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$ и $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$ расходятся.

<u>*Доказательство:*</u>

1) Предположим, что оба ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$ и $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$ сходятся. Тогда сходится и их разность: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ - \sum_{n=1}^{\infty} a_n^- = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| -$ сходится, что противоречит тому, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится условно.

2) Предположим, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$ сходится, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$ расходится. Так как ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то сходится разность:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n - \sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$$

что противоречит предположению.

3) Предположим, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$ расходится, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$ сходится. Так как ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то сходится разность:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n - \sum_{n=1}^{\infty} a_n^- = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$$

что противоречит предположению.

4) Значит, от противного, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$ и $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$ расходятся. ■

<u>*Замечание:*</u>

Если $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится условно, то $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ \to +\infty$, а $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^- \to -\infty$.

<u>*Теорема (Римана):*</u>

Если $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится условно, то $\forall a \in R$ $\exists \sigma$ такая, что $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)} = a$. Также $\exists \sigma$ такие, что $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)} \to +\infty, -\infty, \infty$ и такая, что $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$ расходится, но его частичные суммы ограничены.

Доказательство:

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится условно $\Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ \to +\infty$, а $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^- \to -\infty$, $\lim_{n\to\infty} |a_n| = 0$, то есть из ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$ можно выбрать такое число членов, чтобы их сумма превысила любое наперёд заданное число, а из ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$ можно выбрать такое число членов, чтобы их сумма была меньше, чем любое наперёд заданное число.

Возьмём $a \in R$ и зафиксируем его. Пусть $a > 0$.

Рассмотрим n_1^+ такое, что $\sum_{n=1}^{n_1^+-1} a_n^+ \leq a < \sum_{n=1}^{n_1^+} a_n^+$ и возьмём $\sum_{n=1}^{n_1^+} a_n^+$ за частную сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$ с номером n_1^+ и обозначим её через $S_{n_1^+}$

Рассмотрим теперь n_1^- такое, что $S_{n_1^+} + \sum_{n=1}^{n_1^-} a_n^- < a \leq S_{n_1^+} + \sum_{n=1}^{n_1^- -1} a_n^-$ и возьмём $S_{n_1^+} + \sum_{n=1}^{n_1^-} a_n^-$ за частичную сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$ с номером $n_1^+ + n_1^-$ и обозначим её через $S_{n_1^+ + n_1^-}$

Затем рассмотрим n_2^+ такое, что $S_{n_1^+ + n_1^-} + \sum_{n=n_1^+ + 1}^{n_2^+ -1} a_n^+ \leq a < S_{n_1^+ + n_1^-} + \sum_{n=n_1^+ + 1}^{n_2^+} a_n^+$ и возьмём $S_{n_1^+ + n_1^-} + \sum_{n=n_1^+ + 1}^{n_2^+} a_n^+$ за частичную сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$ с номером $n_1^+ + n_1^- + n_2^+$ и обозначим её через $S_{n_1^+ + n_1^- + n_2^+}$

и так далее, то есть:

$\forall S_N = \sum_{n=1}^{N} a_{\sigma(n)}$ $\exists n_k^-, n_k^+, n_{k+1}^+$ такие, что:

$$S_{n_1^+ + n_1^- + n_2^+ + \cdots + n_k^+ + n_k^-} \leq S_N \leq S_{n_1^+ + n_1^- + n_2^+ + \cdots + n_k^+}$$

или

$$S_{n_1^+ + n_1^- + n_2^+ + \cdots + n_k^+ + n_k^-} \leq S_N \leq S_{n_1^+ + n_1^- + n_2^+ + \cdots + n_k^+ + n_k^- + n_{k+1}^+}$$

так как по нашему построению ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$ $\left|S_{n_1^+ + n_1^- + n_2^+ + \cdots + n_k^\pm} - a\right| \leq \left|a_{n_k}\right| \to 0$, то $S_{n_1^+ + n_1^- + n_2^+ + \cdots + n_k^\pm} \to a, k \to \infty$.

Теорема (признаки Абеля и Дирихле):

Рассмотрим ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n * b_n$.

Признак Абеля: если $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится, и $a_n -$ монотонна и ограничена, то $\sum_{n=1}^{\infty} a_n * b_n$ сходится.

Признак Дирихле: если $\exists M > 0$ такое, что $\forall N$ $\left|\sum_{n=1}^{N} b_n\right| < M, a_n$ − монотонна и $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, то $\sum_{n=1}^{\infty} a_n * b_n$ сходится.

Доказательство:

Исследуем сходимость с помощью критерия Коши, то есть оценим величину $\sum_{n=k}^{m} a_n b_n$.

Введём обозначение:

$B_n = \sum_{l=k}^{n} b_l,\quad B_{k-1} \equiv 0.$

$$\sum_{n=k}^{m} a_n b_n = \sum_{n=k}^{m} a_n (B_n - B_{n-1}) = \sum_{n=k}^{m} a_n B_n - \sum_{n=k}^{m} a_n B_{n-1} = \sum_{n=k}^{m} a_n B_n - \sum_{n=k+1}^{m} a_n B_{n-1} =$$

$$= \sum_{n=k}^{m} a_n B_n - \sum_{n=k}^{m-1} a_{n+1} B_n = a_m B_m + \sum_{n=k}^{m-1} (a_n - a_{n+1}) B_n$$

(преобразования Абеля для конечной суммы)

$$\left|\sum_{n=k}^{m} a_n b_n\right| \le |a_m| * |B_m| + \sum_{n=k}^{m-1} |a_n - a_{n+1}| * |B_n|$$

Теперь проведём отдельные рассуждения для признаков Абеля и Дирихле:

Признак Абеля:

$$|B_n| < \varepsilon \ \ \forall n \ge k \ \ (\text{из критерия Коши для ряда } \sum_{n=1}^{\infty} b_n)$$

$$\left|\sum_{n=k}^{m} a_n b_n\right| \le |a_m| * \varepsilon + \sum_{n=k}^{m-1} |a_n - a_{n+1}| * \varepsilon = \varepsilon * \left(|a_m| + \sum_{n=k}^{m-1} |a_n - a_{n+1}|\right)$$

так как a_n монотонна, то все модули из суммы раскрываются с одинаковым знаком:

$$\varepsilon * \left(|a_m| + \sum_{n=k}^{m-1} |a_n - a_{n+1}|\right) \le \varepsilon * (2|a_m| + |a_k|),$$

и так как a_n ограничена, то $\exists C \ \ \forall n \ \ |a_n| \le C$, и

$$\varepsilon * (2|a_m| + |a_k|) \le \varepsilon * (2C + C) = 3C\varepsilon$$

Признак Дирихле:

$B_l = \sum_{m=k}^{l} b_m = \sum_{m=1}^{l} b_m - \sum_{m=1}^{k-1} b_m$

По условиям признака $\exists M > 0$ такое, что $\forall N$ $\left|\sum_{n=1}^{N} b_n\right| < M$. Значит:

$$\begin{cases} -M < \sum_{m=1}^{l} b_m < M \\ -M < -\sum_{m=1}^{k-1} b_m < M \end{cases} \Rightarrow \quad -2M < \sum_{m=1}^{l} b_m - \sum_{m=1}^{k-1} b_m < 2M$$

Значит, $\forall l \ \ |B_l| < 2M$. Также, по условиям признака:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \implies \forall\varepsilon > 0 \quad \exists N_\varepsilon \quad \forall n > N_\varepsilon \quad |a_n| < \varepsilon$$

Следовательно:

$$\left|\sum_{n=k}^{m} a_n b_n\right| \le |a_m| * |B_m| + \sum_{n=k}^{m-1} |a_n - a_{n+1}| * |B_n| \le |a_m| * 2M + \sum_{n=k}^{m-1} |a_n - a_{n+1}| * 2M =$$

$$= 2M\left(|a_m| + \sum_{n=k}^{m-1} |a_n - a_{n+1}|\right) \le 2M(2|a_m| + |a_k|) < 2M * 3\varepsilon = 6M\varepsilon. \qquad \blacksquare$$

Суммирование расходящихся рядов.

Теорема (Чезаро):

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится и $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = A \implies \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n} * \sum_{k=1}^{n} S_k\right) = A$, где $S_k = \sum_{n=1}^{k} a_n$.

Доказательство:

$\forall\varepsilon > 0 \ \exists N_{1\varepsilon} \ \forall n \ge N_{1\varepsilon} \quad |S_n - A| < \varepsilon$

$$\left|\frac{1}{n} * \sum_{k=1}^{n} (S_k - A)\right| = \left|\frac{S_1 + S_2 + \dots + S_{N_{1\varepsilon}} + \dots + S_n - nA}{n}\right| \le \left|\frac{S_1 + S_2 + \dots + S_{N_{1\varepsilon-1}} - (N_{1\varepsilon-1})A}{n}\right| +$$

$$+\frac{1}{n} * \sum_{k=N_{1\varepsilon}}^{n} |S_k - A|$$

$S_1 + S_2 + \dots + S_{N_{1\varepsilon-1}} - (N_{1\varepsilon-1})A = const \implies \lim_{n\to\infty} \frac{S_1 + S_2 + \dots + S_{N_{1\varepsilon-1}} - (N_{1\varepsilon-1})A}{n} = 0 \implies$

$\implies \forall\varepsilon > 0 \ \exists N_{2\varepsilon} \ \forall n > N_{2\varepsilon}$

$$\left|\frac{S_1 + S_2 + \dots + S_{N_{1\varepsilon}} - (N_{1\varepsilon-1})A}{n}\right| < \varepsilon$$

так как $|S_n - A| < \varepsilon \ \forall n \ge N_{1\varepsilon}$, то $\forall n > \max(N_{1\varepsilon}, N_{2\varepsilon})$:

$$\left|\frac{1}{n} * \sum_{k=1}^{n} (S_k - A)\right| = \left|\frac{S_1 + S_2 + \dots + S_{N_{1\varepsilon-1}} - (N_{1\varepsilon-1})A}{n}\right| + \frac{1}{n} * \sum_{k=N_{1\varepsilon}}^{n} |S_k - A| < \varepsilon + \frac{\varepsilon(n - N_{1\varepsilon-1})}{n} =$$

$$= 2\varepsilon - \frac{\varepsilon N_{1\varepsilon-1}}{n} < 2\varepsilon$$

Следовательно:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n} * \sum_{k=1}^{n} (S_k - A)\right) = 0 \implies \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n} * \sum_{k=1}^{n} S_k - A\right) = 0 \implies \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n} * \sum_{k=1}^{n} S_k\right) = A. \qquad \blacksquare$$

Обозначение:

Для любого ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сопоставление этому ряду предела $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n} * \sum_{k=1}^{n} S_k\right)$ называется методом суммирования по Чезаро.

Пример:

Возьмём ряд $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$. В этом случае $S_k = 1$, если $k = 2l$, и $S_k = 0$, если $k = 2l + 1$

Возьмем предел по частичным суммам с чётными номерами:

$$\lim_{l\to\infty}\left(\frac{1}{2l} * \sum_{k=0}^{2l} S_k\right) = \lim_{l\to\infty}\left(\frac{1}{2l} * (1 + 0 + 1 + \dots + 0 + 1)\right) = \lim_{l\to\infty}\left(\frac{1}{2l} * (l + 1)\right) = \frac{1}{2}$$

(в скобке $(l + 1)$ единиц и l нулей)

Возьмем предел по частичным суммам с нечётными номерами:

$$\lim_{l\to\infty}\left(\frac{1}{2l+1} * \sum_{k=0}^{2l+1} S_k\right) = \lim_{l\to\infty}\left(\frac{1}{2l+1} * (1+0+1+\cdots+0+1+0)\right) = \lim_{l\to\infty}\left(\frac{1}{2l+1} * (l+1)\right) = \frac{1}{2}$$

(в скобке $(l+1)$ единиц и $(l+1)$ нулей)

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n} * \sum_{k=1}^{n} S_k\right) = \frac{1}{2}$$

Значит, при методе суммировании по Чезаро ряда $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n$ получается $\frac{1}{2}$.

Лекция №5

Функциональные последовательности.

Определение:
Последовательность функций $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ на $E \subset R$ называется поточечно сходящейся (или просто сходящейся), если

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \forall x \in E \ \ \exists N_{\varepsilon,x} \in N \ \ \forall n > N_{\varepsilon,x} \qquad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

Функция $f(x)$ называется пределом функциональной последовательности $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$$

Примеры:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} arctg\dfrac{x}{n} = 0$ на $x \in R$
2) $\lim\limits_{n\to\infty} (x^n - x^{2n}) = 0$ на $x \in [0;1]$

Найдём точки экстремума функции $f(x) = x^n - x^{2n}$.
$f'(x) = (x^n - x^{2n})' = nx^{n-1} - 2nx^{2n-1} = 0$
$1 - 2x^n = 0$
$x = \dfrac{1}{\sqrt[n]{2}}$
При этом $f(x) = \left(\dfrac{1}{\sqrt[n]{2}}\right)^n - \left(\dfrac{1}{\sqrt[n]{2}}\right)^{2n} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{4}$

3) на $[0;1]$ $\lim\limits_{n\to\infty} x^n = \begin{cases} 1, & x = 1 \\ 0, & x \in [0;1) \end{cases}$

Определение:
Сходящаяся на $E \subset R$ к некоторой функции $f(x)$ последовательность $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ называется равномерно сходящейся на $E \subset R$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists N_\varepsilon \in N \ \ \forall n > N_\varepsilon \ \ \forall x \in E \qquad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

Равномерная сходимость обозначается $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ на $E \subset R$.

Теорема:
$f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ на $E \subset R \quad \Leftrightarrow \quad \sup\limits_{x\in E}|f_n(x) - f(x)| \to 0$ при $n \to \infty$.

Доказательство:
1) $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ на $E \subset R \quad \Rightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 \ \ \exists N_\varepsilon \in N \ \ \forall n > N_\varepsilon \ \ \forall x \in E \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$
Переходим к супремуму:
$\sup\limits_{x\in E}|f_n(x) - f(x)| \le \varepsilon \ \ \forall n > N_\varepsilon \quad \Rightarrow \quad \sup\limits_{x\in E}|f_n(x) - f(x)| \to 0$ при $n \to \infty$.

2) $\sup\limits_{x\in E}|f_n(x) - f(x)| \to 0$ при $n \to \infty \quad \Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 \ \ \exists N_\varepsilon \in N \ \ \forall n > N_\varepsilon \ \ \sup\limits_{x\in E}|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \Rightarrow$

$\Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \ \ \forall x \in E$ ∎

Теорема (критерий Коши равномерной сходимости функциональной последовательности):
$f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ на $E \subset R \quad \Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 \ \ \exists N_\varepsilon \in N \ \ \forall n,m > N_\varepsilon \ \ \forall x \in E \ \ |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$.

Доказательство:
1) $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ на $E \subset R \quad \Rightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 \ \ \exists N_\varepsilon \in N \ \ \forall n,m > N_\varepsilon \ \ \forall x \in E \ \ |f_n(x) - f(x)| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ и $|f_m(x) -$
$-f(x)| < \dfrac{\varepsilon}{2}$

$$|f_n(x) - f_m(x)| = |f_n(x) - f(x) + f(x) - f_m(x)| \le |f_n(x) - f(x)| + |f(x) - f_m(x)|$$

$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists N_\varepsilon \in N \ \ \forall n, m > N_\varepsilon \ \ \ \forall x \in E \ \ \ |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon.$

2) Докажем, что если $\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists N_\varepsilon \in N \ \ \forall n, m > N_\varepsilon \ \ \forall x \in E \ \ \ |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$, то $\exists \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$
Возьмём произвольный $x_0 \in E$. Тогда функциональная последовательность $f_n(x)$ превратится в числовую последовательность $f_n(x_0)$, а эта последовательность сходится по критерию Коши для числовых последовательностей $\Longrightarrow \exists \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$.
Докажем теперь, что сходимость равномерная. Возьмём произвольный $n > N_\varepsilon$ и перейдём в нера – венстве $|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$ к пределу $m \to +\infty$:

$$|f_n(x) - f(x)| \le \varepsilon$$

Мы получили, что $\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists N_\varepsilon \in N \ \ \forall n > N_\varepsilon \ \ \forall x \in E \ \ \ |f_n(x) - f(x)| \le \varepsilon$, что и означает равномер – ную сходимость $f_n(x)$. ∎

Теорема:
Пусть $f_n(x) \in C(a,b) \ \ \forall n$ и $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ на $(a;b) \ \ \Longrightarrow \ \ f(x) \in C(a,b)$.

Доказательство:
Надо доказать, что:
$\forall x_0 \in (a;b) \ \ \ \forall \varepsilon > 0 \ \ \ \exists \delta_\varepsilon > 0 \ \ \ \forall x: |x - x_0| < \delta_\varepsilon \ \ \ |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

Доказываем:

$$|f(x) - f(x_0)| = |f(x) - f_n(x) + f_n(x) - f_n(x_0) + f_n(x_0) - f(x_0)| \le$$

$$\le |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f(x_0)|$$

$f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ на $(a;b) \ \Longrightarrow \ \forall \varepsilon > 0 \ \ \exists N_\varepsilon \in N \ \ \forall n > N_\varepsilon \ \ \ \forall x \in (a;b) \ \ \ \ |f_n(x) - f(x)| < \dfrac{\varepsilon}{3}$
$f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ на $(a;b), x_0 \in (a;b) \ \Longrightarrow \ \forall \varepsilon > 0 \ \ \exists N_{\varepsilon,x_0} \in N \ \ \forall n > N_{\varepsilon,x_0} \ \ \ |f_n(x_0) - f(x_0)| < \dfrac{\varepsilon}{3}$
Выберем любой номер $n > \max\left(N_\varepsilon, N_{\varepsilon,x_0}\right)$. Тогда $\forall x \in (a;b)$:
$|f_n(x) - f(x)| < \dfrac{\varepsilon}{3}$ и $|f_n(x_0) - f(x_0)| < \dfrac{\varepsilon}{3}$
$f_n(x) \in C(a,b) \ \ \Longrightarrow \ \ \exists \delta_\varepsilon > 0 \ \ \ \forall x: |x - x_0| < \delta_\varepsilon \ \ \ |f_n(x) - f_n(x_0)| < \dfrac{\varepsilon}{3}$

Тогда $\exists \delta_\varepsilon > 0 \ \ \ \forall x: |x - x_0| < \delta_\varepsilon$

$$|f(x) - f(x_0)| \le |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \qquad \blacksquare$$

Теорема:

$f_n(x) \in C(a,b) \ \ \forall n$ и $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ на $(a;b) \ \Longrightarrow \ \forall x, x_0 \in (a,b)$ при $n \to \infty \ \ \displaystyle\int_{x_0}^{x} f_n(x)dx \ \to \int_{x_0}^{x} f(x)dx$

Доказательство:

$f_n(x) \in C(a,b) \ \Longrightarrow f(x) \in C(a,b) \ \Longrightarrow \ \forall x, x_0 \in (a,b) \ \ \displaystyle\int_{x_0}^{x} f(x)dx$ существует.

$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists N_\varepsilon \ \ \ \forall n > N_\varepsilon \ \ \ |f_n(t) - f(t)| < \varepsilon \ \ \ \forall t \in (a;b)$
Следовательно:

$$\left|\int_{x_0}^{x} f_n(t)dt - \int_{x_0}^{x} f(t)dt\right| = \left|\int_{x_0}^{x} \big(f_n(t) - f(t)\big)dt\right| \le \int_{x_0}^{x} |f_n(t) - f(t)|dt \le \int_{x_0}^{x} \varepsilon\, dt = \ \varepsilon(x - x_0) \qquad \blacksquare$$

Следствие:

$$\int_{x_0}^{x} f_n(t)dt\,, \forall x \in (x_0; b) \qquad \int_{x_0}^{x} f_n(t)dt \rightrightarrows \int_{x_0}^{x} f(t)dt \text{ на } (x_0; b).$$

Теорема:
$f_n(x) \in C^1(a;b), \exists x_0 \in (a;b),$ что последовательность $\{f_n(x_0)\}_{n=1}^{\infty}$ сходится, и $f_n'(x) \rightrightarrows g(x)$ на $(a;b)$. Тогда $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ на $(a;b)$, $f(x) \in C^1(a;b)$, и $f'(x) = g(x)$.

Доказательство:

$$f_n'(x) \in C(a;b), f_n'(x) \rightrightarrows g(x) \text{ на } (a;b) \Longrightarrow \quad g(x) \in C(a;b) \text{ и } \int_{x_0}^{x} f_n'(t)dt \rightrightarrows \int_{x_0}^{x} g(t)dt \text{ на } (a;b).$$

Следовательно, по формуле Ньютона – Лейбница: $\quad f_n(x) - f_n(x_0) \rightrightarrows \int_{x_0}^{x} g(t)dt$ на $(a;b)$.

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) = \int_{x_0}^{x} g(t)dt + \lim_{n\to\infty} f_n(x_0)$$

Возьмём производную от обеих частей, получим: $\quad f'(x) = g(x) \qquad$ ■

Теорема (признак Вейерштрасса для последовательностей):
$\exists \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \quad \forall x \in E$
Если $\exists \{a_n\}_{n=1}^{\infty}, a_n \geq 0,$ что $|f_n(x) - f(x)| \leq a_n, \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0 \quad \Longrightarrow \quad f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ на E.

Доказательство:
$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0 \Longrightarrow \forall \varepsilon > 0 \;\; \exists N_\varepsilon \;\; \forall n > N_\varepsilon \;\; |a_n| < \varepsilon \Longrightarrow \forall \varepsilon > 0 \;\; \exists N_\varepsilon \;\; \forall n > N_\varepsilon \;\; |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \;\; \forall x \in E.$ ■

Лекция №6

Функциональные ряды.

Определение:

Возьмём функциональную последовательность $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}, x \in E \subset R$ и построим по ней ещё одну последовательность $\left\{S_k(x) = \sum_{n=1}^{k} f_n(x)\right\}_{k=1}^{\infty}$.

Пара последовательностей $\left(\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}, \left\{S_k(x) = \sum_{n=1}^{k} f_n(x)\right\}_{k=1}^{\infty}\right)$ называется функциональным рядом и обозначается $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$.

Определение:

Функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ называется поточечно сходящимся (или просто сходящимся) на E, если он сходится для любого $x \in E$.

Определение:

Сходящийся на $E \subset R$ функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = S(x)$ называется равномерно сходя – щимся, если:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N_\varepsilon \ \ \forall k > N_\varepsilon \ \ |S_k(x) - S(x)| < \varepsilon \ \ \forall x \in E.$$

Обозначается равномерная сходимость так: $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \rightrightarrows S(x)$ на E.

Теорема (критерий Коши равномерной сходимости функциональных рядов):

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \rightrightarrows S(x) \text{ на } E \quad \Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 \ \exists N_\varepsilon \ \ \forall k, m > N_\varepsilon \quad \left|\sum_{n=k}^{m} f_n(x)\right| < \varepsilon \ \ \forall x \in E.$$

Доказательство:

Немедленно следует из критерия Коши для функциональных последовательностей, так как:

$$\left|\sum_{n=k}^{m} f_n(x)\right| = |S_m(x) - S_{k-1}(x)| \qquad \blacksquare$$

Следствие (необходимый признак Коши):

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \rightrightarrows S(x) \text{ на } E \quad \Rightarrow \quad |f_n(x)| \rightrightarrows 0 \text{ на } E.$$

Доказательство:

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \rightrightarrows S(x) \text{ на } E \quad \Rightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 \ \exists N_\varepsilon \ \ \forall k, m > N_\varepsilon \quad \left|\sum_{n=k}^{m} f_n(x)\right| < \varepsilon \ \ \forall x \in E$$

Возьмём $m = k$:

$$\left|\sum_{n=k}^{k} f_n(x)\right| = |f_k(x)| < \varepsilon \ \ \forall x \in E \quad \Rightarrow \quad |f_n(x)| \rightrightarrows 0 \text{ на } E. \qquad \blacksquare$$

Теорема (признак Вейерштрасса равномерной сходимости функциональных рядов):

Если для $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ на $E \subset R$ $\exists$ сходящийся ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n > 0$, такой, что $|f_n(x)| \leq a_n$ $\forall x \in E$, то $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ равномерно сходится на E.

Доказательство:

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится $\Leftrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N_\varepsilon$ $\forall k, m > N_\varepsilon$ $\left|\sum\limits_{n=k}^{m} a_n\right| < \varepsilon$

$\left|\sum\limits_{n=k}^{m} f_n(x)\right| \leq \sum\limits_{n=k}^{m} |f_n(x)| \leq \sum\limits_{n=k}^{m} a_n = \left|\sum\limits_{n=k}^{m} a_n\right| < \varepsilon$ $\forall x \in E$ $\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ равномерно сходится на E

по критерию Коши. ■

Теорема (признаки Абеля и Дирихле равномерной сходимости функциональных рядов):

Рассмотрим на $E \subset R$ функциональный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x) b_n(x)$.

Признак Абеля: если $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n(x) \rightrightarrows B(x)$ на E, $\exists C$: $|a_n(x)| < C$ $\forall n$ $\forall x \in E$ ($a_n(x)$ равномерно ограничена на E) и $a_n(x)$ монотонна по n, то $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x) b_n(x)$ равномерно сходится на E.

Признак Дирихле: если $\exists C$: $\forall N$ $\forall x \in E$ $\left|\sum\limits_{n=1}^{N} b_n(x)\right| < C$, $a_n(x)$ монотонна по n и $a_n(x) \rightrightarrows 0$ на E, то $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x) b_n(x)$ равномерно сходится на E.

Доказательство:

Исследуем сходимость с помощью критерия Коши, то есть оценим величину $\sum\limits_{n=k}^{m} a_n(x) b_n(x)$.

Введём обозначение:

$B_m(x) = \sum\limits_{n=k}^{m} b_n(x)$, $B_{k-1}(x) \equiv 0$.

$$\sum_{n=k}^{m} a_n(x) b_n(x) = \sum_{n=k}^{m} a_n(x)(B_n(x) - B_{n-1}(x)) = \sum_{n=k}^{m} a_n(x) B_n(x) - \sum_{n=k}^{m} a_n(x) B_{n-1}(x) =$$
$$= \sum_{n=k}^{m} a_n(x) B_n(x) - \sum_{n=k+1}^{m} a_n(x) B_{n-1}(x) = \sum_{n=k}^{m} a_n(x) B_n(x) - \sum_{n=k}^{m-1} a_{n+1}(x) B_n(x) =$$
$$= a_m(x) B_m(x) + \sum_{n=k}^{m-1} \big(a_n(x) - a_{n+1}(x)\big) B_n(x)$$

$$\left|\sum_{n=k}^{m} a_n(x)b_n(x)\right| \le |a_m(x)| * |B_m(x)| + \sum_{n=k}^{m-1} |a_n(x) - a_{n+1}(x)| * |B_n(x)|$$

Теперь проведём отдельные рассуждения для признаков Абеля и Дирихле:

Признак Абеля:

$$|B_n(x)| < \varepsilon \ \ \forall n \ge k \ \ (\text{из критерия Коши для ряда } \sum_{n=1}^{\infty} b_n)$$

$$\left|\sum_{n=k}^{m} a_n(x)b_n(x)\right| \le |a_m(x)| * \varepsilon + \sum_{n=k}^{m-1} |a_n(x) - a_{n+1}(x)| * \varepsilon = \varepsilon * \left(|a_m(x)| + \sum_{n=k}^{m-1} |a_n(x) - a_{n+1}(x)|\right)$$

так как $a_n(x)$ монотонна, то все модули из суммы раскрываются с одинаковым знаком:

$$\varepsilon * \left(|a_m(x)| + \sum_{n=k}^{m-1} |a_n(x) - a_{n+1}(x)|\right) \le \varepsilon * (2|a_m(x)| + |a_k(x)|),$$

и так как $a_n(x)$равномерно ограничена, то $\exists C\colon |a_n(x)| < C \ \ \forall n \ \ \forall x \in E$, и

$$\varepsilon * (2|a_m(x)| + |a_k(x)|) \le 3C\varepsilon$$

Признак Дирихле:

$$B_l(x) = \sum_{m=k}^{l} b_m(x) = \sum_{m=1}^{l} b_m(x) - \sum_{m=1}^{k-1} b_m(x)$$

По условиям признака $\exists C\colon \ \forall N \ \ \forall x \in E \ \ \left|\sum_{n=1}^{N} b_n(x)\right| < C$. Значит:

$$\begin{cases} -C < \sum_{m=1}^{l} b_m(x) < C \\ -C < -\sum_{m=1}^{k-1} b_m(x) < C \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad -2C < \sum_{m=1}^{l} b_m(x) - \sum_{m=1}^{k-1} b_m(x) < 2C$$

Значит, $\forall l \ \ |B_l(x)| < 2C$. Также, по условиям признака:

$a_n(x) \rightrightarrows 0$ на $E \ \ \Longrightarrow \ \ \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_\varepsilon \quad \forall n > N_\varepsilon \quad |a_n(x)| < \varepsilon \ \ \forall x \in E$

Следовательно:

$$\left|\sum_{n=k}^{m} a_n(x)b_n(x)\right| \le |a_m(x)| * |B_m(x)| + \sum_{n=k}^{m-1} |a_n(x) - a_{n+1}(x)| * |B_n(x)| \le$$

$$\le |a_m(x)| * 2C + \sum_{n=k}^{m-1} |a_n(x) - a_{n+1}(x)| * 2C =$$

$$= 2C\left(|a_m(x)| + \sum_{n=k}^{m-1} |a_n(x) - a_{n+1}(x)|\right) \le 2M(2|a_m(x)| + |a_k(x)|) < 2M * 3\varepsilon = 6M\varepsilon. \qquad \blacksquare$$

Теорема:

$f_n(x) \in C(a,b), \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \rightrightarrows S(x)$ на $(a,b) \Longrightarrow S(x) \in C(a,b)$.

Доказательство:

$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \rightrightarrows S(x)$ на $(a,b) \ \Longrightarrow \ S_k(x) \rightrightarrows S(x)$ на (a,b), а так как $S_k(x) \in C(a,b)$, то $S(x) \in C(a,b)$. $\blacksquare$

Теорема:

$$f(x) \in C(a,b)\ \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \rightrightarrows S(x) \text{ на } (a,b) \ \Longrightarrow\ \forall x_0, x \in (a,b)\ \ \sum_{n=1}^{\infty} \int_{x_0}^{x} f_n(t)dt = \int_{x_0}^{x} S(t)dt$$

Доказательство:

$$S_k(x) \rightrightarrows S(x) \text{ на } (a,b) \ \Longrightarrow \forall x_0, x \in (a,b) \quad \lim_{k\to\infty} \int_{x_0}^{x} S_k(t)dt = \int_{x_0}^{x} S(t)dt$$

$$\lim_{k\to\infty} \int_{x_0}^{x} S_k(t)dt \equiv \lim_{k\to\infty} \int_{x_0}^{x} \sum_{n=1}^{k} f_n(t)\,dt \equiv \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k} \int_{x_0}^{x} f_n(t)dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{x_0}^{x} f_n(t)dt \ \Longrightarrow\ \sum_{n=1}^{\infty} \int_{x_0}^{x} f_n(t)dt =$$

$$= \int_{x_0}^{x} S(t)dt \qquad \blacksquare$$

Теорема:

$f_n(x) \in C^1(a,b), \exists x_0 \in (a,b), \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_0)$ − сходится, $\sum_{n=1}^{\infty} f_n^{'}(x) \rightrightarrows G(x)$ на $(a,b) \ \Longrightarrow\ \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_0) \rightrightarrows S(x)$ на (a,b) и $S^{'}(x) = G(x)$.

Доказательство:
$f_n(x) \in C^1(a,b) \Longrightarrow S_m(x) \in C^1(a,b) \ \ \forall m, \qquad S_k(x_0)$ − сходится, и $S_k^{'}(x) \rightrightarrows G(x)$ на (a,b).
Следовательно, из соответствующей теоремы о функциональных последовательностях (из конца 5 − й лекции) $S_k(x) \rightrightarrows S(x)$ на (a,b) и $S^{'}(x) = G(x)$. $\blacksquare$

Лекция №7

Степенные ряды.

Определение:

Функциональный ряд вида $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ называется степенным рядом с центром разложе – ния в точке x_0, а числа a_n называются коэффициентами степенного ряда.

Замечание:

Сделаем замену переменной $t = x - x_0$. Тогда степенной ряд будет выглядеть так: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$.
Далее без ограничения общности будем рассматривать именно такие ряды.

Утверждение:

Если ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ сходится в какой – то точке x_1, то он сходится $\forall x \in (-|x_1|, |x_1|)$.

Если ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ расходится в какой – то точке x_2, то он расходится $\forall x \in (-\infty, -|x_2|) \cup$
$\cup\ (|x_2|, +\infty)$.

Доказательство:

1) Любой степенной ряд сходится при $x = 0$, поэтому далее рассматриваем $x_1 \neq 0, x_2 \neq 0$.
$\forall x \in (-|x_1|, |x_1|)\quad |a_n x^n| = \left|a_n x^n * \frac{|x_1|^n}{|x_1|^n}\right| = |a_n x_1^n| * \left|\frac{x}{x_1}\right|^n$

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_1^n$ сходится $\implies \lim_{n\to\infty} a_n x_1^n = 0 \implies \exists C\colon\ |a_n x_1^n| < C \quad \forall n$ (так как сходящаяся последо – вательность ограничена).

Значит, $|a_n x^n| = |a_n x_1^n| * \left|\frac{x}{x_1}\right|^n < C * \left|\frac{x}{x_1}\right|^n$. Так как $\left|\frac{x}{x_1}\right| < 1$, то ряд $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|$ сходится, так как сходится ряд с большими положительными членами $\sum_{n=0}^{\infty} C * \left|\frac{x}{x_1}\right|^n$.

2) Предположим, что $\exists x \in (-\infty, -|x_2|) \cup (|x_2|, +\infty)$, что ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ сходится. Тогда из первого пункта следует, что в точке x_2 он также сходится, что противоречит условию. Значит,
$\forall x \in (-\infty, -|x_2|) \cup (|x_2|, +\infty)$ ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ расходится. ■

Следствие:

Пусть $A = \sup\limits_{\substack{\text{такие } x_1\text{, что} \\ \text{ряд сходится}}} \{|x_1|\}, B = \inf\limits_{\substack{\text{такие } x_2\text{, что} \\ \text{ряд расходится}}} \{|x_2|\} \implies A = B$, и $\forall x \in (-A, A)$ ряд сходится, а
$\forall x \in (-\infty, -A) \cup (A, +\infty)$ ряд расходится.

Определение:

Число A из следствия называется радиусом сходимости ряда и обозначается R.
Если множество сходимости состоит только из центра разложения, то $R = 0$.
Если множество сходимости совпадает со всей числовой прямой, то $R = +\infty$.
Если $R \in (0, +\infty)$, то интервал $(-R, R)$ называется интервалом сходимости степенного ряда.

Теорема (формула Коши-Адамара):

1) если $\sqrt[n]{|a_n|}$ – неограничена, то радиус сходимости степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = R = 0$.

2) если $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0$, то $R = +\infty$.

3) если $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{R} \in (0, +\infty)$, то R – радиус сходимости степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

Доказательство:

1) $\sqrt[n]{|a_n|}$ – неограничена $\Rightarrow$ $\forall x \neq 0$ $\sqrt[n]{|a_n|}x$ – неограничена $\Rightarrow$ $|a_n x^n|$ – неограничена $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ общий член $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ не стремится к нулю $\Rightarrow$ ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ расходится.

2) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0$ $\Rightarrow$ $\forall x$ $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}x = 0$ $\Rightarrow$ $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N_\varepsilon$ $\forall n > N_\varepsilon$ $\left|\sqrt[n]{|a_n|}x\right| < \varepsilon$ $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ $|a_n x^n| < \varepsilon^n$. Возьмём ε, по модулю меньшее 1, и ряд $\sum_{n=0}^{\infty}|a_n x^n|$ сходится, так как сходится ряд с большими положительными членами $\sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n$, а так как $\sum_{n=0}^{\infty}|a_n x^n|$ сходится, то сходится и ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

3) $\forall x \in (-R, R)$ рассмотрим ряд $\sum_{n=0}^{\infty}|a_n x^n|$:

$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n x^n|} = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n||x^n|} = |x| * \frac{1}{R} < 1$ $\Rightarrow$ ряд $\sum_{n=0}^{\infty}|a_n x^n|$ сходится по признаку Коши $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ сходится и ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. ■

Теорема:

Пусть для $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ $R > 0$. Тогда:

1) $\forall r \in (0; R)$ $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \rightrightarrows S(x)$ на $[-r, r]$;

2) $S(x) \in C(-R, R)$;

3) $\forall x_0, x \in (-R, R)$ $\sum_{n=0}^{\infty} \int_{x_0}^{x} a_n t^n dt = \int_{x_0}^{x} S(t)dt$;

4) $S(x) \in C^\infty(-R, R)$.

Доказательство:

1) $\forall x \in [-r, r]$ $|a_n x^n| \leq |a_n| r^n$ $r \in (0; R) \Rightarrow$ ряд $\sum_{n=0}^{\infty}|a_n| r^n$ сходится $\Rightarrow$ по признаку Вейерштрасса $\sum_{n=0}^{\infty}|a_n x^n| \rightrightarrows$ на $[-r, r] \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \rightrightarrows S(x)$ на $[-r, r]$.

2) $\forall r \in (0;R)\ \ \forall x \in [-r,r]\ \ \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \rightrightarrows S(x),\ \ a_n x^n \in C[-r,r] \Longrightarrow S(x) \in C[-r,r]$

В силу произвольности выбора r $\ S(x) \in C(-R,R)$.

3) Очевидно в силу теоремы из предыдущей лекции, в которой утверждается, что:

если $f(x) \in C(a,b)\ \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \rightrightarrows S(x)$ на (a,b), то $\forall x_0, x \in (a,b)\ \ \sum_{n=1}^{\infty} \int_{x_0}^{x} f_n(t)dt = \int_{x_0}^{x} S(t)dt$

4) Сначала докажем, что $S(x) \in C^1(-R,R)$

Из первого пункта следует, что $\forall r \in (0;R)\ \ \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \rightrightarrows S(x)$ на $[-r,r]$

$\sum_{n=0}^{\infty} (a_n x^n)' = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1} \rightrightarrows S'(x)$ на $[-r,r]$, так как $\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|na_n|} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{n} * \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} =$

$= \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{R} \Longrightarrow$ радиус сходимости ряда из производных тоже равен $R \Longrightarrow$ из второго пункта следует, что $S'(x) \in C(-R,R)$. Аналогично можно доказать, что $S''(x) \in C(-R,R)$, и так далее. ■

Замечание:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x a_n t^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$$

Теорема (ряд Тейлора):

Пусть для $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\ \ R > 0$, и $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = f(x)$ для $\forall x \in (-R,R)$. Тогда $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$.

Доказательство:

$f(x) \in C^{\infty}(-R,R)$ (по предыдущей теореме)

$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} a_n * n * (n-1) * \ldots * (n-k+1) * x^{n-k}$

$f^k(0) = a_k * k! \Longrightarrow a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}$ ■

Определение:

Ряд вида $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$ называется рядом Тейлора функции $f(x)$.

Замечание:

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n = f(x) \Longrightarrow a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$

Теорема (Абеля):

Пусть для $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\ \ R > 0$ и пусть ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$ сходится. Тогда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \in C(-R,R]$.

Доказательство:

В одной из предыдущих теорем мы доказали, что $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \in C(-R,R)$. Теперь рассмотрим на от –

резке $[0, R]$ ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n \left(\frac{x}{R}\right)^n$: ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$ не зависит от x и сходится по условию, следовательно, сходится равномерно при любых x; $\forall x \in [0, R]$: $\left|\frac{x}{R}\right|^n \leq 1$ и $\left|\frac{x}{R}\right|^n$ монотонна по n.
Следовательно, по признаку Абеля равномерной сходимости функциональных рядов
$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \rightrightarrows f(x)$ на $(-R, R]$, где $f(x) \in C(-R, R]$, так как ряд из непрерывных функций сходится к непрерывной функции. ■

Замечание:

$$\lim_{x \to R-0} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$$

Определение:

Если $\exists \lim_{x \to 1-0} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = A$, то сопоставление числовому ряду $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ числа A называется мето – дом суммирования по Абелю.

Пример:

Возьмём ряд $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$.

$$\lim_{x \to 1-0} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n = \lim_{x \to 1-0} \frac{1}{1+x} = \frac{1}{2}$$

Лекция №8

Бесконечные произведения.

Определение:

Пара последовательностей $\left(\{u_n\}_{n=1}^{\infty}, \{\Pi_k = \prod_{n=1}^{k} u_n\}_{k=1}^{\infty}\right)$ называется бесконечным произведе – нием и обозначается

$$\prod_{n=1}^{\infty} u_n$$

Если $\exists \lim\limits_{k\to\infty} \Pi_k \neq 0$, то бесконечное произведение называется сходящимся.
Если $\nexists \lim\limits_{k\to\infty} \Pi_k$, то бесконечное произведение называется расходящимся.
Если $\exists \lim\limits_{k\to\infty} \Pi_k = 0$, то бесконечное произведение называется расходящимся к 0.

Утверждение:

Если среди членов $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ встречается бесконечно много отрицательных членов, то $\prod\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ не является сходящимся.

Доказательство:
Если среди членов $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ встречается бесконечно много отрицательных членов, то среди $\{\Pi_k\}_{k=1}^{\infty}$ бесконечно много и положительных, и отрицательных членов $\Longrightarrow \nexists \lim\limits_{k\to\infty} \Pi_k$ или $\lim\limits_{k\to\infty} \Pi_k = 0$. ■

Комментарий:
Таким образом, среди сходящегося бесконечного произведения может быть только конечное число отрицательных членов. Поэтому далее без ограничения общности полагаем $u_n \geq 0 \ \ \forall n$.
Если среди u_n есть 0, то $\lim\limits_{k\to\infty} \Pi_k = 0$, поэтому полагаем $u_n > 0 \ \ \forall n$.

Теорема:
Если $\prod\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится, то $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 1$.

Доказательство:
$\exists \lim\limits_{k\to\infty} \Pi_k = \Pi \neq 0$

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\Pi_n}{\Pi_{n-1}} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} \Pi_n}{\lim\limits_{n\to\infty} \Pi_{n-1}} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} \Pi_n}{\lim\limits_{n\to\infty} \Pi_{n-1}} = \frac{\Pi}{\Pi} = 1. \quad ■$$

Замечание:
Далее вместо $u_n = 1 + a_n, a_n > -1$.

Теорема:

$\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1 + a_n)$ сходится $\Leftrightarrow$ сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln(1 + a_n)$.

Доказательство:
1) $\exists \lim\limits_{k\to\infty} \Pi_k = \Pi \neq 0$

так как $\ln x \in C(0,+\infty) \Longrightarrow \exists \lim\limits_{k\to\infty} \ln \Pi_k = \ln \Pi = \lim\limits_{k\to\infty} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln(1+a_k) \Longrightarrow$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln(1+a_n)$ сходится.

2) $\exists \lim\limits_{k\to\infty} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln(1+a_k) \Longrightarrow \exists \lim\limits_{k\to\infty} \ln \Pi_k$, и так как $e^x \in C(R)$, то $\exists \lim\limits_{k\to\infty} \Pi_k = \Pi \neq 0$. ■

Определение:

$\prod\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ называется абсолютно сходящимся, если сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |\ln u_n|$.

Если $\prod\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится, но не абсолютно, то оно называется условно сходящимся.

Теорема:

$\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ абсолютно сходится $\Leftrightarrow$ сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$.

Доказательство:

1) Так как $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ сходится, то $(1+a_n) \to 1$ и $a_n \to 0$, и тогда $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{|\ln(1+a_n)|}{|a_n|} = 1 \Longrightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ сходится.

2) Так как $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ сходится, то $a_n \to 0$, и тогда $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{|\ln(1+a_n)|}{|a_n|} = 1 \Longrightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} |\ln(1+a_n)|$ – сходится

$\Longrightarrow \prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ абсолютно сходится. ■

Теорема:

Рассмотрим $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$. Если $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ сходится или расходится одно – временно с рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$.

Доказательство:

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится $\Longrightarrow a_n \to 0 \Longrightarrow \exists N \ \forall n \geq N \ \ \ln(1+a_n) - a_n \leq 0$ (по формуле Тейлора)

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\ln(1+a_n) - a_n)$ сходится или расходится одновременно с рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$, так как по формуле Тейлора:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(1+a_n) - a_n}{-a_n^2} = \frac{1}{2},$$

а так как ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln(1+a_n)$ сходится или расходится одновременно с

с рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2 \Longrightarrow \prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ сходится или расходится одновременно с рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$. ■

Определение:

Пусть $\{u_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ определена на $E \subset R$. $\prod\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ называется сходящимся на E, если $\forall x \in E$ сходится числовой ряд $\prod\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$.

Определение:

Сходящееся на $E \subset R$ $\prod\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ называется равномерно сходящимся на $E \subset R$, если $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln u_n(x) \rightrightarrows$ на E. Равномерная сходимость $\prod\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ обозначается $\prod\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x) \rightrightarrows$ на $E \subset R$.

Теорема:

Если $u_n(x) \in C(E), \prod\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x) \rightrightarrows \Pi(x) \implies \Pi(x) \in C(E)$

Доказательство:

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln u_n(x) = S(x) \in C(E) \Rightarrow \Pi(x) = e^{S(x)} \in C(E)$. ■

Лекция №9

Разложение синуса в бесконечное произведение.

Лемма 1:

При $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ $\quad \frac{2x}{\pi} \le \sin x \le x$.

Доказательство:

1) $\sin x \le x$ − уже известный факт

2) На $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ функция $y = \sin x$ выпукла вверх, так как её вторая производная $y'' = -\sin x \le 0$ на $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, поэтому её график на этом отрезке находится выше секущей, проходящей через крайние точки графика $(0,0)$ и $\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$, а эта секущая − прямая $y = \frac{2x}{\pi}$, значит, $\frac{2x}{\pi} \le \sin x$. ■

Лемма 2:

$\forall a_i \in R, 1, \dots, n \qquad \left|\prod_{i=1}^{n}(1 + a_i) - 1\right| \le \prod_{i=1}^{n}(1 + |a_i|) - 1.$

Доказательство:

Докажем по индукции. Для $n = 1$ получаем:

$$\left|\prod_{i=1}^{1}(1 + a_i) - 1\right| = |a_i| = \prod_{i=1}^{1}(1 + |a_i|) - 1$$

Пусть для n формула верна. Для $(n + 1)$ получаем:

$$\left|\prod_{i=1}^{n+1}(1 + a_i) - 1\right| = \left|\prod_{i=1}^{n+1}(1 + a_i) - \prod_{i=1}^{n}(1 + a_i) + \prod_{i=1}^{n}(1 + a_i) - 1\right| \le \left|\prod_{i=1}^{n+1}(1 + a_i) - \prod_{i=1}^{n}(1 + a_i)\right| +$$

$$+ \left|\prod_{i=1}^{n}(1 + a_i) - 1\right| = \left|\prod_{i=1}^{n}(1 + a_i)\,(1 + a_{n+1} - 1)\right| + \left|\prod_{i=1}^{n}(1 + a_i) - 1\right|$$

Так как по предположению индукции:

$$\left|\prod_{i=1}^{n}(1 + a_i) - 1\right| \le \prod_{i=1}^{n}(1 + |a_i|) - 1,$$

то:

$$\left|\prod_{i=1}^{n}(1 + a_i)\,(1 + a_{n+1} - 1)\right| + \left|\prod_{i=1}^{n}(1 + a_i) - 1\right| \le \prod_{i=1}^{n}|1 + a_i|\,|a_{n+1}| + \prod_{i=1}^{n}(1 + |a_i|) - 1 \le$$

$$\le \prod_{i=1}^{n}(1 + |a_i|)\,|a_{n+1}| + \prod_{i=1}^{n}(1 + |a_i|) - 1 \ \ (\text{так как } 0 \le |1 + a_i| \le 1 + |a_i|)$$

$$\prod_{i=1}^{n}(1 + |a_i|)\,|a_{n+1}| + \prod_{i=1}^{n}(1 + |a_i|) - 1 = \prod_{i=1}^{n}(1 + |a_i|)\,(1 + |a_{n+1}|) - 1 = \prod_{i=1}^{n+1}(1 + |a_i|) - 1.$$

В итоге мы получили, что

$$\left|\prod_{i=1}^{n+1}(1 + a_i) - 1\right| \le \prod_{i=1}^{n+1}(1 + |a_i|) - 1. \qquad ■$$

Теорема (о разложении синуса в бесконечное произведение):

$\forall x \in R, x \neq \pi k, k \in Z \quad \sin x = x * \prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{\pi^2 k^2}\right).$

Доказательство:

1) Докажем, что $\forall n = 0, 1, 2, \ldots \ \sin(2n+1)t = (2n+1)\sin t * P_n(\sin^2 t)$

Докажем по индукции:

Для $n = 0$ верно: $\sin t = \sin t * 1$

Для $n = 1$ верно: $\sin 3t = 3\sin t - 4\sin^3 t = 3\sin t\left(1-\frac{4}{3}\sin^2 t\right)$

Пусть для $(2n-3)$ и для $(2n-1)$ верно. Тогда:

$\sin(2n+1)t + \sin(2n-3)t = 2\sin(2n-1)t\cos 2t$

$\sin(2n+1)t = 2\sin(2n-1)t\cos 2t - \sin(2n-3)t = 2(2n-1)\sin t\, P_{n-1}(\sin^2 t)(1-2\sin^2 t) -$

$-(2n-3)\sin t * P_{n-2}(\sin^2 t) = (2n+1)\sin t\left(\frac{2(2n-1)}{2n+1}P_n(\sin^2 t) - \frac{2n-3}{2n+1}P_{n-2}(\sin^2 t)\right)$

В скобках стоит сумма многочленов $n-$ й и $(n-2)-$ й степени относительно $\sin^2 t$, являю – щаяся многочленом $n-$ й степени относительно $\sin^2 t$, значит, утверждение доказано.

2) $\forall n = 0, 1, 2, \ldots \ \sin(2n+1)t = (2n+1)\sin t * P_n(\sin^2 t) \Rightarrow P_n(\sin^2 t) = \frac{\sin(2n+1)t}{(2n+1)\sin t}$

Значит, $P_n(\sin^2 t) = 0$ в точках, где $\sin(2n+1)t = 0$, то есть при $t = \frac{\pi k}{2n+1}, k = 1, \ldots, n$

Обозначим $y = \sin^2 t$:

$$P_n(y) = 0 \ \text{ при } \ y = \sin^2\frac{\pi k}{2n+1}, k = 1, \ldots, n$$

Итак, мы знаем все n корней многочлена $P_n(y)$ и теперь можем разложить его на множители:

$$P_n(y) = b\prod_{k=1}^{n}\left(y-\sin^2\frac{\pi k}{2n+1}\right), \text{где } b - \text{коэффициент при старшей степени } P_n(y),$$

заменим обратно $y = \sin^2 t$:

$$P_n(\sin^2 t) = b * \prod_{k=1}^{n}\left(\sin^2 t - \sin^2\frac{\pi k}{2n+1}\right) = b * \prod_{k=1}^{n}\left(-\sin^2\frac{\pi k}{2n+1}\right) * \prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{\sin^2 t}{\sin^2\frac{\pi k}{2n+1}}\right)$$

обозначим $b * \prod_{k=1}^{n}\left(-\sin^2\frac{\pi k}{2n+1}\right) = a$. Тогда, так как $P_n(\sin^2 t) = \frac{\sin(2n+1)t}{(2n+1)\sin t}$, то:

$$\frac{\sin(2n+1)t}{(2n+1)\sin t} = a * \prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{\sin^2 t}{\sin^2\frac{\pi k}{2n+1}}\right)$$

Перейдем в обеих частях равенствах к пределу $t \to 0$:

$$\lim_{t\to 0}\frac{\sin(2n+1)t}{(2n+1)\sin t} = a * \lim_{t\to 0}\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{\sin^2 t}{\sin^2\frac{\pi k}{2n+1}}\right)$$

$$\lim_{t\to 0}\frac{\sin(2n+1)t}{(2n+1)\sin t} = \lim_{t\to 0}\frac{(2n+1)t}{(2n+1)t} = 1, \qquad \lim_{t\to 0}\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{\sin^2 t}{\sin^2\frac{\pi k}{2n+1}}\right) = 1 \ \Rightarrow \ a = 1$$

Следовательно, $\frac{\sin(2n+1)t}{(2n+1)\sin t} = \prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{\sin^2 t}{\sin^2\frac{\pi k}{2n+1}}\right).$

3) Сделаем замену $x = (2n+1)t$:

$$\frac{\sin x}{(2n+1)\sin\dfrac{x}{2n+1}} = \prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{\sin^2\dfrac{x}{2n+1}}{\sin^2\dfrac{\pi k}{2n+1}}\right)$$

Пусть $x \in R -$ фиксированный, $x \neq \pi l, l \in Z$ и $|x| \leq 2n+1$.
Возьмём такое $m \in N$, что $\pi m < 2n+1$. Тогда:

$$\frac{\sin x}{(2n+1)\sin\dfrac{x}{2n+1}} = \prod_{k=1}^{m}\left(1-\frac{\sin^2\dfrac{x}{2n+1}}{\sin^2\dfrac{\pi k}{2n+1}}\right) * P_{n,m}(x) \qquad (1)$$

$$\text{где } P_{n,m}(x) = \prod_{k=m+1}^{n}\left(1-\frac{\sin^2\dfrac{x}{2n+1}}{\sin^2\dfrac{\pi k}{2n+1}}\right)$$

$$\left|P_{n,m}(x)-1\right| = \left|\prod_{k=m+1}^{n}\left(1-\frac{\sin^2\dfrac{x}{2n+1}}{\sin^2\dfrac{\pi k}{2n+1}}\right) - 1\right| \leq \prod_{k=m+1}^{n}\left(1+\frac{\sin^2\dfrac{x}{2n+1}}{\sin^2\dfrac{\pi k}{2n+1}}\right) - 1 \ \text{(по лемме 2)}$$

по лемме 1: $\sin^2\dfrac{\pi k}{2n+1} \leq \dfrac{4}{\pi^2} * \dfrac{\pi^2 k^2}{(2n+1)^2} \quad \Longrightarrow \quad \dfrac{\sin^2\dfrac{x}{2n+1}}{\sin^2\dfrac{\pi k}{2n+1}} \leq \dfrac{\dfrac{x^2}{(2n+1)^2}}{\dfrac{4}{\pi^2} * \dfrac{\pi^2 k^2}{(2n+1)^2}} = \dfrac{x^2}{4k^2}$

$$\text{Значит, } \left|P_{n,m}(x)-1\right| \leq \prod_{k=m+1}^{n}\left(1+\frac{x^2}{4k^2}\right) - 1 \qquad (2)$$

В равенстве (1) перейдем в обеих частях к пределу $n \to +\infty$:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sin x}{(2n+1)\sin\dfrac{x}{2n+1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sin x}{(2n+1)\dfrac{x}{2n+1}} = \frac{\sin x}{x}$$

$$\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{m}\left(1-\frac{\sin^2\dfrac{x}{2n+1}}{\sin^2\dfrac{\pi k}{2n+1}}\right) = \lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{m}\left(1-\frac{\dfrac{x^2}{(2n+1)^2}}{\dfrac{\pi^2 k^2}{(2n+1)^2}}\right) = \lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{m}\left(1-\frac{x^2}{\pi^2 k^2}\right) = \prod_{k=1}^{m}\left(1-\frac{x^2}{\pi^2 k^2}\right)$$

В силу равенства (1) так как $\exists \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin x}{(2n+1)\sin\dfrac{x}{2n+1}}$ и $\exists \lim\limits_{n\to\infty}\prod\limits_{k=1}^{m}\left(1-\dfrac{\sin^2\dfrac{x}{2n+1}}{\sin^2\dfrac{\pi k}{2n+1}}\right)$, то

$$\exists \lim_{n\to\infty} P_{n,m}(x) = P_m(x), \text{ и:}$$

$$\frac{\sin x}{x} = \prod_{k=1}^{m}\left(1-\frac{x^2}{\pi^2 k^2}\right) * P_m(x) \qquad (3)$$

В неравенстве (2) перейдем в обеих частях к пределу $n \to +\infty$ и учтём, что $\lim\limits_{n\to\infty} P_{n,m}(x) = P_m(x)$:

$$|P_m(x)-1| \leq \prod_{k=m+1}^{\infty}\left(1+\frac{x^2}{4k^2}\right) - 1$$

Переходим в обеих частях к пределу $m \to +\infty$:

$$\left|\lim_{m\to\infty} P_m(x) - 1\right| \leq \lim_{m\to\infty}\prod_{k=m+1}^{\infty}\left(1+\frac{x^2}{4k^2}\right) - 1$$

Бесконечное произведение $\prod_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{x^2}{4k^2}\right)$ сходится, так как сходится ряд $\sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{x^2}{4k^2}\right|$. Следова – тельно, $\exists \lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{x^2}{4k^2}\right)=A \implies \lim_{m\to\infty}\prod_{k=m+1}^{\infty}\left(1+\frac{x^2}{4k^2}\right)=\lim_{m\to\infty}\frac{\prod_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{x^2}{4k^2}\right)}{\prod_{k=1}^{m}\left(1+\frac{x^2}{4k^2}\right)}=\frac{A}{A}=1.$

Значит:

$$\left|\lim_{m\to\infty}P_m(x)-1\right| \le \lim_{m\to\infty}\prod_{k=m+1}^{\infty}\left(1+\frac{x^2}{4k^2}\right)-\ 1=0$$

$$\lim_{m\to\infty}P_m(x)=1$$

Переходим в равенстве (3) в обеих частях к пределу $m\to+\infty$, учитывая, что $\lim_{m\to\infty}P_m(x)=1$:

$$\frac{\sin x}{x}=\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{\pi^2k^2}\right)$$

$$\sin x = x*\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{\pi^2k^2}\right) \qquad \blacksquare$$

Следствие (формула Валлиса):

$$\frac{\pi}{2}=\prod_{k=1}^{\infty}\frac{4k^2}{4k^2-1}$$

Доказательство:

По доказанной теореме при $x=\frac{\pi}{2}$:

$$1=\frac{\pi}{2}*\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{4k^2}\right)$$

$$\frac{2}{\pi}=\prod_{k=1}^{\infty}\frac{4k^2-1}{4k^2}$$

Так как $\exists \lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}\frac{4k^2-1}{4k^2}=\frac{2}{\pi}\neq 0$, то $\exists \lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}\frac{4k^2}{4k^2-1}=\frac{\pi}{2} \implies \frac{\pi}{2}=\prod_{k=1}^{\infty}\frac{4k^2}{4k^2-1}$ $\blacksquare$

<u>Лекция №10</u>

<u>Интегралы, зависящие от параметра. Собственные интегралы, зависящие от параметра.</u>

<u>Определение:</u>

Рассмотрим множество $G \subset R^2$: $G = \{(x,y): y \in [a,b], x \in [x_1(y), x_2(y)]\}$, где $x_1(y), x_2(y) -$ ограничены, и $x_1(y) \le x_2(y)$. Рассмотрим также определённую на G функцию $f(x,y)$ и $\forall y \in [a,b]$ $f(x,y) \in R[x_1(y), x_2(y)]$. Тогда $F(y) = \int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)dx$, $y \in [a,b]$ называется собственным интегралом с параметром.

<u>Теорема:</u>

Пусть $x_1(y), x_2(y) \in C[a,b]$, $f(x,y) \in C(G) \implies F(y) = \int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)dx \in C[a,b]$.

<u>Доказательство:</u>

$$|F(y+\Delta y) - F(y)| = \left| \int\limits_{x_1(y+\Delta y)}^{x_2(y+\Delta y)} f(x,y+\Delta y)dx - \int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)dx \right| = \left| \int\limits_{x_1(y+\Delta y)}^{x_2(y+\Delta y)} f(x,y+\Delta y)dx - \right.$$

$$- \int\limits_{x_1(y+\Delta y)}^{x_2(y+\Delta y)} f(x,y)dx + \int\limits_{x_1(y+\Delta y)}^{x_2(y+\Delta y)} f(x,y)dx - \int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y+\Delta y)} f(x,y)dx + \int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y+\Delta y)} f(x,y)dx -$$

$$\left. - \int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)dx \right| \le \left| \int\limits_{x_1(y+\Delta y)}^{x_2(y+\Delta y)} f(x,y+\Delta y)dx - \int\limits_{x_1(y+\Delta y)}^{x_2(y+\Delta y)} f(x,y)dx \right| + \left| \int\limits_{x_1(y+\Delta y)}^{x_2(y+\Delta y)} f(x,y)dx - \right.$$

$$\left. - \int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y+\Delta y)} f(x,y)dx \right| + \left| \int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y+\Delta y)} f(x,y)dx - \int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)dx \right| = \left| \int\limits_{x_1(y+\Delta y)}^{x_2(y+\Delta y)} \big(f(x,y+\Delta y) - f(x,y)\big)dx \right| +$$

$$+ \left| \int\limits_{x_1(y)}^{x_1(y+\Delta y)} f(x,y)dx \right| + \left| \int\limits_{x_2(y)}^{x_2(y+\Delta y)} f(x,y)dx \right|$$

Пусть $M = \max\limits_G |f(x,y)|$, $\quad L = \max\limits_{y\in[a,b]} |x_2(y) - x_1(y)|$. Тогда:

$$|F(y+\Delta y) - F(y)| \le \int\limits_{x_1(y+\Delta y)}^{x_2(y+\Delta y)} |f(x,y+\Delta y) - f(x,y)|dx + \int\limits_{x_1(y)}^{x_1(y+\Delta y)} |f(x,y)|dx + \int\limits_{x_2(y)}^{x_2(y+\Delta y)} |f(x,y)|dx \le$$

$$\le \max_x |f(x,y+\Delta y) - f(x,y)| * L + M * |x_1(y+\Delta y) - x_1(y)| + M * |x_2(y+\Delta y) - x_2(y)|$$

Так как $f(x,y) \in C(G)$, а $G -$ компакт, то $f(x,y)$ равномерно непрерывна на G:

$\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta_\varepsilon > 0$ такое, что если $\rho((x_1,y_1),(x_2,y_2)) < \delta_\varepsilon$, то $|f(x_1,y_1) - f(x_2,y_2)| < \varepsilon$

Следовательно, если мы возьмём $|\Delta y| < \delta_\varepsilon$, то $\max\limits_x |f(x,y+\Delta y) - f(x,y)| < \varepsilon$

Так как $x_1(y) \in C[a,b]$, то $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta_{1\varepsilon} > 0$ такое, что при $|\Delta y| < \delta_{1\varepsilon}$ $\quad |x_1(y+\Delta y) - x_1(y)| < \varepsilon$

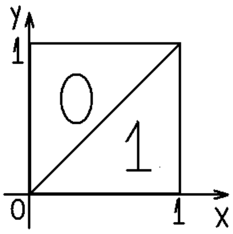
Так как $x_2(y) \in C[a,b]$, то $\forall\varepsilon > 0\ \ \exists\delta_{2\varepsilon} > 0$ такое, что при $|\Delta y| < \delta_{2\varepsilon}\quad |x_2(y+\Delta y) - x_2(y)| < \varepsilon$
Теперь выберем $\delta_{3\varepsilon} = \min\{\delta_\varepsilon, \delta_{1\varepsilon}, \delta_{2\varepsilon}\}$. Тогда $\forall\varepsilon > 0$ при $|\Delta y| < \delta_{3\varepsilon}$

$$\max_x|f(x,y+\Delta y) - f(x,y)| * L \ +\ M * |x_1(y+\Delta y) - x_1(y)| \ +\ M * |x_2(y+\Delta y) - x_2(y)| \le$$

$$\le \varepsilon * L + M * \varepsilon + M * \varepsilon = (L+2M)\varepsilon$$

В итоге мы получили, что $\forall\varepsilon > 0\ \ \exists\delta_{3\varepsilon}$ такое, что при $|\Delta y| < \delta_{3\varepsilon}\ \ |F(y+\Delta y) - F(y)| \le (L+2M)\varepsilon$. ■

Пример интеграла с параметром:



$G = [0,1] \text{ x } [0,1]$

$$f(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{если } 0 \le x \le y \le 1 \\ 1, & \text{если } 0 \le y < x \le 1 \end{cases}$$

$$F(y) = \int_0^1 f(x,y)dx = \int_y^1 dx = 1 - y$$

<u>Теорема:</u>
Пусть $x_1(y), x_2(y) \in C^1[a,b]$, $f(x,y) \in C(G)$, $\exists f_y^{'}(x,y)$ и $f_y^{'}(x,y) \in C(G)$. Тогда $F(y) \in C^1[a,b]$ и

$$F^{'}(y) = \left(\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)dx\right)_y^{'} = f(x_2(y),y) * x_2^{'}(y) - f(x_1(y),y) * x_1^{'}(y) + \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f_y^{'}(x,y)dx$$

<u>Доказательство:</u>

1) $$\frac{1}{\Delta y}\big(F(y+\Delta y) - F(y)\big) = \frac{1}{\Delta y}\left(\int_{x_1(y+\Delta y)}^{x_2(y+\Delta y)} f(x,y+\Delta y)dx - \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)dx\right) =$$

$$= \frac{1}{\Delta y}\left(\int_{x_1(y+\Delta y)}^{x_2(y+\Delta y)} f(x,y+\Delta y)dx - \int_{x_1(y+\Delta y)}^{x_2(y+\Delta y)} f(x,y)dx\right) + \frac{1}{\Delta y}\left(\int_{x_1(y+\Delta y)}^{x_2(y+\Delta y)} f(x,y)dx - \int_{x_1(y)}^{x_2(y+\Delta y)} f(x,y)dx\right) +$$

$$+ \frac{1}{\Delta y}\left(\int_{x_1(y)}^{x_2(y+\Delta y)} f(x,y)dx - \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)dx\right) = \frac{1}{\Delta y}\int_{x_1(y+\Delta y)}^{x_2(y+\Delta y)} \big(f(x,y+\Delta y) - f(x,y)\big)dx +$$

$$+ \frac{1}{\Delta y}\int_{x_1(y+\Delta y)}^{x_1(y)} f(x,y)dx + \frac{1}{\Delta y}\int_{x_2(y)}^{x_2(y+\Delta y)} f(x,y)dx$$

2) $$\lim_{\Delta y\to 0} \frac{1}{\Delta y}\int_{x_1(y+\Delta y)}^{x_2(y+\Delta y)} \big(f(x,y+\Delta y) - f(x,y)\big)dx = \lim_{\Delta y\to 0} \int_{x_1(y+\Delta y)}^{x_2(y+\Delta y)} \frac{f(x,y+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta y}dx$$

Доопределим $\dfrac{f(x, y+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta y}$ при $\Delta y = 0$ значением $f_y^{'}(x,y)$ и воспользуемся предыдущей теоремой:

$$\lim_{\Delta y \to 0} \int\limits_{x_1(y+\Delta y)}^{x_2(y+\Delta y)} \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta y} dx = \int\limits_{x_1(y+\Delta y)}^{x_2(y+\Delta y)} f_y^{'}(x,y)dx$$

3) Применим теорему о среднем:

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{1}{\Delta y} \int\limits_{x_2(y)}^{x_2(y+\Delta y)} f(x,y)dx \;=\; \lim_{\Delta y \to 0} \frac{1}{\Delta y} * f(\xi_1(y), y) * \int\limits_{x_2(y)}^{x_2(y+\Delta y)} 1\,dx \;=$$

$$= \lim_{\Delta y \to 0} f(\xi_1(y, \Delta y), y) * \frac{x_2(y+\Delta y) - x_2(y)}{\Delta y}, \text{где } \xi_1(y, \Delta y) \in [x_2(y), x_2(y+\Delta y)]$$

$\lim\limits_{\Delta y \to 0} f(\xi_1(y, \Delta y), y) = f(x_2(y), y)$, так как $\xi_1(y, \Delta y) \in [x_2(y), x_2(y+\Delta y)]$, следовательно:

$$\lim_{\Delta y \to 0} f(\xi_1(y, \Delta y), y) * \frac{x_2(y+\Delta y) - x_2(y)}{\Delta y} \;=\; f(x_2(y), y) * x_2^{'}(y)$$

4) Применим теорему о среднем:

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{1}{\Delta y} \int\limits_{x_1(y+\Delta y)}^{x_1(y)} f(x,y)dx = -\lim_{\Delta y \to 0} \frac{1}{\Delta y} \int\limits_{x_1(y)}^{x_1(y+\Delta y)} f(x,y)dx = -\lim_{\Delta y \to 0} \frac{1}{\Delta y} * f(\xi_2(y), y) * \int\limits_{x_1(y)}^{x_1(y+\Delta y)} 1\,dx \;=$$

$$= -\lim_{\Delta y \to 0} f(\xi_2(y, \Delta y), y) * \frac{x_1(y+\Delta y) - x_1(y)}{\Delta y}, \text{где } \xi_2(y, \Delta y) \in [x_1(y), x_1(y+\Delta y)]$$

$\lim\limits_{\Delta y \to 0} f(\xi_2(y, \Delta y), y) = f(x_1(y), y)$, так как $\xi_2(y, \Delta y) \in [x_1(y), x_1(y+\Delta y)]$, следовательно:

$$-\lim_{\Delta y \to 0} f(\xi_2(y, \Delta y), y) * \frac{x_1(y+\Delta y) - x_1(y)}{\Delta y} \;=\; -f(x_1(y), y) * x_1^{'}(y)$$

5) $\lim\limits_{\Delta y \to 0} \dfrac{1}{\Delta y}\big(F(y+\Delta y) - F(y)\big) = f(x_2(y), y) * x_2^{'}(y) - f(x_1(y), y) * x_1^{'}(y) + \displaystyle\int\limits_{x_1(y+\Delta y)}^{x_2(y+\Delta y)} f_y^{'}(x,y)dx.$ ■

Лекция №11

Теорема (об интегрировании с параметром):
Пусть $f(x,y) \in C([a,b]\times[c,d])$. Тогда:

$$\int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)dy\right)dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)dx\right)dy$$

Доказательство:

1) Докажем, что $f_1(t,y) = \int_a^t f(x,y)dx \in C([a,b]\times[c,d])$

$$|f_1(t+\Delta t, y+\Delta y) - f_1(t,y)| = \left|\int_a^{t+\Delta t} f(x,y+\Delta y)dx - \int_a^t f(x,y+\Delta y)dx + \int_a^t f(x,y+\Delta y)dx - \right.$$

$$\left. - \int_a^t f(x,y)dx\right| \le \left|\int_t^{t+\Delta t} f(x,y+\Delta y)dx\right| + \left|\int_a^t |f(x,y+\Delta y) - f(x,y)|\,dx\right| \le$$

$$\le |\Delta t| * \max_{[a,b]\times[c,d]} |f(x,y+\Delta y)| + |b-a| * \max_{[a,b]\times[c,d]} |f(x,y+\Delta y) - f(x,y)|$$

Так как $f(x,y) \in C([a,b]\times[c,d])$, то при $\sqrt{\Delta t^2 + \Delta y^2} \to 0$ $\quad \max\limits_{[a,b]\times[c,d]} |f(x,y+\Delta y) - f(x,y)| \to 0$.

Кроме того, при $\Delta t \to 0$ $\;|\Delta t| * \max\limits_{[a,b]\times[c,d]} |f(x,y+\Delta y)| \to 0$, значит, при $\sqrt{\Delta t^2 + \Delta y^2} \to 0$

$$|f_1(t+\Delta t, y+\Delta y) - f_1(t,y)| \to 0 \quad \Longrightarrow \quad f_1(t,y) \in C([a,b]\times[c,d])$$

2) $F_1(t) = \int_a^t \left(\int_c^d f(x,y)dy\right)dx, \quad F_2(t) = \int_c^d \left(\int_a^t f(x,y)dx\right)dy$

$$F_1'(t) = \int_c^d f(t,y)dy, \quad F_2'(t) = \int_c^d f(t,y)dy \quad \Longrightarrow \quad F_1(t) - F_2(t) = C$$

$$F_1(a) = \int_a^a \left(\int_c^d f(x,y)dy\right)dx = 0, \;\; F_2(a) = \int_c^d \left(\int_a^a f(x,y)dx\right)dy = 0 \Longrightarrow C = 0, \;\; \text{и } F_1(t) \equiv F_2(t) \text{ на } [a,b]$$

Следовательно, $F_1(b) = F_2(b)$, то есть:

$$\int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)dy\right)dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)dx\right)dy \qquad \blacksquare$$

Несобственные интегралы, зависящие от параметра.

Определение:
Пусть $f(x,y)$ определена на $[a,\omega)\times Y$, и $\forall y\in Y$, $f(x,y)\in R[a,b]$ $\forall b\in[a,\omega)$. Тогда несобственным интегралом, зависящим от параметра, называется предел:

$$\lim_{b\to\omega}\int_a^b f(x,y)dx=\int_a^\omega f(x,y)dx$$

Определение:

$$\int_a^\omega f(x,y)dx\,,\quad y\in Y$$

Если $\exists F(y)$ на Y такая, что $\forall\varepsilon>0\ \exists b_\varepsilon\in[a,\omega)\quad\forall b>b_\varepsilon\quad\left|\int_a^b f(x,y)dx-F(y)\right|<\varepsilon\quad\forall y\in Y$, то не – собственный интеграл $\int_a^\omega f(x,y)dx$ называется равномерно сходящимся к $F(y)$ на Y, и это обозначается так:

$$\int_a^\omega f(x,y)dx\rightrightarrows F(y)\text{ на }Y$$

Замечание:
Далее для определённости будем полагать $\omega=+\infty$.

Теорема (критерий Коши):

$$\int_a^\omega f(x,y)dx\rightrightarrows F(y)\text{ на }Y\quad\Leftrightarrow\quad\forall\varepsilon>0\ \exists b_\varepsilon>a\quad\forall a_1,a_2>b_\varepsilon\quad\left|\int_{a_1}^{a_2}f(x,y)dx\right|<\varepsilon\quad\forall y\in Y.$$

Доказательство:
1) Докажем в одну сторону (слева направо):

$$\left|\int_{a_1}^{a_2}f(x,y)dx\right|=\left|\int_{a_1}^{+\infty}f(x,y)dx-\int_{a_2}^{+\infty}f(x,y)dx\right|\le\left|\int_{a_1}^{+\infty}f(x,y)dx\right|+\left|\int_{a_2}^{+\infty}f(x,y)dx\right|\le$$

$$\le\left|\int_a^{a_1}f(x,y)dx-F(y)\right|+\left|\int_a^{a_2}f(x,y)dx-F(y)\right|<2\varepsilon$$

2) $\left|\int_{a_1}^{a_2}f(x,y)dx\right|<\varepsilon\quad\forall a_1,a_2>b_\varepsilon$. Фиксируем a_1, тогда:

$$\left|\int_{a_1}^{t}f(x,y)dx\right|-\text{ ограничена при }t\in[a_1,+\infty)\implies\exists\{t_n\}_{n=1}^\infty,t_n\in[a_1,+\infty)\ \forall n,\ \text{ что}$$

$$\exists\lim_{n\to\infty}\int_{a_1}^{t_n}f(x,y)dx=F(y)$$

$$\left|\int_{a_1}^{t} f(x,y)dx - F(y)\right| = \left|\int_{a_1}^{t_n} f(x,y)dx - F(y) + \int_{t_n}^{t} f(x,y)dx\right| \le \left|\int_{a_1}^{t_n} f(x,y)dx - F(y)\right| + \left|\int_{t_n}^{t} f(x,y)dx\right|$$

$$\lim_{n\to\infty} \int_{a_1}^{t_n} f(x,y)dx = F(y) \quad \Rightarrow \quad \forall\varepsilon > 0\ \exists N_{1\varepsilon}\quad \forall n > N_{1\varepsilon}\quad \left|\int_{a_1}^{t_n} f(x,y)dx - F(y)\right| < \varepsilon$$

также по условию теоремы: $\forall\varepsilon > 0\ \exists b_\varepsilon > a\quad \forall a_1, a_2 > b_\varepsilon\quad \left|\int_{a_1}^{a_2} f(x,y)dx\right| < \varepsilon\quad \forall y \in Y$, а так как $t_n \in [a_1, +\infty)$, то $\left|\int_{t_n}^{t} f(x,y)dx\right| < \varepsilon$. В итоге:

$$\left|\int_{a_1}^{t_n} f(x,y)dx - F(y)\right| + \left|\int_{t_n}^{t} f(x,y)dx\right| < 2\varepsilon \qquad \blacksquare$$

Примеры:

1) $\int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^y} = \frac{x^{1-y}}{1-y}\Big|_{1}^{+\infty} = \frac{1}{y-1}$ при $y > 1$ (то есть при $y > 1$ сходится)

но эта сходимость неравномерная. Докажем это по отрицанию критерию Коши:

так как $\int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x}$ расходится, то $\exists\varepsilon_0 > 0$, что $\forall b_\varepsilon > 1\ \exists a_1, a_2 > b_\varepsilon\quad \left|\int_{a_1}^{a_2} \frac{dx}{x}\right| \ge \varepsilon_0$, но так как $\left|\int_{a_1}^{a_2} \frac{dx}{x^y}\right|$ непрерывен при $y \ge 1$, то $\exists y_{\varepsilon_0, a_1, a_2}$, что $\left|\int_{a_1}^{a_2} \frac{dx}{x^{y_{\varepsilon_0, a_1, a_2}}}\right| \ge \frac{\varepsilon_0}{2}$, а это и есть отрицание критерия Коши.

В общем, отрицание Коши формулируется так:

$$\exists\varepsilon_0 > 0\quad \forall b \in [a, \omega)\ \ \exists a_1(\varepsilon_0) > b, \exists a_2(\varepsilon_0) > b, \exists y_{\varepsilon_0, a_1, a_2}, \text{что}\quad \left|\int_{a_1}^{a_2} f\left(x, y_{\varepsilon_0, a_1, a_2}\right)\right| \ge \varepsilon_0$$

Теорема (признак Вейерштрасса равномерной сходимости несобственных интегралов с параметром):

Пусть $f(x,y)$ определена на $[a, +\infty) \times Y$, $f(x,y) \in R[a,b]\quad \forall y \in Y\ \ \forall b > a$. Если $\exists F(x) \ge |f(x,y)|$ $\forall (x,y) \in [a, +\infty) \times Y$, а $\exists \int_{a}^{+\infty} F(x)dx$, то $\int_{a}^{+\infty} f(x,y)dx \rightrightarrows$ на Y.

Доказательство:

$$\forall\varepsilon > 0\quad \exists b_\varepsilon > a\quad \forall a_1, a_2 > b_\varepsilon\quad \left|\int_{a_1}^{a_2} F(x)dx\right| < \varepsilon \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \left|\int_{a_1}^{a_2} f(x,y)dx\right| \le \int_{a_1}^{a_2} |f(x,y)|dx \le \int_{a_1}^{a_2} F(x)dx < \varepsilon \qquad \blacksquare$$

Пример:

$\int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^y},\quad y \in [1+\delta, +\infty), \delta > 0.$ Тогда $\left|\frac{1}{x^y}\right| \le \frac{1}{x^{1+\delta}}\quad \forall (x,y).$

$$\int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^{1+\delta}} \text{ при } \delta > 0 \text{ сходится } \quad \Longrightarrow \quad \int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^{y}} \text{ на } [1+\delta, +\infty) \text{ сходится равномерно.}$$

Лекция №12

Вспомним вторую теорему о среднем для интегралов Римана:

Если $f(x) \in C[a,b], g(x) \in C^1[a,b]$ и $g(x)$ монотонна, то $\exists c \in [a,b]$, что

$$\int_a^b g(x)f(x)dx = g(b)\int_c^b f(x)dx + g(a)\int_a^c f(x)dx$$

Теорема (признаки Абеля и Дирихле равномерной сходимости несобственных интегралов с параметром):

$f(x.y),\ \ g(x,y)$ определены на $[a,+\infty) \times Y, \quad \exists C > 0 \ \ |g(x,y)| \le C, \ \ \forall y \in Y \ \ g(x,y)$ монотонна по x
$f(x,y) \in R[a,A] \ \ \forall y \in Y \ \ \forall A > a.$

Признак Абеля: если $\int_a^{+\infty} f(x,y)dx \rightrightarrows$ на Y, то $\int_a^{+\infty} f(x,y)g(x,y)dx \rightrightarrows$ на Y.

Признак Дирихле: если $\exists c_1 > 0$, что $\forall A > a \ \ \left|\int_a^A f(x,y)dx\right| \le C_1$ и $g(x,y) \rightrightarrows 0$ на Y при $x \to +\infty$, то

$$\int_a^{+\infty} f(x,y)g(x,y)dx \rightrightarrows \text{ на } Y.$$

Доказательство:

Признак Абеля:

По критерию Коши: $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists A_\varepsilon > a \ \ \forall a_1, a_2 > A_\varepsilon \qquad \left|\int_{a_1}^{a_2} f(x,y)dx\right| < \varepsilon \quad \forall y \in Y$

По второй теореме о среднем:

$$\left|\int_{a_1}^{a_2} f(x,y)g(x,y)dx\right| = \left|g(a_2,y)\int_c^{a_2} f(x)dx + g(a_1,y)\int_{a_1}^{c} f(x)dx\right| \le |g(a_2,y)| * \left|\int_c^{a_2} f(x)dx\right| +$$

$$+|g(a_1,y)| * \left|\int_{a_1}^{c} f(x)dx\right| < 2C\varepsilon$$

Следовательно, $\int_a^{+\infty} f(x,y)g(x,y)dx \rightrightarrows$ на Y по критерию Коши.

Признак Дирихле:
$g(x,y) \rightrightarrows 0$ на Y при $x \to +\infty \implies \forall \varepsilon > 0 \quad \exists A_\varepsilon > a \ \ \forall x > A_\varepsilon \quad |g(x,y)| < \varepsilon \quad \forall y \in Y$
Пусть $a_1, a_2 > A_\varepsilon$. Тогда по второй теореме о среднем:

$$\left|\int_{a_1}^{a_2} f(x,y)g(x,y)dx\right| = \left|g(a_2,y)\int_c^{a_2} f(x)dx + g(a_1,y)\int_{a_1}^{c} f(x)dx\right| \le |g(a_2,y)| * \left|\int_c^{a_2} f(x)dx\right| +$$

$$+|g(a_1,y)| * \left|\int_{a_1}^{c} f(x)dx\right|$$

$$\left|\int_{c}^{a_2} f(x)dx\right| = \left|\int_{a}^{a_2} f(x,y)dx - \int_{a}^{c} f(x,y)dx\right| \le \left|\int_{a}^{a_2} f(x,y)dx\right| + \left|\int_{a}^{c} f(x,y)dx\right| < 2C_1$$

$$\left|\int_{a_1}^{c} f(x)dx\right| = \left|\int_{a}^{c} f(x,y)dx - \int_{a}^{a_1} f(x,y)dx\right| \le \left|\int_{a}^{c} f(x,y)dx\right| + \left|\int_{a}^{a_1} f(x,y)dx\right| < 2C_1$$

Следовательно:

$$|g(a_2,y)| * \left|\int_{c}^{a_2} f(x)dx\right| + |g(a_1,y)| * \left|\int_{a_1}^{c} f(x)dx\right| < 4C_1\varepsilon$$

Следовательно, $\int_{a}^{+\infty} f(x,y)g(x,y)dx \rightrightarrows$ на Y по критерию Коши. ■

Теорема:

$f(x,y) \in C([a,+\infty) \times [\alpha,\beta])$ и $\int_{a}^{+\infty} f(x,y)dx \rightrightarrows F(y)$ на $[\alpha,\beta]$ $\Longrightarrow$ $F(y) \in C[\alpha,\beta]$

Доказательство:

1) $$|F(y+\Delta y) - F(y)| = \left|F(y+\Delta y) - \int_{a}^{A} f(x,y+\Delta y)dx + \int_{a}^{A} f(x,y+\Delta y)dx - \int_{a}^{A} f(x,y)dx + \right.$$

$$\left. + \int_{a}^{A} f(x,y)dx - F(y)\right| \le \left|F(y+\Delta y) - \int_{a}^{A} f(x,y+\Delta y)dx\right| + \left|\int_{a}^{A} f(x,y+\Delta y)dx - \int_{a}^{A} f(x,y)dx\right| +$$

$$+ \left|\int_{a}^{A} f(x,y)dx - F(y)\right|$$

2) Добьёмся того, чтобы каждое слагаемое стало меньше наперёд заданного числа ε:

Так как $\int_{a}^{+\infty} f(x,y)dx \rightrightarrows F(y)$ на $[\alpha,\beta]$, то $\forall\varepsilon > 0\ \ \exists A \in [a,+\infty)$ $\left|\int_{a}^{A} f(x,y)dx - F(y)\right| < \varepsilon \quad \forall y \in [\alpha,\beta]$.

Следовательно, $\exists A \in [a,+\infty)$ $\left|\int_{a}^{A} f(x,y)dx - F(y)\right| < \varepsilon$ и $\left|F(y+\Delta y) - \int_{a}^{A} f(x,y+\Delta y)dx\right| < \varepsilon$

$$\left|\int_{a}^{A} f(x,y+\Delta y)dx - \int_{a}^{A} f(x,y)dx\right| \le \int_{a}^{A} |f(x,y+\Delta y) - f(x,y)|dx\,;$$

так как $f(x,y) \in C([a,+\infty) \times [\alpha,\beta])$, то для любого ε можно подобрать такое Δy, чтобы для любой точки $(x,y_0) \in [a,+\infty) \times [\alpha,\beta]$ такой, что $|y_0 - y| < \Delta y$, $|f(x,y_0) - f(x,y)| < \dfrac{\varepsilon}{A-a} \Longrightarrow$

$$\Longrightarrow \int_a^A |f(x,y+\Delta y)-f(x,y)|dx < \frac{\varepsilon}{A-a} * (A-a) = \varepsilon.$$

3) $\left|F(y+\Delta y) - \int_a^A f(x,y+\Delta y)dx\right| + \left|\int_a^A f(x,y+\Delta y)dx - \int_a^A f(x,y)dx\right| + \left|\int_a^A f(x,y)dx - F(y)\right| < 3\varepsilon$ ■

Теорема:

$$f(x,y) \in C([a,+\infty) \times [\alpha,\beta]), \int_a^{+\infty} f(x,y)dx \rightrightarrows F(y) \text{ на } [\alpha,\beta] \ \Longrightarrow \ \int_\alpha^\beta F(y)dy = \int_a^{+\infty} \left(\int_\alpha^\beta f(x,y)dy\right)dx.$$

Доказательство:

$\forall\{\omega_n\}_{n=1}^\infty, \omega_n \to +\infty,$ из условий теоремы следует, что $F_n(y) = \int_a^{\omega_n} f(x,y)dx \rightrightarrows F(y)$ на $[\alpha,\beta]$

при $n \to \infty$. Следовательно, $\int_\alpha^\beta F_n(y)dy \to \int_\alpha^\beta F(y)dy$ при $n \to \infty$. Но $\int_\alpha^\beta F_n(y)dy =$

$$= \int_\alpha^\beta \left(\int_a^{\omega_n} f(x,y)dx\right)dy = \int_a^{\omega_n} \left(\int_\alpha^\beta f(x,y)dy\right)dx \ \Longrightarrow \ \lim_{n\to\infty} \int_a^{\omega_n} \left(\int_\alpha^\beta f(x,y)dy\right)dx = \int_\alpha^\beta F(y)dy$$

и если вспомнить определение предела функции по Гейне, можно записать:

$$\exists \lim_{A\to\infty} \int_a^A \left(\int_\alpha^\beta f(x,y)dy\right)dx = \int_\alpha^\beta F(y)dy \quad ■$$

Теорема:

$f(x,y) \in C([a,+\infty) \times [\alpha,\beta]), f_y'(x,y) \in C([a,+\infty) \times [\alpha,\beta]), \int_a^{+\infty} f(x,y)dx \to F(y), \int_a^{+\infty} f_y'(x,y)dx \rightrightarrows G(y)$ на $[\alpha,\beta] \ \Longrightarrow \ \exists F'(y) = G(y).$

Доказательство:

Пусть $\omega_n \to +\infty$ при $n \to \infty$, тогда $\int_a^{\omega_n} f_y'(x,y)dx \rightrightarrows G(y)$ при $n \to \infty$ и $\int_a^{\omega_n} f(x,y)dx \to F(y)$ при $n \to \infty$;

кроме того, по теореме о дифференцировании собственного интеграла с параметром:

$$\exists \left(\int_a^{\omega_n} f(x,y)dx\right)_y' = \int_a^{\omega_n} f_y'(x,y)dx$$

по теореме о дифференцировании пределов функциональных последовательностей:

$$\left(\lim_{n\to\infty} \int_a^{\omega_n} f(x,y)dx\right)_y' = \lim_{n\to\infty} \left(\int_a^{\omega_n} f(x,y)dx\right)_y' = \lim_{n\to\infty} \int_a^{\omega_n} f_y'(x,y)dx = G(y)$$

следовательно, $\exists F'(y) = G(y)$. ■

Лекция №13

Теорема (Дини о последовательности):

$f_n(x) \in C[a,b],\ \ \forall n \in N,\ \ \exists \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x),\ \ f(x) \in C[a,b],$
$f_n(x)$ монотонно стремится к $f(x) \quad \forall x \in [a,b] \quad \Longrightarrow \quad f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ на $[a,b]$.

Доказательство:

$$\exists \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \ \Rightarrow\ \forall \varepsilon > 0\ \ \exists n_{\varepsilon,x'}\ \ \forall n > n_{\varepsilon,x'} \quad |f_n(x') - f(x')| < \varepsilon$$

Так как $|f_n(x) - f(x)|$ непрерывна, то $\exists \delta_{\varepsilon,x'} \quad \forall x \in \left(x' - \delta_{\varepsilon,x'},\ x' + \delta_{\varepsilon,x'}\right) \ \ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$

$$\bigcup_{x' \in [a,b]} \left(x' - \delta_{\varepsilon,x'},\ x' + \delta_{\varepsilon,x'}\right) \supset [a,b] \ \Longrightarrow\ \exists \bigcup_{i=1}^{n} \left(x_i' - \delta_{\varepsilon,x_i'},\ x_i' + \delta_{\varepsilon,x_i'}\right) \supset [a,b]$$

(по теореме о возможности выделении конечного подпокрытия из бесконечного покрытия от- резка открытыми множествами)

Пусть $n_\varepsilon = \max\limits_{i=1,\dots,n} \left\{n_{\varepsilon,x_i'}\right\}$. Тогда $\forall x \in \left(x_i' - \delta_{\varepsilon,x_i'},\ x_i' + \delta_{\varepsilon,x_i'}\right)$ при $n > n_\varepsilon$ (n_ε – общий для всех x) верно, что $|f_n(x) - f(x)| \le \left|f_{n_{\varepsilon,x_i'}}(x) - f(x)\right| < \varepsilon$. ■

Теорема:

$$f(x,y) \in C([a,+\infty) \times [b,+\infty)), \qquad f(x,y) \ge 0, \qquad \exists \int_a^{+\infty} f(x,y)dx = G(y) \in C[b,+\infty),$$

$$\exists \int_b^{+\infty} f(x,y)dy = H(x) \in C[a,+\infty), \quad \exists \int_b^{+\infty} G(y)dy \quad \Longrightarrow \quad \exists \int_a^{+\infty} H(x)dx = \int_b^{+\infty} G(y)dy.$$

Доказательство:

Возьмём $\{\omega_n\}_{n=1}^{\infty},\ \ \omega_n > a,\ \ \omega_n$ монотонно возрастает к $+\infty$, и $\{\varkappa_m\}_{m=1}^{\infty},\ \ \varkappa_m > b,\ \ \varkappa_m$ монотонно возрастает к $+\infty$.

$$\int_a^{\omega_n} f(x,y)dx = G_n(y), \quad G_n(y) \to G(y); \qquad \int_b^{\varkappa_m} f(x,y)dy = H_m(x), \quad H_m(x) \to H(x).$$

По известной теореме для собственных интегралов с параметром:

$$\int_a^{\omega_n} \left(\int_b^{\varkappa_m} f(x,y)dy\right)dx = \int_b^{\varkappa_m} \left(\int_a^{\omega_n} f(x,y)dx\right)dy$$

$$\int_a^{\omega_n} H_m(x)dx = \int_b^{\varkappa_m} G_n(y)dy = f_{n,m}$$

Так как по условию $\exists \int\limits_b^{+\infty} G(y)dy$, то:

$$f_{n,m} \le \int_b^{\varkappa_m} G(y)dy \le \int_b^{+\infty} G(y)dy \qquad (1)$$

$$\lim_{m\to\infty}\int_a^{\omega_n} H_m(x)dx = \int_a^{\omega_n} \left(\lim_{m\to\infty} H_m(x)\right)dx = \int_a^{\omega_n} H(x)dx$$

Переходим в неравенстве (1) к $m \to +\infty$:

$$\int_a^{\omega_n} H_m(x)dx \le \int_b^{+\infty} G(y)dy \qquad \Rightarrow \qquad \int_a^{\omega_n} H(x)dx \le \int_b^{+\infty} G(y)dy$$

Последовательность $\left\{\int_a^{\omega_n} H(x)dx\right\}_{n=1}^{\infty}$ ограничена и монотонна (так как $f(x,y) \ge 0$, следова – тельно, $H(x) \ge 0$, и последовательность $\int_a^{\omega_n} H(x)dx$, где ω_n монотонно возрастает к $+\infty$, монотонно возрастает и ограничена снизу нулём, а сверху $\int_b^{+\infty} G(y)dy$) $\Rightarrow \ \exists \lim_{n\to\infty}\int_a^{\omega_n} H(x)dx \ \Rightarrow$

$$\Rightarrow \ \exists \lim_{\omega\to+\infty}\int_a^{\omega} H(x)dx = \int_a^{+\infty} H(x)dx \le \int_b^{+\infty} G(y)dy.$$

Аналогичными рассуждениями можно получить, что $\int_b^{+\infty} G(y)dy \le \int_a^{+\infty} H(x)dx$.

Поэтому $\int_b^{+\infty} G(y)dy = \int_a^{+\infty} H(x)dx$. ■

Следствие:
Пусть выполнены все условия теоремы, кроме того, что $f(x,y) \ge 0$, и для $|f(x,y)|$ выполнены все условия теоремы. Тогда $\int_a^{+\infty}\left(\int_b^{+\infty} f(x,y)dy\right)dx = \int_b^{+\infty}\left(\int_a^{+\infty} f(x,y)dx\right)dy$.

Доказательство:
Для $f_1(x,y) = |f(x,y)| + f(x,y)$ и $f_2(x,y) = |f(x,y)| - f(x,y)$, так как они обе больше либо равны нулю, выполнены условия теоремы, следовательно они выполнены и для функции

$$\frac{f_1(x,y) - f_2(x,y)}{2} = f(x,y). \quad ■$$

Теорема (интеграл Дирихле):

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin xy}{x}dx = \frac{\pi}{2}\, sign\, y$$

Доказательство:
1) Для $y = 0$ очевидно.
2) Для $y \ne 0$:
$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x(-y)}{x}dx = -\int_0^{+\infty} \frac{\sin xy}{x}dx$, то есть данный интеграл – функция нечётная, и достаточно доказать теорему для $y > 0$.
3) Сделаем замену $t = xy$:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin xy}{xy} d(xy) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$$

$$F(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x\, e^{-\alpha x}}{x} dx\,, \alpha \geq 0$$

$F(\alpha) \in C[0, +\infty)$, так как $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ равномерно сходится на $[0, +\infty)$, $|e^{-\alpha x}| \leq 1$ и $e^{-\alpha x}$ монотонна.

4) Рассмотрим $\int_0^{+\infty} \sin x\, e^{-\alpha x} dx$ при $\alpha > 0$. Если $\alpha \geq \delta > 0$, то $|\sin x\, e^{-\alpha x}| \leq e^{-\delta x} \Longrightarrow \int_0^{+\infty} \frac{\sin x\, e^{-\alpha x}}{x} dx$ равномерно сходится при $\alpha \in [\delta, +\infty)$ $\forall \delta > 0 \quad \Longrightarrow \quad F'(\alpha) = -\int_0^{+\infty} \sin x\, e^{-\alpha x} dx \quad \forall \alpha \in [\delta, +\infty) \ \ \forall \delta > 0$

$$-\int_0^{+\infty} \sin x\, e^{-\alpha x} dx = \frac{1}{\alpha}\int_0^{+\infty} \sin x\, de^{-\alpha x} = \frac{1}{\alpha} e^{-\alpha x} \sin x \Big|_0^{+\infty} - \frac{1}{\alpha}\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} \cos x\, dx = -\frac{1}{\alpha}\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} \cos x\, dx =$$

$$= \frac{1}{\alpha^2}\int_0^{+\infty} \cos x\, de^{-\alpha x} = \frac{1}{\alpha^2} \cos x\, e^{-\alpha x} \Big|_0^{+\infty} + \frac{1}{\alpha^2}\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} \sin x\, dx = 0 - \frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\alpha^2}\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} \sin x\, dx =$$

$$= -\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\alpha^2}\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} \sin x\, dx$$

Следовательно:

$$\left(\frac{1}{\alpha^2} + 1\right)\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} \sin x\, dx = \frac{1}{\alpha^2}$$

$$\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} \sin x\, dx = \frac{1}{1 + \alpha^2}$$

5) $F(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x\, e^{-\alpha x}}{x} dx\,, \alpha \geq 0,\ \ F'(\alpha) = -\int_0^{+\infty} \sin x\, e^{-\alpha x} dx = -\frac{1}{1 + \alpha^2},\ \ \int F'(\alpha)\, d\alpha = -arctg\ \alpha + C$

$$\int_\lambda^\mu F'(\alpha)\, d\alpha = F(\mu) - F(\lambda) = -arctg\ \alpha \,\Big|_\lambda^\mu = arctg\ \lambda - arctg\ \mu$$

$$\text{при } \mu \to +\infty\text{:}\ \ 0 - F(\lambda) = arctg\ \lambda - \frac{\pi}{2}$$

6) $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x\, e^{-\alpha x}}{x} dx = \int_0^{\delta} \frac{\sin x\, e^{-\alpha x}}{x} dx + \int_\delta^{+\infty} \frac{\sin x\, e^{-\alpha x}}{x} dx$

$$\left|\int_\delta^{+\infty} \frac{\sin x\, e^{-\alpha x}}{x} dx\right| \leq \int_\delta^{+\infty} e^{-\alpha x} dx = -\frac{1}{\alpha} e^{-\alpha x} \Big|_\delta^{+\infty} = -\frac{e^{-\alpha\delta}}{\alpha} \xrightarrow[\alpha \to +\infty]{} 0$$

$$\forall \varepsilon > 0\ \ \exists \delta > 0, \text{что } \left|\int_0^{\delta} \frac{\sin x\, e^{-\alpha x}}{x} dx\right| < \varepsilon \text{ и } \exists \alpha, \text{что } \left|\int_\delta^{+\infty} \frac{\sin x\, e^{-\alpha x}}{x} dx\right| < \varepsilon$$

7) Устремим λ к $0+$: $\ 0 - F(0+) = -\frac{\pi}{2}$, а $F(0+) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx \quad \Longrightarrow \quad -\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = -\frac{\pi}{2} \quad \Longrightarrow$

$$\Longrightarrow \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}. \quad \blacksquare$$

Лекция №14

Эйлеровы интегралы.

Определение:

Рассмотрим $\{\Gamma_n(x)\}_{n=2}^{\infty}, \Gamma_n(x) = \dfrac{(n-1)!\,n^x}{\prod_{k=0}^{n-1}(x+k)}, \quad x \in R\setminus\{0,-1,-2,\dots\}$

$$\lim_{n\to\infty}\Gamma_n(x) = \lim_{n\to\infty}\frac{1*2*\dots*(n-1)}{x(x+1)..(x+n-1)}*\frac{n^x}{(n-1)^x}*\frac{(n-1)^x}{(n-2)^x}*\dots*\frac{2^x}{1^x}$$

$$\frac{n^x}{(n-1)^x}*\frac{(n-1)^x}{(n-2)^x}*\dots*\frac{2^x}{1^x} = \prod_{k=1}^{n-1}\left(\frac{k+1}{k}\right)^x = \prod_{k=1}^{n-1}\left(1+\frac{1}{k}\right)^x$$

$$\frac{1*2*\dots*(n-1)}{x(x+1)..(x+n-1)} = \frac{1}{x}\prod_{k=1}^{n-1}\frac{k}{x+k} = \frac{1}{x}\prod_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{\frac{x+k}{k}}\right) = \frac{1}{x}\prod_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{1+\frac{x}{k}}\right)$$

$$\lim_{n\to\infty}\Gamma_n(x) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{x}*\prod_{k=1}^{n-1}\frac{\left(1+\frac{1}{k}\right)^x}{1+\frac{x}{k}}\right) = \frac{1}{x}*\prod_{k=1}^{\infty}\left(\left(1+\frac{1}{k}\right)^x\left(1+\frac{x}{k}\right)^{-1}\right)$$

Исследуем бесконечное произведение $\prod_{k=1}^{\infty}\left(\left(1+\frac{1}{k}\right)^x\left(1+\frac{x}{k}\right)^{-1}\right)$:

$\sum_{k=1}^{\infty} ln\left(\left(1+\frac{1}{k}\right)^x\left(1+\frac{x}{k}\right)^{-1}\right) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(x*ln\left(1+\frac{1}{k}\right) - ln\left(1+\frac{x}{k}\right)\right) = \sum_{k=1}^{\infty} O\left(\frac{1}{k^2}\right)$ (по формуле Тейлора)

Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} O\left(\frac{1}{k^2}\right)$ сходится абсолютно $\Longrightarrow$ $\prod_{k=1}^{\infty}\left(\left(1+\frac{1}{k}\right)^x\left(1+\frac{x}{k}\right)^{-1}\right)$ сходится абсолютно.

$\lim_{n\to\infty}\Gamma_n(x) = \Gamma(x) -$ гамма $-$ функция с областью определения $x \in R\setminus\{0,-1,-2,\dots\}$.

$\Gamma(x) = \frac{1}{x}*\prod_{k=1}^{\infty}\left(\left(1+\frac{1}{k}\right)^x\left(1+\frac{x}{k}\right)^{-1}\right) -$ представление гамма $-$ функции в виде бесконечного произведения.

Теорема (основное функциональное равенство для гамма-функции):

$$\Gamma(x+1) = x*\Gamma(x)$$

Доказательство:

$$\frac{\Gamma(x+1)}{\Gamma(x)} = \frac{\lim_{n\to\infty}\Gamma_n(x+1)}{\lim_{n\to\infty}\Gamma_n(x)} = \lim_{n\to\infty}\frac{\Gamma_n(x+1)}{\Gamma_n(x)} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n-1)!\,n^{x+1}\prod_{k=0}^{n-1}(x+k)}{(n-1)!\,n^x\prod_{k=0}^{n-1}(x+k+1)} = \lim_{n\to\infty}\frac{nx}{n+x} = x. \qquad \blacksquare$$

Замечание:

$\Gamma_n(1) = 1 \Longrightarrow \Gamma(1) = 1$
$\Gamma(2) = 1*\Gamma(1) = 1$
$\Gamma(3) = 2*\Gamma(2) = 2$
$\Gamma(4) = 3*\Gamma(3) = 6$

$\forall n \in N \;\; \Gamma(n+1) = n!$

Теорема (первый интеграл Эйлера):

$$\forall x > 0 \quad \Gamma(x) = \int\limits_0^{+\infty} y^{x-1} e^{-y} dy.$$

Доказательство:

1) Докажем, что $\Gamma_{n+1}(x) = (n+1)^x \int\limits_0^1 (1-t)^n t^{x-1} dt$

Вычислим отдельно $\int\limits_0^1 (1-t)^n t^{x-1} dt$ интегрированием по частям:

$$\int\limits_0^1 (1-t)^n t^{x-1} dt = \frac{1}{x} \int\limits_0^1 (1-t)^n dt^x = \frac{1}{x}(1-t)^n t^x \Big|_0^1 + \frac{n}{x} \int\limits_0^1 t^x (1-t)^{n-1} dt = \frac{n}{x} \int\limits_0^1 t^x (1-t)^{n-1} dt =$$

$$= \frac{n(n-1)}{x(x+1)} \int\limits_0^1 (1-t)^{n-2} t^{x+1} dt = \dots = \frac{n!}{x(x+1)\dots(x+n-1)} \int\limits_0^1 t^{x+n-1} dt = \frac{n!}{x(x+1)\dots(x+n)}$$

Вернёмся к утверждению, которое надо доказать:

$(n+1)^x \int\limits_0^1 (1-t)^n t^{x-1} dt = \dfrac{n!\,(n+1)^x}{x(x+1)\dots(x+n)} = \Gamma_{n+1}(x)$

2) Пусть $t = \dfrac{y}{n}$. Тогда:

$$\Gamma_{n+1}(x) = (n+1)^x \int\limits_0^1 (1-t)^n t^{x-1} dt = (n+1)^x \int\limits_0^n \left(1 - \frac{y}{n}\right)^n \frac{y^{x-1}}{n^x} dy =$$

$$= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^x \int\limits_0^n \left(1 - \frac{y}{n}\right)^n y^{x-1} dy$$

Перейдём в обеих частях равенства к пределу $n \to +\infty$:

$\lim\limits_{n\to\infty} \Gamma_{n+1}(x) = \Gamma(x)$

$\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^x = 1$

Значит, $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_0^n \left(1 - \dfrac{y}{n}\right)^n y^{x-1} dy = \Gamma(x)$.

3) Докажем, что $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_0^n y^{x-1} e^{-y} dy = \int\limits_0^{+\infty} y^{x-1} e^{-y} dy \quad$ при $\forall x > 0$

$$\int\limits_0^{+\infty} y^{x-1} e^{-y} dy = \int\limits_0^1 y^{x-1} e^{-y} dy + \int\limits_1^{+\infty} y^{x-1} e^{-y} dy$$

а) $\int\limits_0^1 y^{x-1} e^{-y} dy$: при $x \geq 1$ интеграл собственный, при $0 < x < 1$ $\lim\limits_{y\to 0+} \dfrac{y^{x-1} e^{-y}}{\frac{1}{y^{1-x}}} = 1 > 0$, следо – вательно, $\int\limits_0^1 y^{x-1} e^{-y} dy$ сходится одновременно с $\int\limits_0^1 \dfrac{dy}{y^{1-x}}$, а он сходится:

$$\int_0^1 \frac{dy}{y^{1-x}} = \int_0^1 y^{x-1}dy = \frac{y^x}{x}\Big|_0^1 = \frac{1}{x}$$

$$b)\ \int_1^{+\infty} y^{x-1}e^{-y}dy : \lim_{y\to+\infty} \frac{y^{x-1}e^{-y}}{\frac{1}{y^2}} = \lim_{y\to+\infty} y^{x+1}e^{-y} = 0 \Longrightarrow \int_1^{+\infty} y^{x-1}e^{-y}dy \text{ сходится, если сходится}$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{dy}{y^2}\text{, а он сходится: } \int_1^{+\infty} \frac{dy}{y^2} = \lim_{\boldsymbol{b}\to\infty} \int_1^b \frac{dy}{y^2} = \lim_{\boldsymbol{b}\to\infty} \left(-\frac{1}{b}+1\right) = 1.$$

$$\text{Значит, } \exists \lim_{n\to\infty} \int_0^n y^{x-1}e^{-y}dy \quad \text{при } \ \forall x > 0.$$

Теперь, если мы докажем, что:

$$\lim_{n\to\infty}\left[\int_0^n y^{x-1}e^{-y}dy - \int_0^n \left(1-\frac{y}{n}\right)^n \ y^{x-1}dy\right] = 0\text{, то мы докажем теорему.}$$

$$\text{Исследуем интеграл } \int_0^n \left(e^{-y} - \left(1-\frac{y}{n}\right)^n\right) y^{x-1}dy.$$

4) Рассмотрим функцию $f(x) = e^x - (1+x)$. $f'(x) = e^x - 1 \Longrightarrow f(x)$ имеет минимум $y = 0$ при $x = 0$. Следовательно, $\forall \alpha \in R \quad e^{-\alpha} - (1-\alpha) \geq 0$ и $\forall \alpha \in R \quad e^{\alpha} - (1+\alpha) \geq 0$.

$$\text{Возьмём } \alpha = \frac{y}{n}: \qquad e^{-\frac{y}{n}} \geq 1 - \frac{y}{n} \quad \text{и} \quad e^{\frac{y}{n}} \geq 1 + \frac{y}{n}$$

$$\text{при } y \in [0, n]: \quad e^{-y} \geq \left(1-\frac{y}{n}\right)^n \quad \text{и} \quad e^{y} \geq \left(1+\frac{y}{n}\right)^n$$

$$e^{-y} - \left(1-\frac{y}{n}\right)^n \geq 0 \quad \text{и} \quad e^{y} - \left(1+\frac{y}{n}\right)^n \geq 0 \quad \Longrightarrow e^{y} \geq \left(1+\frac{y}{n}\right)^n$$

$$e^{-y} - \left(1-\frac{y}{n}\right)^n = e^{-y}\left(1 - e^{y}\left(1-\frac{y}{n}\right)^n\right)$$

$$\text{Так как } e^{y} \geq \left(1+\frac{y}{n}\right)^n\text{, то } e^{-y}\left(1 - e^{y}\left(1-\frac{y}{n}\right)^n\right) \leq e^{-y}\left(1 - \left(1+\frac{y}{n}\right)^n\left(1-\frac{y}{n}\right)^n\right) =$$

$$= e^{-y}\left(1 - \left(1+\frac{y^2}{n^2}\right)^n\right)$$

$$\text{При } y \in [0, n] \quad 0 \leq \frac{y^2}{n^2} \leq 1 \Longrightarrow \text{по неравенству Бернулли } e^{-y}\left(1 - \left(1+\frac{y^2}{n^2}\right)^n\right) \leq e^{-y} * \frac{y^2}{n}$$

$$5)\ 0 \leq \int_0^n \left(e^{-y} - \left(1-\frac{y}{n}\right)^n\right) y^{x-1}dy \leq \int_0^n e^{-y} * \frac{y^2}{n} * y^{x-1}dy = \int_0^n e^{-y} * \frac{y^{x+1}}{n} * dy \leq \frac{1}{n}\int_0^{+\infty} y^{x+1}e^{-y}dy$$

$$\int_0^{+\infty} y^{x+1}e^{-y}dy = \int_0^1 y^{x+1}e^{-y}dy + \int_1^{+\infty} y^{x+1}e^{-y}dy$$

Первый интеграл — собственный, а второй сходится, так как $\lim\limits_{y\to+\infty}\dfrac{y^{x+1}e^{-y}}{\dfrac{1}{y^2}} = \lim\limits_{y\to+\infty} y^{x+3}e^{-y} = 0,$

значит, $\int\limits_1^{+\infty} y^{x+1}e^{-y}dy$ сходится, если сходится $\int\limits_1^{+\infty}\dfrac{dy}{y^2}$, а он сходится: $\int\limits_1^{+\infty}\dfrac{dy}{y^2} = \lim\limits_{\boldsymbol{b}\to\infty}\int\limits_1^b\dfrac{dy}{y^2} =$

$= \lim\limits_{\boldsymbol{b}\to\infty}\left(-\dfrac{1}{b}+1\right) = 1.$ Следовательно, $\int\limits_0^{+\infty} y^{x+1}e^{-y}dy$ сходится, и $\dfrac{1}{n}\int\limits_0^{+\infty} y^{x+1}e^{-y}dy \to 0$ при $n\to\infty.$ ■

<u>Теорема (формула дополнения для гамма-функции):</u>

$$\text{при } x\in R\backslash Z \qquad \Gamma(1-x)*\Gamma(x) = \frac{\pi}{\sin\pi x}$$

<u>Доказательство:</u>

Из основного функционального равенства для гамма — функции:

$$\Gamma(1-x) = -x*\Gamma(-x)$$

$$\Gamma(1-x)*\Gamma(x) = -x*\Gamma(-x)*\Gamma(x) =$$

$$= -x*\frac{1}{-x}*\prod_{k=1}^{\infty}\left(\left(1+\frac{1}{k}\right)^{-x}\left(1-\frac{x}{k}\right)^{-1}\right)*\frac{1}{x}*\prod_{k=1}^{\infty}\left(\left(1+\frac{1}{k}\right)^{x}\left(1+\frac{x}{k}\right)^{-1}\right) =$$

$$= \frac{1}{x}*\prod_{k=1}^{\infty}\left(\left(1+\frac{1}{k}\right)^{-x}\left(1-\frac{x}{k}\right)^{-1}\left(1+\frac{1}{k}\right)^{x}\left(1+\frac{x}{k}\right)^{-1}\right) = \frac{1}{x}*\prod_{k=1}^{\infty}\left(\left(1-\frac{x}{k}\right)^{-1}\left(1+\frac{x}{k}\right)^{-1}\right) =$$

$$= \frac{1}{x}*\prod_{k=1}^{\infty}\left(\left(1-\frac{x^2}{k^2}\right)^{-1}\right) = \frac{1}{x}*\prod_{k=1}^{\infty}\frac{1}{1-\frac{x^2}{k^2}} = \frac{1}{x*\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{k^2}\right)} = \frac{\pi}{\pi x*\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{k^2}\right)} = \frac{\pi}{\sin\pi x} \qquad ■$$

<u>Следствие (интеграл Эйлера-Пуассона):</u>

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}$$

<u>Доказательство:</u>

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx = 2\int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2}dx$$

Сделаем замену: $t = x^2,\ \ x=\sqrt{t},\ \ dx = \dfrac{dt}{2\sqrt{t}}$

$$2\int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2}dx = 2*\frac{1}{2}*\int\limits_0^{+\infty}\frac{e^{-t}dt}{\sqrt{t}} = \int\limits_0^{+\infty} t^{\frac{1}{2}-1}e^{-t}dt = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \qquad \text{(первый интеграл Эйлера)}$$

По формуле дополнения для гамма — функции: $\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right)*\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{\pi}{\sin\frac{\pi}{2}} = \pi \Rightarrow \Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \quad \Rightarrow$

$$\Rightarrow \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi} \qquad ■$$

Лекция №15

Определение (второй интеграл Эйлера):

$$\mathrm{B}(\alpha,\beta)=\int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}dt\,,\quad \alpha>0,\ \ \beta>0.$$

Утверждение:

$$\mathrm{B}(\alpha,\beta)=\mathrm{B}(\beta,\alpha)$$

Доказательство:

В интеграле $\mathrm{B}(\alpha,\beta)=\int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}dt$ сделаем замену переменной $t=1-x$:

$$\int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}dt=\int_1^0(1-x)^{\alpha-1}x^{\beta-1}d(1-x)=\int_0^1 x^{\beta-1}(1-x)^{\alpha-1}dx=\mathrm{B}(\beta,\alpha).\qquad\blacksquare$$

Теорема (связь бета и гамма-функций):

$$\text{при } \alpha>0,\ \ \beta>0\quad \mathrm{B}(\alpha,\beta)=\frac{\Gamma(\alpha)*\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$$

Доказательство:

1) Сделаем замену $t=\dfrac{1}{1+x}$, $1-t=\dfrac{x}{1+x}$, $dt=-\dfrac{dx}{(1+x)^2}$:

$$\mathrm{B}(\alpha,\beta)=\int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}dt=\int_0^{+\infty}\frac{x^{\beta-1}}{(1+x)^{\alpha+\beta}}dx$$

2) $\Gamma(\gamma)=\int_0^{+\infty} y^{\gamma-1}e^{-y}dy$. Пусть $y=(1+x)z$, тогда $\Gamma(\gamma)=\int_0^{+\infty}(1+x)^{\gamma}z^{\gamma-1}e^{-(1+x)z}dz$

3) $$\mathrm{B}(\alpha,\beta)*\Gamma(\alpha+\beta)=\int_0^{+\infty}\frac{x^{\beta-1}}{(1+x)^{\alpha+\beta}}\Gamma(\alpha+\beta)dx=$$

$$=\int_0^{+\infty}\frac{x^{\beta-1}}{(1+x)^{\alpha+\beta}}\left(\int_0^{+\infty}(1+x)^{\alpha+\beta}z^{\alpha+\beta-1}e^{-z}e^{-xz}dz\right)dx=\int_0^{+\infty}x^{\beta-1}\left(\int_0^{+\infty}z^{\alpha+\beta-1}e^{-z}e^{-xz}dz\right)dx=$$

$$=\int_0^{+\infty}z^{\alpha-1}e^{-z}\left(\int_0^{+\infty}(xz)^{\beta-1}e^{-xz}d(xz)\right)dz=\int_0^{+\infty}z^{\alpha-1}e^{-z}*\Gamma(\beta)dz=\Gamma(\beta)\int_0^{+\infty}z^{\alpha-1}e^{-z}dz=\Gamma(\beta)*\Gamma(\alpha).\ \blacksquare$$

Пример:

Вычислим $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{\mathrm{a}}x\cos^{\mathrm{b}}x\,dx$. Сделаем замену $t=\sin^2 x$, $x=\arcsin\sqrt{t}$, $dx=\dfrac{dt}{2\sqrt{t}\sqrt{1-t}}$:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{\mathrm{a}}x\cos^{\mathrm{b}}x\,dx=\frac{1}{2}\int_0^1 t^{\frac{a-1}{2}}(1-t)^{\frac{b-1}{2}}dt=\frac{1}{2}\mathrm{B}\left(\frac{a+1}{2},\frac{b+1}{2}\right)=\frac{1}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{a+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{b+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{a+b}{2}+1\right)}$$

Теорема (формула Стирлинга):

$$n! = \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}\left(1 + \frac{\alpha}{\sqrt{n}}\right), \quad |\alpha| < 1$$

Доказательство:

1) $n! = \Gamma(n+1) = \int\limits_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt = \left(\frac{n}{e}\right)^n \int\limits_0^{+\infty} \left(\frac{t}{n}\right)^n e^{n-t} dt = \left(\frac{n}{e}\right)^n \int\limits_0^{+\infty} e^{n-t+n\ln t - n\ln n} dt$

2) Найдём экстремумы подинтегральной функции:

$$(t^n e^{-t})' = nt^{n-1}e^{-t} - t^n e^{-t} = 0$$
$$n - t = 0$$
$$t = n - \text{максимум } f(x)$$
$$f(n) = n^n e^{-n}$$

3) Сделаем замену:

$$-x^2 = n - t + n\ln t - n\ln n$$
$$x^2 = t - n - n\ln t + n\ln n = t - n - n\ln\frac{t}{n} = t - n - n\ln\left(\frac{t-n}{n} + 1\right)$$

По формуле Тейлора:

$$\ln(1+z) = z - \frac{z^2}{2}\frac{1}{(1+\theta z)^2}, |\theta| < 1$$

$$t - n - n\ln\left(\frac{t-n}{n} + 1\right) = t - n - n\left(\frac{t-n}{n} - \frac{(t-n)^2}{2n^2} * \frac{1}{\left(1 + \theta\frac{t-n}{n}\right)^2}\right) = \frac{(t-n)^2 n}{2\big(n + \theta(t-n)\big)^2}, |\theta(t)| < 1$$

$$x^2 = \frac{(t-n)^2 n}{2\big(n+\theta(t-n)\big)^2} \implies x = \frac{(t-n)\sqrt{\frac{n}{2}}}{n + \theta(t-n)}$$

4) $xn + \theta x(t-n) = (t-n)\sqrt{\frac{n}{2}} \implies xn = (t-n)\left(\sqrt{\frac{n}{2}} - \theta x\right) \implies t - n = \frac{xn}{\sqrt{\frac{n}{2}} - \theta x} \implies$

$$\implies t = \frac{n\sqrt{\frac{n}{2}} + (1-\theta)nx}{\sqrt{\frac{n}{2}} - \theta x}$$

5) $x^2 = n - t + n\ln t - n\ln n \implies 2xdx = dt - \frac{n}{t}dt = \frac{t-n}{t}dt$

$$dt = \frac{2xt}{t-n}dt = \frac{2xn\left(\sqrt{\frac{n}{2}} + (1-\theta)x\right)\left(\sqrt{\frac{n}{2}} - \theta x\right)}{\left(\sqrt{\frac{n}{2}} - \theta x\right)xn}dx = 2\left(\sqrt{\frac{n}{2}} + (1-\theta)x\right)dx$$

6) $\left(\frac{n}{e}\right)^n \int\limits_0^{+\infty} e^{n-t+n\ln t - n\ln n} dt = 2\left(\frac{n}{e}\right)^n \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\left(\sqrt{\frac{n}{2}} + (1-\theta)x\right)dx = 2\sqrt{\frac{n}{2}}\left(\frac{n}{e}\right)^n \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx +$

$$+2\left(\frac{n}{e}\right)^n \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}(1-\theta)x\,dx = \left(\frac{n}{e}\right)^n\left(2\sqrt{\frac{n}{2}}\sqrt{\pi} + 2\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}(1-\theta)x\,dx\right) = \left(\frac{n}{e}\right)^n\left(\sqrt{2\pi n} + r_n\right),$$

$$\text{где } r_n = 2\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}(1-\theta)x\,dx$$

$$|r_n| \leq 2 \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}|1-\theta||x|\,dx\,.\ \text{Так как } |\theta| < 1, \text{то } |1-\theta| < 2 \implies$$

$$\implies 2 \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}|1-\theta||x|\,dx \leq 4 \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} x\,dx = 2 \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx^2 = 2 \implies |r_n| \leq 2$$

7) Так как $|r_n| \leq 2$, то можно записать, что $r_n = \sqrt{2\pi}\alpha_n$, где $|\alpha_n| < 1$, и

$$\left(\frac{n}{e}\right)^n \left(\sqrt{2\pi n} + r_n\right) = \left(\frac{n}{e}\right)^n \left(\sqrt{2\pi n} + \sqrt{2\pi}\alpha_n\right) = \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}\left(1 + \frac{\alpha_n}{\sqrt{n}}\right), |\alpha_n| < 1. \quad \blacksquare$$

Лекция №16

Ряды Фурье.

Определение:

Выражение вида $\dfrac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{k}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$ называется тригонометрическим многочленом степени k.

Множество $\{1,\{\cos nx\}_{n=1}^{\infty},\{\sin nx\}_{n=1}^{\infty}\}$ называется тригонометрической системой.

Ряд вида $\dfrac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$ называется рядом по тригонометрической системе или (чаще всего) тригонометрическим рядом.

Лемма (ортогональность тригонометрической системы):

$$\int_{-\pi}^{\pi}1^2\,dx=2\pi,\ \int_{-\pi}^{\pi}\sin^2 nx\,dx=\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 nx\,dx=\pi\quad\forall n$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\cos mx\,dx=0\quad\forall n\neq m,\ \ n,m\in N$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\sin mx\,dx=0\quad\forall n\neq m\quad n,m\in N$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\cos mx\,dx=0\quad\forall n\neq m\quad n\in N\quad m\in N\cup\{0\}$$

Доказательство:

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2 nx\,dx=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}(1-\cos 2nx)\,dx=\left(\frac{x}{2}-\frac{\sin 2nx}{4n}\right)\Bigg|_{-\pi}^{\pi}=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}=\pi$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2 nx\,dx+\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 nx\,dx=\int_{-\pi}^{\pi}1\,dx=2\pi\ \Longrightarrow\ \int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 nx\,dx=\pi$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\cos mx\,dx=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}(\cos(m-n)x-\cos(m+n)x)\,dx=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(m-n)x\,dx-$$

$$-\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(m+n)x\,dx$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos(m-n)x\,dx=\frac{1}{m-n}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(m-n)x\,d\big((m-n)x\big)=\frac{1}{m-n}\int_{-(m-n)\pi}^{(m-n)\pi}\cos t\,dt=\frac{\sin t}{m-n}\Bigg|_{-(m-n)\pi}^{(m-n)\pi}=$$

$$=0-0=0$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(m+n)x\,dx = \frac{1}{m+n}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(m+n)x\,d\big((m+n)x\big) = \frac{1}{m+n}\int_{-(m+n)\pi}^{(m\mp n)\pi} \cos t\,dt = \frac{\sin t}{m+n}\Big|_{-(m+n)\pi}^{(m+n)\pi} =$$

$$= 0 - 0 = 0$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx\,dx = 0$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin mx\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} (\cos(m-n)x - \cos(m+n)x)\,dx \; = \; \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(m-n)x\,dx -$$

$$-\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(m+n)x\,dx = 0 + 0 = 0$$

$\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cos mx\,dx = 0$ (так как интеграл от нечётной функции по симметричному относительно нулю отрезку) ■

Теорема:

Пусть $\displaystyle\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx) \rightrightarrows S(x)$ на $[-\pi, \pi] \;\Longrightarrow\; \begin{cases} a_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} S(x)\cos nx\,dx\,, n = 0,1,\dots \\ b_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} S(x)\sin nx\,dx\,, n = 1,2,\dots \end{cases}$

Доказательство:

1) Из условия следует, что $S(x) \in C[-\pi, \pi] \;\Longrightarrow\; \exists \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} S(x)\cos nx\,dx$ и $\exists \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} S(x)\sin nx\,dx$

2) Из условия следует, что $\forall k \geq 0 \quad \displaystyle\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx \cos kx + b_n \sin nx \cos kx) \rightrightarrows S(x)\cos kx$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} S(x)\cos kx\,dx = \frac{a_0}{2} * \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx\,dx + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos kx\,dx + \frac{b_n}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cos kx\,dx\right) =$$

$$= a_k \text{ (из леммы)}$$

3) Из условия следует, что $\forall k \geq 0 \quad \displaystyle\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx \sin kx + b_n \sin nx \sin kx) \rightrightarrows S(x)\sin kx$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} S(x)\sin kx\,dx = \frac{a_0}{2} * \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sin kx\,dx + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \sin kx\,dx + \frac{b_n}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin kx\,dx\right) =$$

$$= b_k \text{ (из леммы)} \quad ■$$

Определение:

Пусть $\exists \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)dx$ (неважно, собственный или несобственный) и $\exists \int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(x)|dx$.

Тогда $\exists \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx$ и $\exists \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx$, и числа вида:

$$\boxed{a_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} S(x)\cos nx\,dx\,, n = 0,1,\dots} \qquad \boxed{b_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} S(x)\sin nx\,dx\,, n = 1,2,\dots}$$

называются коэффициентами Фурье, а ряд $\frac{a_0}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx)$ называется рядом Фурье функции $f(x)$.

Замечание:

Если $\exists \int\limits_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx$, то $\exists \int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(x)|dx$

Доказательство:

$$(|f(x)| - 1)^2 \geq 0 \implies |f(x)| \leq \frac{1 + f^2(x)}{2}$$

$$\exists \int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{1 + f^2(x)}{2}dx \implies \text{по признаку Вейерштрасса } \exists \int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(x)|dx\,. \qquad \blacksquare$$

Теорема (минимальное свойство коэффициентов Фурье):

Пусть $\exists \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)dx$ и $\exists \int\limits_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx$.

$T_n(x) = \frac{A_0}{2} + \sum\limits_{k=1}^{n}(A_k\cos kx + B_k\sin kx) -$ тригометрический многочлен степени n

Пусть $S_n(x)$ — частичная сумма ряда Фурье $f(x)$:

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx + b_k\sin kx)$$

$$\text{Тогда } \int\limits_{-\pi}^{\pi}\big(f(x) - S_n(x)\big)^2 dx = \min_{\substack{T_n(x) \\ \deg\ T_n(x) \leq n}} \int\limits_{-\pi}^{\pi}\big(f(x) - T_n(x)\big)^2 dx$$

Доказательство:

1) $$\int\limits_{-\pi}^{\pi}\big(f(x) - T_n(x)\big)^2 dx = \int\limits_{-\pi}^{\pi}\left(f(x) - \frac{A_0}{2} - \sum_{k=1}^{n}(A_k\cos kx + B_k\sin kx)\right)^2 dx = \int\limits_{-\pi}^{\pi}(f^2(x) +$$

$$+\left(\sum_{k=1}^{n}(A_k\cos kx + B_k\sin kx)\right)^2 - 2\frac{A_0}{2}f(x) - 2f(x)\sum_{k=1}^{n}(A_k\cos kx + B_k\sin kx) +$$

$$+2\frac{A_0}{2}\sum_{k=1}^{n}(A_k\cos kx + B_k\sin kx)\Bigg)dx$$

Подсчитаем некоторые слагаемые по отдельности:

а) $$\int_{-\pi}^{\pi}\frac{A_0^2}{4}dx = 2\pi\frac{A_0^2}{4}$$

б) $$\int_{-\pi}^{\pi}\left(\sum_{k=1}^{n}(A_k\cos kx + B_k\sin kx)\right)^2 dx = \int_{-\pi}^{\pi}\sum_{k=1}^{n}A_k^2\cos^2 kx\,dx + \int_{-\pi}^{\pi}\sum_{k=1}^{n}B_k^2\sin^2 kx\,dx +$$

$$+\ 2\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{\substack{k=1,\ m=1\\ k\neq m}}^{n,\ n}A_kB_l\cos kx\sin lx\,dx = \sum_{k=1}^{n}\int_{-\pi}^{\pi}A_k^2\cos^2 kx\,dx + \sum_{k=1}^{n}\int_{-\pi}^{\pi}B_k^2\sin^2 kx\,dx +$$

$$+\sum_{\substack{k=1,\ m=1\\ m\neq l}}^{n,\ n}\int_{-\pi}^{\pi}A_kB_l\cos kx\sin kx\,mx = \pi\sum_{k=1}^{n}\left(A_k^2 + B_k^2\right)$$ (по лемме об ортогональности)

в) $$\int_{-\pi}^{\pi}A_0f(x)dx = 2\pi\frac{A_0}{2}a_0$$ (из определения коэффициентов Фурье)

г) $$2\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sum_{k=1}^{n}(A_k\cos kx + B_k\sin kx)\,dx = 2\sum_{k=1}^{n}\int_{-\pi}^{\pi}(A_kf(x)\cos kx + B_kf(x)\sin kx) =$$

$$= 2\pi\sum_{k=1}^{n}(A_ka_k + B_kb_k)$$ (из определения коэффициентов Фурье)

д) $$A_0\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{k=1}^{n}(A_k\cos kx + B_k\sin kx) = A_0\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{k=1}^{n}(A_k\cos kx + B_k\sin kx) = 0$$

2) $$\int_{-\pi}^{\pi}\Bigg(f^2(x) + \left(\sum_{k=1}^{n}(A_k\cos kx + B_k\sin kx)\right)^2 - 2\frac{A_0}{2}f(x) - 2f(x)\sum_{k=1}^{n}(A_k\cos kx + B_k\sin kx) +$$

$$+2\frac{A_0}{2}\sum_{k=1}^{n}(A_k\cos kx + B_k\sin kx)\Bigg)dx = \int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)dx + 2\pi\frac{A_0^2}{4} + \pi\sum_{k=1}^{n}\left(A_k^2 + B_k^2\right) - 2\pi\frac{A_0}{2}a_0 -$$

$$-2\pi\sum_{k=1}^{n}(A_ka_k + B_kb_k) + \pi\sum_{k=1}^{n}\left(a_k^2 + b_k^2\right) + 2\pi\frac{a_0^2}{4} - \pi\sum_{k=1}^{n}\left(a_k^2 + b_k^2\right) - 2\pi\frac{a_0^2}{4} = \int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)dx +$$

$$+2\pi\left(\frac{A_0}{2} - \frac{a_0}{2}\right)^2 + \pi\sum_{k=1}^{n}\left((A_k - a_k)^2 + (B_k - b_k)^2\right) - \pi\sum_{k=1}^{n}\left(a_k^2 + b_k^2\right) - 2\pi\frac{a_0^2}{4} \geq$$

$$\geq \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx - \pi\sum_{k=1}^{n}\left(a_k^2+b_k^2\right) - \pi\frac{a_0^2}{2},$$

и минимум достигается при $A_0 = a_0,\ \ A_k = a_k$ и $B_k = b_k$. ∎

Следствие 1 (неравенство Бесселя):

В условиях теоремы $\dfrac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n}\left(a_k^2+b_k^2\right) \leq \dfrac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx$

Доказательство:

Из конца доказательства предыдущей теоремы:

$$\forall n \in N \quad \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx - \pi\sum_{k=1}^{n}\left(a_k^2+b_k^2\right) - \pi\frac{a_0^2}{2} \geq 0$$

$\left(\text{так как } \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx - \pi\sum_{k=1}^{n}\left(a_k^2+b_k^2\right) - \pi\frac{a_0^2}{2} - \text{ это минимум неотрицательного выражения}\right.$

$\left.\int_{-\pi}^{\pi}\big(f(x)-T_n(x)\big)^2dx\text{, следовательно, он сам неотрицателен}\right)$

Следовательно, $\dfrac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n}\left(a_k^2+b_k^2\right) \leq \dfrac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx$. ∎

Следствие 2:

В условиях теоремы $a_k \to 0, b_k \to 0$ при $k \to \infty$.

Доказательство:

Из предыдущего следствия:

$$\forall n \in N \quad \sum_{k=1}^{n}\left(a_k^2+b_k^2\right) \leq \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx - \frac{a_0^2}{2},$$

то есть частичные суммы ряда с неотрицательными членами $\sum_{k=1}^{n}\left(a_k^2+b_k^2\right)$ ограничены $\Longrightarrow$

$\Longrightarrow \sum_{k=1}^{n}\left(a_k^2+b_k^2\right)$ сходится $\Longrightarrow \left(a_k^2+b_k^2\right) \to 0 \Longrightarrow a_k \to 0$ и $b_k \to 0$ ∎

Определение:

Функция $D_n(t) = \dfrac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\cos kt$ называется ядром Дирихле.

Лемма:

$D_n(t)$ − непрерывная на R, чётная, 2π − периодичная функция, $D_n(0) = n + \dfrac{1}{2}$, при $t \neq 2\pi k, k \in Z$

$$D_n(t) = \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}} \quad \text{и} \quad \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_n(t)dt = 1 \quad \forall n.$$

Доказательство:

1) Непрерывность, чётность, 2π − периодичность и $D_n(0) = n + \dfrac{1}{2}$ очевидны из определения.

2) $D_n(t)=\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos kt=\frac{1}{2\sin\frac{t}{2}}\left(\sin\frac{t}{2}+2\sin\frac{t}{2}\cos t+2\sin\frac{t}{2}\cos 2t+\cdots+2\sin\frac{t}{2}\cos nt\right)=$

$=\frac{1}{2\sin\frac{t}{2}}\left(\sin\frac{t}{2}+\sin\left(\frac{t}{2}-t\right)+\sin\left(\frac{t}{2}+t\right)+\sin\left(\frac{t}{2}-2t\right)+\sin\left(\frac{t}{2}+2t\right)+\cdots+\sin\left(\frac{t}{2}-nt\right)+\right.$

$\left.+\sin\left(\frac{t}{2}+nt\right)\right)=\frac{\sin\left(\frac{t}{2}+nt\right)}{2\sin\frac{t}{2}}=\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}$

3) $\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}D_n(t)dt=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos kt\right)dt=\frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{2}dt+\int_{-\pi}^{\pi}\left(\sum_{k=1}^{n}\cos kt\right)dt\right)=\frac{1}{\pi}(\pi+0)=1.$ ■

<u>*Лекция №17*</u>

<u>*Рассуждение:*</u>
Запишем частичную сумму ряда Фурье, соответствующего функции $2\pi -$ периодической функции $f(t)$:

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k \cos kx + b_k \sin kx) = \frac{1}{2} * \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt + \sum_{k=1}^{n}\left(\cos kx * \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos kt\ \,dt + \right.$$

$$\left. + \sin kx * \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin kt\ \,dt\right) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}(\cos kx \cos kt + \sin kx \sin kt)\right) dt =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}(\cos k(t-x))\right) dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, D_n(t-x)\,dt$$

<u>*Утверждение:*</u>

Пусть $f(x) - 2\pi -$ периодическая функция и $\exists \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx$. Тогда $\forall a \in R$:

$$\int_{-\pi+a}^{\pi+a} f(x)\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx$$

<u>*Доказательство:*</u>

Так как $f(x) - 2\pi -$ периодическая функция, то:

$$\int_{-\pi+a}^{-\pi} f(x)\,dx = \int_{2\pi-\pi+a}^{2\pi-\pi} f(x)\,dx = \int_{\pi+a}^{\pi} f(x)\,dx = -\int_{\pi}^{\pi+a} f(x)\,dx$$

Следовательно, $\displaystyle\int_{-\pi+a}^{\pi+a} f(x)\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx + \int_{-\pi+a}^{-\pi} f(x)\,dx + \int_{\pi}^{\pi+a} f(x)\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx.$ ■

Продолжим рассуждение. Сделаем замену $\tau = t - x$:

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi-x}^{\pi-x} f(\tau + x)\, D_n(\tau)\,d\tau = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+\tau)\, D_n(\tau)\,d\tau \qquad (1)$$

Заменим τ на $(-\tau)$:

$$S_n(x) = -\frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{-\pi} f(x-\tau)\, D_n(\tau)\,d\tau = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-\tau)\, D_n(\tau)\,d\tau \qquad (2)$$

Сложим (1) и (2):

$$2S_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\big(f(x+\tau) + f(x-\tau)\big)D_n(\tau)\,d\tau$$

$$S_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\big(f(x+\tau) + f(x-\tau)\big)D_n(\tau)\,d\tau$$

так как функция $f(x+\tau)+f(x-\tau)-$ чётная, то

$$S_n(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\big(f(x+\tau)+f(x-\tau)\big)D_n(\tau)\,d\tau$$

Теорема (принцип локализации Римана):

$\forall x_0\in[-\pi,\pi]$ существование $\lim\limits_{n\to\infty}S_n(x_0)$ (обозначение из предыдущего рассуждения) равносильно существованию для некоторого $\delta>0$ $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{\delta}\big(f(x_0+\tau)+f(x_0-\tau)\big)D_n(\tau)d\tau$.

Доказательство:

Рассмотрим $\int_\delta^{\pi}\big(f(x_0+\tau)+f(x_0-\tau)\big)D_n(\tau)d\tau$ и воспользуемся свойствами $D_n(\tau)$:

$$\int_\delta^{\pi}\big(f(x_0+\tau)+f(x_0-\tau)\big)D_n(\tau)d\tau=\int_\delta^{\pi}\frac{f(x_0+\tau)+f(x_0-\tau)}{2\sin\frac{\tau}{2}}\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\tau\,d\tau=$$

$$=\int_\delta^{\pi}\frac{f(x_0+\tau)+f(x_0-\tau)}{2\sin\frac{\tau}{2}}\left(\sin\frac{\tau}{2}\cos n\tau+\cos\frac{\tau}{2}\sin n\tau\right)d\tau=$$

$$=\int_\delta^{\pi}\frac{f(x_0+\tau)+f(x_0-\tau)}{2}\left(\cos n\tau+ctg\frac{\tau}{2}\sin n\tau\right)d\tau$$

Введём две функции:

$$g(\tau)=\begin{cases}\frac{1}{2}\big(f(x_0+\tau)+f(x_0-\tau)\big), \text{если } \tau\in[\delta,\pi]\\ 0, \text{если } \tau\in[-\pi,\delta)\end{cases}$$

$$h(\tau)=\begin{cases}\frac{1}{2}\big(f(x_0+\tau)+f(x_0-\tau)\big)\,ctg\,\frac{\tau}{2}, \text{если } \tau\in[\delta,\pi]\\ 0, \text{если } \tau\in[-\pi,\delta)\end{cases}$$

Тогда $\int_\delta^{\pi}\frac{f(x_0+\tau)+f(x_0-\tau)}{2}\left(\cos n\tau+ctg\frac{\tau}{2}\sin n\tau\right)d\tau=\int_{-\pi}^{\pi}g(\tau)\cos n\tau\,d\tau+\int_{-\pi}^{\pi}h(\tau)\sin n\tau\,d\tau.$

Оба интеграла являются коэффициентами Фурье для $g(\tau)$ и $h(\tau)$, следовательно, стремятся к нулю при $n\to\infty$. ■

Теорема (признак Дини):

Пусть $f(x)-2\pi-$ периодическая функция и $\exists\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx$, $\exists\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|dx$, $\exists\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)dx$, и пусть в точке $x_0\in[-\pi,\pi]$ $\exists\lim\limits_{h\to0+}f(x_0+h)=f_+(x_0)$ и $\exists\lim\limits_{h\to0+}f(x_0-h)=f_-(x_0)$. Тогда если $\exists\delta>0$, что сходится $\int_0^{\delta}\frac{|f(x_0+t)+f(x_0-t)-f_+(x_0)-f_-(x_0)|}{t}dt$, то $\exists\lim\limits_{n\to\infty}S_n(x_0)=\frac{f_+(x_0)+f_-(x_0)}{2}$.

Доказательство:

1) Докажем, что существование $\int_0^{\delta}\frac{|f(x_0+t)+f(x_0-t)-f_+(x_0)-f_-(x_0)|}{t}dt$ равносильно сущес –

твованию $\int\limits_0^\delta \frac{|f(x_0+t)+f(x_0-t)-f_+(x_0)-f_-(x_0)|}{2\sin\frac{t}{2}}dt.$

$$\int\limits_0^\delta \left(\frac{|f(x_0+t)+f(x_0-t)-f_+(x_0)-f_-(x_0)|}{t}-\frac{|f(x_0+t)+f(x_0-t)-f_+(x_0)-f_-(x_0)|}{2\sin\frac{t}{2}}\right)dt=$$

$$=\int\limits_0^\delta |f(x_0+t)+f(x_0-t)-f_+(x_0)-f_-(x_0)|\frac{2\sin\frac{t}{2}-t}{2t\sin\frac{t}{2}}dt$$

Теперь разложим числитель и знаменатель дроби в ряд Тейлора. Первый член в разложении синуса будет t, и он сократится с $(-t)$, следовательно, первым членом станет член с t^3, а в знаменателе первым членом будет член с t^2. Значит, существование интеграла от разности равносильно су – ществованию интеграла $\int\limits_0^\delta t|f(x_0+t)+f(x_0-t)-f_+(x_0)-f_-(x_0)|dt$, а он собственный, значит, существует.

Значит, существование $\int\limits_0^\delta \frac{|f(x_0+t)+f(x_0-t)-f_+(x_0)-f_-(x_0)|}{t}dt$ равносильно существованию $\int\limits_0^\delta \frac{|f(x_0+t)+f(x_0-t)-f_+(x_0)-f_-(x_0)|}{2\sin\frac{t}{2}}dt$, а так как по условию, существует первый интеграл, то существует и второй.

2) $\left|S_n(x_0)-\frac{f_+(x_0)+f_-(x_0)}{2}\right|=\left|\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\pi \big(f(x_0+t)+f(x_0-t)\big)D_n(t)\,dt-\frac{f_+(x_0)+f_-(x_0)}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} D_n(t)dt\right|=$

$=\left|\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\pi \big(f(x_0+t)+f(x_0-t)\big)D_n(t)\,dt-\frac{f_+(x_0)+f_-(x_0)}{\pi}\int\limits_0^\pi D_n(t)dt\right|=\left|\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\pi \big(f(x_0+t)+f(x_0-t)-\right.$

$\left.-f_+(x_0)-f_-(x_0)\big)D_n(t)dt\right|=\left|\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\pi \big(f(x_0+t)+f(x_0-t)-f_+(x_0)-f_-(x_0)\big)\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}dt\right|$

3) $\forall\varepsilon>0\ \ \exists\delta_\varepsilon\in(0,\delta)$, что $\int\limits_0^{\delta_\varepsilon} \frac{|f(x_0+t)+f(x_0-t)-f_+(x_0)-f_-(x_0)|}{2\sin\frac{t}{2}}dt<\varepsilon$, так как в пункте 1 мы выяснили, что этот интеграл существует, следовательно, путём уменьшения промежутка интег – рирования мы можем добиться, чтобы этот интеграл стал меньше любого наперед заданного числа.

4) Докажем, что $\exists N_\varepsilon\quad\forall n>N_\varepsilon\quad\left|\int\limits_{\delta_\varepsilon}^{\pi}\big(f(x_0+t)+f(x_0-t)-f_+(x_0)-f_-(x_0)\big)\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}dt\right|<\varepsilon:$

$$\int\limits_\delta^\pi \frac{f(x_0+t)+f(x_0-t)-f_+(x_0)-f_-(x_0)}{2\sin\frac{t}{2}}\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t\,dt=$$

$$=\int\limits_\delta^\pi \frac{f(x_0+t)+f(x_0-t)-f_+(x_0)-f_-(x_0)}{2\sin\frac{t}{2}}\left(\sin\frac{t}{2}\cos nt+\cos\frac{t}{2}\sin nt\right)dt=$$

$$=\int\limits_\delta^\pi \frac{f(x_0+t)+f(x_0-t)-f_+(x_0)-f_-(x_0)}{2}\left(\cos nt+ctg\frac{t}{2}\sin nt\right)dt$$

Введём две функции:

$$g(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}\left(f(x_0+t) + f(x_0-t) - f_+(x_0) - f_-(x_0)\right), \text{если } t \in [\delta, \pi] \\ 0, \text{если } t \in [-\pi, \delta) \end{cases}$$

$$h(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}\left(f(x_0+t) + f(x_0-t) - f_+(x_0) - f_-(x_0)\right) ctg\, \frac{t}{2}, \text{если } t \in [\delta, \pi] \\ 0, \text{если } t \in [-\pi, \delta) \end{cases}$$

$$\text{Тогда} \int_{\delta}^{\pi} \frac{f(x_0+t) + f(x_0-t) - f_+(x_0) - f_-(x_0)}{2}\left(\cos nt + ctg\frac{t}{2}\sin nt\right) dt =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} g(t)\cos nt\, dt + \int_{-\pi}^{\pi} h(t)\sin nt\, dt.$$

Оба интеграла являются коэффициентами Фурье для $g(t)$ и $h(t)$, следовательно, стремятся к нулю при $n \to \infty$.

Значит, $\exists N_\varepsilon \quad \forall n > N_\varepsilon \quad \left|\int_{\delta_\varepsilon}^{\pi} \left(f(x_0+t) + f(x_0-t) - f_+(x_0) - f_-(x_0)\right) \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}} dt\right| < \varepsilon.$

5) $$\left|\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \left(f(x_0+t) + f(x_0-t) - f_+(x_0) - f_-(x_0)\right) \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}} dt\right| \le$$

$$\le \frac{1}{\pi}\int_0^{\delta} \frac{|f(x_0+t) + f(x_0-t) - f_+(x_0) - f_-(x_0)|}{2\sin\frac{t}{2}} \left|\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right| dt +$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_{\delta}^{\pi} \frac{f(x_0+t) + f(x_0-t) - f_+(x_0) - f_-(x_0)}{2\sin\frac{t}{2}} \sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t\, dt \le \frac{\varepsilon}{\pi} + \frac{\varepsilon}{\pi} = \frac{2\varepsilon}{\pi} \qquad \blacksquare$$

Следствие:

Пусть $f(x)$ удовлетворяет условиям теоремы, кроме существования $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx$; $\exists \alpha \in [0,1]$ и $\exists C > 0$, что $|f(x_0+t) - f_+(x_0)| < Ct^\alpha, \ t > 0$; $\exists \beta \in [0,1]$, что $|f(x_0-t) - f_-(x_0)| < Ct^\beta, \ t > 0$.

Тогда $\exists \int_0^{\delta} \frac{|f(x_0+t) + f(x_0-t) - f_+(x_0) - f_-(x_0)|}{t} dt$.

Доказательство:

$$\int_0^{\delta} \frac{|f(x_0+t) + f(x_0-t) - f_+(x_0) - f_-(x_0)|}{t} dt \le \int_0^{\delta} \frac{|f(x_0+t) - f_+(x_0)|}{t} dt + \int_0^{\delta} \frac{|f(x_0-t) - f_-(x_0)|}{t} dt \le$$

$$\le \int_0^{\delta} Ct^{\alpha-1} dt + \int_0^{\delta} Ct^{\beta-1} dt = \frac{C\delta^\alpha}{\alpha} + \frac{C\delta^\beta}{\beta}, \text{значит, } \exists \int_0^{\delta} \frac{|f(x_0+t) + f(x_0-t) - f_+(x_0) - f_-(x_0)|}{t} \qquad \blacksquare$$

Лекция №18

Теорема (достаточное условие равномерной сходимости ряда Фурье на отрезке):
$f(x) \in C[-\pi, \pi]$, $f(-\pi) = f(\pi)$, $f(x)$ доопределена на R как непрерывная функция с периодом 2π, т. е. $f(x) \in C(R)$, $f'(x)$ существует на $[-\pi, \pi]$ везде, кроме конечного числа точек, и $f'(x)$ непре – рывна везде, где существует, а в точках, где $f'(x)$ не существует, существуют оба односторонних предела $f'(x)$. Тогда ряд Фурье $f(x)$ $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx) \rightrightarrows f(x)$ на R.

Доказательство:

Пусть $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{\beta_n\}_{n=1}^{\infty}$ – коэффициенты Фурье $f'(x)$. Так как $\exists \int_{-\pi}^{\pi} \left(f'(x)\right)^2 dx$, то сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha_n^2 + \beta_n^2)$ (из следствия 2 из минимального свойства коэффициентов Фурье из 16 лекции).

$$\alpha_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\cos nx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\,df(x) = \frac{1}{\pi}\left[f(x)\cos nx\Big|_{-\pi}^{\pi} + n\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx\right]$$

так как $f(-\pi) = f(\pi)$, а $\cos \pi n = \cos(-\pi n)$, то $f(x)\cos nx\Big|_{-\pi}^{\pi} = 0$ и

$$\frac{1}{\pi}\left[f(x)\cos nx\Big|_{-\pi}^{\pi} + n\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx\right] = nb_n.$$

$$\beta_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\sin nx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\,df(x) = \frac{1}{\pi}\left[f(x)\sin nx\Big|_{-\pi}^{\pi} - n\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx\right] = -na_n.$$

Применим к $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ признак Вейерштрасса:

$$|a_n \cos nx + b_n \sin nx| \le |a_n| + |b_n| = \frac{|\beta_n|}{n} + \frac{|\alpha_n|}{n} \le \beta_n^2 + \frac{1}{n^2} + \alpha_n^2 + \frac{1}{n^2} = (\alpha_n^2 + \beta_n^2) + \frac{2}{n^2}$$

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha_n^2 + \beta_n^2)$ сходится, и ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n^2}$ сходится $\Longrightarrow \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx) \rightrightarrows f(x)$ на R. ■

Следствие (достаточное условие дифференцируемости ряда Фурье):
Пусть кроме условий теоремы, $f'(x)$ существует везде и $f'(x)$ везде является гёльдеровой (то есть $\exists \gamma > 0$, что $\forall x \in R \quad \forall \Delta x \quad \exists C > 0 \quad |f'(x + \Delta x) - f'(x)| \le C|\Delta x|^{\gamma}$).

$$\text{Тогда } f'(x) = \left(\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)\right)' = \sum_{n=1}^{\infty}(-na_n \sin nx + nb_n \cos nx) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}(\alpha_n \sin nx + \beta_n \cos nx)$$

Теорема (об интегрировании рядов Фурье):
Пусть $\exists \int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx$, $\exists \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|dx$ и $\exists \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx$. Тогда ряд Фурье функции $\int_0^x \left(f(t) - \frac{a_0}{2}\right)dt$ сходится к исходной функции равномерно и может быть получен интегрированием ряда Фурье исходной функции.

<u>Доказательство:</u>

1) Из существования $\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)dx$, $\int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(x)|dx$ и $\int\limits_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx$ следует существование коэффициентов Фурье для $f(x) - a_n$ и b_n и сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2)$.

2) $$A_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left(\int\limits_0^x \left(f(t) - \frac{a_0}{2}\right)dt\right)\cos nx\,dx = \frac{1}{\pi n}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left(\int\limits_0^x \left(f(t) - \frac{a_0}{2}\right)dt\right)d(\sin nx) =$$

$$= -\frac{1}{\pi n}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left(f(x) - \frac{a_0}{2}\right)\sin nx\,dx = -\frac{1}{\pi n}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx = -\frac{1}{n}b_n, n = 1,2,3,\ldots$$

$$B_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left(\int\limits_0^x \left(f(t) - \frac{a_0}{2}\right)dt\right)\sin nx\,dx = -\frac{1}{\pi n}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left(\int\limits_0^x \left(f(t) - \frac{a_0}{2}\right)dt\right)d(\cos nx) =$$

$$= -\frac{1}{\pi n}\left[\int\limits_0^x \left(f(t) - \frac{a_0}{2}\right)dt\cos nx\,\Big|_{-\pi}^{\pi} - \int\limits_{-\pi}^{\pi}\left(f(x) - \frac{a_0}{2}\right)\cos nx\,dx\right] =$$

$$= -\frac{1}{\pi n}\left[(-1)^n\left(\int\limits_0^{\pi}\left(f(t) - \frac{a_0}{2}\right)dt - \int\limits_0^{-\pi}\left(f(t) - \frac{a_0}{2}\right)dt\right) - \pi a_n\right] =$$

$$= -\frac{1}{\pi n}\left[(-1)^n\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left(f(t) - \frac{a_0}{2}\right)dt - \pi a_n\right] = \frac{(-1)^{n+1}}{n}\left[\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)dt - \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} a_0\,dt\right] + \frac{a_n}{n} =$$

$$= \frac{(-1)^{n+1}}{n}\left[\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)dt - a_0\right] + \frac{a_n}{n}$$

Но $a_0 = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)dt$, следовательно, $\frac{(-1)^{n+1}}{n}\left[\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)dt - a_0\right] + \frac{a_n}{n} = \frac{a_n}{n}$.

$$A_0 = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left(\int\limits_0^x \left(f(t) - \frac{a_0}{2}\right)dt\right)dx$$

3) Поставим в соответствие функции $f(x)$ ряд Фурье $\frac{a_0}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx)$.

Тогда функции $\int\limits_0^x \left(f(t) - \frac{a_0}{2}\right)dt$ соответствует ряд Фурье:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\int\limits_0^x \cos nt\,dt + b_n\int\limits_0^x \sin nt\,dt\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\frac{\sin nt}{n}\,\Big|_0^x - b_n\frac{\cos nt}{n}\,\Big|_0^x\right) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n}{n}\sin nx - \frac{b_n}{n}(\cos nx - 1)\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{n} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n}{n}\sin nx - \frac{b_n}{n}\cos nx\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{n} +$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}(A_n \cos nx + B_n \sin nx),$$

так как $\left|\frac{a_n}{n}\right| + \left|\frac{b_n}{n}\right| \leq a_n^2 + \frac{1}{n^2} + b_n^2 + \frac{1}{n^2} = a_n^2 + b_n^2 + \frac{2}{n^2}$, а ряды $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2)$ и $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n^2}$ сходятся, то по признаку Вейерштрасса ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{n} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n}{n}\sin nx - \frac{b_n}{n}\cos nx\right)$, а следовательно и ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{n} + \sum_{n=1}^{\infty}(A_n \cos nx + B_n \sin nx)$, сходятся равномерно на R.

4) Рассмотрим функцию $G(x) = \int_0^x \left(f(t) - \frac{a_0}{2}\right)dt$:

$$G(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(A_n \cos nx + B_n \sin nx)$$

$$G(0) = \int_0^0 \left(f(t) - \frac{a_0}{2}\right)dt = 0 = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n = \frac{A_0}{2} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{n} \implies \frac{A_0}{2} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{n} = 0.$$

5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{n} + \sum_{n=1}^{\infty}(A_n \sin nx + B_n \cos nx) = \int_0^x \left(f(t) - \frac{a_0}{2}\right)dt - \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{n} = \int_0^x \left(f(t) - \frac{a_0}{2}\right)dt$. ■

Лекция №19

Примеры:

$$1)\ f(x)=\begin{cases}\dfrac{\pi-x}{2}, x\in(0,\pi]\\ 0, \qquad x=0\\ \dfrac{-\pi-x}{2}, x\in[-\pi,0)\end{cases}$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx=0,\text{ибо } f(x)-\text{нечётна.}$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\sin nx\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\pi-x}{2}\sin nx\,dx=-\frac{2}{\pi n}\int_0^{\pi}\frac{\pi-x}{2}\,d\cos nx=$$

$$=-\frac{2}{\pi n}\left(\frac{\pi-x}{2}\cos nx\,\Big|_0^{\pi}+\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\cos nx\,dx\right)=-\frac{2}{\pi n}\left(-\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2n}\sin nx\,\Big|_0^{\pi}\right)=\frac{1}{n}$$

$$\boxed{f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}}$$

2) $f(x)=|x|$ на $[-\pi,\pi]$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,dx=0,\text{ибо } f(x)-\text{чётна.}$$

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|x|dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\,dx=\pi$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|x|\cos nx\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\cos nx\,dx=\frac{2}{\pi n}\int_0^{\pi}x\,d\sin nx=\frac{2}{\pi n}\left(x\sin nx\,\Big|_0^{\pi}-\int_0^{\pi}\sin nx\,dx\right)=$$

$$=-\frac{2}{\pi n}\int_0^{\pi}\sin nx\,dx=\frac{2\cos nx}{\pi n^2}\,\Big|_0^{\pi}=\frac{2}{\pi n^2}((-1)^n-1)$$

следовательно, $a_{2k}=0$, а $a_{2k+1}=\dfrac{-4}{\pi(2k+1)^2}$, поэтому:

$$|x|=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\cos(2k+1)x}{(2k+1)^2}$$

Используем эту формулу для вычисления суммы ряда $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$. Для этого подставим в неё $x=0$:

$$0=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}\quad\Rightarrow\quad\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$$

Обозначим $S=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$, $S_{2k+1}=\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}$, $S_{2k}=\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k)^2}$

Тогда очевидно, что $S=S_{2k}+S_{2k+1}$ и $S_{2k}=\dfrac{1}{4}S$. Следовательно, $S=\dfrac{4}{3}S_{2k+1}=\dfrac{\pi^2}{6}$

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}}$$

<u>*Лекция №20*</u>

<u>*Суммирование ряда Фурье методом средних арифметических.*</u>

<u>*Определение:*</u>

Пусть $f(x)$ определена на $[-\pi,\pi]$ и ей можно поставить в соответствие её ряд Фурье $\frac{a_0}{2}+$ $+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$, пусть $S_n(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)$, а $D_n(x)$ − ядра Дирихле.

$\sigma_{n+1}(x,f)=\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}S_k(f)$ называется последовательностью Фейера, соответствующей $f(x)$,

$F_{n+1}(x)=\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}D_k(x)$ называется ядром Фейера.

<u>*Лемма (свойства ядра Фейера):*</u>

1) $F_{n+1}(x)=\dfrac{\sin^2\frac{n+1}{2}x}{2(n+1)\sin^2\frac{x}{2}}$

2) $F_n(x)\geq 0\quad\forall n$

3) $\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}F_n(x)dx=1$

4) $\forall\delta\in(0,\pi)\quad\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_{\delta}^{\pi}F_n(x)dx=0$

<u>*Доказательство:*</u>

1) $D_k(x)=\dfrac{\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}}\;\Rightarrow\;F_{n+1}(x)=\dfrac{1}{n+1}\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sin\frac{3}{2}x}{2\sin\frac{x}{2}}+\dots+\dfrac{\sin\frac{2k+1}{2}x}{2\sin\frac{x}{2}}\right)=$

$=\dfrac{1}{4(n+1)\sin^2\frac{x}{2}}\left(2\sin^2\frac{x}{2}+2\sin\frac{3}{2}x\sin\frac{x}{2}+\dots+2\sin\frac{2k+1}{2}x\sin\frac{x}{2}\right)=\dfrac{1}{4(n+1)\sin^2\frac{x}{2}}(1-\cos x+$

$+\cos x-\cos 3x+\cos 3x-\dots+\cos nx-\cos(n+1)x)=\dfrac{1-\cos(n+1)x}{4(n+1)\sin^2\frac{x}{2}}=\dfrac{\sin^2\frac{n+1}{2}x}{2(n+1)\sin^2\frac{x}{2}}$

2) очевидно в силу первого пункта

3) $\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}D_n(x)dx=1, F_{n+1}(x)=\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}D_k(x)\;\Rightarrow\;\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}F_n(x)dx=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}D_k(x)\,dx=$

$=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}D_k(x)\,dx=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}1=1$

4) $F_{n+1}(x)=\dfrac{\sin^2\frac{n+1}{2}x}{2(n+1)\sin^2\frac{x}{2}}$

$$0\leq\frac{1}{2(n+1)}\int\limits_{\delta}^{\pi}\frac{\sin^2\frac{n+1}{2}x}{\sin^2\frac{x}{2}}dx\leq\frac{1}{2(n+1)}\int\limits_{\delta}^{\pi}\frac{dx}{\sin^2\frac{x}{2}}$$

$$\int_{\delta}^{\pi} \frac{dx}{\sin^2 \frac{x}{2}} - \text{ собственный интеграл, зависящий от } \delta \text{, обозначим его через } C(\delta)$$

$$\frac{1}{2(n+1)} \int_{\delta}^{\pi} \frac{dx}{\sin^2 \frac{x}{2}} = \frac{C(\delta)}{2(n+1)} \text{ при } n \to \infty \text{ стремится к нулю } \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \int_{\delta}^{\pi} F_n(x)dx = 0. \quad \blacksquare$$

Теорема (Фейера):

Пусть $f(x)$ — непрерывная на R и 2π — периодическая функция $\Rightarrow$ $\sigma_n(f) \rightrightarrows f(x)$ на R.

Доказательство:

1) $S_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t+x) D_n(t)dt \Rightarrow \sigma_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t+x) F_n(t)dt$

$$|\sigma_n(f) - f(x)| = \frac{1}{\pi} \left| \int_{-\pi}^{\pi} f(t+x)F_n(t)dt - f(x) \int_{-\pi}^{\pi} F_n(t)dx \right| = \frac{1}{\pi} \left| \int_{-\pi}^{\pi} \big(f(t+x) - f(x)\big) F_n(t)dt \right|$$

2) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta_\varepsilon > 0 \quad \forall x_1, x_2$, таких, что $|x_1 - x_2| < 2\delta_\varepsilon$, верно, что $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$

Пусть $M = \max_{x\in R} |f(x)|$. По четвёртому пункту предыдущей леммы $\exists N_\varepsilon \ \ \forall n > N_\varepsilon \quad \left| \int_{\delta_\varepsilon}^{\pi} F_n(t)dt \right| \le \frac{\varepsilon}{4M}$

Кроме того, $\forall x_1, x_2 \quad |f(x_1) - f(x_2)| \le 2M$.

$$3)\ |\sigma_n(f) - f(x)| \le \frac{1}{\pi} \left| \int_{-\pi}^{-\delta_\varepsilon} \big(f(t+x) - f(x)\big)F_n(t)dt \right| + \frac{1}{\pi} \left| \int_{-\delta_\varepsilon}^{\delta_\varepsilon} \big(f(t+x) - f(x)\big)F_n(t)dt \right| +$$

$$+ \frac{1}{\pi} \left| \int_{\delta_\varepsilon}^{\pi} \big(f(t+x) - f(x)\big)F_n(t)dt \right| \le \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{-\delta_\varepsilon} |f(t+x) - f(x)| F_n(t)dt + \frac{1}{\pi} \int_{-\delta_\varepsilon}^{\delta_\varepsilon} |f(t+x) - f(x)| F_n(t)dt +$$

$$+ \frac{1}{\pi} \int_{\delta_\varepsilon}^{\pi} |f(t+x) - f(x)| F_n(t)dt \le \frac{2M}{\pi} \int_{-\pi}^{-\delta_\varepsilon} F_n(t)dt + \frac{1}{\pi} \int_{-\delta_\varepsilon}^{\delta_\varepsilon} \varepsilon F_n(t)dt + \frac{2M}{\pi} \int_{\delta_\varepsilon}^{\pi} F_n(t)dt \le \frac{\varepsilon}{2\pi} + \frac{\varepsilon}{\pi} + \frac{\varepsilon}{2\pi} =$$

$$= \frac{2\varepsilon}{\pi} < \varepsilon \quad \blacksquare$$

Дополнительные сведения о показательной и тригонометрических функциях.

Так как $\sin x, \cos x, e^x \in C^\infty(R)$, то $\sin x \sim \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}$, $\cos x \sim \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}$, $e^x \sim \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$.

Радиус сходимости этих рядов равен $+\infty$.

Проверим стремление остаточного члена (в форме Лагранжа) к нулю:

$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} x^{n+1}$$

$$\text{для } \sin x : |R_n(x)| \le \frac{x^n}{n!} \to 0 \text{ при } n \to \infty.$$

$$\text{для } \cos x : |R_n(x)| \le \frac{x^n}{n!} \to 0 \text{ при } n \to \infty.$$

$$\text{для } e^x : |R_n(x)| \le \frac{e^\xi x^n}{n!} \to 0 \text{ при } n \to \infty.$$

Следовательно, $\forall A > 0$:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} \rightrightarrows \sin x \text{ на } [-A, A]$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k} \rightrightarrows \cos x \text{ на } [-A,A]$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!} \rightrightarrows e^x \text{ на } [-A,A]$$

Теперь мы можем записать, что:

$$\boxed{\sin x = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1}}$$

$$\boxed{\cos x = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k}}$$

$$\boxed{e^x = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}}$$

Кроме того, можно заметить, что:

$$e^{ix} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(ix)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k} + i\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1} = \cos x + i\sin x.$$

<u>Приближение непрерывных функций многочленами.</u>

<u>Теорема (Вейерштрасса):</u>

$$\forall [a,b] \quad \forall f(x) \in C[a,b] \quad \Longrightarrow \quad \exists \{P_n(x)\}_{n=1}^{\infty} \quad P_n(x) \rightrightarrows f(x) \text{ на } [a,b].$$

<u>Доказательство:</u>

Сделаем линейную замену переменной, переводящую отрезок $[a,b]$ в отрезок $[0,\pi]$:

$$t = \pi\frac{x-a}{b-a}$$

Таким образом, функция $f(x)$, непрерывная на $[a,b]$, перейдёт в функцию $g(t)$, непрерывную на $[0,\pi]$. Продолжим $g(t)$ на $[-\pi,\pi]$ так, чтобы $g(t) \in C[-\pi,\pi]$ и $g(-\pi) = g(\pi)$. Тогда по теореме Фей – ера $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists\, T_\varepsilon(t) = \sum_{k=0}^{n}(\alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx)$, что $|g(t) - T_\varepsilon(t)| < \varepsilon \quad \forall t \in [-\pi,\pi]$

Но $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \sum_{m=0}^{l}\frac{T_\varepsilon^{(m)}(0)}{m!}t^m$, что $\left|T_\varepsilon(t) - \sum_{m=0}^{l}\frac{T_\varepsilon^{(m)}(0)}{m!}t^m\right| < \varepsilon \quad \forall t \in [-\pi,\pi]$

Следовательно, $\left|g(t) - \sum_{m=0}^{l}\frac{T_\varepsilon^{(m)}(0)}{m!}t^m\right| < \varepsilon + \varepsilon < 2\varepsilon$. Возьмём $\varepsilon = \frac{1}{n}$, и для $\forall n$ мы построим мно – гочлен, и все эти многочлены вместе образуют последовательность, сходящуюся к $f(x)$. ■

<u>*Лекция №21*</u>

<u>*Теорема:*</u>

$$f(x) \in C^n[a,b] \quad \Longrightarrow \quad \exists \{P_k(x)\}_{k=1}^{\infty}, \text{что } \forall m = 0,1,\dots,n \ \ P_k^{(m)}(x) \rightrightarrows f^{(m)}(x) \text{ на } [a,b]$$

<u>*Доказательство:*</u>

По теореме Вейерштрасса для $f^{(n)}(x)$ $\exists \{Q_{k,n}(x)\}_{k=1}^{\infty}$, что:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_\varepsilon \quad \forall n > N_\varepsilon \quad \left|Q_{k,n}(x) - f^{(n)}(x)\right| < \frac{\varepsilon}{(b-a)^n} \quad \forall x \in [a,b]$$

Заметим, что если $\forall x \in [a,b] \quad |g(x) - h(x)| < \varepsilon$, то $\int\limits_a^b |g(t) - h(t)|\,dt < \varepsilon(b-a) \quad \forall x \in [a,b]$

Следовательно:

$$\left|\int\limits_a^x Q_{k,n}(t)dt - \int\limits_a^x f^{(n)}(t)dt\right| \le \int\limits_a^x \left|Q_{k,n}(t) - f^{(n)}(t)\right| dt < \frac{\varepsilon(b-a)}{(b-a)^n} = \frac{\varepsilon}{(b-a)^{n-1}} \quad \forall x \in [a,b]$$

$$\int\limits_a^x f^{(n)}(t)\,dt = f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(a)$$

Обозначим через $Q_{k,n-1}(x) = \int\limits_a^x Q_{k,n}(t)dt + f^{(n-1)}(a)$

Тогда $\int\limits_a^x \left|Q_{k,n-1}(t) - f^{(n-1)}(t)\right| dt < \dfrac{\varepsilon}{(b-a)^{n-1}} \quad \forall x \in [a,b]$

и, кроме того, $Q'_{k,n-1}(x) = Q_{k,n}$. Аналогично, $Q_{k,n-2}(x)$ такая, что:

$$\int\limits_a^x \left|Q_{k,n-2}(t) - f^{(n-2)}(t)\right| dt < \frac{\varepsilon}{(b-a)^{n-2}} \ \text{ и } \ Q'_{k,n-2}(x) = Q_{k,n-1}(x), \text{ и так далее.} \quad \blacksquare$$

<u>*Пример:*</u>

$f(x) \in C[a,b]$ и пусть $\forall k = 0,1,2,\dots \ \int\limits_a^b x^k f(x)dx = 0$. Докажем, что возможно, только если $f(x) \equiv 0$.

<u>*Доказательство:*</u>

Из условия следует, что $\forall P(x) \ \int\limits_a^b P(x)f(x)dx = 0$. Возьмём последовательность многочленов $P_n(x)$, что $P_n(x) \rightrightarrows f(x)$ на $[a,b]$ (такая последовательность существует по теореме Вейерштрасса):

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists N_\varepsilon \ \ \forall n > N_\varepsilon \ \ |P_n(x) - f(x)| < \varepsilon \ \ \forall x \in [a,b]$$

$$0 = \int\limits_a^b P_n(x)f(x)dx = \int\limits_a^b P_n(x)\big(f(x) - P_n(x) + P_n(x)\big)dx = \int\limits_a^b P_n(x)\big(f(x) - P_n(x) + P_n(x)\big)dx =$$

$$= \int\limits_a^b P_n^2(x)dx + \int\limits_a^b P_n(x)\big(f(x) - P_n(x)\big)dx$$

при $n \to \infty$: $\int\limits_a^b P_n^2(x)dx \to \int\limits_a^b f^2(x)dx, \int\limits_a^b P_n(x)\big(f(x) - P_n(x)\big)dx \to 0$ (так как $|P_n(x) - f(x)| \to 0$)

Следовательно, $\int\limits_a^b f^2(x)dx = 0$. Единственная непрерывная функция, удовлетворяющая этому условию — это тождественный ноль.

<u>*Теорема (Римана):*</u>

$f(x)$ определена на $[a,+\infty)$ и $\forall A > a$ на $[a, A]$ у неё конечное число точек разрыва, и $\exists \int\limits_a^{+\infty} |f(x)|\, dx$.

Тогда $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} \int\limits_a^{+\infty} f(x) \sin \lambda x\, dx = 0$ и $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} \int\limits_a^{+\infty} f(x) \cos \lambda x\, dx = 0$.

<u>Доказательство:</u>

1) $\forall \varepsilon > 0\ \ \exists A_\varepsilon$, что $\left|\int\limits_{A_\varepsilon}^{+\infty} f(x) \sin \lambda x\, dx\right| \le \int\limits_{A_\varepsilon}^{+\infty} |f(x)| dx < \varepsilon$, то есть величину $\int\limits_{A_\varepsilon}^{+\infty} |f(x)| dx$ можно сде – лать сколь угодно малой. Но $\int\limits_a^{+\infty} f(x) \sin \lambda x\, dx = \int\limits_a^{A_\varepsilon} f(x) \sin \lambda x\, dx + \int\limits_{A_\varepsilon}^{+\infty} f(x) \sin \lambda x\, dx$, поэтому да – лее рассматриваем только интеграл $\int\limits_a^{A_\varepsilon} f(x) \sin \lambda x\, dx$.

2) Пусть количество точек разрыва функции $f(x)$ на отрезке $[a, A_\varepsilon]$ равно N_ε. Разобьём отрезок $[a, A_\varepsilon]$ на отрезки: $[a, A_\varepsilon] = \bigcup\limits_{i=1}^{2N_\varepsilon+1} [\alpha_i, \beta_i]$, причём так, что на каждом отрезке разбиения только одна точка разрыва, и эта точка разрыва совпадает с одним из концов отрезка.

Рассмотрим произвольный i. Пусть разрыв в β_i. Тогда $\exists \delta_{i,\varepsilon} > 0$, что:

$$\left|\int\limits_{\beta_i-\delta_{i,\varepsilon}}^{\beta_i} f(x) \sin \lambda x\, dx\right| < \frac{\varepsilon}{2N_\varepsilon + 1}$$

3) $\forall [\alpha_i, \beta_i - \delta_{i,\varepsilon}]$ (или $[\alpha_j + \delta_{i,\varepsilon}, \beta_j]$) $f(x)$ непрерывна на нём $\Rightarrow \exists P_{i,\varepsilon}(x)$, что:

$$|f(x) - P_{i,\varepsilon}(x)| < \frac{\varepsilon}{(2N_\varepsilon + 1)(\beta_i - \delta_{i,\varepsilon} - \alpha_i)}$$

$$\left|\int\limits_{\alpha_i}^{\beta_i-\delta_{i,\varepsilon}} f(x) \sin \lambda x\, dx - \int\limits_{\alpha_i}^{\beta_i-\delta_{i,\varepsilon}} P_{i,\varepsilon}(x) \sin \lambda x\, dx\right| \le \int\limits_{\alpha_i}^{\beta_i-\delta_{i,\varepsilon}} |f(x) - P_{i,\varepsilon}(x)| dx < \frac{\varepsilon(\beta_i - \delta_{i,\varepsilon} - \alpha_i)}{(2N_\varepsilon + 1)(\beta_i - \delta_{i,\varepsilon} - \alpha_i)} =$$

$$= \frac{\varepsilon}{2N_\varepsilon + 1}$$

4) $\left|\int\limits_{\alpha_i}^{\beta_i-\delta_{i,\varepsilon}} P_{i,\varepsilon}(x) \sin \lambda x\, dx\right| = \left|-\frac{1}{\lambda} P_{i,\varepsilon}(x) \cos \lambda x\, dx \Big|_{\alpha_i}^{\beta_i-\delta_{i,\varepsilon}} - \int\limits_{\alpha_i}^{\beta_i-\delta_{i,\varepsilon}} P'_{i,\varepsilon}(x) \cos \lambda x\, dx\right| \le \frac{C_{i,\varepsilon}}{\lambda} \le \frac{C_i}{\lambda}$

($\exists C_i$, не зависящая от ε)

кроме того, $\exists \Lambda_\varepsilon > 0$, что $\forall \lambda > \Lambda_\varepsilon \quad \frac{C_i}{\lambda} \le \frac{\varepsilon}{2N_\varepsilon + 1} \quad \forall i = 1, 2, \dots, 2N_\varepsilon + 1$

5) $\left|\int\limits_a^{+\infty} f(x) \sin \lambda x\, dx - 0\right| = \left|\int\limits_{A_\varepsilon}^{+\infty} f(x) \sin \lambda x\, dx + \sum\limits_{i=1}^{2N_\varepsilon+1} \int\limits_{\beta_i-\delta_{i,\varepsilon}(\alpha_i)}^{\beta_i(\alpha_i+\delta_{i,\varepsilon})} f(x) \sin \lambda x\, dx + \right.$

$\left. + \sum\limits_{i=1}^{2N_\varepsilon+1} \int\limits_{\alpha_i(\alpha_i+\delta_{i,\varepsilon})}^{\beta_i-\delta_{i,\varepsilon}(\beta_i)} \big(f(x) - P_{i,\varepsilon}(x)\big) \sin \lambda x\, dx + \sum\limits_{i=1}^{2N_\varepsilon+1} \int\limits_{\alpha_i(\alpha_i+\delta_{i,\varepsilon})}^{\beta_i-\delta_{i,\varepsilon}(\beta_i)} P_{i,\varepsilon}(x) \sin \lambda x\, dx\right|$

Модуль суммы четырех слагаемых меньше либо равен суммы их модулей; а в предыдущих че – тырёх пунктах мы показали, что можно сделать эти модули меньше любого наперёд заданного положительного числа ε. ■

Лекция №22

Преобразование Фурье.

Определение:

$f(x)$ определена на R, на любом $[a, A] \subset R$ у неё конечное число точек разрыва, $\exists \int\limits_a^A |f(x)|dx$,

$\exists \lim\limits_{A\to+\infty} \int\limits_a^A |f(x)|dx$, $\exists \lim\limits_{a\to-\infty} \int\limits_a^A |f(x)|dx$, то есть $\exists \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|dx$.

$$\text{Тогда } \hat{f}(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-i\lambda x}dx \text{ называется преобразованием Фурье } \left(\text{здесь } \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-i\lambda x}dx = \right.$$

$$\left. = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cos\lambda x\, dx + i \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\sin\lambda x\, dx \right)$$

Если $\hat{f}(\lambda) -$ преобразование Фурье $f(x)$, то $\check{\hat{f}}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(x)e^{i\lambda x}d\lambda$ называется обратным

разованием Фурье.

Лемма:
$\forall f(x)$, удовлетворяющей условиям из предыдущего определения, $\hat{f}(\lambda) \in C(R)$ и $\lim\limits_{\lambda\to\infty} \left|\hat{f}(\lambda)\right| = 0$.

Доказательство:
$\lim\limits_{\lambda\to\infty} \left|\hat{f}(\lambda)\right| = 0$ по теореме Римана.

$\forall [a, A] \quad \hat{f}_{[a,A]}(\lambda) = \int\limits_a^A f(x)e^{-i\lambda x}dx$

$$\left|\hat{f}_{[a,A]}(\lambda + \Delta\lambda) - \hat{f}_{[a,A]}(\lambda)\right| \le \int\limits_a^A |f(x)|\left|e^{-i(\lambda+\Delta\lambda)x} - e^{-i\lambda x}\right|dx \le 4\int\limits_a^A |f(x)|\left|\sin\frac{x}{2}\right|dx \le 2|\Delta\lambda|\int\limits_a^A |f(x)||x|dx$$

при $\Delta\lambda \to 0 \quad 2|\Delta\lambda| \int\limits_a^A |f(x)||x|dx \to 0 \quad \Rightarrow \quad \hat{f}_{[a,A]}(\lambda) \in C(R)$

Теперь рассмотрим функциональную последовательность $\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\hat{f}_{[-n,n]}(\lambda)\right\}_{n=1}^{\infty}$

$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\hat{f}_{[-n,n]}(\lambda) \rightrightarrows \hat{f}(\lambda)$ на R по признаку Вейерштрасса, так как:

$$\left|\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\hat{f}_{[-n,n]}(\lambda) - \hat{f}(\lambda)\right| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left|\int\limits_n^{+\infty} f(x)e^{-i\lambda x}dx + \int\limits_{-\infty}^{-n} f(x)e^{-i\lambda x}dx\right| \le \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\int\limits_n^{+\infty} |f(x)|dx + \int\limits_{-\infty}^{-n} |f(x)|dx\right)$$

а эти интегралы сходятся из условия.

Итак, $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\hat{f}_{[-n,n]}(\lambda) \rightrightarrows \hat{f}(\lambda)$ на R, $\hat{f}_{[-n,n]}(\lambda) \in C(R) \Rightarrow \hat{f}(\lambda) \in C(R)$.

Теорема:
Пусть $f(x)$ удовлетворяет всем условиям определения из начала лекции и пусть в точке x_0

$\exists \lim\limits_{x\to x_0\pm 0} f(x) = f(x_0 \pm 0)$ и $\exists\delta > 0$, что $\exists \int\limits_0^{\delta} \frac{|f(x_0+t) + f(x_0-t) - f(x_0+0) - f(x_0-0)|}{t}dt \quad \Rightarrow$

$$\Rightarrow \exists \lim_{A\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-A}^{A}\hat{f}(x)e^{i\lambda x_0}d\lambda\right)=\frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}$$

Доказательство:

1) $$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-A}^{A}\hat{f}(x)e^{i\lambda x_0}d\lambda=\frac{1}{2\pi}\int_{-A}^{A}e^{i\lambda x_0}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)e^{-i\lambda t}dt\right)d\lambda=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\left(\int_{-A}^{A}e^{i\lambda(x_0-t)}d\lambda\right)dt=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\left(\frac{2\sin\big(\lambda(x_0-t)\big)}{x_0-t}\Bigg|_0^A\right)dt=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\left(\frac{\sin A\,(x_0-t)}{x_0-t}\right)dt$$

сделаем замену $\tau=x_0-t$:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-A}^{A}\hat{f}(x)e^{i\lambda x_0}d\lambda=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x_0-\tau)\frac{\sin A\,\tau}{\tau}d\tau$$

заменим τ на $(-\tau)$:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-A}^{A}\hat{f}(x)e^{i\lambda x_0}d\lambda=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x_0+\tau)\frac{\sin A\,\tau}{\tau}d\tau$$

Следовательно:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-A}^{A}\hat{f}(x)e^{i\lambda x_0}d\lambda=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\big(f(x_0+\tau)+f(x_0-\tau)\big)\frac{\sin A\,\tau}{\tau}d\tau=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\big(f(x_0+\tau)+f(x_0-\tau)\big)\frac{\sin A\,\tau}{\tau}d\tau$$

2) Вспомним, что $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin A\,\tau}{\tau}d\tau=\frac{\pi}{2}$ и запишем:

$$\left|\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\big(f(x_0+\tau)+f(x_0-\tau)\big)\frac{\sin A\,\tau}{\tau}d\tau-\frac{f(x_0+0)-f(x_0-0)}{2}*\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\sin A\,\tau}{\tau}d\tau\right|=$$

$$=\left|\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\big(f(x_0+\tau)+f(x_0-\tau)-f(x_0+0)-f(x_0-0)\big)\frac{\sin A\,\tau}{\tau}d\tau\right|$$

$$\forall\varepsilon>0\quad\exists\delta_\varepsilon>0,\text{что}\ \ \frac{1}{\pi}\int_0^{\delta_\varepsilon}\frac{|f(x_0+\tau)+f(x_0-\tau)-f(x_0+0)-f(x_0-0)|}{\tau}d\tau<\frac{\varepsilon}{2}$$

$$\text{и}\ \ \exists A_\varepsilon>0\ \ \forall A>A_\varepsilon\quad\left|\frac{1}{\pi}\int_{\delta_\varepsilon}^{A}\frac{f(x_0+\tau)+f(x_0-\tau)-f(x_0+0)-f(x_0-0)}{\tau}\sin\lambda\tau\,d\tau\right|<\frac{\varepsilon}{2}$$

(по теореме Римана)

3) $$\left|\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\big(f(x_0+\tau)+f(x_0-\tau)-f(x_0+0)-f(x_0-0)\big)\frac{\sin A\,\tau}{\tau}d\tau\right|\le$$

$$\le\left|\frac{1}{\pi}\int_0^{\delta_\varepsilon}\big(f(x_0+\tau)+f(x_0-\tau)-f(x_0+0)-f(x_0-0)\big)\frac{\sin A\,\tau}{\tau}d\tau\right|+$$

$$+\left|\frac{1}{\pi}\int_{\delta_\varepsilon}^{+\infty}\big(f(x_0+\tau)+f(x_0-\tau)-f(x_0+0)-f(x_0-0)\big)\frac{\sin A\,\tau}{\tau}d\tau\right|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.\qquad\blacksquare$$

Следствие:

Если $f(x) \in C(R)$ и удовлетворяет всем условиям теоремы и кроме того существует $\check{\hat{f}}(x)$, то

$$\check{\hat{f}}(x) \equiv f(x).$$

Доказательство:

Если существует $\check{\hat{f}}(x)$, то $\check{\hat{f}}(x) = \lim\limits_{A\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-A}^{A}\hat{f}(x)e^{i\lambda x_0}d\lambda\right)$. А так как $f(x) \in C(R)$, то, по теореме:

$$\forall x_0 \qquad \frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2} = f(x). \qquad \blacksquare$$