Некоторые факты математического анализа

Здесь представлены теоремы, которые входят в курс математического анализа 2 потока, но которые не входят в книгу С.А.Теляковского(вернее, которые я там не нашел). Номера теорем приблизительно соответствуют их возможному положению в книге.

Теорема 9.8.4 (неравенство Чебышева). Пусть $f(x)$ и $g(x)$ возрастают на $[a;b]$. Тогда

$$\int\limits_a^b f(x)dx \cdot \int\limits_a^b g(x)dx \leqslant (b-a)\int\limits_a^b f(x)g(x)dx$$

Доказательство: ◄ Пусть T - разбиение $[a;b]$: $a = x_0 \leqslant x_1 \leqslant \ldots \leqslant x_n = b$.
Воспользуемся неравенством Чебышева для суммы:

$$\sum_{k=1}^{n} f(x_n) \cdot \sum_{k=1}^{n} g(x_n) \leqslant n \sum_{k=1}^{n} f(x_n)g(x_n)$$

То есть:

$$\sum_{k=1}^{n} f(x_n)\frac{b-a}{n} \;\cdot\; \sum_{k=1}^{n} g(x_n)\frac{b-a}{n} \;\leqslant\; (b-a)\sum_{k=1}^{n} f(x_n)g(x_n)\frac{b-a}{n}$$

Пусть $\xi_k \in [x_{k-1};x_k]$, если $\xi_k = x_k$, то:

$$S_T(f,\xi)\cdot S_T(g,\xi) \leqslant (b-a)S_T(fg,\xi)$$

Если теперь устремить n в бесконечность, то получим искомую формулу. ►

==

Теорема 12.1.3. Пусть для $f(x_1,...,x_m)$ для любого k=1,...,m существует $\frac{\delta f}{\delta x_k}(x)$ и $(m-1)$ производная непрерывна в x^0. Тогда f дифференцируема в x^0

Доказательство: ◄ Докажем для случая $m = 3$. Пусть производной, непрерывность которой не предполагается является $\delta f/\delta z$.
Выберем $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ так чтобы все дальнейшие рассуждения попали в ту окрестность (x^0, y^0, z^0), в которой все производные существуют. Тогда:
$\Delta f = f(x^0+\Delta x, y^0+\Delta y, z^0+\Delta z) - f(x^0,y^0,z^0) = f(x^0+\Delta x, y^0+\Delta y, z^0+\Delta z) - f(x^0, y^0+\Delta y, z^0+\Delta z) + f(x^0, y^0+\Delta y, z^0+\Delta z) - f(x^0,y^0,z^0+\Delta z) + f(x^0,y^0,z^0+\Delta z) - f(x^0,y^0,z^0)$.
Теперь, поскольку в окрестности существует $\delta f/\delta z$, то $f(x^0+\Delta x, y^0+\Delta y, z^0+\Delta z) - f(x^0, y^0+\Delta y, z^0+\Delta z) = \frac{\delta f}{\delta x}(x^0+\theta_1\Delta x, y^0+\Delta y, z^0+\Delta z)\Delta x + \varepsilon_1(\Delta x,\Delta y,\Delta z)\Delta x$, причем $\varepsilon_1(\Delta x,\Delta y,\Delta z)\to 0$, при $\rho\to 0$
Аналогично, $f(x^0, y^0+\Delta y, z^0+\Delta z) - f(x^0,y^0,z^0+\Delta z) = \frac{\delta f}{\delta y}(x^0, y^0+\theta_2\Delta y, z^0+\Delta z)\Delta y + \varepsilon_2(\Delta y,\Delta z)\Delta y$, причем $\varepsilon_2(\Delta y,\Delta z)\to 0$, при $\rho\to 0$
Рассмотрим последнюю разность: $f(x^0,y^0,z^0+\Delta z) - f(x^0,y^0,z^0) = \frac{\delta f}{\delta z}(x^0,y^0,z^0)\Delta z + \varepsilon_3(\Delta z)\Delta z$, причем $\varepsilon_2(\Delta z)\to 0$, при $\rho\to 0$. Это равенство обусловливается тем, что $\frac{\delta f}{\delta z} = \lim\limits_{\Delta z\to 0}(f(x^0,y^0,z^0+\Delta z) - f(x^0,y^0,z^0))$.
Суммируя эти три выражения получаем, что f дифференцируема в x^0. ►

==

Теорема 12.1.4. Пусть для $f(x_1,...,x_m)$ для любого k=1,...,m существует $\frac{\delta f}{\delta x_k}(x)$. Тогда f дифференцируема в $x^0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow f(x_1^0+\Delta x_1,\ldots,x_m^0+\Delta x_m) - \sum_{k=1}^{m} f(x_1^0,\ldots,x_{k-1}^0, x_k^0+\Delta x_k, x_{k+1}^0,\ldots,x_m^0) + (m-1)f(x_1^0,\ldots,x_m^0) = \overline{\overline{o}}(\rho),$$

где $\rho = \sqrt{\sum\limits_{k=1}^{m}}$.

Доказательство: ◄ ►

Теорема 12.5.0.(Янга) Пусть обе частные производные функции $f(x,y)$: $\delta f/\delta x$ и $\delta f/\delta y$ дифференцируемы в точке (x^0,y^0). Тогда

$$\frac{\delta^2 f}{\delta x\delta y}(x^0,y^0) = \frac{\delta^2 f}{\delta y\delta x}(x^0,y^0) \tag{$*$}$$

Доказательство: ◀ Выберем h так чтобы все дальнейшие расчеты попадали в шаровую окрестность (x^0, y^0), в которой существуют и дифференцируемы обе частные производные.
Зададим $\Delta^2 f := f(x^0+h, y^0+h) - f(x^0+h, y^0) - f(x^0, y^0+h) + f(x^0, y^0)$ и $\varphi(y) := f(x^0+h, y) - f(x^0, y)$.
Тогда $\Delta^2 f = \varphi(y^0+h) - \varphi(y^0) = \frac{\delta\varphi}{\delta y}(y^0+\theta h)$, причем $0 < \theta < 1$.
Распишем: $\frac{\delta\varphi}{\delta y}(y^0+\theta h) = \frac{\delta f}{\delta y}(x^0+h, y^0+\theta h) - \frac{\delta f}{\delta y}(x^0, y^0) - \frac{\delta f}{\delta y}(x^0, y^0+\theta h) + \frac{\delta f}{\delta y}(x^0, y^0)$.
Заметим, что:

$$\frac{\delta f}{\delta y}(x^0+h, y^0+\theta h) - \frac{\delta f}{\delta y}(x^0, y^0) = \frac{\delta^2 f}{\delta x \delta y}(x^0, y^0)h + \frac{\delta^2 f}{\delta y^2}(x^0, y^0)\theta h + o(h),\ h \to 0$$

И:

$$\frac{\delta f}{\delta y}(x^0, y^0+\theta h) - \frac{\delta f}{\delta y}(x^0, y^0) = \frac{\delta^2 f}{\delta y^2}(x^0, y^0)\theta h + o(h),\ h \to 0.$$

Подставляя получившиеся выражения в исходное получим:

$$\Delta^2 f = \frac{\delta^2 f}{\delta x \delta y}h^2 + o(h^2),\ h \to 0.$$

Аналогично (поменяв x и y местами) получаем:

$$\Delta^2 f = \frac{\delta^2 f}{\delta y \delta x}h^2 + o(h^2),\ h \to 0.$$

Приравняв два последних выражения и разделив на h^2 получим:

$$\Delta^2 f = \frac{\delta^2 f}{\delta y \delta x}h^2 = \Delta^2 f = \frac{\delta^2 f}{\delta x \delta y}h^2 + o(1),\ h \to 0$$

, а это и есть условие теоремы.▶
==

$ 14.4. Выпуклые функции многих переменных.

Определение: Пусть $f(x)$ задана на выпуклом множестве D. Тогда $f(x)$ называется выпуклой(строго выпуклой) на D, если $\forall x', x'' \in D\ \forall t, 0 \leqslant t \leqslant 1 (0 < t < 1)$ верно, что

$$f(x' + t(x'' - x')) \leqslant f(x') + t(f(x'') - f(x'))$$

$$(\text{ соответственно } f(x' + t(x'' - x')) \leqslant f(x') + t(f(x'') - f(x')) \text{ })$$

Теорема: Пусть $D \subset E^m$ является открытым, выпуклым множеством, и пусть f(x) дважды дифференцируема и вторые частные производные f непрерывны на D.
1) $f(x)$ выпукла на $D \Leftrightarrow d^2 f = \sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{m} \frac{\delta^2 f}{\delta x_i \delta x_j}(x) dx_i dx_j \quad (*)$
2) Если $(*)$ положительно определена,то f - строго выпукла.
Доказательство: ◀ Введем $\varphi(t) = f(x' + t(x'' - x')) - f(x') - t(f(x'') - f(x')),\ t \in [0;1]$ и заметим, что $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$. Если $\varphi(t) \leqslant 0$, то f выпукла, и если $\varphi(t) < 0$, то f строго выпукла.
1) $\varphi''(t) = \sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{m} \frac{\delta^2 f}{\delta x_i \delta x_j}(x' + t(x'' - x'))(x_i'' - x_i')(x_j'' - x_j') = d^2 f(x' + t(x'' - x'))$
Если предположить, что $\varphi(t) > 0$ в какой либо точке интервала $(0;1)$, то по теореме Ферма $\exists t_0 \varphi'(t_0) = 0$. Так как $\varphi''(t) \geqslant 0, \forall t \in [0;1] \Rightarrow \varphi'(t)$ возрастает на $[t_0;1] \Rightarrow \varphi'(t) \geqslant 0$ на $[t_0;1] \Rightarrow \varphi(t)$ не убывает, на этом сегменте, но $\varphi(1) = 0$, а $\varphi(t) > 0$ на сегменте. Противоречие.
2) Аналогично 1). ▶