Лекции по функциональному анализу

Бахвалов А.Н.

22 января 2014 г.

Глава 1

Метрические пространства

Определение: Метрическое пространством называется пара (M, ρ), где M - множество, $\rho : M \times M \to [0, +\infty)$ - метрика, удовлетворяющая аксиомам:

1) $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
2) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$
3) $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y)$

Определение: Последовательность x_n называется сходящейся к элементу x, если $\rho(x_n, x) \to 0$. Последовательность x_n точек M называется фундаментальной в M, если $\forall \varepsilon > 0\ \exists N : \forall m, n > N\ \rho(x_n, x_m) < \varepsilon$

(Всякая сходящаяся последовательность фундаментальная)

Определение: Метрическое пространство (M, ρ) называется полным, если в нем каждая фундаментальная последовательность сходится

Определение: Нормированным пространством называется пара $(E, \|\cdot\|)$, где E - линейное пространство над $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$, а $\|\cdot\| : E \to [0, +\infty)$ удовлетворяет аксиомам:

1) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
2) $\|\alpha x\| = \|\alpha\| \cdot \|x\|$, $x \in E$, $\alpha \in \mathbb{C}$
3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Всякое нормированное пространство является метрическим относительно порожденной метрики $\rho(x, y) = \|x - y\|$

Нормированное пространство, полное относительно порожденной метрики, называется банаховым

В метрическом пространстве вводится топология, порожденная открытыми шарами $B_\varepsilon(x) = \{y | \rho(x, y) < \varepsilon\}$

Примеры метрических и нормированных пространств:

1) Дискретное пространство

M - любое множество, $\rho = \begin{cases} 0, & x = y \\ 1, & x \neq y \end{cases}$

2) Конечномерное пространство

$\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n$, $n \in \mathbb{N}$

$\|x\|_2 = \sqrt{\sum\limits_{k=1}^{n} |x_k|^2}$, $\|x\|_1 = \sum\limits_{k=1}^{n} |x_k|$, $\|x\|_\infty = \max\limits_{k} |x_k|$

3) Пространства последовательностей

$l_p = \left\{ x_n{}_{n=1}^{\infty} | \sum\limits_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty \right\}$, $\|x\|_p = \left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} |x_n|^p \right)^{1/p}$, $1 \le p < \infty$

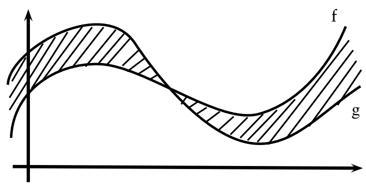
$c = l_\infty = \left\{ \{x_n\}_{n=1}^{\infty} | \sup\limits_{n} |x_n| < \infty \right\}$, $\|x\|_\infty = \sup\limits_{n} |x_n|$

$c_0 = \left\{ \{x_n\}_{n=1}^{\infty} | \lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0 \right\}$, $\|x\|_{c_0} = \max\limits_{n} |x_n|$

$c_{0,0} = \{ \{x_n\}_{n=1}^{\infty} | \exists N : \forall n > N \quad x_n = 0 \}$, $\|x\|_{c_{0,0}} = \max\limits_{n} |x_n|$

4) $C([a,b])$ - пространство непрерывных на $[a,b]$ функций с нормой $\|f\| = \max\limits_{x\in[a,b]} |f(x)|$

5) $C_1([a,b])$ - множество непрерывных функций с нормой $\|f\| = \int\limits_a^b |f(x)|dx$

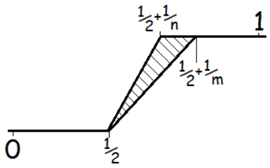


В данной метрике $\|f-g\| = \int\limits_a^b |f-g|dx$, что есть площадь фигуры

$C_1([0,1])$ не полно

$\square$ Рассмотрим функцию $f_n = \begin{cases} 0, & 0 \le x \le \frac{1}{2} \\ n(x-\frac{1}{2}), & \frac{1}{2} \le x \le \frac{1}{2} + \frac{1}{n} \\ 1, & \frac{1}{2} + \frac{1}{n} \le x_n \le 1 \end{cases}$

$\|f_n - f_m\| = \frac{1}{2}|\frac{1}{n} - \frac{1}{m}| \xrightarrow[n,m\to\infty]{} 0$



$\{f_n\}$ фундаментальна, но

$f_n(x) \to \begin{cases} 0, & x \le \frac{1}{2} \\ 1, x > \frac{1}{2} \end{cases}$ - разрывная $\blacksquare$

Определение: Пусть (M,ρ) - метрическое пространство. Его подпространством называется пара $(M_1, \rho|_{M_1\times M_1})$, где $M_1 \subset M$ (для простоты пишут просто (M_1,ρ) или M_1)

Определение: Пусть $(E, \|\cdot\|)$ - нормированное пространство, то его подпространством называется пара $(E_1, \|\cdot\|_{E_1})$, где $E_1 \subset E$, E_1 - линейное подпространство в E

Определение: Пусть (M,ρ) и (N,d) - метрические пространства. Отображение $f\colon M \to N$ называется изометрией, если:

1) f - биективно

2) $\forall x,y \in M \quad d(f(x),f(y)) = \rho(x,y)$

Изометрия переводит сходящиеся последовательности в сходящиеся, фундаментальные в фундаментальные $\Rightarrow$ два изометричных пространства либо оба полны, либо оба неполны

Определение: Отображение нормированных пространств называется изометрическим изоморфизмом, если оно является изометрией и сохраняет линейную структуру

Определение: Метрическое пространство (N, d) называется пополнением метрического пространства (M, ρ), если:
1) (N, d) - полно
2) $\exists N_1$ - всюду плотное в N и $\exists$ изометрия $f\colon (M,\rho) \to (N_1, d)$

Примеры: Любое полное пространство является своим пополнением; $\mathbb{R}$ - пополнение $\mathbb{Q}$

Лемма 1.1 Пусть (M, ρ) - полное метрическое пространство : $M_1 \subset M$. Тогда (M_1, ρ) полно тогда и только тогда, когда M_1 - замкнуто, и если M_1 не замкнуто, то $(\bar{M}_1, \rho)$ будет его пополнением
$\square \Rightarrow)$ Пусть (M_1, ρ) - полное, $x_n \in M_1$, $x \in M$, $\rho(x_n, x) \to 0$
Тогда $\{x_n\}$ фундаментальна в $M \Rightarrow$ в $M_1 \Rightarrow$ в силу полноты
$\exists y \in M_1\colon \rho(x_n, y) \to 0 \Rightarrow x = y \Rightarrow x \in M_1 \Rightarrow M_1$ замкнуто
$\Leftarrow)$ Пусть M_1 - замкнуто. Предположим, что оно не полно, т.е. $\exists \{x_n\}$ - фундаментальная в M_1, но не сходящаяся, тогда $\{x_n\}$ - фундаментальная в $M \Rightarrow \exists x \in M\colon x_n \to x \in M \setminus M_1 \Rightarrow M_1$ не замкнуто
$(+)$ Пусть M_1 не замкнуто. $\bar{M}_1$ - замкнуто, M_1 всюду плотно в M_1. По доказанному, $(\bar{M}_1, \rho)$ - полно. Все условия определения пополнения выполнены для $d = \rho$, $f(x) = x$, $N = \bar{M}_1$ ■

Лемма 1.2: Если $\{x_n\}$ - фундаментальная в метрическом пространстве M, $\exists \{n_k\}\colon x_{n_k} \to x \in M$, то $x_n \to x$
$\square$ $\rho(x_n, x) \le \rho(x_{n_k}, x) + \rho(x_n, x_{n_k})$ ■

Определение: Замкнутым шаром в метрическом пространстве называется $\bar{B}_\varepsilon(x) = \{y \in M\colon \rho(x,y) \le \varepsilon\}$

Теорема 1.1: (Принцип вложенных шаров) Метрическое пространство (M, ρ) полно т. и т. т., к. $\forall$ последовательности шаров $\bar{B}_n = \bar{B}_{r_n}(x_n)$, такой, что $\bar{B}_n \supset \bar{B}_{n+1}$, и $r_n \to 0$, $\exists$ общая точка $x \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \bar{B}_n$
$\square \Rightarrow)$ Пусть пространство полно. По неравенству треугольника $\forall n, m\colon n < m \quad \rho(x_n, x_m) \le r_n \Rightarrow \{x_n\}$ - фундаментальная последовательность, т. к. $r_n \to 0 \Rightarrow \exists x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$
$\forall n$ B_n - замкнут, $\forall m > N \quad x_m \in B_n \Rightarrow x \in \bar{B}_n \Rightarrow x \subset \bigcap\limits_n \bar{B}_n$
$\Leftarrow)$ Пусть выполнено условие на шары, $\{x_n\}$ - фундаментальная
$\forall k \quad \exists n_k\colon n, m \ge n_k \rho(x_n, x_m) \le \dfrac{1}{2^k}$, $\{n_k\}$ - возрастающая
Рассмотрим шары $\bar{B}_k = \bar{B}_{\frac{2}{2^k}}(x_{n_k})$
$\forall x \in \bar{B}_{k+1} \quad \rho(x, x_{n_k}) \le \rho(x, x_{n_{k+1}}) + \rho(x_{n_{k+1}}, x_{n_k}) \le \dfrac{2}{2^{k+1}} + \dfrac{1}{2^k} = \dfrac{2}{2^k} \Rightarrow$
$\bar{b}_{k+1} \subset \bar{B}_k \Rightarrow \exists x \in \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} \bar{B}_k$; тогда $\forall k \quad \rho(x, x_{n_k}) \le \dfrac{2}{2^k} \Rightarrow x_{n_k} \to x$
$\Rightarrow$ по лемме 1.2 $x_n \to x$ ■

Определение: Множество A в метрическом пространстве M называется нигде не плотным в M, если $\forall$ шара B в M $\exists$ шар $\bar{B}_1 \subset B\colon \bar{B}_1 \cap A = \varnothing$

Теорема 1.2: (Бэр) Пусть (M, ρ) - полное метрическое пространство, A_n - нигде не плотное в M. Тогда $C = M \setminus \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ всюду плотно в M

$\square$ Пусть B - шар в M. Т. к. A_1 нигде не плотно, то $\exists$ шар $\bar{B}_1 \subset B$ с радиусом $r_1 < \frac{1}{2}\colon \bar{B}_1 \cap A = \varnothing$

Если построены $\bar{B}_1 \supset \bar{B}_2 \supset \ldots \supset \bar{B}_{n-1}$, то в силу нигде не плотности A_n $\exists$ шар $\bar{B}_n \subset \bar{B}_{n-1}$ с радиусом $r_n < \frac{1}{n}\colon \bar{B}_n \cap A_n = \varnothing$

По теореме 1.1 $\exists x \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \bar{B}_n$. Тогда $x \in B$, $\forall x \notin A_n \Rightarrow x \in C \cap B \Rightarrow$

C всюду плотно $\blacksquare$

Следствие: Полное метрическое пространство не может быть представлено как не более чем счетное объединение нигде не плотных множеств

Теорема 1.3: (Принцип сжимающихся отображений) Пусть M - полное множество, $f\colon M \to M$, $\exists q \in (0,1)$ $\forall x, y \in M$ $\rho\left(f(x), f(y)\right) \leq q\rho(x, y)$ (сжимающееся отображение), тогда $\exists! \quad x \in M\colon f(x) = x$

$\square$ Возьмем произвольно $x_1 \in M$ и по индукции положим $x_{k+1} = f(x_k)$. Покажем, что $\{x_k\}$ - фундаментальная

Пусть $n < m \Rightarrow$ по неравенству треугольника $\rho(x_n, x_m) \leq \sum\limits_{k=n}^{m-1} \rho(x_k, x_{k+1})$, где $\rho(x_k, x_{k+1}) \leq q\rho(x_{k-1}, x_k) \leq \ldots \leq q^{n-1}\rho(x_1, x_2)$, поэтому $\rho(x_n, x_m) \leq \rho(x_1, x_2) \sum\limits_{k=n}^{m-1} q^{k-1} \leq \rho(x_1, x_2) \dfrac{q^{n-1}}{1-q} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

$\Rightarrow \{x_n\}$ - фундаментальная $\Rightarrow \exists x\colon x_n \to x$

Заметим, что f - непрерывно на M. Переходим к пределу в равенстве $x_{k+1} = f(x_k)$, получим $x = f(x)$.

Если к тому же $y = f(y)$, то $\rho(f(x), f(y)) \leq q\rho(x, y) \Rightarrow \rho(x, y) = 0$, $y = x$ $\blacksquare$

Лемма 1.3: Пусть $x_n \to x$, $y_n \to y$, тогда $\rho(x_n, y_n) \to \rho(x, y)$

$\square$ $\rho(x_n, y_n) \leq \rho(x_n, x) + \rho(x, y) + \rho(y, y_n)$

$\rho(x, y) \leq \rho(x, x_n) + \rho(x_n, y_n) + \rho(y_n, y)$

$|\rho(x, y) - \rho(x_n, y_n)| \leq \rho(x_n, x) + \rho(y_n, y)$ $\blacksquare$

Лемма 1.4: Пусть (M, ρ) и (N, d) - полные метрические пространства, M_1, N_1 - всюду плотные подмножества в M, N соответственно, f - изометрия : $M_1 \to N_1$ тогда она единственным образом продолжается до изометрии $M \to N$

$\square$ Пусть $x_n \in M_1 \to x \in M$

$\{x_n\}$ - фундаментальная $\Rightarrow$ $\{f(x_n)\}$ также фундаментальная, т. к. f - изометрия $\Rightarrow$ т. к. N полно, то $\exists y \in N\colon f(x_n) \to y$. Тогда $f(x) = y$ - единственно возможное отображение

Если $x'_n \to x$, $f(x'_n) \to y' \neq y$, то $\{\tilde{x}_n\} = \{x_1, x'_1, x_2, x'_2, \ldots\}$ сходится к x $\Rightarrow \exists \lim f\{\tilde{x}_n\} \Rightarrow y' = y$ и f доопределено корректно

Если $x', x'' \to M$, $M_1 \ni x'_n \to x'$, $M_1 \ni x''_n \to x''$, то

$\rho(x'_n, x''_n) \xrightarrow{\text{л. } 1.3} \rho(x', x'')$

$\rho(x'_n, x''_n) = d(f(x'_n), f(x''_n)) \xrightarrow{\text{л. 1.3}} d(f(x'), f(x''))$, т. е. продолженное f сохраняет расстояние

Пусть $y \in N$, тогда $\exists y_n \in N_1 \colon y_n \to y$, т. к. f - изометрия M_1 и N_1, то $\exists x_n \in M_1$ $f(x_n) = y_n$, $\{y_n\}$ - фундаментальная в $N \Rightarrow \{x_n\}$ фундаментальная в $M \Rightarrow$ в силу полноты M $\exists x \in M \colon x_n \to x$.

По построению $f(x) = y$, т. е. образ продолженного f есть все N ■

Теорема 1.4: (1) Для всякого метрического пространства существует пополнение

(2) Любые два пополнения одного метрического пространства изометричны

□ (2) Пусть (N', d') и (N'', d'') - два пополнения, $f' \colon M \to N'_1$ и $f'' \colon M \to N''_1$ - изометрии

$\Rightarrow f'' \circ (f')^{-1}$ - изометрия $N'_1 \to N''_1$

По лемме 1.4 это отображение продолжается до изометрии $N' \to N''$

(1) Пусть $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ - две фундаментальные последовательности в M. Тогда $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \rho(x_n, y_n)$

$|\rho(x_n, y_n) - \rho(x_m, y_m)| \le \rho(x_n, y_m) + \rho(y_n, y_m)$

$\{\rho(y_n, y_m)\}$ - фундаментальная $\Rightarrow \exists \lim \rho(x_n, y_n)$

На множестве всех фундаментальных последовательностей элементов M введем отношение эквивалентности $\{x_n\} \sim \{y_n\}$, если $\lim\limits_{n\to\infty} \rho(x_n, y_n) = 0$

Пусть $N = \{\{x_n\}\}|_\infty$ - множество классов эквивалентности

$d(\{x_n\}, \{y_n\}) = \lim\limits_{n\to\infty} \rho(x_n, y_n)$

Заметим, что т. к. $\rho(x_n, y_n) \le \rho(x_n, z_n) + \rho(z_n, y_n)$, то в пределе

$d(\{x_n\}, \{y_n\}) \le d(\{x_n\}, \{y_n\}) + \rho(\{z_n\}, \{y_n\})$

$\Rightarrow$ (а) отношение " $\sim$ " транзитивно; (б) в N выполнено неравенство треугольника

Заметим, что множество N_1 стационарных последовательностей (их классов эквивалентности) изометрично $M \colon x_0 \overset{f}{\longmapsto} \{x_n\}$, $x_n \equiv x_0$

Если $x = \{x_n\}$ - фундаментальная в M, $x^n \colon x^n_k = x_n$, то $d(x, x^n) = \lim\limits_{k\to\infty} \rho(x_k, x_n) \le \sup\limits_{k>n} \rho(x_k, x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \Rightarrow d(x, x^n) \to 0$

$\Rightarrow N_1$ всюду плотно в N

Проверим полноту (N, d). Пусть $x^n = \{x^n_k\}_{k=1}^\infty$, где $\{x^n\}$ - фундаментальная последовательность в N. Т. к. $\{x^k_n\}_{k=1}^\infty$ - фундаментальная, то

$\exists m_n \colon \forall k, l \ge m_n \quad \rho(x^n_k, x^n_l) < \dfrac{1}{2^n}$ и можно считать, что $m_n > m_{n-1}$

Пусть $x = \{x^k_{m_k}\}$. Покажем, что $x \in N$ и что $d(x^n, x) \to 0$

Для достаточно большого n ($n > m_k, n > m_l$) имеем:

$$\rho(x^k_{m_k}, x^l_{m_l}) \le \rho(x^k_{m_k}, x^k_n) + \rho(x^k_n, x^l_n) + \rho(x^l_n, x^l_{m_l}) \le \frac{1}{2^k} + \left(d(x^k, x^l) + \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^l}\right) + \frac{1}{2^l} \xrightarrow[k,l\to\infty]{} 0,$$ т. е. x - фундаментальная

Наконец, $d(x^n, x) = \lim\limits_{k\to\infty}(x^n_k, x^k_{m_k})$, где $\rho(x^n_k, x^k_{m_k}) \le \rho(x^n_{m_k}, x^k_{m_k}) + \rho(x^n_k, x^n_{m_k}) \le d(x^n, x^k) + o(1)_{m_k\to\infty} + \dfrac{1}{2^n} < \varepsilon$ при достаточно большом n.

Итак, (N, d) полно ■

Замечание: Любое нормированное пространство можно пополнить как метрическое

Определение: Пополнением нормированного пространства $(E, \|\cdot\|_E)$ называется банахово пространство $(F, \|\cdot\|_F)$: $\exists$ изометрический изоморфизм $E \to F_1 \subset F$, где F_1 - линейное подпространство, плотное в F

Можно проверить, что Т. 1.4 переносится на случай нормированных пространств, если ввести на пространстве фунжаментальных последовательностей линейные операции как $\alpha\{x_n\} + \beta\{y_n\} = \{\alpha x_n + \beta y_n\}$

Глава 2

Компактность в метрических пространствах

Определение: Множество в метрическом пространстве называется компактным, если из любого его покрытия открытыми множествами можно выбрать конечное покрытие

Множество называется предкомпактным, если его замыкание компактно

Лемма 2.1: Компактное множество в метрическом пространстве ограничено (лежит в нектором шаре) и замкнуто

$\square$ Пусть K - компактное множество. Фиксируем $x \in M$, тогда шары $\{B_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ покрывают K. Выберем конечное подпокрытие из шаров $B_{n_j}(x)$, $n_1 < n_2 < \ldots < n_m \Rightarrow K \subset B_{n_m}(x) \Rightarrow$ ограничено

Пусть $x \notin K \Rightarrow \forall y \in K \quad \exists$ шары $U_y \ni x$ и $V_y \ni y \colon U_y \cap V_y = \varnothing$

$\{V_y\}_{y\in K}$ покрывают K; выберем конечное подпокрытие $H \subset \bigcup\limits_{j=1}^{n} V_{y_j}$

$\Rightarrow \bigcap\limits_{j=1}^{n} U_{y_j}$ - окрестность x, не пересекающаяся с $\bigcup\limits_{j=1}^{n} V_{y_j}$ и тем более с K

$\Rightarrow x$ - внешняя точка $K \Rightarrow M \setminus K$ открыто, K - замкнуто $\blacksquare$

Определение: Множество A называется ε-сетью для множества B в метрическом пространстве M $(\varepsilon > 0)$, если $\forall x \in B \quad \exists y \in A \colon \rho(x, y) \leq \varepsilon$

Определение: Множество A в метрическом пространстве M называется вполне ограниченным, если $\forall \varepsilon > 0$ $\exists$ конечная ε-сеть для A

Определение: Метрическое пространство называется сепарабельным, если в нем есть не более чем счетное всюду плотное множество. Множество в метрическом пространстве называется сепарабельным, если оно сепарабельно как подпространство

Лемма 2.2: Если множество B в метрическом пространстве M имеет ε-сеть, то можно построить 2ε-сеть для B, состоящую из элементов B и имеющую ту же мощность

$\square$ Пусть $\{x_n\}$ - ε-сеть для B. Если для данного n множество $B \cap \bar{B}_\varepsilon(x_n)$ пусто, то выкинем x_n из сети, сеть останется ε-сетью

Для оставшихся зафиксируем $y_n \in B \cap \bar{B}_\varepsilon(x_n)$. Проверим $\{y_n\}$ - искомая

$\forall x \in B \quad \exists n\colon \rho(x, x_n) \leq \varepsilon \Rightarrow \rho(x, y_n) \leq \rho(x, x_n) + \rho(x_n, y_n) \leq 2\varepsilon$ $\blacksquare$

Лемма 2.3: Пусть $\varepsilon > 0$, $\alpha > 1$, B есть ε-сеть для A. Тогда B есть $\alpha\varepsilon$-сеть для $\bar{A}$

$\square$ $\forall x \in \bar{A} \quad \exists y \in A\colon \rho(x, y) < (\alpha - 1)\varepsilon$; $\exists z \in B\colon \rho(y, z) \leq \varepsilon$

По неравенству треугольника, $\rho(x, z) < \alpha\varepsilon$ $\blacksquare$

Следствие: Если A вполне ограничено, то $\bar{A}$ вполне ограничено

Определение: Пусть (x, τ) - топологическое пространство. Система множеств $\tau_0 < \tau$ называется базой топологии τ, если

$\forall U \subset \tau \quad \forall x \in U \quad \exists V \in \tau_0\colon x \in V \subset U$

Пример: Если (M, ρ) - метрическое пространство, то $\{B_r(x)\}_{x \in M, r > 0}$ - база топологии

Лемма 2.4: Топология сепарабельного метрического пространства имеет счетную базу

$\square$ Пусть $\{x_n\}$ - счетное всюду плотное в метическом пространстве (M, ρ). Докажем, что система $\{B_{\frac{1}{k}}(x_n)\}_k$, $n \in \mathbb{N}$ - база топологии.

Пусть $x \in M$, $U \in \tau$. Тогда $\exists r > 0\colon B_r(x) \subset U$

$\exists k\colon \frac{2}{k} < r$; $\exists n\colon \rho(x, x_n) < \frac{1}{k}$

Тогда $x \in B_{\frac{1}{k}}(x_n) \subset B_{\frac{2}{k}}(x)$

Если $\rho(x_n, y) < \frac{1}{k}$, то $\rho(x, y) \leq \rho(x, x_n) + \rho(x_n, y) < \frac{1}{k} + \frac{1}{k} = \frac{2}{k}$

Но $B_{\frac{2}{k}}(x) \subset B_r(x) \subset U$, т. е. $x \in B_{\frac{1}{k}}(x_n) \subset U$ $\blacksquare$

Лемма 2.5: Если множество A в метрическом пространстве вполне ограничено, то A сепарабельно

$\square$ Пусть $\{x_{k,j}\}_{j=1}^{j_k}$ - конечная $\frac{1}{k}$-сеть

Тогда $\{x_{kj}\}_{j=1,k=1}^{j_k,\infty}$ - всюду плотно в A $\blacksquare$

Теорема 2.1: (Линделеф) Пусть (x, τ) - топологическое пространство со счетной базой топологии $\{V_n\}_{n=1}^{\infty}$ (в частности, сепарабельная метрика)

$E \subset X$, $U_\alpha \in \tau$, $E \subset \bigcup\limits_\alpha U_\alpha$.

Тогда $\exists$ не более чем счетное подпокрытие $E \subset \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} U_{\alpha_n}$

$\square$ Если для данного n $\exists \alpha\colon V_n \subset U_\alpha$, то зафиксируем одно такое α_n, что $V_n \subset$ $\subset U_{\alpha_n}$. Если такого α нет, то не фиксируем его. Покажем, что $\exists x \subset \bigcup\limits_n U_{\alpha_n}$

Если $x \in E$, то $\exists \alpha\colon x \in U_\alpha \Rightarrow \exists n\colon x \in V_n \subset U_\alpha$

$\Rightarrow \alpha_n$ было выбрано, $x \in V_n \subset U_{\alpha_n}$ $\blacksquare$

Лемма 2.6: Множество K в метрическом пространстве M вполне ограничено т. и т. т., к. из любой последовательности его точек можно выбрать фундаментальную подпоследовательность

$\square$ $\Rightarrow$) Если в последовательности $\{x_n\}$ есть бесконечное число одинаковых членов, то утверждение верно.

Пусть это не так $\Rightarrow \exists$ бесконечное число различных $\{x_n\}$. Рассмотрим $\{y_{n,1}\}$ - конечная 1-сеть для K. Для некоторого n_1^0: на расстоянии не более 1 от $y_{n_1^0,1}$ есть бесконечное число точек x_n.

Пусть A_1 - множество точек $x_n\colon \rho(x_n, y_{n_1^0,1}) \leq 1$. A_1 - бесконечно и вполне ограничено (т.к. $A_1 \subset K$, K - вполне ограничено). Пусть $\{y_{n,2}\}$ - конечная $\frac{1}{2}$-сеть для A_1. $\exists \quad n_2^0$: множество $A_2 = \{x_n \in A_1 \colon \rho(y_{n_2^0,2,x_n}) \leq \frac{1}{2}\}$ бесконечно

По индукции $\exists$ бесконечное множество $A_j \subset A_{j-1}$:

$\exists y_{n_j^0,i} \colon \forall x \in A_j \quad \rho(y_{n_j^0,j}, x_i) \leq \dfrac{1}{2^j}$

Тогда $\forall x', x'' \in A \quad \rho(x', x'') \leq \dfrac{1}{2^{i-1}}$, взяв по индукции попарно различные $x_{n_j} \in A$, получим фундаментальную подпоследовательность

$\Leftarrow$) Пусть K - не вполне ограничено. $\exists \varepsilon > 0\colon K$ не имеет конечной ε-сети. Возьмем $x_1 \in K$ - любое. $\exists x_2 \in K\colon \rho(x_2, x_1) > \varepsilon$ (иначе $\{x_1\}$ - ε-сеть). Пусть построены $\{x_k\}_{k=1}^n \colon \forall k \neq j \quad \rho(x_k, x_j) > \varepsilon$

Тогда $\exists x_{n+1} \in k\colon \forall j = 1, \dots, n \quad \rho(x_{n+1}, x_j) > \varepsilon$, иначе $\{x_j\}_{j=1}^n$ образуют ε-сеть для K.

По индукции получается $\{x_k\}_{k=1}^\infty$ $x_k \in K$, $\forall k \neq j \quad \rho(x_k, x_j) > \varepsilon$. Из $\{x_k\}$ нельзя выбрать фундаментальную подпоследовательность ■

Теорема 2.2: Пусть M - метрическое пространство, $K \subset M$. Следующие свойства эквивалентны:

(1) K - компактно

(2) Любая бесконечная часть K имеет предельную точку

(3) Из любой последовательности элементов K можно выбрать подпоследовательность, сходящуюся к элементу K

(4) K вполне ограничено и полно как подпространство

□ (1)→(2) Пусть K_0 - бесконечная часть K, не имеющая предельной точки. $\forall x \in K \quad \exists U_x \ni x$ - ее окрестность:

U_x содержит конечное число элементов K_0. $\exists \{x_n\}\colon K_0 \subset K \subset \bigcup\limits_{n=1}^{N} U_{x_n}$

Тогда K_0 конечно. Противоречие

(2)→(3) Если $\{x_n\}$ содержит бесконечное число одинаковых членов, то утверждение верно. Если же $\{x_n\}$ содержит бесконечное число различных элементов, то в силу (2) множество $\{x_n\}$ имеет предельную точку $x_0 \in K$ и $\exists x_{n_k} \to x_0$

(3)→(4) Из любой последовательности можно выбрать сходящуюся $\Rightarrow$ фундаментальная подпоследовательность $\Rightarrow$ по лемме 2.6 множество K вполне ограничено. Пусть $\{x_n\}$ - фундаментальная последовательность элементов K. В силу (3) $\exists x_0 \in K \quad \exists \{n_k\}\colon x_{n_k} \to x_0$

По лемме 1.2 $x_n \to x_0$

(4)→(1) K -вполне ограничено $\Rightarrow$ K сепарабельно по лемме 2.5. Пусть $K \in \bigcup\limits_{\alpha} U_\alpha$, где U_α - открытое. По теореме 2.1 можно считать, что $K \subset \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} U_n$ - открытое.

Пусть нельзя выбрать конечное подпространство, тогда

$\forall n \quad \exists x_n \in K \setminus \bigcup\limits_{j=1}^{n} U_j$. Т. к. K вполне ограниченное, то по лемме 2.6 $\exists$ фундаментальная последовательность $\{x_{n_k}\}_{k=1}^\infty$

В силу полноты $\exists x_0 \in K\colon x_{n_k} \xrightarrow[k\to\infty]{} x_0$

$\exists N\colon x_0 \in U_N$, U_N - открытое; $\exists k_0\colon \forall k > k_0 \quad x_{n_k} \in U_N$

При $n_k > N$ получаем противоречие с выбором $x_{n_k} \Rightarrow$ можно выбрать конечное подпокрытие $\blacksquare$

Следствие: (Критерий Хаусдорфа) Пусть M - полное метрическое пространство, $K \subset M$. Тогда

(1) K предкомпактно $\Leftrightarrow$ K вполне ограничено

(2) K компактно $\Leftrightarrow$ K замкнуто и вполне ограничено

$\square$ (1) $\Rightarrow$) K - предкомпактно $\Leftrightarrow$ $\bar{K}$ - компактно $\Rightarrow$ $\bar{K}$ вполне ограничено $\Rightarrow$ K вполне ограничено

$\Leftarrow$) K - вполне ограничено $\Rightarrow$ $\bar{K}$ вполне ограничено

$\bar{K}$ - замкнуто $\Rightarrow$ $\bar{K}$ полно (лемма 1.1) $\Rightarrow$ $\bar{K}$ - компактно по т. 2.2

(2) $\Rightarrow$) K - компактно $\Rightarrow$ K замкнуто по лемме 2.1 и K вполне ограничено по теореме 2.2 (1$\to$4)

$\Leftarrow$) K - замкнуто

$\Rightarrow$ K полно по лемме 1.1 $\Rightarrow$ K - компактно по т. 2.2 (4$\to$1) $\blacksquare$

Определение: Семейство функций $F \subset C([a,b])$ называется равностепенно непрерывным, если $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0\colon \forall f \in F, \quad \forall x, y \in [a,b]$

$|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$

Лемма 2.7: Пусть F - конечный набор функций из $C([a,b])$. Тогда F равностепенно непрерывно

$\square$ Пусть $F = \{f_k\}_{k=1}^{\infty}$. Каждая функция $f_k(x)$ равномерно непрерывна на $[a,b]$

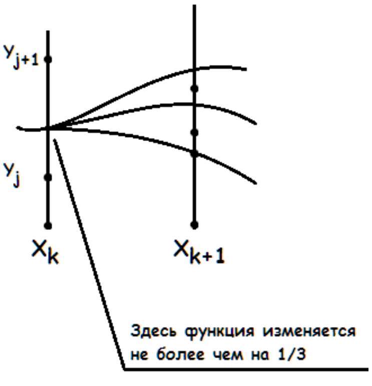
$\forall \varepsilon > 0, \forall k \quad \exists \delta_k > 0\colon \forall x, y \in [a,b] \quad |x - y| < \delta_k \Rightarrow |f_k(x) - f_k(y)| < \varepsilon$

Положим $\delta = \min\limits_{k=1,\ldots,n} \delta_k$; тогда $\delta > 0$ и если $|x - y| < \delta$, то

$|f_k(x) - f_k(y)| < \varepsilon \quad \forall k \Rightarrow F$ равностепенно непрерывно $\blacksquare$

Теорема 2.3: (Арцела) Множество $K \subset C([a,b])$ предкомпактно т. и т. т., к. K ограничено и равностепенно непрерывно

$\square$ $\Rightarrow$) Такое предкомпактное множество ограничено по лемме 2.1. Пусть $\varepsilon > 0$. По критерию Хаусдорфа K - вполне ограничено, т. е. имеет конечную $\frac{\varepsilon}{3}$-сеть $f_1, \ldots, f_n$



По лемме 2.7 $\exists \delta > 0\colon \forall k = 1, \ldots, n \quad \forall x, y \in [a,b] \quad |x - y| < \delta$

$\Rightarrow |f_k(x) - f_k(y)| < \frac{\varepsilon}{3}$

Пусть $f \in K$, тогда $\exists k\colon |f_k - f| < \frac{\varepsilon}{3}$.

Тогда, если $|x - y| < \delta$, то $|f(x) - f(y)| \le |f(x) - f_k(x)| + |f_k(x) - f_k(y)| + |f_k(y) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$

$\Leftarrow$) Рассмотрим случай функций с вещественными значениями

Пусть $c\colon \forall x \in [a,b]$, $\forall f \in K \quad |f(x)| \le c$

Пусть задано $\varepsilon > 0$. В силу равностепенной непрерывности

$\exists \delta > 0 \quad \forall f \in K \quad \forall x, y \in [a,b]\colon |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{3}$

Разобьем отрезок $[a,b]$ точками $\{x_k\}_{k=0}^n$: $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ так, чтобы $|x_{k+1} - x_k| < \delta$. Отрезок $[-c,c]$ разобьем точками $\{y_j\}_{j=0}^m$ так, чтобы $|y_{j+1} - y_j| < \frac{\varepsilon}{3}$

Рассмотрим семейство функций Φ, удовлетворяющее условиям $\forall \varphi \in \Phi$:

а) $\varphi(x_0) = y_j$ для некоторых $J = 0, \ldots, m$

б) если $\varphi(x_k) = y_j$, то $\varphi(x_{k+1}) \in \{y_{j-1}, y_j, y_{j+1}\}$

в) на $[x_k, x_{k+1}]$ φ линейно

Семейство Φ конечно (менее $(j+1)^{k+1}$ функций). Покажем, что оно образует ε-сеть для K.

Пусть $f \in K$. Выберем $\varphi \in \Phi$: $\forall k \quad |f(x_k) - \varphi(x_k)| < \frac{\varepsilon}{3}$.

Действительно, если $f(x_k) \in [y_j, y_{j+1}]$, то т. к. $|x_{k+1} - x_k| < \delta$, то

$|f(x_{k+1}) - f(x_k)| < \frac{\varepsilon}{3} \Rightarrow f(x_{k+1}) \in [y_{j-1}, y_{j+2}]$

$\Rightarrow$ выберем $\varphi(x_{k+1})$ ближайшим снизу к $f(x_{k+1})$, получим искомую φ

Но если $x \in [x_k, x_{k+1}]$, то $|f(x) - \varphi(x)| \leq |f(x_k) - \varphi(x_k)| + |f(x) - f(x_k)| + |\varphi(x) - \varphi(x_k)| \leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$

Φ образует ε-сеть и по критерию Хаусдорфа K предкомпактно ■

Определение: Расстоянием от точки x_0 до множества A в метрическом пространстве M называется $dist(x_0, A) = \inf\limits_{y \in A} \rho(x_0, y)$

Определение: Пусть E_0 - линейное подпространство в нормированном пространстве E, $\varepsilon \in [0,1)$. Элемент x_ε называется ε-перпендикуляром к E_0, если $\|x_\varepsilon\| = 1$, $dist(x_\varepsilon, E_0) \geq 1 - \varepsilon$

Лемма 2.8: (Рисс) Если E_0 - линейное подпространство в нормированном пространстве E, $\bar{E}_0 \neq E$, то $\forall \varepsilon \in (0,1)$ существует ε-перпендикуляр к E_0

□ Выберем $x_0 \in E \setminus \bar{E}_0$, тогда x_0 - внешняя точка для E_0, т. е. $dist(x_0, E_0) = d > 0$.

Возьмем $\varepsilon > 0$ и выберем $y_0 \in E_0$: $\|x_0 - y_0\| < \frac{d}{1-\varepsilon}$

Положим $x_\varepsilon = \frac{x_0 - y_0}{\|x_0 - y_0\|}$

$\|x_\varepsilon\| = \frac{1}{\|x_0 - y_0\|}\|x_0 - y_0\| = 1$

$\forall y \in E_0 \quad \|x_\varepsilon - y\| = \left\| \frac{x_0 - y_0}{\|x_0 - y_0\|} - y \right\| = \frac{1}{\|x_0 - y_0\|}\|x_0 - \underbrace{(y_0 + y\|x_0 - y_0\|)}_{\in E_0}\|$

$\|x_\varepsilon - y\| \geq \frac{d}{\|x_0 - y_0\|} > 1 - \varepsilon$ ■

Определение: Нормы $\|\cdot\|'$ и $\|\cdot\|''$ на линейном пространстве E называются эквивалентными, если $\exists c_1, c_2 > 0$: $\forall x \in E \quad c_1\|x\|' \leq \|x\|'' \leq c_2\|x\|'$

Сходимость по эквивалентным нормам совпадает, фундаментальность тоже

Теорема 2.4: Любые две нормы на конечномерном пространстве эквивалентны

□ Пусть E - n-мерное пространство. Фиксируем базис $\{e^k\}_{k=1}^n$ и рассмотрим норму $\|x\|_2 = \left\| \sum\limits_{k=1}^n x_k r^k \right\|_2 = \sqrt{\sum\limits_{k=1}^n |x_k|^2}$. Покажем, что произвольная норма $\|\cdot\|$ ей эквивалентна

Тогда $\|x\| = \left\| \sum\limits_{k=1}^{n} x_k e^k \right\|$ $\leq$(по неравенству треугольника)$\sum\limits_{k=1}^{n} |x_k|{\cdot}\|e^k\|$ $\leq$(по неравенству Коши-Буняковского)$\|x\|_2 \sqrt{\sum\limits_{k=1}^{n} \|e^k\|^2} = c_2\|x\|_2$

В частности $f(x) = \|x\|$ - непрерывная функция относительно евклидовой нормы, т. к. $|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|$

Сфера $S = \{\|x\|_2 = 1\}$ компактна в $(E, \|\cdot\|_2) \Rightarrow$ непрерывная функция f достигает на S своего минимума $c > 0$ (по 1-й аксиоме нормы), т. е. $\forall x\colon \|x\|_2 = 1$ выполнено $\|x\| \geq c$, т. е. $\forall x \quad \left\| \frac{x}{\|x\|_2} \right\| \geq c$, $\|x\| \geq c\|x\|_2$ ■

Следствие: Если $(E, \|\cdot\|)$ - нормированное пространство, E_0 - конечномерное пространство, то E_0 замкнуто

□ Возьмем в E_0 базис и зададим через него евклидову норму. По теореме 2.4 она эквивалентна исходной (суженной) норме

Пусть $x_n \in E_0$, $x_n \to x \in E$. Тогда $\{x_n\}$ - фундаментальная по исходной норме $\Rightarrow \{x_n\}$ фундаментальная по евклидовой норме, в силу полноты E_0 по евклидовой норме $\exists x_0 \in E_0\colon \|x_n - x_0\| \to 0$

Тогда $\|x_n - x_0\| \to 0 \Rightarrow$ в силу единственности предела $x_0 = x$

$\Rightarrow x \in E_0 \Rightarrow E_0$ замкнуто ■

Теорема 2.5: Пусть E - бесконечномерное нормированное пространство, $\bar{B} = \{x \in E\colon \|x\| \leq 1\}$. Тогда B не компактно

□ Построим по индукции такую последовательность $\{x_n\}$, $x_n \in B$, что $\forall n \neq k \quad \|x_n - x_k\| \geq \frac{1}{2}$

Из нее нельзя выбрать фундаментальную подпоследовательность $\Rightarrow \bar{B}$ - не компактно

Возьмем x_1, $\|x_1\| = 1$. Пусть $x_1, \ldots, x_n$ - построены. Положим $V_n = span\{x_1, \ldots, x_n\}$(линейная оболочка). Тогда V_n - конечномерное подпространство, V_n - замкнуто $V_n = \bar{V}_n \neq E$

По лемме 2.8 $\exists x_{n+1}\colon \|x_{n+1}\| = 1$, $dist(x_{n+1}, V_n) > \frac{1}{2}$. По определению $dist$ $\forall y \in V_n \quad \|x_{n+1} - y\| > \frac{1}{2}$, в частности, $\forall k \leq n \quad \|x_{n+1} - x_k\| > \frac{1}{2}$

По индукции получаем искомую последовательность ■

Было: непрерывные функции с нормой

$$\|f\|_1 = \int\limits_{[0,1]} |f(x)| dx$$

$$\|f\|_2 = \sqrt{\int\limits_{[0,1]} |f(x)|^2 dx}$$

А) Как построить пополнение:

1) пополнение в виде пространства последовательностей

2) более широкое пространство функций с той же метрикой

Интеграла Римана недостаточно, все непрерывные функции образуют неполное пространство, более общий интеграл Лебега дает полное пространство

Б) Задача о разложении в ряд Фурье

$f\colon a_n(f) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos \pi x dx$

Чем общее интеграл, тем больше функций можно разлагать

Основная идея инетгралов:

Риман: $\Delta k = \{x\colon x_{k-1} < x < x_k\}$

$S_T(f) = \sum f(\xi_k) \cdot |\Delta k|$

Лебег: $S_T(f) = \sum f(\xi_k) |\Delta k|$

$\Delta k = \{x\colon y_{k-1} \le f(x) < y_k\}$, $\xi_k \in \Delta k$

Глава 3

Системы множеств

Определение: Система множеств S называется полукольцом, если:

1) $\varnothing \in S$
2) $\forall A, B \in S \quad A \cap B \in S$
3) если $A \in S$, $A_1 \in S$, $A_1 \subset A$, то $\exists A_2, \dots, A_n \in S\colon A = \bigsqcup\limits_{k=1}^{n} A_k$

$(A = \bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k\colon A_k \cap A_j = \varnothing,\ k \neq j)$

Определение: Система множеств R называется кольцом, если:

1) $\varnothing \in R$
2) $\forall A, B \in R \quad A \cup B \in R$
3) $\forall A, B \in R \quad A \triangle B \in R$

$(A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A))$

Определение: Множество X называется единицей системы S, если $X \in S$ и $\forall A \in S$ выполняется $A \subset X$

Определение: Кольцо с единицей называется алгеброй

Определение: Кольцо (алгебра) называется σ-кольцом (σ- алгеброй), если $\forall \{A_k\},\ A_k \in R$ выполнено $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k \in R$

Пример: $S = \{[a, b], [a, b), (a, b], (a, b) | \quad \alpha \leq a \leq b \leq \beta\}$

Свойства полукольца:

1) $\varnothing = (a, a)$
2) пересечение - промежуток или пусто
3) выполнено при $n \leq 3$

$[\alpha, \beta]$ - единица $\Rightarrow S$ - не кольцо

Примеры полуколец:

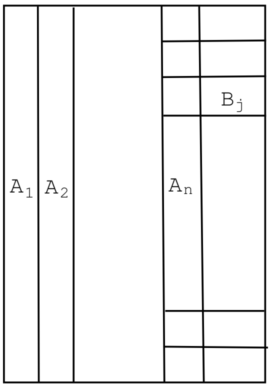
1) X - любые; $R_1 = \{\varnothing, X\}$; R_2 - все подмножества X;

R_1, R_2 - σ-алгебры с единицей X

2) $S = \{I_1 \times I_2 | \quad I_1, I_2$ - промежутки на $\mathbb{R}\}$

Лемма 3.1: Всякое кольцо является полукольцом
$\square$ Пусть $A, B \in R$, тогда $A \cap B = (A \cup B) \triangle (A \triangle B) \in R$
$A \setminus B = (A \triangle B) \cap A \in R \Rightarrow$ если $A, A_1 \in R$, $A_1 \in A$, то при $A_2 = A \setminus A_1$ имеем: $A = A_1 \sqcup A_2$ $\blacksquare$

Лемма 3.2: Пусть S - полукольцо, $A, A_1, \ldots, A_n \in S$, $A \supset \bigsqcup\limits_{k=1}^{n} A_k$. Тогда $\exists A_{n+1}, \ldots, A_l \in S\colon A = \bigsqcup\limits_{k=1}^{l} A_k$



$\square$ По индукции по n

При $n = 1$ - по 3-й аксиоме полукольца

Пусть верно для $(n-1)$ множеств и даны $A_1, \ldots, A_n \in S\colon A \supset \bigsqcup\limits_{k=1}^{n} A_k$

Тогда по предположению индукции $\exists B_1, \ldots, B_s \in$ $\in S\colon A = \bigsqcup\limits_{k=1}^{n-1} A_k \sqcup \bigsqcup\limits_{j=1}^{s} B_j$, тогда $A_n \subset \bigsqcup\limits_{j=1}^{s} B_j$

Пусть $C_j = A_n \cap B_j \in S$, тогда $A_n = \bigsqcup\limits_{j=1}^{s} C_j$, но $C_j \subset B_j$

По 3-й аксиоме полукольца $\exists D_{i,j} \in S$, $i = 1, \ldots, i_j\colon B_j = C_j \sqcup \left(\bigsqcup\limits_{j=1}^{i_j} D_{i,j} \right)$

Тогда $A = \bigsqcup\limits_{k=1}^{n-1} A_k \sqcup \bigsqcup\limits_{j=1}^{s} \left(C_j \sqcup \bigsqcup\limits_{i=1}^{i_j} D_{i,j} \right) = \bigsqcup\limits_{k=1}^{n} A_k \sqcup \left(\bigsqcup\limits_{j=1}^{s} \bigsqcup\limits_{i=1}^{i_j} D_{i,j} \right)$ $\blacksquare$

Лемма 3.3: Пусть S - полукольцо, $A_1, \ldots, A_n \in S$. Тогда $\exists \{B_j\}_{j=1}^{k}$ - попарно непересекающиеся элементы $S\colon$ каждые A_i есть объединение некоторых B_j
$\square$ По индукции по n

При $n = 1$ утверждение тривиально

Пусть для $(n-1)$ множества утверждение доказано, и даны $A_1, \ldots, A_n$. Пусть $\{B_j\}$ - набор для $A_1, \ldots, A_{n-1}$ из условия леммы

Положим $C_j = B_j \cap A_n \in S$

По 3-й аксиоме $\exists D_{i,j} \in S\colon B_j = C_j \sqcup \bigsqcup\limits_{i} D_{i,j}$

Поскольку $A_n \supset \bigsqcup\limits_{j=1}^{k} C_j$, то по лемме 3.2 $\exists E_l \in S$, $l = 1, \ldots, L$:
$A_n = \bigsqcup\limits_{j=1}^{k} C_j \sqcup \bigsqcup\limits_{l=1}^{L} E_l$

Тогда система $\{C_j, D_{i,j}, E_l\}$ - искомая для $A_1, \ldots, A_n$
$\left(\forall s < n \quad A_s = \bigsqcup\limits_{\text{по некот. } j} B_j = \bigsqcup\limits_{\text{по некот. } j} (C_j \sqcup \bigsqcup\limits_{i=1}^{i_j} D_{i,j}) \right)$ $\blacksquare$

Определение: Кольцо (алгебра, σ-алгебра) R называется наименьшим кольцом (алгеброй, σ-алгеброй), содержащим систему множеств S, если $\forall$ кольца (алгебры, σ-алгебры) R_1 из условия $R_1 \supset S$ следует, что $R_1 \supset R$

Теорема 3.1: Пусть S - полукольцо. Тогда наименьшее содержащее его кольцо $R = R(S)$ есть $R(S) = \left\{ \bigcup\limits_{j=1}^{n} A_j | \quad A_j \in S \right\} = \left\{ \bigsqcup\limits_{j=1}^{l} B_j | \quad B_j \in S \right\}$

$\square$ 1) Второе равенство следует из леммы 3.3 (если каждое A_j есть объединение некоторых B_k, то $\bigcup\limits_{j=1}^{n} A_j = \bigsqcup\limits_{k} B_k$)

2) Если R_1 - кольцо, $R_1 \supset S$, то $R_1 \supset R(s)$ по 2-й аксиоме кольца

3) Проверим, что R - кольцо

$\varnothing \in S \subset R$; Если $A', A'' \in R$, то $A' \cup A'' = \left(\bigcup\limits_{k} A'_k \right) \cup \left(\bigcup\limits_{l} A''_l \right) \in R(S)$, где $A'_k \in S$, $A''_l \in S$

Пусть теперь $A, B \in R$, $A = \bigsqcup\limits_{k=1}^{n} A_k$, $B = \bigsqcup\limits_{j=1}^{l} B_j$, $A_k \in S$, $B_j \in S$

Тогда $A \setminus B = \left(\bigsqcup\limits_{k=1}^{n} A_k \right) \setminus \left(\bigsqcup\limits_{j=1}^{l} B_j \right) = \bigsqcup\limits_{k=1}^{n} \left(A_k \setminus \bigsqcup\limits_{j=1}^{l} (B_j \cap A_k) \right) \overset{\text{л.3.2}}{=}$

$= \bigsqcup\limits_{k=1}^{n} \bigsqcup\limits_{i=1}^{i_k} C_{i,k}$, где $C_{i,k} \in S$

Наконец $\forall A', A'' \in R(S) \quad A' \triangle A'' = (A' \setminus A'') \cup (A'' \setminus A') \in R(S)$ ■

Глава 4

Меры на полукольцах и кольцах

Определение: Пусть S - полукольцо. Функция $m\colon S \to [0;+\infty)$ или $m\colon S \to [0;+\infty) \cup \{+\infty\}$ называется мерой, если $\forall A \in S$, $\forall A_1, \ldots, A_n \in S$ таких, что $A = \bigsqcup\limits_{k=1}^{n} A_k$ выполнено равенство $mA = \sum\limits_{k=1}^{n} mA_k$

Мера называется σ-аддитивной (счетно-аддитивной), если $\forall A \in S$, $A_k \in S$ таких, что $A = \bigsqcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k$ выполнено равенство $mA = \sum\limits_{k=1}^{\infty} mA_k$

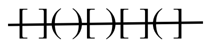
Замечание: $\sum\limits_{k=1}^{\infty} mA_k = \infty \Rightarrow \exists k\colon mA_k = \infty$

$\sum\limits_{k=1}^{\infty} mA_k = +\infty \Leftrightarrow \exists k\colon mA_k = +\infty$ или ряд расходится

Примеры:

1. S - полукольцо промежутков $m[a,b] = [a,b) = m(a,b] = m(a,b) = b - a$ (стандартная мера на полукольце промежутков)

Расставим по порядку:
$a_1 \leq b_1 \leq a_2 \leq b_2 \leq \ldots \leq a_n \leq b_n$



Если $b_k < a_{k+1}$, то $A \neq \bigsqcup\limits_{k} A_k \Rightarrow b_k = a_{k+1}$

$\Rightarrow$ тогда $\sum\limits_{k} (b_k - a_k) = (b_k - a_1)$

2. S - полукольцо промежутков, φ - неубывающая непрерывная функция $m_\varphi[a,b] = m_\varphi[a,b) = m_\varphi(a,b] = m_\varphi(a,b) = \varphi(b) - \varphi(a)$ (мера Стилтьеса)

3. Дискретные меры

X - множество, R - σ-алгебра всех его подмножеств, X_k - точки из X (конечный или счетный набор) $a_k \geq 0$, $\forall A \subset X \quad mA = \sum\limits_{k\colon X_k \in A} a_k$

Тогда m - σ-аддитивная мера

Теорема 4.1: Пусть m - мера на полукольце S. Тогда существует единственное ее продолжение до меры на $R(S)$ (обычно обозначается той же буквой)

□ Пусть m - мера на S. $A \in R(S)$, по т. 3.1 $\exists A_k \in S$, $A = \bigsqcup_{k=1}^{n} A_k$. Тогда $mA \overset{def}{=} \sum\limits_{k=1}^{n} mA_k$ - единственно возможное продолжение

Корректность: пусть к тому же $\exists B_j \in S \colon A = \bigsqcup\limits_{j=1}^{l} B_j$

Положим $C_{k,j} = A_k \cap B_j \in S$. Тогда $A_k = \bigsqcup\limits_{j=1}^{l} C_{k,j}$, $B_j = \bigsqcup\limits_{k=1}^{n} C_{k,j}$

Тогда $\sum\limits_{k=1}^{n} mA_k = \sum\limits_{k=1}^{n} \left(\sum\limits_{j=1}^{l} mC_{k,j} \right) = \sum\limits_{j=1}^{l} \left(\sum\limits_{k=1}^{n} mC_{k,j} \right) = \sum\limits_{j=1}^{l} mB_j$

Пусть $C, C_k \in R(S)$, $C = \bigsqcup\limits_{k=1}^{n} C_k$

$\exists A_{k,j} \in S \colon C_k = \bigsqcup\limits_{j=1}^{k} A_{k,j}$ тогда $C = \bigsqcup\limits_{k=1}^{n} \bigsqcup\limits_{j=1}^{j_k} A_{k,j}$

$mC = \sum\limits_{k=1}^{n} \sum\limits_{j=1}^{j_k} mA_{k,j} = \sum\limits_{k=1}^{n} mC_k$ ■

Теорема 4.2: Пусть m - σ-аддитивная мера на полукольце S. Тогда ее продолжение на минимальное кольцо $R(S)$ - σ-аддитивная мера

□ Пусть $A \in R(S)$, $A_n \in R(S)$, $A = \bigsqcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$

$\exists C_k \in S \colon A = \bigsqcup\limits_{k=1}^{l} C_k$, $\exists B_{n,j} \in S \colon A_n = \bigsqcup\limits_{j=1}^{j_n} B_{n,j}$ (по теореме 3.1)

Положим $D_{k,n,j} = C_k \cap B_{n,j} \in S$, тогда $C_k = \left(\bigsqcup\limits_{n} \bigsqcup\limits_{j=1}^{j_n} B_{n,j} \right) \cap C_k =$
$= \bigsqcup\limits_{n=1}^{\infty} \bigsqcup\limits_{j=1}^{j_m} D_{k,n,j}$

$mC_k = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \sum\limits_{j=1}^{j_n} mD_{k,n,j}$

С другой стороны, $B_{n,j} = \bigsqcup\limits_{k=1}^{l} D_{k,n,j}$, т. е. $mB_{n,j} = \sum\limits_{k=1}^{l} mD_{k,n,j}$

Тогда $mA = \sum\limits_{k=1}^{l} mC_k = \sum\limits_{k=1}^{l} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \sum\limits_{j=1}^{j_n} mD_{k,n,j} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \sum\limits_{j=1}^{j_n} \left(\sum\limits_{k=1}^{l} mD_{k,n,j} \right) =$
$= \sum\limits_{n=1}^{\infty} \sum\limits_{j=1}^{j_n} mB_{n,j} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} mA_n$ ■

Теорема 4.3: Пусть m - мера на полукольце S

(а) Если $A_n \in S$, $A \in S$, $\bigsqcup\limits_{n} A_n \subset A$, то $\sum\limits_{n} mA_n \leq mA$

(б) Если $A_n \in S$, $A \in S$, $A \subset \bigcup\limits_{n=1}^{N} A_n$, то $mA \leq \sum\limits_{n=1}^{N} mA_n$

□ (а) Если $\bigsqcup\limits_{n=1}^{N} A_n \subset A$, то по лемме 3.1 $\exists A_{N+1}, \ldots, A_M \in S \colon A = \bigsqcup\limits_{n=1}^{M} A_n$

По определению меры $mA = \sum\limits_{n=1}^{M} mA_n \geq \sum\limits_{n=1}^{N} mA_n$. Если же $\bigsqcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \subset A$, то $\forall N \quad \bigsqcup\limits_{n=1}^{N} A_n \subset A$, по доказанному $\sum\limits_{n=1}^{N} mA_n \leq mA$.

При $N \to \infty$ в пределе $\sum\limits_{n=1}^{\infty} mA_n \leq mA$

(б) Пусть даны A и A_n. По лемме 4.2 $\exists$ попарно непересекающиеся $B_j \in S$ и конечные множества $P_n \subset \mathbb{N}$, $n = 0, 1, \ldots, N$: $A = \bigsqcup\limits_{j \in P_0} B_j$, $A_n = \bigsqcup\limits_{j \in P_n} B_j$

Т. к. $A \subset \bigcup\limits_{n=1}^{N} A_n$, то $\forall j \in P_0 \quad \exists n \leq 1 \colon j \in P_n$

$mA = \sum\limits_{n=1}^{N} \left(\sum\limits_{j \in P_n} mB_j \right) = \sum\limits_{n=1}^{N} mA_n$ (каждое слагаемое в левой сумме хотя бы раз входит в правую) $\blacksquare$

Теорема 4.4: Пусть m - мера на полукольце S. m σ-аддитивна т. и т. т. к. $\forall A, A_n \in S$ таких, что $A \subset \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ выполнено неравенство $A \leq \sum\limits_{n=1}^{\infty} mA_n$

$\square$ ($\Leftarrow$) Пусть $A, A_n \in S$, $A = \bigsqcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$

$A \supset \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \Rightarrow mA \leq \sum\limits_{n=1}^{\infty} mA_n$ по т. 4.3(а)

$A \subset \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \Rightarrow mA \leq \sum\limits_{n=1}^{\infty} mA_n$ по условию $mA = \sum\limits_{n=1}^{\infty} mA_n$, m σ-аддитивная

($\Rightarrow$) Продолжим меру m на кольцо $R(S)$. По т. 4.2 получим σ-аддитивную меру

Пусть $A \subset \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$, $A, A_n \in S$. Рассмотрим $B_n = \left(A_n \setminus \bigcup\limits_{k=1}^{n-1} A_k \right) \cap A \in$ $\in R(S)$

Тогда $A = \bigsqcup\limits_{n=1}^{\infty} B_n$ ($\forall x \in A \quad \exists$ минимальное $n \colon x \in A_n$, тогда $x \in B_n$)

В силу σ-аддитивности $mA = \sum\limits_{n=1}^{\infty} mB_n \leq \sum\limits_{n=1}^{\infty} mA_n$ $\blacksquare$

Определение: Мера m на полукольце S называется непрерывной снизу, если $\forall A, A_n \in S$ таких, что $A_n \subset A_{n+1}$, $A = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ выполнено

$mA = \lim\limits_{n \to \infty} mA_n$

Определение: Мера m на полукольце S называется непрерывной сверху, если $\forall A, A_n \in S$ таких, что $A_n \supset A_{n+1}$, $A = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ выполнено

$mA = \lim\limits_{n \to \infty} mA_n$

Теорема 4.5: Мера m на кольце R σ-аддитивна т. и т. т. к. m непрерывна снизу

($\Rightarrow$) Пусть $A, A_n \in R$, $A_n \subset A_{n+1}$, $A = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$. Положим $B_1 = A_n$, $B_n = A_n \setminus A_{n-1} \in R$ $(n \geq 2)$

Тогда $\forall n \quad A_n = \bigsqcup\limits_{k=1}^{n} B_k$, $A = \bigsqcup\limits_{k=1}^{\infty} B_k$

По определению суммы ряда $mA = \sum\limits_{k=1}^{\infty} mB_k = \lim\limits_{n \to \infty} \sum\limits_{k=1}^{n} mB_k = \lim\limits_{n \to \infty} mA_n$

($\Leftarrow$) Пусть $A = \bigsqcup\limits_{n=1}^{\infty} B_k$, $B_k \in R$, $A \in R$. Положим $A_n = \bigsqcup\limits_{k=1}^{n} B_k$, тогда $A_n \in R$, $mA_n = \sum\limits_{k=1}^{n} mB_k$, $A_n \subset A_{n+1}$

$A = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_n$. Тогда $mA = \lim\limits_{n\to\infty} mA_n = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} mB_k = \sum\limits_{k=1}^{\infty} mB_k$ ■

Следствие: (а) Пусть m σ-аддитивная мера на кольце R, $A_n, A \in R$, $A_n \supset A_{n+1}$, $A = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ и $mA_1 < \infty$ (тогда $\forall n \quad mA_n < +\infty$)

Тогда $mA = \lim\limits_{n\to\infty} mA_n$

(б) Конечная σ-аддитивная мера на кольце непрерывна сверху

□ (а) Положим $B_n = A_1 \setminus A_n$, $B = A_1 \setminus A$. Тогда $B_n \in R$, $B \in R$, $B_n \subset B_{n+1}$

$B = A_1 \setminus \left(\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} (A_1 \setminus A_n) = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} B_n$

По т. 4.5 $mB = \lim\limits_{n\to\infty} mB_n$

$A_1 = A_n \sqcup B_n = B \sqcup A$

$mA_1 = mA_n + mB_n = mB + mA$

$mA_1 - mA_n = mB_n$

$mA_1 - mA = mB$

$mA_1 - mA = \lim\limits_{n\to\infty} (mA_1 - mA_n) \Rightarrow mA = \lim\limits_{n\to\infty} mA_n$

(б) Следует из (а), т. к. в случае конечной меры $A_1 < +\infty$ для любой последовательности такого вида ■

Теорема 4.6: Стандартная мера на полукольце промежутков в $\mathbb{R}$ σ-аддитивна

□ По т. 4.3(а) достаточно доказать, что если $I = \bigsqcup\limits_{n=1}^{\infty} I_n$, $I, I_n \in S$, то

$mI \leq \sum\limits_{n=1}^{\infty} mI_n$

Пусть в начале I - конечный промежуток с концами a и b

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists [a', b'] \in I \colon mI - m[a', b'] < \frac{\varepsilon}{2}$ и $\forall n \quad \exists$ интервал $J_n \supset I_n$: $mJ_n - mI_n < \dfrac{\varepsilon}{2^{n+1}}$

Тогда $[a', b'] \subset \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} J_n$. Тогда $\exists N \colon [a', b'] \subset \bigcup\limits_{n=1}^{N} J_n$

По т. 4.3(б) $m[a', b'] \leq \sum\limits_{n=1}^{N} mJ_n$

$mI - \frac{\varepsilon}{2} \leq \sum\limits_{n=1}^{N} \left(mI_n + \dfrac{\varepsilon}{2^{n+1}}\right) \leq \sum\limits_{n=1}^{\infty} mI_n + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\varepsilon}{2^{n+1}} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} mI_n + \dfrac{\varepsilon}{2}$

$mI \leq \sum\limits_{n=1}^{\infty} mI_n + \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ - любое; $mI \leq \sum\limits_{n=1}^{\infty} mI_n$

Пусть I - бесконечный промежуток. Если $\exists n \colon I_n$ - бесконечен, то утверждение верно.

Предположим, что все I_n конечны и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} mI_n = C < +\infty$

$\exists N \colon mI \cap [-N; N] > C + 1$

$I \cap [-N, N] = \bigsqcup\limits_{n=1}^{\infty} I_n \cap [-N, N]$, где $\sum\limits_{n=1}^{\infty} m\left(I_n \cap [-N, N]\right) \leq \sum\limits_{n=1}^{\infty} mI_n < C$

$m\left(I \cap [-N, N]\right) > C + 1$, что противоречит уже разобранному случаю ■

Глава 5

Продолжение меры по Лебегу

Далее S - полукольцо с единицей X, m σ-аддитивная мера на S, причем $mX < +\infty$

Определение: Внешней мерой Лебега множества $A \subset X$ называется
$\mu^* A = \inf\limits_{\{A_k\}\colon A_k \in S} \sum\limits_k m A_k$, $A \in \bigcup\limits_k A_k$ - конечные или счетные покрытия
$\forall A \subset X\colon \mu^* A$ определена и конечна

Теорема 5.1: Если $A \subset X$, $A_n \subset X$, $A \subset \bigcup\limits_n A_n$, то $\mu^* A \le \sum\limits_n \mu^* A_n + \dfrac{\varepsilon}{2^n}$

$\square$ Пусть $\varepsilon > 0$. $\forall n \quad \exists I_{n,k} \in S\colon A_n \subset \bigcup\limits_k I_{n,k}$ и $\sum\limits_k m I_{n,k} < \mu^* A_n + \dfrac{\varepsilon}{2^n}$

Но тогда $A \subset \bigcup\limits_n \bigcup\limits_k I_{n,k}$; тогда по определению $\mu^* A \le \sum\limits_n \sum\limits_k m I_{n,k} <$ $< \sum\limits_n \left(\mu^* A_n + \dfrac{\varepsilon}{2^n} \right) < \left(\sum\limits_n \mu^* A_n \right) + \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ - любое
$\Rightarrow A \le \sum \mu^* A_n$ $\blacksquare$

Следствие: Если $A \subset X$, $B \subset X$, то $|\mu^* A - \mu^* B| \le \mu^*(A \triangle B)$
$\square$ $A \subset B \cup (A \triangle B)$
$B \subset A \cup (A \triangle B)$
$\mu^* A \le \mu^* B + \mu^*(A \triangle B)$
$\mu^* B \le \mu^* A + \mu^*(A \triangle B)$ $\blacksquare$

Замечание: μ^* вообще говоря не является мерой на σ-алгебре всех подмножеств в X

Определение: Множество $A \subset X$ назывется измеримым (по Лебегу), если $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists B_\varepsilon \in R(S)\colon \mu^*(A \triangle B_\varepsilon) < \varepsilon$ $(A \in \mathfrak{M})$

Определение: Мерой Лебега измеримого множества называется его внешняя мера $\mu A = \mu^* A$

Лемма 5.1: (а) Если $\mu^* A = 0$, то $A \in \mathfrak{M}$

(б) Если $A \in R(S)$, то $A \in \mathfrak{M}$ и $\mu A = \mu^* A = mA$

$\square$ (а) $\forall \varepsilon > 0$ возьмем $B_\varepsilon = \varnothing \in R(S)$. Тогда $\mu^*(A \triangle B_\varepsilon) = \mu^* A = 0 < \varepsilon$

(б) $\forall \varepsilon > 0$ возьмем $B_\varepsilon = A$. Тогда $\mu^*(A \triangle A) = \mu^* \varnothing = 0 \Rightarrow A \in \mathfrak{M}$

Если $A \subset \bigcup\limits_n I_n$, $I_n \in S$, то $mA \leq \sum\limits_n mI_n$, по т. 4.4 (мера m σ-аддитивная)

$\Rightarrow mA \leq \mu^* A = \mu A$

Обратно, т. к. $A = \bigsqcup\limits_{k=1}^{n} B_k$, $B_k \in S$, то по т. 4.1 $mA = \sum\limits_{k=1}^{n} mB_k \geq \mu^* A$

(т. к. $\bigsqcup\limits_k B_k$ - одно из возможных покрытий A элементами S) $\blacksquare$

Определение: Мера m на полукольце S называется полной, если

$\forall A \in S\colon mA = 0$ и $\forall B \subset A$ выполнено, что $B \in S$ (тогда $mB = 0$, т. к. $mB \leq mA$)

Следствие: Мера Лебега полна

$\square$ Если $A \in \mathfrak{M}$, $\mu A = 0$, $B \subset A$, то по т. 5.1 $\mu^* B \leq \mu^* A = \mu^* B = 0 \Rightarrow$ по л. 5.1 $B \in \mathfrak{M}$ $\blacksquare$

Теорема 5.2: Система измеримых множеств $\mathfrak{M}$ является алгеброй

$\square$ (1) $X \in \mathfrak{M}$ по л. 5.1(б)

(2) Пусть $A_1, A_2 \in \mathfrak{M}$, $\varepsilon > 0$

$\exists B_1, B_2 \in R(S)\colon \mu^*(A_k \triangle B_k) < \frac{\varepsilon}{2}$; $k = 1, 2$

Заметим, что $(A_1 \cup A_2) \triangle (B_1 \cup B_2) \subset (A_1 \triangle B_1) \cup (A_2 \triangle B_2)$ $(*)$

По т. 5.1 $\mu^*\left((A_1 \cup A_2) \triangle (B_1 \cup B_2)\right) \leq \mu^*(A_1 \triangle B_1) + \mu^*(A_2 \triangle B_2) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

Но $B_1 \cup B_2 \in R(S) \Rightarrow A_1 \cup A_2 \in \mathfrak{M}$

(3) Если $A \in \mathfrak{M}$, $B \in R(S)$, то $X \setminus B \in R(S)$ и $A \triangle B = (X \setminus A) \triangle (X \setminus B)$ $\Rightarrow X \setminus A \in \mathfrak{M}$. Если $A_1, A_2 \in \mathfrak{M}$, то

$A_1 \cap A_2 = x \setminus ((X \setminus A_1) \cup (X \setminus A_2)) \in \mathfrak{M}$

$A_1 \setminus A_2 = A_1 \cap (X \setminus A_2) \in \mathfrak{M}$

$A_1 \triangle A_2 = (A_1 \setminus A_2) \cup (A_2 \setminus A_1) \in \mathfrak{M}$ $\blacksquare$

Теорема 5.3: Мера Лебега μ есть σ-аддитивная мера на $\mathfrak{M}$

$\square$ (1) Докажем, что μ - мера. Пусть $A_1, A_2 \in \mathfrak{M}$, $A_1 \cap A_2 = \varnothing$

$\exists B_1, B_2 \in R(S)\colon \mu^*(A_k \triangle B_k) < \varepsilon$

Тогда в силу (*) $\mu^*\left((A_1 \cup A_2) \triangle (B_1 \cup B_2)\right) < 2\varepsilon$

По следствию из т. 5.1 $|\mu^* A_k - \mu^* B_k| = |\mu A_k - \mu B_k| < \varepsilon$

$|\mu^*(A_1 \cup A_2) - \mu^*(B_1 \cup B_2)| = |\mu(A_1 \cup A_2) - m(B_1 \Cup B_2)| < 2\varepsilon$

Заметим, что т.к $A_1 \cap A_2 = \varnothing$, то $B_1 \cap B_2 \subset (A_1 \triangle B_1) \cup (A_2 \triangle B_2)$

Поэтому $m(B_1 \cap B_2) = \mu^*(B_1 \cap B_2) \leq \mu^*(A_1 \triangle B_1) + \mu^*(A_2 \triangle B_2) < 2\varepsilon$

Т.к. m - мера на $R(S)$, то $mB_1 + mB_2 = m(B_1 \setminus B_2) + m(B_1 \cap B_2) + m(B_2 \setminus \setminus B_1) + m(B_1 \cap B_2) = m(B_1 \cup B_2) + m(B_1 \cap B_2)$

Надо доказать, что $\mu(A_1 \sqcup A_2) = \mu A_1 + \mu A_2$

По т. 5.1 $\mu(A_1 \sqcup A_2) \leq \mu A_1 + \mu A_2$

Обратно, $\mu(A_1 \sqcup A_2) \geq m(B_1 \cup B_2) - 2\varepsilon = m(B_1) + m(B_2) - m(B_1 \cap B_2) - 2\varepsilon \geq \geq mB_1 + mB_2 - 4\varepsilon \geq \mu A_1 + \mu A_2 - 6\varepsilon$

Т. к. $\varepsilon > 0$ - любое, то $\mu(A_1 \sqcup A_2) \geq \mu A_1 + \mu A_2$. Т. к. $\mathfrak{M}$ - алгебра, то по индукции $\forall n \quad \mu(\bigsqcup\limits_{k=1}^{n} A_k) = \sum\limits_{k=1}^{k} \mu A_k$

(2) По т. 4.4 σ-аддитивность меры эквивалентна тому, что если

$A \subset \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$, то $\mu A \leq \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu A_n$. Но для меры Лебега это неравенство верно по т. 5.1 ■

Теорема 5.4: Система измеримых множеств $\mathfrak{M}$ является σ-алгеброй

□ Пусть $A = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$, $A_n \in \mathfrak{M}$. Т. к. $\mathfrak{M}$ - алгебра, то $B_n = A_n \setminus \bigcup\limits_{k=1}^{n-1} A_k \in \mathfrak{M}$ и $A = \bigsqcup\limits_{n=1}^{\infty} B_n$

Тогда по т. 5.3 и 5.2 $\forall N \quad \mu^* A \geq \mu^*(\bigsqcup\limits_{n=1}^{N} B_n) = \mu(\bigsqcup\limits_{n=1}^{N} B_n) = \sum\limits_{n=1}^{N} \mu B_n$, т.е. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu B_n < +\infty$

Пусть задано $\varepsilon > 0$. Зафиксируем N так, чтобы $\sum\limits_{n=N+1}^{\infty} \mu B_n < \frac{\varepsilon}{2}$.

Положим $C = \bigsqcup\limits_{n=1}^{N} B_n$, $D = \bigsqcup\limits_{n=N+1}^{\infty} B_n$, $A = C \sqcup D$

Тогда по т. 5.2 $C \in \mathfrak{M}$, по т. 5.1 $\mu^* D \leq \sum\limits_{n=N+1}^{\infty} \mu B_n < \frac{\varepsilon}{2}$

Тогда $\exists C_\varepsilon \in R(S)$: $\mu^*(C \triangle C_\varepsilon) < \frac{\varepsilon}{2}$. Тогда $A \triangle C_\varepsilon \subset (C \triangle C_\varepsilon) \cup D$ и по т. 5.1 $\mu^*(A \triangle C_\varepsilon) \leq \mu^*(C \triangle C_\varepsilon) + \mu^* D < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

$\Rightarrow A \in \mathfrak{M}$ по определению ■

Пример: Стандартная мера на полукольце промежутков $[A, B]$

Если G - открытое, то $G = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} (a_n, b_n) \in \mathfrak{M}$

Если F - замкнутое, то $F = X \setminus (X \setminus F) \in \mathfrak{M}$

Определение: Мера m на полукольце S с единицей X называется σ-конечной, если $\exists X_n \in S$: $mX_n < +\infty$, $X = \bigsqcup\limits_{n=1}^{\infty} X_n$, $mX = +\infty$

Пример: m - стандартная мера на всех промежутках прямой

$\mathbb{R} = \bigsqcup\limits_{n \in \mathbb{Z}} [n, n+1)$

Определение: Пусть m - σ-конечная мера на полукольце S с единицей X, $X = \bigsqcup\limits_{n=1}^{\infty} X_n$, $X_n \in S$, $mX_n < +\infty$

Множество $A \subset X$ называется измеримым по Лебегу, если $\forall n \quad A \cap X_n$ измеримо по Лебегу (относительно сужения меры). Его мерой Лебега называется $\mu A = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu(A \cap X_n)$

Теорема 5.5: (без доказательства) Определение измеримости меры Лебега в случае σ-конечных мер корректно

Мера Лебега есть σ-аддитивная мера на σ-алгебре всех измеримых множеств

Глава 6

Измеримые функции

Определение: Измеримым пространством называется пара (X, M), где X - множество, M - σ-алгебра с единицей X

Определение: Пусть (X, M_x) и (Y, M_Y) - два измеримых пространства. Функция $f\colon X \to Y$ называется (M_X, M_Y)-измеримой, если $\forall B \in M_y$
$f^{-1}(B) = \{x \in X \colon f(x) \in B\} \in M_X$

Определение: Борелевской σ-алгеброй $\mathcal{B}$ на $\mathbb{R}$ (более общо, на любом топологическом пространстве) называется наименьшая σ-алгебра с единицей $\mathbb{R}$, содержащая все открытые множества

Замечание: Если в определении измеримой функции $Y = \mathbb{R}$, то по умолчанию считаем, что $M_Y = \mathcal{B}$

Лемма 6.1: Пусть $f\colon X \to Y$, M - σ-алгебра с единицей X
Тогда $Q = \{B \subset Y \colon f^{-1}(B) \in M\}$ есть σ-алгебра
$\square$ $f^{-1}(Y) = \{x\colon f(x) \in Y\} = Y \in M \Rightarrow Y$ - единица Q
Если $f^{-1}(\bigsqcup\limits_k B_k) = \{x\colon f(x) \in \bigsqcup\limits_k B_k\} = \bigsqcup\limits_k \{x\colon f(x) \in B_k\} = \{\bigcup\limits_k f^{-1}(B_k)\}$
$\Rightarrow$ если $B_k \in Q$, то $\bigcup\limits_k B_k \in Q$
(если $B_k \in Q$, то $f^{-1}(B_k) \in M \Rightarrow \bigsqcup\limits_k f^{-1}(B_k) \in M \Leftrightarrow f^{-1}(\bigcup\limits_k B_k) \in M$)
Если $B_1, B_2 \in Q$, то $f^{-1}(B_1 \triangle B_2) = \{x\colon f(x) \in B_1 \triangle B_2\} =$
$= \{x\colon f(x) \in B_1\} \triangle \{x\colon f(x) \in B_2\} = f^{-1}(B_1) \triangle f^{-1}(B_2) \Rightarrow B_1 \triangle B_2 \in Q$ $\blacksquare$

Теорема 6.1: Пусть (X, M) - измеримое пространство, $f\colon X \to \mathbb{R}$. Функция f измерима (т. е. $(M, \mathcal{B})$ - измерима) т. и т. т. к. $\forall c \in \mathbb{R}$
$f^{-1}\left((c; +\infty)\right) = \{x\colon f(x) > c\} \in M$
$\square$ $(\Rightarrow)$ Верно, т. к. $(c; +\infty)$ - открытое $\Rightarrow (c; +\infty) \in \mathcal{B}$
$(\Leftarrow)$ Рассмотрим $Q = \{B\colon f^{-1}(B) \in M\}$
По л. 6.1 Q - σ-алгебра с единицей $\mathbb{R}$ и по условию $(c; +\infty) \in Q$
Тогда $\forall c \quad [c; +\infty) = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} (c - \frac{1}{n}; +\infty) \in Q$
$(a; b) = (a; +\infty) \setminus [b; +\infty) \in Q$; $(-\infty; b) = \mathbb{R} \setminus [b; +\infty) \in Q$

Но открытое множество есть не более чем счетное объединение открытых промежутков $\Rightarrow \forall$ открытого G имеем, что $G \in Q$

По определению $\mathcal{B} \subset Q$ (т. к. $\mathcal{B}$ - минимальная), т. е. $\forall B \in \mathcal{B}$

$f^{-1}(B) \in M$ ■

Свойства измеримых функций:

Фиксируем измеримое пространство (X, M) и рассмотрим $f\colon X \to \mathbb{R}$

1) Пусть $E \subset X$, $\chi_E(x) = \begin{cases} 1, & x \in E \\ 0, & x \notin E \end{cases}$

χ_E измерима $\Leftrightarrow E \in M$

□ $\chi_E^{-1}\left((c; +\infty)\right) = \begin{cases} \varnothing, & c \geq 1 \\ E, & 0 \leq c < 1 \\ x, & c < 0 \end{cases}$

Но $\varnothing \in M$, $x \in M$ ■

Пример: $X = \mathbb{R}$, $M \in \mathfrak{M}$, $E = \mathbb{Q} = \{q_n\}_{n=1}^{\infty} = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \{q_n\}$ - одноточечное, замкнутое $\Rightarrow$ измеримо $\Rightarrow \mathbb{Q} \in \mathfrak{M}$

Поэтому функция Дирихле измерима

2) Если f - измерима, $a \in \mathbb{R}$, то $f(x) + a$ и $af(x)$ - измеримы

□ $\{x\colon f(x) + a > c\} = \{x\colon f(x) > c - a\}$

$a > 0$: $\{x\colon af(x) > c\} = \{x\colon f(x) > \frac{c}{a}\}$

$a < 0$: $\{x\colon af(x) > c\} = \{x\colon f(x) < \frac{c}{a}\}$

$a = 0$: $af(x) \equiv 0 \quad \chi = \varnothing \overset{(1)}{\Rightarrow}$ измеримое ■

3) Если f и g измеримы, то $E_1 = \{x\colon f(x) > g(x)\} \in M$,

$E_2 = \{x\colon f(x) < g(x)\} \in M$, $E_3 = \{x\colon f(x) = g(x)\} \in M$

□ $\mathbb{Q} = \{q_n\}_{n=1}^{\infty}$

Тогда $E_1 = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \left(\{x\colon f(x) > q_n\} \cap \{x\colon g(x) < q_n\}\right)$

Поэтому $E_1 \in M$. Аналогично $E_2 \in M$

$E_3 = X \setminus (E_1 \cup E_2) \in M$ ■

4) Если f и g - измеримы, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, то $\alpha f + \beta g$ измерима

□ В силу (2) достаточно рассмотреть случай $\alpha = \beta = 1$

$\{x\colon f(x) + g(x) > c\} = \{x\colon f(x) > c - g(x)\}$

Функция $c - g(x)$ измерима по свойству 2, тогда $\{x\colon f(x) + g(x) > c\} \in M$ по свойству 3 ■

5) Если $M = \mathfrak{M}$ - σ-алгебра множеств, соизмеримых на отрезке или прямой в стандартном смысле, то любая непрерывная функция измерима

□ $\{x\colon f(x) > c\}$ - открытое $\Rightarrow$ борелевское $\Rightarrow \{x\colon f(x) > c\} \in \mathfrak{M}$ □

6) Если $f\colon X \to (a, b)$, $g\colon (a, b) \Supset \mathbb{R}$, $-\infty \leq a < b \leq +\infty$, g - непрерывна на (a, b), то из измеримости f следует измеримость $g(f(x))$

□ $\{x\colon g(f(x)) > c\} = \{x\colon f(x) \in g^{-1}((c, +\infty))\}$

$g^{-1}((c, +\infty))$ - открытое (т. к. g - непрерывная) $\Rightarrow g^{-1}((c, +\infty)) \in \mathcal{B}$

$\Rightarrow \{x\colon g(f(x)) > c\} = f^{-1}\left(g^{-1}((c, +\infty))\right) \in M$ ■

7) Если f, g - измеримы, то fg измерима
$\square$ f, g - измеримы $\Rightarrow f+g$ - измерима по свойству 4
$\Rightarrow f^2, g^2$ и $(f+g)^2$ измеримы по свойству 6
$\Rightarrow fg = \frac{1}{2}\left((f+g)^2 - f^2 - g^2\right)$ измерима по свойству 4 $\blacksquare$

8) Если f, g - измеримы, $g(x) \neq 0$, то $\frac{f(x)}{g(x)}$ - измерима

$$\square \ \{x\colon \tfrac{1}{g(x)} > c\} = \begin{cases} \{x\colon 0 < g(x) < \frac{1}{c}\}, & c > 0 \\ \{x\colon g(x) > 0\}, & c = 0 \\ \{x\colon g(x) > 0\} \cup \{x\colon g(x) < \frac{1}{c}\}, & c < 0 \end{cases}$$

Тогда $\frac{1}{g}$ измерима $\Rightarrow \frac{f}{g} = f \cdot \frac{1}{g}$ измерима по свойству 7 $\blacksquare$

Определение: Пусть (X, M) - измеримое пространство, $E \in M$. Функция $f\colon E \to \mathbb{R}$ называется измеримой, если $\forall B \in \mathcal{B} \quad \{x \in E\colon f(x) \in B\} \in M$, или, эквивалентно $\forall c \in \mathbb{R} \quad \{x \in E\colon f(x) > c\} \in M$

9) Если $E, E_1 \in M$, $E_1 \subset E$, f измерима на E, то f измерима на E_1
$\square$ $\{x \in E_1\colon f(x) > c\} = \{x \in E\colon f(x) > c\} \cap E_1 \in M$ $\blacksquare$

10) Если $E_n \in M$, $\forall n$ f измерима на E_n ($n = 1, \ldots, N$ или $n \in \mathbb{N}$), то f измерима на $\bigcup\limits_n E_n = E$
$\square$ $\{x \in E\colon f(x) > c\} = \bigcup\limits_n \{x \in E_n\colon f(x) > c\} \in M$ $\blacksquare$

Предложение 6.1: Пусть (X, M) - измеримое пространство, f_n - измеримое, $\forall x \in X \quad f_n(x) \to f(x)$. Тогда f измерима
$\square$ $\{x\colon f(x) > c\} = \bigcup\limits_{m=1}^{\infty} \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \bigcap\limits_{k=n}^{\infty} \{x\colon f_k(x) > c + \frac{1}{m}\} \in M$

Если $x \in \bigcup\limits_{m=1}^{\infty} \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \bigcap\limits_{k=n}^{\infty} \{x\colon f_k(x) > c + \frac{1}{m}\} \Leftrightarrow \exists m \, \exists n\colon \forall k \geq n \quad f_k(x) > c + \frac{1}{m}$, тогда $f(x) \geq c + \frac{1}{m} > c$

Обратно, если $f(x) > c$, то $\exists m \in \mathbb{N}\colon f(x) > c + \frac{2}{m}$, тогда
$\exists n\colon \forall k \geq n \quad |f_k(x) - f(x)| < \frac{1}{m}$ и $\forall k \geq n \quad f_k(x) > c + \frac{1}{m}$ $\blacksquare$

Определение: Пространством с мерой называется (X, M, μ), где M - σ-алгебра с единицей X, μ - конечная или σ-конечная σ-аддитивная мера на M

Пример: $([a,b], \mathfrak{M}, \mu)$, μ - мера Лебега

Определение: Последовательность функций $\{f_n\}$ на пространстве с мерой сходится к функции f почти всюду (μ-почти всюду), если
$\mu\{x \in X\colon f_n(x) \nrightarrow f(x)\} = 0$

Предолжение 6.2: Пусть (X, M, μ) - пространство с мерой, мера μ полна, f_n - измеримые, $f_n \to f$ почти всюду. Тогда f измерима
$\square$ Пусть $E_1 = \{x\colon f_n(x) \to f(x)\}$, $E_2 = \{x\colon f_n(x) \nrightarrow f(x)\}$. По условию, $E_2 \in M \Rightarrow E_1 = X \setminus E_2 \in M$

f_n измеримы на E_1 по свойству 9. Тогда f измерима на E_1 по предположению 6.1

Но $\forall c \quad \{x \in E_2 \colon f(x) > c\} \subset E_2 \Rightarrow \{x \in E_2 \colon f(x) > c\} \in M$ в силу полноты меры $\Rightarrow f$ - измерима на E_2

По свойству 10 f измерима на $X = E_1 \cup E_2$ $\blacksquare$

Определение: Пусть (X, M, μ) - пространство с мерой, f_n, f - измеримы. Скажем, что f_n сходятся к f по мере на E, если

$\forall \sigma > 0$ $\mu\{x \in E \colon |f_n(x) - f(x)| > \sigma\} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

Обозначим $E_n(\sigma) = \{x \colon |f_n(x) - f(x)| > \sigma\}$, $R_n(\sigma) = \bigcup\limits_{k=n}^{\infty} E_n(\sigma)$

Теорема 6.2: (Критерий сходимости почти всюду на множествах с конечной мерой) Пусть (X, M, μ) - пространство с мерой, f_n, f измеримые на X

(1) Если $\forall \sigma > 0 \quad \mu R_n(\sigma) \to 0$, то $f_n \to f$ почти всюду на X

(2) Если $\mu X < \infty$, $f_n \to f$ почти всюду на X, то $\forall \sigma > 0 \quad \mu R_n(\sigma) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

$\square$ Пусть $F = \{x \in X \colon f_n(x) \nrightarrow f(x)\}$

$F = \{x \colon \exists \sigma > 0 \colon \forall n \in \mathbb{N} \quad \exists k \geq n \colon |f_k(x) - f(x)| > \sigma\} = \bigcup\limits_{\sigma>0} \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \bigcup\limits_{k=n}^{\infty} E_k(\sigma) =$

$= \bigcup\limits_{\sigma>0} \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} R_n(\sigma) = \bigcup\limits_{m=1}^{\infty} \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} R_n(\frac{1}{m})$

Заметим, что $\forall \sigma > 0 \quad \forall n \quad R_n(\sigma) \supset R_{n+1}(\sigma)$

(1) Если $\mu R_n(\sigma) \to 0$, то $\exists n_0 \colon \mu R_{n_0}(\sigma) < +\infty$

Тогда по следствию из теоремы 4.5

$\mu \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} R_n(\sigma) = \mu \bigcap\limits_{n=n_0}^{\infty} R_n(\sigma) = \lim\limits_{n\to\infty} \mu R_n(\sigma) = 0$

В частности, $\forall m \quad \mu \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} R_n(\frac{1}{m}) = 0 \Rightarrow \mu F = 0$ как мера счетного объединения множеств меры нуль

(2) Если $\mu F = 0$, т. е. $\mu \left(\bigcup\limits_{\sigma>0} \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} R_n(\sigma) \right) = 0$, то $\forall \sigma > 0 \quad \mu \left(\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} R_n(\sigma) \right) = 0$

Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} \mu R_n(\sigma) = \mu \left(\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} R_n(\sigma) \right) = 0$ $\blacksquare$

Следствие: Если (X, M, μ) - измеримое пространство, $\mu X < \infty$, f_n, f - измеримые, $f_n \to f$ почти всюду, то $f_n \to f$ по мере

$\square$ $E_n(\sigma) < R_n(\sigma)$

$f_n \to f$ почти всюду $\Rightarrow \mu R_n(\sigma) \to 0$ по т. 6.2 $\Rightarrow \mu E_n(\sigma) \to 0$

$\Rightarrow$ по определению $f_n \to f$ по мере $\blacksquare$

Теорема 6.3: (Рисс) Если (X, M, μ) - пространство с мерой, f_n, f - измеримые, $f_n \to f$ по мере, то $\exists \{n_k\} \colon f_{n_k} \to f$ почти всюду

$\square$ Пусть $f_n \to f$ по мере. Тогда $\forall k \in \mathbb{N} \quad \mu E_n(\frac{1}{k}) \to 0 \Rightarrow \exists n_k \colon \mu E_{n_k}(\frac{1}{k}) < \dfrac{1}{2^k}$

Докажем, что $\forall \sigma > 0 \quad \mu \bigcup\limits_{j=k}^{\infty} \{x \colon |f_{n_j}(x) - f(x)| > \sigma\} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$

Отсюда, по т. 6.2(1) будет следовать, что $f_{n_k} \to f$ почти всюду

Для $\sigma > 0 \quad \exists k_0 \colon \dfrac{1}{k_0} < \sigma$

Тогда $\mu \bigcup\limits_{j=k}^{\infty} \{x\colon |f_{n_j}(x) - f(x)| > \sigma\} \le \sum\limits_{j=k}^{\infty} \mu E_{n_j}(\sigma) \le \sum\limits_{j=k}^{\infty} \mu E_{n_j}(\frac{1}{j}) \le$

$\le \sum\limits_{j=k}^{\infty} \dfrac{1}{2^j} = \dfrac{1}{2^{k-1}} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$ (т. к. $\dfrac{1}{j} \le \dfrac{1}{k_0} < \sigma$) ■

Теорема 6.4: (Егоров) Пусть (X, M, μ) - пространство с мерой, $\mu X < \infty$, f_n, f - измеримы, $f_n \to f$ почти всюду на X.

Тогда $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists E_\varepsilon \in M\colon \mu E_\varepsilon < \varepsilon, \quad f_n(x) \overset{X\setminus E_\varepsilon}{\rightrightarrows} f(x)$

□ Пусть $\varepsilon > 0$. По т. 6.2(2) $\forall k \in \mathbb{N} \quad \mu R_n(\frac{1}{k}) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \Rightarrow \exists n_k\colon \mu R_{n_k}(\frac{1}{k}) < \dfrac{\varepsilon}{2^k}$

Положим $E_\varepsilon = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} R_{n_k}(\frac{1}{k})$

Тогда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \mu R_{n_k}(\frac{1}{k}) < \sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{\varepsilon}{2^k} = \varepsilon$

Но $F = X \setminus E_\varepsilon = X \setminus \left(\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} \bigcup\limits_{n=n_k}^{\infty} \{x\colon |f_n(x) - f(x)| > \frac{1}{k}\} \right) =$

$= \bigcap\limits_{n=n_k}^{\infty} \{x\colon |f_n(x) - f(x)| \le \frac{1}{k}\}$

Если $\varepsilon > 0$, то $\exists k_0\colon \dfrac{1}{k_0} < \varepsilon$

Тогда $\forall x \in F \quad \forall n \ge n_{k_0} \quad |f_n(x) - f(x)| \le \dfrac{1}{k_0} < \varepsilon$

Т. е. $f_n \rightrightarrows f$ на F по определению ■

Теорема 6.5: (С-свойство Лузина) Пусть μ - классическая мера Лебега на $\mathfrak{M}$ с единицей $[a, b]$, f - измерима.

Тогда $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists g_\varepsilon \in C([a, b])\colon \mu\{x\colon f(x) \ne g_\varepsilon(x)\} < \varepsilon$

Глава 7

Интеграл Лебега

Пусть (X, M, μ) - пространство с мерой
Определение: Функция $f\colon X \to \mathbb{R}$ называется простой (простейшей), если она имеет вид $f(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k \chi_{E_k}(x)$
$E_k \in M$, $E_k \cap E_j = \varnothing$, $k \neq j$, и, если $\mu E_k = \infty$, то $a_k = 0$

Замечание: f - простая т. и т. т. к.
(1) f - измерима
(2) f принимает конечное число значений
(3) $\mu\{x\colon f(x) \neq 0\} < \infty$
($\forall k \quad E_k \in M \Rightarrow f$ - измерима по свойствам 1 и 4 измеримости функций; обратно, если $a_1, \ldots, a_n$ - все ненулевые значения, то $E_k = \{x\colon f(x) = a_k\} \in M$, т. к. $\{a_n \in \mathcal{B} \Rightarrow f = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k \chi_{E_k}$ - простая)

Лемма 7.1: Пусть $f(x) \geq 0$ - измеримая. Тогда $\exists g_n(x)$ - простые неотрицательные: $\forall x \in X \quad g_n(x) \uparrow f(x)$
(т. е. $\forall x \forall n \quad g_n(x) \leq g_{n+1}(x)$, $g_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x)$)

$\square$ Если мера σ-конечна, то выберем $X_n \in M\colon X = \bigsqcup\limits_{n=1}^{\infty} X_n$, $\mu X_n < \infty$ и положим $Y_n = \bigsqcup\limits_{k=1}^{n} X_k$

Тогда $Y_n \subset Y_{n+1}$, $\mu Y_n < \infty$ и $X = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} Y_n$ (*)

Если же мера конечна, то положим $Y_n = X \quad \forall n$, тогда свойства (*) тоже выполнены

Положим $g_n(x) = \begin{cases} \dfrac{k}{2^n}, & \text{если } x \in Y_n \text{ и } f(x) \in \left[\dfrac{k}{2^n}, \dfrac{k+1}{2^n}\right), k = 0, \ldots, 2^{2n} - 1 \\ 2^n, & \text{если } x \in Y_n \text{ и } f(x) \geq 2^n \\ 0, & \text{если } x \notin Y_n \end{cases}$

g_n - неотрицательные, g_n - простые, т. к. $E_k = Y_n \cap \left\{x\colon f(x) \in \left[\dfrac{k}{2^n}, \dfrac{k+1}{2^n}\right)\right\} \in$
$\in M$ в силу измеримости f и $E_k \cap E_j = \varnothing$, $k \neq j$

Проверим неравенство $g_n(x) \leq g_{n+1}(x)$

Если $g_n(x) = 0$, то неравенство заведомо верно

Если $g_n(x) = 2^n$, то $f(x) \geq 2^n$ и $x \in Y_n \Rightarrow x \in Y_{n+1}$, и либо

(а) $f(x) \geq 2^{n+1}$, либо (б) $2^n \leq f(x) < 2^{n+1}$

В случае (а) $g_{n+1}(x) = 2^{n+1} > g_n(x)$

В случае (б) $g_{n+1}(x) = \dfrac{k}{2^{n+1}}$, где $k \geq 2^n \cdot 2^{n+1}$,

т. к. $f(x) \geq 2^n$, и $g_{n+1}(x) \geq g_n(x)$

Если $g_n(x) \in (0, 2^n)$, то $\exists k\colon f(x) \in \left[\dfrac{k}{2^n}, \dfrac{k+1}{2^n}\right)$, $g_n(x) = \dfrac{k}{2^n}$, тогда либо $f(x) \in \left[\dfrac{2k}{2^{n+1}}, \dfrac{2k+1}{2^{n+1}}\right)$, либо $f(x) \in \left[\dfrac{2k+1}{2^{n+1}}, \dfrac{2k+2}{2^{n+1}}\right)$

При этом в первом случае $g_{n+1}(x) = \dfrac{2k}{2^{n+1}} = g_n(x)$, а во втором $g_{n+1}(x) = \dfrac{2k+1}{2^{n+1}} > g_n(x)$

Фиксируем $x\colon \exists n_0\colon \forall n \geq n_0 \quad x \in Y_n$ и $\exists n_1\colon \forall n \geq n_1\ f(x) < 2^n$

Тогда $\forall n \geq \max(n_0, n_1)$ имеем $g_n(x) = \dfrac{k}{2^n}$, где $f(x) \in \left[\dfrac{k}{2^n}, \dfrac{k+1}{2^n}\right)$, т. е. $|g_n(x) - f(x)| < \dfrac{1}{2^n} \Rightarrow g_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x)$ ■

Определение: Интегралом Лебега от простой функции $f(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k \chi_{E_k}(x)$ называется число $\int\limits_X f(x) d\mu(x) = \int\limits_X f d\mu = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k \mu E_k$

(если $a_k = 0$, $\mu E_k = \infty$, то $a_k \cdot \mu E_k \overset{def}{=} 0$)

Корректность: Пусть $f(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k \chi_{E_k}(x) = \sum\limits_{j=1}^{l} b_j \chi_{F_j}(x)$

Положим $E_0 = X \setminus \bigsqcup\limits_{k=1}^{n} E_k$, $a_0 = 0$, $F_0 = X \setminus \bigsqcup\limits_{j=1}^{l} F_j$, $b_0 = 0$, $C_{k,j} = E_k \cap F_j$

Заметим, что если $C_{k,j} \neq \varnothing$, то $a_k = b_j$. Поэтому $\sum\limits_{k=0}^{n} a_k \mu E_k = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k \left(\sum\limits_{j=0}^{l} \mu C_{k,j}\right) =$ $= \sum\limits_{k=0}^{n} \sum\limits_{j=0}^{l} a_k \mu C_{k,j} = \sum\limits_{j=0}^{l} \sum\limits_{k=0}^{n} b_j \mu C_{k,j} = \sum\limits_{j=0}^{l} b_j \mu F_j$

Лемма 7.2: Пусть f, g - простые, тогда $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad h = \alpha f + \beta g$ - простая и $\int\limits_X h d\mu = \alpha \int\limits_X f d\mu + \beta \int\limits_X g d\mu$

□ Пусть $f = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k \chi_{E_k}$, $g = \sum\limits_{j=0}^{l} b_j \chi_{F_j}$, $C_{k,j} = E_k \cap F_j$

Тогда $f = \sum\limits_{k=0}^{n} \sum\limits_{j=0}^{l} a_k \chi_{C_{k,j}}$, $g = \sum\limits_{j=0}^{l} \sum\limits_{k=0}^{n} b_j \chi_{C_{k,j}}$

$\alpha f + \beta g = \sum\limits_{k=0}^{n} \sum\limits_{j=0}^{l} (\alpha a_k + \beta b_j) \chi_{C_{k,j}}$

Теперь из определения интеграла следует утверждение леммы ■

Определение: Пусть f - простая, $E \in M$, $f(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k \chi_{E_k}(x)$

$$\int\limits_E f(x) d\mu \overset{def}{=} \sum_{k=1}^{n} a_k \mu(E_k \cap E) \overset{def}{=} \int\limits_X f(x) \chi_E(x) d\mu$$

Лемма 7.3: (а) Если f, g - простые, $E \in M$, $f(x) \le g(x)$ на E, то $\int\limits_E f d\mu \le \int\limits_E g d\mu$

(б) Если f - простая, $\mu E < \infty$, то $|\int\limits_E f d\mu| \le \int\limits_E |f| d\mu \le \mu E \cdot \max\limits_E |f|$

(в) Если $E = E_1 \sqcup E_2$, f - простая, $E_1, E_2 \in M$, то $\int\limits_E f d\mu = \int\limits_{E_1} f d\mu + \int\limits_{E_2} f d\mu$

$\square$ (а) $\int\limits_E g(x) d\mu - \int\limits_E f(x) d\mu \overset{\text{л } 7.2}{=} \int\limits_E (g(x) - f(x)) d\mu$, где $g(x) - f(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} c_k \chi_{E_k}(x)$,

$c_k \ge 0$ для всех непустых $E_k \Rightarrow \forall k \quad c_k \cdot \mu E_k \ge 0 \Rightarrow \int\limits_E (g(x) - f(x)) d\mu \ge 0$

(б) Пусть $f(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} c_k \chi_{E_k}(x)$, $E_k \subset E$

Тогда $|f(x)| = \sum\limits_{k=1}^{n} |c_k| \chi_{E_k}(x)$

$$|\int\limits_E f d\mu| = |\sum c_k \mu E_k| \le \sum |c_k| \mu E_k \le (\max_k |c_k|) \cdot \sum_{k=1}^{n} \mu E_k \le \max_E |f| \cdot \mu E$$

(в) Если $E = E_1 \sqcup E_2$, то $f\chi_e = f\chi_{E_1} + f\chi_{E_2}$ в силу 2-го орпеделения интеграла по подмножеству и леммы 7.2 получаем нужное утверждение $\blacksquare$

Теорема 7.1: Пусть g_n, g - простые неотрицательные, $\forall x \forall n \quad g_n(x) \le g_{n+1}(x)$, $\forall x \quad \lim\limits_{n \to \infty} g_n(x) \ge g(x)$. Тогда $\lim\limits_{n \to \infty} \int\limits_X g_n(x) d\mu \ge \int\limits_X g(x) d\mu$

$\square$ Пусть $F = \{x \colon g(x) \ne 0\}$, $\mu F < \infty$, т. к. g - простая

Содержателен случай, когда $\lim\limits_{n \to \infty} \int\limits_X g_n d\mu < \infty$, $\int\limits_X g d\mu > 0$

Выберем $\varepsilon > 0$ и положим $\delta = \dfrac{\varepsilon}{2\mu F}$

Положим $F_n = \{x \in F \colon g_n(x) < g(x) - \delta\}$

Тогда $F_n \supset F_{n+1}$, и $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} F_n = \varnothing$ (в $x \in \bigcap F_n$ было бы $\lim\limits_{n \to \infty} g_n(x) \le g(x) - \delta$)

Т. к. $\mu F < \infty$, $F_n \subset F$, то в силу непрерывности меры $\mu F_n \to 0$

Тогда $\int\limits_X g d\mu = \int\limits_F g d\mu = \int\limits_F g d\mu \overset{7.3(\text{в})}{=} \int\limits_{F_n} g d\mu + \int\limits_{F \setminus F_n} g d\mu \overset{7.3(\text{б})}{\le} \mu F_n \cdot \sup |g| \overset{7.3(\text{а})}{+}$

$+ \int\limits_{F \setminus F_n} (g_n(x) + \delta) d\mu \le \mu F_n \cdot \max\limits_F |g| + \int\limits_F g_n(x) d\mu + \delta \cdot \mu F$

При достаточно больших $n \quad \mu F_n \cdot \max\limits_F |g| < \frac{\varepsilon}{2}$

В пределе $\int\limits_X g d\mu \leq \lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_F g_n d\mu + \varepsilon \leq \lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_X g_n(x) d\mu + \varepsilon$

В силу произвольности $\varepsilon > 0$ получаем утверждение теоремы ■

Определение: Пусть (X, M, μ) - пространство с мерой, f - измеримая, $f(x) \geq 0$. Интегралом Лебега от f называется $\int\limits_X f(x) d\mu = \sup\limits_{\substack{h-\text{простые} \\ \forall x\ 0 \leq h(x) \leq f(x)}} \int\limits_X h(x) d\mu$

Если $\int\limits_X f d\mu < +\infty$, то f называется интегрируемой по Лебегу на X (обозначается $f \in L(X) = L(X, M, \mu)$)

Определение: Пусть f - измеримая. Ее положительной частью называется $f_+(x) = \begin{cases} f(x), & f(x) \geq 0 \\ 0, & f(x) < 0 \end{cases}$,

а ее отрицательной частью называется $f_-(x) = \begin{cases} 0, & f(x) \geq 0 \\ -f(x), & f(x) < 0 \end{cases}$

Тогда $f(x) = f_+(x) - f_-(x)$, $f_+(x)$ и $f_-(x)$ - измеримы

Определение: Измеримая функция f называется интегрируемой по Лебегу, если $f_+ \in L(X)$, $f_- \in L(X)$

Интегралом Лебега от f называется $\int\limits_X f d\mu = \int\limits_X f_+ d\mu - \int\limits_X f_- d\mu$

Замечание: Если f - измерима, $f_+ \in L(X)$, $f_- \notin L(X)$, то можно положить $\int\limits_X f d\mu = \int\limits_X f_+ d\mu - \infty = -\infty$ и наоборот

Но такая функция не называется интегрируемой по Лебегу

Если $f_+ \notin L(X)$, $f_- \notin L(X)$, то $\int\limits_X f d\mu$ не определен

Лемма 7.4: Если f - простая, то определения согласованы

□ (а) Если f - неотрицательная простая, то $\forall h$ - простой, $h \leq f$, то $\int\limits_X h d\mu \leq$ $\leq \int\limits_X f d\mu$ по л. 7.3(а)

$\Rightarrow \sup\limits_{h \leq f} \int h d\mu \leq \int f d\mu$, но $h \equiv f$ - тоже подходит - равенство

(б) Если f - простая, $f(x) = \sum c_k \chi_{E_k}(x)$, то $f_+(x) = \sum\limits_{k:\ c_k > 0} c_k \chi_{E_k}(x)$, $f_-(x) = \sum\limits_{k:\ c_k < 0} |c_k| \chi_{E_k}(x)$ - обе простые

Интегралы f_+ и f_- - согласованы (пункт (а)) $\int\limits_X f d\mu = \int\limits_X f_+ d\mu - \int\limits_X f_- d\mu$ (с одной стороны по линейности, с другой стороны по определению) ■

Лемма 7.5: Пусть f - неотрицательная измеримая, h_n - неотрицательные простые, $h_n(x) \uparrow f(x)$ на X. Тогда $\int\limits_X f(x)d\mu = \lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_X h_n(x)d\mu$

□ По условию $h_n(x) \leq f(x) \Rightarrow \int\limits_X h_n d\mu \leq \int\limits_X f d\mu \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_X h_n d\mu \leq \int\limits_X f d\mu$

Обратно, если $0 \leq h(x) \leq f(x)$, то $\lim\limits_{n\to\infty} h_n(x) \geq h(x)$

$\Rightarrow$ по т. 7.1 $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_X h_n(x)d\mu \geq \int\limits_X h(x)d\mu \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_X h_n(x)d\mu \geq \int\limits_X f(x)d\mu$ ■

Определение: Если f - измеримая на $E \in M$, то $\int\limits_E f d\mu = \int\limits_X f' \cdot \chi_E d\mu$, где $f'\chi_F = 0$ на $X \setminus E$ даже там, где f не определена

Лемма 7.6: (1) Пусть f, g - измеримые, неотрицательные, $\alpha, \beta \geq 0$. Тогда $\forall E \in M \quad \int\limits_E (\alpha f + \beta g)d\mu = \alpha \int\limits_E f d\mu + \beta \int\limits_E g d\mu$

(2) Если f - измеримая на $E \in M$, $E = E_1 \sqcup E_2$, $E_1, E_2 \in M$, то $\int\limits_E f d\mu = \int\limits_{E_1} f d\mu + \int\limits_{E_2} f d\mu$

Причем, если f знакопеременна, то из существования одной из сторон равенства следует существование другой

□ 1) По лемме 7.1 $\exists$ простые f_n и g_n, что $f_n \uparrow f$ и $g_n \uparrow g$ на X. Тогда $f_n\chi_E \uparrow f\chi_E$, $g_n\chi_E \uparrow g\chi_E$, $\alpha(f_n\chi_E) \uparrow \alpha f\chi_E$, $\beta(g_n\chi_E) \uparrow \beta g\chi_E$ $(\alpha f_n + \beta g_n)\chi_E \uparrow (\alpha f + \beta g)\chi_E$

Но $\int\limits_E (\alpha f_n + \beta g_n)d\mu = \int\limits_X (\alpha f_n + \beta g_n)\chi_E d\mu \overset{\text{л. } 7.2}{=} \alpha \int\limits_X f_n\chi_E d\mu + \beta \int\limits_X g_n\chi_E d\mu$

По лемме 7.5 переходим к пределу, получаем (1)

2) Пусть f - неотрицательная, тогда $f\chi_E(x) = f(x)\chi_{E_1}(x) + f(x)\chi_{E_2}(x)$ $\Rightarrow$ из (1) получаем (2)

Если f - любого знака, то $(f\chi_E)_+ = (f\chi_{E_1})_+ + (f\chi_{E_2})_+$ и $(f\chi_E)_- =$ $= (f\chi_{E_1})_- + (f\chi_{E_2})_-$

Тогда $\int\limits_E f d\mu = \int\limits_X (f\chi_E)d\mu = \int\limits_X (f\chi_E)_+ d\mu - \int\limits_X (f\chi_E)_- d\mu = \int\limits_X (f\chi_{E_1})_+ d\mu +$
$+ \int\limits_X (f\chi_{E_2})_+ d\mu - \int\limits_X (f\chi_{E_1})_- d\mu - \int\limits_X (f\chi_{E_2})_- d\mu = \int\limits_{E_1} f d\mu + \int\limits_{E_2} f d\mu$ ■

Теорема 7.2: Пусть $f, g \in L(X)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Тогда $\alpha f + \beta g \in L(X)$ и $\int\limits_X (\alpha f + \beta g)d\mu = \alpha \int\limits_X f d\mu + \beta \int\limits_X g d\mu$

□ (a) Докажем, что $\alpha f \in L(X)$ и $\int\limits_X (\alpha f)d\mu = \alpha \int\limits_X f d\mu$

Если $\alpha > 0$, то $(\alpha f)_+ = \alpha \cdot f_+$
$(\alpha f)_- = \alpha \cdot f_-$

По лемме 7.6(1) $\int\limits_X (\alpha f)_\pm d\mu = \alpha \int\limits_X f_\pm d\mu$

$\int\limits_X (\alpha f) d\mu = \int\limits_X (\alpha f)_+ d\mu - \int\limits_X (\alpha f)_- d\mu = \alpha(\int\limits_X f_+ d\mu - \int\limits_X f_- d\mu)$

Если $\alpha < 0$, то $(\alpha f)_+ = |\alpha| \cdot f_-$

$(\alpha f_-) = |\alpha| f_+$

По лемме 7.6(1) $\int\limits_X (\alpha f)_\pm d\mu = |\alpha| \cdot \int\limits_X f_\mp d\mu$

$\int\limits_X (\alpha f) d\mu = |\alpha|(\int\limits_X f_- d\mu - \int\limits_X f_+ d\mu) = \alpha \int\limits_X f d\mu$

(б) Докажем, что $f + g \in L(X)$ и $\int\limits_X (f+g) d\mu = \int\limits_X f d\mu + \int\limits_X g d\mu$ (*)

Тогда $X = X_{++} \sqcup X_{+-} \sqcup X_{-+} \sqcup X_{--}$, где $X_{++} = \{x\colon f(x) \geq 0, \quad g(x) \geq 0\}$, $X_{+-} = \{x\colon f(x) \geq 0, \quad g(x) < 0\}$ и т. д.

По лемме 7.6(2) достаточно доказать (*) для этих 4 множеств по отдельности

На X_{++} (*) следует из л. 7.6(1)

На X_{--} $\quad -(f+g) = (-f) + (-g)$. По л. 7.6(1) $\int\limits_{X_{--}} -(f+g) d\mu =$

$= \int\limits_{X_{--}} (-f) d\mu + \int\limits_{X_{--}} (-g) d\mu \Rightarrow$ в силу п. (а) теоремы получаем (*)

Положим $X^1_{+-} = \{x \in X_{+-}\colon f(x) + g(x) \geq 0\}$,

$X^2_{+-} = \{x \in X_{+-}\colon f(x) + g(x) < 0\}$

На X^1_{+-} имеем $(f+g)(x) - (-g(x)) = f(x)$

По л. 7.6(1) и пункту (а) теоремы $\int\limits_{X^1_{+-}} (f+g) d\mu - \int\limits_{X^1_{+-}} g d\mu = \int\limits_{X^1_{+-}} f d\mu$

На X^2_{+-} $\quad (-(f+g))(x) + f(x) = -g(x)$ по л. 7.6(1) и пункту (а) теоремы $-\int (f+g) d\mu + \int f d\mu = -\int g d\mu$

Случай X_{-+} аналогичен ■

Лемма 7.7: (1) Если $\mu X < \infty$, f - измеримая ограниченная ($|f(x)| \leq c$), то $f \in L(X)$ и $\left|\int\limits_E f d\mu\right| \leq c \cdot \mu E$

(2) Если f - измерима, $g \in L(X)$, $|f(x)| \leq g(x)$, то $f \in L(X)$

(3) Если f - измерима, то $f \in L(X) \Leftrightarrow |f| \in L(X)$

(4) Если f - измерима, $\mu E = 0$, то $\exists \int\limits_E f d\mu = 0$

□ (1) Если $0 \leq h \leq f_+$ - простая, то $h(x) \leq c$, тогда $\int\limits_E h d\mu = \int\limits_{\{x \in E\colon f(x) > 0\}} h(x) d\mu \leq$

$\leq c \cdot \mu\{x \in E\colon f(x) \geq 0\} \Rightarrow \int\limits_E f_+ d\mu \leq c \cdot \mu\{x \in E\colon f(x) \geq 0\}$

Аналогично $\int\limits_E f_- d\mu \le c \cdot \mu\{x \in E\colon f(x) < 0\}$

$\left|\int\limits_E f d\mu\right| \le \int\limits_E f_+ d\mu + \int\limits_E f_- d\mu \le c \cdot \mu_E$

(2) Если $|f(x)| \le g(x)$, то $f_+(x) \le g(x) \Rightarrow \forall$ простой $h \ge 0$ из $h(x) \le f_+(x)$ следует, что $h(x) \le g(x)$

$\Rightarrow \int\limits_X f_+ d\mu = \sup\limits_{\substack{0 \le h \le f_+ \\ h \text{ - простая}}} \int\limits_X h d\mu \le \sup\limits_{\substack{0 \le h \le g \\ h \text{ - простая}}} \int\limits_X h d\mu = \int\limits_X g(x) d\mu < \infty$

$\Rightarrow f_+ \in L(X)$ и аналогично $f_- \in L(E)$

(3) Если $|f| \in L(X)$, то $f \in L(X)$ в силу п. (2)

Обратно, если $f \in L(X)$, то $f_+ \in L(X)$, и $f_- \in L(X)$

$\Rightarrow |f| = f_+ + f_- \in L(X)$ по т. 7.2

(4) Если h - простая, $h = \sum a_k \chi_{E_k}$, то $E_k \subset E$

$\Rightarrow \mu E_k = 0$ (или : $\mu(E_k \cap E) = 0) \Rightarrow \int\limits_E h d\mu = 0$

Тогда $\int\limits_E f_\pm d\mu = 0$ как $\sup 0$ ■

Следствие из т. 7.2: Если $f, g \in L(X)$, $f(x) \le g(x)$, то $\int\limits_X f(x) d\mu \le \int\limits_X g(x) d\mu$

□ $\int\limits_X g d\mu - \int\limits_X f d\mu = \int\limits_X (g - f) d\mu$, но $g(x) - f(x) \ge 0 \Rightarrow \int\limits_X (g - f) d\mu \ge 0$ ■

Интеграл Лебега как функция множества

Если $f(x) \ge 0$, то в силу леммы 7.6(2) функция $\Phi(E) = \int\limits_E f(x) d\mu$ есть мера на M

Докажем σ-аддитивность этой меры

Теорема 7.3: Пусть $E_k \in M$, $E = \bigsqcup\limits_{k=1}^{\infty} E_k$, $f(x) \ge 0$

Тогда $\int\limits_E f d\mu = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \int\limits_{E_k} f d\mu$

□ По т. 4.4 достаточно доказать, что $\int\limits_E f d\mu \le \sum\limits_{k=1}^{\infty} \int\limits_{E_k} f d\mu$ (**)

Пусть $h(x) = \sum a_j \chi_{B_j}(x)$ - простая, $0 \le h(x) \le f(x)$, $B_j \in E$

Тогда $\int\limits_E h(x)d\mu = \sum\limits_{j=1}^{l} a_j \mu B_j = \sum\limits_{j=1}^{l} a_j \sum\limits_{k=1}^{\infty} \mu(B_j \cap E_k) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \left(\sum\limits_{j=1}^{l} a_j \mu(B_j \cap E_k) \right) =$
$= \sum\limits_{k=1}^{\infty} \int\limits_{E_k} h(x)d\mu \leq \sum\limits_{k=1}^{\infty} \int\limits_{E_k} f d\mu$

Переходя к $\sup\limits_{h \leq f}$, получим (**) ■

Следствие 1: Если $f \in L(E)$, $E = \bigsqcup\limits_{k=1}^{\infty} E_k$, $E_k \in M$, то $\forall k \quad f \in L(E_k)$ и $\int\limits_E f d\mu = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \int\limits_{E_k} f d\mu$

□ $f \in L(E) \Rightarrow \int\limits_E f_{\pm} d\mu = \int\limits_{k=1}^{\infty} \int\limits_{E_k} f_{\pm} d\mu \Rightarrow$ все интегралы в правой части конечны $\Rightarrow \forall k \quad f \in L(E_k)$

Т. к. абсолютно сходящиеся ряды можно переставлять, то

$\int\limits_E f d\mu = \left(\sum\limits_{k=1}^{\infty} \int\limits_{E_k} f_+ d\mu \right) - \left(\sum\limits_{k=1}^{\infty} \int\limits_{E_k} f_- d\mu \right) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \left(\int\limits_{E_k} f_+ d\mu - \int\limits_{E_k} f_- d\mu \right) =$
$= \sum\limits_k \int\limits_{E_k} f d\mu$ ■

Следствие 2: Если $E = \bigsqcup\limits_{k=1}^{\infty} E_k$, $\forall k \quad f \in L(E_k)$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \int\limits_{E_k} |f| d\mu < \infty$, то $f \in L(E)$

□ $\forall k \quad f \in L(E_k) \Rightarrow f$ - измерима на $E_k \Rightarrow f$ измерима на E

По т. 7.3 $\int\limits_E |f| d\mu = \sum\limits_k \int\limits_{E_k} |f| d\mu < \infty$, т. е. $|f| \in L(E)$

$\Rightarrow$ по л. 7.7(3) $f \in L(E)$ ■

Теорема 7.4: (Неравенство Чебышева) Пусть $f \in L(E)$, тогда

$\mu\{x \in E \colon |f(x)| > c\} \leq \frac{1}{c} \cdot \int\limits_E |f(x)| d\mu$

□ Без ограничения общности $f(x) \geq 0$, $h(x) = \begin{cases} 0, & f(x) < c \\ c, & f(x) \geq c \end{cases}$ - простая, $0 \leq h(x) \leq f(x)$

$\Rightarrow \int\limits_E h d\mu = c \cdot \mu\{x \colon f(x) \geq c\} \leq \int\limits_E f d\mu$ ■

Теорема 7.5: (Абсолютная непрерывность интеграла Лебега). Пусть $f \in$ $\in L(E)$. Тогда $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \colon \forall B \in M$, $\mu B < \delta$ выполнена оценка $\int\limits_B |f| d\mu < \varepsilon$

$\square$ Если $\exists c\colon |f(x)| \le c$, то по л. 7.7(1) $\int\limits_B |f| d\mu \le c \cdot \mu B$ при $\delta = \frac{\varepsilon}{c}$ получим нужное

В общем случае, пусть $E_n = \{x\colon n-1 \le |f(x)| < n\}$

Тогда $E = \bigsqcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n$

По т. 7.3 $\int\limits_E |f| d\mu = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \int\limits_{E_n} |f| d\mu$

По лемме 7.7(3) сходится $\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N\colon \sum\limits_{n=N+1}^{\infty} \sum\limits_{E_n} |f| d\mu < \frac{\varepsilon}{2}$

Пусть $E = B_\varepsilon \sqcup C_\varepsilon$, где $B_\varepsilon = \bigsqcup\limits_{n=1}^{N} E_n$, $C_\varepsilon = \bigsqcup\limits_{n=N+1}^{\infty} E_n$

Тогда $|f(x)| \le N$ на B_ε, а $\forall D \in M\colon D \subset C_\varepsilon$, $\int\limits_D |f| d\mu \le \int\limits_{C_\varepsilon} |f| d\mu =$

$= \sum\limits_{n=N+1}^{\infty} \int\limits_{E_n} |f| d\mu < \dfrac{\varepsilon}{2}$

Положим $\delta = \dfrac{\varepsilon}{2N}$. Тогда $\forall B,\ \mu B < \delta$ имеем: $\int\limits_B |f| d\mu = \int\limits_{B \cap B_\varepsilon} |f| d\mu +$

$+ \int\limits_{B \cap C_\varepsilon} |f| d\mu \le N \cdot \mu(B \cap B_\varepsilon) + \int\limits_{C_\varepsilon} |f| d\mu \le N \cdot \mu B + \dfrac{\varepsilon}{2} < \dfrac{\varepsilon}{2} + \dfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ $\blacksquare$

Определение: Пусть (X, M) - измеримое пространство, μ и ν - две σ-аддитивные меры на M. Мера ν называется абсолютно непрерывной относительно μ, если $\forall E \in M\colon \mu E = 0 \Rightarrow \nu E = 0$

Теорема 7.6: (Радон-Никодим) Пусть (X, M, μ) - пространство с мерой, ν - σ-аддитивная конечная мера на M, ν абсолютно непрерывна относительно μ. Тогда $\exists f \in L(X, M, \mu)$ такая, что $\forall E \in M\colon \nu(E) = \int\limits_E f(x) d\mu$

Глава 8

Предельный переход под знаком интеграла Лебега

Интеграл Римана: $f_n \rightrightarrows f \Rightarrow \int\limits_a^b f_n(x)dx \to \int\limits_a^b f(x)dx$

Пример: $f_n(x) = \begin{cases} n^2, & 0 < x < \frac{1}{n} \\ 0, & x = 0 \text{ или } \frac{1}{n} \le x \le 1 \end{cases}$

$$\int\limits_{[0,1]} f_n(x)d\mu = n^2 \cdot \frac{1}{n} = n \to \infty$$

(X, M, μ) - пространство с мерой

Теорема 8.1: (Теорема Лебега о мажорируемой сходимости) Пусть f_n, f - измеримы, $f_n \to f$ почти всюду, $\exists g \in L(X)\colon \forall n \quad |f_n(x)| \le g(x)$ для почти всех $x \in X$, $g(x)$ - мажоранта.

Тогда $f_n, f \in L(X)$ и $\int\limits_X f_n(x)d\mu \xrightarrow[n\to\infty]{} \int\limits_X f(x)d\mu$

Замечание: Измеримости f можно не требовать, если:

(1) $f_n \to f$ всюду

или

(2) если мера μ полна

$\Box$ (доказательство теоремы) Без ограничения общности $g \ge 0$.

Пусть задано $\varepsilon > 0$

(1) Найдем $Y \in M\colon \mu Y < \infty$, $\int\limits_{X\setminus Y} g(x)d\mu < \frac{\varepsilon}{6}$

Если $\mu X < \infty$, то положим $Y \subset X$

Пусть $X = \bigsqcup\limits_{k=1}^{\infty} X_k$, $\mu X_k < \infty$, $X_k \in M$, тогда по т. 7.3

$$\int\limits_X g(x)d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_{X_k} g(x)d\mu < \infty$$

$\exists n\colon \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} \int\limits_{X_k} g(x)d\mu < \dfrac{\varepsilon}{6}$

Положим $Y = \bigsqcup\limits_{k=1}^{n} X_k$. Тогда $\int\limits_{X\setminus Y} g(x)d\mu = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} \int\limits_{X_k} g(x)d\mu < \dfrac{\varepsilon}{6}$

(2) f_n, f интегрируемы по л. 7.7(1)

(3) Т. к. $g \in L(X)$, то по теореме об абсолютной непрерывности интеграла (т. 7.5) $\exists \delta > 0\colon \forall B,\ \mu B < \delta$ выполняется $\int\limits_B g(x)d\mu < \dfrac{\varepsilon}{6}$

(4) По теореме Егорова (т. 6.4) $\exists B_\delta \subset Y,\ B_\delta \in M\colon \mu B_\delta < \delta,\ f_n \rightrightarrows f$ на $Y \setminus B_\delta$, где δ - из п. 3

$X = (Y \setminus B_\delta) \sqcup B_\delta \sqcup (X \setminus Y)$

Тогда $\left| \int\limits_X f_n d\mu - \int\limits_X f d\mu \right| =$

$$= \left| \int\limits_{Y\setminus B_\delta} f_n d\mu - \int\limits_{Y\setminus B_\delta} f d\mu + \int\limits_{B_\delta} f_n d\mu - \int\limits_{B_\delta} f d\mu + \int\limits_{X\setminus Y} f_n d\mu \int\limits_{X\setminus Y} f d\mu \right| \leq$$

$$\leq \int\limits_{Y\setminus B_\delta} |f_n(x) - f(x)| d\mu + \int\limits_{B_\delta} |f_n| d\mu + \int\limits_{B_\delta} |f| d\mu + \int\limits_{X\setminus Y} |f_n| d\mu + \int\limits_{X\setminus Y} |f| d\mu \leq$$

$$\leq \mu(Y \setminus B_\delta) \cdot \sup_{Y\setminus B_\delta} |f_n - f| + 2\int\limits_{B_\delta} g d\mu + 2\int\limits_{X\setminus Y} g d\mu$$

При достаточно больших n $\sup\limits_{Y\setminus B_\delta} |f_n - f| \leq \dfrac{\varepsilon}{3\mu Y}$,

и тогда $\left| \int\limits_X f_n d\mu - \int\limits_X f d\mu \right| < \varepsilon$ ■

Теорема 8.2: (Теорема Б. Леви о монотонной сходимости) Пусть $f_n \in L(X)$, $\forall x\ 0 \leq f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$, $\forall n \quad \sup\limits_n \int\limits_X f_n(x) d\mu < \infty$

Тогда $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) < \infty$ почти всюду и если доопределить f произвольно (с сохранением измеримости) на $\{x\colon f(x) = \infty\}$, то $f \in L(X)$ и $\int\limits_X f(x) d\mu = \lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_X f_n(x) d\mu$

□ Пусть $\Omega_n(r) = \{x\colon f_n(x) \geq r\}$. Тогда $\Omega_n(r) \subset \Omega_{n+1}(r)$, $\Omega_n(r) \supset \Omega_n(r+1)$

По неравенству Чебышева $\forall n, r \in \mathbb{N} \quad \mu\Omega_n(r) \leq \dfrac{1}{r} \int\limits_X f_n(x) d\mu \leq \dfrac{c}{r} < \infty$

Тогда по свойству непрерывности меры снизу

$\mu\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \Omega_n(r) \right) = \lim\limits_{n\to\infty} \mu\Omega_n(r) \leq \frac{c}{r}$, но $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \Omega_n(r) \supset \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \Omega_n(r+1)$

По свойству непрерывности меры сверху $\mu\left(\bigcap\limits_{r=1}^{\infty} \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \Omega_n(r) \right) = \lim\limits_{r\to\infty} \mu\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \Omega_n(r) \right) \leq$

$\leq \lim\limits_{r\to\infty} \frac{c}{r} = 0$, где $\bigcap\limits_{r=1}^{\infty} \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \Omega_n(r) = \{x\colon \forall r \quad \exists n\colon f_n(x) \geq r\} = \{x\colon f(x) = \infty\}$

Без ограничения общности считаем, что $f(x) < \infty$ всюду

Рассмотрим функции $g_n(x) = f_n(x) - f_{n-1}(x)$, $g_1(x) = f_1(x)$, тогда $g_n(x) \geq 0$

По лемме 7.1 $\forall n \quad \exists$ простые неограниченные $h_{n,k}(x)\colon h_{n,k}(x) \uparrow_{k\to\infty} g_n(x)$

Положим $h_n(x) = \sum\limits_{j=1}^{n} h_{j,n}(x)$. Тогда h_n - простая как конечная сумма простых

$h_{n+1}(x) - h_n(x) = \sum\limits_{j=1}^{n} (h_{j,n+1}(x) - h_{j,n}(x)) + h_{n+1,n+1}(x) \geq 0$, т. е. $\{h_n\}$ - неубывающая последовательность простых $\forall x \forall n \quad h_n(x) \leq \sum\limits_{j=1}^{n} g_j(x) = f_n(x)$

Поэтому $\int\limits_X h_n(x)d\mu \leq \int\limits_X f_n(x)d\mu \leq c$ и $\lim\limits_{n\to\infty} h_n(x) \leq \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) \leq f(x)$

Но $\forall k \quad \lim\limits_{n\to\infty} h_n(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{j=1}^{n} h_{j,n}(x) \geq \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{j=1}^{k} h_{j,n}(x) = \sum\limits_{j=1}^{k} \lim\limits_{n\to\infty} h_{j,n}(x) =$
$= \sum\limits_{j=1}^{k} g_j(x) = f_k(x)$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} h_n(x) \leq \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$, т. е. $h_n(x)0 \uparrow f(x)$

И по л. 7.5 $\int\limits_X f(x)d\mu = \lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_X h_n(x)d\mu \leq c < \infty$, т. е. f - мажоранта

$\Rightarrow$ по т. 8.1 $\int\limits_X f_n(x)d\mu \to \int\limits_X f(x)d\mu$ ■

Следствие: Пусть $f_n \in L(X)$, $\forall x \quad f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$,

$c = \sup\limits_n \left| \int\limits_X f_n(x)d\mu \right| < \infty$

Тогда $f(x) := \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) < +\infty$ почти всюду после переопределения на $\{x\colon f(x) = \infty\}$ выполнено, что $f \in L(X)$ и $\int\limits_X f_n(x)d\mu \xrightarrow[n\to\infty]{} \int\limits_X f(x)d\mu$

□ К функциям $g_n(x) = f_n(x) - f_1(x)$ применима теорема 8.2 ■

Теорема 8.3: (Теорема Фату) Пусть f_n - неотрицательные, $f_n(x) \in L(X)$, $f_n(x) \to f(x)$ почти всюду, f измерима (либо μ полна) и $\sup\limits_n \int\limits_X f_n(x)d\mu =$
$= c < \infty$

Тогда $f \in L(X)$ и $\int\limits_X f d\mu \leq \varliminf\limits_{n\to\infty} \int\limits_X f_n(x)d\mu$

□ Переходя к подпоследовательности, можно считать, что $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_X f_n(x)d\mu$

Положим $\varphi_n(x) = \inf\limits_{k\geq n} f_k(x)$

Тогда $0 \leq \varphi_n(x) \leq f_n(x)$ $\forall n$ и $\varphi_n(x) \leq \varphi_{n+1}(x)$

$\Rightarrow \int\limits_X \varphi_n(x)d\mu \leq \int\limits_X f_n(x)d\mu \leq c$

По т. 8.2 $\int\limits_X \lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n(x)d\mu = \lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_X \varphi_n(x)d\mu \le \lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_X f_n(x)d\mu < c$

Но если $f_n(x) \to f(x)$, то $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n\colon \forall n > n_0 \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$
$\Rightarrow \forall n > n_0 \quad \varphi_n(x) = \inf\limits_{k\ge n} f_k(x) \in [f(x)-\varepsilon, f(x)+\varepsilon)$, т. е. $\varphi_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x)$ ■

Теорема 8.4: Пусть μ - классическая мера на $[a,b]$, f ограничена, f непрерывна всюду, кроме множества меры нуль

Тогда f интегрируема и по Риману, и по Лебегу, и $(R)\int\limits_a^b f(x)dx =$
$= (L)\int\limits_{[a,b]} f(x)d\mu$

□ Пусть $T_n = \left(\{x_{n,k}\}_{k=0}^{k_n}, \{\xi_{n,k}\}_{k=1}^{k_n}\right)$ - размеченные разбиения отрезка $[a,b]$, dT_n (диаметры) которых стремятся к 0

Рассмотрим функции $f_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{k_n} f(\xi_{n,k})\chi_{[x_{n,k-1},x_{n,k})}(x)$

Тогда f_n - простые

$(L)\int\limits_{[a,b]} f_n(x)d\mu = \sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_{n,k})(x_{n,k} - x_{n,k-1}) = S_{T_n}(f)$ - интегральная сумма Римана

Если $x \in [a,b)$, x - точка непрерывности, то $f_n(x) = f(\xi_{n,k(x)})$, где $|\xi_{n,k(x)} - x| < dT_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, т. е. $f_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x)$

В силу ограниченности f и неравенства $\sup\limits_X |f_n(x)| \le \sup\limits_X |f(x)| =: M$

Функция $g(x) \equiv M$ является мажорантой, $f_n \to f$ почти всюду, классическая мера Лебега полна

По т. 8.1 $f \in L([a,b])$ $(L)\int\limits_{[a,b]} f_n(x)d\mu \to (L)\int\limits_{[a,b]} f(x)d\mu$

Т. е. $S_{T_n}(f) \to (L)\int\limits_{[a,b]} f(x)d\mu$ $\forall$ последовательности $\{T_n\}$ с $dT_n \to 0$

$\Rightarrow \exists (R)\int\limits_{[a,b]} f(x)dx = (L)\int\limits_{[a,b]} f(x)d\mu$ ■

Замечание: Пусть $\omega_f(x) = \inf\limits_{x\in I}(\sup\limits_I f - \inf\limits_I f)$ - колебание f в точке x

f непрерывна $\Leftrightarrow \omega_f(x) = 0$

Если $\mu\{x\colon \omega_f(x) > 0\} > 0$, то $\exists k\colon \mu\{x\colon \omega_f(x) > \frac{1}{l}\} = \delta > 0$

Тогда $\forall$ разбиения $T = \{x_k\}_{k=1}^n \quad \delta k = (x_{k-1}, x_k)$

$\sum\limits_{k\colon \sup\limits_{\Delta k} f - \inf\limits_{\Delta k} f > \frac{1}{l}} |\Delta k| > \delta$ и тогда разность верхних и нижних сумм Дарбу $\ge \frac{\delta}{l}$

Глава 9

Прямые произведения мер

Определение: Пусть S_1, S_2 - полукольца. Их прямым произведением называется $S = S_1 \times S_2 = \{A_1 \times A_2 \mid A_1 \in S_1, A_2 \in S_2\}$

Лемма 9.1: Если S_1, S_2 - полукольца, то $S = S_1 \times S_2$ - полукольцо

$\square$ (1) $\varnothing \times \varnothing \in S$

(2) $(A_1 \times A_2) \cap (B_1 \times B_2) = (A_1 \cap B_1) \times (A_2 \cap B_2) \in S$

(3) Если $A_1 \times B_1 \subset A \times B$, то $\exists A_k \in S_1, B_j \in S_2 \colon A = \bigsqcup\limits_{k=1}^{n} A_k,\ B = \bigsqcup\limits_{j=1}^{l} B_j$

Тогда $A \times B = \bigsqcup\limits_{k=1}^{n} \bigsqcup\limits_{j=1}^{l} (A_k \times B_j)$, где $A_k \times B_j \in S$ $\blacksquare$

Определение: Пусть m_1, m_2 - меры на полукольцах S_1 и S_2 соответственно. Тогда их произведением называется функция m на $S = S_1 \times S_2$, заданная формулой $m(A \times B) = m_1(A) \cdot m_2(B)$ $(m = m_1 \cdot m_2)$

Лемма 9.2: Произведение двух мер является мерой

$\square$ Пусть $A \times B = \bigsqcup\limits_{k=1}^{n} A_k \times B_k$. Без ограничения общности $A_k \neq \varnothing$, $B_k \neq \varnothing$

Тогда $A_k \subset A$ и $B_k \subset B$

По лемме 3.2 $\exists C_i \in S_1,\ \exists D_j \in S_2 \colon A = \bigsqcup\limits_{i=1}^{p} C_i,\ B = \bigsqcup\limits_{j=1}^{q} D_j;\ A_k = \bigsqcup\limits_{i \in U_k},$ $B_k = \bigsqcup\limits_{j \in V_k} D_j$

$U_k \subset \{1, \ldots, p\}$, $V_k \subset \{1, \ldots, q\}$

Тогда $m(A \times B) = m_1(A) \cdot m_2(B) = \left(\sum\limits_{i=1}^{p} m_1 C_i\right)\left(\sum\limits_{j=1}^{q} m_2 D_j\right) =$

$= \sum\limits_{i=1}^{p} \sum\limits_{j=1}^{q} m_1 C_i \cdot m_2 D_j$

$m(A_k \times B_k) = \sum\limits_{\substack{(i,j)\colon \\ i \in U_k, j \in V_k}} m_1 C_i \times m_2 D_j$

Но $\forall (i,j) \quad \exists! k \colon i \in U_k, j \in V_k$. Поэтому $\sum\limits_{k} \sum\limits_{\substack{(i,j)\colon \\ i \in U_k, j \in V_k}} m_1 C_i \cdot m_2 D_j =$

$= \sum\limits_{i=1}^{p} \sum\limits_{j=1}^{q} m_1 C_j \cdot m_2 D_j$ $\blacksquare$

Теорема 9.1: Пусть (X_1, M_1, m_1), (X_2, M_2, m_2) - пространства с мерой. Тогда мера $m = m_1 \cdot m_2$ счетно-аддитивна и конечна либо σ-конечна на полукольце $S = M_1 \cdot M_2$

$\square$ Пусть μ_1 - продолжение меры m_1 по Лебегу. Пусть $A \times B = \bigsqcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \times B_n$

Положим $f_n(x) = \begin{cases} m_2 B_n, & x \in A_n \\ 0, & x \notin A_n \end{cases}$

Тогда $\int\limits_{X_1} f_n(x) d\mu_1(x) = m_2 B_n \cdot \mu_1 A_n = m_1 A_n \cdot m_2 B_n$

Рассмотрим $x \in A$. Тогда $\forall y \in B \quad \exists! n \colon \begin{cases} x \in A_n \\ y \in B_n \end{cases}$

$B = \bigsqcup\limits_{n \colon x \in A_n} B_n$

В силу σ-аддитивности меры m_2 имеем: $m_2 B = \sum\limits_{n \colon x \in A_n} m_2 B_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$

По теореме Б. Леви $\sum\limits_n m(A_n \times B_n) = \sum\limits_n m_1 A_n \cdot m_2 B_n = \sum\limits_n \int\limits_{X_1} f_n(x) d\mu =$

$= \int\limits_{X_1} \left(\sum\limits_n f_n(x) \right) d\mu_1 = \int\limits_A m_2 B d\mu_1 = m_1 \cdot m_2$ $\blacksquare$

Определение: Пусть (X_1, M_1, m_1), (X_2, M_2, m_2) - пространства с мерой. Прямым произведением мер $\mu = m_1 \times m_2$ называется продолжение по Лебегу меры $m = m_1 \cdot m_2$

Тройка $(X_1 + X_2, \mathfrak{M}, \mu)$ называется прямым произведением пространств с мерой

Теорема 9.2: (Фубини) Пусть $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ - прямое произведение пространств с мерой (X_1, M_1, m_1) и (X_2, M_2, m_2), причем меры m_1 и m_2 полны, и пусть $f \in L(X, \mathfrak{M}, \mu)$

Тогда: (1) функция $f(\cdot, y)$ M_1-измерима для почти всех x

(2) $I(y) = \int\limits_{X_1} f(x,y) dm_1(x)$ существует и конечна для m_2-почти всех y и $I(y) \in L(X_2, M_2, m_2)$

(3) $\int\limits_X f(x,y) d\mu(x,y) = \int\limits_{X_2} I(y) dm_2(y)$

Теорема 9.3: (Тонелли) Пусть $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ - как в т. 9.2, $f(x,y)$ - $\mathfrak{M}$-измеримая, и $\int\limits_{X_2} \left(\int\limits_{X_1} |f(x,y)| dm_1(x) \right) dm_2(y) < \infty$. Тогда $f \in L(X, \mathfrak{M}, \mu)$

$\square$ По лемме 7.1 $\exists$ простые неотрицательные функции $h_n(x,y) \uparrow |f(x,y)|$

Тогда $h_n \in L(X, \mathfrak{M}, \mu)$. Применим к ним теорему Фубини:

$$\int\limits_X h_n(x,y) d\mu(x,y) = \int\limits_{X_2} \left(\int\limits_{X_1} h_n(x,y) dm_1(x) \right) dm_2(y) \le \int\limits_{X_2} \left(\int\limits_{X_1} |f(x,y)| dm_1(x) \right) dm_2(y),$$

т. е. последовательность $\left\{\int\limits_X h_n(x,y)d\mu(x,y)\right\}$ ограничена

По лемме 7.5 $\int\limits_X f(x,y)d\mu(x,y) = \lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_X h_n(x,y)d\mu(x,y)$, т. е. интеграл конечен ■

Глава 10

Заряды

Определение: Пусть M - σ-алгебра. Зарядом на M называется отображение $\Phi\colon M \to \mathbb{R}\colon \forall A, A_n \in M \quad A = \bigsqcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \Rightarrow \Phi(A) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \Phi(A_n)$, где ряд абсолютно сходится

Определение: Пусть Φ - заряд на σ-алгебре M

Множество $B \in M$ называется положительным (относительно Φ), если $\forall E \in M,\ E \subset B$ выполнено $\Phi(E) \geq 0$

Множество $A \in M$ называется отрицательным (относительно Φ), если $\forall E \in M,\ E \subset A$ выполнено $\Phi(E) \leq 0$

Лемма 10.1: (а) Если A - отрицательное, $A_1 \subset A$, $A_1 \in M$, то A_1 - отрицательное

(б) Если $\forall n \quad A_n$ - отрицательное, то $A = \bigcup\limits_{n} A_n$ - отрицательное

$\square$ (а) Если $E \in M$, $E \subset A_1$, то $E \subset A \Rightarrow \Phi(E) \leq 0$

(б) Положим $C_1 = A_1$, $C_n = A_n \setminus \bigcup\limits_{k=1}^{n-1} A_k$

Тогда $C_k \subset A_k$, $C_k \in M \Rightarrow C_k$ - отрицательны в силу (а), при этом $A = \bigsqcup\limits_{n=1}^{\infty} C_n$

Тогда $\forall E \subset A$, $E \in M$; $E = \bigsqcup\limits_{n=1}^{\infty} (E \cap C_n)$

$\Phi(E) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \Phi(E \cap C_n) \leq 0$, т. к. $\forall n \quad \Phi(E \cap C_n) \leq 0$ ■

Лемма 10.2: Пусть Φ - заряд на M, $E \in M$ - неположительное. Тогда $\exists A \in M,\ A \subset E\colon A$ - отрицательное, $\Phi(A) < 0$

$\square$ Пусть E - не положительно. $\exists C \subset E,\ E \in M\colon \Phi(C) < 0$

Положим $D_0 = C$

Пусть построено D_{n-1}, $\Phi(D_{n-1}) < 0$

Если D_{n-1} - отрицательно, то $A = D_{n-1}$ - искомое. Иначе $\exists k_n \in \mathbb{N}$: $\exists C_n \subset D_{n-1}\colon C_n \in M,\ \Phi(C_n) > 0,\ \dfrac{1}{k_n} \leq \Phi(C_n) < \dfrac{1}{k_n - 1}$, причем k_n нельзя уменьшить

Положим $D_n = D_{n-1} \setminus C_n = C \setminus \bigsqcup\limits_{j=1}^{n} C_j$

Возможны два варианта:
(1) $\exists n\colon D_n$ - отрицательно. Положим $A = D_n$
(2) $\forall n \quad D_n$ - неотирцательно. Положим $A = C \setminus \bigsqcup\limits_{j=1}^{\infty} C_j = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} D_n$
Докажем, что A - отрицательно
Т. к. $\Phi(C) = \Phi(A) + \sum\limits_{j=1}^{\infty} \Phi(C_j)$, то $\sum\limits_{j=1}^{\infty} \Phi(C_j) < \infty$
$\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{k_n} < \infty \Rightarrow k_n \to \infty$
Если A - неотрицательно, тогда $\exists E \subset A\colon \Phi(E) > 0$, $\exists n\colon \Phi(E) \geq \dfrac{1}{k_n - 1}$
Это противроечит выбору C_n $\left(\Phi(C_n) < \dfrac{1}{k+1} \leq \Phi(E)\right)$ ■

Теорема 10.1:(Теорема Хана) Пусть Φ - заряд на σ-алгебре M с единицей X. Тогда $\exists A$ - отрицательное, $\exists B$ - положительное : $X = A \sqcup B$
□ Пусть $a = \inf\limits_{\substack{C \subset X \\ C\text{ - отриц.}}} \Phi(C)$ $(a \leq \Phi(\varnothing) = 0)$

$\exists A_n$ - отрицательное: $\Phi(A_n) \to a$. Положим $A = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n$
Тогда A - отрицательное по лемме 10.1(б)
$\forall n \quad \Phi(A) = \Phi(A_n) + \Phi(A \setminus A_n) \leq \Phi(A_n) \Rightarrow \Phi(A) \leq a$
$\Rightarrow \Phi(A) = a$ (т. к. a - точная нижняя грань) $\Rightarrow a > -\infty$
Положим $B = X \setminus A$. Если B - неположительно, то по лемме 10.2 $\exists D \subset B\colon D$ - отрицательное, $\Phi(D) < 0$
Тогда $A \sqcup D$ - отрицательно по лемме 10.1(б)
$\Phi(A \sqcup D) = \Phi(A) + \Phi(D) < \Phi(A) = a$ - противоречит выбору a
$\Rightarrow B$ - положительное ■

Замечание: Если $X = A \sqcup B$ - разложение Хана, то $\forall E \in M \quad \Phi(E) = \Phi(E \cap B) - (-\Phi(E \cap A))$, где $\Phi_+(E) = \Phi(E \cap B)$ и $\Phi_-(E) = -\Phi(E \cap A)$ суть σ-аддитивные меры

Определение: Пусть Φ - заряд на M, μ_1, μ_2 - σ-аддитивные меры на M. Равенство $\Phi = \mu_1 - \mu_2$ называется разложением Жордана для Φ, если $\exists$ непересекающиеся A и $B\colon \mu_1(X \setminus B) = 0$, $\mu_2(X \setminus A) = 0$ (*)

Теорема 10.2: (Теорема Жордана) Для любого заряда Φ разложение Жордана существует и единственное
□ Если $X = A \sqcup B$ - разложение Хана, то $\mu_1 E = \Phi(B \cap E)$ и $\mu_2 E = -\Phi(A \cap E)$ - разложение Жордана (т. к. $E \cap B \subset B$, то $\Phi(E \cap B) \geq 0$)
$\left(\bigsqcup\limits_n E_n\right) \cap B = \bigsqcup\limits_n (E_n \cap B) \Rightarrow \mu_1 \left(\bigsqcup\limits_n E_n\right) = \sum\limits_n \mu_1(E_1)$, т. е. μ_1 - σ-аддитивная мера
Для μ_2 - аналогично
Пусть $\Phi = \mu_1 - \mu_2$ и выплнено (*). Положим $C = X \setminus (A \sqcup B)$
Тогда $C \subset (X \setminus A) \cap (X \setminus B)$, т. е. $\forall E \in M$, $E \subset C$, $\mu_1 E = 0$ и $\mu_2 E = 0$ $\Rightarrow \Phi(E) = 0$
Тогда, например $X = A \sqcup (B \sqcup C)$ - разложение Хана для Φ
$\forall E \subset A \quad \Phi(E) = \mu_1 E - \mu_2 E = -\mu_2 E \leq 0$

$\forall E \subset (B \sqcup C) \quad \Phi(E) = \Phi(E \cap C) + \mu_1(E \cap B) - \mu_2(E \cap B) = \mu_1(E \cap B) \geq 0$

При этом $\mu_1 E = \Phi(E \cap (B \sqcup C))$, $\mu_2 E = -\Phi(E \cap A)$

Пусть $X = A_1 \sqcup B_1 = A_2 \sqcup B_2$ - два разложения Хана, $E \in M$

Покажем, что $\Phi(E \cap B_1) = \Phi(E \cap B_2)$ (это будет означать единственность разложения Жордана)

$\Phi(E \cap B_1) - \Phi(E \cap B_2) = \Phi(E \cap (B_1 \setminus B_2)) - \Phi(E \cap (B_2 \setminus B_1))$

$E \cap (B_1 \setminus B_2) \subset B_1 \Rightarrow \Phi(E \cap (B_1 \setminus B_2)) \geq 0$

$E \cap (B_1 \setminus B_2) \subset A_2 \Rightarrow \Phi(E \cap (B_1 \setminus B_2)) \leq 0$

И аналогично $\Phi(E \cap (B_2 \setminus B_1)) = 0$ ■

Примеры: 1. Линейная комбинация конечных σ-аддитивных мер на одном и том же измеримом пространстве есть заряд

2. Если $f \in L(X, M, \mu)$, то $\Phi(E) = \int\limits_E f(x) d\mu$ - заряд на M (т. 7.3 и следствие)

Определение: Заряд Φ на σ-алгебре M абсолютно непрерывен относительно меры μ на M, если $\forall E \in M$, $\mu E = 0 \Rightarrow \Phi(E) = 0$

Теорема 7.7 (Радон-Никодим) - обобщается на заряды: Если заряд Φ абсолютно непрерывен относительно меры μ, то $\exists f \in L(X, M, \mu)\colon \forall E \in M$

$$\Phi(E) = \int\limits_E f(x) d\mu$$

Замечания: 1. Если (X, M, μ) - пространство с мерой, $f\colon X \to \mathbb{C}$, то она называется интегрируемой по Лебегу, если $u = \mathrm{Re} f$ и $v = \mathrm{Im} f$ интегрируемы по Лебегу

$$\int\limits_X f(x) d\mu \stackrel{def}{=} \int\limits_X u(x) d\mu + i \int\limits_X v(x) d\mu$$

2. Если $f\colon X \to \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$, Φ - заряд на M, $\Phi = \Phi_+ - \Phi_-$ - его разложение Жордана, то $\int\limits_X f d\Phi \stackrel{def}{=} \int\limits_X f d\Phi_+ - \int\limits_X f d\Phi_-$, если оба этих интеграла существуют и конечны

3. Можно также рассматривать интегралы с комплексными значениями $\Phi = \Phi_1 - \Phi_2 + i\Phi_3 - i\Phi_4$, где $\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \Phi_4$ - σ-аддитивные меры

Глава 11

Пространства L_p

Пусть (X, M, μ) - пространство с мерой
Теорема 11.1: (Неравенство Гельдера) Пусть $p > 1$, $q > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

f, g - измеримы, $|f|^p \in L(X)$, $|g|^q \in L(X)$

Тогда $fg \in L(X)$ и $\int\limits_X |f(x)g(x)|d\mu \le \|f\|_p \cdot \|g\|_q$, где $\|f\|_p = \left(\int\limits_X |f(x)|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}$

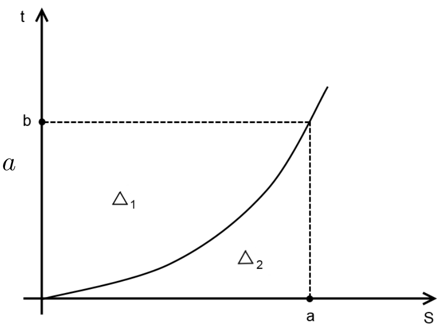
$\square$ 1) Неравенство Юнга: если $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $p > 1$, $q > 1$, $a, b \ge 0$, то $ab \le \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$

$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \Leftrightarrow p + q = pq \Leftrightarrow (p - 1)(q - 1) = 1$

Рассмотрим график $t = s^{p-1}$, он же $s = t^{q-1}$

рассотрим два криволинейных треугольника

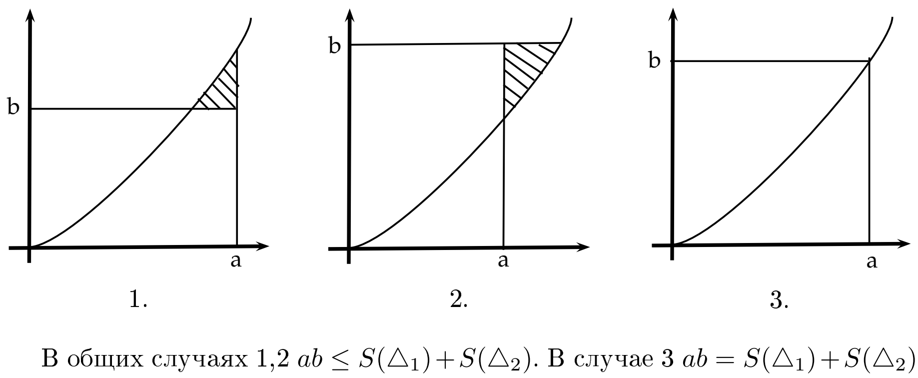
$\triangle_1$ ограничен 0s, графиком и $s = a$



$$S(\triangle_1) = \int\limits_0^a s^{p-1} ds = \frac{a^p}{p}$$

$$S(\triangle_2) = \int\limits_0^b t^{q-1} dt = \frac{b^q}{q}$$

Но либо $a^{p-1} > b$, либо $a^{p-1} < b$, либо $a^{p-1} = b$



В общих случаях 1,2 $ab \le S(\triangle_1) + S(\triangle_2)$. В случае 3 $ab = S(\triangle_1) + S(\triangle_2)$

Неравенство Юнга доказано

Если $\|f\|_p = 0$, то $f(x) = 0$ почти всюду, $f(x) \cdot g(x) = 0$ почти всюду, неравенство превращается в равенство $0 = 0$

Аналогично при $\|g\|_q = 0$

Если $\|f\|_p > 0$, $\|g\|_p > 0$, то рассмотрим функции

$\varphi(x) = \dfrac{f(x)}{\|f\|_p}$, $\psi(x) = \dfrac{g(x)}{\|g\|_q}$

По неравенству Юнга $\forall x \quad |\varphi(x)\psi(x)| = \dfrac{|f(x)g(x)|}{\|f\|_p \cdot \|g\|_q} \leq \dfrac{|f(x)|^p}{p\|f\|_p^p} + \dfrac{|g(x)|^q}{q\|g\|_q^q}$

Проинтегрируем это неравенство:

$$\frac{1}{\|f\|_p \cdot \|g\|_q} \int\limits_X |f(x)g(x)| d\mu \leq \frac{1}{p\|f\|_p^p} \int\limits_X |f(x)|^p d\mu + \frac{1}{q\|g\|_q^q} \int\limits_X |g(x)|^q d\mu = \frac{1}{p} + \\ + \frac{1}{q} = 1$$

Домножая на $\|f\|_p \cdot \|g\|_q$, получаем неравенство Гельдера ■

Теорема 11.2: (Неравенство Минковского) Пусть (X, M, μ) - пространство с мерой, f, g - измеримые, $p \geq 1$, $|f|^p \in L(X)$, $|g|^p \in L(X)$. Тогда $|f+g|^p \in L(X)$ и $\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$

□ Если $p = 1$, то утверждение следует из свойств интеграла Лебега, т. к. $|f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)|$

Пусть $p > 1$. Заметим, что $|f(x) + g(x)| \leq (2\max(|f(x)|, |g(x)|))^p \leq$
$\leq 2^p(|f(x)|^p + |g(x)|^p) \Rightarrow |f+g|^p \in L(X)$

Пусть $q = \frac{p}{p-1}$, тогда $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

Заметим, что $|f(x) + g(x)|^p = |f(x) + g(x)|^{p-1} \cdot |f(x) + g(x)| \leq |f(x)| \cdot \cdot |f(x) + g(x)|^{p-1} + |g(x)| \cdot |f(x) + g(x)|^{p-1}$, где $|f(x) + g(x)|^{p-1} = h(x)$

Но $|h(x)|^q = |f(x)+g(x)|^p \Rightarrow$ пары (f, h) и (g, h) удовлетворяют условиям неравенства Гельдера

Тогда $\|f+g\|_p^p \leq \int\limits_X |f(x)| \cdot |h(x)| d\mu + \int\limits_X |g(x)| \cdot |h(x)| d\mu \leq$(по нер. Гельдера)$\|f\|_p \cdot$

$\cdot \|h\|_q + \|g\|_p \cdot \|h\|_q = (\|f\|_p + \|g\|_p) \cdot \|h\|_q$, где $\|h\|_q = \left(\int\limits_X |f(x) + g(x)|^p d\mu \right)^{1-\frac{1}{p}} =$

$= \|f+g\|_p^{p-1}$

Если $\|f+g\|_p = 0$, то неравенство верно

Иначе сокращаем на $\|f+g\|_p^{p-1}$ и получаем: $\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$ ■

Определение: Пусть (X, M, μ) - пространство с мерой, $p \geq 1$

$\tilde{L}_p(X, M, \mu) = \{f$ - измеримая на $X \colon |f(x)|^p \in L(X, M, \mu)\}$, а $L_p(X, M, \mu) = \tilde{L}_p(X, M, \mu)/\sim$ (где $f \sim g$, если $f(x) = g(x)$ почти всюду)

Теорема 11.3: Если (X, M, μ) - пространство с мерой, $p \geq 1$, то

$$\left(L_p(X, M, \mu), \|f\|_p = \left(\int\limits_X |f(x)|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \right)$$ - нормированное пространство

□ Если $f, g \in \tilde{L}_p$, то по неравенству Минковского $\|f\|_p \leq \|g\|_p + \|f-g\|_p$, $\|g\|_p \leq \|f\|_p + \|f-g\|_p$, т. е. $|\|f\|_p - \|g\|_p| \leq \|f-g\|_p$

$\Rightarrow$ Если $f \sim g$, то $\|f\|_p = \|g\|_p$

То, что $\tilde{L}_p$ - линейное пространство, следует из неравенства Минковского

Проверим аксиомы нормы:

(3) = неравенство Минковского

(2) $\|\alpha f\|_p = \left(\int\limits_X |\alpha f(x)|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} = \left(|\alpha|^p \int\limits_X |f(x)|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} = |\alpha| \cdot \|f\|_p$

(1) Если $f \in \tilde{L}_p$, $\|f\|_p = 0$, то $f = 0$ почти всюду, т. е. $f \sim 0$, т. е. $f = 0$ в смысле L_p

Обратно, если $f = 0$ почти всюду, то $\|f\|_p = 0$ ■

Лемма 11.1: Пусть $\mu X < \infty$, $p > 1$. Тогда $L_p(X) \in L_1(X)$ и $\exists c = c(p, X)$: $\forall f \in L_p \quad \|f\|_1 \leq c \cdot \|f\|_p$ (в частности, если $\|f_n - f\|_p \to 0$, то $\|f_n - f\|_1 \to 0$)

□ Применим неравенство Гельдера с $g(x) \equiv 1$, $q = \frac{p}{p-1}$

Тогда $\|f\|_1 = \int\limits_X |f(x)| \cdot 1 d\mu \leq \|f\|_p \cdot \|1\|_q = (\mu X)^{\frac{p-1}{p}} \|f\|_p$ ■

Лемма 11.2: Пусть $\{f_n\}$ - последовательность, фундаментальная в $L_1(X, M, \mu)$. Тогда $\exists \{n_k\}$, $\exists f$ - измеримая : $f_{n_k}(x) \to f(x)$ почти всюду

□ В силу фундаментальности можно по индукции выбрать такие $\{n_k\}$, $n_{k+1} > n_k$: $\forall n > n_k$ выполнено $\|f_n - f_{n_k}\| < \frac{1}{2^k}$

Рассмотрим ряд $|f_{n_1}(x)| + \sum\limits_{k=1}^{\infty} |f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)|$ и его частичные суммы

$S_N(x) = |f_{n_1}(x)| + \sum\limits_{k=1}^{N} |f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)|$

Тогда $S_{N+1}(x) \geq S_N(x) \quad \forall x$ и $\int\limits_X S_N(x) d\mu = \int\limits_X |f_{n_1}(x)| d\mu + \sum\limits_{k=1}^{N} \int\limits_X |f_{n_{k+1}}(x) -$

$- f_{n_k}(x)| d\mu = \|f_{n_1}\|_1 + \sum\limits_{k=1}^{N} \|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\|_1 \leq \|f_{n_1}\|_1 + \sum\limits_{k=1}^{N} \frac{1}{2^k} < \|f_{n_1}\| + 1$

По теореме Б. Леви $\lim\limits_{N\to\infty} S_N(x)$ конечен почти всюду, т. е. ряд $|f_{n_1}(x)| +$ $+ \sum\limits_{k=1}^{N} |f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)|$ сходится почти всюду

Тем более сходится ряд $f_{n_1}(x) + \sum\limits_{k=1}^{\infty} \big(f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)\big)$, но $\sigma_N(x) = f_{n_1}(x) +$ $+ \sum\limits_{k=1}^{N} \big(f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)\big) = f_{n_{N+1}}(x)$

Обозначим $f(x) = \lim\limits_{k\to\infty} f_{n_k}(x)$ там, где $\{\sigma_N(x)\}$ сходится, и доопределим $f \equiv 0$ там, где $\{\sigma_N(x)\}$ не сходится ■

Лемма 11.3: Пусть $p > 1$, $\{f_n\}$ - фундаментальна в $L_p(X, M, \mu)$. Тогда $\exists \{n_k\}$, $\exists f$ - измеримая : $f_{n_k} \to f$ почти всюду

□ Если $\mu X < \infty$, то $\{f_{n_k}\}$ - фундаментальная в L_p, то по л. 11.1 $\{f_{n_k}\}$ - фундаментальная в L_1

$(\|f_{n_k} - f_{n_j}\|_p \leq c \cdot \|f_{n_k} - f_{n_j}\|_1 \leq c_\varepsilon)$

Пусть мера σ - конечна, т. е. $\exists X_l \in M\colon \mu X_l < \infty$, $X = \bigsqcup\limits_{l=1}^{\infty} X_l$. По доказанному $\exists \{n_k^{(1)}\}$, $\exists f^{(1)}$ - измеримая на $X_1\colon f_{n_k}^{(1)} \to f^{(1)}$ почти всюду на X_1

Из $\{n_k^{(1)}\}$ выберем $\{n_k^{(2)}\}$, которые таковы, что $f_{n_k}^{(2)}$ сходятся почти всюду на X_2 к некоторой измеримой $f^{(2)}$

По индуции из $\{n_{k_l}^{(l)}\colon f_{n_k}^{(l)}$ сходится почти всюду на $\bigsqcup\limits_{j=1}^{l} X_j$, выберем $\{n_k^{(l+1)}\}$: $f_{n_k}^{(l+1)}$ сходится почти всюду на X_{l+1}

Рассмотрим подпоследовательность $n_k^{(k)}$. Тогда $\forall \{n_k^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ - подпоследовательность в $\{n_j^{(l)}\}_{j=1}^{\infty} \Rightarrow \{f_{n_k}^{(k)}\}$ сходится почти всюду на $X_l \Rightarrow \{f_{n_k}^{(k)}\}$ сходится всюду на X, кроме счетного объединения множеств меры нуль, к $f(x) = \begin{cases} f^{(l)}, & \text{если } x \in X_l \text{ - точка сходимости} \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$ ■

Теорема 11.4: Пусть (X, M, μ) - пространство с мерой, $p \geq 1$. Тогда нормированное пространство $L_p(X, M, \mu)$ полно

□ Пусть $\{f_1\}$ - фундаментальная. По лемме 11.3 $\exists \{n_k\}$, $\exists f$ - измеримая : $f_{n_k} \to f$ почти всюду

Но $\{f_{n_k}\}$ - фундаментальная по норме $L_p \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall k, l > N \quad \|f_{n_k} - - f_{n_l}\|_p < \varepsilon$

Функции $\varphi_l(x) = |f_{n_k}(x) - f_{n_l}(x)|^p$

Тогда $\varphi_l(x) \geq 0$, $\varphi_l(x) \xrightarrow[l\to\infty]{} |f_{n_k}(x) - f(x)|^p$ почти всюду

$\int\limits_X |f_{n_k}(x) - f(x)|^p d\mu \leq \varliminf\limits_{l\to\infty} \int\limits_X \varphi_l(x) d\mu \leq \varepsilon^p$, т. е. $\|f_{n_k} - f\| \leq \varepsilon$ $(\forall k > N)$

Итак, $f_{n_k} - f \in L_p$, тогда по неравенсвту Минковского $\|f(x)\| = \|f_{n_k}(x)\| + + \|\,(f(x) - f_{n_k}(x))\,\| \in L_p$ и $\forall k > N \quad \|f_{n_k} - f\|_p \leq \varepsilon$, т. е. $f_{n_k} \to f$ в норме L_p

По лемме 1.2 $f_n \to f$ в L_p ■

Определене: Пусть (X, M, μ) - пространство с мерой,

$\tilde{L}_\infty(X, M, \mu) = \{f$ - измеримые : $\exists g \sim f\colon g$ - ограниченная на $X\}$, $L_\infty(X, M, \mu) = \tilde{L}_\infty(X, M, \mu)/\sim$, $\|f\|_\infty = \inf\limits_{g\sim f} \sup\limits_{x\in X} |g(x)| \overset{(*)}{=} \inf\{c\colon \mu\{x\colon |f(x)| > c\} = 0\}$

Теорема 11.5: $(L_\infty(X, M, \mu), \|f\|_\infty)$ есть банахово пространство

□ (1) проверим равенство (*)

Если $g \sim f$, $\sup\limits_x |g(x)| = c$, то $\mu\{x\colon |f(x)| > c\} \leq \mu\{x\colon f(x) \neq g(x)\} = 0$

Обратно, если $\mu\{x\colon |f(x)| > c\} = 0$, $g(x) = \begin{cases} f(x), & \text{если } |f(x)| \leq c \\ 0, & \text{если } |f(x)| > c \end{cases}$,

то $g \sim f$ и $\sup |g(x)| \leq c$

(2) Проверим аксиомы нормы

1. Если $\|f\|_\infty = 0$, то $f \sim 0$

2. Если $g \sim f$, $\sup |g| = c$, то $\alpha g \sim \alpha f$, $\sup |\alpha g| = |\alpha| c$

3. Если $|f| \leq c_1$ почти всюду, $|g| \leq c_2$ почти всюду, то $|f + g| \leq c_1 + c_2$ почти всюду

$\Rightarrow \|f+g\|_\infty \le c_1 + c_2$: inf по c_1 и c_2 дает неравенство треугольника

(3) Проверим полноту

Пусть $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ - фундаментальная в L_∞

Пусть $E_n = \{x\colon |f_n(x)| > \|f_n\|_\infty\}$, $E_{n,m} = \{x\colon |f_n(x) - f_m(x)| > \|f_n - f_m\|_\infty\}$

Тогда $\mu E_n = 0$, $\mu E_{n,m} = 0$

На множестве $X \setminus \underbrace{\left(\bigsqcup\limits_n E_n \sqcup \bigsqcup\limits_{n,m} E_{n,m}\right)}_{\text{меры нуль}}$ $\{f_n\}$ удовлетворяют критерию Коши равномерной сходимости

$\Rightarrow \exists f\colon f_n \rightrightarrows f$ на X_0, тогда $\exists N\colon \sup\limits_{X_0} |f_N(x) - f(x)| < 1$

Тогда $\sup\limits_{X_0} |f(x)| \le \sup\limits_{X_0} |f_N(x)| + 1 \le \|f_N\|_\infty + 1$

Т. е. $f \in \tilde{L}_p(X, M, \mu)$ и $\|f_n - f\|_\infty \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, т. к. сходимость равномерна на X_0 ■

Глава 12

Абсолютно непрерывные функции

Определение: Функция $f(x)$ назвается абсолютно непрерывной на $[a,b]$, ($f \in AC([a,b])$), если $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0\colon \forall$ системы попарно непересекающихся интервалов $\{(a_k, b_k)\}_{k=1}^{n}$ из $[a,b] \subset \sum\limits_{k=1}^{n}(b_k - a_k) < \delta$ выполнено условие $\sum\limits_{k=1}^{n}|f(b_k) - f(a_k)| < \varepsilon$

Лемма 12.1: Если μ - классическая мера на $[a,b]$, $f \in C([a,b])$, $F(x) = \int\limits_{[a,x]} f(t)d\mu(t)$, то $F \in AC([a,b])$

$\square$ Заметим, что $F(b_k) - F(a_k) = \int\limits_{(a_k,b_k]} f(x)d\mu$

$$\sum_{k=1}^{n}|F(b_k)-F(a_k)| \le \sum_{k=1}^{n}\int\limits_{(a_k,b_k]}|f(x)|d\mu = \int\limits_{\bigsqcup\limits_{k=1}^{n}(a_k,b_k]}|f(x)|d\mu, \text{ где } \mu\left(\bigsqcup_{k=1}^{n}(a_k,b_k]\right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n}(b_k - a_k)$$

$\Rightarrow$ из т. об абсолютной непрерывности интеграла Лебега получаем утверждение леммы $\blacksquare$

Теорема 12.1: Если μ - классическая мера Лебега на $[a,b]$, $f \in AC([a,b])$, то: (1) $f'(x)$ существует почти всюду на $[a,b]$ и $f' \in L([a,b])$

(2) $\forall x \in (a,b] \quad f(x) = f(a) + \int\limits_{[a,x]} f'(t)d\mu(t)$

Лемма 12.2: Пусть $f, g \in AC(([a,b])$. Тогда $f(x)\cdot g(x) \in AC([a,b])$

$\square$ Пусть $a \le \alpha \le \beta \le b$. Тогда $fg(\beta) - fg(\alpha) = f(\beta)g(\beta) - f(\beta)g(\alpha) + f(\beta)g(\alpha) - f(\alpha)g(\alpha) - f(\beta)\left(g(\beta) - g(\alpha)\right) + g(\alpha)\left(f(\beta) - f(\alpha)\right)$

Т. к. f и g непрерывны, то $\max\limits_{[a,b]}|f| < \infty$, $\max\limits_{[a,b]}|g| < \infty$

Пусть $\varepsilon > 0$. $\exists \delta \colon \forall \{(a_k, b_k)\}$ - попарно непересекающихся из $[a, b]$ выполнено: $\sum\limits_k |f(b_k) - f(a_k)| < \frac{\varepsilon}{2 \max |g|}$, $\sum\limits_k |g(b_k) - g(a_k)| < \frac{\varepsilon}{2 \max |f|}$

Тогда $\sum\limits_k |f(b_k)g(b_k) - f(a_k)g(a_k)| \leq \max |f| \cdot \sum\limits_k |g(b_k) - g(a_k)| + \max |g| \cdot$ $\cdot \sum\limits_k |f(b_k) - f(a_k)| < \varepsilon$ ■

Теорема 12.2: (Интегрирование по частям) Пусть μ - классическая мера Лебега на $[a, b]$, $f, g \in AC([a, b])$. Тогда $\int\limits_{[a,b]} f(x)g'(x)d\mu = f(b)g(b) - f(a)g(a) -$ $- \int\limits_{[a,b]} f'(x)g(x)d\mu$

□ f - непрерывная, $g \in L([a, b])$ по т. 12.1(1) $\Rightarrow |f(x)g'(x)| \leq \max |f| \cdot |g'(x)|$ и fg' измерима как произведение двух измеримых $\Rightarrow fg' \in L([a, b])$

Аналогично $f'g \in L([a, b])$

По лемме 12.2 $fg \in AC([a, b]) \Rightarrow$ по теореме 12.1(2) $f(b)g(b) - f(a)g(a) =$ $= \int\limits_{[a,b]} (fg)'(x)d\mu$

Но $(fg)'(x) = f(x)g'(x) + f'(x)g(x)$ в каждой точке, где $fg'(x)$ и $f'(x)$, т. е. почти всюду

Интегрируя это равенство, получаем утверждение теоремы ■

Лемма 12.3: Пусть f - строго возрастающая функция из $AC([a, b])$, $f \colon [a, b] \to [c, d]$, и задано $E \subset [c, d]$, E - измеримое относительно классической меры Лебега. Тогда $\mu E = \int\limits_{[c,d]} \chi_E(x)d\mu = \int\limits_{[a,b]} \chi_E\left(f(t)\right) f'(t)d\mu(t)$ $(*)$

□ (1) Если $E = (\gamma, \delta)$, $f(\alpha) = \gamma$, $f(\beta) = \delta$, то $\int\limits_{[a,b]} \chi_E(f(t))f'(t)d\mu(t) =$ $= \int\limits_{[\alpha,\beta]} f'(t)d\mu(t) \overset{\text{т. } 12.1}{=} f(\beta) - f(\alpha) = \delta - \gamma = \mu E$

(2) Если E - конечное дизъюнктное объединение промежутков ($E \in$ $\in R(S)$), то $(*)$ получается по линейности

(3) Если $E = \bigsqcup\limits_{n=1}^{\infty} I_n$, I_n - промежуток, то положим $E_k = \bigsqcup\limits_{n=1}^{k} I_n$

Тогда $\mu E_k = \int\limits_{[a,b]} \chi_{E_k}(f(t))f'(t)d\mu(t)$, $\chi_{E_k}(f(t))f'(t) \uparrow \chi_E(f(t))f'(t)$ почти всюду и $E = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} E_k$, $E_k \subset E_{k+1}$

Переходя к пределу (слева - по теореме о непрерывности меры, справа - по теореме Б. Леви) получаем (*) для множества E

(4) Пусть $E = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} E_n$, где для E_n (*) доказано, и $E_n \supset E_{n+1}$

Тогда $\chi_{E_k}(f(t))f'(t) \leq f'(t) \in L$

$f'(t) - \chi_{E_k}(f(t))f'(t) \uparrow f'(t) - \chi_E(f(t))f'(t)$

$\Rightarrow$ по т. Леви $\int\limits_{[a,b]} \chi_{E_k}(f(t))f'(t)d\mu(t) \to \int\limits_{[a,b]} \chi_E(f(t))f'(t)d\mu(t)$

$\mu E_k \to \mu E$ в силу конечности меры $\Leftrightarrow$ ее непрерывности сверху

Поэтому (*) верно для E

(5) Пусть $E \in \mathfrak{M}$. Докажем, что $\exists G_n$ - счетное объединение элементов S (промежутков) таких, что $G_n \supset G_{n+1}$, $E = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} G_n \setminus P$, где $\mu P = 0$

Действительно, по определению внешней меры $\exists H_n = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} I_{n,k}$, $I_{n,k} \in$ $\in S\colon H_n \supset E$, $\mu(H_n \setminus E) = \mu H_n - \mu_E = \frac{1}{n}$

Положим $G_n = \bigcap\limits_{l=1}^{n} H_l$, тогда $G_n \supset G_{n+1}$, $H_n \supset G_n \supset E$, $\mu(G_n \setminus E) \leq$ $\leq \mu(H_n \setminus E) < \frac{1}{n}$

По свойству непрерывности меры $\mu\left(\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}(G_n \setminus E)\right) = \mu\left((\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} G_n) \setminus E\right) =$ $= \lim\limits_{n\to\infty} \mu(G_n \setminus E) = 0$

Но если $H = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} I_n$, $\tilde{H} = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} \mathcal{I}_k$, где $I_n, \mathcal{I}_k \in S$, то $H \cap \tilde{H} = \left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} I_n\right) \cap$ $\cap \left(\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} \mathcal{I}_k\right) = \bigcup\limits_{n,k}(I_n \cap \mathcal{I}_k)$, где $I_n \cap \mathcal{I}_k \in S$

По индукции получаем, что $\forall n \quad G_n = \bigcap\limits_{l=1}^{n} H_l$ есть счетное объединение элементов S (промежутков)

(6) Если $E = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} I_n$, то $E \bigsqcup\limits_{n=1}^{\infty} I_n \setminus \left(\bigcup\limits_{k=1}^{n-1}(I_k \cap I_n)\right)$, где $\mathcal{I}_n = \bigcup\limits_{k=1}^{n-1}(I_k \cap I_n) \in$ $\in R(S) \Rightarrow \mathcal{I}_n = \bigsqcup\limits_{i} \mathcal{I}_{n,i}, \quad \mathcal{I}_{n,i} \in S$

$\Rightarrow$ по лемме 3.2 $I_n \setminus \mathcal{I}_n$ есть конечное дизъюнктное объединение элементов S

Тогда E есть счетное дизъюнктное объединение элементов S

(7) Пусть $E \in \mathfrak{M}$, в силу п. 5 $E = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} G_n \setminus P$, $\mu P = 0$, где в силу п. 6 G_n удовлетворяет условиям п. 3 $\Rightarrow$ (*) верно для G_n

$\Rightarrow$ в силу п. 4 (*) верно для $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} G_n$, и осталось доказать, что (*) верно для P

В силу п. 5 $P = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \tilde{G}_n \setminus \tilde{P}$, где для $P_1 = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \tilde{G}_n$ равенство (*) верно,и $\mu P_1 = \mu P + \mu\tilde{P} = 0$, т. е. (*) для P_1 принимает вид:

$0 = \mu P_1 = \int\limits_{[a,b]} \chi_{P_1}(f(t))f'(t)d\mu(t)$

Но $P \subset P_1$, $f'(t) \geq 0$, то $0 \leq \chi_P(f(t))f'(t) \leq \chi_{P_1}(f(t))f'(t)$

$\Rightarrow 0 = \mu P = \int\limits_{[a,b]} \chi_P(f(t))f'(t)d\mu(t) = 0$, т. е. (*) верно для $P \Rightarrow$ и для E ■

Теорема 12.3: Пусть $g \in AC([a,b])$, $g\colon [a,b] \to [c,d]$, $f \in L([a,b])$, g - строго возрастает, μ - классическая мера Лебега

Тогда $\int\limits_{[c,d]} f(x)d\mu(x) = \int\limits_{[a,b]} f(g(t))g'(t)d\mu(t)$ (**)

$\square$ Если $f(x) = \chi_E(x)$, $E \in \mathfrak{M}$, то утверждение доказано в лемме 12.3

По линейности утверждение верно для простых функций. Если f - интегрируемая, неотрицательная, то по л. 7.1 $\exists$ простые неотрицательные $h_n \uparrow f$ и по т. 7.2 $\int\limits_{[c,d]} h_n(x)d\mu(x) \to \int\limits_{[c,d]} f(x)d\mu(x)$

Но $h_n(g(t))g'(t) \uparrow f(g(t))g'(t)$

По теореме Б. Леви $\int\limits_{[a,b]} h_n(g(t))g'(t)d\mu \to \int\limits_{[a,b]} f(g(t))g'(t)d\mu(t)$

$\int\limits_{[a,b]} h_n(g(t))g'(t)d\mu = \int\limits_{[c,d]} h_n(x)d\mu(x) \to \int\limits_{[c,d]} f(x)d\mu(x) < \infty$

Причем $f(g(t))g'(t) \in L([a,b])$ по т. Леви, и (**) верно для f

Если $f \in L([a,b])$ - любого знака, то $f = f_+ - f_-$

$\Big(f(g(t))g'(t) = f_+(g(t))g'(t)$, т. к. $g'(t) \geq 0\Big)$

Поэтому, записывая (*) для f_+ и f_- и вычитая, получаем (**) для f $\blacksquare$

Глава 13

Преобразование Фурье в $L_1(\mathbb{R})$

Определение: Пусть μ - классическая мера Лебега на прямой, $f \in L_1(\mathbb{R}, \mathfrak{M}, \mu)$. Ее преобразованием Фурье называется функция $\hat{f}(\xi) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\mathbb{R}} f(x) e^{-ix\xi} d\mu(x)$

Замечание: (1) Определение может отличаться множителем перед интегралом и/или знаком в показателе

(2) (Пока) мы рассматриваем $\xi \in \mathbb{R}$, но при дополнительных условиях можно рассматривать и $\xi \in \mathbb{C}$

Определение: $C_0(\mathbb{R}) = \{f$ - непрерывная на $\mathbb{R}\colon \lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = 0\}$, $\|f\|_{C_0(\mathbb{R})} = \max\limits_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|$

Несложно видеть, что $C_0(\mathbb{R})$ - нормированное пространство

Теорема 13.1: Пусть $f \in L_1(\mathbb{R})$. Тогда:

(1) $\forall \xi \in \mathbb{R} \quad \exists \hat{f}(\xi)$

(2) $\hat{f} \in C_0(\mathbb{R})$ и $\|\hat{f}\|_{C_0} \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|f\|_1$

$\square$ (1) Т. к. $|e^{-ix\xi}| = 1$ при $x \in \mathbb{R}, \xi \in \mathbb{R}$, то $f(x)e^{-ix\xi} \in L(\mathbb{R})$ и $|\int\limits_{\mathbb{R}} f(x) e^{-ix\xi} d\mu(x)| \leq \int\limits_{\mathbb{R}} |f(x)| d\mu(x) = \|f\|_1$

Если $f(x) = \chi_{[a,b]}(x)$, то $\hat{f}(\xi) = \dfrac{e^{-ib\xi} - e^{-ia\xi}}{-i\sqrt{2\pi}\xi}$, $\xi \neq 0$

$\hat{f}(0) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{[a,b]} d\mu(x) = \dfrac{b-a}{\sqrt{2\pi}}$

$\lim\limits_{\xi \to 0} \hat{f}(\xi) = \dfrac{(1 - ib\xi) - (1 - ia\xi) - o(\xi)}{-i\sqrt{2\pi}\xi} = \dfrac{b-a}{\sqrt{2\pi}} = \hat{f}(0) \Rightarrow \hat{f} \in C_0(\mathbb{R})$

Тогда для $f = \sum\limits_{k=1}^{n} C_k \chi_{[a_k, b_k]}(x)$ выполнено $\hat{f} \in C_0(\mathbb{R})$

Поскольку (!) $\forall f \in L_1 \quad \exists f_n$ - линейные комбинации индикаторов такие, что $\|f_n - f\|_1 \to 0$, то $\sup\limits_{\xi} |\hat{f}_n(\xi) - \hat{f}(\xi)| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|f_n - f\|_1 \to 0$, т. е. $\hat{f}_n(\xi) \rightrightarrows \hat{f}(\xi)$

Но равномерный предел непрерывных функций непрерывен, а равномерный предел функций, стремящихся к нулю есть функция, стремящаяся к нулю

Поэтому $\hat{f} \in C_0(\mathbb{R})$ ■

Следствие: Если $f \in L_1(\mathbb{R})$, то $\int\limits_{\mathbb{R}} f(x)\sin(\lambda x)d\mu(x) \xrightarrow[\lambda\to\pm\infty]{} 0$

$\square \int\limits_{\mathbb{R}} f(x)\sin(\lambda x)d\mu(x) = \int\limits_{\mathbb{R}} f(x)\dfrac{e^{i\lambda x} - e^{-i\lambda x}}{2i}d\mu(x) =$

$= \dfrac{\sqrt{2\pi}}{2i}\left(\hat{f}(-\lambda) - \hat{f}(\lambda)\right) \xrightarrow[\lambda\to\pm\infty]{} 0$ ■

Формула обращения

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi)e^{ix\xi}d\xi$$

Определим $\sigma_R(f,x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-R}^{R} \hat{f}(\xi)e^{ix\xi}d\xi$

Лемма 13.1: Если $f \in L_1(\mathbb{R})$, то $\sigma_R(f,x) = \dfrac{1}{\pi}\int\limits_{\mathbb{R}} f(x+t)\dfrac{\sin Rt}{t}dt$

$\square\ \sigma_R(f,x) = \dfrac{1}{2\pi}\int\limits_{-R}^{R}\int\limits_{\mathbb{R}} f(t)e^{-i(x-t)\xi}dtd\xi$

Функция $g(t,\xi) = f(t)e^{i(x-t)\xi}$ интегрируемая по Лебегу на $\mathbb{R}\times[-R,R]$ по теореме Тонелли $\left(\exists \text{ повторный } \int\limits_{-R}^{R}\int\limits_{\mathbb{R}} |g(t,\xi)|dtd\xi\right)$

По теореме Фубини можно переставить интегралы: $\sigma_R(f,x) = \int\limits_{\mathbb{R}} f(t)\int\limits_{-R}^{R} e^{i(x-t)\xi}d\xi dt =$

$= \dfrac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}} f(t)\dfrac{e^{i(x-t)R} - e^{-i(x-t)R}}{i(x-t)}dt = \dfrac{1}{\pi}\int\limits_{\mathbb{R}} f(t)\dfrac{\sin R(x-t)}{x-t}dt = (t = x+s) =$

$= \dfrac{1}{\pi}\int\limits_{\mathbb{R}} f(x+s)\dfrac{\sin Rs}{s}ds$ ■

Теорема 13.2: (Условие Дини) Пусть $f \in L_1(\mathbb{R})$, $x \in \mathbb{R}$ и $\exists\delta > 0$:

$\left|\dfrac{f(x+t) - f(x)}{t}\right| \in L([-\delta,\delta])$ (как функция t). Тогда $f(x) = \lim\limits_{R\to\infty}\sigma_R(f,x)$

$\square$ Пусть задано $\varepsilon > 0$. Т. к. $\int\limits_{\mathbb{R}} \dfrac{\sin Rs}{s}ds = \pi$ (несобственный, римановский,

$R>0$) то $\exists c_0>0\colon \forall c>c_0 \quad \left|\int\limits_{-c}^{c}\frac{\sin t}{t}dt-\pi\right|<\frac{\varepsilon}{2(1+|f(x)|)}$

Тогда $\forall R>1 \quad \left|\int\limits_{-c}^{c}\frac{\sin Rt}{t}dt-\pi\right|=\left|\int\limits_{-cR}^{cR}\frac{\sin s}{s}ds-\pi\right|<\frac{\varepsilon}{2(1+|f(x)|)}$

Тогда $\left|f(x)-\frac{f(x)}{\pi}\int\limits_{-c}^{c}\frac{\sin Rt}{t}dt\right|<\frac{\varepsilon}{2}$

Но $\left|\sigma_R(f,x)-\frac{f(x)}{\pi}\int\limits_{-c}^{c}\frac{\sin Rt}{t}dt\right|=\left|\frac{1}{\pi}\int\limits_{-c}^{c}\frac{f(x+t)-f(x)}{t}\sin Rtdt\right|+\left|\frac{1}{\pi}\int\limits_{\{|x|>c\}}\frac{f(x+t)}{t}\sin Rtdt\right|\leq$

$\leq\left|\frac{1}{\pi}\int\limits_{\mathbb{R}}\frac{f(x+t)-f(x)}{t}\chi_{[-c,c]}(t)\sin Rtdt\right|+\left|\frac{1}{\pi}\int\limits_{\mathbb{R}}\frac{f(x+t)}{t}\chi_{\{|t|\geq c\}}(t)\sin Rtdt\right|$

$\frac{f(x+t)-f(x)}{t}\chi_{[-c,c]}(t)=g_1(t)$, $\frac{f(x+t)}{t}\chi_{\{|t|\geq c\}}(t)=g_2(t)$

Заметим, что $g_1\in L(\mathbb{R})$, $g_2\in L(\mathbb{R})$

$|g_1(t)|\leq\frac{|f(x+t)|+|f(x)|}{\delta}$ при $|t|\geq\delta$, а при $|t|\leq\delta$ g_1 интегрируема в силу условий Дини

$|g_2(t)|\leq\frac{|f(x+t)|}{c}$ $\forall t$

По следствию из т. 13.1 $\int\limits_{\mathbb{R}}g_1(t)\sin Rtdt\xrightarrow[R\to\infty]{}0$, $\int\limits_{\mathbb{R}}g_2(t)\sin Rtdt\xrightarrow[R\to\infty]{}0$

При больших R: $\left|\sigma_R(f,x)-\frac{f(x)}{\pi}\int\limits_{-c}^{c}\frac{\sin Rt}{t}dt\right|<\frac{\varepsilon}{2}$, $|\sigma_R(f,x)-f(x)|<\varepsilon$

■

Лемма 13.2: Пусть $f\in L([a,b])$ с классической мерой $\forall c\in(a,b] \quad F(c)=\int\limits_{[a,c]}f(x)d\mu(x)=0$. Тогда $f(x)=0$ почти всюду

□ Пусть $E=[\alpha,\beta]\in S$ - полукольцо промежутков

Тогда $\int\limits_{E}f(x)d\mu=F(\beta)-F(\alpha)=0$

Тогда $\forall B\in R(S) \quad \int\limits_{B}f(x)d\mu=0$

Пусть $A\in\mathfrak{M}$. $\forall\varepsilon>0 \quad \exists\delta>0\colon$ если $\mu E<\delta$, то $\int\limits_{E}|f(x)|d\mu<\varepsilon$, но $\exists B\in R(S)\colon \mu(A\triangle B)<\delta$

Тогда $\left|\int\limits_{A}fd\mu-\int\limits_{B}fd\mu\right|\leq\int\limits_{A\triangle B}|f|d\mu<\varepsilon$

Т. к. A - фиксированное, ε - любое, то $\int\limits_{A}fd\mu=0$

Предположим, что $f \nsim 0$. Для определенности пусть $\mu\{x\colon f(x) > 0\} > 0$

Т. к. $\{x\colon f(x) > 0\} = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \{x\colon f(x) > \frac{1}{n}\}$ $\exists n_0\colon \mu A_{n_0} = \mu\{x\colon f(x) > \dfrac{1}{n_0} > 0$

$\int\limits_{A_{n_0}} f(x) d\mu \geq \dfrac{\mu A_{n_0}}{n_0} > 0$

Противоречие, следовательно $f(x) = 0$ почти всюду ■

Теорема 13.3: (единственности) Пусть $f \in L_1(\mathbb{R})$ и $\hat{f}(\xi) = 0 \quad \forall \xi$. Тогда $f(x) = 0$ почти всюду

□ Положим $F_y(x) = \int\limits_{[0,y]} f(x+t) dt = \int\limits_{[x,x+y]} f(t) dt$

Фиксируем y: $\int\limits_{\mathbb{R}} |F_y(x)| dy = \int\limits_{\mathbb{R}} \left| \int\limits_{[0,y]} f(x+t) dt \right| dx \leq \int\limits_{\mathbb{R}} \int\limits_{[0,y]} |f(x+t)| dt dx =$

$= \int\limits_{[0,y]} \int\limits_{\mathbb{R}} |f(x+t)| dx dt = y \|f\|_{L_1(\mathbb{R})} < \infty \Rightarrow F_y(x) \in L_1(\mathbb{R})$

$\hat{F}_y(\xi) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\mathbb{R}} F_y(x) e^{-ix\xi} dx = \int\limits_{\mathbb{R}} \int\limits_{[0,y]} f(x+t) dt e^{-ix\xi} dx = \int\limits_{[0,y]} \int\limits_{\mathbb{R}} f(x+t) e^{-i(x+t)\xi} dx e^{it\xi} dt =$

=(перестановка по т. Тонелли и т. Фубини)$= \int\limits_{[0,y]} 0 \cdot e^{it\xi} dt = 0$

Т. к. $F_y(x) = \int\limits_{[x,x+y]} f(t) dt$, то $F_y(x) \in AC([a,b])$ на любом $[a,b] \subset \mathbb{R}$, т. е. $F_y(x)$ дифференцируема почти всюду на каждом отрезке, т. е. почти всюду на $\mathbb{R}$

Но если $\exists F'_y(x_0)$, то $\int\limits_{-\delta}^{\delta} \left| \dfrac{F_y(x_0+t) - F_y(x_0)}{t} \right| dt < \infty$

$\Rightarrow$ в каждой точке дифференцируемости выполнено условие Дини

$\Rightarrow F_y(x) = 0$ почти всюду, но $F_y(x)$ непрерывна $\Rightarrow F_y(x) = 0 \quad \forall x \forall y$

Фиксируем $x = 0$: $\forall y \quad \int\limits_{[0,y]} f(t) dt = 0$

По лемме 13.2 $f(t) = 0$ почти всюду на $[0,y]$, т. е. почти всюду на $\mathbb{R}$ ■

Теорема 13.4: Пусть $f \in AC[a,b] \quad \forall a,b \in \mathbb{R}$, $f \in L_1(\mathbb{R})$, $f' \in L_1(\mathbb{R})$. Тогда $\hat{f'}(\xi) = i\xi \hat{f}(\xi)$

□ Т. к. $f \in L_1(\mathbb{R})$ и f непрерывна, то $\exists a_n \to -\infty$, $\exists b_n \to +\infty$: $f(a_n) \to 0$, $f(b_n) \to 0$

На $[a_n, b_n]$ запишем формулу интегрирования по частям:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{a_n}^{b_n} f'(x) e^{-ix\xi} dx = f(x) e^{-ix\xi} \Big|_{a_n}^{b_n} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{a_n}^{b_n} f(x) \cdot (-i\xi) e^{-ix\xi} dx$$

В пределе при $n \to \infty$ получаем утверждение теоремы ■

Следствие: Пусть $n \geq 1$, $f \in C^{(n-1)}([a,b])$, $f^{(n-1)} \in AC([a,b])$, $f, f', \dots, f^{(n)} \in L(\mathbb{R})$. Тогда: (1) $\widehat{f^{(n)}}(\xi) = (i\xi)^n \hat{f}(\xi)$

(2) $\hat{f}(\xi) = o\left(\frac{1}{|\xi|^n}\right)$ при $|\xi| \to \infty$

□ (1) получается из теоремы по индукции $(\widehat{f^{(n)}}(\xi) = i\xi\widehat{f^{(n-1)}}(\xi) = \dots)$

(2) В силу п. (1) и теоремы 13.1 $\widehat{f^{(n)}}(\xi) = (i\xi)^n \hat{f}(\xi) \xrightarrow[|\xi|\to\infty]{} 0$ ■

Теорема 13.5: (1) Пусть $f(x,y)$ определена на $X \times [y_0 - \delta, y_0 + \delta]$,

$\forall x \quad f(x,y) \in C^{(1)}([y_0 - \delta, y_0 + \delta])$ как функция y,

$\forall y \quad f(x,y) \in L(X, \mathfrak{M}, \mu)$ как функция x,

$\exists y(x) \in L(X, \mathfrak{M}, \mu)\colon \forall y \in [y_0 - \delta, y_0 + \delta] \quad \forall x \in X \quad |f'_y(x,y)| \leq g(x)$.

Тогда $\exists \dfrac{d}{dy} \int\limits_X f(x,y) d\mu(x) = \int\limits_X \dfrac{\partial}{\partial y} f(x,y) d\mu(x)$

(2) Пусть $f(x,z)$ определена на $X \times \{|z - z_0| < \delta\}$, $z \in \mathbb{C}$,

$\forall x \quad f(x,z)$ голоморфна в $\{|z - z_0| < \delta\}$, $\forall z \quad f(x,z) \in L(X, \mathfrak{M}, \mu)$ как функция x, $\exists g \in L(X)\colon \forall z, |z - z_0| < \delta \quad \forall x \in X \quad \left|\dfrac{\partial}{\partial z} f(x,z)\right| \leq g(x)$

Тогда существует $\mathbb{C}$-производная $\dfrac{d}{dz} \int\limits_X f(x,z) d\mu(x) = \int\limits_X \dfrac{\partial}{\partial z} f(x,z) d\mu(x)$

□ Докажем п. 1, п. 2 доказывается аналогично

Пусть $F(y) = \int\limits_X f(x,y) d\mu(x)$. Рассмотрим последовательность $y_n \to y:$

$\dfrac{F(y_n) - F(y)}{y_n - y} = \int\limits_X \dfrac{f(x,y_n) - f(x,y)}{y_n - y} d\mu(x)$,

где $\dfrac{f(x,y_n) - f(x,y)}{y_n - y} \xrightarrow[n\to\infty]{} f'_y(x,y) \forall x$

Докажем, что можно осуществить предельный переход

Заметим, что $\left|\dfrac{f(x,y_n) - f(x,y)}{y_n - y}\right| = \left|\dfrac{1}{y_n - y} \cdot \int\limits_y^{y_n} f'_y(x,u) du\right| \leq$

$\leq \dfrac{1}{|y_n - y|} \cdot |y - y_n| g(x) \leq g(x) \quad \forall n$

$\Rightarrow$ применима т. Лебега $\Rightarrow \exists \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{F(y_n) - F(y)}{y_n - y} = \int\limits_X f'_y(x,y) d\mu(x)$

Т. к. $\{y_n\}$ - любая, а предел справа от нее не зависит, то

$\exists F'(y) = \int\limits_X f'_y(x,y_0) d\mu(x)$ ■

Теорема 13.6: (1) Пусть $f(x) \in L_1(\mathbb{R})$, $xf(x) \in L_1(\mathbb{R})$. тогда $\exists \hat{f}'(\xi) = -i\widehat{xf}(\xi)$

(2) Если $f(x), xf(x), \dots, x^n f(x) \in L_1(\mathbb{R})$, то $\exists \hat{f}^{(n)}(\xi) = (-i)^n \widehat{x^n f}(\xi)$

(3) Если $\exists a > 0\colon f(x)e^{a|x|} \in L_1(\mathbb{R})$, то $\hat{f}(\xi)$ продолжается с $\mathbb{R}$ до функции, голоморфной в полосе $\{|Im\xi| < a\}$

□ (1) Получается из п. (1) теоремы 13.5

$$\frac{d}{d\xi}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{\mathbb{R}} f(x)e^{-ix\xi}dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{\mathbb{R}} f(x)(-ix)e^{-ix\xi}dx,$$

т. к. $|f(x)\cdot(-ix)e^{-ix\xi}| \leq |xf(x)|$

(2) Получается из (1) по индукции

(3) Получается из п. (2) теоремы 13.5

Если $\xi = \alpha + i\beta$, $|\beta| < a$, то $|f(x)e^{-ix\xi}| = |f(x)e^{-ix(\alpha+i\beta}| = |f(x)e^{x\beta}| \leq$ $\leq |f(x)e^{a|x|}| \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{\mathbb{R}} f(x)e^{-ix\xi}dx$ сходится при $|\beta| < a$,

$|xf(x)e^{-ix\xi}| \leq |xf(x)e^{|x\beta|}| \leq c|f(x)|e^{a|x|}$ (т. к. $|x| < e^{\delta|x|}$), где $c = c(\delta)$

$\Rightarrow$ применима т. 13.5(2)

$\exists\frac{d}{ds}\int\limits_{\mathbb{R}} f(x)e^{-ix\xi}dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{\mathbb{R}} xf(x)e^{-ix\xi}dx$ ■

Глава 14

Интеграл Римана-Стилтьеса

Определение: Пусть f и φ - две функции на $[a,b]$, $T = (\{x_k\},\{\xi_k\})$ - размеченное разбиение $[a,b]$

Интегральной суммой Римана-Стилтьеса называется

$S_T(f,d\varphi) = \sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k)\,(\varphi(x_k) - \varphi(x_{k-1}))$

Если $\exists \lim\limits_{\delta_T\to 0} S_T(f,d\varphi)$, то он называется интегралом Римана-Стилтьеса $(R-S)\int\limits_a^b f d\varphi$ $\left(\text{где } \delta_T = \max\limits_k (x_k - x_{k-1})\right)$

Свойства: (1) Если $\exists \int\limits_a^b f_1 d\varphi$ и $\exists \int\limits_a^b f_2 d\varphi$, то $\exists \int\limits_a^b (\alpha f_1 + \beta f_2) d\varphi = \alpha \int\limits_a^b f_1 d\varphi + \beta \int\limits_a^b f_2 d\varphi$

(2) Если $\exists \int\limits_a^b f d\varphi_1$ и $\exists \int\limits_a^b f d\varphi_2$, то $\exists \int\limits_a^b f d(\alpha\varphi_1 + \beta\varphi_2) = \alpha \int\limits_a^b f d\phi_1 + \beta \int\limits_a^b f d\phi_2$

Определение: Пусть T - разбиение отрезка $[a,b]$, φ - функция $[a,b]$. Вариационной суммой называется $V_T(\varphi) = \sum\limits_{k=1}^{n} |\varphi(x_k) - \varphi(x_{k-1})|$

Вариацией φ на $[a,b]$ называется $V_a^b\varphi = \sup\limits_T V_T(\varphi)$

Класс функций ограниченной вариации $BV([a,b]) = \{\varphi\colon V_a^b\varphi < \infty\}$

Свойства: (1) Если φ - монотонная, то $\varphi \in BV([a,b])$

(2) Если $\varphi, \psi \in BV([a,b])$, то $\alpha\varphi + \beta\psi \in BV([a,b])$

(3) Если $\varphi \in BV([a,b])$, то φ есть разность двух монотонных функций

(4) $AC([a,b]) \subset BV([a,b])$

Теорема 14.1: Пусть $f \in C([a,b])$, $\varphi \in BV([a,b])$. Тогда $\exists (R-S)\int\limits_a^b f d\varphi$

$\square$ Пусть $\{T_n\}$ - последовательность размеченных разбиений с $\delta_{T_n} \to 0$. $\bar{T}_n$ и $\bar{T}_m$ - соответствующие неразмеченные разбиения

Возьмем разбиения $T_n = \{x_k\}, \{\xi_k\}$ и $T_m = \{y_j\}, \{\eta_j\}$. Пусть $T_{n,m} = \bar{T}_n \cap \bar{T}_m = \{z_i\}$

$\forall i \quad \exists j = j(i) \colon [z_{i-1}, z_i] \subset [y_{j-1}, y_j]$, $\exists k = k(i) \colon [z_{i-1}, z_i] \subset [x_{k-1}, x_k]$

Тогда $S_{T_n}(f, d\varphi) = \sum\limits_k f(\xi_k)\left(\varphi(x_k) - \varphi(x_{k-1})\right) = \sum\limits_i f(\xi_{k(i)})\left(\varphi(z_i) - \varphi(z_{i-1})\right)$

$S_{T_m}(f, d\varphi) = \sum\limits_j f(\eta_j)\left(\varphi(y_j) - \varphi(y_{j-1})\right) = \sum\limits_i f(\eta_{j(i)})\left(\varphi(z_i) - \varphi(z_{i-1})\right)$

Тогда $|S_{T_n}(f, d\varphi) - S_{T_m}(f, d\varphi)| \le \left|\sum\limits_i (f(\xi_{k(i)}) - f(\eta_{j(i)})\right| \cdot |\varphi(z_i) - \varphi(z_{i-1})| \le$

$$\le \sum_i \left|f(\xi_{k(i)} - f(\eta_{j(i)})\right| \cdot |\varphi(z_i) - \varphi(z_{i-1})| \le \left(\sup_{\substack{t_1, t_2 \colon \\ |t_1 - t_2| < \delta_{T_n} + \delta_{T_m}}} |f(t_1) - f(t_2)|\right) \cdot$$

$$\cdot V_{T_{n,m}}(\varphi) \le \left(\sup_{\substack{t_1, t_2 \colon \\ |t_1 - t_2| < \delta_{T_n} + \delta_{T_m}}} |f(t_1) - f(t_2)|\right) \cdot V_a^b \varphi \xrightarrow[n,m \to \infty]{} 0$$ по т. Кантора о равномерной непрерывности $\blacksquare$

Теорема 14.2: Пусть $f \in C([a,b])$, $\varphi \in C^{(1)}([a,b])$

Тогда $\exists (R-S) \int\limits_a^b f d\varphi = (R) \int\limits_a^b f(x)\varphi'(x) dx$

$\square$ Пусть T - неразмеченное разбиение $\{x_k\}$

Тогда $\exists \xi_l \in [x_{k-1}, x_k] \colon \varphi(x_k) - \varphi(x_{k-1}) = \varphi'(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$

Положим $T = (\{x_k\}, \{\xi + k\})$. Тогда $S_T(f, d\phi) = \sum f(\xi_k)\varphi'(\xi - k)(x_k - x_{k-1}) = S_t(f\varphi', dx) \to \int\limits_a^b f\varphi' dx$ при $\delta_T \to 0$

Но $\int\limits_a^b f d\varphi$ существуют, т. к. $\varphi \in BV([a,b]) \Rightarrow S_T(f, d\varphi) \to \int\limits_a^b f d\varphi$

Действительно, $\forall \bar{T}$ - неразмеченного разбиения $V_{\bar{T}}(\varphi) = \sum |\varphi(x_k) - \varphi(x_{k-1})| \le \sum \left| \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} \varphi'(t) dt \right| \le \int\limits_a^b |\varphi'(t)| dt < \infty$ $\blacksquare$

Теорема 14.3: Пусть φ - неубывающая непрерывная слева функция на $[a,b]$, m_φ - мера Стилтьеса, μ_φ - мера Лебега-Стилтьеса (ее продолжение по Лебегу), f - ограничена и μ_φ почти всюду непрерывна на $[a,b]$

Тогда $\exists (R-S) \int\limits_a^b f d\varphi = (L) \int\limits_{[a,b]} f d\mu_\varphi$

$\square$ Пусть $\{T_n\}$ - последовательность размеченных разбиений с $\delta_{T_n} \to 0$

Тогда $S_{T_n}(f, d\varphi) = \sum\limits_k (\xi_{n,k})(\varphi(x_{n,k}) - \varphi(x_{n,k-1})) = \sum\limits_k f(\xi_{n,k})\mu_\varphi[x_{n,k-1}, x_{n,k}) = \int\limits_{[a,b]} f_n(x) d\mu_\varphi$, где $f_n(x) = \sum f(\xi_{n,k}) \cdot \chi_{[x_{n,k-1}, x_{n,k})}(x)$

Но $f(x) - f_n(x) = f(x) - f(\xi_{n,k(x)})$, где $|x - \xi_{n,k(x)}| < \delta_{T_n}$
$\Rightarrow f_n(x) \to f(x)$ в каждой точке непрерывности f
$\exists M\colon \forall x \quad |f(x)| \leq M \Rightarrow \forall x \forall n \quad |f_n(x)| \leq M$
Т. к. $\mu_\varphi[a, b) = \varphi(b) - \varphi(a) < \infty$, то $g(x) \equiv M$ - интегрируемая мажоранта
$\Rightarrow$ по т. Лебега $S_{T_n}(f, d\varphi) = \int\limits_{[a,b)} f_n d\mu_\varphi \to \int\limits_{[a,b)} f d\mu_\varphi$ ■

Утверждение 1: Если $a < c < b$, то $V_a^b f = V_a^c f + V_c^b f$
□ Если T_1 - разбиение $[a, c]$, T_2 - разбиение $[c, b]$, то $T_1 \cup T_2$ - разбиение $[a, b]$ и $V_{T_1}(f) + V_{T_2}(f) = V_{T_1 \cup T_2}(f) \leq V_a^b f$

Слева переходим к $\sup\limits_{T_1}$, а затем к $\sup\limits_{T_2}$. Получаем $V_a^c f + V_c^b \leq V_a^b f$

Обратно, если T - разбиение f, то положим $T' = T \cup \{c\}$, $T_1 = T' \cap [a, c]$ - разбиение $[a, c]$, $T_2 = T' \cap [c, b]$ - разбиение $[c, b]$

Тогда $V_t(f) \leq V_{T'}(f) = V_{T_1}(f) + V_{T_2}(f) \leq V_a^c f + V_c^b f$

Слева переходим к $\sup\limits_{T}$, получим $V_a^b f \leq V_a^c f + V_c^b f$ ■

Утверждение 2: Всякая функция ограниченной вариации есть разность двух неубывающих
□ $f \in BV([a, b])$, $f_1(x) = V_a^x f$, $f_2(x) = V_a^x f - f(x)$

Если $x < y$, то $f_1(y) - f_1(x) = V_a^y f - V_a^x f \overset{\text{утв. } 1}{=} V_x^y f \geq 0$
$f_2(y) - f_2(x) = V_x^y f - (f(y) - f(x))$, но $|f(y) - f(x)| \leq V_x^y f = f_2(y) - f_2(x)$ ■