Задачи для подготовки к коллоквиуму №2

I семестр, I поток, осень 2006 г.

ВНИМАНИЕ! АВТОР НЕ НЕСЁТ ОТВЕТСТВЕННОСТИ ЗА ЛЮБЫЕ ПОСЛЕДСТВИЯ, КОТОРЫЕ ПРЯМЫМ ИЛИ КОСВЕННЫМ ОБРАЗОМ МОГУТ БЫТЬ ВЫЗВАНЫ ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ВСЕГО НИЖЕНАПИСАННОГО ПО НАЗНАЧЕНИЮ И НЕТ!

1. Доказать, что

   (a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^n}{a^x} = 0 \quad (a > 1, n > 0)$

   (b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\log_a x}{x^\varepsilon} = 0 \quad (a > 1, \varepsilon > 0)$

Доказательство.

(a) Воспользуемся, тем, что было доказано ранее для последовательностей: $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n^k}{a^n} = 0$. Напомним сначала его краткое доказательство:

$$0 < \frac{n^k}{a^n} \leqslant \frac{n^m}{a^n} = \left(\frac{n}{\sqrt[m]{a^n}}\right)^m = \left(\frac{n}{b^n}\right)^m, \quad b > 1; \quad \frac{n}{b^n} = \frac{n}{(1+(b-1))^n} < \frac{2n}{n(n-1)(b-1)^2} \to 0$$

Тогда и $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{(n+1)^k}{a^n} = 0$, т.е. $\forall\varepsilon > 0 \quad \exists N\colon \forall n > N \quad \frac{(n+1)^k}{a^n} < \varepsilon$. Пусть $x > N + 1$, положим $n = [x]$, тогда $0 < \frac{x^k}{a^n} < \frac{(n+1)^k}{a^n} < \varepsilon$, что и доказывает исходное утверждение.

(b) Положим $x^\varepsilon = t$. Тогда исходное выражение перепишется в виде

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log_a x}{x^\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon} \lim_{t\to+\infty} \frac{\log_a t}{t}.$$

Опять же воспользуемся уже доказанным утверждением для пределов последовательностей: $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\log_a n}{n} = 0$. Приведём и его краткое доказательство:

Из предыдущего примера получаем, что для достаточно больших $n \quad \frac{1}{b^n} < \frac{n}{b^n} < 1$. Положим $b = a^\varepsilon$, где $a > 1$ и $\varepsilon > 0$ – произвольное. Тогда $\frac{1}{a^{\varepsilon n}} < \frac{n}{a^{\varepsilon n}} < 1$ или $1 < n < a^{\varepsilon n}$. Логарифмируя последнее неравенство получаем, что $0 < \log_a n < \varepsilon n$, откуда $0 < \frac{\log_a n}{n} < \varepsilon$. Отсюда и следует исходное равенство.

Сделаем такой же трюк, как и в предыдущем случае: заметим, что и $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\log_a(n+1)}{n} = 0$. Сделав соответствующие замечания получаем, что $0 < \frac{\log_a t}{t} < \frac{\log_a(n+1)}{n} < \epsilon$, что и доказывает наше утверждение.

$\square$

2. Пусть функция $f(x)$ ограничена на любом интервале $(1, b)$. Доказать, что

   (a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} (f(x+1) - f(x))$

   (b) $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x))^{1/x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x+1)}{f(x)}, \quad f(x) \geqslant C > 0$

   Доказательство. В обоих случаях воспользуемся аналогичными утверждениями, доказанными нами ранее для пределов последовательностей и определением предела функции по Гейне. Если всё время стараться быть абсолютно строгим, то получится (сам не проверял) □

3. Пусть функция $f(x)$ ограничена на любом интервале $(1, b)$ и пусть $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x+1) - f(x)) = \infty$. Доказать, что $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \infty$.

   Доказательство. Нестрого – вытекает из предыдущей задачи. Строго – мудрите сами по определению.

   □

4. Пусть при $x > 1$ задана последовательность функций $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x), \ldots$. Доказать, что найдётся функция $f(x)$, растущая быстрее любой из этих функций при $x \to +\infty$.

   Доказательство. Тривиально □

5. Пусть $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$. Доказать, что $\forall c > 0$ функция

$$f_c(x) = \begin{cases} -c, & \text{если} \quad f(x) < -c \\ f(x), & \text{если} \quad |f(x)| \leqslant c \\ c, & \text{если} \quad f(x) > c \end{cases}$$

   также непрерывна.

   Доказательство. Очевидно, что достаточно проверить непрерывность функции только в таких точках x_i, для которых выполняется условие $|f(x_i)| = c$.

Рассмотрим какую-либо точку x_0, в которой значение функции равно, например, $-c$. Покажем, что $\lim\limits_{x\to x_0} f_c(x) = f_c(x_0) = -c$. По определению непрерывности по Коши нам надо доказать, что

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists\delta > 0 \quad \forall x\colon 0 < |x - x_0| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f_c(x) - c| < \varepsilon$$

Если в δ-окрестности точки $f(x_0)$ есть такие точки ξ, что $\xi > -c$, то для них это утверждение выполняется в силу непрерывнсти функции $f(x)$. А для таких точек ζ, что $f(\zeta) < -c$ утверждение перепишется следующим образом:

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists\delta > 0 \quad \forall x\colon 0 < |x - x_0| < \delta \quad \Rightarrow \quad 0 = |c - c| < \varepsilon,$$

что, несомненно, верно. □

6. Пусть $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$. Доказать, что функции $m(x) = \inf\limits_{a\leqslant y<x} f(y)$ и $M(x) = \sup\limits_{a\leqslant y<x} f(y)$ также непрерывны на отрезке $[a, b]$.

Доказательство. По теореме о достижении функцией, непрерывной на отрезке, точной верхней и точной нижней граней на любом отрезке $[a, x_i]$ функция $f(x)$ этих значений достигает. Теперь имеем право воспользоваться предыдущей задачей, из которой следует, что $M(x)$ и $m(x)$ – непрерывны, так как являются кусочно заданными функциями: на некоторых отрезках они совпадают с $f(x)$, а на некоторых – тождественно равны константе. □

7. Пусть $f(x)$ непрерывна и ограничена на интервале $(a, +\infty)$. Доказать, что для любого действительного числа T найдётся последовательность $x_n \to \infty$, такая, что $\lim\limits_{n\to+\infty} (f(x_n + T) - f(x_n)) = 0$

Доказательство. …I don‘t know

□

8. Пусть $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$ и $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$. Доказать, что $\exists \xi \in (a,b)\colon f(\xi) = \frac{f(x_0)+f(x_1)+\dots+f(x_n)}{n+1}$

Доказательство. По теореме о достижении функцией, непрерывной на отрезке, точной верхней и точной нижней граней существуют такие точки, в которых значения функции равны M и m соответственно. В таком случае оценим выражение $\zeta = \frac{f(x_0)+\dots+f(x_n)}{n+1}$ сверху и снизу:

$$m = \frac{m+\dots+m}{n+1} \leqslant \frac{f(x_0)+\dots+f(x_n)}{n+1} < \frac{M+\dots+M}{n+1} = M.$$

В таком случае по теореме Коши о промежуточных значениях $\exists \xi\colon f(\xi) = \zeta$. □

9. Доказать, что для того, чтобы функцию $f(x)$, непрерывную на конечном интервале (a,b), можно было продолжить непрерывным образом на $[a;b]$ необходимо и достаточно, чтобы функция $f(x)$ была равномерно непрерывна на интервале (a,b).

Доказательство. Чтобы продолжить функцию равномерным образом с интервала на отрезок нам нужно определить значения $\zeta = f(a)$ и $\xi = f(b)$ таким образом, чтобы $\lim\limits_{x\to a+} f(x) = \zeta$ и $\lim\limits_{x\to b-} f(x) = \xi$. Докажем необходимость и достаточность равномерной непрерывности для одного из этих пределов, например, для второго.

Достаточность: почти очевидно.

Необходимость: из равномерной непрерывности функции на (a,b) следует, что любая последовательность $\{\xi_n\}\colon \xi_i \to b$ слева является фундаментальной, а значит имеет предел, равный l. От противного доказываем, что для любой последовательности этот предел будет одним и тем же, а значит функция $f(x)$ будет иметь предел при $x \to b$ равный l по определению предела функции по Гейне. □

10. Пусть функция $f(x)$ определена на всей числовой оси, непрерывна хотя бы в одной точке, периодична и отлична от постоянной. Доказать, что она имеет наименьший положительный период.

Доказательство. Так как функция отлична от константы, то существует как минимум два её различных значения y_1 и y_2. Запишем по опеределению тот факт, что $f(x)$ непрерывна в некоторой точке x_0:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) = y_1$$

Предположим противное: наименьшего положительного периода нет. Тогда предъявим последовательность Гейне $\{x_n\}\colon x_n = x_{n-1} + t_n$, где $f(x_1) = y_2$, $\quad 0 < \dots < t_n < t_{n-1} < \dots$ – последовательность периодов, $\quad x_n \to x_0$. В таком случае получаем противоречие с тем, что $f(x)$ – непрерывна в точке x_0. □

11. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на всей числовой оси, отлична от постоянной и удовлетворяет функциональному уравнению $f(x+y) = f(x)f(y)$. Доказать, что $f(x) = a^x$, где $a = f(1)$. Доказать, что в этой задаче условие непрерывности можно заменить на условие ограниченности функции на любом интервале $(0;\alpha)$.

Доказательство. Покажем, что $f(0) = 1$. Далее легко проверяется, что $\forall n \in \mathbb{N} \quad f(n) = a^n$, из этого следует то, что $f(m) = a^m \quad \forall m \in \mathbb{Z}$. Теперь, располагая этим, покажем, что это же верно и для $x = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$:

$$f(1/n + \cdots + 1/n) = f(1) = a \quad \Rightarrow \quad f^n(1/n) = a \quad \Rightarrow \quad f(1/n) = a^{1/n}$$

В таком случае понятно, что $\forall x \in \mathbb{R} \quad x = \lim\limits_{n\to+\infty} s_n(x), \quad x_i \in \mathbb{Q}$, а следовательно из непрерывности $f(x)$ следует, что $f(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} f(s_n(x)) = a^x$.

Теперь докажем вторую часть утверждения. *Вполне очевидно, что $f(x)$ монотонна.* А раз она монотонна и ограничена, от она имеет предел при $x \to \alpha$. А значит это то же самое, что она непрерывна в любой точке $\alpha \in \mathbb{R}$. Q.E.D. $\square$

12. Привести пример функции, определённой на всей числовой оси, непрерывной и разрывной почти всюду на ней.

Ответ:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \\ \frac{1}{n}, & \text{если} \quad x = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q} \end{cases}$$

Доказательство. Покажем, что во всех рациональных точках она разрывна: действительно, так как между двумя рациональными точками всегда найдётся вещественное число, то в рациональных точках эта функция разрывна.

В каждой иррациональной точке эта функция непрерывна, так как для любой последовательности Гейне, сходящейся к этой точке $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0$ как предел $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n}$. $\square$

13. Пусть $f(x)$ дифференцируема на $[1, +\infty)$ и $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = 0$. Доказать, что $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ и наоборот: если $f(x) = o(x)$ при $x \to +\infty$, то $\lim\limits_{x\to+\infty} |f'(x)| = 0$

Доказательство. По следствию из теоремы Лагранжа $\forall x, x_0 \quad \exists t \in (x_0; x)\colon f(x) - f(x_0) = f'(t)(x - x_0)$. Поделим это равенство на x и возьмём предел при $x \to +\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{f(x)}{x} - \frac{f(x_0)}{x} \right) = \lim_{x\to+\infty} f'(t)(1 - x_0/x)$$

В таком случае устремим и $x_0 \to +\infty$, вместе с этим к бесконечности устремится t. Для любого x_0 имеем

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} f'(t) = \lim_{t\to\infty} f'(t) = 0$$

Докажем обратное, потребуются те же формулировки и теоремы. Если $f(x) = o(x)$, то $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 0 = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{|f(x) - f(x_0)|}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{|f'(t)|(x - x_0)}{x}$. В данном случае опять устремляем $x_0 \to +\infty$ и получаем то, что и надо доказать.

$\square$

14. Пусть уравнение $x^3 + px + q = 0, \quad p, q \in \mathbb{R}$ имеет три различных вещественных корня. Доказать, что $p < 0$.

Доказательство. Тривиально. □

15. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на $[a, +\infty), \quad f(a) < 0$ и при некотором положительном k для всех $x > a$ выполняется неравенство $f'(x) > k$. Доказать, что уравнение $f(x) = 0$ имеет единственный корень на $(a, a - f(a)/k)$.

Доказательство. Очевидно, что на $(a, a - f(a)/k)$ функция $f(x)$ строго возрастает, по условию $f(a) < 0$. Для того, чтобы эта непрерывная функция на данном отрезке имела единственный корень достаточно того, чтобы $f(b) = f(a - f(a)/k) > 0$. Докажем это.

Рассмотрим функцию $g(x) = f(a) + k(x - a), \quad g'(x) = k$. Получаем, что $g(b) = 0$. Тогда так как $\forall x > a \quad f'(x) > g'(x) = k$ и $f(a) = g(a)$, то $\forall x > a \quad f(x) > g(x)$. Тргда $f(b) > 0$. Что и требовалось доказать. □

16. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы n раз при $x \geqslant x_0$, пусть также $f(x_0) = g(x_0)$, $f^{(k)}(x_0) = g^{(k)}(x_0)$ при $k = 1, \dots n - 1$ и $f^{(n)}(x) > g^{(n)}(x)$ при всех $x \geqslant x_0$. Доказать, что при $x > x_0$ справедиливо неравенство $f(x) > g(x)$.

Доказательство. Запишем по определению $f^{(n)}(x_0) > g^{(n)}(x_0)$:

$$\lim_{x \to x_0+} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(x_0)}{x - x_0} > \lim_{x \to x_0} \frac{g^{(n-1)}(x) - g^{(n-1)}(x_0)}{x - x_0}$$

Так как оба этих предела существуют, то имеем право переписать в виде

$$\lim_{x \to x_0+} \left(\frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(x_0)}{x - x_0} - \frac{g^{(n-1)}(x) - g^{(n-1)}(x_0)}{x - x_0} \right) > 0$$

Учитывая, что $f^{(n-1)}(x_0) = g^{(n-1)}(x_0)$, получаем, что

$$\lim_{x \to x_0+} \left(\frac{f^{(n-1)}(x) - g^{(n-1)}(x)}{x - x_0} \right) > 0$$

Таким образом $\forall x > x_0 \quad f^{(n-1)}(x) > g^{(n-1)}(x)$

Повторяя похожую операцию n раз, получаем, что $\forall x > x_0 \quad f(x) > g(x)$ □

17. Пусть функция $f(x)$ имеет производную $(n-1)$-го порядка на интервале (a, b) и n раз дифференцируема на отрезке $[a, b]$ и справдeливы равенства $f(x_0) = f(x_1) = \dots = f(x_n) \quad (a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b)$. Доказать, что $\exists \xi \in (a, b)\colon f^{(n)}(\xi) = 0$

Доказательство. Можем назвать это утверждение «обощённой теоремой Ролля». Напомню формулировку самой теоремы Ролля:

> *Пусть функция $f(x)$ непрерывна на $[a; b]$ и дифференцируема на $(a; b)$. Пусть также $f(a) = f(b)$. Тогда $\exists \xi\colon f'(\xi) = 0$*

Рассмотрим функцию $f(x)$ на каждом из отрезков $[x_i; x_{i+1}]$. По теореме Ролля на этих отрезках $\exists \xi_{1_i} : f'(\xi_{1_i}) = 0$. Рассматривая теперь функцию $f'(x)$ на отрезках $[\xi_{1_i}; \xi_{1_{i+1}}]$ по той же самой теореме Ролля получаем, что $\exists \xi_{2_i} : f''(\xi_{2_i}) = 0$. Так можно продолжить n раз, тем самым показав верность данного утверждения. □

18. Доказать, что функция

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & \text{если } x \neq 0 \\ 0, & \text{если } x = 0 \end{cases}$$

бесконечно дифференцируема при $x = 0$

Доказательство. Возьмём первую и вторую производные функции $y = e^{-1/x^2}$:

$$y' = 2\frac{e^{-1/x^2}}{x^3}$$

$$y'' = 4\frac{e^{-1/x^2}}{x^6} - 6\frac{e^{-1/x^2}}{x^4}$$

Очевидно, что все следующие производные будут представляться в виде суммы слагаемых вида $C\frac{e^{-1/x^2}}{x^k}$. Рассмотрим $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{-1/x^2}}{x^k} = \lim\limits_{t\to\pm\infty} \frac{t^k}{e^{t^2}} = 0$.

Таким образом мы получили, что левая и правая производная непрерывной функции в точке $x_0 = 0$ существуют и равны между собой. □

Последние изменения: 26 ноября 2006 г.

Автор: Борис Агафонцев, 102 группа

Об опечатках и неточностях пишите на agava@zelnet.ru

За информацией о последних изменениях и по другим вопросам обращайтесь по ICQ #216-059-136

Верстка в системе $\LaTeX\,2_\varepsilon$.