Задачи к лекции 1

Задача 1. *Докажите, что все линейные преобразования, сохраняющие билинейную форму b, образуют группу.*

Задача 2. *Покажите, что матрицы из* SO(2) *образуют группу, а все остальные ортогональные матрицы размера 2×2 — нет.*

Задача 3. *Опишите все матрицы $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ такие, что $A^T E_1 A = E_1$, где $E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.*

Задача 4. *Пусть (u, v) — координаты точки, являющейся образом при стереографической проекции точки (x, y, z) из верхней половины двуполостого гиперболоида $x^2 + y^2 - z^2 = -1$. Докажите, что*

$$x = \frac{2u}{1 - u^2 - v^2}, \quad y = \frac{2v}{1 - u^2 - v^2}, \quad z = \frac{1 + u^2 + v^2}{1 - u^2 - v^2}.$$

Задача 5. *Докажите, что при стереографической проекции прямые Лобачевского переходят в дуги окружностей, перпендикулярных абсолюту, или в диаметры.*

Задача 6. *Пусть (u, v) — координаты точки, являющейся образом точки (x, y, z) при стереографической проекции из северного полюса стандартной сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Докажите, что*

$$x = \frac{2u}{1 + u^2 + v^2}, \quad y = \frac{2v}{1 + u^2 + v^2}, \quad z = \frac{1 - u^2 - v^2}{1 + u^2 + v^2}.$$

Задача 7. *Докажите, что при стереографической проекции из северного полюса N евклидовой сферы окружности, являющиеся плоскими сечениями сферы, переходят или в окружности (плоскость сечения не проходит через N), или в прямые (плоскость сечения проходит через N).*

Задача 8. *Докажите, что стереографическая проекция из северного полюса N евклидовой сферы сохраняет углы между окружностями — плоскими сечениями сферы.*