Случайные процессы 1999/2000 гг.

(лектор — д.ф.м.н. Булинская Е.В.)

1. Понятие случайного элемента со значениями в измеримом пространстве. Распределение случайного элемента.
2. σ - алгебра $\mathfrak{B}^T$. Два определения случайного процесса, их эквивалентность.
3. Конечномерные распределения, условия симметрии и согласованности. Траектории (выборочные функции) случайного процесса. Семейство конечномерных распределений однозначно определяет меру любого борелевского множества выборочного пространства R^T.
4. Теорема Колмогорова о существовании случайного процесса с заданным семеством конечномерных распределений.
5. Гауссовские случайные процессы. Теорема о существовании гауссовского процесса с заданным семейством конечномерных распределений.
6. Процессы с независимыми приращениями. Эквивалентность двух определений винеровского процесса. Пуассоновский процесс.
7. Стационарность в узком и широком смысле, связь между ними.
8. Эквивалентные случайные процессы.
9. Различные понятия непрерывности случайных процессов, связь между ними.
10. Необходимые и достаточные условия существования эквивалентного процесса с непрерывными траекториями.
11. Теорема Колмогорова (достаточное условие существования непрерывной модификации). Условие для гауссовского процесса.
12. Конструкция винеровского процесса в виде суммы ряда из гауссовских случайных величин.
13. Понятие сепарабельности. Теорема о существовании эквивалентного процесса с неубывающими траеториями.
14. Измеримость процесса. Теорема об измеримости непрерывного с вероятностью 1 сепарабельного процесса. Интегрируемость траекторий.
15. Поток σ - алгебр. Эквивалентные определения марковского процесса (в том числе относительно системы σ - алгебр).
16. Переходные функции марковского процесса. Семейство линейных опрераторов, связанных с переходной функцией.
17. Феллеровские марковские семейства. Теорема существования.
18. Диффузионные процессы. Прямое и обратное уравнения Колмогорова.

19. Корреляционная теория случайных процессов. Необходимое и достаточное условие того, что функция $R(t, s)$ является корреляционной. Необходимые и достаточные условия сходимости в среднем квадратичном.

20. Теоремы о непрерывности, дифференцируемости и интегрируемости в среднем квадратичном.

21. Теорема о дифференцируемости процесса с корреляционной функцией, имеющей непрерывную вторую смешанную производную.

22. Случайные меры. Связь ортогональных случайных мер и процессов с ортогональными приращениями, непрерывными справа в среднем квадратичном. Структурная мера.

23. Стохастический интеграл по ортогональной случйной мере и его свойства.

24. Спектральное разложение стационарного в широком смысле процесса (с использованием теории унитарных операторов).

25. Теорема Бохнера-Хинчина.

26. Теорема о спектральном разложении.

27. Линейные преобразования стационарного в широком смысле процесса. Импульсная переходная функция и частотная характеристика. Допустимый фильтр, физически-осуществимый фильтр.

28. Наилучший прогноз и наилучший линейный прогноз в среднем квадратичном; их совпадение в гауссовском случае.

29. Понятие сингулярности и регулярности стационарной в широком смысле последовательности. Теорема о разложении на регулярную и сингулярную составляющие.

30. Разложение Вольда. Наилучший линейный прогноз на q шагов вперед.

31. Строго марковское свойство винеровского процесса. Принцип отражения. Закон повторного логарифма (без доказательства). Недифферинцируемость траекторий винеровского процесса.

32. Мартингалы, субмартингалы и супермартингалы. Преобразования, сохраняющие субмартингальность. Теорема о равномерной интегрируемости.

33. Неравенство для $E(\max\limits_{1 \leq k \leq n} X_k)^p,\ p \geq 1$. Лемма Дуба.

34. Разложение Дуба-Мейера. Теоремы о сходимости мартингалов и субмартингалов.

35. Стохастический интеграл Ито и его свойства.

36. Формула замены переменных Ито.

37. Стохастические дифференциальные уранения. Теорема существования и единственности решения.

38. Решение стохастического дифференциального уравнения — марковский процесс.

39. Решение стохастического дифференциального уравнения — диффузионный процесс.