Задачи к лекции 2

Задача 1. *Докажите, что объединение двух отрезков, стыкующихся под некоторым углом, можно представить как образ гладкой параметрической кривой.*

Задача 2. *Докажите эквивалентность следующих двух определений длины* $L(\gamma)$ *гладкой кривой* $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$. (1) $L(\gamma) = \int_a^b |\dot\gamma(t)|\, dt$, *и* (2) $L(\gamma)$ *— точная верхняя грань длин вписанных в* γ *ломаных.*

Задача 3. *Вычислите длину кривой, заданной графиком функции* $y = x^2$, $x \in [-1, 1]$.

Задача 4. *Эллиптические координаты* λ, μ, z *в* $\mathbb{R}^3$ *определяются с помощью формул*

$$x = c\lambda\mu\ , \quad y = c\sqrt{(\lambda^2-1)(1-\mu^2)}\ , \quad z = z\ ,$$

где $c > 0$ *— масштабный множитель.*

а) *Приведите одну из максимальных областей определения эллиптических координат.*

б) *Найдите и изобразите координатные кривые и координатные поверхности эллиптических координат.*

в) *Вычислите якобианы перехода между эллиптическии и евклидовыми координатами.*

г) *Запишите евклидову метрику в эллиптических координатах.*

Задача 5. *Эллипсоидальные координаты в* $\mathbb{R}^3$ *вводятся с помощью уравнений* $(a > b > c)$:

$$\frac{x^2}{a^2+\lambda} + \frac{y^2}{b^2+\lambda} + \frac{z^2}{c^2+\lambda} = 1 \qquad (\lambda > -c^2)$$

$$\frac{x^2}{a^2+\mu} + \frac{y^2}{b^2+\mu} + \frac{z^2}{c^2+\mu} = 1 \quad (-c^2 > \mu > -b^2)$$

$$\frac{x^2}{a^2+\nu} + \frac{y^2}{b^2+\nu} + \frac{z^2}{c^2+\nu} = 1 \quad (-b^2 > \nu > -a^2)$$

Докажите, что каждой точке $(x,\ y,\ z) \in \mathbb{R}^3$ *соответствует не более одной системы значений* λ, μ, ν. *Выясните, каким точкам* $(x,\ y,\ z) \in \mathbb{R}^3$ *соответствует одна система значений* λ, μ, ν.

Параметры λ, μ, ν *называются* ***эллипсоидальными координатами***.

Выразите декартовы координаты x, y, z *через эллипсоидальные координаты* λ, μ, ν.

Задача 6. ***Касательным вектором ξ к области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ в точке*** *$P \in \Omega$ называется вектор скорости $\dot\gamma(0)$ гладкой кривой $\gamma(t)$ такой, что $\gamma(0) = P$.* ***Координатами касательного вектора ξ в криволинейной системе координат*** *называются координаты вектора $\dot\gamma(0)$ кривой γ, записанной в этой криволинейной системе координат.*

Покажите, что координаты w касательного вектора ξ в точке $P \in \Omega$, вычисленные в криволинейной системе координат y^i, получаются из его координат v, вычисленных в евклидовой системе координат x^i, умножением на матрицу Якоби:

$$w = \Big(\frac{\partial y^i}{\partial x^j}(P)\Big)\, v, \quad w^i = \sum_j \frac{\partial y^i}{\partial x^j}(P)\, v^j.$$

Задача 7. ***Градиентом $\nabla f(P)$ гладкой функции $f : \Omega \to \mathbb{R}$ в точке*** *$P \in \Omega$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, называется касательный вектор, который в евклидовых координатах x^i имеет вид*

$$\nabla f(P) = \Big(\frac{\partial f}{\partial x^1}(P), \dots, \frac{\partial f}{\partial x^n}(P)\Big).$$

Докажите, что координаты градиента $\nabla f(P)$ в криволинейной системе координат y^i могут быть вычислены по формуле

$$\big[\nabla f\big]^i = \sum_j g^{ij}\, \frac{\partial f}{\partial y^j},$$

где (g^{ij}) — матрица, обратная к матрице (g_{ij}) евклидовой метрики, записанной в координатах y^i.

Задача 8. ***Гладким векторным полем ξ на области*** *$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ называется семейство касательных векторов, заданное в евклидовых координатах гладким отображением $v \colon \Omega \to \mathbb{R}^n$.* ***Дивергенцией*** *$\operatorname{div}\xi$* ***поля ξ*** *называется функция на Ω, которая в евклидовых координатах равна $\sum_i \frac{\partial v^i}{\partial x^i}$.* ***Лапласианом Δf гладкой функции*** *$f \colon \Omega \to \mathbb{R}$ называется функция, которая в евклидовых координатах равна $\sum_i \frac{\partial^2 f}{(\partial x^i)^2}$. Пусть y^i — криволинейные координаты в Ω, $(w^1, \dots, w^n)$ — координаты поля ξ, вычисленные по отношению к y^i, (g_{ij}) — матрица евклидовой метрики, записанной в y^i, (g^{ij}) — матрица, обратная к (g_{ij}), и $g = \det(g_{ij})$. Докажите, что*

$$\operatorname{div}\xi = \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_i \frac{\partial}{\partial y^i}\big(\sqrt{g}\, w^i\big), \quad \Delta f = \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_{i,j} \frac{\partial}{\partial y^i}\Big(\sqrt{g}\, g^{ij}\, \frac{\partial f}{\partial y^j}\Big).$$