Язык упорядоченных множеств(элементарный)

Определение: Алфавит упорядоченного множества: $\exists, \forall, \neg, \&, \vee, \Rightarrow, (,), =, \preccurlyeq, \prec$, индивидные переменные(которые становятся переменными после присвоения им значения)
Определение: Если ξ и η - произвольные переменные языка(метапеременные), то выражения вида $(\xi = \eta), (\xi \prec \eta), (\xi \preccurlyeq \eta)$ называются атомными(атомарными формулами)
Определим понятие формулы:
Определение: 1) всякая атомная формула является формулой;
2) Если Ä - формула, то ¬Ä - формула;
3) Если Ä и B̈ - формулы, то (Ä∨B̈),(Ä& B̈),(Ä⇒B̈) - тоже формулы;
4) Если Ä - формула, а ξ - индивидная переменная, то ∀ξÄ и ∃ξÄ - формулы.

Аксиома: $3 \prec 5 \Rightarrow \underbrace{(2+1)}_{\text{другое имя 3}} \prec \underbrace{(2+3)}_{\text{другое имя 5}}$
Рассмотрим понятия связанного и свободного вхождений переменной x в формулу A:
В формулах $\forall x A$ и $\exists x A$ выражение $\forall x$ и $\exists x$ называется кванторной приставкой, а формула A - областью действия соответствующего квантора.
Заметим, что после квантора может стоять только переменная, но не имя.
Определение: Вхождение переменной x в формулу A называется связанным, если оно находится в области действия квантора $\forall x$ или $\exists x$ или входит в кванторную приставку.
Вхождение переменной, не являющееся связанным, называется свободным.
Пример
$\forall \underline{\underline{x}}(P(f(\underline{\underline{x}})))\&\exists \underline{x}\ \underline{x} = z \Rightarrow \exists \underline{\underline{x}} R(\underline{\underline{x}}, \underline{\underline{x}})) \vee z = x$
В этой формуле подчеркнуты все связанные вхождения переменной x, причем вхождения, связанные одной и той же кванторной приставкой подчеркнуты одинаковым числом черточек.
Неподчеркнутые вхождения - свободные.
Определение: Подстановка - это замена всех свободных вхождений переменной.
Определение: Знак $\eqcirc$ означает графической равенство двух выражений, то есть равенство слов.
Пример
$\exists x \forall x (x = x)[5/x] \eqcirc \exists x \forall x (x = x)$ - поскольку в левой части все вхождения x - связанные.
Обозначение: $\aleph$ - произвольный квантор($\exists$ или $\forall$
Вместо квантора можно рассмотреть произвольный оператор, например: $\int ...d\xi$ или $\{\xi|...\}$, где ξ - метапеременная. У оператора есть область действия, например: $\lim\limits_{x \to x_0} \underbrace{...}_{\text{область действия}}$

Определение: Именная форма - форма, после подстановки в которую значений получается имя.
Пример: $\frac{e^x - 1}{x}$ - именная форма.
Связанные оператором переменные можно переименовывать: $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{e^x-1}{x} = \lim\limits_{y \to y_0} \frac{e^y - 1}{y}$
Некоторые равносильности:
1) $\neg \forall \xi A \equiv \exists \xi \neg A$
2) $\neg \exists \xi A \equiv \forall \xi \neg A$
3) $\exists \xi (A \vee B) \equiv \exists \xi A \vee \exists \xi B$
4) $\exists \xi (A \vee B) \equiv \exists \xi A \vee \exists \xi B$
Если A не содержит свободных вхождений то венрны также такие равносильности:
5) $\aleph \xi (A \& B) \equiv A \& \aleph \xi B$
6) $\aleph \xi (A \vee B) \equiv A \vee \aleph \xi B$
7) $\exists x (x = a \& B) = B[a/x]$

Также см. [1] с.38-45 §10

Обозначение: $\nabla = \left[\begin{smallmatrix}\vee \\ \& \end{smallmatrix}\right.$
Если ξ не входит в A свободно, то верна формула:
$(A\nabla B)(e/\xi) = A\nabla B(e/\xi)$

Формула в предваренной форме

Определение: Формула A называется формулой в предваренной форме, если A имеет вид: $\aleph_1 x_1 ... \aleph_n x_n B$, где B - бескванторная формула.
Алгоритм приведения ф-лы к бескванторной форме:
1) Избавиться от импликаций.
2) Пример: $\exists x A \vee \forall y B$. Пусть w не встречается в этой формуле. Тогда она $\equiv \exists w A(w/x) \vee \forall y B \equiv \exists w [A(w/x) \forall y B]$. Пусть теперь и t не встречается в этой формуле, тогда она $\equiv \exists w [A(w/x) \vee \forall t B(t/y)] \equiv \exists w \forall t [A(w/x) \vee B(t/y)]$

Более точное док-во: [1] с.45

Рассмотрим подстановки в формлуы:
Пример
$B = \int\limits_0^1 x dy$ Здесь x входит свободно, но y имеет связанное вхождение.
Определение: Свободная(или разрешенная) подстановка пременной y вместо переменной x - это такая подстановка [y/x], когда каждое свободное вхождение переменной x превращается в свободное вхождение переменной y
В далнейшем будем рассматривать толбко свободные подстановки, и будем считать [y/x] - бессмыслицей, если [y/x] - несвободная.
Теорема: Если [y/x] свободная, $B[a/x][a/y] = B[y/x][a/y]$
Доказательство: ◄ Рассмотрим B: ...x...y...;
1) Рассмотрим левую часть B[a/x]: ...a...y...;
Тогда B[a/x][a/y]: ...a...a...;
2) С другой стороны B[y/x]: ...y...y...;
Тогда B[y/x][a/x]: ...a...a...;
Таким образом доказано равенство левой и правой частей как слов,
т.е. графическое равенство. ►
Следствие: Если имеет смысл B[y/x], то $\exists x(x = y \& B) \equiv B[y/x]$, где y - переменная.
Доказательство: ◄ В левой и в правой частях стоят высказывательные формы как минимум от y, но не от x. Подставим вместо всех свободных переменных константы(имена)
$\exists x(x = a \& \underbrace{B[a/y]}_{Q}) \equiv^? B[a/x]$
Но $Q[a/x] \equiv B[a/x][a/y] =$ (по теореме) $= B[y/x][a/y]$
Таким образом: $\exists x(x = a \& B[a/y]) \equiv B[y/x][a/y] \forall a$ ►

Язык упорядоченных множеств называется элементарным поскольку вс переменные имеют один и тот же сорт, т.е. все индивидные переменные имеют одну и ту же область значений.
Определение: Множество A называется плотным, если: $\forall x, y \epsilon A \; \exists z : x \prec z \prec y$
Определение: Формула не содержащая свободных вхождений переменных называется замкнутой.
Таким образом, все замкнутые формулы распадаются на два класса эквивалентности: всюду истинные и всюду ложные. Все формулы состоящие только из: $\{\perp, \top, \neg, \&, \vee, \Rightarrow, \forall, \exists\}$ всегда либо истинны, либо ложны.
Определение: Будем говорить, что множество "хорошее", если оно не имеет ни наибольшего, ни наименьшего элементов.

Теорема(об элиминации кванторов): Для всякой формулы Ä можно эффективно построить формулу B̈, такую что:
1) Всякая переменная, имеющая свободное вхождение в B̈ имеет свободное вхождение в Ä;
2) B̈ - бескванторная;
3) Ä≡B̈ на всяком "хорошем"плотном упорядоченном множестве.
Доказательство: ◄
Этап 1 Пусть Ä⩦ $\exists z(A'\&A''\&...\&A^{(s)})$, где $\forall k A^{(k)}$ - атомная формула, значит, $A^{(k)}$ имеет вид: $\bot, \top, (\xi = \xi), (\xi \prec \xi), (\xi \prec \eta), (\xi \succ \eta)$.
Ясно, что $(\xi = \xi)$ - это $\top$, а $(\xi \prec \xi)$ - это $\bot$. Формулы $\top$ можно зачеркнуть. Понятно, что если $\exists i: \ A^i \doteqdot \bot$, то B̈≡ $\bot$. Все формулы A^i, в которых нет z, вынесем за знак квантора, при помощи равносильности: $B\&\exists zA \equiv \exists xA\&B$, где z не входит в B.
Рассмотрим теперь три оставшиеся формулы $(\xi = z), (\xi \prec z), (\xi \succ z)$
1) Есть формула вида $(z = \xi)$. Тогда $Q\&\exists z((z = \xi)\&B) \equiv Q\&B[\xi/z] \equiv$B̈;
2) Нет формулы вида $z = \xi$.
а) Все формулы имеют вид: $\xi \prec z$. Тогда Ä⩦ $\exists z(\xi_1 \prec z \,\&...\&\xi_n \prec z)$ ⩦(для хорошего множества)⩦ $\top$;
б) Все формулы имеют вид: $\xi \succ z$. Аналогично а).
в) $\exists z(\bigwedge\limits_i(\xi_i \prec z)\& \bigwedge\limits_j(z \prec \eta_j))$≡(для хорошего множества)≡ $\bigwedge\limits_{i,j}(\xi_i \prec \eta_j) \equiv B$
Этап 2 Пусть Ä⩦ $\exists z(A' \vee ... \vee A^s)$, где A^i - конъюнкция атомарных формул. Тогда Ä≡ $\exists zA' \vee ...\exists zA^{(s)}$, и для каждого $\exists zA^{(i)}$ выполним первый этап.
Этап 3 Ä⩦ $\exists z$C̈, где C̈ - произвольная бескванторная формула. Приведем C̈ к нормальной форме, то есть приведем к форме, где каждое отрицание стоит при атомарных формулах) и после этого внесем отрицание по равносильностям:
$\neg(\alpha = \beta) \equiv (\alpha \prec \beta) \vee (\alpha \succ \beta)$
$\neg(\alpha \prec \beta) \equiv (\alpha = \beta) \vee (\alpha \succ \beta))$
Теперь можно применить второй этап.
Этап 4 Ä не содержит $\forall$. Найдем квантор существования, в зону которого не входит никакой другой квантор существования(такой квантор называется самым внутренним). и от него перейдем к третьему этапу.
Этап 5 Рассмотрим теперь абсолютно произвольную формулу Ä. Избавимся от кванторов общности с помощь равносильности: $\forall z$C̈≡ $\neg\exists z\neg$C̈ и перейдем к четвертому этапу. ►
Следствие: Все "хорошие"множества элементарно эквивалентны.
Доказательство: ◄ Рассмотрим произвольную замкнутую формулу Ä. По теореме существует бескванторная формула B̈ эквивалентная Ä на любом "хорошем"упорядоченном множестве. Значит B̈ состоит из $\bot, \top$ и логических связок, поэтому, B̈ - либо тождественная истина, либо ложь. Но так как, Ä≡B̈, то следствие доказано. ►
Так как $\mathbb{R}$ и $\mathbb{Q}$ - "хорошие"упорядоченные множества, то из следствия, получаем, что не существует формулы, позволяющей их различить.

Неэлементарные языки первого порядка

Определение: Предикатом называется функция, значениями которой служат 1) высказывания или
2) истинностные значения (и,л)
Будем рассматривать предикат во втором смысле. **Определение:** k-местным предикатом на множестве M называется произвольная функция P: $M^k \to \{\text{И,Л}\}$. Число k называется валентностью предиката.

Для множества M возникают множества одноместных предикатов(унарных), двуместных(бинарных) и т.д.
Язык, содержащий предикатные переменные не является элементарным.
Пример С помощью предикатов различим $\mathbb{R}$ и $\mathbb{Q}$ формулой:

$$\forall P(\forall x \forall y(P(x) \& \neg P(y) \Rightarrow x \prec y) \Rightarrow \exists z \forall x \forall y[(P(x) \Rightarrow x \preccurlyeq z) \& (\neg P(y) \Rightarrow z \preccurlyeq y)])$$

где $\forall P$ означает, что сечение множества является дедекиндовым или скачком.

Язык теории групп(элементарный)

В группе: e - особый элемент, $\circ$ - бинарная операция, а $^{-1}$ - унарная операция.
Определение: Терм:
1) e,x,y,... - термы;
2) если t - терм, то t^{-1} - терм;
3) если t_1, t_2 - термы, то $(t_1 \circ t_2)$ - терм.
Определение: Атомная формула:
Если t_1, t_2 - термы, то $(t_1 = t_2)$ - атомная формула.
Определение: Формула:
1) всякая атомная формула является формулой;
2) Если Ä - формула, то ¬Ä - формула;
3) Если Ä и B̈ - формулы, то (Ä∨B̈),(Ä& B̈),(Ä⇒B̈) - тоже формулы;
4) Если Ä - формула, а ξ - индивидная переменная, то $\forall\xi$Ä и $\exists\xi$Ä - формулы.

Общее описание элементарных языков:

	Язык упорядоченных множеств	Язык теории групп
Список индивидных переменных	$\varnothing$	e
Список функциональных имен	$\varnothing$	$\circ, ^{-1}$
Список предикатных имен	$\prec, \preccurlyeq$	$\varnothing$

Заметим, что "имя", "константа", "символ это одно и то же.
Определение: Если все переменные языка являются индивидными, то язык называется элементарным или языком первого порядка. Если же среди переменных есть и другие (функциональные или предикатные), то язык называется неэлементарным.
Определение: Коконечное(кофинитное) множество - дополнение к конечному множеству.
Пример Формула верная для любого множества M мощности $\geqslant n$:

$$\alpha_n \rightleftharpoons \exists x_1 ... x_n \bigwedge_{i \neq j} \neg(x_i = x_j)$$

Формула $\neg\alpha_n$ верна для любого множества мощности меньше n. Формула $\alpha_n \& \neg\alpha_{n+1}$ верна для любого множества мощности n.
Пример Формула, верная для любого конечного множества, но неверная для бесконечного:

$$\text{Œ} \rightleftharpoons \neg(\exists \varphi^{(1)}([\forall x \forall y(\varphi(x) = \varphi(y) \Rightarrow (x = y))] \& \exists z \neg \exists x \varphi(x) = z))$$

Рассмотри бесконечную систему формул:

$$\begin{cases} \text{Œ} \\ \alpha_1, \alpha_2 ... \end{cases}$$

Не существует такого множества, для которого все эти формулы верны.