Дополнительные материалы по математическому анализу

$\boxed{\text{Незаконченный}}$ вариант.

1. Пример к признаку Вейерштрасса(билет **16**)

   Рассмотрим $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+(y-x)^2}dy$ - не зависит от x(можно сделать замену t = y - x)

   Если $x \in [A; B]$ - то интеграл сходится равномерно.

   Определим $g(x;y) = \begin{cases} \frac{1}{1+(y-A)^2}, & x \leqslant A; \\ 1, & x \in [A;B]; \\ \frac{1}{1+(y-B)^2}, & x \geqslant B. \end{cases}$

   Интеграл $\int\limits_{-\infty}^{\infty} g(x;y)dy$ сходится и от X не зависит, значит он сходится равномерно относительно $[A; B]$

   Также $\frac{1}{1+(y-x)^2} \leqslant g(x;y)$, то есть и исходный интеграл сходится равномерно.

   Пусть теперь $x \in (-\infty; \infty)$.

   Докажем, что тогда равномерной сходимости для $[A; +\infty]$ нет. Предположим, что есть равномерная сходимость.

   Тогда $\forall \epsilon \exists \eta_\epsilon$ такое, что $\forall \eta \in (\eta_\epsilon; +\infty) \forall x \in [A; +\infty]$:

   $\int\limits_{\eta}^{+\infty} \frac{1}{1+(y-x)^2}dy < \epsilon$(без модуля, так как подинтегральный - неотрицательный).

   Но ведь можно взять максимум функции правее $\eta_\epsilon : \eta_0$

   Рассмотрим $\int\limits_{\eta_0}^{+\infty} \frac{dy}{1+(y-\eta_0)^2} = \pi/2$.

   Если $\epsilon < \pi/2$. получаем противоречие. Аналогично для $(-\infty; B]$.

2. Явление Гиббса(билет **24**)

   Этот параграф - на тему поведения функций в разрывах первого рода.

   Вначале рассмотрим(кратко) частную функцию:

   $$\varphi(x) := \frac{\pi - x}{2}, x \in (0, 2\pi), \varphi(0) := 0; T = 2\pi$$

   Функция нечётная, значит все коэффициенты, кроме b_k равны 0.

   $b_k = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} \varphi(t)\sin ktdt = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi}(\pi - t)\sin ktdt =$ (интегрируем по частям и т.д. в итоге:) $= \frac{1}{k}$.

   Таким образом, $\varphi(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k}$;

   $S_n(\varphi, x) = \sum)_{k=1}^n \frac{\sin kx}{k} = \sum\limits_{k=1}^{n}\int\limits_0^x \cos ktdt = \int\limits_0^x \sum\limits_{k=1}^{n} \cos ktdt = \int\limits_0^x \mathbb{D}_n(t)dt - \int\limits_0^x 1/2dt = \int\limits_0^x \mathbb{D}_n(t)dt - x/2$;

   $\mathbb{D}_n(t) = \frac{\sin(n+1/2)t}{2\sin t/2} = \sin nt \cdot 1/2ctgt/2 + \cos nt \cdot \frac{\sin t/2}{2\sin t/2} = \sin nt(1/2ctgt/2 - 1/t) + \frac{\sin t}{t} - \frac{\cos nt}{2}$

   Рассмотрим скобку: $\frac{1}{2}ctg\frac{t}{2} - \frac{1}{t} = \frac{\cos\frac{t}{2}}{\sin\frac{t}{2}} - \frac{1}{t} = \frac{t\cos\frac{t}{2} - 2\sin\frac{t}{2}}{2t\sin\frac{t}{2}} = O(t)$, так как $t\cos\frac{t}{2} - 2\sin\frac{t}{2} = t(1 + O(t^2)) - 2(\frac{t}{2} + O(t^2)) = O(t^3)$, а в знаменателе $O(t^2)$.

   Введем $g(t) := \frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{t}{2} - \frac{t}{2}$. Если $g(0)$ положить равной 0, то функция $g(t)$ станет непрерывной на $[0; \pi]$.

   $S_n(\varphi; x) = \int\limits_0^x \frac{\sin nt}{t}dt + \int\limits_0^x g(t)\sin ntdt + \frac{1}{2}\int\limits_0^x cosntdt - \frac{x}{2}$

$\int\limits_0^x g(t)\sin ntdt = \int\limits_0^\pi h(t-x)g(t)\sin ntdt$, где $h(t) = \begin{cases} 1, & t\in[-\pi;0); \\ 0, & t\notin[-\pi;0). \end{cases}$ В итоге: $S_n(\varphi;x) - \varphi(x) = \int\limits_0^x \frac{\sin nt}{t}dt - \frac{\pi}{2} + R_n(x)$, где $R_n(x)\to 0$, равномерно по x.

Теперь при $x>0: S_n(\varphi,x)-\varphi(x)\to 0, n\to\infty$

То есть, если $x\in(0;\pi]$, то $\int\limits_0^\infty \frac{\sin nt}{t}dt = \frac{\pi}{2}$

Введем интегральный синус: $S_i(x) := \int\limits_0^x \frac{\sin t}{t}dt$.

Ясно, что $S_i'(x) = \frac{\sin x}{x}; S_i'(k\pi) = 0, k\in\mathbb{N}$ и $S_i''(x) = \frac{\cos x}{x} - \frac{\sin x}{x^2}; S_i''(k\pi) = \frac{(-1)^k}{k\pi}; k\in\mathbb{N}$

Таким образом, в каждой из точек k функция имеет либо локальный минимум либо локальный максимум(они чередуются).

Поскольку $\int\limits_{(2m-1)\pi}^{(2m+1)\pi} \frac{\sin t}{t}dt < 0, \forall n\in\mathbb{N}$, так как $\frac{1}{t}$ монотонно убывает.

Значит, глобальный максимум - в точке π, так как локальные максимумы убывают, при $x\to\infty$.

Оценим такое выражение: $\lim\limits_{n\to\infty}\sup\limits_{x\in[0;\pi]}|S_n(\varphi,x)-\varphi(x)| = \lim\limits_{n\to\infty}\max\limits_{x\in[0;\pi]}|S_i(nx)-\frac{\pi}{2}+R_n(x)| = \lim\limits_{n\to\infty}|S_i(\pi)-\frac{\pi}{2}| = |S_i(\pi)-\frac{\pi}{2}| \approx 0.281140725...$, поскольку $S_i(\pi)\approx 1.851937052...$, а $\pi/2 \approx 1,57079632679489661923132169163 98....$ Отметим также, что предельные точки у графика $y = s_n(\varphi,x)$ находятся от 0 до 1,85. Так вот, явление Гиббса заключается в том, что если взять функцию, $\phi = -\varphi(x-\pi)$, то вблизи $x=\pi$ график $S_n(\varphi,x)$ резко отклоняется от $\varphi(x)$ кверху(на целых 0.281140725...!!!). Затем он резко опускается к точке $x=\pi$ на оси x.

В общем случае рассматривается функция с разрывом первого рода в x_0. И она также будет иметь явление Гиббса в точке x_0, поскольку $f(x) = f_1(x) + \frac{d}{\pi}\phi(x-x_0)$, где $f_1(x)$ - непрерывная, кусочно-гладкая, а $d = f(x_0+0) - f(x_0-0)$. Ряд Фурье $f_1(x)$ сходится равномерно к $f_1(x)$, а второе слагаемое имеет такое же отклонение в явлении Гиббса - 0.281140725...

3. Константы Лебега(билет **25**)

   $L_n := \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}|D_n(t)|dt$ - **константы Лебега**.

   $E_n(f) := ||f(x) - \sum\limits_{k=0}^{n}(\alpha_k\cos kx + \beta_k\sin kx)||_C$.

4. Теорема Лебега(билет **25**)

   Пусть $f\in\mathbb{C}$, тогда $||f(x)-S_n(f,x)||_C \leqslant (L_n+1)\cdot E_n(f)$

   ◀ Пусть T_n - полином наилучшего приближения.

   $T_n(f,x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}\pi T_n(f,x+t)D_n(t)dt$, так как частная сумма ряда Фурье для полинома совпадает с ним.

   Рассмотрим $|f(x)-S_n(f,x)| = |f(x)-T_n(f;x) - \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}(f(x+t)-T_n(f,x+t))D_n(t)dt| \leqslant |f(x)-T_n(f;x)| + |\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}(f(x+t)-T_n(f,x+t))|\cdot|D_n(t)dt| \leqslant E_n(f) + \frac{1}{\pi}E_n(f)\cdot\int\limits_{-\pi}^{\pi}|D_n(t)|dt = E_n(f)(1+L_n)$▶

5. Оценка L_n(билет **25**)

$L_n = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\pi \frac{|\sin(n+\frac{1}{2})t|}{2\sin\frac{t}{2}}dt = \frac{2}{\pi}(\int\limits_0^{\frac{1}{n}} ... + \int\limits_{\frac{1}{n}}^{\pi} ...) \leqslant \frac{2}{\pi}(\int\limits_0^{\frac{1}{n}}(n+\frac{1}{2})dt + \int\limits_{\frac{1}{n}}^{\pi} \frac{1}{2\sin\frac{t}{2}}) \leqslant \frac{2}{\pi}(1+\frac{1}{2n}) + \frac{2}{\pi}\int\limits_{\frac{1}{n}}^{\pi} \frac{1}{\frac{2}{\pi}t} \leqslant$ $\frac{4}{\pi} + \ln n - \ln \pi$, так как $\frac{1}{\pi}t \leqslant \sin\frac{t}{2}, t \in [0;\pi]$ Таким образом оценка сверху получена.

$L_n = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\pi \frac{|\sin(n+\frac{1}{2})t|}{2\sin\frac{t}{2}}dt > \frac{2}{\pi}\int\limits_{\frac{1}{n}}^\pi \frac{|\sin(n+\frac{1}{2})t|}{2\sin\frac{t}{2}}dt > \frac{2}{\pi}\int\limits_{\frac{1}{n}}^\pi \frac{|\sin(n+\frac{1}{2})t|}{t}dt > \frac{2}{\pi}\int\limits_{\frac{1}{n}}^\pi \sin^2(n+\frac{1}{2})t\cdot\frac{dt}{t} = \frac{1}{\pi}\int\limits_{\frac{1}{n}}^\pi (1-$ $\cos(2n+1)t)\frac{dt}{t} = \frac{1}{\pi}\int\limits_{\frac{1}{n}}^\pi \frac{dt}{t} - \frac{1}{\pi}\int\limits_{\frac{1}{n}}^\pi \frac{\cos(2n+1)t}{t}dt$

Заметим, что $\int\limits_{\frac{1}{n}}^\pi \frac{\cos(2n+1)t}{t}dt = \int\limits_{\frac{2n+1}{n}}^{(2n+1)\pi} \frac{\sin(t)}{t}dt$

Таким образом, $L_n > \frac{1}{\pi}\ln n + C_2$ и $L_n > \frac{1}{\pi}\ln n$ для достаточно больших n.

Отметим(без доказательства), что $L_n = \frac{4}{\pi^2}\ln n + O(1), n \to \infty$.

6. Теорема Джексона(билет **25**)

Пусть $f \in C$, тогда $E_n(F) \leqslant 6\omega(f, frac1n)$

◀ $U_n(t) := \frac{1}{2} + \sum\limits_{k=1}^{n} \rho_k \cos kt \geqslant 0$

$u_n(f;x) := \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x+t)U_n(t)dt = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)U_n(t-x)dt$

То есть $E_n(f) \leqslant ||f - u_n(f)||_C$

Заметим, что $\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} U_n(t)dt = 1$.

$|f(x) - u_n(f,x)| = |\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}(f(x)-f(x+t))U_n(t)dt| \leqslant \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}|f(x)-f(x+t)|U_n(t)dt \leqslant \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\omega(f,|t|)U_n(t)dt =$ $\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\pi |\omega(f,t)U_n(t)dt$

Значит $E_n(f) \leqslant \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\pi |\omega(f,t)U_n(t)dt$.

Докажем, что для $\lambda > 0$: $\omega(\lambda\delta) \leqslant (\lambda+1)\omega(\delta)$:

$\omega(\lambda\delta) \leqslant \omega(([\lambda]+1)\delta) \leqslant ([\lambda]+1)\omega(\delta) \leqslant (\lambda+1)\omega(\delta)$

Продолжим: $\int\limits_0^\pi \omega(f,t)U_n(t)dt = \int\limits_0^\pi \omega(f, nt\cdot\frac{1}{n})U_n(t)dt \leqslant \int\limits_0^\pi (nt+1)\omega(f,\frac{1}{n})\cdot U_n(t)dt = \omega(f,\frac{1}{n})(\int\limits_0^\pi nt\cdot$ $U_n(t)dt + \int\limits_0^\pi U_n(t)dt)$

Получили, что $E_n(f) \leqslant \omega(f,\frac{1}{n})(\frac{2}{\pi}n\int\limits_0^\pi tU_n(t)dt + 1)$

Теперь надо: $\frac{2}{\pi}n\int\limits_0^\pi tU_n(t)dt \leqslant 5$

$\frac{2}{\pi}n\int\limits_0^\pi tU_n(t)dt \leqslant 2\int\limits_0^\pi \sin t\frac{t}{2}U_n(t)dt = \sqrt{2}\int\limits_0^\pi(\sqrt{2}\sin\frac{t}{2}\sqrt{U_n(t)})(\sqrt{U_n(t)})dt \leqslant$ (по Коши-Буняковскому) $\leqslant$ $\sqrt{2}(\int\limits_0^\pi 2\sin^2\frac{t}{2}U_n(t)dt\cdot\int\limits_0^\pi U_n(t)dt)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\pi}(\int\limits_0^\pi 2\sin^2\frac{t}{2}U_n(t)dt)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\pi}(\int\limits_0^\pi(1-\cos t)U_n(t)dt)^{\frac{1}{2}}$

$\frac{2}{\pi}\int\limits_0^\pi tU_n(t)dt \leqslant \sqrt{\pi}(\frac{\pi}{2}\frac{2}{\pi}\int\limits_0^\pi(1-\cos t)U_n(t)dt)^{\frac{1}{2}} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}(\frac{2}{\pi}\int\limits_0^\pi(1-\cos t)U_n(t)dt)^{\frac{1}{2}} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}(1-\frac{2}{\pi}\int\limits_0^\pi \cos tU_n(t)dt)^{\frac{1}{2}} =$ $\frac{\pi}{\sqrt{2}}(1-\rho_1)^{\frac{1}{2}}$

Осталось только доказать, что: $\frac{\pi}{\sqrt{2}}(1-\rho_1)^{\frac{1}{2}} \leqslant 5$

Введем $U_n^*(t) := \alpha \cdot |a_1 + a_2 e^{t_i} + ... + a_{n+1} e^{nt_i}|^2$
$a_k := \sin\frac{\pi k}{n+2}; \alpha := \frac{1}{2(a_1^2+...+a_{n+1}^2)};$
$U_n^*(t) = \alpha(a_1 + a_2 e^{t_i} + ...a_{n+1}e^{nt_i}) \cdot \underbrace{(a_1 + a_2 e^{t_i} + ...a_{n+1}e^{nt_i})}_{\text{Сопряженное к первому}} = \alpha((a_1^2 + ... + a_{n+1}^2) + (a_1 a_2 + ... + a_n a_{n+1}) \cdot (e^{t_i} + e^{-t_i}) + ... + a_1 a_{n+1}(e^{nt_i} + e^{-nt_i})) = \alpha((a_1^2 + ... + a_{n+1}^2) + (a_1 a_2 + ... + a_n a_{n+1}) \cdot (2\cos t) + ... + a_1 a_{n+1}(2\cos nt)).$
Значит у $U_n^*(t) = \alpha(a_1^2 + ... + a_{n+1}^2) = \frac{1}{2}$
Найдем теперь $\rho_1 = \frac{a_1 a_2 + ... + a_n a_{n+1}}{a_1^2+...+a_{n+1}^2}$.
Заметим, что $a_k a_{k+1} = \sin\frac{\pi k}{n+2} \cdot \sin\frac{(k+1)\pi}{n+2} = \sin\frac{\pi k}{n+2} \cdot (\sin\frac{\pi k}{n+2}\cos\frac{\pi}{n+2} + \cos\frac{\pi k}{n+2}\sin\frac{\pi}{n+2}) = \sin^2\frac{\pi k}{n+2}\cos\frac{\pi}{n+2} + \frac{1}{2}\sin\frac{2\pi k}{n+2}\sin\frac{\pi}{n+2} = \sin^2\frac{\pi k}{n+2}\cos\frac{\pi}{n+2} + \frac{1}{4}(\cos\frac{\pi(2k-1)}{n+2} - \cos\frac{\pi(2k+1)}{n+2}).$
То есть $a_1 a_2 + ... + a_n a_{n+1} = \sum\limits_{k=1}^{n+1} \sin\frac{\pi k}{n+2}\sin\frac{\pi(k+1)}{n+2} = \sum\limits_{k=1}^{n+1} \sin^2\frac{\pi k}{n+2}\cos\frac{\pi}{n+2} + \frac{1}{4}(\cos\frac{\pi(2k-1)}{n+2} - \cos\frac{\pi(2k+1)}{n+2}) = \sum\limits_{k=1}^{n+1}(\sin^2\frac{\pi k}{n+2}\cos\frac{\pi}{n+2}) + \frac{1}{4}(\cos\frac{\pi}{n+2} - \cos\frac{\pi(2n+3)}{n+2} = \sum\limits_{k=1}^{n+1}(\sin^2\frac{\pi k}{n+2}\cos\frac{\pi}{n+2})$
Значит, $\rho_1 = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n+1}(\sin^2\frac{\pi k}{n+2}\cos\frac{\pi}{n+2})}{a_1^2+...+a_{n+1}^2} = \cos\frac{\pi}{n+2}$
Теперь подставляем в ρ_1 в исходное выражение:
$\frac{\pi}{\sqrt{2}} n\sqrt{1-\cos\frac{\pi}{n+2}} = \pi n \sin\frac{\pi}{2(n+2)} < \pi n \cdot \frac{\pi}{2(n+2)} = \pi^2/2 \cdot \frac{n}{n+2} < 5$, ч.т.д. ▶

7. Условие Дини-Липшица(билет **25**)

В предыдущих пунктах было доказано, что:
$||f(x) - S_n(f,x)||_c \leqslant (L_n + 1)E_n(f), L_n \sim \ln n, n \to \infty$
И из теоремы Джексона:
$\forall n : ||f(x) - S_n(f,x)||_c \leqslant 6(c_2 \ln n + c_3)\omega(f, \frac{1}{n});$
Значит условие $\omega(f, \frac{1}{n})\ln n \to 0, n \to \infty$ достаточно для равномерной сходимости ряда Фурье f.