Уравнение Дирака.

Спинорное представление группы Лоренца реализуется полем Дирака — четырехкомпонентным спинором, которое можно изобразить в виде столбца

$$\psi(x) = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix}.$$

Спинорное поле $\psi(x)$ удовлетворяет уравнению Дирака

$$(i\gamma_\mu \partial^\mu - m)\psi(x) = 0\,, \tag{1}$$

где матрицы Дирака γ_μ являются четырехрядными матрицами, которые удовлетворяют условию

$$\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2\eta^{\mu\nu}\,. \tag{2}$$

Условие (2) не задает матрицы Дирака однозначным образом. Они могут быть выбраны разными способами так, что они отличаются на преобразования вида

$$\gamma_\mu \to U^{-1}\gamma_\mu U\,. \tag{3}$$

U — произвольные числовые матрицы 4×4, которые обычно полагаются унитарными, чтобы сохранить одинаковые формулы преобразования γ–матриц при их эрмитовом сопряжении (см. ниже формула (6)).

Часто удобно использовать так называемое стандартное представление, в котором матрицы Дирака записываются в блочном виде

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{1} \end{pmatrix}, \quad \gamma^n = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \sigma_n \\ -\sigma_n & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \tag{4}$$

где двухрядные матрицы $\mathbf{1}, \mathbf{0}, \sigma_n$ есть, соответственно,

$$\mathbf{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Нетрудно убедиться, что заданные формулами (4) матрицы при эрмитовом сопряжении ведут себя как

$$\overset{+}{\gamma}_0 = \gamma_0\,, \; \overset{+}{\gamma}_n = -\gamma_n\,. \tag{6}$$

Свойство (6), как уже отмечалось, в силу унитарности матриц U справедливо и при других выборах явного вида матриц Дирака.

Вернемся к уравнению (1) и покажем, что если спинорное поле удовлетворяет уравнению Дирака, то тогда каждая из его четырех компонент удовлетворяет уравнению Клейна–Гордона–Фока. Для этого подействуем на уравнение (1) слева дифференциальным оператором $(i\gamma^\nu \partial_\nu + m)$. С помощью соотношения (2) получим

$$(i\gamma_\nu \partial^\nu + m)(i\gamma_\mu \partial^\mu - m)\psi(x) = -(\partial_\mu \partial^\mu + m^2)\psi(x) = 0\,. \tag{7}$$

Т.к. дифференциальный оператор пропорционален единичной матрице, то уравнение Клейна–Гордона–Фока удовлетворяется покомпонентно.

Уравнение(1) релятивистски ковариантно. Чтобы релятивистски ковариантному уравнению удовлетворял также и сопряженный спинор, определим его специальным образом. Назовем дираковски сопряженным спинором выражение

$$\overline{\psi}(x) = \overset{+}{\psi}(x)\gamma^0 \,, \tag{8}$$

содержащее, помимо эрмитова сопряжения, умножение справа на матрицу γ^0.

Выполнив эрмитово сопряжение уравнения (1) и умножив его справа на γ^0, с учетом (6) и (8) получим

$$i\partial_\mu \overline{\psi}(x)\gamma^\mu + m\overline{\psi}(x) = 0 \,. \tag{9}$$

Уравнение (9) также записывают в виде

$$\overline{\psi}(x)(i\partial_\mu \gamma^\mu + m) = 0 \,, \tag{10}$$

подразумевая, что производная действует на функцию, стоящую слева. В дальнейшем мы, как правило, не будем указывать индексы суммирования в скалярном произведении $\gamma\partial$.

Поскольку каждая из компонент дираковского спинора удовлетворяет уравнению Клейна–Гордона–Фока, то фурье–представление спинорной функции $\psi(x)$ записывается в виде

$$\psi(x) = (2\pi)^{-\frac{3}{2}} \int d^4k e^{ikx} \delta(k^2 - m^2) \tilde{\psi}(k) \,. \tag{11}$$

Выполняя интегрирование по k_0 , получим выражения для положительно – и отрицательно – частотных частей функции $\psi(x)$

$$\psi^{\pm}(x) = (2\pi)^{-\frac{3}{2}} \int d^3k e^{\pm ikx} \chi^{\pm}(\vec{k}) \,. \tag{12}$$

Начиная с этой формулы, как обычно, $k_0 = \sqrt{\vec{k}^2 + m^2}$. Обратим внимание на то, что в отличие от соответствующей формулы для скалярного поля, в интеграле (12) нет множителя $(2k_0)^{-\frac{1}{2}}$. Это означает просто другой выбор нормировки спинорных функций $\chi^{\pm}(\vec{k})$.

Уравнение (1) для спинорных функций $\chi^{\pm}(\vec{k})$ превращается в

$$(m \pm \gamma p)\chi^{\pm}(\vec{k}) = 0 \,. \tag{13}$$

Рассмотрим это уравнение в системе отсчета, в которой $\vec{k} = 0$.

В этой системе $k_0 = m$, и уравнение (13) выглядит как

$$(I \pm \gamma_0)\chi^{\pm}(0) = 0 \,. \tag{14}$$

В стандартном представлении γ – матриц для каждой из функций $\chi^{\pm}(0)$ получим по два линейно независимых решения вида

$$v_1^-(0) = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \,, \quad v_2^-(0) = C_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \,; \quad v_1^+(0) = C_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \,, \quad v_2^+(0) = C_4 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \,.$$

$C_i (i = 1, 2, 3, 4)$ — некоторые отличные от нуля числа, задающие нормировку.

Чтобы получить линейно независимые решения уравнения Дирака в произвольной системе, воспользуемся законом преобразования спиноров при преобразованиях Лоренца. Для простоты будем считать, что импульс $\vec{k}$ направлен вдоль оси x^3, т.е. $k_\mu = (k_0, 0, 0, k_3)$. В этом случае преобразование выглядит следующим образом:

$$v(k_3) = \exp\left\{-\frac{1}{2}[\gamma_3, \gamma_0]\frac{\varphi}{2}\right\} v(0)\,, \tag{15}$$

где $[\gamma_3, \gamma_0] = \gamma_3\gamma_0 - \gamma_0\gamma_3$, а угол гиперболического поворота φ определяется равенствами

$$\cosh\varphi = \frac{1}{\sqrt{1-\vec{v}^2}}, \quad \sinh\varphi = -\frac{v}{\sqrt{1-\vec{v}^2}}\,. \tag{16}$$

Вспоминая выражение импульса через скорость:

$$\vec{k} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-\vec{v}^2}}\,,$$

получим

$$\cosh\varphi = \frac{k_0}{m}, \quad \sinh\varphi = -\frac{k_3}{m}, \quad \left(k_0 = \sqrt{k_3^2 + m^2}\right). \tag{17}$$

В стандартном представлении, как нетрудно проверить,

$$-\frac{1}{2}[\gamma_3, \gamma_0] = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \sigma_3 \\ \sigma_3 & \mathbf{0} \end{pmatrix}. \tag{18}$$

Пользуясь свойством

$$\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \sigma_3 \\ \sigma_3 & \mathbf{0} \end{pmatrix}^2 = I, \tag{19}$$

и разлагая экспоненту в ряд получим

$$\exp\left\{\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \sigma_3 \\ \sigma_3 & \mathbf{0} \end{pmatrix}\frac{\varphi}{2}\right\} = \cosh\frac{\varphi}{2} I + \sinh\frac{\varphi}{2}\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \sigma_3 \\ \sigma_3 & \mathbf{0} \end{pmatrix}. \tag{20}$$

Таким образом,

$$v(k_3) = \begin{pmatrix} \mathbf{1}\cosh\frac{\varphi}{2} & \sigma_3\sinh\frac{\varphi}{2} \\ \sigma_3\sinh\frac{\varphi}{2} & \mathbf{1}\cosh\frac{\varphi}{2} \end{pmatrix} v(0)\,. \tag{21}$$

Гиперболические функции половинного угла с учетом (17) равны

$$\cosh\frac{\varphi}{2} = \sqrt{\frac{k_0+m}{2m}}\,, \quad \sinh\frac{\varphi}{2} = \sqrt{\frac{k_0-m}{2m}} = \frac{k_3}{\sqrt{2m(k_0+m)}}\,. \tag{22}$$

В итоге получим 4 линейно независимых решения уравнения Дирака

$$v_1^-(k_3) = C_1\sqrt{\frac{k_0+m}{2m}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{k_3}{k_0+m} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2^-(k_3) = C_2\sqrt{\frac{k_0+m}{2m}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \frac{-k_3}{k_0+m} \end{pmatrix},$$

$$v_1^+(k_3) = C_3\sqrt{\frac{k_0+m}{2m}}\begin{pmatrix} \frac{k_3}{k_0+m} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2^+(k_3) = C_4\sqrt{\frac{k_0+m}{2m}}\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{-k_3}{k_0+m} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{23}$$

Обозначим решение для эрмитово сопряженного спинора $\overset{+}{\psi}(x)$ через $\overset{*}{v}{}_s^{\pm}(k_3)$, $s = 1, 2$, а для дираковского сопряженного спинора $\overline{\psi}(x)$ — через $\overline{v}_s^{\pm}(k_3)$. Очевидно, что

$$\overset{*}{v}{}_s^{\pm} = (v_s^{\mp})^+ \,. \tag{24}$$

Выберем все нормировочные коэффициенты в форме $C_i = \frac{m}{k_3}$ $(i = 1, 2, 3, 4)$. Тогда

$$\overset{*}{v}{}_s^{\pm}(k_3) v_r^{\mp}(k_3) = \delta_{sr} \,. \tag{25}$$

Аналогично можно получить спиноры с произвольным направлением $\vec{k}$. Для них тоже выполняется условие нормировки

$$\overset{*}{v}{}_s^{\pm}(\vec{k}) v_r^{\mp}(\vec{k}) = \delta_{sr} \,, \tag{26}$$

а также условие ортогональности спиноров с аргументами, отличающимися знаками,

$$\overset{*}{v}{}_s^{\pm}(\vec{k}) v_r^{\mp}(-\vec{k}) = 0 \,. \tag{27}$$

Нетрудно также вывести условие ортонормированности для дираковски сопряженных спиноров

$$\overline{v}_s^{\pm}(\vec{k}) v_r^{\mp}(\vec{k}) = \pm\frac{m}{k_0}\delta_{sr} \,, \ (\overline{v}^{\pm} = \overset{*}{v}{}^{\pm} \gamma_0) \,. \tag{28}$$

Итак, произвольный спинор, удовлетворяющий уравнению Дирака, представляется в виде линейной комбинации независимых решений

$$\chi^{\pm}(\vec{k}) = \sum_{s=1,2} a_s^{\pm}(\vec{k})\, v_s^{\pm}(\vec{k}) \,, \tag{29}$$

$$\overline{\chi}^{\pm}(\vec{k}) = \sum_{s=1,2} \overset{*}{a}{}_s^{\pm}(\vec{k})\, \overline{v}_s^{\pm}(\vec{k}) \,, \tag{30}$$

где $a_s^{\pm}(\vec{k})$, $\overset{*}{a}{}_s^{\pm}(\vec{k})$ — четыре произвольные числовые функции.

Уравнения (1) и (10) являются уравнениями движения, которые получаются из лагранжиана

$$\mathcal{L} = \frac{i}{2}\left[\overline{\psi}(x)\gamma\partial\psi(x) - \partial\overline{\psi}(x)\gamma\psi(x)\right] - m\overline{\psi}(x)\psi(x) \,. \tag{31}$$

Обратим внимание на структуру лагранжиана (31). Его можно представить в виде суммы двух слагаемых, пропорциональных левым частям уравнений (1) и (10). Поэтому, если подставить в $\mathcal{L}$ в качестве полей $\psi(x)$ и $\overline{\psi}(x)$ решения уравнений Дирака, то лагранжиан (31) обратится в нуль.

Учитывая уравнения движения спинорного поля, получим следующие выражения для тензора энергии–импульса и вектора тока:

$$T^{\mu\nu} = \frac{i}{2}\left[\overline{\psi}(x)\gamma^{\mu}\partial^{\nu}\psi(x) - \partial^{\nu}\overline{\psi}(x)\gamma^{\mu}\psi(x)\right] , \tag{32}$$

$$\mathcal{J}^{\mu} = \overline{\psi}(x)\gamma^{\mu}\psi(x) . \tag{33}$$

Заметим, что

$$T^{\mu\nu} \neq T^{\nu\mu} . \tag{34}$$

Повторяя вычисления аналогичные тем, которые привели к соответствующим формулам для скалярного поля, и используя соотношения (28), получим выражения для вектора энергии-импульса и заряда в виде интегралов по $\vec{k}$–пространству

$$P_{\mu} = \int d^3k\, k_{\mu} \sum_{s=1,2}\left[\overset{*}{a}{}_s^{+}(\vec{k})a_s^{-}(\vec{k}) - \overset{*}{a}{}_s^{-}(\vec{k})a_s^{+}(\vec{k})\right] , \tag{35}$$

$$Q = \int d^3\vec{k} \sum_{s=1,2}\left[\overset{*}{a}{}_s^{+}(\vec{k})a_s^{-}(\vec{k}) + \overset{*}{a}{}_s^{-}(\vec{k})a_s^{+}(\vec{k})\right] . \tag{36}$$