Лекция 1. Алгебры Клиффорда и спинорные группы.

re-spinor-group

1.1. Определения. Пусть V — конечномерное векторное пространство со скалярным произведением $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Основными примерами нам будут служить евклидово пространство $\mathbb{R}^n$ и пространство Минковского M^4. Скалярное произведение определяет квадратичную форму $Q(x) = \langle x, x\rangle$. Наоборот, если известна квадратичная форма $Q(x)$, то можно восстановить скалярное произведение по формуле

$$\langle x, y\rangle = \frac{1}{2}(Q(x+y) - Q(x) - Q(y)).$$

Выберем в пространстве V базис из векторов $e_1, e_2, \ldots, e_n$, где $\dim V = p+q = n$, удовлетворяющих соотношениям

$$\begin{aligned} \langle e_1, e_1\rangle = \ldots = \langle e_p, e_p\rangle &= 1, \\ \langle e_{p+1}, e_{p+1}\rangle = \ldots = \langle e_{p+q}, e_{p+q}\rangle &= -1, \\ \text{и } \langle e_i, e_j\rangle &= 0 \text{ при } i \neq j. \end{aligned}$$

cliff-def **Определение 1.1.** *Алгеброй Клиффорда* $Cl_{p,q}$ называется ассоциативная алгебра с 1, порожденная элементами $e_1, \ldots, e_{p+q}$ и соотношениями

$$e_ie_j + e_je_i = -2\langle e_i, e_j\rangle,$$

которые также можно записать в виде

$$\begin{aligned} e_i^2 &= \begin{cases} -1, & 1 \le i \le p, \\ +1, & p < i \le n = p+q, \end{cases} \\ e_ie_j &= -e_je_i, \qquad i \neq j. \end{aligned}$$

Алгебра Клиффорда $Cl_{p,q}$ является линейным пространством. Из вида определяющих соотношений в этой алгебре следует, что любой ее элемент x можно записать в виде

$$x = a \cdot 1 + \sum_i a_ie_i + \sum_{i<j} a_{ij}e_ie_j + \sum_{i<j<k} a_{ijk}e_ie_je_k + \ldots + a_{1\ldots n}e_1\ldots e_n,$$

где $a, a_i, a_{ij}, a_{ijk}, \ldots, a_{12\ldots n} \in \mathbb{R}$. Отсюда, в частности, получаем, что размерность алгебры Клиффорда $Cl_{p,q}$ как вещественного линейного пространства не превосходит 2^{p+q}. Чуть ниже мы докажем, что в действительности размерность алгебры Клиффорда в точности равна 2^{p+q}. Для упрощения обозначений будем использовать запись вида

$$x = \sum_I a_Ie_I,$$

где I — мультииндекс, представляющий из себя набор неповторяющихся индексов, расположенных по возрастанию, причем если $I = \emptyset$, то $e_I = 1$. Через $|I|$ будем обозначать количество элементов I.

Напомним, что гомоморфизмом алгебр $f : A \to B$ называется отображение, согласованное со сложением и умножением, сохраняющее 0 и 1. Пусть алгебра A задана наборами образующих $\{a_j \ : \ j \in J\}$ и соотношений $\{r_k(a_1, \ldots) = 0 \ : \ k \in R\}$, где J и R — некоторые множества индексов, а r_k — это конечные линейные комбинации слов, составленных из букв a_j, $j \in J$. Тогда значение гомоморфизма f на произвольном элементе алгебры A однозначно определяется, если известны значения f на всех образующих $\{a_j \ : \ j \in J\}$. Наоборот, если задано некоторое отображение $f_{\text{обр}}$ множества образующих $\{a_j \ : \ j \in J\}$ в алгебру B, то оно продолжается до гомоморфизма алгебр $f : A \to B$ в том и только в том случае, когда значения $f_{\text{обр}}$ на образующих алгебры A удовлетворяют тем же определяющим соотношениям, что и сами образующие, иными словами, в точности тогда, когда выполнены равенства $r_k(f_{\text{обр}}(a_1), \ldots) = 0$ для всех $k \in R$.

Пример 1: $Cl_{1,0} \cong \mathbb{C}$. В самом деле, изоморфизм $Cl_{1,0} \to \mathbb{C}$ задается своим значением на единственной образующей алгебры $Cl_{1,0}$. Положим $f(e_1) = i$. Соотношение $f(e_1)f(e_1) = -1$ тогда выполнено очевидным образом и f продолжается до гомоморфизма алгебр $Cl_{1,0} \to \mathbb{C}$. Легко видеть, что f эпиморфизм. Принимая во внимание, что $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = 2$, а $\dim_{\mathbb{R}} Cl_{1,0} \leq 2$, получаем, что f — изоморфизм, а $\dim_{\mathbb{R}} Cl_{1,0} = 2$. Такого сорта рассуждение, основанное на оценках размерностей и эпиморфности гомоморфизма, нам неоднократно встретится в дальнейшем.

Пример 2: $Cl_{0,1} \cong \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$. Напомним, что в алгебре $\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$ сложение и умножение определяются покомпонентно, поэтому ее единицей является элемент $(1, 1)$, а нулем — $(0, 0)$. Искомый изоморфизм задается значением на образующей e_1. Так же как в предыдущем примере проверяется, что $f : e_1 \mapsto (1, -1)$ продолжается до изоморфизма алгебр.

Пример 3. Имеет место изоморфизм алгебры Клиффорда $Cl_{2,0}$ и алгебры кватернионов $\mathbb{H}$. Рассмотрим следующее отображение f образующих алгебры $Cl_{2,0}$ в $\mathbb{H}$: $f : e_1 \mapsto i$, $f : e_2 \mapsto j$. Легко проверить, что значения f на образующих удовлетворяют нужным соотношениям: $f(e_1)f(e_1) = -1, f(e_2)f(e_2) = -1, f(e_1)f(e_2) = -f(e_2)f(e_1)$. Таким образом, f продолжается до гомоморфизма $f : Cl_{2,0} \to \mathbb{H}$. Поскольку $f(e_1e_2) = ij = k$, гомоморфизм f эпиморфен. По соображениям размерности это продолжение f является изоморфизмом, а $\dim_{\mathbb{R}} Cl_{2,0} = 4$.

Через $M_{\mathbb{R}}(n)$ будем обозначать алгебру матриц размера $n \times n$ над полем $\mathbb{R}$, через E будем обозначать единичную матрицу.

Примеры. Имеет место изоморфизм $Cl_{1,1} \cong \mathrm{M}_{\mathbb{R}}(2)$. На образующих алгебры Клиффорда определим значения f следующим образом: $f(e_1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $f(e_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Тогда легко проверить, что выполнены соотношения $f(e_1)f(e_1) = -E$, $f(e_2)f(e_2) = E$, $f(e_1)f(e_2) = -f(e_2)f(e_1)$. Следовательно, f продолжается до гомоморфизма алгебр $f : Cl_{1,1} \to \mathrm{M}_{\mathbb{R}}(2)$. Этот гомоморфизм является эпиморфизмом, так как элементы $f(e_1)$ и $f(e_2)$, выписанные выше, вместе с

$$f(1) = E \quad \text{и} \quad f(e_1e_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

образуют базис $\mathrm{M}_{\mathbb{R}}(2)$ как векторного пространства. Принимая во внимание оценки размерностей, получаем, что f — изоморфизм, а $\dim_{\mathbb{R}} Cl_{1,1} = 4$.

Предлагаем читателю самостоятельно проверить, что имеет место изоморфизм $Cl_{0,2} \cong \mathrm{M}_{\mathbb{R}}(2)$, который устанавливается соответствием $e_1 \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$,

$e_2 \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Теорема 1.1. *Имеют место изоморфизмы*

$$f : Cl_{p+2,0} \cong Cl_{0,p} \otimes Cl_{2,0},$$

$$g : Cl_{0,q+2} \cong Cl_{q,0} \otimes Cl_{0,2},$$

$$h : Cl_{p+1,q+1} \cong Cl_{p,q} \otimes Cl_{1,1}.$$

Кроме того, $\dim_{\mathbb{R}} Cl_{p,q} = 2^{p+q}$.

Доказательство. В первую очередь зададим отображения f, g и h в явном виде. Начнем с f. Пусть в пространстве $\mathbb{R}^{p+2}$ выбран ортонормированный базис $e_1, \ldots, e_{p+2}$. В пространстве $\mathbb{R}^n$ выберем ортонормированный базис $e'_1, \ldots, e'_p$, а в пространстве $\mathbb{R}^2$ — базис e''_1, e''_2. На образующих алгебры $Cl_{p+2,0}$ положим

$$\begin{aligned} f(e_k) &= e'_k \otimes e''_1 e''_2, \text{ где } k = 1, \ldots, p; \\ f(e_{p+1}) &= 1 \otimes e''_1; \\ f(e_{p+2}) &= 1 \otimes e''_2. \end{aligned}$$

Нетрудно проверить, что соотношения $f(e_j)f(e_j) = -1$ и $f(e_j)f(e_k) = -f(e_k)f(e_j)$, где $j \neq k$, выполнены. Например,

$$\begin{aligned} f(e_1)f(e_1) &= (e'_1 \otimes e''_1 e''_2) \cdot (e'_1 \otimes e''_1 e''_2) = \\ &= e'_1 e'_1 \otimes e''_1 e''_2 e''_1 e''_2 = -1 \otimes e''_1 e''_1 e''_2 e''_2 = -1 \otimes 1. \\ f(e_1)f(e_{p+2}) &= (e'_1 \otimes e''_1 e''_2) \cdot (1 \otimes e''_2) = e'_1 \otimes e''_1 e''_2 e''_2 = \\ &= -e'_1 \otimes e''_2 e''_1 e''_2 = -(1 \otimes e''_2) \cdot (e'_1 \otimes e''_1 e''_2) = -f(e_{p+2})f(e_1). \end{aligned}$$

Таким образом, определен гомоморфизм $f : Cl_{p+2,0} \to Cl_{0,p} \otimes Cl_{2,0}$.

Чтобы определить гомоморфизм g, выберем в пространстве $\mathbb{R}^{q+2}$ ортонормированный базис $e_1, \ldots, e_{q+2}$, в $\mathbb{R}^q$ — ортонормированный базис $e'_1, \ldots, e'_q$, а в $\mathbb{R}^2$ — базис e''_1, e''_2. Зададим g на образующих формулами

$$\begin{aligned} g(e_k) &= e'_k \otimes e''_1 e''_2, \text{ где } k = 1, \ldots, q; \\ g(e_{q+1}) &= 1 \otimes e''_1; \\ g(e_{q+2}) &= 1 \otimes e''_2. \end{aligned}$$

Нетрудно проверить, что такое отображение образующих алгебры $Cl_{0,q}$ сохраняет соотношения между ними, поэтому корректно определен гомоморфизм $g : Cl_{0,q+2} \cong Cl_{q,0} \otimes Cl_{0,2}$.

Теперь определим гомоморфизм h. Для этого в пространстве $\mathbb{R}^{p+q+2}$ выберем ортонормированный базис $e_1, \ldots, e_{p+1}, f_1 \ldots, f_{q+1}$, так что $Q(e_j) = 1$, $Q(f_k) = -1$ для всех j и k. Аналогично в пространстве $\mathbb{R}^{p+q}$ выберем базис $e'_1, \ldots, e'_p, f'_1, \ldots, f'_q$, а в пространстве $\mathbb{R}^2$ — e''_1, f''_1. Отображение h зададим на образующих алгебры $Cl_{p+1,q+1}$ формулами

$$\begin{aligned} h(e_j) &= e'_j \otimes e''_1 f''_1, \text{ где } j = 1, \ldots, p; \\ h(e_{p+1}) &= 1 \otimes e''_1; \\ h(f_k) &= f'_k \otimes e''_1 f''_1, \text{ где } k = 1, \ldots, q; \\ h(f_{q+1}) &= 1 \otimes f''_1. \end{aligned}$$

Нетрудно проверить, что h продолжается до гомоморфизма алгебр $Cl_{p+1,q+1} \to Cl_{p,q} \otimes Cl_{1,1}$.

Тот факт, что f, g и h являются изоморфизмами мы докажем по индукции одновременно с равенством $\dim_{\mathbb{R}} Cl_{p,q} = 2^{p+q}$. Обратим внимание, что в случае с гомоморфизмами f и g одно из чисел p или q, очевидно, равно 0. В качестве базы индукции будем пользоваться рассмотренными выше примерами, в которых показано, что равенство $\dim_{\mathbb{R}} Cl_{p,q} = 2^{p+q}$ выполнено при $p + q \leq 2$.

Прежде всего заметим, что f, g и h являются эпиморфизмами. Проверим это, например, для f. Мультипликативными образующими алгебры $Cl_{0,p} \otimes Cl_{2,0}$ являются элементы вида $e'_1 \otimes 1, \ldots, e'_p \otimes 1$, $1 \otimes e''_1$ и $1 \otimes e''_2$. Достаточно проверить, что все они лежат в образе f. В самом деле, для элементов $1 \otimes e''_1$ и $1 \otimes e''_2$ это верно по построению f. Кроме того,

$$f(e_j e_{p+2} e_{p+1}) = (e'_j \otimes e''_1 e''_2)(1 \otimes e''_2)(1 \otimes e''_1) = e'_j \otimes e''_1 e''_2 e''_2 e''_1 = e'_j \otimes 1.$$

Таким образом f — эпиморфизм; аналогично проверяется, что g и h эпиморфизмы.

По предположению индукции, если $p \leq n$, то $\dim_{\mathbb{R}} Cl_{0,p} = 2^p$. Тогда $\dim_{\mathbb{R}} Cl_{0,p} \otimes Cl_{2,0} = 2^p \dim_{\mathbb{R}} Cl_{2,0} = 2^{p+2}$. Поскольку f эпиморфизм, а размерность $Cl_{p+2,0}$, как мы видели выше, не может превышать 2^{p+2}, то f — изоморфизм, а $\dim_{\mathbb{R}} Cl_{p+2,0} = 2^{p+2}$. Аналогичным образом доказывается, что g и h изоморфизмы и что $\dim_{\mathbb{R}} Cl_{0,q+2} = 2^{q+2}$, $\dim_{\mathbb{R}} Cl_{p+1,q+1} = 2^{p+q+2}$. □

Следствие 1.2. *В алгебре Клиффорда элементы $e_1, \ldots, e_n$ линейно независимы; линейное пространство, которое они порождают, естественно отождествляется с исходным пространством V.*

Упражнение 1. Докажите изоморфизм

$$Cl_{1,3} \cong \mathrm{M}_{\mathbb{R}}(4).$$

Замечание. Можно показать, что любая алгебра Клиффорда над $\mathbb{R}$ изоморфна алгебре матриц либо прямой сумме двух одинаковых алгебр матриц с вещественным, комплексными, либо кватернионными элементами. С этой структурной теоремой, а также с категорным определением алгебр Клиффорда, можно познакомиться по ССЫЛКА

ССЫЛКА на Lawson-Michelson Spin Geometry и Karoubi K-theory.

clifford-sootn

Предложение 1.3. *Для любых $v_1, v_2 \in V$ в алгебре Клиффорда $Cl_{p,q}$ имеет место соотношение*

$$v_1 v_2 + v_2 v_1 = -2\langle v_1, v_2 \rangle.$$

Доказательство несложно и предоставляется читателю. □

Замечание. В определении cliff-def 1.1 алгебры Клиффорда использовался ортонормированный базис пространства V; но, как показывает следующее предложение, алгебра Клиффорда от произвола в выборе базиса не зависит. Этот факт нам не понадобится, поэтому доказательство мы опускаем.

ПРОВЕРИ что не понадобится

Предложение 1.4. *Пусть в пространстве V выбраны два ортонормированных базиса e'_j и e''_j, где $j = 1, \ldots, n$. Пусть также $e'_k = a^j_k e''_j$. Обозначим через $Cl'_{p,q}$ алгебру Клиффорда, построенную по первому базису, а через $Cl''_{p,q}$ — построенную по второму. Тогда отображение $e'_j \mapsto a^j_k e''_j$ продолжается до изоморфизма алгебр Клиффорда $Cl'_{p,q} \to Cl'_{p,q}$, тождественного на V.*

□

Упражнение 2. Доказать это предложение.

Имеется другое, инвариантное определение алгебр Клиффорда, не использующее выбор базиса в пространстве V. С ним можно познакомиться по еще раз ССЫЛКА на Lawson-Michelson Spin Geometry и Karoubi K-theory.

Кроме того, инвариантное определение позволяет рассматривать алгебры Клиффорда для вырожденных квадратичных форм. В частности, если квадратичная форма нулевая, то соответствующая алгебра Клиффорда совпадает с внешней алгеброй пространства V.

1.2. Четные и нечетные элементы алгебры Клиффорда, транспонирование. Рассмотрим в алгебре Клиффорда два линейных подпространства

$$Cl^0_{p,q} = \{ \sum_{|I| \text{ четное}} a_I e_I \}$$
$$Cl^1_{p,q} = \{ \sum_{|I| \text{ нечетное}} a_I e_I \}$$

Элементы пространства $Cl^0_{p,q}$ называются *четными*, а элементы $Cl^0_{p,q}$ — *нечетными*. Имеет место разложение в прямую сумму $Cl_{p,q} = Cl^0_{p,q} \bigoplus Cl^1_{p,q}$. Иными словами, представление произвольного элемента алгебры Клиффорда x в виде суммы $x^0 + x^1$ четного x^0 и нечетного x^1 элементов всегда возможно, причем единственным образом. В явном виде, если $x = \sum_{|I|} a_I e_I$, то $x^0 = \sum_{|I| \text{ четное}} a_I e_I$, а $x^1 = \sum_{|I| \text{ нечетное}} a_I e_I$.

Нетрудно проверить, что если $x \in Cl^j_{p,q}$ и $y \in Cl^k_{p,q}$, где j, k равны 0 или 1, то произведение xy лежит в $Cl^{j+k \mod 2}_{p,q}$. В этой ситуации говорят, что на $Cl_{p,q}$ задана $\mathbb{Z}/2$*–градуировка*.

Пространства $Cl^0_{p,q}$ и $Cl^1_{p,q}$ можно описать следующим образом. Зададим гомоморфизм $\alpha : Cl_{p,q} \to Cl_{p,q}$ на образующих формулой $e_j \mapsto -e_j$, $j = 1, \dots p+q$. Проверку корректности, т. е. того, факта, что такое определение согласовано с соотношениями, оставим читателю. Нетрудно видеть, что

$$\alpha : e_{i_1} \dots e_{i_k} \mapsto \begin{cases} +e_{i_1} \dots e_{i_k}, & k \text{ четное}, \\ -e_{i_1} \dots e_{i_k}, & k \text{ нечетное}. \end{cases}$$

Также легко проверить, что $\alpha^2 = 1$. В частности, α — изоморфизм. Из равенства $\alpha^2 = 1$ также следует, что собственными значениями α как линейного отображения являются ± 1. Четные элементы образуют собственное подпространство $Cl^0_{p,q}$ для собственного значения 1, а нечетные — собственное подпространство $Cl^1_{p,q}$ для -1.

Замечание. Разложение $Cl_{p,q} = Cl^0_{p,q} \bigoplus Cl^1_{p,q}$ можно описать еще одним способом. С помощью гомоморфизма α можно определить два линейных отображения $P_\pm : Cl_{p,q} \to Cl_{p,q}$ по формуле $P_\pm = (1 \pm \alpha)/2$. Нетрудно проверить, что они оба являются проекторами, т. е. $P^2_\pm = P_\pm$, кроме того, $P_+ + P_- = 1$. Отсюда следует, что $Cl_{p,q}$ разлагается в прямую сумму образов проекторов P_+ и P_-, причем для любого $x \in Cl_{p,q}$ имеем $x^0 = P_+ x$ и $x^1 = P_- x$.

Определим еще одно отображение алгебры Клиффорда в себя, которое является аналогом транспонирования. На элементах вида $e_{i_1} \dots e_{i_p}$ положим по определению

$$(e_{i_1} \dots e_{i_p})^T = e_{i_p} \dots e_{i_1}. \qquad (1)$$

clifford-t

На остальные элементы алгебры Клиффорда распространим его по линейности. Оставим читателю проверку того, что таким образом мы получим корректно определенное линейное отображение $Cl_{p,q}$ в себя. Его связь с умножением в алгебре Клиффорда выражается простым соотношением $(xy)^T = y^T x^T$, для всех $x, y \in Cl_{p,q}$, которое нетрудно вывести из определения (1). Ясно, что $(x^T)^T = x$. В частности, отображение $x \mapsto x^T$ является антиизоморфизмом алгебры $Cl_{p,q}$.

1.3. Обратимые элементы алгебры Клиффорда, группы $Pin_{p,q}$ и $Spin_{p,q}$. Множество обратимых элементов алгебры Клиффорда

$$Cl_{p,q}^{\times} = \{x \in Cl_{p,q} \mid \exists x^{-1} \in Cl_{p,q} \ : x^{-1}x = xx^{-1} = 1\},$$

как нетрудно проверить, образует группу. Мы определим группы $Spin_{p,q}$ и $Pin_{p,q}$ как подгруппы $Cl_{p,q}^{\times}$.

Пусть $v \in V \subset Cl_{p,q}$ и $Q(v) = \pm 1$. Покажем, что элемент v обратим в алгебре $Cl_{p,q}$. В самом деле, $v \cdot \dfrac{-v}{Q(v)} = 1$, поэтому $v^{-1} = \frac{-v}{Q(v)}$. Следовательно, элемент вида $v_1 \dots v_k$, где $Q(v_j) = \pm 1$, тоже обратим:

$$(v_1 \dots v_k)^{-1} = v_k^{-1} \dots v_1^{-1}.$$

Определение 1.2. Положим

$$\begin{array}{rcl} Pin_{p,q} & = & \{x \in Cl_{p,q} \ : \ x = v_1 \dots v_m, \text{ где } v_j \in V \text{ и } Q(v_j) = \pm 1\}, \\ Spin_{p,q} & = & \{x \in Cl_{p,q} \ : \ x = v_1 \dots v_{2m}, \text{ где } v_j \in V \text{ и } Q(v_j) = \pm 1\}. \end{array}$$

Группа $Spin_{p,q}$ называется *спинорной*. Для группы $Pin_{p,q}$ общеупотребительного названия не существует.

Заметим, что группы $Pin_{p,q}$ и $Spin_{p,q}$ содержат элементы ± 1, они представляются, например, в виде $(\pm e_1) \cdot e_1$.

Эти две группы имеют очень тесную связь с (псевдо)ортогональными группами $O_{p,q}$ и $SO_{p,q}$. К установлению этой связи мы сейчас приступим.

Для этого мы каждому элементу группы $x \in Pin_{p,q}$ поставить в соответствие элемент группы $A(x) \in O_{p,q}$, т. е. некоторое линейное преобразование векторного пространства V, сохраняющее квадратичную форму $x_1^2 + \dots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \dots - x_{p+q}^2$.

Гомоморфизм $A : Pin_{p,q} \to O_{p,q}$ определяется следующим образом. Пусть $x \in Pin_{p,q}$. Определим в пространстве V линейный оператор $A(x)$ формулой

$$A(x) : v \mapsto \alpha(x) \cdot v \cdot x^{-1},$$

для любого вектора $v \in V$. Отметим, из этой формулы совершенно неочевидно, что $A(x)(v)$ лежит в пространстве V — пока нам известно лишь, что $A(x)(v)$ лежит в большем пространстве, а именно в самой алгебре $Cl_{p,q}$. Перед тем как проверить, что $A(x)$ отображает пространство V в себя, показать, что A является гомоморфизмом группы $Pin_{p,q}$ в ортогональную группу $O_{p,q}$, и установить некоторые свойства гомоморфизма A, напомним определение отражения в псевдоевклидовом пространстве. Пусть $w \in V$, причем $Q(w) = \langle w, w \rangle \neq 0$. Тогда отражение в плоскости, ортогональной вектору w, определяется формулой

$$\rho_w(v) = v - 2w \, \frac{\langle w, v \rangle}{\langle w, w \rangle}.$$

Напомним также, что отражение ρ_w является ортогональным преобразованием пространства V, т. е. сохраняет скалярное произведение $\langle\cdot,\cdot\rangle$.

Теорема 1.5. (a) *Если $w \in V \subset Cl_{p,q}$ и $w \in Pin_{p,q}$, то $A(w)$ отображает $V \subset Cl_{p,q}$ в себя и является отражением в плоскости, ортогональной вектору w, т. е. $A(w) = \rho_w$.*

(b) *Если $x, y \in Pin_{p,q}$, то $A(xy) = A(x)A(y)$.*

(c) *Для всех $x \in Pin_{p,q}$ отображение $A(x)$ сохраняет V, более того, $A(x) \in O_{p,q}$.*

(d) *$A(x) \in SO_{p,q}$ для всех $x \in Spin_{p,q}$.*

(e) *Гомоморфизм $A : Pin_{p,q} \to O_{p,q}$ и его ограничение $A : Spin_{p,q} \to SO_{p,q}$ являются эпиморфизмами.*

(f) *Ядра гомоморфизма $A : Pin_{p,q} \to O_{p,q}$ и его ограничения $A : Spin_{p,q} \to SO_{p,q}$ одинаковы и состоят из элементов $\pm 1 \in Spin_{p,q} \subset Pin_{p,q}$.*

Доказательство. Напомним, что если $Q(w) \neq 0$, то определен обратный элемент $w^{-1} = \dfrac{-w}{Q(w)} = \dfrac{-w}{\langle w, w\rangle}$. Кроме того, согласно предложению clifford-sootn 1.3, имеет место равенство $vw + wv = -2\langle w, v\rangle$, в частности, $ww = -\langle w, w\rangle$, откуда

$$\begin{aligned} A(w)\ &: v \mapsto \alpha(w)\cdot v\cdot w^{-1} = -wvw^{-1} = wv\frac{w}{\langle w, w\rangle} = \\ &= w\,\frac{wv}{\langle w, w\rangle} - w\frac{2\,\langle w, v\rangle}{\langle w, w\rangle} = v - 2w\,\frac{\langle w, v\rangle}{\langle w, w\rangle} = \rho_w(v). \end{aligned}$$

Тем самым, пункт (a) доказан. Утверждение пункта (b) получается простой выкладкой

$$\begin{aligned} A(xy)(v) = \alpha(xy)\cdot v\cdot (xy)^{-1} &= \alpha(x)\alpha(y)\cdot v\cdot y^{-1}x^{-1} = \\ &= \alpha(x)\cdot A(y)(v)\cdot x^{-1} = A(x)\left(A(y)(v)\right). \end{aligned}$$

Перейдем к пунктам (c) и (d). Пусть $x \in Pin_{p,q}$. Представим x в виде $x = w_1 w_2 \dots w_k$, где $Q(w_j) = \pm 1$. Тогда $A(x)$ является композицией отражений $\rho_{w_1}\rho_{w_2}\dots\rho_{w_k}$. Отсюда, во-первых, следует, что $A(x)$ отображает V в себя, а во-вторых, $A(x) \in O_{p,q}$, поскольку отражения являются ортогональными преобразованиями. Далее, если $x \in Spin_{p,q}$, то количество сомножителей в представлении $x = w_1 w_2 \dots w_k$ четно. Тогда $A(x)$ является композицией четного числа отражений и, значит, принадлежит группе $SO_{p,q}$.

Утверждение пункта (e) очевидным образом следует из следующего утверждения.

Теорема 1.6 (Картана—Дьедонне). *Пусть V — конечномерное пространство, снабженное невырожденной симметрической билинейной формой. Тогда любое линейное преобразование, сохраняющее эту форму, представляется в виде композиции не более чем $n = \dim V$ отражений.*

[1]

Доказательство в случае знакоопределенной формы несложно, его можно найти в любом учебнике по линейной алгебре. Стоит уточнить, что для доказательства пункта (e) достаточно знать лишь, что ортогональное преобразование разлагается в произведение отражений; оценка количества этих отражений неважна. Нас больше всего интересует группа Лоренца, т. е. случай, когда $p = 1$

[1]ЕСТЬ ФОРМУЛИРОВКА В ЛЕКЦИИ ПРО ПРОСТРАНСТВО МИНКОВСКОГО

и $q = 3$. Тот факт, что любое преобразование из группы Лоренца представляется в виде композиции отражений был доказан в лекции lecture_minkovski ??, см. следствие lorenz_otrazh_1 ??

Доказательство теоремы Картана—Дьедонне не очень сложно, но довольно громоздко, мы предлагаем читателю ознакомиться с ним по книге

ссылка на Э.Артин "Геометрическая алгебра"

Наконец, остается найти ядро гомоморфизма A. Мы сделаем это в нижеследующем предложении spinor-kernel 1.8. □

Нам понадобится гомоморфизм

$$N : Pin_{p,q} \to \mathbb{Z}/2.$$

Для $x \in Pin_{p,q}$ положим по определению $N(x) = x\alpha(x^T)$.

Предложение 1.7. *Отображение N является гомоморфизмом*

$$N : Pin_{p,q} \to \mathbb{Z}/2.$$

Доказательство. Покажем, что $N(x) = \pm 1$. Пусть $x = w_1 w_2 \dots w_{k-1} w_k$. Тогда

$$\begin{aligned} N(x) &= w_1 w_2 \dots w_{k-1} w_k \alpha((w_1 w_2 \dots w_{k-1} w_k)^T) = \\ &= (-1)^k w_1 w_2 \dots w_{k-1} w_k w_k w_{k-1} \dots w_2 w_1 = \\ &= Q(w_k) Q(w_{k-1}) \dots Q(w_2) Q(w_1) = \pm 1. \end{aligned}$$

Покажем теперь, что для произвольных $x, y \in Pin_{p,q}$ имеет место равенство $N(xy) = N(x)N(y)$:

$$\begin{aligned} N(xy) &= xy\alpha((xy)^T) = xy\alpha(y^T x^T) = xy\alpha(y^T)\alpha(x^T) = \\ &= xN(y)\alpha(x^T) \overset{(*)}{=} x\alpha(y^T)N(y) = N(x)N(y). \end{aligned}$$

Здесь равенство, отмеченное знаком $(*)$, выполняется в силу того, что $N(y)$ — число. □

spinor-kernel

Предложение 1.8. *Пусть $x \in \ker A$, где $A : Pin_{p,q} \to O_{p,q}$. Тогда $x = \pm 1$.*

Доказательство. Если $x \in \ker A$, то для любого $v \in V$ выполняется равенство $\alpha(x) v x^{-1} = v$, или, что то же самое, $\alpha(x) v = vx$. Представим x в виде суммы $x = x^0 + x^1$ четного x^0 и нечетного x^1 элементов, т. е. $x^i \in Cl^i_{p,q}$. В силу однозначности разложения элемента алгебры Клиффорда в сумму четного и нечетного элементов, имеем, что для всех $v \in V$ должно выполняться соотношение

$$(x^0 - x^1)v = v(x^0 + x^1).$$

Разделив четную и нечетную компоненты, получаем систему их двух равенств, которая должна выполняться для любого $v \in V$:

$$\begin{cases} x^0 v &= v x^0 \\ -x^1 v &= v x^1 \end{cases}$$

Предположим, что элемент $x^0 \in Cl^0_{p,q}$ представляется в виде $y^0 + e_1 y^1$, где $y^i \in Cl^i_{p,q}$, причем в записях элеменов y^i вектор e_1 не встречается. Тогда из первого уравнения нашей системы при $v = e_1$ получаем соотношение

$$e_1(y^0 + e_1 y^1) = (y_0 + e_1 y^1)e_1,$$

откуда
$$e_1y^0 + e_1^2y^1 = e_1y^0 - e_1^2y^1.$$
Следовательно, $y^1 = 0$. Таким образом, запись x, т. е. разложение x по базису алгебры Клиффорда, не может содержать e_1. Таким же образом показывается, что в записи x не может встречаться ни один из векторов e_j, где $j = 2, \ldots, n$. Тем самым, $x^0 = a \cdot 1$, где $a \in \mathbb{R}$.

Аналогичным образом рассмотрим теперь элемент x^1. Предположим, что $x^1 = y^1 + e_1y^0$, где $y^i \in Cl^i_{p,q}$, причем e_1 в записях элементов y^i не встречается. Тогда второе уравнение нашей системы при $v = e_1$ принимает вид
$$-(y^1 + e_1y^0)e_1 = e_1(y^1 + e_1y^0),$$
следовательно,
$$-y^1e_1 - e_1^2y^0 = -y^1e_1 + e_1^2y_0,$$
откуда получаем, что $y_0 = 0$. Таким образом, в записи элемента x^1 нет может присутствовать вектор e_1. Аналогичным образом, это верно для любого вектора e_j, где $j = 2, \ldots, n$. Тем самым, $x^1 = 0$.

Итак, мы показали, что $x = x^0 + x^1 = a \cdot 1$, где $a \in \mathbb{R}$. Теперь воспользуемся гомоморфизмом N:
$$a^2 \cdot 1 = x^2 = N(x) = \pm 1.$$
Следовательно, $a^2 = \pm 1$, и поэтому $a = \pm 1$. $\square$

XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX

Итак, мы построили эпиморфизмы
$$A : Pin_{p,q} \to O_{p,q},$$
$$A : Spin_{p,q} \to SO_{p,q},$$
ядра которых одинаковы и состоят из элементов ± 1.

1.4. Спинорное представление группы $Spin_{1,3}$.

Пример. Построенный выше гомоморфизм $A : Pin_{p,q} \to O_{p,q}$ задает представление группы $Pin_{p,q}$ (а следовательно и $Spin_{p,q}$) в пространстве V.

Пример. Рассмотрим $Cl_{p,q}$ как линейное пространство над $\mathbb{R}$. Представление R группы $Pin_{p,q}$ в этом пространстве определим как $x \mapsto R_x$, где оператор $R_x : Cl_{p,q} \to Cl_{p,q}$ действует по формуле $R_x(y) = x \cdot y$.

Нас особо интересует случай $p = 1, q = 3$. Для него мы разложим представление из последнего примера в сумму четырех эквивалентных неприводимых представлений. Соответствующее неприводимое представление группы $Pin_{1,3}$ в четырехмерном пространстве называется *спинорным*; с его помощью строится так называемое *двузначное спинорное* представление группы Лоренца $L = O(1,3)$.

Перейдем к деталям.

Для того, чтобы согласовать обозначения с принятыми в физике, будем считать, что алгебра Клиффорда $Cl_{1,3}$ порождена элементами e_0, e_1, e_2, e_3, где
$$e_0^2 = -1, e_1^2 = e_2^2 = e_3^2 = 1, e_ie_j = -e_je_i, \text{ при } i \neq j.$$

Рассмотрим в $Cl_{1,3}$ элементы e_3 и e_0e_1. Легко проверить, что их квадраты равны 1, и что они коммутируют:

$$e_3^2 = (e_0e_1)^2 = 1, \qquad e_3(e_0e_1) = (e_0e_1)e_3.$$

Рассмотрим в $Cl_{1,3}$ следующие 4 элемента:

$$\begin{array}{rcl} f_1 & = & \frac{1}{4}(1+e_3)(1+e_0e_1), \\ f_2 & = & \frac{1}{4}(1-e_3)(1+e_0e_1), \\ f_3 & = & \frac{1}{4}(1+e_3)(1-e_0e_1), \\ f_4 & = & \frac{1}{4}(1-e_3)(1-e_0e_1). \end{array}$$

Предложение 1.9. *Имеют место соотношения*

$$f_i^2 = f_i, f_if_j = 0, \text{ \textit{при} } i \neq j, \sum_{i=1}^{4} f_i = 1.$$

Доказательство предоставляется читателю в качестве несложного упражнения. □

Рассмотрим в $Cl_{1,3}$ левые идеалы вида $W_i = Cl_{1,3}f_i$, где $i = 1, 2, 3, 4$.

Теорема 1.10. *Имеет место разложение в прямую сумму векторных пространств*

$$Cl_{1,3} = W_1 \oplus W_2 \oplus W_3 \oplus W_4.$$

Доказательство. Нужно показать, что произвольный элемент $x \in Cl_{1,3}$ единственным образом представляется в виде $x = x_1 + x_2 + x_3 + x_4$, где $x_i \in W_i$.

Для $x \in Cl_{1,3}$ положим $x_i = xf_i$. Тогда $x = \sum_{i=1}^{4} x_i$ в силу соотношения $\sum_{i=1}^{4} f_i = 1$. Кроме того, по определению, $x_i \in W_i$.

Докажем единственность такого разложения. Для этого достаточно показать, что если $0 = x_1 + x_2 + x_3 + x_4$, где $x_i \in W_i$, то $x_i = 0$ для всех i. В самом деле, пусть $0 = x_1 + x_2 + x_3 + x_4$. Тогда $x_i = y_if_i$ для некоторых $y_i \in Cl_{1,3}$. Домножим наше равенство справа на f_j. Получим

$$0 = \sum_{i=1}^{4} x_if_j = \sum_{i=1}^{4} y_if_if_j = y_jf_jf_j = y_jf_j = x_j.$$

Поскольку это равенство верно для всех j, то $x = 0$. □

Поскольку пространства W_i являются левыми идеалами алгебры $Cl_{1,3}$, то они инвариантны относительно любого из операторов вида R_x, где $x \in Pin_{1,3}$.

Таким образом, мы получили представления $Pin_{1,3}$ в четырех пространствах: W_1, W_2, W_3 и W_4.

Нетрудно проверить, что в пространстве W_1 векторы

$$\begin{array}{rcl} E_1 & = & f_1 = \frac{1}{4}(1+e_3)(1+e_0e_1), \\ E_2 & = & e_0E_1, \\ E_3 & = & e_2E_1, \\ E_4 & = & e_0e_2E_1. \end{array}$$

образуют базис.

Упражнение 3. Показать, что в этом базисе матрицы операторов $R_{e_j}, j = 0, \ldots, 3$ имеют вид

$$R_{e_0} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad R_{e_1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$R_{e_2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad R_{e_3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Более того, пусть

$$\begin{aligned} E_{j1} &= f_j, \\ E_{j2} &= e_0 f_j, \\ E_{j3} &= e_2 f_j, \\ E_{j4} &= e_0 e_2 f_j. \end{aligned}$$

Тогда нетрудно проверить, что 4 вектора E_{j1}, E_{j2}, E_{j3} и E_{j4} образуют базис пространства W_j для каждого $j = 1, \ldots, 4$. Следовательно, векторы E_{ij} образуют базис $Cl_{1,3}$ как векторного пространства.

Упорядочим векторы E_{ij} так, чтобы сначала шли векторы, содержащиеся в W_1, потом — в W_2 и т. д. Векторы, относящиеся к одному пространству упорядочим по возрастанию второго индекса. Тогда в этом базисе операторы представления R_x записываются блочно–диагональными матрицами с блоками 4×4.

Упражнение 4. Показать, что для любого $x \in Pin_{p,q}$ четыре блока, из которых состоит матрица оператора R_x в базисе E_{ij}, совпадают.

Из этого упражнения следует, что представления группы $Pin_{p,q}$ в пространствах W_i эквивалентны.

Упражнение 5. Доказать, что в W_i нет инвариантного подпространства, отличного от нулевого и самого W_i.

Определение 1.3. Представление $Pin_{1,3}$ в пространстве $S = W_1$ будем называть *спинорным.*