Задачи к лекции 8

Задача 1. *Риманова метрика на n-мерном многообразии называется* ***евклидовой****, если в некоторой окрестности каждой точки можно ввести такие локальные координаты x^i, что метрика запишется в виде $\sum_i (dx^i)^2$.* (1) *Докажите, что не существует открытого подмножества плоскости Лобачевского, на котором можно ввести такую систему координат (u, v), в которой метрика Лобачевского запишется в виде du^2+dv^2.* (2) *Постройте вложение тора T^2 в стандартную сферу $S^3 \subset \mathbb{R}^4$ так, чтобы индуцированная на T^2 метрика была евклидовой.*

Задача 2. (1) *Вычислите кривизну*: (1) *окружности $\gamma(t) = (R\cos t,\, R\sin t)$;* (2) *цепной линии $y = a\,\mathrm{ch}(x/a)$, $a > 0$;* (3) *окружности $x^2 + y^2 = R^2$.* (4) *Докажите, что кривизна $k(t)$ произвольно параметризованной плоской кривой $\big(x(t),\, y(t)\big)$ может быть вычислена по формуле*:

$$k = \frac{|\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}|}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}}.$$

(5) *Вычислите кривизну циклоиды $\gamma(t) = \big(a\,(t - \sin t),\, a\,(1 - \cos t)\big)$, $a > 0$* (6) *Опишите все плоские кривые постоянной кривизны.* (7) *Решите натуральное уравнение $k = 1/s$.* (8) ***Овалом*** *называется простая замкнутая гладкая кривая положительной кривизны (овал ограничивает строго выпуклую область).* ***Вершиной овала*** *называется точка, в которой кривизна имеет локальный минимум или максимум. Докажите, что на каждом овале существует по меньшей мере четыре вершины.*

Задача 3. (1) *Найдите векторы репера Френе и вычислите кривизну и кручение* (1a) *винтовой линии $\gamma(t) = (a\,\cos t, a\,\sin t, b\,t)$;* (1b) *кривой $\gamma(t) = (t^2, 1-t, t^3)$.* (2) *Опишите все пространственные бирегулярные кривые* (2a) *с постоянными кривизной и кручением;* (2b) *с постоянной кривизной;* (2c) *с постоянным кручением.* (3) *Верно ли, что если в каждой точке регулярной пространственной кривой γ смешанное произведение $(\dot\gamma, \ddot\gamma, \dddot\gamma)$ равно нулю, то γ — плоская кривая?* (4) *Докажите, что кривизна пространственной бирегулярной кривой γ пропорциональна кручению, если и только если найдется постоянный ненулевой вектор u, такой что $\langle u, v\rangle = \mathrm{const}$, где $v = \dot\gamma/\|\dot\gamma\|$.* (5) *Докажите, что пространственная натурально параметризованная бирегулярная кривая с ненулевым кручением $\varkappa$ лежит на сфере радиуса R тогда и только тогда, когда справедливо соотношение*

$$R^2 = \frac{1}{k^2}\left(1 + \frac{(\dot{k})^2}{(\varkappa k)^2}\right),$$

где k — кривизна кривой.