Часть I

Лекция 1

Рассмотрим гладкую n-мерную поверхность M. Пусть $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ — локальные координаты на ней. В этих локальных координатах некоторая автономная система имеет вид:

$$\left\{ \begin{array}{c} \dot{x}_1 = v_1(x_1, \ldots, x_n) \\ \ldots \\ \dot{x}_n = v_n(x_1, \ldots, x_n) \end{array} \right. ,$$

где v_i, $i = 1, \ldots n$ - гладкие (бесконечно дифференцируемые) по $x_1, \ldots, x_n$ функции. Если $\boldsymbol{x} = \{x_1, \ldots, x_n\}$ - набор локальных координат, а $\boldsymbol{v} = \{v_1(\boldsymbol{x}), \ldots, v_n(\boldsymbol{x})\}$, то система дифференциальных уравнений кратко записывается как:

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}).$$

Здесь $\dot{\boldsymbol{x}}$ - скорость изменения набора координат во времени, $\boldsymbol{x} : \mathbb{R}_t \to M^n$ - гладкое отображение, $\dot{\boldsymbol{x}}$ по определению касательный вектор к многообразию M^n.

На многообразии M имеем набор карт $\{x_1, \ldots, x_n\}, \{y_1, \ldots, y_n\}, \ldots,$ которые переходят одна в другую с помощью замены координат. В этом случае одна система после замены тоже должна переходить в другую.

Пример. Пусть $M^n = \mathbb{T}^n = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\} \mod 2\pi$ — n-мерный тор. Дифференциальные уравнения на поверхности имеют вид:

$$\left\{ \begin{array}{c} \dot{x}_1 = \omega_1 \\ \ldots \\ \dot{x}_n = \omega_n \end{array} \right. , \omega_i = const,\ i = 1 \ldots n.$$

Тогда из системы $x_j = x_{j0} + \omega_j t$, $j = 1, \ldots, n$. Это так называемое условно-периодическое движение на торе.

(Обдумать почему в случае $n = 2, \omega_1 = 1, \omega_2 = \sqrt{2}$ движение не периодическое.)

1 Фазовый поток системы дифференциальных уравнений

Пусть M — фазовое пространство. Так как фазовый поток системы дифференциальных уравнений обладает свойствами

$$\boldsymbol{g}^0 \equiv id,$$

$$\boldsymbol{g}^{-t} = (\boldsymbol{g})^{-1}$$

в том смысле, что

$$(\boldsymbol{g}^{-t})\boldsymbol{g}^{t} = \boldsymbol{g}^{-t}(\boldsymbol{g}^{t})$$

$$\boldsymbol{g}^{t_1}(\boldsymbol{g}^{t_2}) = \boldsymbol{g}^{t_1+t_2},$$

то мы имеем однопараметрическую группу преобразований:

$$\boldsymbol{g_v}^{t} \text{ или } \boldsymbol{g}^{t}$$

— группа сдвигов по траекториям системы вдоль скорости. Дискретной подгруппой группы $\boldsymbol{g}^t$ является группа $\boldsymbol{g}^{n\tau}$, $\tau > 0$, $n \in \mathbb{Z}$.

2 Инвариантная мера

Нашей целью является введение на фазовом пространстве M меры, инвариантной относительно фазового потока нашей системы. С этой целью рассмотрим всевозможные карты на нашем многообразии. Пусть $\rho(x_1, \ldots, x_n)$ - гладкая (в некоторых случаях просто непрерывная) функция на M, положительная на M или в D, где $D \subset M$. Тогда определим меру области D таким образом:

$$\operatorname{mes} D = \int_D \rho(x_1, \ldots, x_n) dx_1 \ldots dx_n =$$

$$= \int_D \rho(\boldsymbol{x}) d^n x = \int_D d\mu.$$

Здесь μ — мера на M, определяемая так: $d\mu = \rho(\boldsymbol{x}) d^n x$. Функция ρ называется плотностью меры.

Введённая таким образом мера обладает следующим свойством: если D — невырожденная область, то $\operatorname{mes} D > 0$.

Конечно, введённые обозначения оставляют некоторую неудовлетворённость: поскольку координаты на многообразии определены неоднозначно, сможем ли мы указать закон преобразования функции $\rho(x)$ при заменах координат, при котором её сущность как плотности меры сохранится? С целью исследования этого вопроса рассмотрим замену координат $\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{y}$. Тогда

$$d\mu = \rho(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{y})) \left(\frac{\partial x}{\partial y} \right) d^n y,$$

откуда видно, что при переходе от одной координатной карты к другой плотность умножается на якобиан, т.е., строго говоря, необходимо рассматривать не функцию ρ как таковую, а дифференциальную форму объёма $\rho(x)dx_1 \wedge dx_2 \wedge \dots \wedge dx_n$. Однако впредь мы будем позволять себе некоторую вольность, говоря о ρ как о плотности вероятностной меры (подразумевая при этом рассмотрение в какой-то одной системе координат).

Определение 1. Мера μ называется инвариантной относительно фазового потока $\boldsymbol{g}^t$ если

$$\operatorname{mes} \boldsymbol{g}^t(D) = \operatorname{mes} D$$

для любой измеримой области D и для всех t.

2.1 Критерий инвариантности меры

Утверждение 1.

$$\operatorname{mes} D = \int_D \rho(x) d^n x.$$

Мера инвариантна относительно фазового потока $\boldsymbol{g_v}^t$ *тогда и только тогда, когда*

$$\forall x \in M \quad \operatorname{div}(\rho v) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho v_j) = 0.$$

Это равенство принято называть уравнением Лиувилля.

Пример.

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \omega_1 \\ \quad \dots \\ \dot{x}_n = \omega_n \end{cases}, \omega_i = \text{const},\ i = 1, \dots, n.$$

При $\rho = 1$ область D смещается как твердое тело относительно направлений вектора скорости $\boldsymbol{v}$. Поэтому на торе любая область не деформируется и ее объем не меняется.

Доказательство. □
Пусть $x(t, x_0)$ — решение системы дифференциальных уравнений

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{v}(x),\ x|_{t=0} = x_0,\ x(t, x_0) = \boldsymbol{g}^t(x_0).$$

Делаем замену $x \to x_0$.

$$\int_{\boldsymbol{g}^t(D)} \rho(\boldsymbol{x}) d^n x = \int_D \rho(x(t, x_0)) \left(\frac{\partial x}{\partial x_0} \right) d^n x_0 = \int_D (\cdot) d^n x_0.$$

Условие инвариантности:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_D (\cdot) d^n x_0 = 0$$

Нам нужно, чтобы оно выполнялось $\forall t$, $\forall D$. Следовательно, так как D может быть сколь угодно малой областью, то $\forall t$, $\forall D$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\cdot) = 0.$$

Для простоты записи возьмем $t = 0$, кроме того при $t = 0\, x = x_0$.
Тогда

$$\frac{\partial}{\partial t}|_{t=0}(\cdot) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \rho}{\partial x_j}\frac{\partial x_j}{\partial t}\bigg|_{t=0} \left|\frac{\partial x}{\partial x_0}\right|_{t=0} + \rho(x)\frac{\partial}{\partial t}\left|\frac{\partial x}{\partial x_0}\right| = (\text{так как } \frac{\partial x}{\partial x_0} = E) =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \rho}{\partial x_j} v_j(x) + \sum_{j=1}^{n} \rho(x)\frac{\partial v_j}{\partial x_{0j}} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho v)|_{t=0} = 0.$$

Запишем решение

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(t, \boldsymbol{x}_0) = \boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}_0)t + o(t),$$

тогда

$$x_j = x_j(t, \boldsymbol{x}_0) = x_{0j} + v_j(x_0)t + o(t),$$

и, следовательно,

$$\left|\frac{\partial x_j}{\partial x_0}\right| = \begin{pmatrix} 1 + \frac{\partial v_1}{\partial x_{01}}t + o(t) & \dots & \frac{\partial v_1}{\partial x_{01}}t + o(t) \\ \frac{v_2}{\partial x_{01}}t + o(t) & \dots & \frac{\partial v_2}{\partial x_{0n}}t + o(t) \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{\partial v_n}{\partial x_{0}1}t + o(t) & \dots & 1 + \frac{\partial v_n}{\partial x_{0n}}t + o(t) \end{pmatrix}.$$

Якобиан в нашем случае равен:

$$\left|\frac{\partial x_j}{\partial x_0}\right| = 1 + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial v_j}{\partial x_{0j}}t + o(t) \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t}\left|\frac{\partial x_j}{\partial x_0}\right|_{t=0} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial v_j}{\partial x_{0j}}.$$

$\square$

Пример. Рассмотрим гамильтонову систему дифференциальных уравнений на многообразии $M^{(n=2k)}$.

$$x = (\underbrace{p_1, \ldots, p_n,}_{\text{обобщ. импульсы}} \overbrace{q_1, \ldots, q_n}^{\text{обобщ. координаты}})$$

Система гамильтонова, если существует функция $H(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q})$, называемая гамильтонианом, для которой выполняются равенства

$$\begin{cases} \dot{p}_j = -\dfrac{\partial H}{\partial q_j} \\ \dot{q}_j = \dfrac{\partial H}{\partial p_j} \end{cases} \qquad j = 1, \ldots, n.$$

Часто за гамильтониан принимают полную энергию системы (в случаях, когда она сохраняется):

$$H = T + V, \text{ где } T = \sum a_{ij}(\boldsymbol{q}) p_i p_j,\ V = V(\boldsymbol{q}),$$

матрица $\|a_{ij}\|$ положительно определена.

Упражнение 1. Проверить, что $H(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q})$ — первый интеграл системы, то есть

$$\frac{dH}{dt} = 0,$$

где производная берется в силу системы.

В этом случае инвариантная мера

$$\operatorname{mes} D = \int_D d^n p\, d^n q,$$

то есть $\rho \equiv 1$.

2.2 Теорема Лиувилля

Теорема 1. *Фазовый поток гамильтоновой системы сохраняет фазовый объём.*

Доказательство. Проверим выполнение условия Лиувилля.

$$\sum_{j=1}^{n} \left[\frac{\partial}{\partial p_j} \left(-\rho \frac{\partial H}{\partial q_j} \right) + \frac{\partial}{\partial q_j} \left(\rho \frac{\partial H}{\partial p_j} \right) \right] = 0$$

При $\rho \equiv 1$ соотношение удовлетворяется. $\square$

Упражнение 2. Дана система

$$\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x}, \quad A = \mathrm{const}, \quad A \in M^{n\times n}, \quad \det A \neq 0.$$

Система имеет невырожденный квадратичный интеграл

$$F = \frac{1}{2}\left(B\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}\right),$$

причем $\operatorname{rank} B = n,$ то есть $\det B \neq 0.$
Доказать, что система $\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x}$ является гамильтоновой.

Часть II

Лекция 2

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x} \in M^n$$

Пусть $\boldsymbol{g}^t = \boldsymbol{g}^t_{\boldsymbol{v}}$ — фазовый поток системы, $\rho \in C^\infty_D$ — плотность инвариантной меры μ, и

$$\forall D,\, \forall t \quad \int_{\boldsymbol{g}^t_D} \rho(x) d^n x = \int_{\boldsymbol{g}^t_D} d\mu = \mathrm{const}\,.$$

3 Теорема Лиувилля

Теорема 2.

$$\operatorname{div}(\rho, v) = 0 = \sum_{i=1}^n \rho \frac{\partial v}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial \rho}{\partial x_i} v_i$$

Пусть $f(x):\, M^n \to \mathbb{R}$ и $f(x)$ — первый интеграл. Тогда

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} v_i = 0$$

Если есть инвариантная мера и первый интеграл, то мера с плотностью $\rho_1 = f\rho$ также инвариантна.

Проверим выполнение условия Лиувилля.

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\rho_1 v_i\right) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \rho_1}{\partial x_i} v_i + \sum_{i=1}^n \rho \frac{\partial v_i}{\partial x_i} =$$

$$= f\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\rho}{\partial x_i}v_i + \sum_{i=1}^{n}\rho\frac{\partial f}{\partial x_i} + f\sum_{i=1}^{n}\rho\frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0.$$

Слагаемые

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\rho}{\partial x_i}v_i + \sum_{i=1}^{n}\rho\frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0,$$

так как ρ — плотность инвариантной меры. Среднее слагаемое равно нулю из-за того, что $f(x)$ — первый интеграл.

Функция $f(x)$ должна быть знакопостоянной, иначе ρ_1 не является плотностью меры.

Для гамильтоновой системы $\rho \equiv 1$, тогда $H\rho$ — тоже плотность инвариантной меры.

4 Замена времени

Сделаем замену времени $t \to \tau\, :\, d\tau = \frac{1}{\rho(x)}dt$. Тогда

$$\frac{dx}{d\tau} = \frac{dx}{dt}\frac{dt}{d\tau} = v(x)\rho(x) = v_1(x).$$

Условие Лиувилля выполняется $\operatorname{div} v_1 = \operatorname{div}(\rho v) = 0$, так как мера инвариантна.

Теорема 3 (aaa). *rrrr*

5 Теорема Мозера

Теорема 4. *Пусть*

$$d\mu_1 = \rho_1\, d^n x,$$
$$d\mu_2 = \rho_2\, d^n x,$$

где ρ_1, $\rho_2 \in C^\infty(M)$. *Если верно равенство*

$$\int_M d\mu_1 = \int_M d\mu_2,$$

то существует диффеоморфизм $M \to M$, *который переводит* $\mu_1 \to \mu_2$.

Пример. Пусть $M = [0,1]$, $\quad x, y$ — координаты $0 \le x,\ y \le 1$.

$$d\mu_1 = \rho(x)dx$$

$$d\mu_2 = dy$$

Условие Мозера записывается так:

$$\int\limits_0^1 \rho(x)dx = \int\limits_0^1 dy = 1.$$

Укажем диффеоморфизм.

$$d\mu_2 = dy = \frac{dy}{dx}dx = \rho(x)dx = d\mu_1, \Rightarrow$$

$$\Rightarrow, \frac{dy}{dx} = \rho(x) > 0, \Rightarrow$$

$$\Rightarrow, y(x): \quad y = \int\limits_0^1 \rho(x)dx.$$

Таким образом, любую меру можно привести к жордановой, а затем к любой другой.

Упражнение 3. Установить, эквивалентны ли следующие "распределения" вероятностей:
1) $d\mu_1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx$ и $d\mu_2 = \frac{dx}{2\pi(1+x^2)}$;
2) $d\mu_1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx$ и $d\mu_2 = \rho(x)dx$, где $\rho(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1, & 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ 0, & x > 1. \end{cases}$

5.1 Доказательство теоремы Мозера (наметки)

□
Рассмотрим случай, когда $M = \mathbb{T}^n = \{x_1, \dots, x_n \bmod 2\pi\}$.
Пусть меры μ_1 и μ_2 такие, что
$d\mu_1 = dy_1 \dots dy_n$ — стандартная мера (так как $\int_{\mathbb{T}^n} d\mu_1 = (2\pi)^n$).
$d\mu_2 = \rho(x_1, \dots, x_n)\, dx_1 \dots dx_n$ и $\int_{\mathbb{T}^n} d\mu_2 = (2\pi)^n$ (условие Мозера).
Ищем замену переменных $\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{y}$. Рассмотрим следующую замену переменных:

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + \omega_1 R(x_1, \dots, x_n) \\ \dots \\ y_n = x_n + \omega_n R(x_1, \dots, x_n) \end{cases}$$

$\omega_1, \dots, \omega_n$ — константы, которые мы узнаем в процессе доказательства, $R(x_1, \dots, x_n)$ — 2π-периодическая функция от $x_1, \dots, x_n$, которую мы также должны найти в процессе доказательства теоремы.

Если $\{x_i\}$ — угловые переменные, то $\{y_i\}$ — также угловые переменные, так что наша замена переменных действительно отображает $\mathbb{T}^n \to \mathbb{T}^n$.

Рассмотрим якобиан

$$\left\|\frac{\partial \boldsymbol{y}}{\partial \boldsymbol{x}}\right\| = \left\|\begin{array}{cccc} 1+\omega_1\frac{\partial R}{\partial x_1} & \omega_1\frac{\partial R}{\partial x_2} & \dots & \omega_1\frac{\partial R}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \omega_n\frac{\partial R}{\partial x_1} & \omega_n\frac{\partial R}{\partial x_2} & \dots & 1+\omega_n\frac{\partial R}{\partial x_n} \end{array}\right\|$$

Упражнение 4. Проверить, что

$$\det\left\|\frac{\partial \boldsymbol{y}}{\partial \boldsymbol{x}}\right\| = 1+\omega_1\frac{\partial R}{\partial x_1}+\ldots+\omega_n\frac{\partial R}{\partial x_n} = \rho.$$

Положим $\det\left\|\frac{\partial \boldsymbol{y}}{\partial \boldsymbol{x}}\right\| = \rho$.

В равенстве

$$\int_{T^n}\rho(\boldsymbol{x})d^n x = (2\pi)^n$$

разложим $\rho(\boldsymbol{x})$ в сходящийся ряд Фурье:

$$\rho(\boldsymbol{x}) = \sum_{-\infty}^{+\infty}\rho_m e^{i\boldsymbol{m}\boldsymbol{x}},$$

ρ_m — коэффициенты разложения, $\boldsymbol{m} = (m_1,\ldots,m_n)$ и $\boldsymbol{m}\boldsymbol{x} = m_1x_1 + m_2x_2+\ldots+m_nx_n = \sum\limits_{i=1}^{n} m_ix_i$.

Перепишем выражение для плотности в виде:

$$\rho(x) = \rho_0 + \sum_{-\infty,\, m\neq 0}^{+\infty}\rho_m e^{i\boldsymbol{m}\boldsymbol{x}}.$$

Упражнение 5. Доказать, что если

$$\det\left\|\frac{\partial \boldsymbol{y}}{\partial \boldsymbol{x}}\right\| > 0,$$

то отображение $\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{y}$, задаваемое формулами

$$y_i = x_i + \omega_i R(x_1,\ldots,x_n),$$

обратимо в целом.

Пусть $\rho_1 = \rho - 1$. Воспользуемся методом Фурье:

$$\rho_1 = \sum_{-\infty,\, m\neq 0}^{+\infty} \rho_m e^{i\boldsymbol{m}\boldsymbol{x}}$$

$$R = \sum_{-\infty,\, m\neq 0}^{+\infty} R_m e^{i\boldsymbol{m}\boldsymbol{x}}$$

$$\sum_{-\infty,\, m\neq 0}^{+\infty} i\omega_i m_i R_m e^{i\boldsymbol{m}\boldsymbol{x}} = \sum_{-\infty,\, m\neq 0}^{+\infty} \rho_m e^{i\boldsymbol{m}\boldsymbol{x}}.$$

Из этих равенств следует, что

$$\rho_m = i(\boldsymbol{m}, \boldsymbol{\omega}) R_m,$$

то есть $R_m = \frac{\rho_m}{i(\boldsymbol{m},\boldsymbol{\omega})}$. В случае, когда $(\boldsymbol{m}, \boldsymbol{\omega})$ малы, возможна “проблема малых знаменателей”.

Часть III

Лекция от 10.10.2005

Лемма 1 (Римана-Лебега, Римана-Кантора). *Если функция $f(x) \in C[0, 2\pi]$, тогда коэффициенты ее разложения в ряд Фурье $f_n \to 0$ при $n \to \infty$.*

Упражнение 6. Доказать лемму.

Докажем лемму в предположении, что $f(x) \in C^1[0, 2\pi]$. Тогда, интегрируя по частям, получим:

$$f_n = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(x)e^{-inx}\,dx = Cf(x)e^{-inx}\Big|_0^{2\pi} + \frac{1}{2\pi i n}\int\limits_0^{2\pi} f'(x)e^{-inx}\,dx = \frac{1}{2\pi i n}\int\limits_0^{2\pi} f'(x)e^{-inx}\,dx,$$

так как первое слагаемое обращается в нуль.
По нашему предположению $f'(x) \in C[0, 2\pi]$, поэтому $|f'(x)| < a = \text{const}$, отсюда получаем оценку для коэффициентов f_n:

$$|f_n| < \frac{1}{2\pi|n|}\int\limits_0^{2\pi} a|e^{-inx}|\,dx = \frac{a}{|n|}$$

Последовательность
$$\frac{a}{|n|} \to \text{ при } n \to \infty,$$
что и доказывает лемму.

6 Теоремы Пуанкаре о возвращении

Пусть M — пространство с мерой μ:
$$0 < \mu(M) < \infty,$$
отображение $T : M \to M$ сохраняет эту меру, то есть
$$\mu(N) = \mu(T(N)), \forall N \subset M,$$
где N — измеримая область. Тогда, очевидно, отображения $T^2 = T(T), \ldots, T^n$ также сохраняют меру μ.

Введем координаты в пространстве M и рассмотрим систему дифференциальных уравнений
$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{x} \in M. \tag{1}$$
Пусть дифференциал меры в координатах имеет вид
$$d\mu = \rho(\boldsymbol{x})\, d^n x, \rho \in C^\infty_M.$$
Пусть $\{g^t\}$ " — фазовый поток, соответствующий системе (1). Рассмотрим $\{g^{n\tau}\}$, где $n \in \mathbb{Z}$, $\tau = \mathrm{const} > 0$. В дальнейшем будем считать, что $T = g^\tau$.

Теорема 5 (О возвращении областей). *Пусть A — измеримое подмножество M, $\mu(A) > 0$. Тогда существует бесконечно много $n \in \mathbb{Z}$ таких, что*
$$\mu(T^n A \cap A) > 0$$

Доказательство. Докажем, что существует такое N, что
$$T^N(A) \cap A \neq \varnothing$$
Предположим, что
$$\mu\left(T^{n_i}(A) \cap T^{n_j}(A)\right) = 0$$
для любых $n_i \neq n_j$. Тогда
$$A \cup TA \cup T^2 A \ldots \subset M.$$

Отсюда следует, что

$$\mu(A \cup \ldots \cup T^n A) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu(T^n A) \leq \mu(M) < \infty$$

Следовательно, $n\mu(A) < \infty$, $\forall n$. Устремляя n к бесконечности, получаем противоречие, а значит

$$\mu\left(T^{n_i}(A) \cap T^{n_j}(A)\right) > 0$$

для некоторых $n_i < n_j$. Отсюда получаем, что

$$\mu\left(T^{n_i}(A \cap T^{n_j - n_i} A)\right) > 0.$$

Обозначим через $n = n_j - n_i$, тогда, очевидно,

$$\mu(A \cap T^n A) > 0$$

Таким образом, данное n — искомое.

Далее, предположим, что

$$\mu(A \cap T^m A) = 0, \ \forall m \geq p.$$

Так как T сохраняет меру, то по предыдущему мы знаем, что $A \cap T^{kp} A = \varnothing$, откуда имеем противоречие. Таким образом, теорема доказана. $\square$

Теорема 6 (Хинчин). *Пусть $\mu(A) > 0$, тогда $\mu(A \cap g^t(A)) \geq \lambda(\mu A)^2$ $\forall \lambda : 0 < \lambda < 1$ и <u>относительно плотного множества</u> значений t (то есть, в каждом интервале имеем по крайней мере один момент времени, в который неравенство выполняется).*

Доказательство можно прочесть в книге Немыцкого, Стапанова “Качественная теория дифференциальных уравнений”.

Теорема 7 (О возвращении точек). *Если $0 < \mu(A) < \infty$, тогда для почти всех точек $x \in A$ имеем:*

$$T^n x \in A$$

при бесконечном числе различных $n \in \mathbb{Z}$.

Доказательство. Пусть $N \subset A$ — множество «невозвращающихся» точек. Докажем, что $\mu(N) = 0$.

Упражнение 7. Привести пример неинтегрируемой по Риману функции. Привести пример неинтегрируемой по Лебегу функции.

Покажем, что N измеримо:

$$N = A \cap \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} T^{-n}(M \setminus A) \right),$$

поэтому N измеримо.

Пусть $x \in N$, тогда $T^k(x) \notin A$, $\forall k = 1, 2, \ldots$, следовательно $T^k(x) \notin N$ тогда и только тогда, когда $x \notin T^{-k}(N)$, $k = 1, 2, \ldots$. Рассмотрим попарно не пересекающиеся множества $N, T^{-1}N, T^{-2}N, \ldots$ (если предположить обратное: $T^{-n_i}N \cap T^{-n_j}N \neq \varnothing$ для некоторых $n_i < n_j$, — тогда получим, что $T^{-n_i}(N \cap T^{-n_j+n_i}N) \neq \varnothing$, откуда следует $N \cap T^n N \neq \varnothing$ при $n = -n_j + n_i$, что невозможно). Объединение этих множеств

$$N \cup T^{-1}N \cup T^{-2}N \cdots \subset M$$

Тогда мера объединения n таких множеств, вследствие инвариантности меры,

$$\mu(N) + \mu(T^{-1}N) + \ldots \mu(T^{-n+1}N) = n\mu(N) < \infty$$

При $n \to \infty$ $n\mu(N) \to C < \infty$, следовательно, $\mu(N) = 0$. □

Теорема 8 (Об устойчивости по Пуассону). *Пусть M — метрическое пространство, $\mu(M) < \infty$ — борелевская мера. Если существует счетная система окрестностей, покрывающая M, которая в пределе совпадает с точкой, тогда почти все точки устойчивы по Пуассону, то есть $\exists n_1 < n_2 < \ldots$ такие, что*

$$\rho(x, T^{n_K}(x)) \to 0$$

при $K \to \infty$.

Доказательство. Имеем счетную систему окрестностей. Почти все точки из A бесконечно много раз возвращаются в A. Берем окрестность, применяем предыдущую теорму, отбрасываем множество нулевой меры и так далее для каждой окрестности. Всего выбросим множество меры нуль. Остались, таким образом, все «возвращающиеся» точки в окрестности. Берем окрестность, содержащуюся в первоначальной области, она вернется в меньшую область, продолжаю этот процесс, получим, что для каждой окрестности мы в нее попадем. □

Пример. Рассмотрим гамильтонову систему:

$$\begin{matrix} \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \\ \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \end{matrix}, \quad i = 1, \ldots, n$$

Функция Гамильтона $H(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q})$ является первым интегралом. Зададим множество M:

$$M = \{\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q} : C_1 \leq H(p, q) \leq C_2\}$$

По теореме Пуанкаре о возвращении траектория будет проходить как угодно близко от своего начального положения. Когда $C_1 = C_2$, движение будет происходить по некоторой поверхности. Если поверхность $H(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}) = \mathrm{const}$ регулярная, то точка будет возвращаться. При этом положениям равновесия системы отвечают критические точки гамильтониана.

6.1 Парадокс Цермело

Рассмотрим газ Больцмана-Гиббса в сосуде, разделенном перегородкой. Газ находится только в одной половине. Откроем перегородку и газ распределитс по всему сосуду. По теорме о возвращении, он должен весь собраться какой-то момент снова в одной половине сосуда.

Пример (Биллиард Бирхгофа). Рассмотрим ограниченную регулярной кривой область, заполненную идеальным газом. Молекулы газа ударяются о стенки, причем при ударе угол отражения равен углу падения. Положение любой молекулы в любой момент времени мы сможем вычислить зная ее положение в момент удара и направление скорости. Пусть длина границы области равна l, Угол падения (равный углу отражения) обозначим θ, $\theta \in [0, \pi]$.

Рассмотрим множество $K = \{s, \theta\}$, $s \pmod l$, $\theta \in [0, \pi]$. Отождествим точки $s = 0$ и $s = l$. Таким образом мы задали отображение T и наша область преобразовалась в цилиндр.

Пара $(s, \theta) \longmapsto (s_1, \theta_1)$. При отображении T

$$\iint\limits_D \sin\theta \, d\theta ds = \mathrm{const}$$

и

$$\iint\limits_D \sin\theta \, d\theta ds = \iint\limits_{T(D)} \sin\theta \, d\theta ds.$$

Мерой области D назовем интеграл

$$\iint\limits_D \sin\theta \, d\theta ds.$$

Пример. Рассмотрим гамильтонову систему ($n = 1$).

$$H = \frac{p^2}{2} + V(q) = h = \text{const}\,.$$

Нарисуем кривые $H = \text{const}$ при разных h. Расставим на кривых стрелки, исходя из того, что

$$p = \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}.$$

На полученном фазовом портрете можно выделить положения равновесия системы (в них $\frac{\partial V(q)}{\partial q} = 0$) и сепаратрисы, находясь на которых, мы будем бесконечно долго двигаться к положению равновесия и никогда не попадём в него. Если же мы не на сепаратрисе, то мы будем возвращаться в одно и то же состояние за одинаковые промежутки времени.

Теорема 9 (Мощевитин). *Пусть M — компактное фазовое пространство $\dim M = n$. Пусть $\rho(x, y)$ — расстояние в фазовом пространстве между точками x и y. Рассмотрим $\psi(t)$ — возрастающую к $+\infty$ при $t \to +\infty$ функцию, для которой выполнено, что*

$$\frac{\psi(t)}{\sqrt[n]{t}} \searrow 0, \quad t \to +\infty.$$

Тогда для почти всех x $\quad \exists \{t_n(x)\} \to \infty$ такая, что $\rho(x, g^{t_n} x) < \frac{\psi(t_n)}{\sqrt[n]{t_n}}$.

7 Условие существования интегральных инвариантов

Пусть точка $\boldsymbol{x} \in M^n$, имеем плотность $\rho > 0, \quad \rho \in C^\infty$ и меру $d\mu = \rho(\boldsymbol{x}) d^n x$. Задана система

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{v}\boldsymbol{x}.$$

Условие Лиувилля:

$$\operatorname{div}(\rho, \boldsymbol{v}) = \sum_{j=0}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho v_j) = 0.$$

Рассмотрим эту систему локально в точке x_0 такой, что $\boldsymbol{v}\boldsymbol{x_0} \neq 0$. Мы можем выбрать координаты так, что

$$\dot{x}_1 = \dot{x}_2 = \ldots = \dot{x}_{n-1} = 0, \quad \dot{x}_n = 1.$$

7.1 Теорема о выпрямлении траекторий

Если x_0 — неособая точка, $x_0 \in M, \quad \dim M = n$, то локально в окрестности неособой точки система имеет $n-1$ первый интеграл.
Пусть $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_{n-1}(x)$ — функционально независимые в точке x_0 первые интегралы.

$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial f_{n-1}}{\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial f_{n-1}}{\partial x_n} \end{pmatrix} = n-1.$$

1^0. Добавим $f_n(x)$ (не являющуюся первым интегралом). Получим

$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix} = n.$$

2^0. От $x_1, \ldots, x_n$ перейдём к $y_1, \ldots, y_n$ по формулам

$$\begin{cases} y_1 = f_1(x) \\ \qquad\quad \ldots \\ y_n = f_n(x) \end{cases}, \qquad x = \{x_1, \ldots, x_n\}$$

Тогда

$$\dot{y_1} = \ldots = \dot{y}_{n-1} = 0, \qquad \dot{y}_n = g(y_1, \ldots, y_n) \neq 0.$$

3^0. От $\boldsymbol{y}$ перейдем к $\boldsymbol{z}$ таким образом:

$$z_j = y_j, \quad j = 1, \ldots, n-1,$$

$$z_n = \int \frac{dy_n}{g(y_1, \ldots, y_n)}$$

$$\dot{z}_n = \frac{\dot{y}_n}{g(y_1, \ldots, y_n)} = 1.$$

Рассмотрим снова

$$\dot{x}_1 = \ldots = \dot{x}_n = 0, \quad \dot{x}_n = 1, \quad \operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0.$$

Пусть известно, что $\operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0$. Тогда фазовый поток сохраняет стандартную меру $d\mu = dx_1 dx_2 \ldots dx_n$.

Рассмотрим окрестность особой точки: пусть $\boldsymbol{x} = 0$ — положение равновесия. Тогда $\boldsymbol{v(0)} = \boldsymbol{0}$. Линеаризуем систему в окрестности $\boldsymbol{x} = 0$:

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{x} = A\boldsymbol{x} + \ldots = A\boldsymbol{x} + o(\boldsymbol{x})$$

Теорема 10. *Если система имеет интегральный инвариант с гладкой положительной плотностью, то* $\operatorname{tr} A = 0$.

Упражнение 8 (Пример). Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x}$$

Для нее

$$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$$

$$\operatorname{div} \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}) = \operatorname{tr} A,$$

поэтому линейная система допускает интегральный инвариант с положительной гладкой плотностью тогда и только тогда, когда ее фазовый поток сохраняет стандартную меру.

Теорема 11. *Пусть нам известно решение* $\boldsymbol{x} : \mathbb{R}_t \to M^n$, $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t}) \in M$ *системы*

$$\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x}$$

такое, что замыкание траектории $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t})$ *компактно, и пусть имеется интегральный инвариант.*
Тогда

$$\lim_{s \to 0} \frac{1}{s} \int\limits_0^s \operatorname{div} \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}) \Bigg|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t})} = 0.$$

Теорема 11 следует из теоремы 10.
Рассмотрим $x(t) \equiv 0$. Тогда $\operatorname{div} \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})|_{\boldsymbol{x}=0} = \operatorname{tr} A$.
$\operatorname{tr} A = 0$, так как $\operatorname{div} \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}) = \mathrm{const}$ и ее усреднение даст 0.

$$\operatorname{div}(\rho \boldsymbol{v}) = \sum_1^n \rho \frac{\partial v_j}{\partial x_j} + \sum_1^n \frac{\partial \rho}{\partial x_j} v_j = 0.$$

Поделив на ρ, получим

$$\sum_1^n \frac{\partial v_j}{\partial x_j} + \sum_1^n \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x_j} v_j =$$

$$= \operatorname{div} \boldsymbol{v} + \sum_1^n \frac{\partial}{\partial x_j} (\ln \rho) v_j = 0.$$

Тем самым

$$\operatorname{div} \boldsymbol{v} = -\sum_1^n \frac{\partial w}{\partial x_j} v_j = -\dot{w}.$$

$$\int_0^s \operatorname{div} \boldsymbol{v}\Big|_{\boldsymbol{x(t)}} dt = -\int_0^s \dot{w}\Big|_{\boldsymbol{x(t)}} =$$
$$= w_0(\boldsymbol{x(0)}) - w(\boldsymbol{x(s)}).$$

Формулу Ньютона-Лейбница можно применить благодаря гладкости. Так как w ограничена, то при делении на s получим в пределе при $s \to \infty$ нуль.

Часть IV

Лекция 5

Упражнение 9. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{v(x)}.$$

Пусть поле $\boldsymbol{v(x)}$ однородное степени n, то есть $\boldsymbol{v(\lambda x)} = \lambda^n \boldsymbol{v(x)}$. Интегральный инвариант с гладкой положительной плотностью существует тогда и только тогда, когда $\operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0$.

Пример. Что произойдёт в случае, когда мы откажемся от положительности плотности? Пусть $\rho \geq 0$. Рассмотрим систему:

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x \\ \dot{y} = -y \end{cases}$$

Выпишем условие Лиувилля:

$$\operatorname{div}(\rho \boldsymbol{v}) = \sum_{j=1}^{2} \frac{\partial(\rho v_j)}{\partial x_j} = 2\rho - \rho + 2x\frac{\partial \rho}{\partial x} - y\frac{\partial \rho}{\partial y} = 0,$$

$$\rho + 2x\frac{\partial \rho}{\partial x} - y\frac{\partial \rho}{\partial y} = 0.$$

Будем искать $\rho = cx^\alpha y^\beta$, такое чтобы условие Лиувилля выполнилось.

$$x^\alpha y^\beta + 2\alpha x^\alpha y^\beta - \beta x^\alpha y^\beta = 0.$$

Тогда

$$1 + 2\alpha - \beta = 0, \quad \beta = 2\alpha + 1.$$

Рассмотрим различные значения α и β.
1) $\alpha = 1, \beta = 3,\ \rho_1 = cxy^3$.
2) $\alpha = 2, \beta = 5,\ \rho_2 = cx^2y^5$.
...
n) $\alpha = n, \beta = 2n+1,\ \rho_n = cxy^2\rho_{n-1}$.
Функция $f = xy^2$, как несложно проверить, является первым интегралом нашей системы.

Возьмём $\rho = cx^2|y^5|, \quad c > 0$ — эта функция подойдёт в качестве плотности.

$$\rho^* = \begin{cases} cx^2y^5, & y \geqslant 0, \\ -cx^2y^5, & y < 0. \end{cases}$$

Эта функция удовлетворяет уравнению Лиувилля и является хорошей плотностью, так как $\mu\{D : \rho = 0\} = 0$. Гладкость функции мы можем увеличить, увеличивая степень α, $\rho = cx^\alpha y^{2\alpha+1}$.

Существование инвариантных мер у динамических систем общего вида устанавливает

Теорема 12 (Крылова — Боголюбова). *Пусть M^n — компактное многообразие, на котором мы имеем гладкое векторное поле*

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}).$$

В этом случае всегда существует хотя бы одна инвариантная мера.

Доказательство теоремы можно посмотреть в книге Немыцкого, Степанова "Качественная теория дифференциальных уравнений".

Пример. Рассмотрим уравнение $\dot{x} = -x$, $\operatorname{div} x = -1 \neq 0$. Найдём интегральный инвариант. С этой целью рассмотрим $\rho \in C[a, b]$, $\rho \geq 0$. Будем считать, что

$$\int\limits_a^b \rho(x)dx > 0.$$

При $t \to +\infty \quad a \to 0$, $b \to 0$ и

$$\int\limits_{a'}^{b'} \rho(x)dx = \int\limits_a^b \rho(x)dx,$$

то есть $a', b' \to 0$, но

$$\int\limits_{a'}^{b'} \rho(x)dx \neq 0 = \mathrm{const}\,.$$

Такая ситуация невозможна при ρ интегрируемой даже по Лебегу, так как
$$\int\limits_{a'}^{b'} \rho(x)dx \to 0, \quad (a', b' \to 0) \quad \text{при } \rho(x) \in L_1[a,b].$$
Пусть $A \subset \mathbb{R}$, $\mu(A) = 0$ если $0 \notin A, \mu(A) = 1$ если $0 \in A$ и мера $\mu(A)$ инвариантна. Тогда $\rho_{\mu(A)} = \delta(x)$ — функция Дирака.

8 Неголономные системы

Рассмотрим $q_1, \ldots, q_n$ — обобщенные координаты.
Функция Лагранжа
$$L = T(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) - V(\boldsymbol{q}),$$
где $T(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}})$ — кинетическая энергия, $V(\boldsymbol{q})$ — потенциальная энергия. Уравнения Лагранжа:
$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0,\ j = 1, \ldots, n.$$
Если система неголономная, то
$$\sum_{j=1}^{n} a_j(\boldsymbol{q})\dot{q}_j = 0$$
— неголономные связи.
Тогда уравнения Лагранжа принимают вид:
$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = \lambda a_j \\ \sum\limits_{j=1}^{n} a_j(\boldsymbol{q})\dot{q}_j = 0. \end{cases}$$
Гамильтониан $H = T + V$ является первым интегралом системы и в этом случае.

Пример (Задача Суслова). Волчок Эйлера (твердое тело с одной неподвижной точкой, вращающееся по инерции). Пусть ω — угловая скорость, с которой вращается тело.
$$I\dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \times I\boldsymbol{\omega} = 0$$
— уравнение Эйлера. Тут $I = \|I_{ij}\|$ — положительно определённая матрица.

Упражнение 10. Доказать, что фазовый поток уравнения сохраняет стандартную меру $d\omega_1 \dots d\omega_n$, то есть $\rho = 1$.

Пример (Задача Суслова ($\omega_3 = 0$) в интерпретации Вагнера). Тело погрузили в неподвижную сферу. Система может вращаться вокруг оси, но тогда вращая сферу, вращая сферу мы имеем $\omega_2 \neq 0$, а так как $\omega_3 = 0$, то ее нельзя сдвинуть вбок. Связь выглядит как:

$$a_1\omega_1 + a_2\omega_2 + a_3\omega_3 = 0, \quad (a_1,\, a_2,\, a_3) = (0, 0, 1).$$

Тогда уравнения Лагранжа примут вид:

$$\begin{aligned} \tfrac{d}{dt}\tfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} - \tfrac{\partial L}{\partial q_1} &= \lambda a_1 = 0 \\ \tfrac{d}{dt}\tfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} - \tfrac{\partial L}{\partial q_2} &= \lambda a_2 = 0 \\ \tfrac{d}{dt}\tfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_3} - \tfrac{\partial L}{\partial q_3} &= \lambda a_3 = \lambda \end{aligned}$$

Уравнения Эйлера:

$$\begin{aligned} I_{11}\dot{\omega}_1 + I_{12}\dot{\omega}_2 + \omega_2(I_{13}\omega_1 + I_{23}\omega_2) &= 0 \\ I_{12}\dot{\omega}_1 + I_{22}\dot{\omega}_2 - \omega_1(I_{13}\omega_1 + I_{23}\omega_2) &= 0 \\ I_{13}\dot{\omega}_1 + I_{23}\dot{\omega}_2 + I_{13}\omega_1^2 - I_{12}\omega_2^2 + (I_{23} - I_{11})\omega_1\omega_2 &= 0. \end{aligned}$$

Считаем, что $I_{12}^2 + I_{23}^2 \neq 0$. Положения равновесия, которые существуют всегда — это

$$I_{12}\omega_1 + I_{23}\omega_2 = 0.$$

В этой задаче нет непрерывной инвариантной меры, так как точки будут приближаться к прямой $I_{12}\omega_1 + I_{23}\omega_2 = 0$ и в результате перейдут в отрезок на этой прямой. Таким образом мы не можем найти абсолютно непрерывной меры.

Часть V

Лекция 6

9 Последовательности, равномерно распределенные по модулю 1

Рассмотрим отрезок $[a,\, b] \in [0,\, 1]$ и последовательность $\{x_k\}_{k=1}^{\infty} \subset [0, 1]$. Рассмотрим первые n элементов последовательности. Обозначим $\nu(n)$ количество элементов последовательности, по номеру меньших n, лежащих в отрезке $[a, b]$.

Определение 2. Если

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\nu(n)}{n}=b-a=\operatorname{mes} I \quad \text{для любого измеримого } I\in[0,\,1],$$

то последовательность $\{x_k\}$, $k\geq 1$ называется равномерно распределенной в отрезке $[0,1]$. Кратко это записывается как $\{x_k\}$ р.р. $\pmod 1$.

Утверждение 2. *Если* $\{x_n\}$ *р.р.* $\pmod 1$, *то она всюду плотно заполняет* $[0,1]$.

Доказательство. От противного: предположим, что $\exists x_0$ и δx_0 такие, что $\forall k \quad x_k\notin\delta x_0$. Рассмотрим $I\neq 0$, $I\subset x_0$. Тогда $\nu(n)\equiv 0 \quad \forall n$ — имеем противоречие. □

Пример. $x_n=\{\lambda_n\}$, тут фигурные скобки означают дробную часть числа.

Упражнение 11. Если $\alpha\in\mathbb{Q}$, то $x_n=\{\lambda_n\}$ — не равномерно распределена на $[0,1]$.

Теорема 13. *Последовательность* $\{x_n\}$*р.р.* $\pmod 1$, *тогда и только тогда, когда для любой интегрируемой по Риману функции* $f(x)$, $0\leq x\leq 1$ *справедливо следующее свойство:*

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{f(x_1)+\ldots+f(x_n)}{n}=\int\limits_0^1 f(x)dx. \tag{2}$$

Доказательство. Достаточность:

Если $f(x)$ — характеристическая функция, то это определение, f интегрируема по Риману.

Необходимость.

1) Пусть $\{x_n\}$ р.р. $\pmod 1$. Тогда (2) справедливо для характеристической функции отрезка.

2) По линейности (2) справедливо для ступенчатых функций.

3) Пусть f — любые интегрируемые по Риману функции.

Тогда

$$\forall\varepsilon>0 \quad \exists f_1,\,f_2$$

— ступенчатые функции, такие что

$$f_1(x)\leq f(x)\leq f_2(x) \quad \forall x\in[0,1]$$

и

$$\int\limits_0^1 (f_2 - f_1)dx < \varepsilon.$$

□

Упражнение 12. Для 3) доказать, что $\exists N_m(\varepsilon) \,:\, \forall n > N_m$, $(m = 1, 2)$

$$\left| \sum_{k=1}^{n} \frac{f_m(x_k)}{n} - \int\limits_0^1 f_m(x)dx \right| < \varepsilon.$$

Тогда $N(\varepsilon) = \max(N_1,\, N_2)$, поэтому

$$\left| \lim_{n\to+\infty} \frac{f(x_1) + \ldots + f(x_n)}{n} - \int\limits_0^1 f(x)dx \right| < 3\varepsilon.$$

$\forall n > N(\varepsilon)$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{f(x_1) + \ldots + f(x_n)}{n} = \int\limits_0^1 f(x)dx$$

Теорема 14 (Критерий р.р. $\pmod 1$). *Последовательность* $\{x_n\}, n \geq 1$ *р.р.* $\pmod 1$, *тогда и только тогда, когда* $\forall m \in \mathbb{Z}, \quad m \neq 0$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{e^{2\pi i m x_1} + \ldots + e^{2\pi i m x n}}{n} = 0$$

Пример.

$$x_k = \{\alpha^k\},\ \alpha \notin \mathbb{Q}.$$

Тогда

$$e^{2\pi i m x_k} = e^{2\pi i m \alpha^k} = \left(e^{2\pi i m \alpha}\right)^k,$$

поэтому

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\left(e^{2\pi i m \alpha}\right)^k}{n} = \frac{1}{n} \frac{e^{2\pi i m (n+1)\alpha} - e^{2\pi i m \alpha}}{e^{2\pi i m \alpha} - 1} \to 0, \quad n \to \infty.$$

Доказательство. Необходимость.
$e^{2\pi i m x}$ — периодическая функция от x с периодом 1.

$$f(x) \sim \sum_{m=-\infty}^{+\infty} (a_m \sin 2\pi m x + b_m \cos 2\pi m x) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} c_m e^{2\pi i m x}.$$

При $f \in \mathbb{R}$, $c_m = c_{-m}$.
Достаточность.
1) $f = 0$ — доказано.
2) доказываемая формула верна для тригонометрических полиномов

$$f(x) = \sum_{|m| \le N} c_m e^{2\pi i m x}.$$

3) по теореме Вейерштрасса, если f — непрерывная функция, то $\forall \varepsilon > 0$ найдется тригонометрический полином $p(x)$, такой что

$$|f(x) - p(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in [0,\, 1].$$

Обозначим

$$f_1 = p(x) - \varepsilon, \quad f_2 = p(x) + \varepsilon.$$

Имеем, что

$$f_1 < f(x) < f_2,$$

и f_1, f_2 — тригонометрические полиномы. Следовательно теорема справедлива для всех непрерывных функций.
4) Так как $\forall\, \varepsilon\, \exists\, f_1, f_2 \in C[0,1]: \quad f_1(x) \le f(x) \le f_2(x)$ и

$$\int\limits_0^1 (f_2 - f_1) dx < \varepsilon,$$

то теорема справедлива для интегрируемых по Риману функций. □

Пример (Примеры равномерно распределенных по модулю 1 последовательностей). При $\alpha \notin \mathbb{Q}$ последовательности $\{\alpha n\}$ и $\{\alpha n^2\}$.
$\{P(n)\}$ — многочлен, у которого есть хотя бы один иррациональный коэффициент кроме свободного.
$\{n^\alpha\}, \quad 0 < \alpha < 1,$
$\{(\ln n)^\alpha\}, \quad \alpha > 1.$

Упражнение 13. Докажите, что последовательность $\{\ln n\}$ не является равномерно распределенной по модулю 1, но всюду плотна на $[0,\, 1]$

Открытой задачей является равномерная распределенность по модулю 1 последовательности $\{\alpha^n\}$.

Часть VI
Лекция 7

Упражнение 14 (Задача о первых цифрах степеней 2). Мы хотим узнать частоту появления каждой цифры среди первых цифр степеней двойки.

Пусть g — цифра, $g = \{1, 2, \ldots, 9\}$. Средняя частота появления g в n испытания вычисляется как $\frac{\nu(g)}{n}$. Обозначим $\nu_n(g)$ количество членов последовательностей, первая цифра которых равна g, с номером меньшим n.
Тогда
$$\lim_{n\to\infty} \frac{\nu_n(g)}{n} \tag{3}$$
— это частота появления цифры g в качестве первой цифры степени двойки.

Утверждение 3. *Верны следующие два предложения.*

1. *Предел* (3) *существует.*
2. *Предел равен* $\lg\left(\frac{1+g}{g}\right) = \lg\left(1 + \frac{1}{g}\right)$

Поэтому среди первых цифр степени двойки встречается 1, затем $2, 3$ и так далее, до 9.

Доказательство. Выпишем условие, означающее, что 2^n начинается с цифры g.
$$g10^k \leqslant 2^n < (g+1)10^k$$
при некотором целом $k \geqslant 0$.
Пролологорифмировав, получим
$$\lg g + k \leqslant n \lg 2 < \lg(g+1) + k.$$
Возьмем дробную часть от этого выражения:
$$\{lgg\} \leqslant \{n \lg 2\} < \{\lg(g+1)\}.$$
Так как $\lg g < 1$, то
$$\lg g \leqslant \{n \lg 2\} < \lg(g+1).$$

Рассмотрим $x_n = \{nlg2\} \in (0, 1)$.
Если она равномерно распределена на отрезке $(0, 1)$, то частота появления цифры g в качестве первой цифры степени двойки (по критерию Вейля) равна

$$\lg(g+1) - \lg g = \lg\left(1 + \frac{1}{g}\right)$$

Отступление. Последовательность $\{n\alpha\}, \alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ равномерно распределена.
Таким образом, нам просто осталось проверить, что $\lg 2 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Доказательство. От противного. Предположим, что $\lg 2$ — рациональное число. Тогда

$$\lg 2 = \frac{p}{q}, \quad p \in \mathbb{Z},\, q \in \mathbb{N}.$$

То есть, $\lg 2^q = p$, $2^q = 10^p = 2^p 5^p$. Следовательно, $2^{q-p} = 5^p$, то есть $p = 0$ или $p = q$ — получили противоречие. $\square$

$\square$

Упражнение 15. Рассмотрим последовательность натуральных чисел. С какой цифры чаще всего начинаются числа в натуральном ряду?

Будем искать $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\nu_n(g)}{n}$, если он существует.
Легко показать, что предела в обычном смысле не существует.

$$g10^k < n < (g+1)10^k,\; n \in \mathbb{Z},\; n > 0,$$

$$\lg g + k < \ln n < \lg g + 1$$

$$\lg g < \{\lg n\} < \lg(g+1)$$

К сожалению, последовательность $\{\ln n\}$ не распределена равномерно на $[0, 1]$. Однако при $\varepsilon > 0$ последовательность $\{\lg^{1+\varepsilon} n\}$ — это равномерно распределенная последовательность.

Именно, пусть дана последовательность $\{s_n\}$. Рассмотрим предел

$$\lim_{n\to\infty} \frac{s_1 + \ldots + s_n}{n}.$$

Если такой предел существует и равен s, то говорят, что последовательность $\{s_n\}$ сходится к s по Чезаро ($s_n \to s(C)$, $n \to \infty$).

Упражнение 16. Докажите, что если $s_n \to s$, $n \to \infty$, то $s_n \to s(C)$, то есть в случае, когда существует обычный предел, этот предел и предел по Чезаро совпадают.

Пример. Рассмотрим последовательность $1, 0, 1, 0, 1, \ldots$.
Это расходящаяся последовательность, однако у нее существует предел по Чезаро, равный $\frac{1}{2}$.

Пример. Рассмотрим последовательность s_n

$$s_n = \begin{cases} 1, & \text{если число начинается с нужной цифры} \\ 0, & \text{в противном случае} \end{cases}$$

Для последовательности $\{2^n\}$ последовательность $\{s_n\}$ сходится по Чезаро, но для натуральных чисел s_n по Чезаро не сходится.

9.1 Метод Рисса (R, p_n)

Рассмотрим сумму $\frac{p_1 s_1 + \ldots + p_n s_n}{p_1 + \ldots + p_n}$.
Пусть все $p_i \geqslant 0$ и ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} p_k$ расходится.
Тогда если существует предел

$$\lim_{n\to\infty} \frac{p_1 s_1 + \ldots + p_n s_n}{p_1 + \ldots + p_n} = s,$$

то говорят, что $s_n \to s(R, p_n)$ — последовательность s_n сходится к s по Риссу с весовыми коэффициентами p_n.

Теорема 15 (Чезаро). *Рассмотрим последовательность $\{p_n\}$ такую, что $p_i \geqslant 0 \forall i \in \mathbb{N}$.*

1. *Если p_n возрастающая последовательность, то сходимость по Чезаро включает в себя сходимость по Риссу с весовыми коэффициентами p_n.*

2. *Если последовательность p_n убывает, то сходимость по Риссу включает в себя сходимость по Чезаро.*

В случае, когда существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{p_n}{p_1 + \ldots + p_n} = c, c > 0$ сходимость по Риссу эквивалентна обычной сходимости.

Пример. Рассмотрим в качестве весовых коэффициентов последовательность $\{p_n\}$, где $p_n = \frac{1}{n}$.
Тогда сходимость по Риссу включает в себя сходимость по Чезаро. Такой метод Рисса называют логарифмическим.

Теорема 16. *Последовательность*

$$s_n = \begin{cases} 1, & \text{если число начинается с данной цифры} \\ & 0, \text{ в противном случае} \end{cases}$$

сходится к $\lg\left(1+\frac{1}{g}\right)$ *в смысле* $(R, \frac{1}{n})$.

Часть VII

Лекция 8

9.2 Логарифмический метод суммирования

Рассмотрим последовательность s_n.
В случае, когда существует предел

$$\lim_{n\to\infty} \frac{s_1 + \frac{s_2}{2} + \ldots + \frac{s_n}{n}}{1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}} = s,$$

говорят что последовательность сходится по Риссу с весовыми коэффициентами $\frac{1}{n}$ и пишут $s_n \to s(R, \frac{1}{n})$.

Теорема 17 (Дункан). *Рассмотрим последовательность* $n, n \in \mathbb{N}$. *Тогда частота появления цифры* a *в качестве первой цифры* n *равна* $\lg\left(1+\frac{1}{a}\right)$.

Доказательство. Обозначим числа, начинающиеся с цифры a как a_ν.
Пусть $A = \{a_\nu\}$.
Обозначим

$$\delta(A) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\ln n} \sum_{a_\nu \leqslant n} \frac{1}{a_\nu}$$

Вычислим нижний и верхний пределы последовательности.
При $n = a10^k - 1$

$$\underline{\delta(A)} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{\ln(a10^k - 1)} \sum_{a_\nu \leqslant a10^k - 1} \frac{1}{a_\nu} =$$

$$= \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k \ln 10} \sum_{\nu=1}^{k-1} \left(H((a+1)10^\nu - 1) - H(a10^\nu - 1)\right) =$$

$$= \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k \ln 10} \sum_{\nu=1} k - 1 \left(H((a+1)10^\nu) - H(a10^\nu)\right) =$$

$$= \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k\ln 10} \sum_{\nu=1}^{k-1} (H((a+1)10^\nu) - H(a10^\nu)) =$$

$$= \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k\ln a} \left(\sum_{\nu=1}^{k-1} \ln \frac{a+1}{a} + c \right) = \lim_{k\to\infty} \frac{k-1}{k\ln 10} \ln \frac{a+1}{a} = \lg \frac{a+1}{a}.$$

□

9.3 Метод суммирования Рисса (R, p_n)

Имеем последовательности $\{s_n\}, \{p_n\} \quad p_n > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ и ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} p_i$ расходится.

Упражнение 17. Докажите, что (R, p_n) — регулярный метод суммирования, то есть если последовательность сходится в обычном смысле, то она сходится и по Риссу ($\{s_n\} \to s, n \to \infty$, тогда $s_n \to s(R, p_n)$).

В случае, когда последовательность весовых коэффициентов $\{p_n\}$ такова, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{p_n}{p_1 + \ldots + p_n} = 0$$

метод Рисса сильнее обычной сходимости. В противном случае, он эквивалентен обычной сходимости.

9.4 Совместимые методы

Пусть у нас есть два метода S и S'.

Определение 3. Методы S и S' совместимы если $s_n \to s(S), \quad s_n \to s'(S')$ при $n \to \infty$, и $s = s'$.

Методы Рисса не удовлетворяют свойству совместимости.

9.5 Метод Вороного (W, p_n)

Рассмотрим последовательность $\{p_n\}$, где $p_1 > 0$, а остальные члены неотрицательные.
Если существует предел

$$\lim_{n\to\infty} \frac{p_1 s_n + p_2 s_{n-1} + \ldots + p_n s_1}{p_1 + \ldots + p_n} = s,$$

то говорят, что $s_n \to s(W, p_n)$.

Утверждение 4. *Любые два регулярных метода Вороного совместимы.*
Условие регулярности:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{p_n}{p_1 + \ldots + p_n}$$

Рассмотрим последовательность $\{s_n\}$:

$$s_n = \begin{cases} 1, \text{ если число начинается с нужной цифры} \\ \hfill 0, \text{ в противном случае.} \end{cases}$$

Теорема 18. *Если W — регулярный метод Вороного, то s_n всегда расходится в смысле сходимости Вороного.*

Литература:
Весовые распределения, равномерное распределение и строгая эргодичность. УМН, 2005, 26.

Упражнение 18. Доказать, что частоты появления цифр $0, 1, 2, \ldots, 9$ на втором месте в последовательности $\{n\}, \quad n \in \mathbb{N}$ равны соответственно

$$\lg \frac{11}{10}\frac{21}{20}\cdots\frac{91}{90}$$

— для 0,

$$\lg \frac{20}{19}\frac{30}{29}\cdots\frac{100}{99}$$

— для 9.

Упражнение 19. Докажите, что частота появления любой цифры g на n-ом месте стремится к $\frac{1}{10}$ при $n \to \infty$.

9.6 Метод Монте-Карло вычисления интегралов

Для вычисления интеграла можно взять равномерно распределенную последовательность на $[0, a]$, к примеру, $\{n\alpha\}$, где $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Рассмотрим окружность $S = \{x \bmod 2\pi\}$.

Определение 4. Рассмотрим дугу окружности S и посчитаем количество точек последовательности, попадающих в нее. Пусть оно равно s'. Последовательность $\{x_n\}$ равномерно распределена на окружности, если

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\nu_n(s')}{n} = \frac{\operatorname{mes} s'}{\operatorname{mes} s} = \frac{l'}{2\pi},$$

где l' — длина рассматриваемой дуги, а $\nu_n(s')$ — количество точек, попадающих в дугу s'.

Теорема 19 (Критерий равномерной распределенности последовательности на окружности). *Последовательность $\{x_n\}$ равномерно распределена на окружности S тогда и только тогда, когда $e^{imx_n} \to 0\,(C), \quad n \to \infty \quad \forall m \neq 0, \quad m \in \mathbb{Z}$.*

Рассмотрим $T : S \to S$. Сдвинем точку x на торе на α. Тогда $x \to \alpha + x$.

Теорема 20. *Если $\frac{\alpha}{2\pi}$ не является рациональным числом, то $\forall x$ последовательность $T^n x$ равномерно распределена на S.*

Теорема 21 (Якоби). *Если $\frac{\alpha}{2\pi} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, то $\{T^n x\}$ всюду плотна на окружности S.*

Упражнение 20. Пусть $f \in R(S)$, $f(x + 2\pi) = f(x), \frac{\alpha}{2\pi} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Доказать, что $f(T^n x) \to \frac{1}{2\pi} \int\limits_0 2\pi f(z) dz \ (C), \quad n \to \infty$, и эта сходимость равномерная по x, то есть

$$\frac{f(x) + f(Tx) + \ldots + f(T^n x)}{n+1} \to \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} f(z) dz$$

равномерно по x.

Теорема 22 (Вейль, 1916). *Пусть последовательность $\{x_n\}$ равномерно распределена по модулю 1, функция $f \in R[0,1]$, а p_n – весовые коэффициенты.*
Тогда

$$\frac{p_1 f(x_1) + \ldots + p_n f(x_n)}{p_1 + \ldots + p_n} \to \int\limits_0^1 f(x) dx, \quad n \to \infty.$$

Часть VIII

Лекция 3

Рассмотрим упражнение с предыдущей лекции.

Упражнение 21 (Пример Пуанкаре). Доказать, что интеграл

$$I(t) = \lim_{t \to \infty} \sum_{n=1}^{\infty} A^n \sin \frac{t}{\Lambda^n} \to \infty,$$

где $1 < \frac{\Lambda+1}{2} < A < \Lambda$.
Рассмотрим
$$0 < \frac{\pi}{2}\Lambda^{n-1} < t \leqslant \frac{\pi}{2}\Lambda^{n},\ n = 1, 2, \ldots$$
Поделим неравенства на Λ^{n+k}.
$$0 < \frac{\pi}{2\Lambda^{k+1}} < \frac{t}{\Lambda^{n+k}} \leqslant \frac{\pi}{2\Lambda^{k}} < \frac{\pi}{2}$$
Разобьемисходнуюсуммунадве$I(t) = \sum_{j=1}^{\infty} A^j \sin\frac{t}{\Lambda^j} = \sum_{j=1}^{n-1} A^j \sin\frac{t}{\Lambda^j} + \sum_{k=0}^{\infty} A^{n-k} \sin\frac{t}{\Lambda^k}$
и рассмотрим сначала первую подсумму
$$\sum_{j=1}^{n-1} A^j \sin\frac{t}{\Lambda^j} \leqslant \sum_{j=1}^{n-1} A^j = \frac{A^n - A}{A-1}.$$
Рассмотрим теперь вторую сумму. Для ее преобразования используем неравенство
$$\sin x \geqslant \frac{2}{\pi}x$$
из которого видно, что
$$\sin\frac{t}{\Lambda^{n+k}} \geqslant \frac{2}{\pi}\frac{t}{\Lambda^{n+k}}.$$
Тогда
$$\sum_{k=0}^{\infty} A^{n-k} \sin\frac{t}{\Lambda^{n+k}} \geqslant \sum_{k=0}^{\infty} A^{n-k}\frac{2}{\pi}\frac{t}{\Lambda^{n+k}} \geqslant$$
$$\geqslant \frac{A^n}{\Lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{A}{\Lambda}\right)^k \geqslant \frac{A^n}{\Lambda}\frac{1}{1-\frac{A}{\Lambda}} = \frac{A^n}{\Lambda - A},$$
то есть вторая сумма увеличивается при $n \to \infty$. Таким образом,
$$I(t) \geqslant \frac{A^n(2A - \Lambda - 1)}{(\Lambda - A)(A-1)} \to \infty,\ n \to \infty,\ t \to \infty.$$

Рассмотрим теперь
$$f(x_1, x_2) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{A}{\Lambda}\right)\cos 2\pi(u_n x_1 + v_n x_2),$$
где
$$(\sqrt{2} - 1)^n = u_n + v_n\sqrt{2}.$$

Положим $x_2 = 0, x_1 = x$. Тогда $f(x_1, x_2) = g(x)$, то есть вместо функции от двух переменных мы рассмотрим функцию от одной переменной

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{A}{\Lambda}\right)^n \cos 2\pi u_n x.$$

Пусть $\Lambda = \sqrt{2} + 1 = \frac{1}{\sqrt{2}-1}$.

$$u_n + v_n\sqrt{2} = \frac{1}{\Lambda^n}$$

Тогда

$$(-\sqrt{2} - 1)^n = u_n - \sqrt{2}v_n = (-1)^n \Lambda^n,$$

то есть

$$u_n = \frac{(-1)^n}{2} \left(\Lambda^n + \frac{1}{\Lambda^n}\right) = (-1)^n \Lambda^n.$$

Рассмотрим ряд

$$G(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{A}{\Lambda}\right)^n \cos \pi \Lambda^n x.$$

Упражнение 22. Доказать, что $g(x) - G(x) \in C^1$.

Функция $G(x)$ не имеет производной ни в одной точке при $1 < A < \Lambda$. Её называют функцией Вейерштрасса.

Пусть теперь функция $f(x_1, x_2) \in C^2$, $\langle f \rangle = 0$, $f(x_1 \pmod 1), x_2 \pmod 1)) = f(x_1, x_2)$ и $f(x_1^0, x_2^0) \neq 0$. Рассмотрим

$$I(\tau, x_1^0, x_2^0) = \int\limits_0^\tau f(\omega_1 t + x_1^0, \omega_2 t + x_2^0) dt, \ \frac{\omega_1}{\omega_2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}.$$

В таких предположениях $I(t)$ бесконечно много раз сколь угодно близко подходит к нулю.

9.7 Дифференциальные уравнения на двумерном торе с интегральным инвариантом.

В нашем случае интегральным инвариантом будет инвариантная мера. Пусть $\rho(x, y) > 0$ — плотность инвариантной меры.

9.8 Эйлер

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y) \\ \dot{y} = g(x, y) \end{cases}$$

Уравнение Лиувилля $\operatorname{div}(\rho v) = 0$ в этом случае имеет вид

$$\frac{\partial(\rho f)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho g)}{\partial y} = 0.$$

Рассмотрим 1-форму

$$-\rho g dx + \rho f dy = dH,\ H = H(x, y).$$

Пояснение: dH — полный дифференциал, так как

$$\frac{\partial H}{\partial x} = -\rho g,\ \frac{\partial H}{\partial y} = \rho f,$$

то есть

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 H}{\partial y \partial x}.$$

Тем самым H — первый интеграл исходной системы уравнений.
Эйлер назвал ρ интегрирующим множителем.

9.9 Якоби

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, \ldots, x_n), \\ \qquad \ldots \\ \dot{x}_n = f_n(x_1, \ldots, x_n). \end{cases}$$

Пусть для системы выполнены следующие условия:

1. Имеются $n - 2$ независимых первых интеграла

   $$G_1(\boldsymbol{x}),\ \ldots,\ G_{n-2}(\boldsymbol{x}),\ x = (x_1, \ldots, x_n).$$

   Из функциональной независимости G_i, $i = \overline{1, n}$ следует, что

   $$\operatorname{rank} \frac{\partial(G_1, \ldots, G_n)}{\partial(x_1, \ldots, x_n)} = n - 2.$$

2. Имеем интегральный инвариант с плотностью $\rho(x_1, \ldots, x_n) > 0$:

   $$\operatorname{div}(\rho v) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial(\rho f_j)}{\partial v_j} = 0.$$

Тогда система интегрируема в квадратурах.

Пример (Уравнения Эйлера-Пуассона).

$$\begin{cases} I\dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \times I\boldsymbol{\omega} = p\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{\gamma} \\ \dot{\boldsymbol{\gamma}} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\gamma} = 0. \end{cases}$$

Первые интегралы системы:

$$H = \frac{1}{2}(I\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega}) + p(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{\gamma}),$$

$$(I\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\gamma}) = c_1,$$

$$(\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\gamma}) = c_2.$$

Так как условие 2 выполнено, $\rho \equiv 1$, то до интегрируемости в квадратурах не хватает одного первого интеграла.

Часть IX

Последняя лекция

Рассмотрим множество $M = [0,1]$ и преобразование $T : M \to M$ такое, что если $x \in [0,1]$, то $Tx = \{2x\}$.
Пусть кроме того, задана мера Лебега μ, инвариантная относительно преобразования T.

Определение 5. Сохранение меры не взаимнооднозначного преобразования. Пусть A — измеримое множество. Тогда

$$\mu T^{-1} A = \mu A,$$

где $T^{-1}A$ — полный прообраз A.

Упражнение 23. Доказать теоремы Пуанкаре о возвращении для невзаимнооднозначных отображений сохраняющих меру.

Рассмотрим функцию $f : M \to \mathbb{R}$, $f \in R[0,1]$. Рассмотрим ее среднее временное

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(x) + f(Tx) + \ldots + f(T^{n-1}x)}{n} = \overline{f}(x),$$

По эргодической теореме Биркгофа-Хинчина

$$\overline{f}(x) \in R[0,1],\ \overline{f}(Tx) = \overline{f}(x).$$

Любое $x \in [0,1]$ можно представить в виде двоичной дроби

$$x = \frac{\epsilon_1(x)}{2} + \frac{\epsilon_2(x)}{2^2} + \frac{\epsilon_3(x)}{2^3} + \ldots + \frac{\epsilon_n(x)}{2^n} + \ldots,$$

где $\forall i \in \mathbb{N}$

$$\epsilon_i(x) \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}$$

Графиком функции $\epsilon_i(x)$ является ступеньки.
Применим к x преобразование T.

$$Tx = \frac{\epsilon_2(x)}{2} + \frac{\epsilon_3(x)}{2^2} + \ldots + \frac{\epsilon_n(x)}{2^{n-1}} + \ldots.$$

То есть, T сдвигает последовательность $\{\epsilon_n(x)\}$ вправо на один элемент.

$$T : \{\epsilon_1(x),\, \epsilon_2(x),\, \epsilon_3(x), \ldots\} \to \{\epsilon_2(x),\, \epsilon_3(x),\, \epsilon_4(x), \ldots\}.$$

Преобразование T называют сдвигом Бернулли. Величина

$$\frac{f(x) + f(Tx) + \ldots + f(T^{n-1}x)}{n}$$

характеризует среднее количество единиц в разложении числа и стремится при $n \to \infty$ (пока не ясно в каком смысле) к $\frac{1}{2}$.
Рассмотрим вместо функций $\epsilon_i(x)$ функции $r_i(x) = 1 - 2\epsilon_i(x)$, $i \geqslant 1$.
Функции $r_i(x)$ назывются функциями Радемахера.
Функции Радемахера образуют ортонормированную систему функций, в том смысле, что

$$\int\limits_0^1 r_{k_1}(x) r_{k_2}(x) \ldots r_{k_s}(x) dx = 0,$$

при $k_1 < k_2 < \ldots < k_s$.
Рассмотрим величину

$$\frac{r_1(x) + r_2(x) + \ldots + r_n(x)}{n}.$$

При $n \to \infty$ она стремится (опять же пока не ясно в каком смысле) к 0.
Докажем, что

$$\frac{r_1(x) + r_2(x) + \ldots + r_n(x)}{n} \to 0,\ n \to \infty$$

в смысле средне-квадратической сходимости.
Рассмотрим
$$\int_0^1 \frac{(r_1(x)+r_2(x)+\ldots+r_n(x))^2}{n^2}dx =$$
$$= \int_0^1 \frac{r_1^2(x)+r_2^2(x)+\ldots+r_n^2(x)+2(r_1(x)r_2(x)+\ldots+r_{n-1}(x)r_n(x))}{n^2}dx =$$
$$= \frac{1}{n^2}\int_0^1 ndx = \frac{1}{n} \to 0,\ n\to\infty.$$

Теорема 23. *Вспомогательная теорема, вытекающая из теоремы Леви. Пусть $f_n(x) \geqslant 0$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \int_0^1 f_n(x)dx < \infty$.*
Тогда ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x) < \infty$ для почти всех $x \in [0,1]$.

Теорема 24. *Следствие. Для почти всех $x \quad f_n(x) \to 0,\ n \to \infty$.*

Поэтому из того, что
$$\left(\frac{r_1(x)+r_2(x)+\ldots+r_n(x)}{n}\right)^4 \to 0,\ n\to\infty$$
для почти всех $x \in [0,1]$, следует что
$$\frac{r_1(x)+r_2(x)+\ldots+r_n(x)}{n} \to 0,\ n\to\infty.$$

Упражнение 24. Как можно усилить теорему Биркгофа-Хинчина и усиленный закон больших чисел?

В качестве подсказки: можно использовать сходимость не по Чезаре, а по Риссу.
Рассмотрим метод Рисса, который слабее метода Чезаре. Суммируя этим методом получим решение задачи.
Таким образом, задачу можно сформулировать следующим образом: существует ли метод Рисса (R, p_n), который слабее метода Чезаре и в условиях применимости теоремы Биркгофа-Хинчина $f(T^n x) \to \overline{f}(R, p_n)$ для почти всех x.

Пример. В качестве весовых коэффициентов можно рассмотреть $p_n = e^{n^\alpha}$.

Упражнение 25. Известно, что

$$\frac{p_1 r_1(x) + p_2 r_2(x) + \ldots + p_n r_n(x)}{p_1 + p_2 + \ldots + p_n} \to 0$$

для почти всех x.
Указать такие p_n, что метод будет как можно более слабым.
Если $p_n = e^{\frac{n}{\ln^\gamma n}} \quad \forall \gamma > 1$, то такие коэффициенты подходят. Что будет в случае, когда $p_n = e^{\frac{n}{\ln n}}$ пока неизвестно.