Лекция 1. Простейшие механические системы

Рассмотрим вначале некоторые простейшие примеры механических систем с конечным числом степеней свободы.

1.1. Гармонический осциллятор. Без преувеличения можно сказать, что уравнение гармонических колебаний

$$\ddot{q}(t) = -\omega^2 q(t), \tag{1}$$

где ω — ненулевое вещественное число, занимает в математической физике одно из самых важных мест. Оно дает хорошее приближение к реальным колебаниям материальной точки с малой относительной амплитудой. Соответственно, это уравнение лежит в основе описания упругой сплошной среды. Важную роль оно играет и в теории поля: свободное релятивистское квантовое скалярное поле можно рассматривать как бесконечный набор квантовых гармонических осцилляторов.

Решения уравнения (1) хорошо известны, они задаются формулой

$$q(t) = A\sin(\omega t + B),$$

где A и B — произвольные константы, которые определяются из начальных условий. Коэффициент ω имеет очень простой смысл: период колебаний равен $\dfrac{2\pi}{\omega}$, а частота, соответственно, $\dfrac{\omega}{2\pi}$.

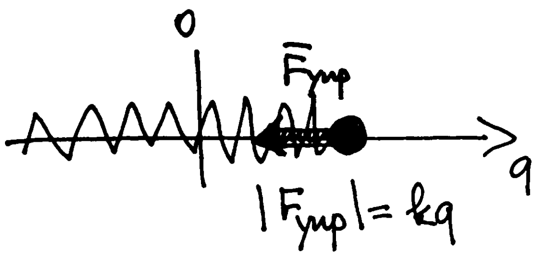

Рис. 1. Пружинный маятник

1.2. Пружинный маятник. Рассмотрим грузик массы m, прикрепленный к пружине так, чтобы он мог совершать колебания только вдоль пружины, см. рис. 1. Закон, по которому изменяется сила упругости в зависимости от величины деформации, в общем случае очень сложен. Однако при малом относительном изменении длины пружины сила упругости с достаточной точностью подчиняется закону Гука

$$F_{\text{упр}} = -kq,$$

где q — отклонение грузика от положения равновесия, а k — коэффициент жесткости пружины. Если пренебречь силой трения, то из второго закона Ньютона следует уравнение движения $m\ddot{q}(t) = -kq(t)$. Таким образом, колебания пружинного маятника — гармонические, и при этом $\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$.

1.3. Круговой маятник. Другой известный пример — колебания точечного грузика массы m, подвешенного на невесомой и нерастяжимой нити длины l и совершающего колебания в фиксированной вертикальной плоскости. Эта система имеет одну степень свободы, поэтому для вывода уравнения колебаний удобно воспользоваться законом сохранения энергии.

Обозначим через $q(t)$ угол отклонения нити от вертикали в момент времени t. Тогда угловая скорость грузика равна $\dot{q}$, а линейная — $l\dot{q}$. Кинетическая энергия грузика $E_{\text{К}}$ равна $\dfrac{m(l\dot{q})^2}{2}$. Примем за нулевой уровень потенциальной энергии положение равновесия $q = 0$. Тогда для потенциальной энергии имеем $E_{\text{П}} = mgl\,(1 - \cos q)$, где g — ускорение свободного падения. Из закона сохранения энергии следует, что

$$\frac{d}{dt}(E_{\text{К}} + E_{\text{П}}) = \frac{d}{dt}\left(\frac{m(l\dot{q})^2}{2} - mgl\cos q\right) = 0.$$

Отсюда получаем уравнение

$$\dot{q}\,(l\ddot{q} + g\sin q) = 0.$$

Равенство $\dot{q}(t) = 0$ для всех t означает, что грузик находится в положении равновесия. А для колебаний получаем уравнение

$$\ddot{q} + \omega^2 \sin q = 0, \tag{2}$$

где $\omega = \sqrt{g/l}$. Замена $\sin x$ в правой части уравнения на первый член разложения $\sin q = q + O(q^3)$ приводит к уравнению гармонических колебаний, которое в случае малой амплитуды колебаний служит достаточно хорошим приближением для уравнения движения маятника.

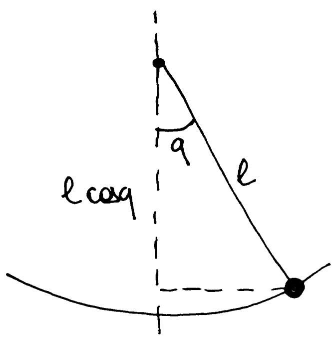

Рис. 2. Круговой маятник

1.4. Циклоидальный маятник. Рассмотренные нами маятники описываются уравнением гармонических колебаний лишь приближенно. Оказывается, существуют более сложно устроенные системы, для которых уравнение колебаний является в точности гармоническим. Первый замечательный пример такого рода — циклоидальный маятник — открыл Христиан Гюйгенс.

Напомним, что *циклоидой* называется кривая, которую описывает точка окружности радиуса a, катящейся без проскальзывания по прямой, см. рис. 3.

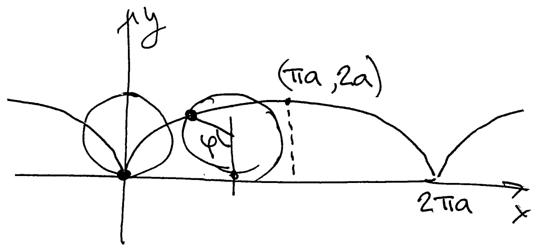

Рис. 3. Циклоида

Циклоида состоит из равных выпуклых арок. Одна арка циклоиды соответствует повороту окружности на угол 2π. Нам понадобится циклоида, отраженная относительно оси Ox, т. е. перевернутая выпуклостью вниз. Точка перевернутой циклоиды, соответствующая повороту окружности на угол φ, имеет координаты

$$x(\varphi) = a\,(\varphi - \sin\varphi),$$
$$y(\varphi) = a\,(\cos\varphi - 1),$$

где φ — угол поворота окружность. На рис. 4 угол φ меняется от 0 до 2π.

Пусть точечный грузик массы m без трения под действием силы тяжести совершает колебания в арке циклоиды, соответствующей $0 < \varphi < 2\pi$. Введем на этой арке новый параметр $s(\varphi)$, равный ориентированной длине дуги циклоиды от ее вершины, т. е. от точки с параметром $\varphi = \pi$, до точки с параметром φ, см. рис. 4. Такой параметр на кривой называется *натуральным*. Нетрудно проверить, что $s(\varphi) = -4a\cos\dfrac{\varphi}{2}$.

Будем задавать положение грузика на циклоиде с помощью параметра s и выведем дифференциальное уравнение, которому должна удовлетворять функция $s(t)$, описывающая зависимость параметра s от времени t.

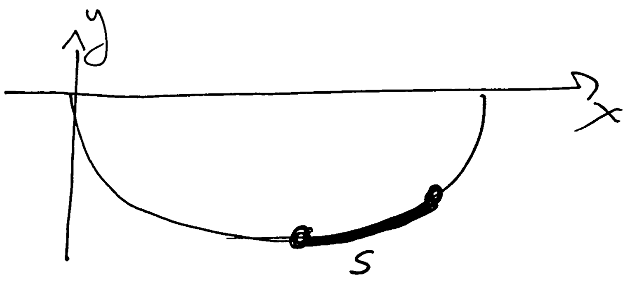

Рис. 4. Перевернутая циклоида и натуральный параметр

Квадрат скорости грузика равен $\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\dfrac{dy}{dt}\right)^2 = \left(\dfrac{ds}{dt}\right)^2$, поэтому кинетическая энергия грузика равна $E_{\text{К}} = \dfrac{m}{2}\left(\dfrac{ds}{dt}\right)^2$. Нетрудно проверить также, что справедливо соотношение

$$-2a + \frac{s^2}{8a} = y,$$

откуда для потенциальной энергии грузика имеем

$$E_\text{П} = mg\,(2a + y) = mg\,\frac{s^2}{8a}.$$

В положении равновесия $s = 0$, т. е. $\varphi = \pi$, потенциальная энергия $E_\text{П}$ равна 0.

Дифференцируя по t полную энергию

$$E_\text{К} + E_\text{П} = \frac{m}{2}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 + mg\left(-2a + \frac{s^2}{8a}\right) = \text{const}, \tag{3}$$

получаем уравнение гармонических колебаний

$$\frac{d^2s}{dt^2} + \frac{g}{4a}\,s = 0. \tag{4}$$

Реализовать движение материальной точки, например, в желобе с профилем в виде циклоиды, в достаточной степени близкое к идеальному, затруднительно. Гюйгенс открыл важное свойстве циклоиды, которое позволяет совершенно иначе реализовать движение материальной точки по этой кривой.

Рассмотрим нить длины L, закрепленную одним концом в точке A соприкосновения двух арок циклоиды, см. рис. 5. Тогда если нить все время натянута, то при перемещении второй конец нити прочертит кривую, которая называется *эвольвентой* циклоиды. Форма этой кривой зависит от L. При длины нити L, равной половине длины одной арки циклоиды, т. е. при $L = 4a$, эвольвента сама является циклоидой, равной исходной, см. рис. 5. В самом деле, вектор

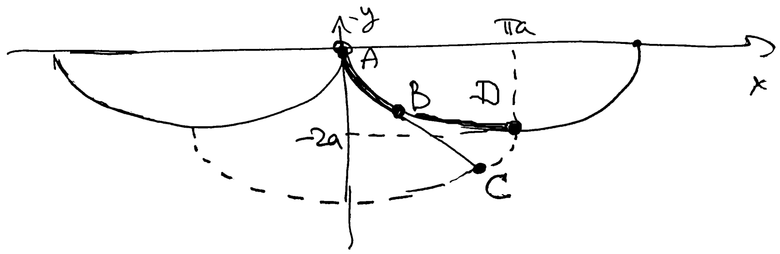

Рис. 5. Эвольвента циклоиды

единичной касательной к циклоиде в точке B, которой соответствует параметр φ, имеет координаты $\left(\sin\frac{\varphi}{2}, -\cos\frac{\varphi}{2}\right)$. Длина отрезка BC равна длине дуги BD циклоиды и равна, как показано выше, $4a\cos\frac{\varphi}{2}$. Таким образом, точка C имеет координаты

$$x_C = a(\varphi - \sin\varphi) + 4a\cos\frac{\varphi}{2}\sin\frac{\varphi}{2}$$
$$y_C = a(\cos\varphi - 1) - 4a\cos\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}$$

Упрощая, получаем

$$x_C = a(\varphi + \sin\varphi) = a((\varphi + \pi) - \sin(\varphi + \pi)) - a\pi$$
$$y_C = -a(\cos\varphi + 3) = a(\cos(\varphi + \pi) - 1) - 2a,$$

тем самым, рассматриваемая эвольвента циклоиды получается сдвигом исходной циклоиды на вектор $(-a\pi, -2a)$.

Таким образом, для реализации маятника Гюйгенса нужно подвесить точечный грузик массы m на нити длины $4a$, закрепленной в точке A соприкосновения двух арок циклоиды. Тогда колебания этого грузика будут гармоническими.

Замечание. То, что для циклоидального маятника уравнение движения оказывается в точности гармоническим, конечно, обнаружить отнюдь не просто. Мы могли бы не заметить этого, если бы выбрали другие переменные.

Найдем, например, дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет функция $\varphi(t)$. Для кинетической и потенциальной энергии грузика справедливы равенства

$$\begin{aligned} E_{\text{К}} &= \frac{m\,(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)}{2} = ma^2\dot{\varphi}^2(1-\cos\varphi), \\ E_{\text{П}} &= mga\,(1+\cos\varphi). \end{aligned}$$

Из закона сохранения энергии

$$\frac{d}{dt}\,(E_{\text{К}} + E_{\text{П}}) = 0$$

следует уравнение колебаний в виде

$$2\ddot{\varphi}a\,(1-\cos\varphi) + \dot{\varphi}^2 a\sin\varphi - g\sin\varphi = 0. \tag{5}$$

Едва ли неискушенный взгляд распознает в нем уравнение, которое имеет непосредственное отношение к гармоническим колебаниям.

Отступление — историческая справка. Циклоидальный маятник описан Гюйгенсом в книге «Маятниковые часы», опубликованной в 1673 г. Ее содержание гораздо шире названия, в ней представлены многочисленные открытия и изобретения Гюйгенса в области математики, физики и механики. Без всякого преувеличения можно сказать, что это одна из тех замечательных книг, что предшествовали «Математическим началам натуральной философии» Ньютона.

Изобретение Гюйгенсом циклоидального маятника неслучайно. Проблема точного отсчета времени постоянно занимала лучшие умы человечества. Механические часы, приводимые в действие грузом, появились в Европе в XIII веке. Они довольно сильно отличались от того, что мы сейчас понимаем под механическими часами — в них не было узла, совершающего периодические колебания. В частности, из–за этого их погрешность была очень велика. В современных часах, в зависимости от их назначения, колебания совершает маятник или спиральный баланс.

На возможность применения маятника в часах для улучшения их хода впервые, по всей видимости, обратил внимание Галилей. Он полагал, что маятник имеет постоянный период колебаний и поэтому может быть использован для стабилизации хода часов. Разработкой маятниковых часов он занимался незадолго до своей смерти и не успел воплотить их в металле. Это сделал его сын Винченцо в 1649 году. Однако в мае того же года умирает и он. Все что осталось после них — чертежи маятниковых часов, которые держались в строжайшем секрете. Вивиани, биограф Галилея, сообщил о них только после того, как стало известно об изобретении в 1657 г. маятниковых часов Гюйгенсом. Нужно отметить, что часы Галилея и Гюйгенса отличались конструкцией.

Гюйгенс также показал, что период колебаний кругового маятника зависит от амплитуды колебаний. В частности, для изготовления точных часов нужно было бы поддерживать амплитуду колебаний маятника постоянной. В то же время, математический маятник имеет период колебаний, не зависящий от их амплитуды. Поиск маятника с периодом колебаний, не зависящим от амплитуды, или как еще говорят *изохронного* маятника, привел его к открытию циклоиды и циклоидального маятника. Хотя такой маятник имеет очевидные преимущества перед обычным, по разным причинам он не нашел применения в часовом деле; В часах по-прежнему используется обычный круговой маятник.

Однако в конце 50–х — начале 60–х годов XX–го века советский конструктор Ф. М. Федченко, используя идеи Гюйгенса, построил изохронный маятник. Он использовался в известных астрономических часах АЧФ-3, которыми были оборудованы практически все обсерватории СССР. Точность хода этих часов составляет ± 0.0003 секунды в сутки и в 10 раз превышает точность ближайшего конкурента — часов Шорта. Большей точности добиться для маятниковых часов практически невозможно, потому что взаимное положение Земли и Луны хоть немного, но меняет ускорение свободного падения в фиксированной точке Земли, а период колебаний маятника зависит от этой величины. Точность часов АЧФ-3 позволяет отслеживать флуктуации ускорения свободного падения.

Наконец, для полноты отметим, что Гюйгенс изобрел спиральный баланс, который используется в большинстве механических часов (наручных, портативных и т.п.) и запатентовал его в 1675 году. Но, возможно, он не был первым, и, по меньшей мере, славу должен был бы разделить с Гуком. Гук изобрел спиральный баланс в самом конце 1650–х годов; и по его указаниям были сделаны первые карманные часы для короля Карла II.

Лекция 2. Лагранжев формализм

Существует, как известно, универсальный подход, который позволяет не только вывести уравнения движения исследуемых систем, но и задать регулярный метод получения их первых интегралов (сохраняющихся во времени величин). Это так называемый лагранжев формализм. Для релятивистской квантовой теории поля этот подход является наиболее органичным, потому что он позволяет единообразно описывать зависимость основных величин от времени и от пространственных координат.

2.1. Вариационное исчисление.

В дальнейшем нам понадобятся некоторые простейшие понятия и факты вариационного исчисления, которые мы напомним в настоящей лекции.

Рассмотрим евклидово пространство V конечной размерности $\dim V = n$. Норму вектора $q \in V$ будем обозначать $\|q\|$. Отображение $\gamma : [t_0, t_1] \to V$ называется (параметризованной) *кривой в* V. Если в V выбрана система координат $(q) = (q^1, \dots, q^n)$, то кривую γ можно задавать в виде $q(t) = (q^1(t), \dots, q^n(t))$. Если координаты (q) фиксированы, то можно не различать $\gamma(t)$ и $q(t)$.

В дальнейшем мы будем параллельно рассматривать два класса кривых: непрерывно дифференцируемых и дважды непрерывно дифференцируемых. Для краткости будем говорить о $\mathcal{C}^1$–гладких и $\mathcal{C}^2$–гладких кривых соответственно.

Всякий раз, когда будет говориться о всех кривых, подразумевается, что речь идет о всех кривых одного из этих классов, причем утверждение справедливо как для одного класса, так и для другого. Случаи, когда класс гладкости играет существенную роль, будут оговорены особо.

Пространство всех кривых в V, заданных на отрезке $[t_0, t_1]$, будем обозначать $C_V[t_0, t_1]$. Пространство $C_V[t_0, t_1]$ линейно относительно естественных операций сложения кривых и умножения кривой на число. А именно, суммой кривых γ_1 и γ_2 называется кривая $\gamma_1 + \gamma_2$ такая, что $(\gamma_1 + \gamma_2)(t) = \gamma_1(t) + \gamma_2(t)$, а произведением числа α на кривую γ называется кривая $\alpha\gamma$ такая, что $(\alpha\gamma)(t) = \alpha\gamma(t)$.

В пространстве $C_V[t_0, t_1]$ зафиксируем норму

$$\|q(t)\| = \sup_{t\in[t_0,t_1]} \|q(t)\| + \sup_{t\in[t_0,t_1]} \|\dot q(t)\|.$$

Сходимость по этой норме означает равномерную сходимость функций вместе с их производными первого порядка.

Пусть задано некоторое множество $C_V \subset C_V[t_0, t_1]$ кривых.

Определение 2.1. *Функционалом* F на C_V называется отображение $F : C_V \to \mathbb{R}$. Значение функционала F на кривой γ обозначается $F[\gamma]$.

Нас интересуют множества $C_V[t_0, t_1]$.

В лагранжевом формализме основным примером является функционал, который строится следующим образом. Рассмотрим непрерывно дифференцируемую функцию L, зависящую от $2n + 1$ переменной. Пусть кривая γ в пространстве V задана в координатах функциями $q^1(t), \dots, q^n(t)$. Определим функционал $S[\gamma]$ по формуле

$$S[\gamma] = \int\limits_{t_0}^{t_1} L(q^1(t), \dots, q^n(t), \dot q^1(t), \dots, \dot q^n(t), t)\, dt. \tag{6}$$

Такой функционал называется *функционалом действия*, а величина $S[\gamma]$ — *действием вдоль кривой* γ. Функция L называется *функцией Лагранжа*. Такой функционал определен на любой непрерывно дифференцируемой кривой γ.

Замечание. Условие непрерывной дифференцируемости функции Лагранжа L гарантирует, что функционал действия определен корректно. Вместе с тем, для вывода уравнений Эйлера—Лагранжа нужно, чтобы функция Лагранжа была дважды непрерывно дифференцируема. В абсолютном большинстве случаев, имеющих отношение к теории поля, такие требования гладкости удовлетворяются с запасом — почти все используемые функции Лагранжа имеют непрерывные производные всех порядков.

Замечание. Среди $2n + 1$ переменной, от которых зависит функция L, есть такие, вместо которых в формуле (6) подставляются производные функций $q^j(t)$ по времени. Эти переменные принять обозначать через $\dot q^j$, тем самым $L = L(q^1, \dots, q^n, \dot q^1, \dots, \dot q^n, t)$. Иногда для краткости пишут $L = L(q, \dot q, t)$. При этом $\dfrac{\partial L}{\partial \dot q^j}$ — это частная производная функции L по соответствующей переменной.

В ряде случаев функционалы рассматривают не на всем пространстве кривых на отрезке $[t_0, t_1]$, а на некотором его подпространстве. Так, например, в формулировке принципа Гамильтона (принципа стационарного действия), о котором речь пойдет ниже, используется подпространство кривых с фиксированными началом и концом. Можно также рассматривать кривые с фиксированным началом $\gamma(t_0)$ и начальным вектором скорости $\frac{d}{dt}\gamma(t_0)$. Разнообразные примеры такого рода краевых условий возникают в задачах оптимального управления.

В наших лекциях мы ограничимся двумя пространствами кривых:
i) $C_V[t_0, t_1]$ — пространством всех кривых на отрезке $[t_0, t_1]$;
ii) $C_V^0[t_0, t_1]$ — пространством всех кривых на отрезке $[t_0, t_1]$ с фиксированными концами $\gamma_0 = \gamma(t_0)$ и $\gamma_1 = \gamma(t_1)$.

С последним примером связана необходимость провести различие между пространством кривых и пространством вариаций. Это различие станет ясным чуть позже, когда мы обратимся к определению дифференцируемого функционала. Если кривая в данном случае является аналогом понятия аргумента функции в стандартном анализе, то вариация кривой является аналогом приращения аргумента.

В первом случае пространство вариаций $\delta C_V[t_0, t_1]$ совпадает с самим пространством кривых $C_V[t_0, t_1]$. Во втором случае пространство вариаций $\delta C_V^0[t_0, t_1]$ состоит из всевозможных кривых, обращающихся в нуль на концах отрезка.

В тех случаях, когда эти пространства можно рассматривать параллельно, будем пространство кривых обозначать C_V, а пространство их вариаций — δC_V.

Пространство кривых C_V и пространство вариаций δC_V обладают следующими тремя свойствами:
i) пространство вариаций является линейным;
ii) разность двух любых кривых из C_V принадлежит δC_V;
iii) сумма любой кривой из C_V и произвольной вариации является кривой из C_V.

Иными словами, C_V является аффинным пространством, а δC_V — соответствующим ему линейным пространством.

В общем случае, когда мы рассматриваем кривые на многообразии M, а не в $\mathbb{R}^n$, функция Лагранжа задается на произведении касательного расслоения TM на $\mathbb{R}$. В этом случае $q(t)$ нужно понимать как точку многообразия, а $\dot{q}(t)$ — как касательный вектор, принадлежащий касательному пространству $T_{q(t)}M$ в точке $q(t)$.

2.2. Дифференцируемые функционалы. Теперь напомним понятие дифференциала и экстремали функционала.

Определение 2.2. Функционал F, заданный на линейном подпространстве в $C_V[t_0, t_1]$, называется *линейным*, если $F[\alpha_1\gamma_1 + \alpha_2\gamma_2] = \alpha_1 F[\gamma_1] + \alpha_2 F[\gamma_2]$ для всех кривых γ_1, γ_2 из области определения функционала и всех чисел α_1, α_2.

Приведем пример линейного функционала. Для этого зафиксируем произвольную непрерывную кривую $a(t)$ в пространстве V, определенную на отрезке $[t_0, t_1]$. Рассмотрим произвольную кривую $\gamma \in C_V[t_0, t_1]$. Тогда для любого $t \in [t_0, t_1]$ определено скалярное произведение $a(t) \cdot \gamma(t)$ векторов $a(t)$ и $\gamma(t)$, причем функция $a(t) \cdot \gamma(t)$ непрерывна, и следовательно, интегрируема на $[t_0, t_1]$. Значение функционала $F_a[\gamma]$ на кривой γ зададим формулой

$$F_a[\gamma] = \int\limits_{t_0}^{t_1} a(t) \cdot \gamma(t)\, dt. \tag{7}$$

Нетрудно видеть, что такой функционал линеен на пространстве $C_V[t_0, t_1]$,

Если проинтегрировать по отрезку $[t_0, t_1]$ функцию $a(t) \cdot \gamma'(t)$ — она тоже непрерывна — при этом получается линейный функционал

$$\widetilde{F}_a[\gamma] = \int_{t_0}^{t_1} a(t) \cdot \gamma'(t)\, dt. \tag{8}$$

Напомним, что норма в пространстве кривых выбрана так, чтобы она учитывала как малость самой функции, так и ее производной.

Определение 2.3. Пусть на пространстве C_V задан функционал F. Функционал F называется *дифференцируемым*, если для любой кривой $\gamma \in C_V$ существуют линейный функционал $D_\gamma F$ на пространстве вариаций δC_V и постоянная M_γ такие, что $F[\gamma + h] = F[\gamma] + D_\gamma F[h] + R$, где $|R| < M_\gamma \varepsilon^2$ для любой вариации $h \in \delta C_V$ такой, что $\|h\| < \varepsilon$.

Функционал $D_\gamma F$ — линейная часть приращения — называется *дифференциалом* функционала F. Если функционал F дифференцируем, то для каждой кривой γ функционал $D_\gamma F$ определен однозначно. Еще раз подчеркнем, что дифференциал $D_\gamma F$ функционала F определен на пространстве вариаций кривых, и что $D_\gamma F$ зависит от выбора γ.

Вариацию $h(t)$ зададим в координатах функциями $(h^1(t), \ldots, h^n(t))$.

Теорема 2.1. *Пусть функция Лагранжа дважды непрерывно дифференцируема. Тогда на пространстве $C_V[t_0, t_1]$ всех $\mathcal{C}^1$–гладких кривых, определенных на отрезке $[t_0, t_1]$, функционал действия $S[q(t)]$ дифференцируем, причем его дифференциал задается формулой*

$$D_\gamma S[h] = \int_{t_0}^{t_1} \left[\frac{\partial L}{\partial q^k}\big(q^1(t), \ldots, q^n(t), \dot{q}^1(t), \ldots, \dot{q}^n(t), t\big)\; h^k(t) + \right.$$
$$\left. + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k}\big(q^1(t), \ldots, q^n(t), \dot{q}^1(t), \ldots, \dot{q}^n(t), t\big)\; \dot{h}^k(t) \right] dt.$$

Замечание. Для сокращения записи удобно вместо $\big(q^1(t), \ldots, q^n(t)\big)$ писать $q(t)$. В частности, вместо

$$\frac{\partial L}{\partial q^k}\big(q^1(t), \ldots, q^n(t), \dot{q}^1(t), \ldots, \dot{q}^n(t), t\big)\, h^k(t),$$

будем писать $\dfrac{\partial L}{\partial q^k}(q(t), \dot{q}(t), t)\, h^k(t)$, а в тех случаях, когда это не вызовет недоразумений, еще короче $\dfrac{\partial L}{\partial q}\big(q(t), \dot{q}(t), t\big)\, h(t)$.

Доказательство. Поскольку функция L дифференцируема, то имеет место разложение

$$L(q+\Delta q, \dot{q}+\Delta\dot{q}, t) - L(q, \dot{q}, t) = \frac{\partial L(q, \dot{q}, t)}{\partial q}\, \Delta q + \frac{\partial L(q, \dot{q}, t)}{\partial \dot{q}}\, \Delta\dot{q}(t) + r(q, \dot{q}, t, \Delta q, \Delta\dot{q}),$$

где для любых фиксированных q, $\dot{q}$ и t остаточный член $r(q, \dot{q}, t, \Delta q, \Delta\dot{q})$ равен $o(|\Delta q| + |\Delta\dot{q}|)$. Из этого разложения формула для дифференциала $D_\gamma S$ следует очевидным образом: нужно вместо q подставить $q(t)$, вместо Δq подставить $h(t)$ и проинтегрировать по t от t_0 до t_1.

Тем самым, остается доказать, что величина $S[q(t)+h(t)]-S[q(t)]-D_{q(t)}S[h(t)]$ равна $O(\|h\|^2)$ при $\|h\|\to 0$. Для этого воспользуемся тем, что функция L дважды непрерывно дифференцируема. Это условие позволяет оценить остаточный член r. Чтобы упростить запись, вместо двух групп переменных $(q^1,\dots,q^n,\dot q^1,\dots\dot q^n)$ будем использовать одну: $(u^1,\dots,u^{2n})$, а вместо соответствующих приращений $(h^1,\dots,h^n,\dot h^1,\dots,\dot h^n)$ будем писать $(\Delta u^1,\dots,\Delta u^{2n})$. Тогда имеет место формула

$$L(u+\Delta u,t)-L(u,t)=\frac{\partial L(u,t)}{\partial u^k}\,\Delta u^k+r(u,t,\Delta u),$$

причем

$$r(u,t,\Delta u)=\frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{2n}\frac{\partial^2 L(x+\theta\Delta u,t)}{\partial u^j\partial u^k}\,\Delta u^j\,\Delta u^k, \tag{9}$$

где $\theta\in(0,1)$.

Пусть кривая $q(t)$ фиксирована. Положим $C_1=\max\limits_{t\in[t_0,t_1]}\|q(t)\|$, $C_2=\max\limits_{t\in[t_0,t_1]}\|\dot q(t)\|$, $C=\max(C_1,C_2)$. Обозначим через M максимум всевозможных вторых частных производных функции Лагранжа по переменным $q^1,\dots,q^n,\dot q^1,\dots,\dot q^n$ при $\|q\|\le 2C$, $\|\dot q\|\le 2C$ и $t\in[t_0,t_1]$.

Рассмотрим произвольную вариацию $h(t)$, для нормы которой выполнено неравенство $\|h\|\le C$. В силу выбора нормы в пространстве кривых, имеем оценки $|h^j(t)|\le\|h\|$ и $|\dot h^j(t)|\le\|h\|$ для значений функций h^j и $\dot h^j$ в произвольной точке $t\in[t_0,t_1]$. Тогда точка, в которой вычисляются частные производные функции Лагранжа в формуле (9), удовлетворяет неравенствам $\|q\|\le 2C$, $\|\dot q\|\le 2C$, и $t\in[t_0,t_1]$, откуда легко следует, что

$$|r(q(t),\dot q(t),t,h(t),\dot h(t))|\le n\,(2n+1)\,M\,\|h\|^2.$$

Интегрируя по t от t_0 до t_1, получаем оценку

$$\begin{aligned}\big|S[q(t)+h(t)]-S[q(t)]-D_{q(t)}[h(t)]\big| &= \left|\int\limits_{t_0}^{t_1} r(q(t),\dot q(t),t,h(t),\dot h(t))\,dt\right|\le\\ &\le (t_1-t_0)\,n\,(2n+1)\,M\,\|h\|^2,\end{aligned}$$

справедливую для всех h таких, что $\|h\|\le C$. □

Следствие 2.2. *Пусть функция Лагранжа L дважды непрерывно дифференцируема. Тогда на пространстве дважды непрерывно дифференцируемых кривых функционал действия, построенный по функции L, дифференцируем, а для его дифференциала имеет место формула*

$$\begin{aligned}D_\gamma S[h]=\int\limits_{t_0}^{t_1}\left(\frac{\partial L}{\partial q^k}(q(t),\dot q(t),t)-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q^k}(q(t),\dot q(t),t)\right)h^k(t)\,dt\,+\\ +\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q^k}(q(t),\dot q(t),t)\,h^k(t)\right)\Bigg|_{t_0}^{t_1}.\end{aligned}$$

Доказательство. По теореме 2.1 функционал $S[\gamma]$ дифференцируем, и его дифференциал задается формулой

$$D_{q(t)}S[h]=\int\limits_{t_0}^{t_1}\left(\frac{\partial L}{\partial q^k}(q(t),\dot q(t),t)\,h^k(t)+\frac{\partial L}{\partial \dot q^k}(q(t),\dot q(t),t)\,\dot h^k(t)\right)dt.$$

В силу условий, наложенных на L и q, второе слагаемое можно проинтегрировать по частям, откуда немедленно получается требуемое утверждение. $\square$

Следствие 2.3. *Пусть функция Лагранжа L дважды непрерывно дифференцируема. Тогда на пространстве $C^0_V[t_0, t_1]$ всех дважды непрерывно дифференцируемых кривых, определенных на отрезке $[t_0, t_1]$, с фиксированными значениями $\gamma_0 = \gamma(t_0)$ и $\gamma_1 = \gamma(t_1)$ в концах отрезка, функционал действия $S[q(t)]$ дифференцируем, причем его дифференциал задается формулой*

$$D_{q(t)}S[h] = \int\limits_{t_0}^{t_1} \left(\frac{\partial L}{\partial q^k}(q(t), \dot{q}(t), t) - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k}(q(t), \dot{q}(t), t) \right) h^k(t)\, dt.$$

Доказательство очевидно. $\square$

2.3. Экстремали, уравнение Эйлера—Лагранжа

Определение 2.4. *Экстремалью* дифференцируемого функционала $S[\gamma]$ называется такая кривая γ, что дифференциал $D_\gamma S$ обращается в нуль на любой ее вариации, т. е. $D_\gamma S[h] = 0$ для любой вариации h.

Сделаем небольшое замечание о структуре этого пункта. В начале мы выведем уравнение, которому удовлетворяют экстремали функционала действия, рассматриваемого на пространстве дважды непрерывно дифференцируемых кривых с фиксированными концами. Это уравнение легко выводится из следствия 2.3. Затем мы обратимся к исследованию экстремалей функционала действия на пространстве непрерывно дифференцируемых кривых с фиксированными концами. При некотором дополнительном предположении о функции Лагранжа, справедливом во многих интересующих нас случаях, мы докажем, что непрерывно дифференцируемая экстремаль функционала действия обязательно оказывается дважды непрерывно дифференцируемой. Тем самым, расширение области определения функционала действия с дважды непрерывно дифференцируемых до непрерывно дифференцируемых кривых не приводит к появлению новых экстремалей.

Теорема 2.4 (уравнение Эйлера—Лагранжа). *Пусть функция Лагранжа L дважды непрерывно дифференцируема. Тогда дважды непрерывно дифференцируемая кривая γ является экстремалью функционала*

$$S[\gamma] = \int L(q^1(t), \ldots, q^n(t), \dot{q}^1(t), \ldots, \dot{q}^n(t), t)\, dt$$

на пространстве дважды непрерывно дифференцируемых кривых с фиксированными концами $q(t_0) = q_0$ и $q(t_1) = q_1$ тогда и только тогда, когда вдоль кривой выполняются соотношения

$$\frac{\partial L(q(t), \dot{q}(t), t)}{\partial q^k} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L(q(t), \dot{q}(t), t)}{\partial \dot{q}^k} = 0, \qquad k = 1, \ldots, n.$$

Для доказательства понадобится следующее утверждение.

Лемма 2.5. *Пусть непрерывная (вектор)–функция $a(t)$ такова, что $\int\limits_{t_0}^{t_1} a(t) \cdot h(t)\, dt = 0$ для любой бесконечно дифференцируемой (вектор)–функции $h(t)$, равной нулю в концах отрезка $[t_0, t_1]$. Тогда $a(t) \equiv 0$ на отрезке $[t_0, t_1]$.*

Доказательство. Для простоты рассмотрим одномерный случай, оставив общий случай, когда функции векторнозначные, читателю в качестве несложного упражнения. Предположим от противного, что $a(t)$ не является тождественно равной нулю. Тогда она отлична от нуля и сохраняет знак на некотором интервале $(s_0, s_1) \subset (t_0, t_1)$. Рассмотрим функцию $h(t)$, график которой показан на рис. 6

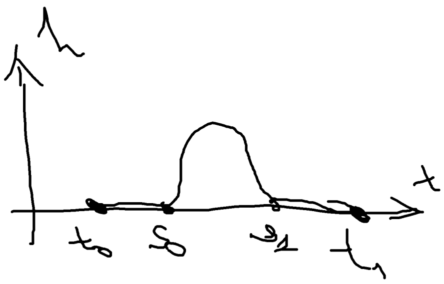

Рис. 6. Функция $h(t)$

Например, в качестве $h(t)$ можно взять функцию, равную $\exp(-\frac{1}{(t-s_1)(t-s_0)})$ на (s_0, s_1), и нулевую вне этого интервала. Нетрудно проверить, что она имеет производные всех порядков на $\mathbb{R}$.

Тогда легко видеть, что $\int\limits_{t_0}^{t_1} a(t)h(t)\,dt \neq 0$. Противоречие. □

Доказательство теоремы. Как показывает следствие 2.3, кривая γ, заданная параметрически в виде $t \mapsto q(t)$, является экстремалью функционала $S[\gamma]$ тогда и только тогда, когда для всех возможных вариаций выполняется равенство

$$\int\limits_{t_0}^{t_1} \left(\frac{\partial L}{\partial q^k}(q(t), \dot{q}(t), t) - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k}(q(t), \dot{q}(t), t) \right) h^k(t)\,dt = 0.$$

Отсюда с помощью леммы 2.5 получаем, что γ является экстремалью функционала $S[\gamma]$ тогда и только тогда, когда выполняется соотношение

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k}(q(t), \dot{q}(t), t) - \frac{\partial L}{\partial q^k}(q(t), \dot{q}(t), t) = 0,$$

что и требовалось. □

Определение 2.5. Уравнения $\dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}^k}(q(t), \dot{q}(t), t) - \dfrac{\partial L}{\partial q^k}(q(t), \dot{q}(t), t) = 0$ называются *уравнениями Эйлера—Лагранжа* для функционала действия $S[\gamma]$, заданного функцией Лагранжа L.

Замечание. Производная $\dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}^k}(q(t), \dot{q}(t), t)$ может быть вычислена как производная сложной функции в том случае, когда $q(t)$ по крайней мере дважды дифференцируема. В этом случае уравнения Эйлера—Лагранжа принимают вид системы дифференциальных уравнений второго порядка, с помощью которой обычно и ищут экстремали функционала действия.

Итак, мы нашли уравнение экстремалей функционала действия на пространстве дважды непрерывно дифференцируемых функций. Возникает естественный вопрос: появятся ли у функционала действия дополнительные экстремали, если рассматривать его на более широком пространстве непрерывно дифференцируемых функций. Для этого мы выведем уравнение Эйлера—Лагранжа, не используя предположения, что экстремаль $q(t)$ дважды непрерывно дифференцируема. Заодно мы докажем, что новые экстремали не появятся, если функция Лагранжа удовлетворяет так называемому условию невырожденности, иными словами, если это условие выполнено, то решение уравнения Эйлера—Лагранжа обязательно дважды непрерывно дифференцируема.

Определение 2.6. Функция Лагранжа называется *невырожденной*, если во всех точках $(q, \dot{q}, t) \in \mathbb{R}^{2n+1}$ определитель $\det\left(\dfrac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^j \partial \dot{q}^k}\right)$ отличен от нуля.

Замечание.

Предварительно докажем утверждение известное, как лемма Дюбуа—Реймона.

Лемма 2.6 (Дюбуа—Реймон). *Пусть непрерывная (вектор)–функция $a(t)$ такова, что $\int\limits_{t_0}^{t_1} a(t)\cdot h'(t)\,dt = 0$ для любой бесконечно дифференцируемой (вектор)–функции $h(t)$, равной нулю в концах отрезка $[t_0, t_1]$. Тогда $a(t)$ постоянна на отрезке $[t_0, t_1]$.*

Доказательство. Для простоты доказательство проведем для одномерного случая, оставив читателю разобрать общий случай самостоятельно. Предположим противное, т. е., что функция $a(t)$ непостоянна. Выберем две точки, отличные от границ отрезка, в которых она принимает различные значения. Тогда найдутся два отрезка $[c_1, d_1]$ и $[c_2, d_2]$, каждый содержащий одну из этих точек, лежащие внутри интервала (t_0, t_1), и число A, отделяющее значения функции $a(t)$ на одном отрезке от ее значений на другом, т. е. множества $a([c_1, d_1])$ и $a([c_2, d_2])$ не пересекаются и разделяются числом A. Для удобства будем считать, что выполняются неравенства $a(t) < A$ при $t \in [c_1, d_1]$ и $A < a(t)$ при $t \in [c_2, d_2]$.

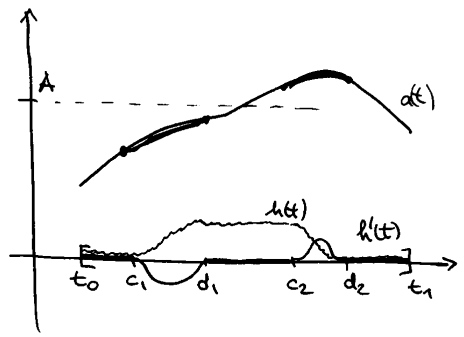

Рис. 7. Функции $a(t)$, $h'(t)$ и $h(t)$

Теперь построим подходящую функцию $h(t)$. Для этого сначала мы построим ее производную $h'(t)$, а затем положим $h(t) = \int\limits_{t_0}^{t} h'(s)\,ds$. Равенство $h(t_0) = 0$ при этом выполнится автоматически.

Положим

$$h'(t) = \begin{cases} -\exp\left(-\dfrac{1}{(t-d_1)(t-c_1)}\right) & \text{при } t \in (c_1, d_1), \\ B\exp\left(-\dfrac{1}{(t-d_2)(t-c_2)}\right) & \text{при } t \in (c_2, d_2), \\ 0 & \text{в остальных точках отрезка} [t_0, t_1]. \end{cases}$$

Нетрудно показать, что функция $h'(t)$ и, следовательно, функция $h(t)$ — бесконечно дифференцируемы. Осталось обеспечить выполнение равенства $h(t_1) = 0$. Для этого нужно выбрать положительную постоянную B так, чтобы $\int\limits_{t_0}^{t_1} h'(t)\,dt = 0$. Очевидно, что такая постоянная $B > 0$ существует.

Теперь заметим, что $\int\limits_{t_0}^{t_1} Ah'(t)\,dt = A\int\limits_{t_0}^{t_1} h'(t)\,dt = 0$. Отсюда получаем, что

$$\int\limits_{t_0}^{t_1} a(t)h'(t)\,dt = \int\limits_{t_0}^{t_1} (a(t) - A)\,h'(t)\,dt =$$

$$= \int\limits_{c_1}^{d_1} (a(t) - A)\,h'(t)\,dt + \int\limits_{c_2}^{d_2} (a(t) - A)\,h'(t)\,dt > 0.$$

Полученное противоречие доказывает лемму. □

Теорема 2.7. *Пусть функция Лагранжа дважды непрерывно дифференцируема.* a) *Если непрерывно дифференцируемая кривая $q(t)$ является экстремалью функционала действия $S[q]$, построенного по дважды непрерывно дифференцируемой функции Лагранжа L, то для нее выполняются уравнения Эйлера—Лагранжа*

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j}(q(t, \dot{q}(t), t)) = \frac{\partial L}{\partial q^j}(q(t), \dot{q}(t), t). \tag{10}$$

b) *Если функция Лагранжа невырождена, то решение уравнения Эйлера—Лагранжа дважды непрерывно дифференцируемо.*

Доказательство. В условиях пункта a) для любой вариации $h(t)$, обращающейся в 0 на концах отрезка $[t_0, t_1]$ выполнено соотношение

$$\int\limits_{t_0}^{t_1} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k}(q(t), \dot{q}(t), t)\,\dot{h}^k(t) + \frac{\partial L}{\partial q^k}(q(t), \dot{q}(t), t)\,h^k(t) \right) dt = 0.$$

Легко видеть, что существуют такие функции $f^j(t)$ на отрезке $[t_0, t_1]$, что выполнены соотношения $\dfrac{d}{dt}f_j(t) = \dfrac{\partial L}{\partial q^j}(q(t), \dot{q}(t), t)$. Тогда, проинтегрировав по частям второе слагаемое в этом интеграле, получим равенство

$$\int\limits_{t_0}^{t_1} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k}(q(t), \dot{q}(t), t) - f^j(t) \right) \dot{h}^k(t)\,dt = 0.$$

По лемме Дюбуа—Реймона выражение в скобках при $t \in [t_0, t_1]$ постоянно. Дифференцируя его по t, получаем уравнения Эйлера—Лагранжа.

Теперь докажем дифференцируемость функций $\dot q^j(t)$. Зафиксируем точку $t \in [t_0, t_1]$ и такое приращение Δt, что $t + \Delta t \in [t_0, t_1]$. Обозначим через q значение функции q в зафиксированной точке t, аналогично, положим $\dot q = \dot q(t)$. Пусть также $\Delta q = q(t + \Delta t) - q(t)$, $\Delta \dot q = \dot q(t + \Delta t) - \dot q(t)$. Рассмотрим функцию

$$\frac{\partial L}{\partial \dot q^j}(q + s \cdot \Delta q, \dot q + s \cdot \Delta \dot q, t + s \cdot \Delta t),$$

зависящую от s. Применим к ней теорему Лагранжа о конечных приращениях на отрезке $0 \le s \le 1$. Получим равенство

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial L}{\partial \dot q^j}(q + \Delta q, \dot q + \Delta \dot q, t + \Delta t) - \frac{\partial L}{\partial \dot q^j}(q, \dot q, t) = \\
&\frac{\partial^2 L}{\partial q^k \partial \dot q^j}(q_j, \dot q_j, t_j)\, \Delta q^k + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot q^k \partial \dot q^j}(q_j, \dot q_j, t_j)\, \Delta \dot q^k + \\
&\frac{\partial^2 L}{\partial t \partial \dot q^j}(q_j, \dot q_j, t_j)\, \Delta t.
\end{aligned} \tag{11}$$

где в правой части все производные вычисляются во внутренней точке

$$q_j = q + \theta_j \cdot \Delta q, \quad \dot q_j = \dot q + \theta_j \cdot \Delta \dot q, \quad t + \theta_j \cdot \Delta t, \quad \theta_j \in (0, 1),$$

отрезка, соединяющего $(q, \dot q, t)$ и $(q + \Delta q, \dot q + \Delta \dot q, t + \Delta t)$.

Отметим, что для каждого значения индекса j такая точка, определяемая числом θ_j, вообще говоря, своя. Полученное равенство можно рассматривать как систему линейных уравнений на приращения $\Delta \dot q_k$, причем матрица этой системы $A(\Delta t) = \left(\dfrac{\partial^2 L}{\partial \dot q^k \partial \dot q^j}(q_j, \dot q_j, t_j) \right)$ невырождена. В самом деле, по условию пункта b) невырождена матрица $A = \left(\dfrac{\partial^2 L}{\partial \dot q^k \partial \dot q^j}(q, \dot q, t) \right)$. При достаточно малом Δt ее элементы мало отличаются от элементов матрицы рассматриваемой системы, следовательно, последняя также невырождена. Ясно также, что $A(\Delta t)^{-1} \to A^{-1}$ при $\Delta t \to 0$. Разделив соотношение (11) на Δt, для удобства представим его в матричном виде

$$D(\Delta t) = B(\Delta t)\, \frac{\Delta q}{\Delta t} + A(\Delta t)\, \frac{\Delta \dot q}{\Delta t} + C(\Delta t).$$

Здесь $D(\Delta t) = \dfrac{1}{\Delta t}\, \Delta \dfrac{\partial L}{\partial \dot q}(q, \dot q, t)$, $B(\Delta t)$ — матрица, составленная из $\dfrac{\partial^2 L}{\partial q^k \partial \dot q^j}(q_j, \dot q_j, t_j)$, $C(\Delta t)$ — вектор, составленный из производных $\dfrac{\partial^2 L}{\partial t \partial \dot q^j}(q_j, \dot q_j, t_j)$. Отсюда получаем, что

$$\frac{\Delta \dot q}{\Delta t} = A(\Delta t)^{-1}\left(D(\Delta t) - B(\Delta t)\, \frac{\Delta q}{\Delta t} - C(\Delta t)\right). \tag{12}$$

Теперь легко проверить, что каждое слагаемое в правой части этого равенства имеет предел при $\Delta t \to 0$. Тем самым, существует предел $\dfrac{\Delta \dot q}{\Delta t}$ при $\Delta t \to 0$, т. е. функция $q(t)$ дважды дифференцируема. Непрерывность ее второй производной легко следует из выражения для $\ddot q(t)$, которое получается из соотношения (12) предельным переходом при $\Delta t \to 0$. $\square$

Замечание. Если читателю такое доказательство кажется несколько громоздким, то рекомендуем ему продумать его для $n = 1$. В этом случае условие невырожденности функции Лагранжа принимает особенно простой вид $\dfrac{\partial^2 L}{\partial\dot q\,\partial\dot q_1} \neq 0$.

2.4. Принцип стационарного (наименьшего) действия.

Рассмотрим движение по прямой материальной точки массы m, которое определяется потенциалом $V(q)$, где q — евклидова координата материальной точки. Это означает, что когда точка имеет координату q, то на нее действует сила $-\dfrac{\partial V}{\partial q}$, т. е. уравнение движения определяется из второго закона Ньютона и имеет вид $m\ddot q + \dfrac{\partial V}{\partial q} = 0$. Про такие механические системы говорят, что они *потенциальны*.

Все рассмотренные нами выше примеры укладываются в эту схему для подходящих потенциалов $V(q)$. Например, для гармонического осциллятора $m = 1$ и $V(q) = \dfrac{\omega^2 q^2}{2}$, для кругового маятника $V(q) = \omega^2(1 - \cos q)$ и т. п.

Заметим теперь, что уравнение $m\ddot q + \dfrac{\partial V}{\partial q} = 0$ является уравнением Эйлера—Лагранжа для функции $L(q, \dot q, t) = \dfrac{m\dot q^2}{2} - V(q)$, которая, как нетрудно видеть, равна разности $E_{\text{К}} - E_{\text{П}}$ кинетической $E_{\text{К}}$ и потенциальной $E_{\text{П}}$ энергий.

Этот факт далеко неслучаен. Он является проявлением хорошо известного принципа Гамильтона для *консервативных голономных* механических систем, образующих обширный класс.

Отметим, что принцип Гамильтона допускает обобщения и на неконсервативные системы, и на неголономные, но для консервативных голономных систем он допускает особенно простую формулировку.

Напомним соответствующие определения. Рассмотрим механическую систему, состоящую из n материальных точек. Пусть в некоторой декартовой системе координат эти точки записываются в виде (x_j, y_j, z_j), где $j = 1, \ldots, n$. Взаимное расположение точек может подчиняться некоторым ограничениям или, как говорят, *связям*. Чаще всего связи физически реализуются с помощью каких-либо идеальных тел: нитей, блоков, шарниров и т. п. В общем случае рассматриваемые механические связи выражаются в виде равенств (или неравенств), связывающих координаты x_k, y_k, z_k, скорости $\dot x_k, \dot y_k, \dot z_k$ и время t.

Геометрическими называются связи, налагающие ограничения только на координаты точек, т. е. имеющие вид

$$f(x_1, y_1, z_1, \ldots, x_n, y_n, z_n, t) = 0.$$

Связи вида

$$f(x_1, \ldots, z_n, \dot x_1, \dot y_1, \dot z_1, \ldots, \dot x_n, \dot y_n, \dot z_n, t) = 0.$$

называются *кинематическими*.

[1]**Замечание.** Эта теорема представляет интерес для лагранжианов, в которые скорости входят квадратично. Ниже мы встретимся с лагранжианами с иной зависимостью от скоростей. Основной пример такого сорта — это лагранжиан, задающий уравнение Дирака.

Если все связи могут быть сведены к геометрическим, то такая система называется *голономной.* Кинематическая связь возникает, например, при качении колеса по прямой. В этом случае между скоростью центра колеса v и угловой скоростью вращения колеса ω возникает кинематическая связь $v = R\omega$, где R — радиус колеса. Как нетрудно видеть интегрированием эта связь сводится к геометрической: $x = R\varphi$, где x — перемещение центра, а φ — угол поворота колеса. Один из простейших примеров, в котором связь неголономна, — шар, катящийся по плоскости.

Голономные системы являются, конечно же, идеализацией реальных механических систем.

Консервативность системы означает, что работа внешних сил, действующих на систему, зависит только он начального и конечного состояний системы, но не зависит от траектории, по которой система переведена из одного состояния в другое. Иными словами, наша система обладает потенциалом.

Голономные консервативные системы удовлетворяют следующему принципу *стационарного действия Гамильтона.* Пусть при движении наша система в момент времени t_0 оказывается в положении $q_0 = (q_0^1, \dots, q_0^n)$, а в в момент времени t_1 — в положении $q_1 = (q_1^1, \dots, q_1^n)$. Тогда эта траектория является стационарной для функционала действия, построенного по функции Лагранжа $L = E_{\text{К}} - E_{\text{П}}$, на пространстве всевозможных кривых, проходящих при $t = t_k$ через q_k, где $k = 1, 2$.

Часто его называют принципом *наименьшего действия*, так как для многих механических систем движение не только задает экстремаль функционала действия $S[q]$, но и доставляет его наименьшее значение.

Тем не менее, следует помнить, что в общем случае неверно, что экстремаль функционала действия доставляет его локальный минимум. Простейший пример такого рода мы приведем в конце лекции.

2.5. Сферический маятник. Рассмотрим точечный грузик массы m, подвешенный на невесомой и нерастяжимой нити длины l, не предполагая при этом, что он совершает колебания только в одной плоскости. Таким образом, грузик двигается по сфере радиуса l, с центром в точке подвеса, см. рис. 8.

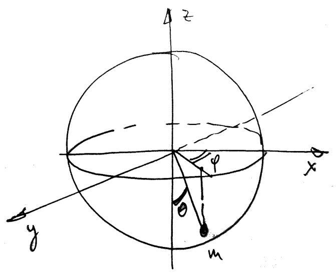

Рис. 8. Сферический маятник

Покажем на примере этого маятника, насколько принцип Гамильтона удобен для вывода уравнений движения. Разумеется нужно заранее знать, что к данной механической системе принцип Гамильтона применим. В данном случае это следует из того, что мы имеем дело с голономной и потенциальной системой.

Обозначим через θ угол отклонения нити от вертикали, а через φ — полярный угол в плоскости Oxy, соответствующий ортогональной проекции грузика в плоскость Oxy. Декартовы координаты грузика выражаются через углы θ и φ по формулам

$$x = l\sin\theta\cos\varphi, \tag{13}$$
$$y = l\sin\theta\sin\varphi, \tag{14}$$
$$z = l\cos(\pi-\theta). \tag{15}$$

Легко проверить, что имеют место равенства

$$E_{\text{К}} = \frac{m}{2}(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2) = \frac{ml^2}{2}\,(\dot{\theta}^2+\dot{\varphi}^2\sin^2\theta), \tag{16}$$
$$E_{\text{П}} = mg\,(l-z) = mgl(1-\cos\theta). \tag{17}$$

Экстремали построенного по функции Лагранжа $L(\theta,\varphi) = E_{\text{К}} - E_{\text{П}}$ функционала действия задаются уравнениями

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial\dot{\theta}} - \dfrac{\partial L}{\partial\theta} = 0 \\ \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}} - \dfrac{\partial L}{\partial\varphi} = 0 \end{cases}$$

Или в явном виде

$$\begin{cases} \ddot{\theta} - \sin\theta\,\cos\theta\,\dot{\theta}\,\dot{\varphi}^2 - \dfrac{g}{l}\sin\theta\,\dot{\theta} = 0 \\ \dfrac{d}{dt}\,(\sin^2\theta\,\dot{\varphi}) = 0 \end{cases}$$

Можно сравнить этот вывод уравнений движения и сами уравнения в переменных θ и φ с тем, что получится, например, в переменных x, y и z при использовании второго закона Ньютона, чтобы убедиться в эффективности применения принципа Гамильтона.

2.6. Замечание о стационарном действии.

Разумеется, в рамках наших определениях мы можем поменять знак функции Лагранжа, и получить новый функционал с теми же самыми экстремалями. Если исходный функционал достигал на экстремали минимума, то новый на той же экстремали будет иметь максимум. Из такой ситуации можно было бы попытаться найти выход, подобрав более удачно знак у функции Лагранжа. Однако часты ситуации, когда экстремаль функционала является в определенном смысле его седловой точкой. А именно, варьируя экстремаль разными способами можно как увеличивать, так и уменьшать значения функционала действия.

Простейший пример такого сорта строится следующим образом. Рассмотрим на евклидовой сфере радиуса r функционал $S[\gamma] = \int\limits_{t_0}^{t_1} |\dot{\gamma}(t)|^2 dt$. Как мы знаем из курса дифференциальной геометрии, его экстремалями являются геодезические линии сферы со стандартной метрикой, т. е. дуги больших окружностей, параметризованные так, что вектор скорости кривой имеет постоянную длину $|\dot{\gamma}| = \text{const}$.

Рассмотрим на сфере две точки P и Q, не являющиеся диаметрально противоположными. Их соединяют две дуги большой окружности γ_1 и γ_2. Для определенности будем считать, что длина γ_1 больше длины γ_2. Тогда γ_1 является в определенном смысле седловой точкой рассматриваемого функционала. Во-первых, если проварьировать кривую γ_1 в достаточно малой окрестности произвольной ее точки, см. рис. 9, то нетрудно показать, что значения функционала S увеличится.

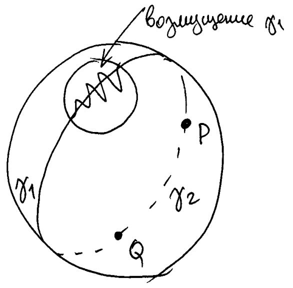

Рис. 9. Значение функционала $S[\gamma]$ увеличивается

Более того, значение функционала действия увеличится, если мы от параметра $t \in [t_0, t_1]$ перейдем к новому параметру $\tau(t)$, который меняется на том же отрезке $[t_0, t_1]$, причем $\dfrac{d\tau}{dt} > 0$, $\tau(t_0) = t_0$ и $\tau(t_1) = t_1$. Будем считать также, что $\tau(t)$ не является тождественным отображением, т. е. производная $\dfrac{d\tau}{dt}$ не равна тождественно единице.

Пусть $\left|\dfrac{d}{dt}\gamma\right| = C$. Тогда значение рассматриваемого функционала на кривой $\gamma(t)$ равно

$$S[\gamma(t)] = C^2(t_1 - t_0).$$

В свою очередь, значение функционала S на кривой $\gamma(t(\tau))$ равно

$$S[\gamma(t(\tau))] = \int\limits_{t_0}^{t_1} C^2 \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 d\tau.$$

Таким образом нам нужно показать, что

$$\int\limits_{t_0}^{t_1} \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 d\tau > (t_1 - t_0).$$

Для этого воспользуемся неравенством Коши—Буняковского

$$\int\limits_{t_0}^{t_1} (f(\tau))^2\, d\tau \int\limits_{t_0}^{t_1} (g(\tau))^2\, d\tau \geq \left(\int\limits_{t_0}^{t_1} f(\tau)\, g(\tau)\, d\tau\right)^2,$$

в котором равенство достигается только тогда, когда $f(\tau) = \lambda g(\tau)$ всех $\tau \in [t_0, t_1]$, а λ — некоторая константа. Подставив в это неравенство $f(\tau) = \dfrac{dt}{d\tau}$ и

$g(\tau) \equiv 1$, учитывая при этом, что $f(\tau) = \dfrac{dt}{d\tau}$ не является постоянной, получим

$$(t_1 - t_0)^2 \int\limits_{t_0}^{t_1} \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 d\tau > \left(\int\limits_{t_0}^{t_1} \frac{dt}{d\tau}\, d\tau\right)^2 = (t_1 - t_0)^2,$$

что и требовалось.

Другая вариация, уменьшающая значение функционала S получается следующим образом. Рассмотрим в пространстве прямую PQ. Плоскость, проходящая через центр сферы и прямую PQ пересекает ее по объединению кривых γ_1 и γ_2. Напомним, что мы выбрали их так, что длина γ_1 больше половины длины окружности большого круга, а длина γ_2, соответственно, меньше. Поворачивая плоскость сечения вокруг прямой PQ получим два семейства кривых: возмущение кривой γ_1 и возмущение кривой γ_2, см. рис. 10. Нас интересуют дуги, образующие возмущение кривой γ_1, поэтому дальше мы будем говорить только о них. Каждая из этих кривых является дугой окружности, полученной в результате сечения сферы повернутой плоскостью; концами дуги служат точки P и Q. С помощью элементарных геометрических рассуждений легко показать, что при возрастании угла поворота плоскости сечения от 0 до $\pi/2$ уменьшаются радиус окружности сечения и центральный угол, стягиваемый на этой окружности дугой из первого семейства. На каждой такой дуге выберем параметризацию так, чтобы параметр пробегал отрезок $[t_0, t_1]$, а вектор скорости имел постоянную длину. Вычислим значение функционала действия на таким образом параметризованной кривой. Пусть радиус окружности равен r, а центральный угол, стягиваемый рассматриваемой дугой, равен θ. Тогда в декартовых координатах в плоскости сечения с началом, расположенным в центре окружности сечения, рассматриваемая параметризация имеет вид $(r\cos\dfrac{\theta t}{t_1 - t_0}, r\sin\dfrac{\theta t}{t_1 - t_0})$. Легко вычислить, что значение функционала на такой кривой равно $\dfrac{r^2\theta^2}{t_1 - t_0}$. Остается заметить, что при возрастании угла поворота плоскости сечения от 0 до $\pi/2$ числитель этой дроби уменьшается, а знаменатель постоянен.

Рис. 10. Семейство кривых, на которых значение функционала $S[\gamma]$ уменьшается

Лекция 3. Многомерное вариационное исчисление

В этом разделе мы приведем определения и результаты из многомерного вариационного исчисления, которые нам понадобятся при обсуждении одного примера из механики сплошной среды и при обсуждении уравнений теории поля.

Многие формулировки и доказательства здесь повторяют одномерный случай, поэтому доказательства, которые получаются непосредственным переносом, мы опустим, оставив их читателю в качестве несложного упражнения.

Зафиксируем евклидово пространство V конечной размерности $\dim V = m$. Норму вектора $\eta \in V$ будем обозначать $\|\eta\|$. Координаты вектора η будем обозначать $(\eta^1, \ldots, \eta^m)$. В качестве индекса будем использовать латинские буквы из начала алфавита, т. е. будем писать η^a, где $a = 1, \ldots, m$.

Также зафиксируем замкнутую область $D \subset \mathbb{R}^n$, ограниченную поверхностью Σ. Область D должна быть такой, чтобы была применима формула Стокса. Например, это так, если поверхность Σ кусочно гладкая.

В дальнейшем мы будем параллельно рассматривать два класса функций, определенных на D и принимающих значения в пространстве V: непрерывно дифференцируемых и дважды непрерывно дифференцируемых. Всякий раз когда раз, когда в некотором утверждении будет идти речь о всех функциях, подразумевается, что речь идет о всех функциях одного из этих классов, причем утверждение будет справедливо как для одного класса, так и для другого. Случаи, когда класс гладкости играет существенную роль, будут оговорены особо.

Координаты в пространстве $\mathbb{R}^n$ будем обозначать $(x^1, \ldots, x^n)$ или x^μ, где $\mu = 1, \ldots n$.

Замечание. В дальнейшем, при обсуждении теории поля, мы будем в качестве $\mathbb{R}^n$ рассматривать четырехмерное пространство Минковского, а координатами в нем будем обозначать $(x^\mu) = (x^0, x^1, x^2, x^3)$.

Пространство всех функций, определенных на V и принимающих значения в V, будем обозначать $C_V(D)$. Пространство $C_V(D)$ линейно относительно естественных операций сложения функций и умножения функции на число.

В пространстве $C_V[t_0, t_1]$ зафиксируем норму

$$\|\eta(t)\| = \sup_{x \in D} \|\eta(x)\| + \sup_{\mu, x \in D} \|\partial_\mu \eta(x)\|.$$

Сходимость по этой норме означает равномерную сходимость функций вместе с их производными первого порядка.

Пусть задано некоторое множество C_V функций.

Определение 3.1. *Функционалом* F на C_V называется $F : C_V \to \mathbb{R}$. Значение функционала F на функции η обозначается $F[\eta]$.

Основным примером служит *функционал действия*, который строится следующим образом. Пусть $\mathcal{L}$ — дважды непрерывно дифференцируемая функция, зависящая от $m+mn+n$ переменных $\eta^a, \partial_\mu \eta^a, x^\mu$, где $a = 1, \ldots, m$ и $\mu = 1, \ldots, n$. Здесь, как обычно, символом $\partial_\mu \eta^a$ обозначена переменная, на место которой при вычислении функционала действия подставляется частная производная η^a по переменной x^μ. Как и раньше, через x обозначается вектор $x = (x^1, \ldots, x^n)$, а через $\eta(x)$ — вектор–функция $(\eta^1(x), \ldots, \eta^m(x))$. Определим функционал $S[\eta]$ по формуле

$$S[\eta] = \int\limits_D \mathcal{L}(\eta^a(x), \partial_\mu \eta^a(x), x)\, d^n x = \int\limits_D \mathcal{L}(\eta(x), \partial_\mu \eta(x), x)\, d^n x.$$

Функция $\mathcal{L}$ называется *лагранжианом.* Функционал действия корректно определен для любой непрерывно дифференцируемой функции η.

Замечание. Условие непрерывной дифференцируемости функции Лагранжа L гарантирует, что функционал действия определен корректно. Вместе с тем, для вывода уравнений Эйлера—Лагранжа нужно, чтобы функция Лагранжа была дважды непрерывно дифференцируема. В абсолютном большинстве случаев, имеющих отношение к теории поля, такие требования гладкости удовлетворяются с запасом — почти все используемые функции Лагранжа имеют непрерывные производные всех порядков.

Так же как и в одномерном случае, часто функционалы рассматривают не на всем пространстве функций, определенных на D, а на некотором его подпространстве. Мы ограничимся двумя такими пространствами:
i) $C_V[t_0, t_1]$ — пространством всех функций, определенных на D;
ii) $C_V^0[t_0, t_1]$ — пространством всех функций, определенных на D и принимающих на границе $S = \partial D$ заранее зафиксированные значения.

Соответствующие пространства вариаций будем обозначать через $\delta C_V[t_0, t_1]$ и $\delta C_V^0[t_0, t_1]$. Пространство вариаций $\delta C_V[t_0, t_1]$ совпадает с самим пространством функций $C_V[t_0, t_1]$. Пространство вариаций $\delta C_V^0[t_0, t_1]$ состоит из всевозможных функций, обращающихся в нуль на границе $S = \partial D$.

В тех случаях, когда эти пространства можно рассматривать параллельно, будем пространство функций обозначать C_V, а пространство их вариаций — δC_V.

Определение 3.2. Функционал F, заданный на линейном подпространстве в $C_V(D)$, называется *линейным*, если $F[\alpha_1\eta_1+\alpha_2\eta_2] = \alpha_1 F[\eta_1]+\alpha_2 F[\eta_2]$ для всех функций η_1, η_2 из области определения функционала и всех чисел α_1, α_2.

Приведем типичный пример линейного функционала. Для этого зафиксируем некоторую непрерывную функцию $a : D \to V$. Рассмотрим произвольную функцию $\eta \in C_V(D)$. Тогда для любой точки $x \in D$ определено скалярное произведение $a(x) \cdot \eta(x)$ векторов $a(x)$ и $\eta(x)$, причем функция $a(x) \cdot \eta(t)$ интегрируема на D. Значение функционала $F_a[\eta]$ зададим формулой

$$F_a[\eta] = \int\limits_D a(x) \cdot \eta(x) \, d^n x. \tag{18}$$

Нетрудно видеть, что такой функционал линеен на пространстве $C_V(D)$,

Если выбрать n непрерывных функций $a^\mu : D \to V$ и проинтегрировать скалярное произведение $a^\mu(x) \cdot \partial_\mu \eta(x)$ — эта функция тоже непрерывна — то получим линейный функционал

$$\widetilde{F}_a[\eta] = \int\limits_D a^\mu(x) \cdot \partial_\mu \eta(x) \, d^n x. \tag{19}$$

Определение 3.3. Пусть на пространстве C_V задан функционал F. Функционал F называется *дифференцируемым* на C_V, если для любой функции $\eta \in C_V$ существуют линейный функционал $D_\eta S$ на пространстве вариаций δC_V и постоянная M_η такие, что $F[\eta + h] = F[\eta] + D_\eta F[h] + R$, где $|R| < M_\eta \varepsilon^2$ для любой вариации $h \in \delta C_V$ такой, что $\|h\| < \varepsilon$.

Функционал $D_\eta F$ — линейная часть приращения — называется *дифференциалом* функционала F. Если функционал F дифференцируем, то для каждой функции η функционал $D_\eta F$ определен однозначно. Еще раз подчеркнем, что дифференциал $D_\eta F$ функционала F определен на пространстве вариаций, и что $D_\eta F$ зависит от выбора η.

Обозначим через $\mathbf{n}$ внешнюю нормаль единичной длины к поверхности Σ, ограничивающей D.

Теорема 3.1. *Пусть лагранжиан $\mathcal{L}$ дважды непрерывно дифференцируем. Тогда на пространстве $C_V(D)$ всех непрерывно дифференцируемых функций, определенных на D, функционал действия $S[\eta]$ дифференцируем, причем его дифференциал задается формулой*

$$D_\eta S[h] = \int\limits_D \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta^a}\, h^a + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \eta^a)}\, \partial_\mu h^a \right) d^n x$$

Доказательство проводится аналогично доказательству теоремы 2.1. □

Следствие 3.2. *Пусть лагранжиан $\mathcal{L}$ дважды непрерывно дифференцируем. Тогда на пространстве дважды непрерывно дифференцируемых функций функционал действия, построенный по лагранжиану $\mathcal{L}$, дифференцируем, а для его дифференциала имеет место формула*

$$D_\eta S[h] = \int\limits_D \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta^a} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \eta^a)} \right) h^a(x)\, d^n x + \int\limits_\Sigma \mathbf{n} \cdot \left(h^a \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \eta)} \right) d\Sigma$$

Доказательство. Достаточно применить формулу Стокса ко второму слагаемому под знаком интеграла в предыдущей теореме. □

Следствие 3.3. *Пусть лагранжиан Ł дважды непрерывно дифференцируем. Тогда на пространстве $C_V^0(D)$ всех непрерывно дифференцируемых функций, определенных на D и имеющих на границе $\Sigma = \partial D$ фиксированные значения, функционал действия $S[\eta]$ дифференцируем, причем его дифференциал задается формулой*

$$D_\eta S[h] = \int\limits_D \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta^a} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \eta^a)} \right) h^a(x)\, d^n x$$

Доказательство очевидно. □

3.1. Экстремали, уравнение Эйлера—Лагранжа

Определение 3.4. *Экстремалью* дифференцируемого функционала $S[\eta]$ называется такая функция η, что дифференциал $D_\eta S$ обращается в нуль на любой ее вариации, т. е. $D_\eta S[h] = 0$ для любой вариации h.

Теорема 3.4 (уравнения Эйлера—Лагранжа). *Пусть лагранжиан Ł дважды непрерывно дифференцируем. Тогда дважды непрерывно дифференцируемая функция η является экстремалью функционала*

$$S[\eta] = \int\limits_D \mathcal{L}(\eta, \partial_\mu \eta, x)\, d^n x$$

на пространстве дважды непрерывно дифференцируемых функций с фиксированными значениями на $\Sigma = \partial D$ тогда и только тогда, когда $\eta(x)$ удовлетворяет соотношениям

$$\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}(\eta(x), \partial_\mu \eta(x), x)}{\partial(\partial_\mu \eta^a)} = \frac{\partial \mathcal{L}(\eta(x), \partial_\mu \eta(x), x)}{\partial \eta^a}, \qquad a = 1, \ldots, m.$$

В доказательстве используется следующее утверждение.

Лемма 3.5. *Пусть непрерывная на D (вектор)–функция $a(x)$ такова, что $\int\limits_D a(x)\cdot h(x)\,d^nx = 0$ для любой бесконечно дифференцируемой на D (вектор)–функции $h(t)$, равной нулю на границе D. Тогда $a(t)\equiv 0$ на D.*

Доказательства этих утверждений аналогичны одномерному случаю и мы оставляем их читателю в качестве упражнений. □

Определение 3.5. Уравнения

$$\partial_\mu \frac{\partial\mathcal{L}(\eta(x),\partial_\mu\eta(x),x)}{\partial(\partial_\mu\eta^a)} = \frac{\partial\mathcal{L}(\eta(x),\partial_\mu\eta(x),x)}{\partial\eta^a}, \qquad a=1,\dots,m.$$

называются *уравнениями Эйлера—Лагранжа* для функционала действия $S[\eta]$, заданного лагранжианом $\mathcal{L}$.

Замечание. Производная $\partial_\mu \dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\eta^a)}$ может быть вычислена как производная сложной функции в том случае, когда $\eta(t)$ по крайней мере дважды дифференцируема. В этом случае уравнения Эйлера—Лагранжа принимают вид системы дифференциальных уравнений второго порядка, с помощью которой обычно и ищут экстремали функционала действия.

Мы нашли уравнение экстремалей функционала действия на пространстве дважды непрерывно дифференцируемых функций. Возникает естественный вопрос: появятся ли у функционала действия дополнительные экстремали, если рассматривать его на более широком пространстве непрерывно дифференцируемых функций. Оказывается, что ответ на этот вопрос далеко не прост. Попробуем повторить вывод уравнения Эйлера—Лагранжа, не используя предположение о существовании у функции η непрерывных производных второго порядка и посмотрим какого рода трудности мы встретим.

Пусть непрерывно дифференцируемая функция $\eta(x)$ является экстремалью функционала действия $S[\eta]$, построенного по дважды непрерывно дифференцируемому лагранжиану $\mathcal{L}$. Тогда для любой ее вариации h, обращающейся в нуль на границе Σ области D, выполнено равенство

$$\int\limits_D \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\eta^a}\,h^a + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\eta^a)}\,\partial_\mu h^a\right)\,d^nx. \tag{20}$$

В случае, когда η дважды непрерывно дифференцируема, можно применить формулу Стокса ко второму слагаемому под знаком интеграла. В случае же, когда η имеет непрерывные производные только первого порядка, этого сделать нельзя. Попробуем по аналогии с одномерным случаем преобразовать по формуле Стокса первое слагаемое. Для этого выберем функции $w^\mu_a(x)$ так, чтобы выполнялось равенство

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\eta^a}(\eta(x),\partial_\mu\eta(x),x) = \partial_\mu w^\mu_a(x).$$

Это всегда можно сделать, поскольку любая форма максимального ранга n в области D является точной, т. е. является дифференциалом подходящей формы ранга $n-1$. Индекс a далее для простоты будем опускать. Применив формулу Стокса, получим равенство

$$\int\limits_D \left(-w^\mu\partial_\mu h + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\eta)}\,\partial_\mu h\right)\,d^nx = \int\limits_D \left(-w^\mu + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\eta)}\right)\,\partial_\mu h\,d^nx = 0,$$

верное для любой вариации h. Заметим, что из условий, наложенных на функции $\mathcal{L}$ и η следует, что функция $\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \eta)}$ непрерывна, но не следует, что она дифференцируема, или хотя бы что она имеет частную производную по переменной x^μ. Тем самым, о функции $-w^\mu + \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \eta)}$ нам известно лишь, что она непрерывна.

Для того чтобы теперь вывести уравнение Эйлера—Лагранжа нам нужно, чтобы был верно следующее утверждение, являющееся аналогом леммы Дюбуа—Реймона. Для простоты предположим, что $\dim V = 1$, т. е. что индекс a принимает только одно значение $a = 1$.

Утверждение. *Рассмотрим набор непрерывных функций $A^\mu(x)$, $\mu = 1, \ldots, n$. Пусть для любой бесконечно дифференцируемой функции h, равной нулю на границе области D, выполняется равенство*

$$\int\limits_D A^\mu(x)\, \partial_\mu h(x)\, d^n x = 0$$

Тогда для каждого μ функция A^μ дифференцируема по переменной x^μ и для всех точек $x \in D$ выполняется равенство $\partial_\mu A^\mu(x) = 0$.

Однако к этому утверждению имеется контрпример. Зафиксируем на плоскости декартовы координаты (x, y). Рассмотрим векторное поле (A^1, A^2) на плоскости, компоненты которого в точке (x, y) равны $(|x - y|, |x - y|)$.

Упражнение 1. Показажите, что для этого поля выполнены условия Утверждения, при этом область D может быть произвольна.

Вместе с тем, как нетрудно видеть, в точках прямой $x = y$ компоненты векторного поля A^1 и A^2 не дифференцируемы и, более того, не имеют частных производных ни по x, ни по y.

ЗДЕСЬ НУЖНО ЧТО–ТО ДОПИСАТЬ ПРО КАКИЕ КЛАССЫ ФУНКЦИИ БУДЕМ РАССМАТРИВАТЬ

3.2. Продольные колебания упругого стержня.

Рассмотрим упругий стержень длины L с линейной плотностью массы μ. Нас интересует уравнение его малых продольных колебаний. В случае малых колебаний можно рассматривать любой отрезок стержня как упругое тело, подчиняющееся закону Гука: если отрезок стержня растягивать (сжимать) за концы, то удлинение стержня пропорционально силе. Нетрудно видеть, что при этом коэффициент упругости обратно пропорционален длине отрезка стержня. Например, если отрезок стержня длины l имеет коэффициент упругости в два раза больший, чем то отрезок стержня длины $2l$. Соответствующий коэффициент пропорциональности обозначим через Y. Тогда отрезок стержня длины Δ имеет коэффициент упругости $\dfrac{Y}{\Delta}$.

Направим вдоль стержня ось координат. Пусть некоторая точка стержня, когда он находится в состоянии покоя, имеет координату x. Отклонение этой точки в момент времени t от положения покоя обозначим $\eta(x, t)$. Таким образом, нас интересует уравнение, которому удовлетворяет функция $\eta(x, t)$.

3.3. Стержень с закрепленными концами. Для определенности будем считать, что концы стержня фиксированы и имеют координаты $x = 0$ и $x = L$. Тем самым, имеем краевое условие $\eta(0, t) = 0$, $\eta(L, t) = L$.

Приведем один из возможных выводов уравнения колебаний стержня. Зафиксируем целое число $N > 1$. Положим $\Delta = L/N$. Рассмотрим механическую систему, состоящую из N пружин, последовательно соединяющих $N+1$ грузик. Грузики расположены на одной прямой и могут перемещаться только вдоль неё. Пусть пружины одинаковы, имеют коэффициент упругости Y/Δ и в состоянии покоя имеют длину Δ. Пусть также массы всех грузов одинаковы и равны $\dfrac{\mu L}{N} = \dfrac{\mu \Delta N}{N+1}$. Наконец, первый и последний грузик закрепим в точках с координатами 0 и L соответственно. Естественно считать, что такая система является дискретной аппроксимацией для упругого стержня. Здесь масса стержня сосредоточена в грузиках, а его упругость — в пружинах.

Обозначим через $\eta_j(t)$ отклонение j–го грузика от положения равновесия, в котором грузики никуда не движутся и пружины не сжаты и не растянуты, см. рис.11. Здесь $j = 0, \ldots, N$. Набор функций $\eta_j(t)$, таким образом, можно рассматривать как дискретное приближение к функции $\eta(x,t)$.

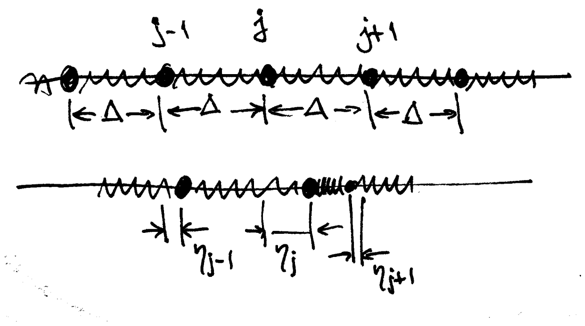

Рис. 11. Дискретная модель стержня

Второй закон Ньютона дает уравнение движения j-го шарика, $j = 1, \ldots, N-1$,

$$\frac{\mu \Delta N}{N+1}\, \ddot{\eta}_j(t) = \frac{Y}{\Delta}\, (\eta_{j+1}(t) - 2\eta_j(t) + \eta_{j-1}(t)),$$

которое мы запишем в виде

$$\frac{\mu N}{N+1}\, \ddot{\eta}_j(t) = \frac{Y}{\Delta^2}\, (\eta_{j+1}(t) - 2\eta_j(t) + \eta_{j-1}(t)). \tag{21}$$

Естественно ожидать, что при $N \to \infty$ наша дискретная система все точнее описывает колебания стержня. Переходя к пределу при $N \to \infty$ получим уравнение

$$\mu\, \frac{\partial^2 \eta(x,t)}{\partial t^2} = Y\, \frac{\partial^2 \eta(x,t)}{\partial x^2}, \tag{22}$$

хорошо известное из курса математической физики.

Кинетическая энергия нашей дискретной системы из пружин и грузиков равна

$$E_{\text{К}} = \sum_{j=1}^{N-1} \frac{\mu \Delta N}{N+1}\, \frac{\dot{\eta}_j^2}{2}.$$

Кроме того, наша система потенциальна, т. е. существует функция $E_{\text{П}}(\eta_1, \ldots, \eta_N)$, для которой сила, действующая на j–й грузик равна $F_j = -\dfrac{\partial E_{\text{П}}}{\partial \eta_j}$. В качестве

E_Π можно взять

$$E_\Pi = \frac{Y}{2\Delta}\sum_{j=1}^{N}(\eta_j - \eta_{j-1})^2.$$

Как мы помним из параграфа 4 уравнение (24) описывает экстремаль функционала действия

$$S[q] = \int\limits_{t_0}^{t_1}(E_\text{К} - E_\Pi)\,dt.$$

Таким образом, мы имеем функцию Лагранжа для дискретного аналога упругого стержня

$$L(\eta,\dot\eta) = \sum_{j=1}^{N-1}\frac{\mu\Delta N}{N+1}\,\frac{\dot\eta_j^2}{2} - \sum_{j=1}^{N}\frac{Y}{2\Delta}\,(\eta_j - \eta_{j-1})^2,$$

которую удобно переписать в виде

$$L(\eta,\dot\eta) = \left(\sum_{j=1}^{N-1}\frac{\mu\,(N+1)}{N}\,\frac{\dot\eta_j^2}{2} - \sum_{j=1}^{N}\frac{Y}{2\Delta^2}\,(\eta_j - \eta_{j-1})^2\right)\,\Delta.$$

Тогда при переходе к пределу при $N\to\infty$ вместо набора функций $\eta_j(t)$ мы получим функцию $\eta(x,t)$, а вместо суммирования по j — интеграл

$$L = \int\limits_0^L \left(\frac{\mu}{2}\left(\frac{\partial\eta}{\partial t}\right)^2 - \frac{Y}{2}\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)^2\right)dx.$$

Подынтегральная функция обозначается $\mathcal{L}\Big(\eta,\dfrac{\partial\eta}{\partial x},\dfrac{\partial\eta}{\partial t}\Big)$ и называется *плотностью функции Лагранжа* или *лагранжианом.*

Таким образом, функционал действия для нашей дискретной механической системы, являющейся дискретным аналогом упругого стержня, в пределе при $N\to\infty$ принимает вид

$$S[\eta] = \int\limits_{t_0}^{t_1}\int\limits_0^L \mathcal{L}\Big(\eta,\frac{\partial\eta}{\partial x},\frac{\partial\eta}{\partial t}\Big)\,dx\,dt = \int\limits_{t_0}^{t_1}\int\limits_0^L \left(\frac{\mu}{2}\left(\frac{\partial\eta}{\partial t}\right)^2 - \frac{Y}{2}\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)^2\right)dxdt. \qquad (23)$$

Отметим здесь два важных момента:
(1) от конечного числа материальных точек, пронумерованных с помощью индекса i, мы перешли к «непрерывному семейству» точек, «индексированных» точками x;
(2) переменные x и t входят в плотность Лагранжиана $\mathcal{L}$ «равноправно».

Возникает естественный вопрос, какое отношение к колебаниям стержня имеет функционал 23? Прежде чем обратиться к этому вопросу, мы рассмотрим еще одну задачу из теории колебаний — продольные колебания стержня со свободными концами.

3.4. Колебания стержня со свободными концами.

Дискретная аппроксимация стержня устроена точно также, как и в предыдущем пункте: $N+1$ одинаковый грузик массы $\dfrac{\mu L}{N+1} = \dfrac{\mu\Delta N}{N+1}$, последовательно соединенные N одинаковыми пружинами длины L/N и упругости Y/Δ. Отличие от предыдущего пункта состоит в том, что мы не предполагаем, что грузики с номерами 0 и N фиксированы.

Тогда для грузиков, не находящихся на краю, имеем уравнение

$$\frac{\mu\Delta N}{N+1}\,\ddot{\eta}_j(t) = \frac{Y}{\Delta}\left(\eta_{j+1}(t) - 2\eta_j(t) + \eta_{j-1}(t)\right),$$

где $j = 1, \ldots, N-1$. Перепишем его в виде

$$\frac{\mu N}{N+1}\,\ddot{\eta}_j(t) = \frac{Y}{\Delta^2}\left(\eta_{j+1}(t) - 2\eta_j(t) + \eta_{j-1}(t)\right). \tag{24}$$

В пределе при $N \to \infty$ получаем обычное уравнение колебаний refsterzh-ur

$$\mu\,\frac{\partial^2\eta(x,t)}{\partial t^2} = Y\,\frac{\partial^2\eta(x,t)}{\partial x^2}. \tag{25}$$

Каждый из краевых грузиков подвергается действию только одной пружины и для них имеем уравнения

$$\begin{aligned}\frac{\Delta\mu N}{N+1}\,\ddot{\eta}_0(t) &= \frac{Y}{\Delta}\left(\eta_1(t) - \eta_0(t)\right)\\ \frac{\Delta\mu N}{N+1}\,\ddot{\eta}_N(t) &= -\frac{Y}{\Delta}\left(\eta_N(t) - \eta_{N-1}(t)\right)\end{aligned}$$

При $N \to \infty$ они принимают вид хорошо известных краевых условий для колебаний со свободной границей

$$\frac{\partial\eta}{\partial x}(0,t) = 0 \tag{26}$$

$$\frac{\partial\eta}{\partial x}(L,t) = 0 \tag{27}$$

Кинетическая энергия нашей дискретной системы из пружин и грузиков равна

$$E_{\text{К}} = \sum_{j=0}^{N} \frac{\mu\Delta N}{N+1}\,\frac{\dot{\eta}_j^2}{2}.$$

Потенциальная энергия имеет вид

$$E_{\text{П}} = \frac{Y}{2\Delta}\sum_{j=1}^{N}(\eta_j - \eta_{j-1})^2.$$

Напомним, что в рассматриваемом случае функции $\eta_0(t)$ и $\eta_N(t)$ не являются постоянными.

Таким образом, мы имеем функцию Лагранжа для дискретного аналога упругого стержня

$$L(\eta,\dot{\eta}) = \sum_{j=0}^{N} \frac{\mu\Delta N}{N+1}\,\frac{\dot{\eta}_j^2}{2} - \sum_{j=1}^{N} \frac{Y}{2\Delta}\,(\eta_j - \eta_{j-1})^2,$$

которую удобно переписать в виде

$$L(\eta, \dot{\eta}) = \left(\sum_{j=0}^{N} \frac{\mu\,(N+1)}{N} \frac{\dot{\eta}_j^2}{2} - \sum_{j=1}^{N} \frac{Y}{2\Delta^2} \left(\eta_j - \eta_{j-1}\right)^2 \right) \Delta.$$

Тогда при переходе к пределу при $N \to \infty$ вместо набора функций $\eta_j(t)$ мы получим функцию $\eta(x,t)$, а вместо суммирования по j — интеграл

$$L = \int\limits_0^L \left(\frac{\mu}{2} \left(\frac{\partial \eta}{\partial t}\right)^2 - \frac{Y}{2} \left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2 \right) dx,$$

который, как легко видеть, совпадает с (3).

Таким образом, и для этой системы функционал действия для нашей дискретной механической системы, в пределе при $N \to \infty$ принимает вид (23):

$$S[\eta] = \iint\limits_{t_0\,0}^{t_1\,L} \mathcal{L}\Big(\eta, \frac{\partial \eta}{\partial x}, \frac{\partial \eta}{\partial t}\Big)\, dx\, dt = \iint\limits_{t_0\,0}^{t_1\,L} \left(\frac{\mu}{2} \left(\frac{\partial \eta}{\partial t}\right)^2 - \frac{Y}{2} \left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2 \right) dxdt. \tag{28}$$

3.5. О вариационных принципах для многомерных задач.

Вариационные принципы в задачах математической физики — чрезвычайно обширная область. Мы здесь рассмотрим два очень похожих вариационных принципа.

Первый принцип мы будем рассматривать, как обобщение принципа Гамильтона из механики, и использовать в теории поля.

Он состоит в следующем. Пусть дважды непрерывно дифференцируемая функция $\eta(x,t)$ является решением уравнения (22). Рассмотрим произвольную замкнутую и ограниченную область D содержится в той области, в которой задана функция $\eta(x,t)$. Тогда функция $\eta(x,t)$ является экстремалью функционала

$$S[\eta] = \int\limits_D \left(\frac{\mu}{2} \left(\frac{\partial \eta}{\partial t}\right)^2 - \frac{Y}{2} \left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2 \right) dxdt \tag{29}$$

на пространстве дважды непрерывно дифференцируемых функций, заданных на D, значения которых на на границе ∂D области D совпадают с $\eta|_{\partial D}$.

Тот факт, что этот принцип верен для продольных колебаний упругого стержня тривиальным образом следует из теоремы 3.4 об уравнениях Эйлера—Лагранжа.

Опуская подробности, скажем, что этот вариационный принцип верен для широкого класса задач.

ВСЕ ПО-ДРОБ-НО-СТИ ПРИ-ВЕСТИ СТОИТ

Как мы хорошо знаем, решение уравнения (22) требует задания начальных и краевых условий. Начальные условия — это фиксированные значения функции $\eta(x,t)$ и ее производной $\dfrac{\partial \eta}{\partial t}$ при $t = t_0$, а краевые — зависят от рассматриваемой задачи. Для колебаний стержня с фиксированными концами они имеют вид

$$\eta(0,t) = 0, \eta(L,t) = L,$$

а для колебаний стержня со свободными концами —

$$\frac{\partial \eta}{\partial x}(0,t) = \frac{\partial \eta}{\partial x}(L,t) = 0.$$

Вариационный принцип, о котором мы только что сказали, никак не «чувствует» особенностей краевой задачи. Поэтому для полноты мы приведем формулировки соответствующих вариационных задач.

Так например для стержня с фиксированными концами можно ее сформулировать следующим образом. Пусть функция $\eta(x,t)$ описывает колебания стержня при $t \in [t_0, t_1]$. Тогда функция $\eta(x,t)$ является экстремалью функционала (23) на пространстве функций, совпадающих с $\eta(x,t)$ на границе прямоугольника $[0,L] \times [t_0,t_1]$. Соответствующее пространство вариации состоит из таких функций, которые обращаются в 0 на границе этого прямоугольника.

Для колебаний стержня со свободными концами формулировка несколько иная. Пусть функция $\eta(x,t)$ описывает колебания стержня при $t \in [t_0,t_1]$. Тогда функция $\eta(x,t)$ является экстремалью функционала (23) на пространстве функций, совпадающих с $\eta(x,t)$ на отрезках $[0,L] \times \{t_0\}$ и $[0,L] \times \{t_1\}$, т. е. заданы лишь начальное и конечное положение стержня. Обратим внимание на то, что в этом случае соответствующее пространство вариации состоит из таких функций, которые обращаются в 0 на границе на отрезках $[0,L] \times \{t_0\}$ и $[0,L] \times \{t_1\}$. На оставшейся части границы прямоугольника $[0,L] \times [t_0,t_1]$ значения вариаций могут быть произвольными. Именно отсюда происходят граничные условия

$$\frac{\partial \eta}{\partial x}(0,t) = 0$$
$$\frac{\partial \eta}{\partial x}(L,t) = 0$$

[2]

3.6. Представление колебаний стержня в виде наложения колебаний нескольких гармонических осцилляторов. Для завершения этого параграфа приведем решение системы уравнений (24). Для этого рассмотрим соответствующую функцию Лагранжа

$$L(\eta,\dot\eta) = \sum_{j=1}^{N} \left(\frac{\mu\Delta\,(N+1)}{N}\,\frac{\dot\eta_j^2}{2} - \frac{Y}{2\Delta}\,(\eta_j - \eta_{j-1})^2 \right)$$

и перейдем к нормальным координатам. С определением нормальных координат и процедурой их поиска можно познакомиться по любому учебнику теоретической механики. В данном случае, в качестве нормальных координат можно взять q_j, где

$$\eta_j(t) = \sum_{k=1}^{N} q_k(t)\,\sin\frac{\pi j k}{N+1}, \quad j = 1,\ldots,N.$$

[2]Оказывается, принцип Гамильтона, которому подчиняется дискретный аналог стержня допускает обобщение на уравнение колебаний (22), причем в качестве функционала нужно взять (23).

В данном случае он формулируется следующим образом. Пусть функция $\eta(x,t)$ описывает продольные колебания нашего стержня с закрепленными концами, т. е. $\eta(0,t) = 0$ и $\eta(L,t) = L$. Пусть в момент времени $t = t_1$ стержень находится в положении $\eta_1(x)$, а в момент времени $t = t_2$ — в положении $\eta_2(x)$. Тогда функция $\eta(x,t)$ является экстремалью функционала (23) рассматриваемого на пространстве функций, заданных на прямоугольнике $(x,t) \in [0,L] \times [t_1,t_2]$, значения которых на границе прямоугольника фиксированы и совпадают со значениями функции $\eta(x,t)$: $\eta(0,t) = 0$, $\eta(L,t) = L$, $\eta(x,t_1) = \eta_1(x)$ и $\eta(x,t_2) = \eta_2(x)$.

Обратная замена задается формулой

$$q_k(t) = \frac{2}{N+1} \sum_{j=1}^{N} \eta_j(t) \, \sin \frac{\pi j k}{N+1}, \quad k = 1, \ldots, N..$$

Тогда функция Лагранжа принимает вид

$$L(q, \dot{q}) = \sum_{k=1}^{N} \left(\frac{\mu \Delta \, (N+1)}{N} \, \frac{N+1}{2} \frac{\dot{q}_k^2}{2} - \frac{Y}{2\Delta} \, \frac{N+1}{2} \, 4 \sin^2 \frac{\pi k}{2(N+1)} \, q_k^2 \right).$$

Как нетрудно видеть, при такой замене координат переменные в уравнениях Эйлера—Лагранжа расщепляются:

$$\ddot{q}_k = -\omega_k^2 q_k,$$

где $\omega_k = \dfrac{2}{\Delta} \sqrt{\dfrac{Y(N+1)}{\mu N}} \sin \dfrac{\pi k}{2(N+1)}$, где $k = 1, \ldots, N$. Тем самым, в нормальных координатах колебания стержня являются суперпозицией (наложением) независимых гармонических колебаний. Отметим, что формулы (6), (6) перехода к нормальным координатам аналогичны преобразованию Фурье. В теории поля этот факт также проявляется: после преобразования Фурье или, как принято говорить в физической литературе, в импульсном представлении динамика поля представляется в виде суперпозиции бесконечного числа осцилляторов, проиндексированных точками трехмерного импульсного пространства.

Лекция 4. Теорема Нетер. Законы сохранения

4.1. Однопараметрические группы преобразований. Теорема Нетер. Между симметриями дифференциальных уравнений и законами сохранения имеется тесная связь, в которой обнаруживаются глубокие и нетривиальные закономерности. В случае же когда рассматриваемые уравнения являются уравнениями Эйлера—Лагранжа для подходящего лагранжиана, то указанная связь содержится в теореме Нетер. Ее смысл состоит в том, что каждой s–параметрической симметрии соответствует s независимых законов сохранения.

Теорема Нетер имеет несколько формулировок различной степени общности. Поскольку теорема Нетер крайне важна для релятивисткой теории поля, мы рассмотрим несколько ее вариантов, точнее, два в классической механике и один вариант в механике сплошных сред и теории поля. Под законом сохранения в классической понимается первый интеграл соответствующей системы дифференциальных уравнений. В механике сплошных сред и в теории поля законы сохранения будут иметь несколько иную форму.

Начнем с того, что напомним, какие имеются интегралы в классической механике и при каких условиях они возникают.

4.2. Примеры. Рассмотрим основные примеры законов сохранения из механики: законы сохранения импульса, углового момента и энергии.

Рассмотрим консервативную систему из n материальных точек без связей. В качестве координат $q^1, \ldots, q^{3n}$ выберем декартовы координаты материальных точек $x^1, y^1, z^1, \ldots, x^n, y^n, z^n$. Пусть проекция на какую-либо из осей координат суммы сил, действующих на j–ю точку, равна нулю. Тогда потенциальная энергия $E_{\text{П}}$ и, следовательно, функция Лагранжа $L = E_{\text{К}} - E_{\text{П}}$ не зависят от соответствующей координаты. Отсюда по второму закону Ньютона получаем, что сохраняется проекция импульса j–ой материальной точки на ту же координатную ось. Эта проекция импульса, как нетрудно проверить, равна $\dfrac{\partial(E_{\text{К}} - E_{\text{П}})}{\partial \dot{q}^k}$, где q^k — одна из координат x^j, y^j или z^j, соответствующая направлению проекции.

В общем виде этот факт формулируется в виде следующего утверждения.

Утверждение 4.1. *Если функция Лагранжа не зависит от координаты q^j, то сохраняется соответствующий ей импульс $\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}^j}$, т. е. эта функция постоянна на решениях уравнения Эйлера—Лагранжа.*

Доказательство этого важного факта тривиально. Если $q(t)$ — решение уравнения Эйлера—Лагранжа, то

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j}(q(t), \dot{q}(t), t) = \frac{\partial L}{\partial q^j}(q(t), \dot{q}(t), t),$$

а это равно 0 по условию предложения. □

Напомним, что *моментом импульса* (относительно начала координат) материальной точки называется векторное произведение радиуса–вектора точки на ее импульс, а *моментом силы*, приложенной к ней, называется векторное произведение радиуса–вектора точки на вектор силы.

Как следует из второго закона Ньютона, момент импульса материальной точки не меняется, если равен нулю момент сил, приложенных к ней. Более того, если проекция момента сил на какой–либо вектор равна нулю, то сохраняется проекция на этот вектор углового момента.

Оказывается, сохранение момента импульса или его проекции на какую–либо ось можно вывести из свойств функции Лагранжа с помощью предложения 4.1.

Мы покажем этот факт на примере сферического маятника. Выберем начало радиус–векторов в точке подвеса. Тогда проекция на вертикальную ось момента сил, действующих на грузик, очевидно, равна нулю. Поэтому проекция на вертикальную ось момента импульса грузика является первым интегралом. Как нетрудно подсчитать, она равна $ml^2\dot\varphi\sin^2\theta$.

Напомним, что уравнения движения сферического маятника могут быть получены из функционала действия, соответствующего функции Лагранжа $L = E_{\text{К}} - E_{\text{П}}$, где $E_{\text{П}} = mgl(1 - lg\cos\theta)$ и $E_{\text{К}} = \dfrac{1}{2}\, m\,((l\dot\theta)^2 + (l\sin\theta\dot\varphi)^2)$ (см. пункт 5). Как видно, функция Лагранжа сферического маятника не зависит от φ. Из предложения 4.1 следует, что величина $\sin^2\dot\varphi\,\theta$, отличающаяся от проекции момента импульса на вертикальную ось постоянным множителем, является первым интегралом.

4.3. Однопараметрические группы преобразований, инвариантность функции Лагранжа, первый вариант теоремы Нетер. Напомним, что *однопараметрическая группа преобразований* пространства $\mathbb{R}^n$ — это семейство отображений $\Phi_\tau : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, где $\tau \in \mathbb{R}$, причем

$$\Phi_\sigma \circ \Phi_\tau = \Phi_{\sigma+\tau}$$

и Φ_0 — тождественное отображение. Отметим, что из соотношения

$$\Phi_{-\tau} \circ \Phi_\tau = \Phi_0$$

следует, что для всех $\tau \in \mathbb{R}$ отображения Φ_τ обратимы. Мы будем рассматривать только гладкие однопараметрические группы преобразований $\mathbb{R}^n$, т. е. такие, что отображение $\hat\Phi(\tau, q^1, \dots, q^n) = \Phi_\tau(q^1, \dots, q^n)$, зависящее от $n+1$ переменной, имеет достаточно высокую степень гладкости. В частности, для всех τ отображения Φ_τ являются диффеоморфизмами. Отметим также, что хотя теорема Нетер применима в случае, когда отображение $\hat\Phi$ дважды непрерывно дифференцируемо, в наших основных примерах $\hat\Phi$ является C^∞–дифференцируемым.

Определение 4.1. Диффеоморфизм Φ пространства $\mathbb{R}^n$ *сохраняет* функцию Лагранжа $L(q, \dot q(t), t)$, если для любой кривой $q(t)$ выполнено равенство

$$L(q(t), \frac{d}{dt}\, q(t), t) = L(\Phi(q(t)), \frac{d}{dt}\, \Phi(q(t)), t).$$

По–другому это можно сформулировать следующим образом.

Определение 4.2. Диффеоморфизм Φ *сохраняет* функцию Лагранжа L, если для любой точки $q \in \mathbb{R}^n$, любого вектора $\xi \in T_q\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n$ и любого $t \in R$ выполняется равенство

$$L(q, \xi, t) = L(\Phi(q), d_q\Phi(\xi), t).$$

Здесь $d_q\Phi : T_q\mathbb{R}^n \to T_{\Phi(q)}\mathbb{R}^n$ — дифференциал отображения Φ; он отображает пространство касательных векторов $T_q\mathbb{R}^n$ в точке q в пространство касательных векторов $T_{\Phi(q)}\mathbb{R}^n$ в точке $\Phi(q)$.

Упражнение 2. Доказать равносильность этих определений 4.1 и 4.2.

Упражнение 3. Пусть диффеоморфизм Φ сохраняет лагранжиан L. Доказать, что тогда Φ переводит решения уравнения Эйлера—Лагранжа в себя. Иными словами, если $q(t)$ — решение уравнения Эйлера—Лагранжа, то $\Phi(q(t))$ — также решение.

Однопараметрическая группа преобразований *сохраняет* лагранжиан L, если все отображения Φ_τ сохраняют L.

Координаты точки $\Phi_\tau(q)$ обозначим через $\Phi^1_\tau(q), \ldots, \Phi^n_\tau(q)$. Введем также обозначение $D\Phi(q) = \left.\dfrac{d\Phi_\tau(q)}{d\tau}\right|_{\tau=0}$.

Теорема 4.2 (Э. Нетер). *Пусть функция Лагранжа $L(q, \dot{q}, t)$ дважды непрерывно дифференцируема. Пусть однопараметрическая группа преобразований Φ_τ такова, что функция $\hat{\Phi}$ также дважды непрерывно дифференцируема. Тогда, если Φ_τ сохраняет лагранжиан L, то для соответствующей системы уравнений Эйлера—Лагранжа функция $I(q, \dot{q}, t) = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}}\, D\Phi(q) = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}^k}\, D\Phi^k(q)$ является первым интегралом.*

Доказательство. Пусть $q(t)$ — решение уравнения Эйлера—Лагранжа. Покажем, что величина $I(q(t), \dot{q}(t))$ не зависит от времени. Для упрощения обозначений введем функцию двух переменных $u(t, \tau) = \Phi_\tau q(t) = \hat{\Phi}(\tau, q(t))$. [3] Однопараметрическая группа Φ_τ сохраняет лагранжиан L, поэтому функция $L\left(u(t,\tau), \dfrac{\partial u(t,\tau)}{\partial t}, t\right)$ не зависит от τ. Отсюда получаем равенство

$$0 = \frac{\partial}{\partial \tau} L\left(u(t,\tau), \frac{\partial u(t,\tau)}{\partial t}, t\right) =$$
$$= \frac{\partial L}{\partial q}\left(u(t,\tau), \frac{\partial u(t,\tau)}{\partial t}, t\right)\frac{\partial u(t,\tau)}{\partial \tau} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\left(u(t,\tau), \frac{\partial u(t,\tau)}{\partial t}, t\right)\frac{\partial^2 u(t,\tau)}{\partial \tau \partial t}.$$

Наложенные на однопараметрическую группу Φ_τ условия гладкости гарантируют равенство смешанных производных

$$\frac{\partial^2 u(t,\tau)}{\partial \tau \partial t} = \frac{\partial^2 u(t,\tau)}{\partial t \partial \tau},$$

даже в том случае, когда решение $q(t)$ всего лишь непрерывно дифференцируемо.

Поменяв порядок дифференцирования в $\dfrac{\partial^2 u(t,\tau)}{\partial \tau \partial t}$ и подставив $\tau = 0$, получим

$$\frac{\partial L}{\partial q}(q(t), \dot{q}(t), t)\left.\frac{\partial u(t,\tau)}{\partial \tau}\right|_{\tau=0} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}(q(t), \dot{q}(t), t)\left.\frac{\partial^2 u(t,\tau)}{\partial t \partial \tau}\right|_{\tau=0} = 0. \qquad (30)$$

Теперь вспомним определение функции $u(t, \tau)$, из которого видно, что

$$\left.\frac{\partial u(t,\tau)}{\partial \tau}\right|_{\tau=0} = D\Phi(q(t)).$$

[3] Тогда нетрудно видеть, что $d_{q(t)}\Phi_\tau \dot{q}(t) = \dfrac{\partial u(t,\tau)}{\partial t}$. В самом деле при отображении Φ кривая $q(t)$ переходит в $\Phi(q(t))$. По определению дифференциала отображения вектор $\dfrac{d}{dt}q$ при этом переходит в вектор $\dfrac{d}{dt}\Phi(q(t))$.

Преобразуем первое слагаемое в левой части равенства (30) с помощью уравнения Эйлера—Лагранжа, которому удовлетворяет $q(t)$. Получим

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q}(q(t),\dot q(t),t)\,D\Phi(q(t))+\frac{\partial L}{\partial \dot q}(q(t),\dot q(t),t)\,\frac{d}{dt}\,D\Phi(q(t))=0.$$

Отсюда

$$\frac{d}{dt}\,\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q}(q(t),\dot q(t),t)\,D\Phi(q(t))\right)=0.$$

Это означает, что функция $I(q,\dot q,t)=\dfrac{\partial L}{\partial \dot q}\,D\Phi(q)$ постоянна вдоль решений уравнения Эйлера—Лагранжа. □

Докажем предложение 4.1 с помощью теоремы Нетер 4.2. Нужно предъявить подходящую однопараметрическую группу, сохраняющую функцию Лагранжа. В случае, когда L не зависит от переменной q^j, очевидным образом имеется однопараметрическая группа сдвигов вдоль q^j:

$$\Phi_\tau(q^1,\dots,q^n)=(q^1,\dots,q^{j-1},q^j+\tau,q^{j+1},\dots,q^n),$$

сохраняющая функцию Лагранжа. Применение к ней теоремы Нетер 4.2 как раз дает сохранение $\dfrac{\partial L}{\partial \dot q^j}$. В самом деле, легко проверить, что

$$D\Phi^k(q)=\frac{d}{d\tau}\bigg|_{\tau=0}\Phi^k_\tau(q)=\delta^k_j=\begin{cases}0, & k\neq j,\\ 1, & k=j.\end{cases}$$

По теореме Нетер 4.2 первым интегралом является функция $\dfrac{\partial L}{\partial \dot q^k}\,D\Phi^k=\dfrac{\partial L}{\partial \dot q^k}\,\delta^k_j=$ $\dfrac{\partial L}{\partial \dot q^j}$. □

4.4. Инвариантность действия и второй вариант теоремы Нетер.

Одной из наиболее важных сохраняющихся величин является полная энергия. В случае голономных потенциальных систем полная энергия E равна $E_{\text{К}}+E_{\text{П}}$. Из того, что кинетическая энергия является положительно определенной квадратичной формой вектора $\dot q(t)$ нетрудно вывести, что в этом случае полная энергия E также равна $\dfrac{\partial L}{\partial \dot q}\,\dot q-L$.

Теорема 4.3. *Если функция Лагранжа явно не зависит от времени, т. е. $L(q,\dot q,t)=L(q,\dot q)$, то величина $E(q,\dot q)=\dfrac{\partial L}{\partial \dot q}\,\dot q-L$ является первым интегралом.*

Доказательство. Пусть кривая $q(t)$ удовлетворяет уравнению Эйлера—Лагранжа. Продифференцируем функцию $E\big(q(t),\dot q(t)\big)$ по t. Имеем

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\,E\big(q(t),\dot q(t)\big)=&\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q}\big(q(t),\dot q(t)\big)\,\dot q(t)+\frac{\partial L}{\partial \dot q}\big(q(t),\dot q(t)\big)\,\ddot q(t)-\\ &-\frac{d}{dt}L\big(q(t),\dot q(t)\big)=\\ =&\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q}\big(q(t),\dot q(t)\big)\,\dot q(t)+\frac{\partial L}{\partial \dot q}\big(q(t),\dot q(t)\big)\,\ddot q(t)-\\ &-\frac{\partial L}{\partial q}\big(q(t),\dot q(t)\big)\,\dot q(t)-\frac{\partial L}{\partial \dot q}\big(q(t),\dot q(t)\big)\,\ddot q(t).\end{aligned}$$

Здесь второе и четвертое слагаемые отличаются знаком, а первое и третье сокращаются в силу уравнения Эйлера—Лагранжа, откуда $\dfrac{d}{dt}E(q(t),\dot q(t)) = 0$. $\square$

Сохранение полной энергии связано с действием подходящей однопараметрической группы преобразований. А именно, такой группой является группа сдвигов времени

$$\Phi_\tau q(t) = q(t+\tau)$$

Заметим, что если функция Лагранжа не зависит явно от времени, то все равно она, вообще говоря, не сохраняется под действием этих преобразований:

$$L(q(t),\dot q(t)) \neq L(q(t+\tau),\dot q(t+\tau)).$$

Тем не менее, сохранение полной энергии связано именно с этой группой преобразований. Но чтобы установить эту связь нам придется более внимательно отнестись к условиям теоремы Нетер и к величине, которая сохраняется под действием однопараметрической группы преобразований. Обратим внимание вот на какое обстоятельство. Если $q(t)$ является решением автономной системы дифференциальных уравнений (т. е. такой системы, в которой нет явной зависимости от t), то $q(t+\tau)$ также является решением этой системы. Но при этом если начальные условия для первого решения задаются в точке t_0, то для второго решения такие же условия выполняются в точке $t_0-\tau$. Остается отметить еще один факт. Уравнения Эйлера—Лагранжа однозначно определяются функций Лагранжа, но не наоборот. Более точно, несколько функций Лагранжа могут задавать один и тот же функционал действия. Поэтому вместо инвариантности функции Лагранжа можно посмотреть, не окажется ли инвариантным функционал действия — это условие более слабое, чем инвариантность функции Лагранжа. Легко видеть, что если функция Лагранжа не зависит от времени явно, то величина

$$S(\tau) = \int\limits_{t_0-\tau}^{t_1-t} L(q(t+\tau),\dot q(t+\tau))\,dt$$

не зависит от τ. В теореме Нетер, о которой речь пойдет дальше, рассматриваются инвариантность функционалов именно в такой форме, когда меняется функция и когда меняется область интегрирования в функционале действия. Об этом речь пойдет позже, а сейчас вычислим производную $\left.\dfrac{d}{d\tau}\right|_{\tau=0} S_\tau$ приравняем ее 0. При этом мы структуру вычислений сделаем такой, чтобы она обобщалась на общий случай.

В выражение для $S(\tau)$ переменная τ входит несколько раз и разными способами. А именно, от τ зависят как пределы интегрирования, так и подынтегральное выражение. Введем для удобства функцию

$$S(\tau,\sigma) = \int\limits_{t_0-\tau}^{t_1-t} L(q(t+\sigma),\dot q(t+\sigma))\,dt$$

Тогда, как нетрудно видеть,

$$\frac{d}{d\tau}S(\tau) = \left.\left(\frac{\partial}{\partial\tau}S(\tau,\sigma) + \frac{\partial}{\partial\sigma}S(\tau,\sigma)\right)\right|_{\tau=\sigma}.$$

В частности,
$$\frac{d}{d\tau}\bigg|_{\tau=0} S(\tau) = \left(\frac{\partial}{\partial\tau}S(\tau,0) + \frac{\partial}{\partial\tau}S(0,\tau)\right)\bigg|_{\tau=0}.$$

Таким образом,

$$\frac{d}{d\tau}S(\tau)\bigg|_{\tau=0} = \frac{d}{d\tau}\bigg|_{\tau=0}\int\limits_{t_0-\tau}^{t_1-\tau} L(q(t),\dot q(t))\,dt + $$
$$+\frac{d}{d\tau}\bigg|_{\tau=0}\int\limits_{t_0}^{t_1} L(q(t+\tau),\dot q(t+\tau))\,dt.$$

Первое слагаемое в этой сумме легко вычисляется дифференцированием по верхнему и нижнему пределам. Но для дальнейшего нам будет удобно поступить несколько иначе. А именно, сделаем замену переменных t на $t-\tau$, чтобы область интегрирования не зависела от τ. Получим

$$\int\limits_{t_0}^{t_1} L(q(t-\tau),\dot q(t-\tau))\,dt$$

Продифференцировав по τ и положив $\tau=0$, получим

$$-\int\limits_{t_0}^{t_1}\left(\frac{\partial}{\partial q}L(q(t),\dot q(t))\,\dot q(t) + \frac{\partial}{\partial \dot q}L(q(t),\dot q(t))\,\ddot q(t)\right)\,dt,$$

что, как нетрудно видеть является интегралом от полной производной, взятым со знаком минус:
$$-\int\limits_{t_0}^{t_1}\frac{d}{dt}L(q(t),\dot q(t))\,dt.$$

Оставим первое слагаемое в таком виде и преобразуем второе.

$$\frac{d}{d\tau}\bigg|_{\tau=0}\int\limits_{t_0}^{t_1} L(q(t+\tau),\dot q(t+\tau))\,dt = \int\limits_{t_0}^{t_1}\left(\frac{\partial}{\partial q}L(q(t),\dot q(t)\,\dot q(t) + \frac{\partial}{\partial \dot q}L(q(t),\dot q(t)\,\ddot q(t)\right)\,dt$$

Теперь предположим, что $q(t)$ — решение уравнение Эйлера—Лагранжа. Тогда первое слагаемое в подынтегральном выражении можно заменить на $\left(\dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L(q(t),\dot q(t)}{\partial \dot q}\right)\,\dot q(t)$. Получим
$$\int\limits_{t_0}^{t_1}\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot q}L(q(t),\dot q(t))\,\dot q(t) + \frac{\partial}{\partial \dot q}L(q(t),\dot q(t)\,\ddot q(t)\right)\,dt,$$

что, как нетрудно видеть, равно

$$\int\limits_{t_0}^{t_1}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial \dot q}L(q(t),\dot q(t)\,\dot q(t))\,\dot q(t)\right)\,dt.$$

Итак,

$$0 = \frac{d}{d\tau}\bigg|_{\tau=0} S(\tau) = \int\limits_{t_0}^{t_1} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial \dot q} L(q(t), \dot q(t)\, \dot q(t))\, \dot q(t) - L(q(t), \dot q(t))\right) dt.$$

В силу того, в этом равенстве пределы интегрирования произвольны, подынтегральное выражение равно 0, т. е. функция

$$\frac{\partial L}{\partial \dot q}\, \dot q - L(q, \dot q)$$

постоянна на решении уравнения Эйлера—Лагранжа. □

Имеет место также следующее интересное утверждение в каком–то смысле являющееся аналогом теоремы Нётер.

Напомним обозначение

$$D = \frac{d}{dt}\bigg|_{\tau=0}.$$

Утверждение 4.4. *Пусть функция $q(t)$ является решением уравнений Эйлера—Лагранжа и существует функция $f_q(t)$ такая, что выполняется равенство $DL\left(\Phi_\tau q(t), \frac{d}{dt}\Phi_\tau q(t)\right) = \frac{d}{dt} f_q(t)$. Тогда величина*

$$I(q, \dot q) = \frac{\partial L}{\partial \dot q}\, D\Phi(q) - f_q(t)$$

постоянна вдоль решения $q(t)$, т. е. не зависит от t.

Доказательство. Продифференцируем по τ функцию $L\left(\Phi_\tau q(t), \frac{d}{dt}\Phi_\tau q(t)\right)$ и подставим $\tau = 0$. Получим

$$\frac{d}{d\tau}\bigg|_{\tau=0} L\left(\Phi_\tau q(t), \frac{d}{dt}\Phi_\tau q(t)\right) = \frac{\partial L(q(t), \dot q(t))}{\partial q}\, D\Phi q(t) + \frac{L(q(t), \dot q(t))}{\partial \dot q}\, D\Phi \dot q(t).$$

Учитывая, что $q(t)$ удовлетворяет уравнениям Эйлера—Лагранжа, преобразуем первое слагаемое в полученном выражении и получим

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L(q(t), \dot q(t))}{\partial \dot q}\, D\Phi q(t) + \frac{L(q(t), \dot q(t))}{\partial \dot q}\, D\Phi \dot q(t) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L(q(t), \dot q(t))}{\partial \dot q}\, D\Phi q(t)\right).$$

Таким образом, вдоль решения выполняется равенство

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L(q(t), \dot q(t))}{\partial \dot q}\, D\Phi q(t)\right) = \frac{d}{dt} f_q(t),$$

что и требовалось. □

Пример. Рассмотрим однопараметрическую группу $\Phi_\tau q(t) = q(t+\tau)$. Пусть функция Лагранжа не зависит явно от t. Легко видеть, что тогда

$$DL(\Phi_\tau q(t), \frac{d}{dt}\Phi_\tau q(t)) = \frac{d}{d\tau}\bigg|_{\tau=0} L(q(t+\tau), \dot q(t+\tau)) =$$
$$= \frac{\partial L}{\partial q}(q(t), \dot q(t))\, \dot q + \frac{\partial L}{\partial \dot q}(q(t), \dot q(t))\, \ddot q = \frac{d}{dt} L(q(t), \dot q(t)).$$

Пусть $f_q(t) = L(q(t), \dot q(t))$. Тогда по предложению 4.4 величина $\dfrac{\partial L}{\partial \dot q}\dot q - L$, т. е. полная энергия, постоянна вдоль решений уравнения Эйлера—Лагранжа.

4.5. Теорема Нетер в механике сплошных сред.

Для уравнений, происходящих из многомерных вариационных функционалов, к которым, в частности, относятся уравнения теории поля, законы сохранения имеют другой вид. Если для классических механических систем законы сохранения состоят в существовании первых интегралов, т. е. функций $I(q, \dot q, t)$, постоянных на траекториях, то в многомерном случае речь идет о функциях $J^\mu(\eta, \partial\eta, x)$, для которых на любом решении уравнения Эйлера—Лагранжа выполняется равенство $\partial_\mu J^\mu = 0$. Как мы увидим ниже, в том случае, когда одна из пространственных переменных имеет смысл времени, то в теории поля можно предъявить величину, которая не зависит от времени.

Будем рассматривать однопараметрические группы преобразований функций $\eta(x)$. Это означает, что для всех функций $\eta(x)$ рассматриваемого типа и $\tau \in \mathbb{R}$ должны быть заданы функции того же типа $\Phi_\tau\eta(x)$, причем так, чтобы выполнялись обычные свойства:

(i) $\Phi_0\eta(x) = \eta(x)$,

(ii) $\Phi_\tau\Phi_\sigma\eta(x) = \Phi_{\tau+\sigma}\eta(x)$.

Будем рассматривать только гладкие однопараметрические группы, т. е. такие, что отображение $\Phi_\tau\eta(x)$ зависит гладко (по-крайней мере непрерывно дифференцируемо) от переменных $\tau, x^1, \dots, x^n$.

Тот факт, что для инвариантности функционала действия область интегрирования нужно менять, отражается в следующем. Предположим дополнительно, что задана однопараметрическая группа диффеоморфизмов пространства $\mathbb{R}^n$, которую мы обозначим $phi_\tau(x)$. Для удобства координаты точки $phi_\tau(x)$ будем обозначать $\varphi^\mu(\tau, x)$.

Теорема 4.5 (Нетер). *Пусть заданы однопараметрическая группа Φ_τ преобразований полевых функций и однопараметрическая группа $phi_\tau(x)$ диффеоморфизмов пространства $\mathbb{R}^n$. Предположим, что функционал действия, определенный лагранжианом $\mathcal{L}(\eta, \partial eta)$, сохраняется в смысле равенства*

$$\int\limits_U \mathcal{L}(\eta(x), \partial_\mu\eta(x))\, d^n x = \int\limits_{\varphi_\tau(U)} \mathcal{L}(\Phi_\tau\eta(x), \partial_\mu(\Phi_\tau\eta(x)))\, d^n x,$$

справедливого для любого τ и произвольной области интегрирования U.

Тогда для величины

$$j^\mu = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\eta)}\, D\eta + \mathcal{L}\, D\varphi^\mu.$$

на решении уравнения Эйлера—Лагранжа выполняется закон сохранения

$$\partial_\mu j^\mu = 0.$$

Доказательство. Вычислим производную функции

$$S(\tau) = \int\limits_{\varphi_\tau(U)} \mathcal{L}(\Phi_\tau\eta(x), \partial_\mu(\Phi_\tau\eta(x))\, d^n x$$

по τ и приравняем ее к нулю. Так же как и при выводе интеграла энергии выражении для этой производной состоит из двух слагаемых:

$$DS = \frac{d}{d\tau}\bigg|_{\tau=0} \int\limits_{\varphi_\tau^{-1}(U)} \mathcal{L}(\eta(x), \partial_\mu \eta(x)\, d^n x +$$
$$+ \frac{d}{d\tau}\bigg|_{\tau=0} \int\limits_U \mathcal{L}(\Phi_\tau \eta(x), \partial_\mu(\Phi_\tau \eta(x))\, d^n x. \tag{31}$$

Преобразуем их по–отдельности; начнем со второго слагаемого. Имеем

$$\frac{d}{d\tau}\bigg|_{\tau=0} \int\limits_U \mathcal{L}(\Phi_\tau \eta(x), \partial_\mu(\Phi_\tau \eta(x))\, d^n x = \int\limits_U \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta} D\eta + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \eta)} \partial_\mu D\eta \right) d^n x.$$

Предположим теперь, что $\eta(x)$ является решением уравнения Эйлера—Лагранжа. Тогда первое слагаемое подынтегрального выражения можно заменить на

$$\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \eta)} \right) D\eta$$

и привести все выражение к виду интеграла от полной дивергенции

$$\int\limits_U \left(\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \eta)} \right) D\eta + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \eta)} \partial_\mu D\eta \right) d^n x = \int\limits_U \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \eta)} D\eta \right) d^n x$$

Теперь преобразуем в выражении для производной DS первое слагаемое

$$\frac{d}{d\tau}\bigg|_{\tau=0} \int\limits_{\varphi_\tau(U)} \mathcal{L}(\eta(x), \partial_\mu \eta(x)\, d^n x.$$

Для того, чтобы было удобно вычислять производную по τ сделаем замену переменных так, чтобы область интегрирования не менялась. Для удобства в самом интеграле заменим x на y:

$$\int\limits_{\varphi_\tau(U)} \mathcal{L}(\eta(y), \frac{\partial \eta(y)}{\partial y^\mu})\, d^n y,$$

а теперь сделаем замену $y = \varphi_\tau(x)$. Тогда наш интеграл примет вид

$$\int\limits_U \mathcal{L}\left(\eta(\varphi_\tau(x)), \frac{\partial \eta}{\partial y^\mu}(\varphi_\tau(x)) \right) \left| \det \frac{\partial \varphi_\tau}{\partial x} \right| d^n x,$$

Напомним, что при $\tau = 0$ диффеоморфизм φ_τ тождественный, а соответствующий якобиан замены координат равен 1.

Дифференцируя этот интеграл по τ и полагая $\tau = 0$ получаем выражение

$$\int\limits_U \frac{\partial}{\partial \eta} \mathcal{L}\left(\eta(x), \frac{\partial \eta}{\partial x^\mu}(x) \right) \frac{\partial \eta(x)}{\partial y^\nu} D\varphi^\nu\, d^n x +$$
$$+ \int\limits_U \frac{\partial}{\partial(\partial_\mu \eta)} \mathcal{L}\left(\eta(x), \frac{\partial \eta}{\partial x^\mu}(x) \right) \frac{\partial^2 \eta(x)}{\partial^y \nu \partial y^\nu} D\varphi^\nu\, d^n x +$$
$$+ \int\limits_U \mathcal{L}\left(\eta(x), \frac{\partial \eta}{\partial x^\mu}(x) \right) \frac{d}{d\tau}\bigg|_{\tau=0} \left| \det \frac{\partial \varphi_\tau}{\partial x} \right| d^n x \tag{32}$$

Чтобы закончить преобразование этого выражения нужно вычислить производную определителя Якоби замены координат

$$\left.\frac{d}{d\tau}\right|_{\tau=0} \left|\det \frac{\partial\varphi_\tau}{\partial x}\right|$$

Напомним, при $\tau = 0$ матрица Якоби замены координат единичная, поскольку $\varphi_\tau(x) = x$.

Упражнение 4. Пусть элементы матрицы $A(\tau)$ гладко зависят от параметра τ, причем $A(0)$ — единичная матрица. Тогда $\left.\frac{d}{d\tau}\right|_{\tau=0} \det A(t) = \operatorname{tr} A'(0)$.

В нашем случае это равенство принимает вид

$$\left.\frac{d}{d\tau}\right|_{\tau=0} \left|\det \frac{\partial\varphi_\tau}{\partial x}\right| = \frac{D\partial\varphi^\nu}{\partial x^\nu} = \frac{\partial}{\partial x^\nu} D\varphi^\nu$$

Подставив полученное выражение в (32), получим, что под знаком интеграла стоит полная дивергенция:

$$\int\limits_U \frac{\partial}{\partial\eta}\mathcal{L}\left(\eta(x), \frac{\partial\eta}{\partial x^\mu}(x)\right) \frac{\partial\eta(x)}{\partial^\nu}\, D\varphi^\nu\, d^n x +$$

$$+ \int\limits_U \frac{\partial}{\partial(\partial_\mu\eta)}\mathcal{L}\left(\eta(x), \frac{\partial\eta}{\partial x^\mu}(x)\right) \frac{\partial^2\eta(x)}{\partial x^\nu\partial x^\nu}\, D\varphi^\nu\, d^n x +$$

$$+ \int\limits_U \mathcal{L}\left(\eta(x), \frac{\partial\eta}{\partial x^\mu}(x)\right) \frac{\partial}{\partial x^\nu} D\varphi^\nu\, d^n x = \tag{33}$$

$$= \int\limits_U \partial_\nu \left(\mathcal{L}\left(\eta(x), \partial\eta(x)\right)\, D\varphi^\nu\right)\, d^n x \tag{34}$$

Тем самым, первое слагаемое в (31) всегда имеет вид полной дивергенции, а второе — только если $\eta(x)$ является решением уравнения Эйлера—Лагранжа.

Таким образом, для j^μ, определенного в формулировке теоремы формулой

$$j^\mu = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\eta)}\, D\eta + \mathcal{L}\, D\varphi^\mu,$$

на решении уравнения Эйлера—Лагранжа имеет место равенство

$$\int\limits_U \partial_\mu j^\mu\, d^n x = \left.\frac{d}{d\tau}\right|_{\tau=0} S(\tau) = 0.$$

В силу произвольности области U отсюда следует, что

$$\partial_\mu j^\mu = 0,$$

справедливое на решениях уравнения Эйлера—Лагранжа. □

Можно также доказать аналог предложения 4.4.

Утверждение 4.6. *Пусть задана однопараметрическая группа Φ_τ преобразований функций $\eta(x)$. Пусть функция $\eta(x)$ является решением уравнения*

Эйлера—Лагранжа, причем для нее существует вектор-функция $f^\mu(x)$ такая, что справедливо равенство

$$\left.\frac{d}{d\tau}\right|_{\tau=0} \mathcal{L}(\Phi_\tau\eta(x), \partial_\mu\Phi_\tau\eta(x)) = \partial_\mu f^\mu(x).$$

Тогда для величины $j^\mu = \dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\eta)}\, D\Phi\eta(x) - f^\mu$ *на* $\eta(x)$ *выполняется соотношение* $\partial_\mu j^\mu = 0$.

Доказательство. Достаточно показать, что вдоль решения $\eta(x)$ выполняется соотношение

$$\left.\frac{d}{d\tau}\right|_{\tau=0} \mathcal{L}(\Phi_\tau\eta(x), \partial_\mu\Phi_\tau\eta(x)) = \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\eta)}\, D\Phi\eta\right).$$

Имеем очевидное равенство

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{d\tau}\mathcal{L}(\Phi_\tau\eta(x), \partial\Phi_\tau\eta(x)) = \\
&= \frac{\partial}{\partial\eta}\mathcal{L}(\Phi_\tau\eta(x), \partial\Phi_\tau\eta(x))\, \frac{\partial}{\partial\tau}\Phi_\tau\eta(x) + \frac{\partial}{\partial(\partial_\mu\eta)}\mathcal{L}(\Phi_\tau\eta(x), \partial\Phi_\tau\eta(x))\, \frac{\partial}{\partial\tau}\partial_\mu\Phi_\tau\eta(x).
\end{aligned}$$

Отображение $\Phi_\tau\eta(x)$ зависит от τ и x гладко, поэтому $\dfrac{\partial}{\partial\tau}\partial_\mu\Phi_\tau\eta(x) = \dfrac{\partial}{\partial x^\mu}\dfrac{\partial}{\partial\tau}\Phi_\tau\eta(x)$. Воспользуемся этим соотношением и подставим в равенство $\tau = 0$, получим

$$\begin{aligned}
&\left.\frac{d}{d\tau}\right|_{\tau=0} \mathcal{L}(\Phi_\tau\eta(x), \partial\Phi_\tau\eta(x)) = \\
&= \frac{\partial}{\partial\eta}\mathcal{L}(\eta(x), \partial\eta(x))\, \left.\frac{\partial}{\partial\tau}\right|_{\tau=0} \Phi_\tau\eta(x) + \frac{\partial}{\partial(\partial_\mu\eta)}\mathcal{L}(\eta(x), \partial\eta(x))\, \partial_\mu \left.\frac{\partial}{\partial\tau}\right|_{\tau=0} \Phi_\tau\eta(x).
\end{aligned}$$

Пусть $\eta(x)$ — решение уравнения Эйлера—Лагранжа, тогда полученное равенство можно переписать в виде

$$\begin{aligned}
&\left.\frac{d}{d\tau}\right|_{\tau=0} \mathcal{L}(\Phi_\tau\eta(x), \partial\Phi_\tau\eta(x)) = \\
&= \partial_\mu\frac{\partial}{\partial(\partial_\mu\eta)}\mathcal{L}(\eta(x), \partial\eta(x))\, \left.\frac{\partial}{\partial\tau}\right|_{\tau=0} \Phi_\tau\eta(x) + \frac{\partial}{\partial(\partial_\mu\eta)}\mathcal{L}(\eta(x), \partial\eta(x))\, \partial_\mu \left.\frac{\partial}{\partial\tau}\right|_{\tau=0} \Phi_\tau\eta(x) = \\
&= \partial_\mu\left(\frac{\partial}{\partial(\partial_\mu\eta)}\mathcal{L}(\eta(x), \partial\eta(x))\, \left.\frac{\partial}{\partial\tau}\right|_{\tau=0} \Phi_\tau\eta(x)\right),
\end{aligned}$$

что и требовалось. □

4.6. Стационарное действие и теория поля. Лагранжев формализма в теории поля похож на лагранжев формализм в теории поля, но имеет свои отличительные черты.

Прежде всего, вариационный принцип будет применяться к пространству функций, заданных на четырехмерном вещественном линейном пространстве M^4. На этом пространстве рассмотрим функции, на бесконечности стремящиеся к нулю вместе со своими производными.

Тогда на пространстве таких функций можно рассматривать функционал вида

$$S[u(x)] = \int \mathcal{L}(u(x), \partial_\mu u(x))\, d^4x.$$

Соответствующее уравнение Эйлера—Лагранжа, как нетрудно видеть, имеет вид

$$\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu u)} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u}$$

Полезное изменение касается теоремы Нетер. Благодаря особой форме области интегрирования, из нее можно получить важное следствие.

Напомним, что при выборе ортонормированного базиса в пространстве Минковского, т. е. инерциальной системы отсчета, имеет смысл говорить о времени и о пространственных координатах. А именно, координата x^0 отвечает за время, а оставшиеся три координаты x^1, x^2, x^3 — пространственные.

Напомним, что если выполняются условия теоремы Нетер 4.5, то имеется четырехмерный вектор — ток Нетер — j^μ, для которого выполнено равенство $\partial_\mu j^\mu = 0$. Используя особую форму области интегрирования, мы сейчас докажем простое следствие из этого факта, которое имеет более привычную форму — сохранение некоторой величины, т. е. независимость ее от времени x^0.

Следствие 4.7. *Пусть область интегрирования совпадает с $\mathbb{R}^4$, в котором выбрана ортонормированная система координат. Пусть выполнены условия теоремы Нетер и j^μ — соответствующий ток Нетер. Тогда величина $Q = \int j^0 d^1x d^3x d^2x = \int j^0 d^3\mathbf{x}$ не зависит от x^0.*

Замечание. При другом выборе ортонормированного базиса Q изменится.

Доказательство. Зафиксируем $x_1^0 < x_2^0$. Докажем, что $Q(x_1^0) = Q(x_2^0)$. Рассмотрим в M^4 область U, заданную неравенствами $x_1^0 \le x^0 \le x_2^0, \|\mathbf{x}\| \le R$. Применим формулу Стокса к вектору j^μ и к поверхности:

$$\int d^4x \partial_\mu j^m u = \int \partial U j \cdot \mathbf{n}\, dS$$

Здесь $\mathbf{n}$ — единичный вектор внешней нормали к поверхности, ограничивающей область U, dS — соответствующий элемент площади. По условию этот интеграл равен 0. Устремим R к бесконечности. Тогда вклад интеграла по боковой поверхности цилиндра (границы области U) стремится к 0, интеграл по одному основанию — к $Q(x_2^0)$, а по другому — к $-Q(x_1^0)$. Их сумма, следовательно, равна 0, откуда $Q(x_1^0) = Q(x_2^0)$. $\square$