Введение в случайные процессы

Madamme Булинская Е.В.

Лекция 1

Третья часть вероятностного цикла — случайные (иначе, вероятностные или стохастические) процессы.

Теория случайных процессов является одной из наиболее быстро развивающихся математических дисциплин, в значительной мере это определяется потребностями практики: физики, химии, биологии, медицины, инженерного дела, страхования, финансовой деятельности и др.

Возникновение понятия случайного процесса связано с именами Колмогорова, Хинчина, Слуцкого, Винера и многих других ученых.

Изучение хаотического движения частиц цветочной пыльцы в жидкости (броуновского движения), исходя из теоретико-вероятностных предпосылок, было проведено Эйнштейном и Смолуновским в 1905 г. и способствовало возникновению процесса, который часто называют также винеровским. Тот же процесс был введен Ботелье в 1900 г. для описания цен.

Появление пуассоновского процесса связано с работами Эрланге по изучению загрузки телефонных сетей, а также с математическими моделями, введенными Лундбергом для описания деятельности страховых компаний.

(Более подробно об истории случайных процессов можно прочитать в дополнении к книге Б.В. Гнеденко "Курс теории вероятностей"изд. 6,1988, М: Наука).

Во всех дальнейших рассмотрениях бедем предволагать, что задано некоторое основное *вероятностное пространство* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

$\Omega = \{\omega\}$ — *пространство элементарных событий.*

$\mathcal{F}$ — *σ-алгебра* событий (или измеримых множеств), т.е. система подмножеств пространства Ω, замкнутая относительно операций дополнения и счетного объединения.

Пара $(\Omega, \mathcal{F})$ называется *измеримым пространством.* Если пространство Ω — конечно или счетно (т.е. дискретно), $\mathcal{F}$ состоит из всех подмножеств Ω.

P — *вероятность*, т.е. неотрицательная счетно-аддитивная функция множеств (мера), заданная на $\mathcal{F}$, и удовлетворяющая условию нормировки $P(\Omega) = 1$.

Мера называется *полной*, если любое подмножество множества нулевой меры измеримо (и следовательно, имеет меру 0).

Задача. Показать, что любая неполная мера P может быть пополнена.

Рассмотрим произвольное отображение $X : \Omega \to \mathfrak{X}$. С ним связаны две σ-алгебры:

$$\mathcal{F}'_X = \{B \subset \mathfrak{X}\colon X^{-1}(B) \in \mathcal{F}\} \text{ и } \mathcal{F}_X = \{X^{-1}(B)\colon B \in \mathcal{F}'_X\} \supset \mathcal{F},$$

(то, что это σ-алгебры, вытекает из сохранения теоретико-множественных операций при взятии прообраза).

Пусть задано некоторое измеримое пространство $(\mathfrak{X}, \mathcal{B})$, т.е. выделена σ-алгебра $\mathcal{B}$ подмножеств $\mathfrak{X}$.

Определение. Отображение $X\colon \Omega \to \mathfrak{X}$ называется *случайным элементом* со значениями в измеримом пространстве $(\mathfrak{X}, \mathcal{B})$, если $\mathcal{B} \subset \mathcal{F}_X$.

Иными словами, отображение X является $\mathcal{F} \setminus \mathcal{B}$-измеримым, т.е. для любого $B \in \mathcal{B}$ имеем $X^{-1}(B) \in \mathcal{F}$.

Замечание. Если некоторый класс множеств M порождает $\mathcal{B}$, т.е. $\mathcal{B} = \sigma\{M\}$, то для того, чтобы установить, что X — случайный элемент со значениями в $(\mathfrak{X}, \mathcal{B})$, достаточно проверить, что $M \subset \mathcal{F}'_X$ (тогда и $\sigma\{M\} \subset \mathcal{F}'_X$).

Любое отображение $X\colon \Omega \to \mathfrak{X}$ позволяет задать вероятностную меру $P_X = PX^{-1}$ на σ-алгебре $\mathcal{F}'_X$ (с помощью соотношения $P_X(B) = P(X^{-1}(B))$ для $B \in \mathcal{F}'_X$).

Если X — случайный элемент со значениями в $(\mathfrak{X}, \mathcal{B})$, то P_X называется *распределением* этого случайного элемента.

Заметим, что распределение с.э. — это, вообще говоря, мера, заданная для более широкого класса множеств, чем $\mathcal{B}$, причем этот класс зависит от вида отображения X.

Частные случаи:

(1) Если $\mathfrak{X} = \mathbb{R}^1$, $\mathcal{B} = \mathfrak{B}^1$ (борелевская σ-алгебра), то случайный элемент со значениями в $(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B})$ — это обычная случайная величина.

(2) Если $\mathfrak{X} = \mathbb{R}^k$, $\mathcal{B} = \mathfrak{B}^k$, то речь идет о k-мерном случайном векторе.

Задача. Какое свойство пространства $\mathbb{R}^k$ позволяет утверждать, что набор из k случайных величин $(x_1, \ldots, x_k)$ является $\mathcal{F}\setminus\mathfrak{B}^k$-измеримым отображением Ω в $\mathbb{R}^k$.

Далее мы увидим, что случайный процесс также является случайным элементом со значениями в специальным образом выбранном измеримом пространстве.

Определение. Однопараметрическое семейство случайных величин $X = \{X(t), t \in T\}$ называется *случайной функцией.*

Если $T \subset \mathbb{R}^k$, случайная функция называется *случайным полем.*

Если $T \subset \mathbb{R}^1$, то $X = \{X(t), t \in T\}$ — это *случайный процесс.*

В том случае, когда $T \subset \mathbb{R}^1$ конечно или счетно, говорят о случайном процессе с *дискретным временем* (наиболее часто встречающиеся случаи $T = \mathbb{Z}^1$ или $\mathbb{Z}^1_+$) или случайной последовательности. Если $T \subset \mathbb{R}^1$ несчетно, то речь идет о процессе с *непрерывным временем* (обычно, $T = \mathbb{R}^1$ или $\mathbb{R}^1_+$ или $[a, b]$).

Вместо $X(t)$ часто пишут X_t, а желая подчеркнуть, что речь идет о случайных величинах, используют обозначения $X(t, \omega)$ или $X_t(\omega)$.

Таким образом, случайный процесс — это отображение $X : T \times \Omega \to \mathbb{R}^1$, или действительная функция двух переменных, при каждом фиксированном t измеримая по ω.

При фиксированном t получаем функцию ω (случайную величину), которая называется *значением* процесса в точке t (или его сечением).

Если же зафиксировать ω, то полученную функцию t называют *траекторией* процесса (или *реализацией*) или *выборочной функцией*.

Множество $R^T = \{x(t), t \in T\}$ параметра $t \in T$ называется *выборочным пространством*.

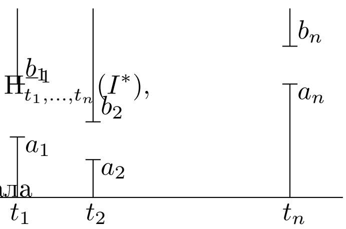
Следовательно, случайный процесс представляет собой отображение $X : \Omega \to R^T$ пространства Ω в выборочное пространство.

Для того, чтобы можно было говорить о случайном элементе, введем в R^T σ-алгебру $\mathfrak{B}^T$ следующим образом.

Определим отображение $\Pi_{t_1,\ldots,t_k} : R^T \to R^k$ соотношением $\Pi_{t_1,\ldots,t_k}(x) = (x(t_1), \ldots, x(t_k))$ для $t_i \in T$, $i = \overline{1, k}$, $k \geq 1$.

Назовем *открытым (n-мерным) интервалом* в R^T множество всех конечных функций $x(t)$, удовлетворяющих конечному числу неравенств $a_i < x(t_i) < b_i$, где a_i, b_i — конечные или бесконечные вещественные числа, $t_i \in T$, $i = \overline{1, n}$, $n \geq 1$.

Иначе, открытый интервал



$$I_{t_1,\ldots,t_n}\{(a_i, b_i),\, i = \overline{1, n}\} = \Pi^{-1}_{t_1,\ldots,t_n}(I^*),$$

где $I^* = (a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \times \cdots \times (a_n, b_n)$ называется *основанием* открытого интервала $\{x(t) : a_i < x(t_i) < b_i,\, i = \overline{1, n}\}$.

Аналогичным образом, множество $I_{t_1,\ldots,t_n}\{[a_i, b_i],\, i = \overline{1, n}\} = \{x(t) : a_i \leq x(t_i) \leq b_i,\, i = \overline{1, n}\}$ называется *замкнутым интервалом* (здесь величины a_i и b_i конечны), при этом его можно записать в виде $\Pi^{-1}_{t_1,\ldots,t_n}(I^*)$, где $I^* = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$.

Просто *интервал* мы получаем, если возможны любые комбинации знаков $<$ и $\leq$ (там, где стоит $\leq$, числа конечны). Открытый интервал является *топологической окрестностью* для каждой из своих точек. В топологии, индуцированной такими окрестностями, последовательность точек x_n из R^T сходится к x, если $x_n(t) \to x(t)$ для любого $t \in T$.

Конечные суммы непересекающихся интервалов образуют, как нетрудно проверить, алгебру $\mathfrak{A}$ подмножеств R^T.

Наименьшую σ-алгебру $\mathfrak{B}^T = \sigma\{\mathfrak{A}\}$, порожденную алгеброй $\mathfrak{A}$, будем называть *борелевской.*

Задача. Показать, что иначе $\mathfrak{B}^T$ может быть определена как цилиндрическая σ-алгебра, т.е.

$$\mathfrak{B}^T = \sigma\{\Pi^{-1}_{t_1,\dots,t_k} B,\ B \in \mathfrak{B}^k,\ t_i \in T,\ i = \overline{1,k},\ k \geq 1\}.$$

Задача. Проверить, что

$$\mathfrak{B}^T = \bigcup_{\{t_1,t_2,\dots\}\subset T} \mathfrak{B}^{\{t_1,t_2,\dots\}},$$

т.е. борелевские множества описывают поведение функций $x(t)$ не более чем в счетном числе точек.

Задача. Является ли множество непрерывных функций борелевским?

Определение. Случайный процесс — это случайный элемент со значениями в измеримом пространстве $(R^T, \mathfrak{B}^T)$.

Лемма. *Два определения случайного процесса эквивалентны.*

Доказательство. **1.** Пусть $X = \{X(t),\ t \in T\}$ — случайный процесс в смысле первого определения. Покажем, что тогда отображение $X\colon \Omega \to R^T$ будет $\mathcal{F} \setminus \mathfrak{B}^T$-измеримо, т.е. мы будем иметь случайный элемент со значениями в $(R^T, \mathfrak{B}^T)$, или же случайный процесс в смысле второго определения.

Действительно, множество

$$X^{-1}(I_{t_1,\dots,t_n}) = \{(X(t_1),\dots,X(t_n)) \in I^*\},$$

где I^* — это основание интервала $I_{t_1,\dots,t_n}$ (произвольного). Так как $I^* \in \mathfrak{B}^n$, а $(x(t_1),\dots,x(t_n))$ — случайный вектор, то рассматриваемое множество принадлежит σ-алгебре $\mathcal{F}$. Далее, прообраз любых множеств из $\mathfrak{A}$, а значит, и из $\mathfrak{B}^T = \alpha\{\mathfrak{A}\}$ также принадлежит $\mathcal{F}$.

2. Пусть, наоборот, задан случайный элемент X со значениями в $(R^T, \mathfrak{B}^T)$. Положим $X(t) = \Pi_t X$, $t \in T$. Тогда

$$\{\omega\colon X(t) \in B\} = \{\omega\colon X \in \Pi_t^{-1}(B) \in \mathcal{F}\}$$

для $B \in \mathfrak{B}^1$, так как $\Pi_t^{-1}(B)$ — цилиндр (т.е. множество из $\mathfrak{B}^T$), и его прообраз при отображении X измерим. А, значит, $\{X(t),\ t \in T\}$ — случайный процесс в смысле первого определения. □

Итак, какое бы определение случайного процесса мы ни используем, $(X(t_1), \dots, X(t_n))$ при фиксированных $t_i \in T$, $i = \overline{1, n}$, является случайным вектором, а потому индуцирует меру $P_{t_1,\dots,t_n}$ (или $P_X \Pi^{-1}_{t_1,\dots,t_n}$) на $\mathfrak{B}^n$.

Эти меры носят название *конечномерных распределений* случайного процесса.

Очевидно, что семейство конечномерных распределений $\{P_{t_1,\dots,t_n},\ t_i \in T,\ i = \overline{1, n},\ n \geq 1\}$ обладает свойствами *симметрии* и *согласованности*:

(1) Если $(i_1, \dots, i_n)$ — перестановка $(1, 2, \dots, n)$, то для любых $\mathcal{B}_i \in \mathfrak{B}^1$, $i = \overline{1, n}$

$$P_{t_{i_1},\dots,t_{i_n}}(B_{i_1} \times \dots \times B_{i_n}) = P_{t_1,\dots,t_n}(B_1 \times \dots \times B_n).$$

(В самом деле, и правая, и левая части равенства — это вероятность множества $\cap_{i=1}^n \{X(t_i) \in B_i\}$, т.к. пересечение множеств не зависит от порядка, в котором эти множества пересекаются).

(2)

$$P_{t_1,\dots,t_n,t_{n+1}}(B_1 \times \dots \times B_n \times \mathbb{R}^1) = P_{t_1,\dots,t_n}(B_1 \times \dots \times B_n).$$

(это равенство следует из того, что для любого $A \in \mathcal{F}$ верно $A\Omega = A$. Здесь $A = \{X(t_1) \in B_1, \dots, X(t_n) \in B_n\}$ и $\Omega = \{X(t_{n+1}) \in \mathbb{R}^1\}$).

Условия симметрии и согласованности нетрудно переписать в терминах конечномерных функций распределения, взяв $B_i = (-\infty, x_i]$.

Задача. Проверить, что условие симметрии и согласованности в терминах характеристических функций имеют вид:

1) $\varphi_{t_{i_1},\dots,t_{i_n}}(\lambda_{i_1}, \dots, \lambda_{i_n}) = \varphi_{t_1,\dots,t_n}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$.

2) $\varphi_{t_1,\dots,t_n,t_{n+1}}(\lambda_1, \dots, \lambda_n, 0) = \varphi_{t_1,\dots,t_n}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$.

Лемма. *Семейство конечномерных распределений случайного процесса X однозначно определяет меру любого борелевского множества B (т.е. $B \in \mathfrak{B}^T$) выборочного пространства R^T.*

Доказательство. Очевидно, что конечномерные распределения однозначно определяют меру любого интервала в R^T. Используя конечную аддитивность, можно определить меру любого множества A из алгебры $\mathfrak{A}$. Полученная мера, естественно, совпадает с $P_X(A)$ (где P_X — это распределение случайного элемента $X \colon \Omega \to R^T$), поскольку $\mathfrak{A} \subset \mathcal{F}'_X$. Следовательно, мера, построенная по конечномерным распределениям, счетно-аддитивна на $\mathfrak{A}$. А тогда, по теореме Каратеодори, эту меру можно однозначно продолжить на $\mathfrak{B}^T = \sigma\{\mathfrak{A}\}$. $\square$

На практике часто бывает известно только семейство конечномерных распределений. Возникает вопрос о существовании случайного процесса с данными распределениями. Ответ дает знаменитая теорема Колмогорова.

Теорема (Колмогорова). *Для того, чтобы существовал случайный процесс с заданным семейством конечномерных распределений, необходимо и достаточно, чтобы это семейство удовлетворяло условиям симметрии и согласованности.*

Доказательство. Неодходимость условий была проверена выше.

Достаточность. Пусть $T \subset \mathbb{R}^1$ и задано семейство

$$\{F_{t_1,\dots,t_n}(x_1,\dots,x_n),\ t_i \in T,\ i=\overline{1,n},\ n \geq 1\}$$

конечномерных функций распределения, удовлетворяющих условиям:

(1) симметрии

$$F_{t_{i_1},\dots,t_{i_n}}(x_{i_1},\dots,x_{i_n}) = F_{t_1,\dots,t_n}(x_1,\dots,x_n),$$

(2) согласованности

$$F_{t_1,\dots,t_n,t_{n+1}}(x_1,\dots,x_n,+\infty) = F_{t_1,\dots,t_n}(x_1,\dots,x_n).$$

Прежде всего необходимо построить вероятностное пространство.

Положим $\Omega = R^T$ (пространство конечных вещественных функций $\{x(t),\ t \in T\}$), а в качестве $\mathcal{F}$ возьмем $\mathfrak{B}^T$.

В силу условий 1) и 2) мы можем однозначно определить меру любого интервала $I = \Pi^{-1}_{t_1,\dots,t_n}(I^*)$. Так, например, если

$$I^* = (a_1,b_1] \times \dots \times (a_n,b_n],$$

положим $\Pi(I) = P_{t_1,\dots,t_n}(I^*)$, где

$$P_{t_1,\dots,t_n}(I^*) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \sum_{i_1<\dots<i_k} F_{t_1,\dots,t_n}(c_1,\dots,c_n),$$

здесь $c_{i_s} = a_{i_s}$, $s=\overline{1,k}$, и $c_j = b_j$ при $j \neq i_1,\dots,i_k$.

Далее, можно, используя конечную аддитивность, определить меру любого множества из $\mathfrak{A}$.

Для того, чтобы применить теорему Каратеодори, необходимо установить счетную аддитивность построенной меры Π на $\mathfrak{A}$.

Предположим, это доказано, т.е. по конечномерным распределениям удалось однозначно задать меру Π любого множества из $\mathfrak{B}^T$.

Иначе говоря, построено вероятностное пространство $(R^T, \mathfrak{B}^T, \Pi)$, т.е. мера $P = \Pi$. Теперь положим $X(t,\omega) = X(t,x(\cdot)) = x(t)$. Тождественное отображение $X\colon R^T \to R^T$ $\mathfrak{B}^T \setminus \mathfrak{B}^T$-измеримо, т.е. случайный процесс (в смысле второго определения).

Очевидно, что построенный процесс имеет заданные конечномерные распределения.

Отметим, что траектории данного процесса совпадают с элементарными событиями $\omega = x(\cdot)$.

Такой процесс называется *непосредственно заданным.* (Продолжение доказательства в лекции 2). $\square$

Лекция 2

Продолжим доказательство Теоремы Колмогорова.

Осталось проверить счетную аддитивность меры Π на алгебре $\mathfrak{A}$. Поскольку любое множество из $\mathfrak{A}$ — это конечная сумма непересекающихся интервалов и Π — конечно-аддитивна, достаточно проверить, что

$$\Pi(I) = \sum_{k=1}^{\infty} \Pi(I_k), \text{ если } I = I_1 + I_2 + \dots$$

(т.е. интервал $I = I_{t_1,\dots,t_{n_0}}$ есть объединение счетного числа непересекающихся интервалов $I_k = I_{t_1,\dots,t_{n_k}}$, $n_0 \le n_1 \le \dots$, $n_k \to \infty$ при $k \to \infty$; $I_j \cap I_l$, $j \ne l$).

Так как $I \supset I_1 + \dots + I_m$, то в силу конечной аддитивности,

$$\Pi(I) \ge \sum_{k=1}^{m} \Pi(I_k),$$

для любого $m \ge 1$.

Переходя в этом неравенстве к пределу при $m \to \infty$, получим

$$\Pi(I) \ge \sum_{k=1}^{\infty} \Pi(I_k).$$

Предположим, что

$$\Pi(I) = \sum_{k=1}^{\infty} \Pi(I_k) + \alpha,$$

для некоторого $\alpha > 0$, и придем к противоречию.

Положим $A_0 = I$, $A_m = I \setminus (I_1 + \dots + I_m)$, $m \ge 1$.

Очевидно, $A_m = \pi^{-1}_{t_1,\dots,t_m} A^*_m$, где A^*_m — конечная сумма n_m-мерных интервалов (или параллелепипедов из $\mathbb{R}^{n_m}$), являющихся основаниями интервалов, составляющих A_m.

При этом $A_0 \supset A_1 \supset \dots$ и $\Pi(A_m) \ge \alpha$ при всех $m \ge 0$.

В силу свойств конечномерных функций распределения, в том числе непрерывности сверху $F_{t_1,\dots t_{n_m}}$ в любой точке $(x_1, \dots, x_{n_m})$, для произвольного $\varepsilon > 0$ в каждом из составляющих A^*_m параллелепипедов можно найти замкнутый ограниченный параллелепипед, такой, что для их суммы B^*_m верно соотношение $P_{t_1,\dots t_{n_m}}(A^*_m \setminus B^*_m) < \varepsilon/2^{m+1}$.

А это означает, что $\Pi(A_m \setminus B_m) < \varepsilon/2^{m+1}$.

Пусть, далее, $C_m = B_0 B_1 \dots B_m = \pi^{-1}_{t_1,\dots t_{n_m}} C^*_m$, где C^*_m — конечная сумма n_m-мерных замкнутых ограниченных параллелепипедов.

Так как

$$A_m \setminus C_m = A_m \bar{C}_m = A_m(\bar{B}_0 \cup \dots \cup \bar{B}_m) \subset A_0 B_0 \cup \dots \cup A_m B_m,$$

то

$$\Pi(A_m \setminus C_m) \le \sum_{k=0}^{m} \Pi(A_k \bar{B}_k) \le \varepsilon.$$

Отсюда $\Pi(C_m) = \Pi(A_m) - \Pi(A_m \setminus C_m) \ge \alpha - \varepsilon > 0$ (при $\varepsilon < \alpha$).

При любом m множества C_m не пусты, следовательно, из каждого C_m можно выбрать точку x_m, т.е. функцию вида

$$x_m(t) = \begin{cases} y_{m_s}, & t = t_s, \ s = \overline{1, n_m}, \\ 0, & \text{для остальных } t. \end{cases},$$

при этом вектор $(y_{m1}, \dots, y_{mn_m})$ — это точка одного из параллелепипедов, составляющих C^*_m (основание C_m).

Из построения C_m следует, что при фиксированном s последовательности $\{y_{m_s}\}_{m\ge 0}$ — ограничены. С помощью диагональной процедуры можно найти такую последовательность $m_1 < m_2 < \dots$, что $y_{m_k s} \to y_s$, $k \to \infty$, при всех $s = 1, 2, \dots$.

Поскольку $C_0 \supset C_1 \supset \dots$ и все C_m замкнуты, то

$$x(t) = \begin{cases} y_s, & t = t_s, \ s = 1, 2, \dots \\ 0, & \text{для остальных } t. \end{cases},$$

(как точка $\mathbb{R}^T$) принадлежит любому C_m, а, значит, и A_m. А это показывает, что $x \in I$, но $x \notin I_m$, $m \ge 1$, т.е. пришли к противоречию с равенством $I = I_1 + I_2 + \dots$.

Таким образом, счетная аддитивность Π на алгебре $\mathfrak{A}$ доказана, чем и закончено доказательство теоремы Колмогорова.

Задача. Проверить, что аналог теоремы Колмогорова справедлив для случайных функций со значениями в польских пространствах.

Итак, семейство конечномерных распределений, удовлетворяющих условиям симметрии и согласованности, задает случайный процесс. И классификацию процессов можно проводить в соответствии со свойствами их конечномерных распределений.

Познакомимся с некоторыми классами случайных процессов.

(1) **Процессы с независимыми значениями.**

Говорят, что $X = \{X(t),\ t \in T\}$ имеет *независимые значения*, если для любых $t_i \in T,\ i = \overline{1,n},\ n \geq 2$ случайные величины $X(t_1), \ldots, X(t_n)$ (взаимно) независимы.

Нетрудно проверить, что для задания такого процесса достаточно знать лишь одномерные распределения $F_t(x),\ t \in T$. Действительно, полагая

$$F_{t_1,\ldots,t_{n_m}}(x_1, \ldots, x_n) = \prod_{j=1}^{n} F_{t_j}(x_j),$$

получим семейство конечномерных распределений, удовлетворяющих условиям теоремы Колмогорова. Значит, такой процесс действительно существует.

В частности, мы установили существование последовательности независимых случайных величин с заданными функциями распределения, которые использовали при доказательстве ЗБЧ и ЦПТ в курсе теории вероятностей. (Достаточно положить $T = \{1, 2, \ldots\}$).

Если взять $F_t(x) = F(x),\ t \in T$, то получим процесс с независимыми одинаково распределенными значениями.

(2) **Процессы с независимыми приращениями.**

Процесс $X = \{X(t),\ t \in T\}$ имеет *независимые приращения*, если для любых $t_i \in T,\ i = \overline{1,n},\ n \geq 3$ случайные величины $X(t_2) - X(t_1), X(t_3) - X(t_2), \ldots, X(t_n) - X(t_{n-1})$ независимы.

Задача. Что надо знать для того, чтобы построить процесс с независимыми приращениями?

(3) **Стационарные процессы.**

Существуют стационарные процессы в узком и широком смысле.

(a) Процесс $X = \{X(t),\ t \in T\}$ называется *стационарным в узком смысле*, если все его конечномерные распределения не меняются при сдвиге, т.е.

$$\forall t_i \in T,\ t_i + h \in T,\ i = \overline{1,n},\ n \geq 1,\ P_{t_1+h,\ldots,t_n+h} = P_{t_1,\ldots,t_n}.$$

Примером стационарного в узком смысле процесса может служить процесс с независимыми одинаково распределенными значениями.

(b) Процесс $X = \{X(t),\ t \in T\}$ называется *стационарным в широком смысле*, если при сдвиге не меняются его моменты первого и второго порядка, т.е.

$$\forall t \in T,\ s \in T,\ t + h \in T,\ s + h \in T$$

$$a(t+h) = a(t), \qquad R(s+h, t+h) = R(s,t),$$
$$\text{где } a(t) = EX(t), \qquad R(s,t) = EX(s)X(t).$$

Задача. Как между собой связаны классы стационарных в узком и широком смысле процессов?

(4) **Гауссовские (или нормальные) процессы.**

Случайный процесс $X = \{X(t),\ t \in T\}$ называется *гауссовским*, если все его конечномерные распределения гауссовские.

Вспомним, что вектор $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ ***гауссовский***, если его характеристическая функция $\varphi(\lambda) = Ee^{i(\lambda,\xi)}$ (иначе она записывается $\varphi(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = Ee^{i\sum_{j=1}^n \lambda_j \xi_j}$) имеет вид

$$\varphi(\lambda) = Ee^{i(\lambda,a)-1/2(B\lambda,\lambda)}$$

Более подробно можно записать

$$\varphi(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = e^{i\sum_{j=1}^n \lambda_j a_j - 1/2\sum_{j,l=1}^n \lambda_j \lambda_l b_{jl}},$$

где $a = (a_1, \ldots, a_n)$ — вектор математических ожиданий $a_j = E\xi_j$, $j = \overline{1,n}$ и $B = (b_{jl})_{j,l=\overline{1,n}}$ — матрица ковариаций

$$b_{jl} = cov(\xi_j, \xi_l) = E(\xi_j - E\xi_j)(\xi_l - E\xi_l).$$

Задача. Вектор $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ тогда и только тогда гауссовский, если любая линейная комбинация его координат — гауссовская случайная величина.

Задача. Матрица B неотрицательно определена. Если B положительно определена, то распределение вектора ξ имеет плотность

$$p(x_1, \ldots, x_n) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} (\det B)^{-\frac{n}{2}} \exp\left\{ -\frac{1}{2} \sum_{k,j=1}^n B_{kj}(x_k - a_k)(x_j - a_j) \right\}$$

где B_{kj} — это элементы матрицы, обратной к B.

Задача. Если матрица B имеет ранг $r < n$, то с вероятностью 1 вектор ξ принадлежит r-мерному линейному многообразию.

Задача. Если компоненты гауссовского вектора некоррелированы, то они независимы. Это утверждение неверно, если лишь (одномерные) распределения компонент гауссовские.

Теперь сформулируем теорему существования гауссовского процесса.

Теорема. *Для любой действительной функции $a(t)$, $t \in T$, и действительной функции двух переменных $B(s,t)$, $s \in T$, $t \in T$, удовлетворяющей условиям:*

$$1)\ B(s,t) = B(t,s)$$

$$2) \quad \sum_{k,j=1}^{n} B(t_k, t_j) \geq 0$$

для произвольных действительных $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ *и* $t_k \in T$, $k = \overline{1,n}$, $n \geq 1$, *— существует гауссовский процесс* $X = \{X(t),\ t \in T\}$, *для которого* $a(t) = EX(t)$ *и* $B(s,t) = cov(X(s), X(t))$.

Доказательство. Воспользуемся теоремой Колмогорова. А именно, построим семейство конечномерных (гауссовских) распределений и покажем их симметрию и согласованность.

Для произвольных $t_1, \ldots, t_n$ определим характеристическую функцию следующим образом

$$\varphi(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = \exp\left\{ i \sum_{k=1}^{n} \lambda_k a(t_k) - \frac{1}{2} \sum_{k,j=1}^{n} \lambda_k \lambda_j B(t_k, t_j) \right\},$$

Это характеристическая функция гауссовского вектора с математическим ожиданием $(a(t_1), \ldots, a(t_n))$ и матрицей ковариаций $(B(t_k, t_j))_{k,j=\overline{1,n}}$.

Нетрудно видеть, что условия симметрии и согласованности (в терминах характеристических функций) выполнены, а значит, требуемый гауссовский процесс существует. $\square$

Итак, гауссовский процесс задается своими первыми и вторыми моментами.

Рассмотрим два **примера**.

- Пусть $a(t) = 0$, $B(s,t) = \sigma^2 \delta(s,t)$, где $\delta(s,t) = 1$ если $s = t$ и $\delta(s,t) = 0$ при $s \neq t$.

  Очевидно, что такая функция $B(s,t)$ удовлетворяет условиям 1) и 2) предыдущей теоремы. Следовательно, существует гаyусовский процесс, соответствующий этим функциям $a(\cdot)$ и $B(\cdot)$. Значения процесса в различных точках некоррелированы, а поскольку любой из наборов $(X(t_1), \ldots, X(t_n))$ гауссовский, то указанные случайные величины независимы.

  Таким образом, это гауссовский процесс с независимыми (одинаково распределенными) значениями.
- Пусть теперь $T = [0, \infty)$, $a(t) = 0$, $B(s,t) = \min(s,t)$.

  Условие 1 теоремы очевидным образом выполнено.

  Проверим условие 2 неотрицательной определенности. Положим

$$\chi_{(-\infty,t]}(u) = \begin{cases} 1, & u \leq t, \\ 0, & u > t. \end{cases}$$

тогда можно записать

$$\min(s,t) = \int\limits_0^\infty \chi_{(-\infty,s]}(u)\chi_{(-\infty,t]}(u)\,du$$

Следовательно,

$$\sum_{k,j=1}^n \lambda_k\lambda_j B(t_k,t_j) = \sum_{k,j=1}^n \lambda_k\lambda_j \int\limits_0^\infty \chi_{(-\infty,t_k]}(u)\chi_{(-\infty,t_j]}(u)\,du =$$
$$= \int\limits_0^\infty \left(\sum_k^n \lambda_k \chi_{(-\infty,t_k]}(u)\right)^2 du \geq 0$$

и, значит, существует гауссовский процесс с указанными параметрами.

Задача. Проверить, что конечномерные распределения построенного процесса имеют плотность и найти ее явный вид.

Лемма. *Гауссовский процес с параметрами $a(t) = 0$, $B(s,t) = \min(s,t)$, $s,t \geq 0$, удовлетворяет следующим условиям:*

- *Это процесс с независимыми приращениями,*
- *При $s < t$ приращение $X(t)-X(s)$ — это гауссовская случайная величина с нулевым средним и дисперсией $(t-s)$,*
- *$X(0) = 0$.*

Доказательство. При любых $0 \leq t_1 < t_2 < \cdots < t_n$ случайный вектор $(X(t_1),\ldots,X(t_n))$ — гауссовский. Вектор $(X(t_2)-X(t_1), X(t_3)-X(t_2),\ldots,X(t_n)-X(t_{n-1}))$, полученный из предыдущего с помощью линейного преобразования, также гауссовский с параметрами

$$\begin{aligned}
&E(X(t_j)-X(t_{j-1})) = a(t_j)-a(t_{j-1}) = 0,\\
&cov(X(t_j)-X(t_{j-1}), X(t_l)-X(t_{l-1})) =\\
&\qquad = E(X(t_j)-X(t_{j-1}))(X(t_l)-X(t_{l-1})) =\\
&\qquad = EX(t_j)X(t_l) - EX(t_j)X(t_{l-1}) -\\
&\qquad\quad - EX(t_{j-1})X(t_l) + EX(t_{j-1})X(t_{l-1}) =\\
&\qquad = \min(t_j,t_l) - \min(t_j,t_{l-1}) -\\
&\qquad\quad - \min(t_{j-1},t_l) + \min(t_{j-1},t_{l-1}).
\end{aligned}$$

Отсюда следует, что при $l \neq j$ мы имеем

$$cov(X(t_j)-X(t_{j-1}), X(t_l)-X(t_{l-1})) = 0,$$

а при $l = j$ получаем $D(X(t_j)-X(t_{j-1})) = t_j - t_{j-1}$.

Поскольку компоненты гауссовского вектора некоррелированы, они независимы, т.е. условие 1 выполнено.

Справедливость условия 2 вытекает из предыдущих рассуждений. Достаточно взять $n = 2$ и положить $t_1 = s$, $t_2 = t$.

Что касается условия 3, то из того, что $EX(0) = 0$, $DX(0) = 0$, вытекает $X(0) = 0$ почти наверное. □

Задача. (обязательная). Доказать, что процесс, удовлетворяющий условиям 1–3 леммы, является гауссовским с

$$EX(t) = 0 \text{ и } cov(X(s), X(t)) = \min(s, t),\ \ s, t \geq 0.$$

Процесс называется *однородным по времени*, если распределения приращений $X(t) - X(s)$, $s < t$, зависят лишь от разности $t - s$.

Рассмотренный процесс является однородным. Поскольку этот процесс предназначен для описания *броуновского движения*, то естественно потребовать выполнение еще одного условия:

- Все траектории процесса непрерывны.

Процесс, удовлетворяющий условиям 1–4, называется также *стандартным винеровским*, поскольку в указанных условиях процесс изучался Винером в 20-е годы XX века.

Теорема Колмогорова, как мы уже видели, позволяет построить процесс, обладающий свойствами 1–3. Однако множество $C^T \subset R^T$ непрерывных функций не является борелевским ($C^T \notin \mathfrak{B}^T$), поэтому мы не можем не только утверждать, что все траектории процесса непрерывны (или почти все они непрерывны, т.е. $\Pi(C^T) = 1$), но и вообще определить вероятность этого множества (так как оно неизмеримо).

Существует несколько путей преодоления этой трудности. Один из них основан на понятии эквивалентности процессов.

Два случайнх процесса

$$X = \{X(t),\ t \in T\} \text{ и } Y = \{Y(t),\ t \in T\},$$

определенные на одном и том же вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ и имеющие одно и то же параметрическое множество T, называются *эквивалентными*, если $P(X(t) = Y(t)) = 1$ для любого $t \in T$.

Задача. Эквивалентные процессы имеют одинаковые конечномерные распределения. Обратное, вообще говоря, неверно.

Эквивалентный случайный процесс называется также *модификацией* исходного процесса.

Понятие эквивалентности приводит к различным последствиям для процессов с дискретным и с непрерывным временем.

В то время как для процессов с дискретным временем из эквивалентности следует совпадение почти всех траекторий (т.к. $P\{\cap_{t \in T}(X_t = Y_t)\} = 1$, если T счетно), для процессов с непрерывным временем это вовсе не так. А именно, множество совпадающих траекторий может иметь любую меру от 0 до 1 или вообще быть неизмеримым.

Рассмотрим **пример**.

Пусть $T = [0, 1]$, $\Omega = [0, 1]$, $\mathcal{F} = \mathfrak{B}^{[0,1]}$ — борелевская σ-алгебра на $[0, 1]$, а вероятность P — мера Лебега. Положим $X(t, \omega) = 0$ для всех $t \in T$, $\omega \in \Omega$, а $Y(t, \omega) = 1$ при $t = \omega$ и $Y(t, \omega) = 0$ при $t \neq \omega$.

- Очевидно, что эти процессы эквивалентны, т.к. при фиксированном t они отличаются лишь в одной точке ω, но

$$P(X(t) = Y(t),\ t \in [0, 1]) = 0,$$

ни одна из траекторий у двух процессов не совпадает.
- У процесса X все траектории непрерывны, а у Y — разрывны.
- Далее, $\sup\limits_{t \in [0,1]} X(t) = 0$, а $\sup\limits_{t \in [0,1]} Y(t) = 1$ с вероятностью 1.

<u>Задача</u>. Как видоизменить определение процесса Y, чтобы множество совпадающих траекторий X и Y было неизмеримым?

В отличие от дискретного времени, где $\sup_t X_t$, $\inf_t X_t$, $\overline{\lim}_{t \to t_0} X_t$, $\underline{\lim}_{t \to t_0} X_t$ являются случайными величинами, для непрерывного времени это не так. Многие интересные для практики множества не являются борелевскими. В результате их вероятность либо вовсе не задана, либо не определна однозначно конечномерными распределениями.

Итак, обычно вопрос ставится таким образом: существует ли у данного процесса модификация, обладающая нужными нам свойствами (а не так, обладает ли сам рассматриваемый процесс этими свойствами). Исходя из этих соображений, в следующий раз докажем существование винеровского процесса.

Мы увидим, что требование непрерывности накладывает ограничение на конечномерные распределения.

Если рассматривать второе определение случайного процесса (как измеримое отображение из Ω в R^T), мы приходим к изучению свойств траекторий.

Говорят, что $X = \{X(t),\ t \in T\}$ *выборочно непрерывен* (*дифференцируем* или *интегрируем*) в точке ω, если это верно для соответствующей траектории, т.е. функции $X(\cdot, \omega)$ от t.

Процесс *выборочно непрерывен на множестве* $A \in \mathcal{F}$, если траектории непрерывны для всех $\omega \in A$.

В том случае, когда $P(A) = 1$, говорят, что *почти все траектории процесса непрерывны* или процесс *выборочно непрерывен с вероятностью 1*.

Если же исходить из первого определения случайного процесса как кривой в пространстве случайных величин, можно дать 4 определения непрерывности случайного процесса (в соответствии с 4 типами сходимости).

(1) Процесс *непрерывен с вероятностью 1* в точке $t_0 \in T$, если

$$P\left(X(t) \underset{t\to t_0}{\longrightarrow} X(t_0)\right) = 1.$$

(2) Процесс *непрерывен по вероятности* (или *стохастически непрерывен*) в точке t_0, если $P(|X(t) - X(t_0)| \geq \varepsilon)$ при $t \to t_0$ для $\forall \varepsilon > 0$. (Иначе, $X(t) \xrightarrow[t\to t_0]{P} X(t_0)$).

(3) Процесс *непрерывен в среднем квадратичном* в точке t_0, если

$$E(X(t) - X(t_0))^2 \underset{t\to t_0}{\longrightarrow} 0$$

(или $\mathrm{l.i.m}_{t\to t_0} X(t) = X(t_0)$).

(4) Процесс *непрерывен слабо* (или *по распределению*) в точке t_0, если

$$F_t(x) \underset{t\to t_0}{\longrightarrow} F_{t_0}(x)$$

(в точках непрерывности предельного распределения F_{t_0}).

Процесс (в соответствующем смысле) *непрерывен* (или *непрерывен на* T), если указанное свойство непрерывности выполнено в любой точке $t_0 \in T$.

ЗАДАЧА. Как связаны между собой введенные выше 5 свойств непрерывности?

Лекция 3

Напомним, как связаны между собой введенные прошлый раз виды непрерывности случайных процессов:

(0) почти наверное выборочная непрерывность,
(1) непрерывность с вероятностью 1 (для всех t),
(2) стохастическая непрерывность,
(3) среднеквадратичная непрерывность,
(4) непрерывность по распределению.

Чтобы нагляднее была разница между двумя понятиями непрерывности: 0. (выборочная п.н.) и 1. (с вероятностью 1), удобно их описать в отрицательной форме.

$$\begin{tikzcd}[row sep=small] 0 \arrow[r] & 1 \arrow[dr] & & \\ & & 2 \arrow[r] & 4 \\ & 3 \arrow[ur] & & \end{tikzcd}$$

Если $P(X_t \to X_{t_0},\ t \to t_0) \neq 1$, то говорят, что t_0 — *фиксированная точка разрыва.* Точка $t_0 = t_0(\omega)$, не являющаяся фиксированной точкой разрыва, называется *переменной точкой разрыва.*

Таким образом, непрерывность с вероятностью 1 означает отсутствие фиксированных точек разрыва, а почти наверное выборочная непрерывность означает, что за исключением множества траекторий нулевой меры отсутсвуют и переменные точки разрыва.

Теперь приступим к рассмотрению выборочной непрерывности. А именно, докажем необходимые и достаточные условия существования непрерывной модификации. Предположим, что $T = [a, b]$, хотя результат справедлив и для произвольного сепарабельного метрического пространства T.

<u>Теорема</u>. *У случайного процесса $X = \{X_t,\ t \in T\}$ существует эквивалентный ему процесс $Y = \{Y_t,\ t \in T\}$ с непрерывными траекториями тогда и только тогда, когда*

(1) *X стохастически непрерывен на T,*
(2) *почти все траектории X равномерно непрерывны на некотором счетном всюду плотном подмножестве S множества T.*

Доказательство. <u>Необходимость</u>. Пусть существует процесс $Y = \{Y_t,\ t \in T\}$ с непрерывными траекториями, эквивалентный $X = \{X_t,\ t \in T\}$. Так как $T = [a, b]$, то любая непрерывная функция равномерно непрерывна на T. Далее, если $S \subset T$ счетное подмножество, то $P(\cup_{t \in S}\{X_t \neq Y_t\}) = 0$. Иначе говоря, почти все траектории X совпадают на S с траекториями Y, а значит, равномерно непрерывны на S.

Что касается стохастической непрерывности, то это условие, наложенное на двумерные распределения, которые у эквивалентных процессов совпадают.

$$P(|X_t - X_{t_0}| \geq \varepsilon) = P(|Y_t - Y_{t_0}| \geq \varepsilon) \underset{t \to t_0}{\longrightarrow} 0.$$

(Вторая вероятность стремится к нулю, так как из непрерывности траекторий следует стохастическая непрерывность).

<u>Достаточность</u>. Пусть выполнены условия 1 и 2. Пользуясь 2, определим

$$Y_t(\omega) = \begin{cases} \lim\limits_{\substack{t_n \to t \\ t_n \in S}} X_{t_n}(\omega), & \text{если предел существует,} \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Так как почти все траектории X равномерно непрерывны на S, получившийся процесс $Y = \{Y_t,\ t \in T\}$ обладает непрерывными траекториями.

Использование свойства 1. (стохастической непрерывности), позволяет установить эквивалентность X и Y. В самом деле, по построению Y_t, для любого $t \in T$ имеем $P(X_{y_n} \to Y_t,\ t_n \to t,\ t_n \in S) = 1$. А так как из сходимости с вероятностью 1 следует сходимость по вероятности, то $X_{t_n} \xrightarrow{P} Y_t,\ t_n \in S,\ t_n \to t$. С другой стороны, в силу стохастической непрерывности процесса X имееем $X_{t_n} \xrightarrow{P} X_t$. Как известно, предел в смысле сходимости по вероятности единственный (с точностью до эквивалентности). Проверим это. Действительно

$$P(|X_t - Y_t| \geq \varepsilon) \leq P\left(|X_t - X_{t_n}| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right) + P\left(|Y_t - X_{t_n}| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

а это означает, что $P(X_t \neq Y_t) = 0$. □

<u>Задача</u>. Будет ли теорема справедлива, если в условии 2. потребовать просто непрерывность (а не равномерную) на счетном всюду плотном множестве S?

Получим теперь <u>достаточное</u> условие существование непрерывной модификации в терминах конечномерных распределений.

<u>Теорема</u> (Колмогорова). *Пусть $T = [a, b]$ и существуют $\alpha > 0$, $\gamma > 0$ и $c > 0$, что*

$$E|x(t+h) - x(t)|^\alpha \leq c|h|^{1+\gamma}$$

при любых $t, t+h \in T$. Тогда существует эквивалентный процесс $Y = \{Y_t,\ t \in T\}$ с непрерывными траекториями.

Доказательство. Надо проверить свойства 1 и 2 предыдущей теоремы. Условие 1. (стохастическая непрерывность) вытекает из неравенства Чебышева. В самом деле,

$$\forall\varepsilon > 0 \quad P(|X(t+h) - X(t)| \geq \varepsilon) \leq$$
$$\leq \frac{E|X(t+h) - X(t)|^\alpha}{\varepsilon^\alpha} \leq \frac{c}{\varepsilon^\alpha}|h|^{1+\gamma} \underset{h\to 0}{\longrightarrow} 0.$$

При проверке свойства 2. без ограничения общности предположим, что $[a, b] = [0, 1]$. В качестве S возьмем множество двоично-рациональных точек, т.е.

$$S = \left\{\frac{k}{2^n},\ 0 \leq k \leq 2^n,\ n \geq 1\right\}.$$

Далее воспользуемся леммой Бореля-Кантелли. Для этого введем события

$$A_{nk} = \left\{\omega\colon \left|X\left(\frac{k+1}{2^n}\right) - X\left(\frac{k}{2^n}\right)\right| \geq \frac{1}{n^2}\right\},\ k = \overline{0, 2^n - 1},\ n \geq 1.$$

Использование неравенства Чебышева и условий теоремы дает

$$P(A_{nk}) \leq c\frac{n^{2\alpha}}{2^{n(1+\gamma)}}.$$

Следовательно,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{2^n-1} P(A_{nk}) \leq \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{2^n-1} c\frac{n^{2\alpha}}{2^{n(1+\gamma)}} = c\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{2\alpha}}{2^{n\gamma}} < \infty$$

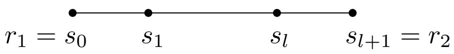
Таким образом, с вероятностью 1 происходит лишь конеченое число событий A_{nk}. Иными словами, для почти всех ω существует $n_0 = n_0(\omega)$ такое, что при любых $n > n_0$ и $k < 2^n$ справедливо неравенство

$$\left|X\left(\frac{k+1}{2^n}\right) - X\left(\frac{k}{2^n}\right)\right| < \frac{1}{n^2}.$$

Рассмотрим далее только такие ω. Для произвольного $\varepsilon > 0$ зададим такое n_1, что

$$2\sum_{n\geq n_1}\frac{1}{n^2} < \varepsilon$$

и положим $\bar{n} = \bar{n}(\omega) = \max(n_0(\omega), n_1)$. Итак, пусть z_1 и z_2 такие двоично-рациональные точки, что $|z_1 - z_2| < 1/2^{\bar{n}}$. Любой двоично-рациональный отрезок можно представить в виде суммы "стандартных"двоично-рациональных отрезков виды $(\frac{k}{2^m}, \frac{k+1}{2^m})$, причем отрезки



каждого ранга (т.е. с соответствующим m) встречаются не более 2 раз, причем ранги всех интервалов не ниже $\bar{n}$. Так как

$$X(r_2) - X(r_1) = (X(r_2) - X(s_l)) + \\ + (X(s_l) - X(s_{l-1})) + \cdots + (X(s_1) - X(r_1)),$$

$$\text{то } |X(r_2) - X(r_1)| \leq \sum_{k=0}^{l}|X(s_{k+1}) - X(s_k)| \leq 2\sum_{n\geq\bar{n}}\frac{1}{n^2} < \varepsilon.$$

Равномерная непрерывность на S почти всех траекторий доказана, а с ней и вся теорема. □

<u>Задача</u>. Проверить, что в теореме Колмогорова, вообще говоря, нельзя понизить показатели справа, положив $\gamma = 0$.

Однако, для гауссовских процессов условия можно ослабить.

<u>Следствие</u>. *Пусть $X = \{X(t),\ t \in [a,b]\}$ — гауссовский процесс с нулевым средним. Тогда, если существуют такие положительные постоянные c и ε, что*

$$D(X(t+h) - X(t)) \leq c|h|^{\varepsilon},$$

то у процесса существует непрерывная модификация.

Доказательство. Рассмотрим гауссовскую случайную величину η с параметрами $(0,\sigma^2)$. Тогда получим

$$E|\eta|^{\alpha} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|x|^{\alpha}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\,dx = \frac{\sigma^{\alpha}}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|y|^{\alpha}e^{-\frac{y^2}{2}}\,dy = k_{\alpha}\sigma^{\alpha}$$

(сделав замену переменных $x/\sigma = y$).

Так как $X(t+h) - X(t)$ гауссовская величина с нулевым средним, то

$$E(X(t+h) - X(t)|^{\alpha} = k_{\alpha}[D(X(t+h) - X(t))]^{\frac{\alpha}{2}} \leq c^{\frac{\alpha}{2}}k_{\alpha}|h|^{\frac{\alpha\varepsilon}{2}}.$$

Очевидно, что можно подобрать α таким образом, чтобы $\frac{\alpha\varepsilon}{2} = 1+\gamma$, где $\gamma > 0$. Следовательно, будет выполнено условие теоремы Колмогорова.

$\square$

<u>Задача</u>. Вычислить k_{α}.

Так как для гауссовского процесса с нулевым средним и ковариационной функцией $\min(s,t)$ имеем $D(X(t+h) - X(t)) = |h|$, то (при $t \in [0,1]$) у него существует непрерывная модификация. Значит, существование винеровского процесса на отрезке $[0,1]$ установлено.

Другой способ построения винеровского процесса, в витде суммы ряда, позволит осуществить такую конструкцию на $[0,\infty)$.

Прежде всего нам понадобится одно интересное свойство гауссовской последовательности.

<u>Лемма</u>. *Пусть $\{\eta_n\}$ — произвольная последовательность гауссовских случайных величин с $E\eta_n = 0$, $D\eta_n = 1$, тогда*

$$P\left(|\eta_n| = O(\sqrt{\ln n})\right) = 1.$$

(эта запись означает, что для почти всех ω существует константа $c = c(\omega)$ и номер $n_0 = n_0(\omega)$ такие, что

$$|\eta_n(\omega)| \leq c(\omega)\sqrt{\ln n}$$

для всех $n \geq n_0(\omega)$. Заметим также, что независимость случайных величин не требуется.)

Доказательство. Для $x > 0$ имеем

$$P(|\eta_n| > x) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_x^\infty e^{-\frac{u^2}{2}}\,du = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_x^\infty \frac{1}{u}\,d\left(-e^{-\frac{u^2}{2}}\right) =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{x} - \int\limits_x^\infty \frac{1}{u^2} e^{-\frac{u^2}{2}}\,du \right) \le \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{x}.$$

Отсюда вытекает, что

$$\sum_{n=1}^\infty P\left(|\eta_n| > c\sqrt{\ln n}\right) \le \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=2}^\infty \frac{n^{-\frac{c^2}{2}}}{c\sqrt{\ln n}} < \infty$$

при $c > \sqrt{2}$.

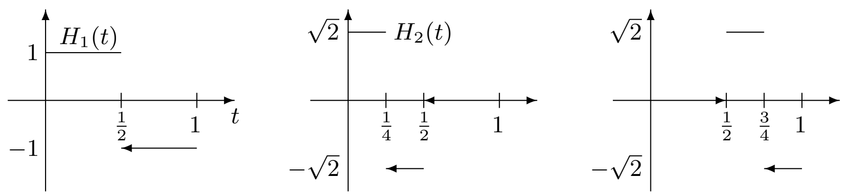
Применяя лемму Бореля-Кантелли, получаем требуемый результат.

□

Рассмотрим далее функции Хаара.

$$H_0(t) = 1,\ t \in [0,1],\ \text{и при } 2^n \le k < 2^{n+1},\ n \ge 0,$$

$$H_k(t) = \begin{cases} 2^{\frac{n}{2}}, & \frac{k-2^n}{2^n} \le t \le \frac{k-2^n+\frac{1}{2}}{2^n}, \\ -2^{\frac{n}{2}}, & \frac{k-2^n+\frac{1}{2}}{2^n} < t \le \frac{k-2^n+1}{2^n}, \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$



Функции $H_n(t)$, $n \ge 0$, образуют полную ортонормированную систему в $L_2[0,1]$, следовательно, любая функция f из этого пространства представима в виде ряда

$$f(t) = \sum_{k=0}^\infty (f, H_k) H_k(t),$$

где скалярное произведение $(f, H_k) = \int_0^1 f(t) H_k(t)\,dt$.

Поэтому для любых $f, g \in L_2[0,1]$ можно записать

$$(f, g) = \sum_{k=0}^\infty (f, H_k)(g, H_k).$$

Введем также функции Шаудера

$$S_k(t) = \int\limits_0^t H_k(u)\,du = (\chi_{[0,t]}, H_k),$$

$$\text{где } \chi_{[0,t]}(u) = \begin{cases} 1, & u \in [0,t] \\ 0, & u > t. \end{cases}$$

Нам понадобится также следующая

<u>Лемма</u>. *Ряд*

$$S(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k S_k(t)$$

сходится равномерно, если $|a_k| = O(k^{\varepsilon})$, $\varepsilon < 1/2$.

Доказательство. Из определения $H_k(t)$ следует, что функции $S_k(t)$ неотрицательны и при $2^n \leq k < 2^{n+1}$ они не превосходят $\frac{1}{2}2^{-\frac{n}{2}}$. Если k меняется в указанных пределах, то у рассматриваемых функцкий непересекающиеся носители. Положим $b_n = \max_{2^n \leq k < 2^{n+1}} |a_k|$. Условие $\sum b_n 2^{-\frac{n}{2}} < \infty$ достаточно для абсолютной и равномерной сходимости ряда $S(t)$. В условиях леммы $|a_k| = O(k^{\varepsilon})$ с $\varepsilon < \frac{1}{2}$, поэтому $|b_n| \leq c2^{n\varepsilon}$, а значит, ряд действительно сходится. □

Теперь получены все предварительные результаты для доказательства следующей теоремы.

<u>Теорема</u>. *Пусть* $\{\xi_n,\ n \geq 0\}$ *— последовательность независимых* $\mathcal{N}(0,1)$ *случайных величин. Тогда ряд*

$$W(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \xi_n S_n(t)$$

с вероятностью 1 сходится равномерно при $t \in [0,1]$ *и задаваемый им случайный процесс является винеровским.*

Предположим, что теорема доказана и получим

<u>Следствие</u>. *Существует винеровский процесс* $W(t)$, $t \geq 0$.

Доказательство. Возьмем независимые последовательности $\{\eta_k^{(n)},\ k \geq 0\}_{n \geq 1}$, состоящие из независимых $\mathcal{N}(0,1)$ случайных величин. По доказанной теореме можно построить (независимые) винеровские процессы $W_{(t)}^{(n)}$

при $t \in [0,1]$. Определим теперь

$$W(t) = \begin{cases} W^{(1)}, & 0 \le t \le 1, \\ W^{(1)}(1) + W^{(2)}(t-1), & 1 \le t \le 2, \\ \dots \end{cases}$$

Нетрудно проверить, что $W(t)$ — винеровский процесс на $[0,\infty)$, пользуясь тем, что сумма независимых нормальных величин нормальна, а функции от независимых случайных величин также независимы. $\square$

Определение. Случайный процесс $\{N(t),\ t \ge 0\}$ называется *пуассоновским*, если выполнены следующие условия:

(1) $N(0) = 0$,
(2) Это процесс с независимыми приращениями.
(3) Приращение $N(t) - N(s)$ при $s < t$ имеет распределение с параметром $\lambda(t-s)$, т.е.

$$P(N(t) - N(s) = k) = \frac{[\lambda(t-s)]^k}{k!} e^{-\lambda(t-s)}.$$

Задача. $N(t) = \max\{k\colon \sum_{i=1}^{k} \xi_i \le t\}$ — пуассоновский процесс, если $\{\xi_n\}$ — последовательности независимых показательных случайных величин с параметром λ.

Лекция 4

Задача. Существует ли у пуассоновского процесса модификация с неубывающими траекториями?

Задача. В каком смысле непрерывен пуассоновский процесс $N(t)$

Задача. Найти $EN(t)$ и $cov(N(s), N(t))$.

Задача. Пусть $\tau_n = \inf\{t\colon N(t) = n\}$, доказать, что $\tau_1, \tau_2 - \tau_1, \dots, \tau_n - \tau_{n-1}, \dots$ — последовательность независимых показательных случайных величин.

Теперь докажем теорему о конструкции винеровского процесса в виде ряда

$$W(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \xi_n S_n(t),$$

где $\{\xi_n,\ n \ge 0\}$ — последовательность независимых $\mathcal{N}(0,1)$ случайных величин, а — функции Шоудера.

Доказательство. Так как по доказанной лемме

$$P(|\xi_n|) = O(\sqrt{\ln n}) = 1,$$

а по другой лемме ряд $\sum a_n S_n(t)$ сходится равномерно, если $|a_n| = O(n^\varepsilon)$ при $\varepsilon < 1/2$, то с вероятностью 1 ряд $\sum \xi_n S_n(t)$ сходится равномерно. Сумма равномерно сходящегося ряда непрерывных функций непрерывна, поэтому требование о непрерывности траекторий выполнено.

Поскольку $S_n(0) = 0$, при всех $n \geq 0$, то $W(0) = 0$.

Проверим, что обладает независимыми приращениями, а любое приращение $W(t) - W(s)$, $s < t$ гауссовское с нулевым средним и дисперсией $t - s$. Для этого покажем, что

$$Ee^{i\sum\limits_{j=1}^{k} \lambda_j (W(t_j) - W(t_{j-1}))} = e^{-1/2\sum\limits_{j=1}^{k} \lambda_j^2 (t_j - t_{j-1})},$$

здесь $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n$.

Для удобства записи положим $\lambda_{k+1} = 0$. Очевидно, что

$$\sum_{j=1}^{k} \lambda_j (W(t_j) - W(t_{j-1})) = \sum_{j=1}^{k} M(t_j)(\lambda_j - \lambda_{j+1}) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \xi_n \sum_{j=1}^{k} (\lambda_j - \lambda_{j+1}) S_n(t_j).$$

Поскольку ряд сходится с вероятностью 1 (а, значит, и слабо), характеристическая имеет вид:

$$Ee^{i\sum\limits_{j=1}^{k} \lambda_j (W(t_j) - W(t_{j-1}))} = \lim_{N\to\infty} Ee^{i\sum\limits_{n=0}^{N} \xi_n \sum\limits_{j=1}^{k} (\lambda_j - \lambda_{j+1}) S_n(t_j)} =$$

В силу независимости $\mathcal{N}(0,1)$ случайных величин ξ_n последнее выражение перепишется следующим образом

$$= \lim_{N\to\infty} \prod_{n=0}^{N} Ee^{i\xi_n \sum\limits_{j=1}^{k} (\lambda_j - \lambda_{j+1}) S_n(t_j)} =$$

$$= \lim_{N\to\infty} \prod_{n=0}^{N} Ee^{-\frac{1}{2}\left(\sum\limits_{j=1}^{k} (\lambda_j - \lambda_{j+1}) S_n(t_j)\right)^2} =$$

$$= \lim_{N\to\infty} Ee^{-\frac{1}{2}\sum\limits_{n=0}^{N}\left(\sum\limits_{j=1}^{k} (\lambda_j - \lambda_{j+1}) S_n(t_j)\right)^2} =$$

$$= \lim_{N\to\infty} Ee^{-\frac{1}{2}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\sum\limits_{j=1}^{k} (\lambda_j - \lambda_{j+1}) S_n(t_j)\right)^2}.$$

Подсчитаем сумму ряда, стоящего в показателе.

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{j=1}^{k}\sum_{l=1}^{k}(\lambda_j-\lambda_{j+1})(\lambda_l-\lambda_{l+1})S_n(t_j)S_n(t_l)=$$
$$\sum_{j=1}^{k}\sum_{l=1}^{k}(\lambda_j-\lambda_{j+1})(\lambda_l-\lambda_{l+1})\sum_{n=0}^{\infty}S_n(t_j)S_n(t_l)=$$

Вспомним, что $S_n(t) =$, следовательно,

$$\sum_{n=0}^{\infty}S_n(t_j)S_n(t_l)=\sum_{n=0}^{\infty}(\chi_{[0,t_j]},H_n)(\chi_{[0,t_l]},H_n)=$$
$$=(\chi_{[0,t_j]},\chi_{[0,t_l]})=\min(t_j,t_l).$$

Таким образом, окончательно можно переписать сумму ряда

$$=\sum_{j=1}^{k}\sum_{l=1}^{k}(\lambda_j-\lambda_{j+1})(\lambda_l-\lambda_{l+1})\min(t_j,t_l)=$$
$$=\sum_{j=1}^{k}t_j(\lambda_j-\lambda_{j+1})^2+2\sum_{j=1}^{k-1}t_j(\lambda_j-\lambda_{j+1})\sum_{l=j+1}^{k}(\lambda_l-\lambda_{l+1})=$$
$$=t_k\lambda_k^2+\sum_{j=1}^{k-1}t_j[\lambda_j^2-2\lambda_j\lambda_{j+1}+\lambda_{j+1}^2+2\lambda_j\lambda_{j+1}-2\lambda_{j+1}^2]=$$
$$=t_k\lambda_k^2+\sum_{j=1}^{k-1}t_j(\lambda_j^2-\lambda_{j+1}^2)=\sum_{j=1}^{k}\lambda_j(t_j-t_{j-1}).$$

Тем самым проверены все свойства винеровского процесса. □

Если траектории процесса непрерывны, то, как мы видели, поведение процесса определяется лишь тем, что о нем известно для счетного всюду плотного множества.

Простейшим требованием *регулярности*, причем не накладывающим никаких условий на конечномерные распределения процесса, является сепрабельность, введенная Дж. Дубом.

Определение. Процесс $\{X_t,\ t\in T\}$ называется *сепарабельным* относительно некоторого класса $\mathcal{A}$ одномерных борелевских множеств, если существует $S=\{t_j\}$ в T и такое множество Λ нулевой меры в Ω $(P(\Lambda)=0)$, что для любого открытого интервала I и любого $A\in\mathcal{A}$

$$\{\omega\colon X_t(\omega)\in A,\ t\in IS\}\setminus\{\omega\colon X_t(\omega)\in A,\ t\in IT\}\subset\Lambda.$$

Так как первое множество измеримо, являясь пересечением счетного числа измеримых множеств, то и второе множество измеримо (и меры обоих множеств совпадают).

Обычно говорят, что процесс сепарабелен, если $\mathcal{A}$ — это класс замкнутых множеств.

Определение. Процесс называется *вполне сепарабеленым*, если в качестве множества сепарабельности S можно взять любое счетное всюду плотное подмножество T.

Задача. Докажите, что для сепарабельного процесса

$$\sup_{t\in IT} X_t(\omega) = \sup_{t\in IS} X_t(\omega), \qquad \inf_{t\in IT} X_t(\omega) = \inf_{t\in IS} X_t(\omega).$$

Задача. Пусть $\{X_t,\ t\in[0,1]\}$ — сепарабельный процессс, удовлетворяющий условию теоремы Колмогорова о существовании непрерывной модификации. Тогда

$$P\{\omega\colon X(t,\omega)\ t\in[0,1]\} = 1,$$

т.е. сепарабельный процесс непрерывен сам, если у него существует непрерывная модификация.

Установим еще одно свойство траекторий процесса.

Теорема. *Пусть $\{X_t,\ t\in T\}$ — случайный процесс, для которого $P(X_s \le X_t) = 1$ при любых $s\le t$, $s,t\in T$, $T\subset\mathbb{R}^1$. Тогда существует эквивалентный процесс, у которого почти все траектории неубывающие функции.*

Доказательство. **1.** Сначада покажем, что в каждой точке $t\in T$ предельной для T справа (слева) существует предел по вероятности $p=\lim\limits_{s\downarrow t} X_s$ (соответственно $p=\lim\limits_{s\uparrow t} X_s$).

В самом деле, возьмем

$$t_1 > t_2 > \dots > t_n > \dots,\ t_i\in T,\ i\le 1,\ t_n\downarrow t \text{ при } n\to\infty.$$

Так как последовательность $X_{t_n}(\omega)$ для п.в. ω не возрастает и ограничена снизу $X_t(\omega)$, то она сходится. Обозначим этот предел $X_{t_+}(\omega)$. Из сходимости с вероятностью 1 следует сходимость по вероятности ($X_{t_n} \xrightarrow{P} X_{t_+}$), при этом $X_{t_+} \ge X_{t_n}$ (п.н.).

Далее, для s достаточно близких к t справа и $\varepsilon>0$

$$P(X_{t_+} \le X_s < X_{t_+}+\varepsilon) \ge P(X_{t_+} \le X_s < X_{t_+}+\varepsilon),$$

где n можно выбрать сколь угодно большим. Следовательно,

$$X_s(\omega) \xrightarrow{P} X_{t_+}(\omega) \text{ при } s\downarrow t.$$

2. Теперь можно установить, что процесс $\{X_t,\ t \in T\}$ стохастически непрерывен, кроме, может быть, счетного числа точек $t \in T$, иначе говоря,

$$P(X_{t_+} = X_t = X_{t_-}) = 1 \text{ за исключением упомянутых точек.}$$

Действительно, обозначим $\varphi(t) = E \operatorname{arctg} X_t$ (математическое ожидание существует, так как arctg ограниченная функция). Неубывающая функция $\varphi(t)$ имет не более счетного числа точек разрыва. В точках непрерывности

$$0 = \varphi(t_+) - \varphi(t_-) = E[\operatorname{arctg} X_{t_+} - \operatorname{arctg} X_{t_-}].$$

Если математическое ожидание неотрицательной случайной величины равно 0, то она равна нулю с вероятностью 1. Так как arctg строго монотонная функция, то $X_{t_+} = X_{t_-}$ с вероятностью 1, а X_t лежит между ними.

3. Пусть T_0 — счетное всюду плотное множество, включаещее все точки, где X_t не является стохастически непрерывным. В силу счетности T_0 имеем

Положим X_t для $t \in T_0$. Далее, если $t_n \in T \setminus T_0$ и t — предельная справа точка для точек из T_0, т.е. $t_n \downarrow t$, $t_n \in T_0$, положим

$$\begin{cases} Y_t, & \text{если предел сущетвует} \\ 0, & \text{в противном случае} \end{cases}$$

Если точка t является предельной справа, то она предельная слева (она не может быть изолированной точкой T, все такие точки входят в T_0, иначе это множество не будет всюду плотным). Для таких точек полагаем

$$\begin{cases} Y_t,\ t_n \in T_0,\ t_n \uparrow t, & \text{если предел сущетвует} \\ 0, & \text{в противном случае} \end{cases}$$

Очевидно, что почти все траектории $Y_t = 0$ неубывающие.

4. Наконец, проверим эквивалентность процессов X_t и $Y_t = 0$, $t \in T$.

Для $t \in T_0$ они совпадают по построению.

Если же $t \in T \setminus T_0$, то $X_{t_n} \to Y_t$ с вероятностью 1 (а значит, $X_{t_n} \xrightarrow{P} Y_t$ $n \to \infty$ $t_n \in T_0$). С другой стороны, в силу стохастической непрерывности X_t вне T_0 также $X_{t_n} \xrightarrow{P} X_t$. Таким образом,$P(X_t = Y_t) = 1$ в силу единственности предела по вероятности. Следовательно, процессы всамом деле эквивалентны. □

Еще один подход к изучению свойств случайных процессов — рассмотрение его как функции двух переменных.

Определение. Процесс $\{X_t,\ t \in T\}$ называется *измеримым*, если множество значений параметра T измеримо по Лебегу, и функция $X_t(\omega)$ измерима по паре переменных (t, ω), т.е.

$$\{(t,\omega)\colon X_t(\omega) \in B\} \in \mathcal{A} \times \mathcal{F}$$

для любого борелевского множества B, здесь $\mathcal{A}$ — σ-алгебра Лебеговских подмножеств T.

Справедлива следующая теорема, дающая условия измеримости.

Теорема. *Пусть множество $T \subset \mathbb{R}^1$ измеримо по Лебегу, а процесс $X = \{X_t,\ t \in T\}$ сепарабелен и существует множество T_1*

$$P(\lim_{s\to t} X_s(\omega) = X_t(\omega)) = 1\ t \in T \setminus T_1$$

(т.е. вне T_1 процесс непрерывен с вероятностью 1). Тогда процесс X измерим.

Доказательство. Введем два случайных процесса $Y^{(n)}$ и $Z^{(n)}$, между которыми будет заключен процесс X. Положим

$$Y_t^{(n)}(\omega) = \sup_{\frac{k}{n} \le s < \frac{(k+1)}{n}} X_s(\omega), \quad Z_t^{(n)}(\omega) = \inf_{\frac{k}{n} \le s < \frac{(k+1)}{n}} X_s(\omega)$$

для $t \in [\frac{k}{n}, \frac{(k+1)}{n}]$, $t \in T$.

Так как X сепарабелен, то $Y_t^{(n)}(\omega)$ и $Z_t^{(n)}(\omega)$ — случайные величины, причем

$$Z_t^{(n)}(\omega) \le X_t(\omega) \le Y_t^{(n)}(\omega).$$

Поскольку $Y_t^{(n)}$ и $Z_t^{(n)}$ (как функции t) кусочно постоянны, то процессы $Y^{(n)}$ и $Z^{(n)}$ измеримы при любом n (по паре переменных). В силу предположения теоремы при любом $t \in T \setminus T_1$ с вероятностью 1 имеем

$$Y_t^{(n)} \to X_t \text{ и } Z_t^{(n)} \to X_t \text{ при } n \to \infty.$$

Значит, процесс X измерим. В самом деле, по теореме Фубини, если почти все (по мере Лебега) сечения некоторого множества имеют нулевую меру P, то это множество имеют нулевую меру $l \times P$ (где t — меру Лебега). Таким образом, $Y_t^{(n)}(\omega)$ (и $Z_t^{(n)}(\omega)$) при почти всех (t, ω) сходятся к общему пределу, который измерим как предел измеримых функций. □

Следствие. *Винеровский процесс измерим.*

Задача. Если у процесса траектории непрерывны справа (или слева), то он измерим.

Задача. Пусть процесс $X_t(\omega)$ измерим, а $\tau(\omega)$ — случайная величина со значениями в T, тогда $X_{\tau(\omega)}(\omega)$ также случайная величина.

Условия предыдущей теоремы можно ослабить. Сформулируем соответствующий результат без доказательства, которое можно прочитать в книге Дуба "Вероятностные процессы".

Теорема. *Пусть $\{X_t,\ t \in T\}$ — случайный процесс с измеримым по Лебегу множеством T. Предположим, что существует (на том же самом вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, P)$) сепарабельный относительно класса замкнутых множеств измеримый процесс $\{Y_t,\ t \in T\}$ эквивалентный исходному. (Величины Y_t могут принимать значения $\pm\infty$).*

Измеримость процесса позволяет обосновать существование интегралов от траекторий.

Теорема. *Пусть $\{X_t,\ t \in T\}$ — измеримый случайный процесс. Тогда почти все траектории являются измеримыми по Лебегу функциями t.*

Если при $t \in T$ существует математическое ожидание EX_t, то оно определяет измеримую по Лебегу функцию t. Если A — это измеримое по лебегу множество значений параметра ($A \subset T$) и $\int_A E|X_t|\,dt < \infty$, то почти все траектории процесса интегрируемы по Лебегу на множестве A.

Доказательство. Эта теорема на самом деле является переформулировкой теоремы Фубини. Поскольку $X_t(\omega)$ — это измеримая функция от (t, ω), то (по теореме Фубини) для почти всех ω сечение $X_\cdot(\omega)$ определяет измеримую функцию от t, т.е. почти все траектории измеримы по Лебегу, а также, если EX_t существует, то является измеримой функцией от t.

Второе предположение теоремы состоит в том, что конечен повторный интеграл от $|X_t(\omega)|$, взятый сначала по ω, а затем по $t \in A$. Повторный интеграл, взятый в обратном порядке $E\int_A |X_t(\omega)|\,dt$ также конечен. А это означает, что $\int_A |X_t(\omega)|\,dt$ является конечным при почти всех ω, иначе говоря, почти все траектории интегрируемы по Лебегу на множестве A.

Так как величина абсолютно сходящегося повторного интеграла не зависит от порядка интегрирования, то

$$E\int_A |X_t(\omega)|\,dt = \int_A EX_t(\omega)\,dt.$$

□

Теперь продолжим рассмотрение отдельных классов случайных процессов. Начнем с *марковских процессов.*

Существует много эквивалентных определений, формализующих наглядное представление о том, что у марковского процесса при фиксированном настоящем прошлое и будущее независимы.

Пусть $\{X_t,\ t \in T\}$ — случайный процесс, заданный на некотором вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Обозначим

$$\mathcal{F}_{\le t} = \sigma(X_s,\ s \le t),$$
$$\mathcal{F}_{\ge t} = \sigma(X_s,\ s \ge t) \text{ и}$$
$$\mathcal{F}_{=t} = \sigma(X_s,\ s = t).$$

Определение. Процесс X называется ***марковским***, если

$$P(AB|\mathcal{F}_{=t}) = P(A|\mathcal{F}_{=t})P(B|\mathcal{F}_{=t}),$$

для любых $A \in \mathcal{F}_{\ge t}$, $B \in \mathcal{F}_{\le t}$ и $t \in T$.

Задача. Доказать, что каждое из следующих утверждений эквивалентно определению марковского процесса:

(1)

$$P(A|\mathcal{F}_{\le t}) = P(A|\mathcal{F}_{=t}),\ \forall A \in \mathcal{F}_{\ge t},\ t \in T.$$

(2)

$$P(B|\mathcal{F}_{\ge t}) = P(B|\mathcal{F}_{=t}),\ \forall B \in \mathcal{F}_{\le t},\ t \in T.$$

Лекция 5

Напомним определение условного математического ожидания и его основные свойства.

Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ — некоторое вероятностное пространство, $\mathfrak{A}$ — σ-алгебра ($\mathfrak{A} \subset \mathcal{F}$) и X — случайная величина с $E|X| < \infty$.

Определение. *Условное математическое ожидание* $E(X|\mathfrak{A})$ является $\mathfrak{A}$-измеримой функцией ω, задаваемой с точностью до эквивалентности следующим соотношением:

$$\int_B E(X|\mathfrak{A})\, dP = \int_B X\, dP, \quad \forall B \in \mathfrak{A}.$$

(Существование у.м.о. вытекает из теоремы Радона-Никодима.)

Определение. Сужение $E(X|\mathfrak{A})$ на класс индикаторов χ_A, $A \in \mathcal{F}$, называется *условной вероятностью* события A при заданной σ-алгебре $\mathfrak{A}$ и обозначается $P(A|\mathfrak{A})$. Очевидно, что $P(A|\mathfrak{A})$ — это $\mathfrak{A}$-измеримая функция, удовлетворяющая условию

$$\int_B P(A|\mathfrak{A})\, dP = P(AB), \text{ для любого } B \in \mathfrak{A}.$$

Свойства условного математического ожидания.

(1) $E(E(X|\mathfrak{A})) = EX$.

(2) Если X является $\mathfrak{A}$-измеримой, то

$$E(X|\mathfrak{A}) = X \text{ п.н.}$$

(3) Если $X = C$ п.н., то $E(X|\mathfrak{A}) = C$ п.н.,
а если $X \geq Y$ п.н., то $E(X|\mathfrak{A}) \geq E(Y|\mathfrak{A})$ п.н.

(4) Линейность у.м.о.:

$$E(c_1X_1 + c_2X_2|\mathfrak{A}) = c_1E(X_1|\mathfrak{A}) + c_2E(X_2|\mathfrak{A}) \text{ п.н.}$$

(5) Если с.в. X измерима относительно $\mathfrak{A}$, то

$$E(XY|\mathfrak{A}) = XE(Y|\mathfrak{A}) \text{ п.н.}$$

(6) Пусть σ-алгебры $\mathfrak{A}_i \subset \mathcal{F}$, $i = 1, 2$, и $\mathfrak{A}_1 \subset \mathfrak{A}_2$, тогда

$$E(E(X|\mathfrak{A}_2)|\mathfrak{A}_1) = E(X|\mathfrak{A}_1) = E(E(X|\mathfrak{A}_1)|\mathfrak{A}_2) \text{ п.н.}$$

Если $z\colon \Omega \to \mathfrak{X}$ некоторое отбражение из Ω в $\mathfrak{X}$, то по определению

$$E(X|z) = E(X|\mathcal{F}_z),$$

где $\mathcal{F}_z = \{z^{-1}(B),\ B \in \mathcal{F}'_z\}$, а $\mathcal{F}'_z = \{B \subset \mathfrak{X},\ z^{-1}(B) \in \mathcal{F}\}$.

(7) Если с.в. X не зависит от σ-алгебры $\mathfrak{A}$, то

$$E(X|\mathfrak{A}) = EX.$$

(8) Если z — случайная величина, то берется

$$\mathcal{F}_z = \{z^{-1}(B),\ B \in \mathfrak{B}^1\} \ (\mathfrak{B}^1 - \sigma\text{-алгебра}),$$

при этом $E(X|z) = g(z)$, где $g(\cdot)$ — борелевская функция.

(9) Справедливы также теоремы о монотонной сходимости и аналоги теорем о сходимости Фату-Лебега:

а) Если $0 \leq X_n \uparrow X$ п.н., то $0 \leq E(X_n|\mathfrak{A}) \uparrow E(X|\mathfrak{A})$ п.н. В частности,

$$P\left(\sum_{k=1}^{\infty} A_k|\mathfrak{A}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k|\mathfrak{A}) \text{ п.н.}$$

(напомним, что запись $\sum_k A_k$ означает, что берется объединение $\cup_k A_k$ несовместных событий, т.е. $A_iA_j = \emptyset$, $i \neq j$).

b) Пусть Y и Z интегрируемы (т.е. существуют EY и EZ). Если $Y \le X_n$ п.н. (или $X_n \le Z$ п.н.), то

$$E\left(\varliminf_{n\to\infty} X_n|\mathfrak{A}\right) \le \varliminf_{n\to\infty} E(X_n|\mathfrak{A}) \text{ п.н.}$$

$$\left(\text{соотв. } \varlimsup_{n\to\infty} E(X_n|\mathfrak{A}) \le E\left(\varlimsup_{n\to\infty} X_n|\mathfrak{A}\right) \text{ п.н.}\right)$$

В частности, если $Y \le X_n \uparrow X$ п.н. (или $Y \le X_n \le Z$ п.н и $X_n \to X$ п.н.), то

$$E(X_n|\mathfrak{A}) \to E(X|\mathfrak{A}) \text{ п.н. при } n \to \infty.$$

(Далее п.н. будет часто опускаться).

<u>Определение</u>. Условная вероятность $P(\cdot|\mathfrak{A})$ называется *регулярной*, если при каждом ω, за исключением множества меры 0, она является вероятностной мерой.

Таким образом, *регулярная условная вероятность* $P^{\mathfrak{A}}$ со значениями $P(A|\mathfrak{A})(\omega)$ это функция, определенная на $\mathcal{F}\times\Omega$, обладающая следующими свойствами:

1) $P(A|\mathfrak{A})(\omega)$ есть $\mathfrak{A}$-измеримая по ω функция для каждого фиксированного A и представляет собой вероятность на $\mathcal{F}$ при каждом фиксированном ω.

2) Для любых фиксированных $A \in \mathcal{F}$ и $B \in \mathfrak{A}$

$$P(AB) = \int_B P(A|\mathfrak{A})\, dP.$$

(9) Если $P^{\mathfrak{A}}$ — регулярная условная вероятность, то

$$E(X|\mathfrak{A}) = \int X\, dP^{\mathfrak{A}} \text{ п.н.}$$

для любой с.в. X с $E|X| < \infty$.

<u>Определение</u>. *Потоком* называется неубывающее семейство σ-алгебр $\{\mathcal{F}_t,\ t \ge 0\}$, т.е. $\mathcal{F}_{t_1} \subset \mathcal{F}_{t_2}$ при $t_1 < t_2$, $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}$ для любого t.

Предположим, что $X_t(\omega)$ при любом t принимают значения в измеримом пространстве $(\mathfrak{X}, \mathcal{B})$.

<u>Определение</u>. Случайный процесс $X = \{X_t,\ t \ge 0\}$ называется *согласованным* с потоком σ-алгебр $\{\mathcal{F}_t,\ t \ge 0\}$ (или *адаптированным* к потоку), если с.в. X_t является $\mathcal{F}_t$-измеримой при любом $t \ge 0$.

Определение. Случайный процесс $(X_t, \mathcal{F}_t)_{t\ge 0}$ называется *марковским относительно семейства σ-алгебр* $\{\mathcal{F}_t,\ t \ge 0\}$, если процесс адаптирован к потоку, и для любого t σ-алгебры $\mathcal{F}_t$ и $\mathcal{F}_{\le t}$ условно независимы при данной с.в. X_t, т.е.

(1) X_t — $\mathcal{F}_t$-измерима при любом $t \ge 0$.
(2) $P(AB|X_t) = P(A|X_t)P(B|X_t)\ \forall A \in \mathcal{F}_{\ge t}, B \in \mathcal{F}_t, t \ge 0$.

Задача. Проверить, что случайный процесс X марковский относительно семейства $(\mathcal{F}_t,\ t \ge 0)$ является просто марковским (т.е. относительно семейства $\mathcal{F}_{\le t}$).

Лемма. *Пусть процесс* $\{X_t,\ t \ge 0\}$ *адаптирован к потоку* $\{\mathcal{F}_t,\ t \ge 0\}$. *Тогда следующие условия эквивалентны:*

(1) *Случайный процесс* $\{X_t,\ t \ge 0\}$ *марковский относительно семейства σ-алгебр* $\{\mathcal{F}_t,\ t \ge 0\}$.
(2) *Для любого* $t \ge 0$ *и произвольной* $\mathcal{F}_{\ge t}$*-измеримой ограниченной случайной величины* Y *выполнено равенство*
$$E(Y|\mathcal{F}_t) = E(Y|X_t)\ \text{(п.н.)}.$$
(3) *Для любой измеримой ограниченной функции* $f(x)$ $(\sup_x |f(x)| < \infty)$ *и произвольных* $s \ge t$ *верно*
$$E(f(X_s)|\mathcal{F}_t) = E(f(X_s)|X_t)\ \text{(п.н.)}.$$

Доказательство. Установим $1 \implies 2$. Так как любая ограниченная $\mathcal{F}_{\ge t}$-измеримая с.в. может быть представлена как предел простых функций, т.е. конечных линейных комбинаций индикаторов, то достаточно проверить требуемое свойство для $Y = \chi_A$, где $A \in \mathcal{F}_{\ge t}$, а затем воспользоваться свойствами у.м.о.

Итак, проверим, что
$$P(A|\mathcal{F}_t) = P(A|X_t),\ A \in \mathcal{F}_{\ge t}.$$
С одной стороны, в силу марковости (и свойств у.м.о.) имеем цепочку равенств
$$\begin{aligned} P(AB) &= E(P(AB|X_t)) = \\ &= E(P(A|X_t)P(B|X_t)) = E(P(A|X_t)E(\chi_B|X_t)) = \\ &= E(E(\chi_B P(A|X_t)|X_t)) = E(\chi_B P(A|X_t)). \end{aligned}$$
С другой стороны,
$$\begin{aligned} P(AB) &= E\chi_A\chi_B = E(E(\chi_A\chi_B|\mathcal{F}_t)) = \\ &= E(\chi_B E(\chi_A|\mathcal{F}_t)) = E(\chi_B P(A|\mathcal{F}_t)). \end{aligned}$$

Таким образом, для любого $B \in \mathcal{F}_t$

$$\int_B P(A|X_t)\,dP = \int_B P(A|\mathcal{F}_t)\,dP \qquad (= P(AB)),$$

а поскольку $P(A|X_t)$ — это $\mathcal{F}_t$-измеримая функция, получаем необходимое равенство

$$E(Y|\mathcal{F}_t) = E(Y|X_t) \text{ для } Y = \inf_A,\ A \in \mathcal{F}_{\geq t}.$$

Теперь покажем, что 2 $\implies$ 1. Пусть $A \in \mathcal{F}_{\geq t}$ и $B \in \mathcal{F}_t$, тогда

$$\begin{aligned} P(AB|X_t) &= E(\chi_A\chi_B|X_t) = E(E(\chi_A\chi_B|\mathcal{F}_t)|X_t) = \\ &= E(\chi_B E(\chi_A|\mathcal{F}_t)|X_t) = E(\chi_B E(\chi_A|X_t)|X_t) = \\ &= E(\chi_A|X_t)E(\chi_B|X_t) = P(A|X_t)P(B|X_t). \end{aligned}$$

Так как 3 — это частный случай 2 (при $Y = f(X_1)$), то надо доказать лишь, что 3 $\implies$ 2.

Пусть сначала $Y = f_1(X_{s_1} \dots f_n(X_{s_n})$, где $t \leq s_1 < \dots < s_n$ и $\sup_x |f_i(x)| < \infty$, $i = \overline{1,n}$. Установим интересующий нас результат по индукции. При $n = 1$ утверждение справедливо, так как совпадает с 3. Предположим, что для $n-1$ равенство установлено, ипроверим его для n. Имеем

$$\begin{aligned} E\left(\prod_{i=1}^{n-1} f_i(X_i)g(X_{s_{n-1}})|X_t\right) &= E\left(\prod_{i=1}^{n-1} f_i(X_i)E(f_n(X_{s_n})|\mathcal{F}_{s_{n-1}})|X_t\right) = \\ &= E\left(E\left(\prod_{i=1}^{n} f_i(X_{s_i})|\mathcal{F}_{s_{n-1}}\right)|X_t\right) = \\ &= E\left(\prod_{i=1}^{n} f_i(X_{s_i})|X_t\right) = E(Y|X_t). \end{aligned}$$

Доказательство закончено, так как любую $\mathcal{F}_{\geq t}$-измеримую ограниченную с.в. можно приблизить с помощью $\prod_{i=1}^n f_i(X_{s_i})$. □

Для любого марковского процесса справедлив следующий результат.

Лемма. *Процесс $\{X_t,\ t \geq 0\}$ марковский тогда и только тогда, когда для любой измеримой ограниченной $f(x)$ и произвольного набора $t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_n \leq s$ с вероятностью 1*

$$E(f(X_s)|X_{t_1}, \dots, X_{t_n}) = E(f(X_s)|X_{t_n}).$$

Доказательство. Если процесс марковский, то требуемое утверждение вытекает из предыдущей леммы. В самом деле

$$E(f(X_s)|X_{t_1}, \dots, X_{t_n}) = E(E(f(X_s)|\mathcal{F}_{\leq t_n})|X_{t_1}, \dots, X_{t_n}) =$$

$$= E(E(f(X_s)|X_{t_n})|X_{t_1},\dots,X_{t_n}) = E(f(X_s)|X_{t_n}).$$

Обратно, пусть указанные у.м.о. совпадают, покажем, что тогда

$$E(f(X_s)|\mathcal{F}_{\le t}) = E(f(X_s)|X_t) \text{ при } s \ge t.$$

Для этого достаточно проверить, что для любого $B \in \mathcal{F}_{\le t}$

$$\int_B f(X_s)\,dP = \int_B E(f(X_s)|X_t)\,dP.$$

В силу условий леммы эти интегралы совпадают для $B \in \sigma(X_{t_1},\dots,X_{t_n},X_t)$ при $t_1 \le \dots \le t_n \le t \le s$. Правая и левая части равенства — это конечные меры (не обязательно вероятностные), совпадающие на цилиндрах, порождающих $\mathcal{F}_{\le t}$. В силу единственности продолжения меры равенство будет выполнено для любого $B \in \mathcal{F}_{\le t}$. □

Итак, пусть имеется измеримое пространство $(\mathfrak{X},\mathcal{B})$, в котором все одноточечные множества измеримы, называемое *фазовым.* И пусть $(X_t,\mathcal{F}_t)_{t\ge 0}$ — марковский процесс относительно потока $\{\mathcal{F}_t,\ t\ge 0\}$ со значениями в фазовом пространстве. Тогда с вероятностью 1 при $t \ge s$ для любого $A \in \mathcal{B}$

$$P(X_t \in A|\mathcal{F}_s) = P(X_t \in A|X_s).$$

В силу свойства 7 у.м.о. существует такая функция $P(s,x,t,A)$, что

$$P(X_t \in A|X_s) = P(s,X_s,t,A).$$

Эта функция играет важную роль в теории марковских процессов. Но для плодотворной теории надо наложить дополнительные требования. Они станут особенно понятными, если вспомнить следующую интерпретацию

$$P(s,x,t,A) = P(X_t \in A|X_s = x).$$

Определение. Функция $P(s,x,t,A)$ называется *марковской переходной функцией* на $(\mathfrak{X},\mathcal{B})$, если

1° для любых s, x, t (как функция A) $P(s,x,t,\cdot)$ — вероятностная мера на $\mathcal{B}$,

2° для любых s, x, A (как функция x) $P(s,\cdot,t,A)$ измерима,

3°

$$P(s,x,s,A) = \delta_x(A), \text{ здесь } \delta_x(A) = \begin{cases} 1, & \text{при } x \in A, \\ 0, & \text{при } x \notin A, \end{cases}$$

4° выполнено уравнение Колмогорова-Чепмена, т.е. для любых $0 \le s \le u \le t$

$$P(s,x,t,A) = \int_{\mathfrak{X}} P(s,x,u,dy)P(u,y,t,A).$$

(Существует такой подход, при котором изучается это семейство функций, а точнее, порождаемое ими семейство линейных операторов. При этом не предполагается существование ни вероятностного пространства, ни марковского случайного процесса.)

Действительно, с измеримым пространством $(\mathfrak{X}, \mathcal{B})$ связаны два банаховых пространства.

$\mathbb{B}$ — совокупность ограниченных $\mathcal{B}$-измеримых функций $x \in \mathfrak{X}$, норма определена следующим образом:

$$\|f\| = \sup_{x \in \mathfrak{X}} |f(x)|.$$

$\mathbb{V}$ — совокупность обобщенных мер (или зарядов), т.е. числовая счетно-аддитивная функция множеств $A \in \mathcal{B}$, норма ν — это полная вариация на всем пространстве:

$$\|\nu\| = |\nu|(\mathfrak{X}).$$

Оказывается, что между $\mathbb{B}$ и $\mathbb{V}$ существует определенная связь: $\mathbb{V} \subset \mathbb{B}^*$ и $\mathbb{B} \subset \mathbb{V}^*$ (где знак $*$ показывает, что речь идет о сопряженном пространстве).

В самом деле, положим

$$\langle \nu, f \rangle = \int_{\mathfrak{X}} \nu(dx) f(x),$$

где интеграл определяется следующим образом

$$\int_{\mathfrak{X}} \nu(dx) f(x) = \int_{\mathfrak{X}} \nu^+(dx) f(x) - \int_{\mathfrak{X}} \nu^-(dx) f(x),$$

а $\nu = \nu^+ - \nu^-$ — это разложение Жордана.

Тогда каждому элементу $\nu \in \mathbb{V}$ соответствует линейный функционал $\langle \nu, \cdot \rangle$ на $\mathbb{B}$, а каждому элементу $f \in \mathbb{B}$ соотвествует линейный функционал $\langle \cdot, f \rangle$ на $\mathbb{V}$.

<ins>Задача</ins>. Доказать, что норма элемента и норма соответствующего линейного функционала совпадают:

$$\|\nu\| = \sup_{\|f\|=1} |\langle \nu, f \rangle|, \qquad \|f\| = \sup_{\|\nu\|=1} |\langle \nu, f \rangle|.$$

Линейные операторы в пространстве $\mathbb{B}$ будем записывать слева от элемента $f \in \mathbb{B}$, а в пространстве $\mathbb{V}$ — справа.

Пусть $P(s, x, t, A)$ — марковская переходная функция, удовлетворяющая требованиям 1°–4°. Определим на пространстве $\mathbb{B}$ семейство операторов P^{st} $(s \le t,\ s, t \in T)$ с помощью соотношения

$$P^{st} f(x) = \int_{\mathfrak{X}} P(s, x, t, dy) f(y).$$

(Существование и ограниченность интервала для $f \in \mathbb{B}$ обеспечивается тем, что $P(s,x,t,\cdot)$ — конечная мера (свойство 1°), а измеримость $P^{st}f(x)$ по x — измеримостью $P(s,\cdot,t,A)$ (свойство 2°)).

Установим свойства операторов P^{st}.

1) В силу их определения операторы *линейны.*

Остальные свойства операторов вытекают из свойств переходной функции.

2) Операторы P^{st} *сжимающие.*

В само деле, так как $P(s,x,t,\cdot)$ — вероятностная мера (1°), то

$$|P^{st}f(x)| \leq \int P(s,x,t,dy)\|f\| = \|f\|,$$

иначе говоря

$$\|P^{st}f\| \leq \|f\|, \text{ т.е. } \|P^{st}\| \leq 1.$$

3) Операторы *сохраняют положительность*, т.е. неотрицательные функции переводят в неотрицательные. Действительно, опять-таки в силу 1°, если $f(x) \geq 0$, то $P^{st}f(x) \geq 0$.

4) $P^{st}1 \equiv 1$, это также следствие 1°.

5) $P^{ss} = E$ (тождественный оператор).

Это вытекает из 3°, так как

$$P^{ss}f(x) = \int \delta_x(dy)f(y) = f(x).$$

6) $P^{st} = P^{su}P^{ut}$ при $s \leq u \leq t$. В самом деле, уравнение Колмогорова-Чепмена (4°) дает

$$P^{st}f(x) = \int P(s,x,t,dy)f(y) = \iint P(s,x,u,dz)P(u,z,t,dy)f(y) =$$
$$= \int P(s,x,u,dz)\int P(u,z,t,dy)f(y) = P^{su}(P^{ut}f)(x).$$

(В тех случаях, когда интегрирование ведется по всему пространству $\mathfrak{X}$, часто будем для простоты писать $\int$ вместо $\int_{\mathfrak{X}}$).

В пространстве $\mathbb{V}$ введем операторы P^{st} ($s \leq t$, $s,t \in T$) с помощью соотношения

$$\nu P^{st}(A) = \int \nu(dx)P(s,x,t,A).$$

(Существование интеграла обеспечивается свойством 2° — измеримостью по x переходной функции, а счетная аддитивность νP^{st} свойством 1°, т.е. счетной аддитивностью $P(s,x,t,\cdot)$).

Свойства 1′)–6′) операторов P^{st} в пространстве $\mathbb{V}$ аналогичны свойствам 1)–6).

1′) Операторы P^{st} *линейны* в силу определения.

2′) Операторы *сжимающие*, поскольку в силу 1° получаем

$$\|\nu P^{st}\| \leq \|\nu\|.$$

3′) Меры переводятся в меры.

4′) $\nu P^{st}(\mathfrak{X}) = \nu(\mathfrak{X})$.
(Эти два свойства справедливы также в силу 1°).

5′) $P^{ss} = E$ следует из 3°.

6′) $P^{st} = P^{sk}P^{ut}$ для $s \leq u \leq t$.

В самом деле, уравнения Колмогорова-Чепмена превращается в соотношение

$$\nu P^{st} = (\nu P^{sk})P^{ut},$$

т.е. по форме 6′) совпадает с 6). Однако порядок применения операторов здесь другой (сначала P^{su}, а потом P^{ut}).

Заметим далее, что операторы P^{st} в пространствах $\mathbb{B}$ и $\mathbb{V}$ *сопряжены* друг другу, поскольку для $f \in \mathbb{B}$, $\nu \in \mathbb{V}$

$$\left\langle \nu, P^{st} f \right\rangle = \left\langle \nu P^{st}, f \right\rangle,$$

так как правая и левая части равны

$$\iint \nu(dx) P(s, x, t, dy) f(y).$$

(Более точно, оператор P^{st} на $\mathbb{B}$ — это сужение оператора в $\mathbb{V}^*$, сопряженного к оператору P^{st} в $\mathbb{V}$, и наоборот).

<u>Задача</u>. Получить свойства 1′)–6′) из 1)–6).
Доказать, что $\|P^{st}\| = 1$.

Как мы видели, семейства операторов P^{st} связаны лишь с переходной функцией.

Далее мы увидим, каков их вероятностный смысл.

Лекция 6

Пусть задано *фазовое пространство* $(\mathfrak{X}, \mathcal{B})$, т.е. измеримое пространство, в котором все одноточечные множества измеримы (точки фазового пространства называются *состояниями*. Далее, пусть $P(s, x, t, A)$ — марковская переходная функция, удовлетворяющая условиям 1°–4°, а $(X_t, \mathcal{F}_t)_{t \in T}$ — это марковский процесс относительно семейства σ-алгебр $(\mathcal{F}_t)$.

<u>Определение</u>. Говорят, что $(X_t, \mathcal{F}_t)_{t \in T}$ — это *марковский процесс* с *переходной функцией* $P(s, x, t, A)$, если

$$P(X_t \in A | X_s) = P(s, X_s, t, A) \text{ п.н.}$$

для любых $s \le t$, $s,t \in T$, и любого $A \in \mathcal{B}$.

(Очевидно, что в силу марковости процесса также $P(X_t \in A|\mathcal{F}_s) = P(s, X_s, t, A)$ п.н.)

Заметим, что для произвольного марковского процесса ниоткуда не следует существование переходной функции со свойствами 1°–4°. Просто мы хотим рассматривать лишь те процессы, для которых соответствующие условные вероятности регулярны.

ЗАДАЧА. Показать, что регулярная условная вероятность существует, если σ-алгебра, относительно которой она берется, порождена конечным числом случайных величин.

ЗАДАЧА. Пусть $\Omega = [0,1]$, $\mathfrak{A}$ — σ-алгебра борелевских подмножеств и λ — мера Лебега. Существует такое подмножество D, что $\overline{\lambda}(D) = 1$, $\underline{\lambda}(D) = 0$, здесь $\overline{\lambda}$ — внешняя, $\underline{\lambda}$ — внутренняя мера. Построим новую σ-алгебру $\mathcal{F}$, порожденную $\mathfrak{A}$ и D следующим образом: она состоит из множеств вида $DA_1 \cup \overline{D}A_2$, где $A_1, A_2 \in \mathfrak{A}$. Меру определим с помощью соотношения

$$P(DA_1 \cup \overline{D}A_2) = \frac{1}{2}[\lambda(A_1) + \lambda(A_2)],$$

тогда $P(A) = \lambda(A)$ при $A \in \mathfrak{A}$. Доказать, что не существует регулярной условной вероятности $P(A|\mathfrak{A})$, $A \in \mathcal{F}$.

Из теоремы Колмогорова вытекает, что знание начального распределения в момент s, вероятностной меры $\nu_s(A)$, и переходной функции $P(s,x,t,A)$ позволяет построить марковский процесс. А именно, справедлив следующий результат (доказательство можно прочитать в книге А.Д.Вентцеля "Курс теории случайных процессов").

ТЕОРЕМА. *Пусть $\mathfrak{X}$ — σ-компактное метрическое пространство и $\mathcal{B}$ — σ-алгебра его борелевских подмножеств. И пусть $P(s,x,t,A)$ удовлетворяет 1°–4°, а $\nu_t(A)$, $t \in T$, $A \in \mathcal{B}$, при фиксированном t вероятностная мера, причем $\nu_t = \nu_s P^{st}$, т.е.*

$$\nu_t(A) = \int \nu_s(dx) P(s,x,t,A).$$

Тогда существует марковский процесс, для которого $P(s,x,t,A)$ — переходная функция, а $\nu_t(A)$ — одномерное распределение процесса в момент t, т.е.

$$\nu_t(A) = P(X_t \in A).$$

С переходной функцией связано понятие *марковского семейства*, которое отражает возможность начать случайное движение в любой точке фазового пространства.

Пусть заданы некотрое множество $T \subset \mathbb{R}^1$, фазовое пространство $(\mathfrak{X}, \mathcal{B})$ и функция $P(s,x,t,A)$, удовлетворяющая условиям 1°–3°. Кроме того, пусть имеется пространство элементарных событий Ω и на $T \times \Omega$ задана произвольная функция $X(t,\omega) = X_t(\omega)$, принимающая значения в $\mathfrak{X}$. Как и ранее, с функцией $X_t(\omega)$ связаны σ-алгебры $\mathcal{F}_{\le t} = \sigma(X_s, s \le t)$, $\mathcal{F}_{\ge t} = \sigma(X_s, s \ge t)$, $\mathcal{F}_{[s,t]} = \sigma(X_u, u \in [s,t])$, $\mathcal{F}_T = \sigma(X_t, t \in T)$.

Предположим далее, что для любых $s \in T$ и $x \in \mathfrak{X}$ на σ-алгебре $\mathcal{F}_{\ge s}$ задана вероятностная мера $P_{s,x}$.

<u>Определение</u>. Набор элементов $(X_t(\omega), P_{s,x})$ называется *марковским семейством с переходной функцией* $P(s,x,t,A)$, если при любых s и x

а) случайный процесс $X_t(\omega)$, $t \in T \cap [s, \infty)$, на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}_{\ge s}, P_{s,x})$ является марковским, т.е.

$$P_{s,x}(BC|X_t) = P_{s,x}(B|X_t)P(C|X_t)$$

для любых s, x, $t \ge s$, $B \in \mathcal{F}_{\ge t}$, $C \in \mathcal{F}_{[s,t]}$.

б) этот марковский процесс обладает заданной переходной функцией, иначе говоря, при любых $s \le u \le t$, $x \in \mathfrak{X}$, $A \in \mathcal{B}$ п.н. по мере $P_{s,x}$

$$P_{s,x}(X_t \in A|\mathcal{F}_{[s,u]}) = P(u, X_u, t, A).$$

в) $P_{s,x}(X_s = x) = 1$ (в момент s процесс выходит из точки x).

Если требование б) записать в интегральной форме, мы получим, что для любого $D \in \mathcal{F}_{[s,u]}$

$$P_{s,x}(D \cap \{X_t \in A\}) = \int_D P(u, X_u(\omega), t, A) P_{s,x}(d\omega).$$

Возьмем $D = \Omega$, $u = s$, тогда

$$P_{s,x}(X_t \in A) = \int_\Omega P(s, X_s(\omega), t, A)\, P_{s,x}(d\omega).$$

Но поскольку в силу в) $P_{s,x}$ — п.н. имеем $X_s(\omega) = x$, то подинтегральная функция равна $P(s,x,t,A)$, следовательно,

$$P_{s,x}(X_t \in A) = P(s,x,t,A). \tag{1}$$

Для марковских процессов многие формулировки становятся проще. Справедливо следующее

<u>Следствие</u>. *(без доказательства). Пусть $X_t(\omega)$ — функция на $T \times \Omega$ со значениями в фазовом пространстве $(\mathfrak{X}, \mathcal{B})$, $P_{s,x}$, при любых s и x, вероятностная мера по σ-алгебре $\mathcal{F}_{\ge s}$, а $P(s,x,t,A)$ — функция, удовлетворяющая условиям 1°–3°. Пара $(X_t, P_{s,x})$ является марковским семейством с переходной функцией $P(s,x,t,A)$ тогда и только тогда,*

когда конечномерные распределения X_t относительно $P_{s,x}$ задаются формулой

$$P_{s,x}(X_{t_1} \in A_1, \dots, X_{t_n} \in A_n) = \\ = \int_{A_1} P(s,x,t_1,dy_1) \int_{A_2} \dots \int_{A_n} P(t_{n-1}, y_{n-1}, t_n, dy_n)$$

при $s \le t_1 \le \dots \le t_n$. А уравнение Колмогорова-Чепмена (4°) — это необходимое условие согласованности такой системы конечномерных распределений.

Таким образом, можно утверждать, что если $\mathfrak{X}$ — σ-компактное метрическое, а $\mathcal{B} = \mathfrak{A}_{\mathfrak{X}}$ — σ-алгебра борелевских множеств, причем $P(s,x,t,A)$ удовлетворяет условиям 1°–4°, то существует марковское семейство $(X_t, P_{s,x})$ с заданной переходной функцией.

Теперь вернемся к операторам P^{st} в пространствах $\mathbb{B}$ и $\mathbb{V}$. Обозначим через $E_{s,x}$ интеграл по мере $P_{s,x}$. В силу соотношения (**??**) и определения оператора P^{st} в $\mathbb{B}$ получаем

$$P^{st} f(x) = E_{s,x} f(X_t).$$

Аналогично в $\mathbb{V}$ имеет место равенство

$$\nu P^{st}(A) = P_{s,\nu}(X_t \in A),$$

т.е. получается распределение X_t, если в момент s распределение было ν, т.е. $P(X_s \in A) = \nu(A)$.

Предволожим, что задано семейство операторов P^{st} в пространстве $\mathbb{B}$, удовлетворяющих условиям 1)–6). Можно ли утверждать. что существует марковское семейство. которому соответствует данное семейство операторов? (Точнее, можно ли представить операторы P^{st} в интегральной форме с функцией $P(,s,x,t,A)$, удовлетворяющей условиям 1°-4°.)

Оказывается, что ответ зависит от того, будет ли $\mathbb{B}^* = \mathbb{V}$ или $\mathbb{B}^* \supset \mathbb{V}$.

Для конечных фазовых пространств равенство справедливо, в то время как для счетного $\mathfrak{X}$, пользуясь теоремой Хана-Банаха, можно построить пример линейного функционала, не представимого в виде интеграла.

С другой стороны, если $\mathfrak{X}$ — компактное метрическое пространство, $\mathcal{B} = \mathfrak{A}_{\mathfrak{X}}$, а $\mathbb{C}$ — пространство непрерывных функций на $\mathfrak{X}$ (а значит, измеримых ограниченных, т.е. $\mathbb{C} \subset \mathbb{B}$), то любой линейный ограниченный функционал на пространстве $\mathbb{C}$ представим в виде интеграла по обобщенной мере

$$\varphi(f) = \langle \nu, f \rangle = \int_{\mathfrak{X}} \nu(dx) f(x),$$

причем функционалам, принимающим неотрицательные значения на неотрицательных функциях, соответствуют обычные меры, и различные меры соответствуют различным функционалам. (Если $\mathfrak{X}$ это отрезок действительной прямой, то это теорема Рисса.) Таким образом, оказывается, что в этом случае $\mathbb{V} = \mathbb{C}^*$. Однако мы рассматриваем операторы P^{st} на пространстве $\mathbb{B}$, т.е. вообще говоря, функции из $\mathbb{C}$ переводятся в $\mathbb{B}$.

Необходимо наложить дополнительное условие, обеспечивающее $P^{st}\mathbb{C} \subset \mathbb{C}$, которое выделяет специальный класс марковских семейств, которые называются *феллеровскими.*

<u>Определение</u>. Пусть $\mathfrak{X}$ — метрическое пространство, $\mathcal{B} = \mathfrak{A}_{\mathfrak{X}}$, $\mathbb{C}$ — пространство непрерывных ограниченных функций. Семейство $(X_t, P_{s,x})$ называется *феллеровским*, если $P^{st}\mathbb{C} \subset \mathbb{C}$ при любых $s \le t$. Иначе, для любой непрерывной ограниченной функции на $\mathfrak{X}$ функция $P^{st} f(x)$ непрерывна по x (ограниченность выполнена автоматически), т.е. при $x \to x_0$

$$\int_{\mathfrak{X}} P(s,x,t,dy)f(y) \to \int_g XP(s,x_0,t,dy)f(y)$$

(таким образом, требование феллеровости, касающееся лишь переходных функций, состоит в том, что меры $P(s,x,t,A)$ слабо непрерывны по начальной точке x).

Очевидно, что любому феллеровскому марковскому семейству соответсвует семейство операторов P^{st} на пространстве $\mathbb{C}$, удовлетворяющее условиям 1)–6). Докажем следующую теорему, показывающую, что верно и обратное утверждение.

<u>Теорема</u>. *Пусть $\mathfrak{X}$ — компактное метрическое пространство, $\mathcal{B} = \mathfrak{A}_{\mathfrak{X}}$ (σ-алгебра борелевских множеств). Пусть, далее, на пространстве $\mathbb{C}$ непрерывных функций на $\mathfrak{X}$ задано семейство операторов P^{st}, $s \le t$, $s,t \in T \subset \mathbb{R}^1$, удовлетворяющих требованиям 1)-6). Тогда существует феллеровское марковское семейство $(X_t, t \in T, P_{s,x})$, которому соответствует данное семейство операторов.*

Доказательство. Достаточно установить, что $P^{st} f(x)$ можно представить в виде интеграла

$$P^{st} f(x) = \int_{\mathfrak{X}} P(s,x,t,dy)f(y),$$

где $P(s,x,t,A)$ удовлетворяет условиям 1°–4° (поскольку, как было указано выше, переходной функции соответствует марковское семейство, в силу условия $P^{st}\mathbb{C} \subset \mathbb{C}$ семейство будет феллеровским).

Зафиксируем s, t, x, тогда согласно 1) и 2) $P^{st}f(x)$ — линейный функционал на $\mathbb{C}$ (с нормой, непревосходящей 1). Значит, он представим в виде интеграла от f по некоторой обобщенной мере, которую обозначим $P(s, x, t, \cdot)$, чтобы подчеркнуть зависимость от зафиксированных параметров.

Теперь надо доказать, что для этой функции $P(s, x, t, A)$ условия 1°–4° выполнены.

В силу 3) это обычная мера, а в силу 4) — вероятностная, т.е. 1° справедливо.

Условие 5) превращается в равенство $P(s, x, s, A) = \delta_x(A)$, т.е. 3° также установлено.

Осталось проверить измеримость (2°) и уравнение Колмогорова-Чепмена (4°).

Для любого борелевского множества A имеет место равенство

$$P(s, x, t, A) = \int_{\mathfrak{X}} P(s, x, t, dy)\chi_A(y).$$

Поскольку подинтегральная функция χ_A разрывна, мы не можем утверждать, что интеграл является измеримой функцией x.

Пусть сначала A — замкнутое множество. Положим

$$f(x) = e^{-\rho(x,A)},$$

где $\rho(x, A)$ — расстояние от точки x до множества A. Функция $f(x)$ непрерывна, $f(x) = 1$ для $x \in A$, а для $x \notin A$ заключена строго между 0 и 1. При любом $n \geq 1$ функция $f^n(x)$ также непрерывна, поэтому и

$$(P^{st}f^n)(x) = \int_{\mathfrak{X}} P(s, x, t, dy)f^n(y) \text{ — непрерывная,}$$

а значит, измеримая функция. Очевидно, что $f^n(x) \to \chi_A(x)$ при $n \to \infty$, следовательно, по теореме о мажорируемой сходимости

$$P(s, x, t, A) = \int_{\mathfrak{X}} P(s, x, t, de)\chi_A(y) =$$
$$= \int_{\mathfrak{X}} P(s, x, t, dy) \lim_{n\to\infty} f^n(y) = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathfrak{X}} P(s, x, t, dy)f^n(y).$$

Предел измермых функций измерим, т.е. для замкнутых множеств A справедливость 2° доказана.

Измеримость сохраняется при сложении непересекающихся множеств, вычитании из множества его части и при монотонном предельном переходе. Значит, она имеет место и для наименьшей системы множеств, замкнутой относительно указанных операций и содержащей все замкнутые множества. Так как пересечение замкнутых множеств замкнуто, то эта система совпадает с наименьшей σ-алгеброй, содержащей замкнутые множества, т.е. с борелевской σ-алгеброй. (Доказать эти утверждения в качестве задачи).

Теперь проверим выполнение уравнений Колмогорова-Чепмена.

Пусть, как и ранее, $f(x) = e^{-\rho(x,A)}$, где A — замкнутое множество.

В силу условия 6) $P^{st} = P^{su}P^{ut}$ имеем

$$\int_{\mathfrak{X}} P(s,x,t,dy)f^n(y) = \left(P^{st}f^n\right)(x) = \left(P^{su}\left(P^{ut}f^n\right)\right)(x) = \\ = \int_{\mathfrak{X}} P(s,x,u,dz)\int_{\mathfrak{X}} P(u,z,t,dy)f^n(y).$$

Переходя к пределу при $n \to \infty$, получим

$$P(s,x,t,A) = \int_{\mathfrak{X}} P(s,x,u,dz)P(u,z,t,A)$$

для любого замкнутого множества A.

Обе части указанного равенства являются мерами. Поскольку в метрическом пространстве мера любого борелевского множества может быть востановлена по ее значениям на замкнутых множествах, то равенство справедливо и для любых борелевских множеств. □

<u>Задача</u>. Показать, что для любого борелевского множества A в метрическом пространстве и любого $\varepsilon > 0$ существуют такие множества F (замкнутое) и G (открытое), что

$$F \subset A \subset G \text{ и } P(G \setminus F) < \varepsilon.$$

Новый класс процессов, которые будут рассмотрены, — это *диффузионные процессы.*

<u>Определение</u>. Марковский процесс X_t со значениями в фазовом пространстве $(\mathbb{R}^1, \mathfrak{A}^1)$ и переходной функцией $P(s,x,t,A)$ называется диффузионным, если

1) для любых $x \in \mathbb{R}^1$ и $\varepsilon > 0$ равномерно по $s < t$

$$\int\limits_{|x-y|>\varepsilon} P(s,x,t,dy) = o(t-s).$$

2) существуют такие функции $a(s,x)$, $b^2(s,x)$, что для любых $x \in \mathbb{R}^1$ и $\varepsilon > 0$ равномерно по $s < t$

$$\int\limits_{|x-y|\le\varepsilon} P(s,x,t,dy)(y-x) = a(s,x)(t-s) + o(t-s),$$

$$\int\limits_{|x-y|\le\varepsilon} P(s,x,t,dy)(y-x)^2 = b^2(s,x)(t-s) + o(t-s).$$

Функция $a(s,x)$ называется *коэффициентом сноса*, а $b^2(s,x)$ — *коэффициентом диффузии*. Нетрудно проверить, что a — это урезанное условное математическое ожидание, а b^2 — урезанная условная дисперсия.

<u>Задача</u>. Показать, что достаточно требовать выполнение 1) при любом $\varepsilon > 0$, а 2) лишь при некотором $\varepsilon_0 > 0$, тогда процесс диффузионный.

Оказывается, что при некоторых дополнительных условиях коэффициенты a и b полностью определяют переходную функцию процесса $P(s,x,t,A)$. Чтобы это понять, выведем обратное уравнение Колмогорова.

<u>Теорема</u>. *Пусть непрерывная ограниченная функция $f(x)$ такова, что $g(s,x) = P^{st}f(x)$ имеет непрерывные ограниченные производные по x 1-го и 2-го порядка, а функции $a(s,x)$ и $b^2(s,x)$ непрерывны. Тогда существует производная функции $g(s,x)$ по s и при $s \in (0,t)$, $x \in \mathbb{R}^1$ справедливо уравнение в частных производных*

$$-\frac{\partial g}{\partial s} = a(s,x)\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{1}{2}b^2(s,x)\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} \quad \textit{и}$$

$$\lim_{s\uparrow t} g(s,x) = f(x).$$