# 1 Лекция 9

## 1.1 Теорема Вейля о равномерном распределении

Введем необходимые определения. Пусть $\mathbb{T}^n$ - $n$ -мерный тор, параметризованный $n$ угловыми переменными $\{x_1, \dots, x_n mod 2\pi\}$

Рассмотрим преобразование $T : x_j \mapsto x_j + \alpha_j (mod 2\pi)$, оно задается числами $\alpha_1, \dots, \alpha_n$. $\forall x \mapsto x, Tx, T^2x, \dots$ - орбита (траектория) точки $x$.

Теорема(Вейля): Пусть $m_1\alpha_1 + \ldots + m_n\alpha_n + m_0 2\pi = 0 \Leftrightarrow m_1 = m_2 = \ldots = m_n = m_0 = 0$, пусть $f\colon \mathbb{T}^n \to \mathbb{R}$ - интегрируема по Риману. Тогда $f(T^m x) \longrightarrow \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{T}^n} f(x) d^n x, m \to \infty$ равномерно по $x$.

Следствие 1: Траектория (последовательность) $T^k x, k = 0, 1, 2 \dots$ равномерно распределена по $\mathbb{T}^n$ при всех $x$.

Следствие 2: (Кронекер) Пусть $\alpha_1, \dots, \alpha_n; \beta_1, \dots, \beta_n$ - заданы, причем $\alpha_1, \dots, \alpha_n, 1$ - рационально несоизмеримы. Тогда $\forall \varepsilon$ неравенство $|p\alpha_j + \beta_j + q_j (mod 1)| < \varepsilon, 1 \leq j \leq n$ имеет бесконечно многорешений в целых числах $p, q_1, \dots, q_n$.

Рассмотрим непрерывный аналог.

Пусть $f\colon \mathbb{T}^n \to \mathbb{R}$ - непрерывная функция. Обозначим через $\omega$ набор частот $\{\omega_1, \dots, \omega_n\}$, где $\omega_i = const$. Если движение задается урвнениями $x_j = \omega_j t + x_j^0, 1 \leq j \leq n$ , то такое движение называется условно-периодическим.

Набор частот $\omega$ называется резонансным, если выполнена следующая импликация: $k_1\omega_1 + \dots + k_n\omega_n = 0 \Leftrightarrow k_j = 0 \forall j \in \overline{1,n}$.

Функция $f(\omega_1 t + x_1^0, \dots, \omega_n t + x_n^0)$ называется условно-периодической функцией по $t$ . Возьмем фиксированный нерезонансный набор частот и введем следующее обозначение:

$\mathbb{I}(t, x^0) = \int_0^\tau f(\omega_1 t + x_1^0, \dots, \omega_n t + x_n^0)\, dt$

**Теорема:** $\mathbb{I}(t, x^0) = \lambda\tau + \overline{o}(\tau)$**,** $\forall x^0 \in \mathbb{T}^n$**,**

$\lambda = const = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{T}^n} f(x)\, d^n x = < f >$ .

**Замечание:** Теорема Вейля имеет еще такую эквивалентную формулировку:

$\lim_{\tau\to\infty} \frac{\mathbb{I}(\tau, x^0)}{\tau} = \lambda, \forall x^0 \in \mathbb{T}^n$.

**Теорема (Боля о знакопостоянстве интегралов от условно-периодических функций):** Если частоты рационально несоизмеримы, $< f >= 0$ то существует точка $x_1^0 (x_2^0)$ такая, что $\mathbb{I}(t, x^0) \geq (\leq) 0, \forall t \in \mathbb{R}, f(x_i^0) = 0, (i = 1, 2)$.

**Пример:** Пусть $n = 1$ , тогда $f(x + 2\pi) = f(x), \forall x \in \mathbb{R}, < f >= 0$ . Тогда $\exists x_0$ : $\int_{x_0}^x f(z)\, dz \geq 0, f(x_0) = 0$.

Рассмотрим:

$f = \cos x \Rightarrow < \cos x >= 0$

$\int_{x_0}^x \cos z\, dz = \sin x - \sin x_0$. Требуется, чтобы: $\sin x - \sin x_0 \geq 0 \Rightarrow \sin x_0 = -1 \Rightarrow \cos x_0 = 0$.

Сделаем замену времени:

$z = t + x^0$, $\int_{x_0}^x f(z)\, dz = \int_0^{x - x_0} f(t + x_0)\, dt$.

По формуле Ньютона - Лейбница получаем:

$\int_{x_0}^x f(z)\, dz = F(x) - F(x_0)$ , $F'(x) = f(x)$ , $F(x + 2\pi) = F(x)$ т $< f >= 0$.

Можно взять $x_1^0 = x_{min}, x_2^0 = x_{max}$ - точки экстремума функции $F$. Пример действительно иллюстрирует теорему Боля в случае $n = 1$

**Доказательство теоремы Боля:**

1. Пусть сначала $f$ - тригонометрический полином, обозначим $k = (k_1, \ldots, k_n) \in \mathbb{Z}^n$. Тогда $f(x) = \sum'_{|k|\leq N} f_k e^{i(k,x)}$, где введено следующее обозначение для суммы $\sum' = \sum_{k\neq 0}$. Считаем, что $(k,x) = \sum_{j=1}^n k_j x_j$.

Рассмотрим $g(x) = \sum'_{|k|\leq N} \frac{f_k}{i(k,\omega)} e^{i(k,x)}$. $\sum'^{n}_{j=1} \frac{\partial g}{\partial x_j}\omega_j = f \Rightarrow [g(\omega t + x^0)]^{\dot{}} = f(\omega t + x^0)$

$\mathbb{I}(\tau, x^0) = g(\omega\tau + x^0) - g(x^0)$ Пусть $x^0 = x_{min}$ - точка минимума функции $g(x) \Rightarrow$ $\forall\tau \mathbb{I}(\tau, x^0) \geq 0 \Rightarrow f(x^0) = 0$

2 . Применим теорему Вейерштрасса, то есть возьмем $\forall f$ - произвольную непрерывную функцию, пусть еще выполнено, что: $< f >= 0$. Тогда $\forall\varepsilon > 0, \varepsilon = \frac{1}{m}$ существует тригонометрический полином $\exists f_m(x), < f_m(x) >= 0$ такой что: $\max_{x\in\mathbb{T}^n} |f(x) - f_m(x)| < \varepsilon = \frac{1}{m}$

Рассмотрим $\mathbb{I}_m(\tau, x^0) = \int_0^\tau f_m(\omega t + x^0)\, dt$ из предыдущего $\Rightarrow \exists x_m^0 : \mathbb{I}_m(\tau, x_m^0) \geq 0$ $\forall\tau, f_m(x_m^0) = 0$. Можем выбрать сходящуюся подпоследовательность $x_{m_n}^0 \to x^0, (n \to \infty)$. Выполняется следующее утверждение:

$\forall\tau : \mathbb{I}(\tau, x^0) \geq 0$ и $f(x^0) = 0$.

Действительно, при фиксированном $\tau$ выполняется: $\mathbb{I}_{m_k}(\tau, x_{m_k}^0) \to \mathbb{I}(\tau, x^0), k \to \infty$.

$\square$

**Упражнение:** Пусть $\omega_1, \ldots, \omega_n$ рационально соизмеримы и $< f >= 0$. Тогда $\exists$ хотя бы две различные точки такие, что:

$\mathbb{I}(\tau, x^0) \geq 0 (\leq 0) \forall\tau \quad f(x^0) = 0$

**Пример:** $\omega_j = 0 \quad \Rightarrow \mathbb{I}(\tau, x^0) = \tau f(x^0), \quad f(x^0) = 0$

Пусть теперь $n = 2$ , рассмотрим: $\mathbb{I}(\tau, x_1^0, x_2^0) = \int_0^\tau f(\omega_1 t + x_1^0, \omega_2 t + x_2^0)\, dt$ . Будем считать, что $\frac{\omega_1}{\omega_2}$ - иррационально и $< f >= 0$ . Тогда справедлива следующая теорема.

**Теорема:** Если функция $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$, то $\forall\varepsilon > 0$ и $T > 0$ существует $\exists\tau > T$ такое, что: $\mathbb{I}(\tau, x^0) < \varepsilon, \forall x^0 \in \mathbb{T}^2$

Вопрос: А что будет для $n = 3$?