Notación matemática en álgebra lineal

El álgebra lineal juega un rol fundamental en la construcción de algoritmos de inteligencia artificial para representar, estructurar, y realizar operaciones sobre los datos recolectados en un contexto particular. Aquí vamos a recordar algunos elementos de notación matemática en la teoría de funciones y álgebra lineal.

Conjuntos numéricos

Los conjuntos numéricos son agrupaciones de números de acuerdo con sus características o propiedades matemáticas. Los más utilizados con su respectiva notación son: reales ($\mathbb{R}$), enteros ($\mathbb{Z}$), complejos ($\mathbb{C}$), y naturales ($\mathbb{N}$).

Funciones

Una función de un conjunto X a un conjunto Y asigna o "mapea" a cada elemento de X exactamente un elemento de Y. Sea x un elemento de X. Entonces, la expresión $f(x)$ indica que f le está asignando a x un elemento de Y. Dos ejemplos gráficos de una función se muestran en la Figura 1. Note que, en una función, ningún elemento de X puede tener más de un elemento de Y asignado.

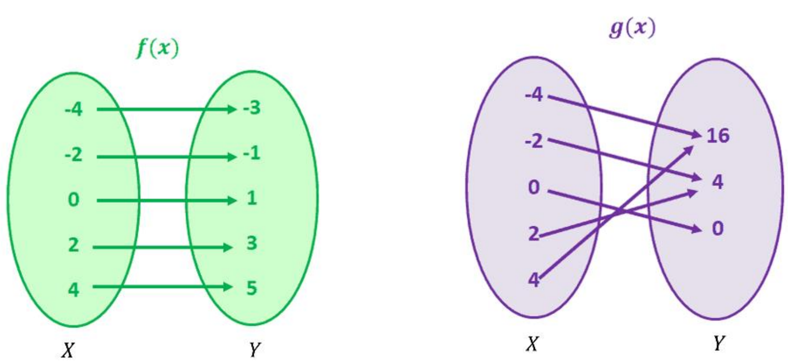

Figura 1. Ejemplos gráficos de funciones.

Cuando la función f asigna o mapea elementos de X a un elemento del conjunto Y, esta función la podemos escribir usando la siguiente notación:

$$f: X \to Y$$

Por ejemplo, sea $x \in \mathbb{R}$. En otras palabras, x es un número que pertenece al conjunto de los reales. La función $f(x) = 3x^2$ toma x y realiza una operación que produce de nuevo un número real. Por lo tanto, f es una función que mapea del conjunto de números reales al conjunto de números reales. Aquí podemos decir que $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Espacio vectorial $\mathbb{R}^n$

Cada elemento del espacio vectorial $\mathbb{R}^n$ es la tupla ordenada de n números reales. Por ejemplo, elementos de $\mathbb{R}^3$ son:

$$x = \begin{bmatrix} 1 \\ -2.3 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad y = \begin{bmatrix} 5 \\ 10 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Aquí, cada elemento de $\mathbb{R}^n$ se denomina 'vector'. En $\mathbb{R}^n$ está definida la operación suma entre vectores, y la multiplicación por escalar. Por ejemplo, para los vectores x y y definidos anteriormente, la operación suma se puede aplicar de la siguiente forma:

$$x + y = \begin{bmatrix} 1 \\ -2.3 \\ 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 \\ 10 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 7.7 \\ 7 \end{bmatrix},$$

y la multiplicación por escalar $3x$ se definiría como:

$$3x = \begin{bmatrix} 3 \\ -6.9 \\ 12 \end{bmatrix}.$$

Vectores y matrices

Un vector en $\mathbb{R}^n$ típicamente se escribe como una columna con n números reales de la siguiente forma:

$$x = \begin{bmatrix} 1 \\ -2.3 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Al vector x descrito de esa forma se le dice **vector columna**, ya que se puede ver como una tabla que tiene *n* filas y 1 columna. A menos que nos digan lo contrario, un vector en $\mathbb{R}^n$ siempre va a ser un vector columna.

Una matriz es un arreglo de números dispuestos en filas y columnas. Una matriz con 2 filas y 3 columnas se dice que tiene dimensión 2x3. Si una matriz de tamaño $n \times m$ contiene sólo números reales, podemos decir que la matriz pertenece al conjunto $\mathbb{R}^{n\times m}$. Ejemplos de matrices son:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 10 \\ 4 & 1.3 & -5 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

Las matrices *A* y *C* son matrices de dimensión 2x2, mientras que la matriz *B* es una matriz de dimensión 2x3. Las **matrices cuadradas** son aquellas matrices que tienen igual número de columnas y de filas, mientras que en las **matrices rectangulares** el número de filas no es el mismo número de columnas. Se puede decir que las matrices *A* y *C* son cuadradas porque tienen el mismo número de filas y columnas, mientras que *B* es una matriz rectangular. La matriz cuadrada *C* se dice que es una matriz **diagonal** ya que los elementos que están por fuera de la diagonal son cero.

La **matriz identidad** I de dimensión *n* es la matriz de $n \times n$ cuya diagonal se tienen solo 1s, y fuera de la diagonal ceros. Un ejemplo de matriz identidad de 2x2 es:

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Una propiedad de esta matriz es que la multiplicación de una matriz identidad por cualquier otra matriz *A* devuelve la misma matriz *A*.

Algunas operaciones entre vectores y matrices

La **operación de transposición** de un vector o una matriz *A* se refiere al proceso de ubicar el elemento de la fila *i* y columna *j* de la matriz original *A* en la posición de la fila *j* y columna *i* del transpuesto A^T. Si A es una matriz o un vector, entonces A^T se refiere a la matriz o vector que resulta después del proceso de transposición. Decimos que A^T es la **transpuesta** de A. Aquí damos unos ejemplos de transposiciones:

$$\text{Si} \quad x = \begin{bmatrix} 1 \\ -2.3 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad \text{entonces} \qquad x^T = [1 \quad -2.3 \quad 4], \quad \text{y} \qquad x = [1 \quad -2.3 \quad 4]^T$$

Universidad de los Andes | Vigilada Mineducación Reconocimiento como
Universidad: Decreto 1297 del 30 de mayo de 1964.
Reconocimiento personería jurídica: Resolución 28 del 23 de febrero de 1949 Minjusticia.

Si $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$, entonces $A^T = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$.

Una matriz A que satisface $A = A^T$ se denomina **matriz simétrica**.

La **multiplicación entre matrices y/o vectores** es una operación que produce nuevos vectores y matrices, y define los cimientos sobre los cuales se construyen los algoritmos de inteligencia artificial. Detalles sobre estas operaciones se encuentran en la bibliografía referenciada al final de este documento.

Sean $x,\ y \in \mathbb{R}^n$ (es decir, dos vectores que pertenecen ambos a $\mathbb{R}^n$) definidos como $x = [x_1, x_2, \cdots, x_n]^T$ y $y = [y_1, y_2, \cdots, y_n]^T$. El **producto punto** entre dos vectores $x,\ y \in \mathbb{R}^n$ se define como:

$$x^T y = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \ .$$

En otras palabras, el producto punto entre dos vectores corresponde a la suma del producto de cada uno de los elementos de x con los elementos de y.

Universidad de los Andes | Vigilada Mineducación Reconocimiento como
Universidad: Decreto 1297 del 30 de mayo de 1964.
Reconocimiento personería jurídica: Resolución 28 del 23 de febrero de 1949 Minjusticia.