# QUADRATURA DE CLENSHAW-CURTIS

**Gustavo Sanches Dalazen**
UFPR - CM103 - 2018s2
dida.sanches@hotmail.com

**PALAVRAS CHAVE. Clenshaw-Curtis, Integração Numérica.**

## 1. Introdução

A Quadratura de Clenshaw-Curtis é um método de aproximação para integrais. A construção teórica deste método possui duas interpretações.

Uma delas é fortemente inspirada na série de Fourier: a ideia é trocar a integral de uma função f pela integral de funções periódicas (que são bem mais fáceis de aproximar, tendo em vista que a transformada de Fourier discreta é uma boa aproximação, e integrar a transformada de Fourier discreta se transforma no Método do Trapézio).

Outra é pensando em determinar os pesos quando usamos os máximos e mínimos do polinômio de Chebyshev como nós (exceto pelos extremos), sendo estes "pesos" no mesmo sentido de quando deduzimos a Quadratura Gaussiana.

O objetivo do trabalho será mostrar as duas interpretações da dedução do método e comparar com exemplos numéricos a Quadratura de Clenshaw-Curtis com os métodos de integração já vistos na disciplina: Trapézio Repetido, Simpson Repetido, Quadratura Gaussiana.

## 2. Motivação teórica

### 2.1. Abordagem via quadratura clássica

A primeira abordagem que motiva a aproximação pela Quadratura de Clenshaw-Curtis será bastante direta, como descrito em [2]. Em qualquer quadratura, desejamos escrever

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \approx \sum_{k=0}^{n} f(x_k)w_k,$$

sendo $x_k$ nós no intervalo $[-1, 1]$, $n$ um número natural e $f$ a função que desejamos integrar no intervalo $[-1, 1]$.

Na Quadratura de Clenshaw-Curtis, tomamos $n \geq 2$ e $x_k$, $k = 0, \ldots, n$ como os extremos do polinômio de Tchebychev de grau $n$, por dizer, $x_k = cos(\frac{k\pi}{n})$. Para encontrar os pesos $w_k$, comparamos com a integral (no mesmo intervalo) do polinômio interpolador de $f$ que passa pelos nós estabelecidos.

Sejam $l_k(x) = \prod_{i=0, i\neq k}^{n} \frac{x-x_k}{x_i-x_k}$ os elementos da base de Lagrange para os polinômios de grau $n$. A interpolação de $f(x)$ nos fornece $f(x) \approx \sum_{k=0}^{n} f(x_k)l_k(x)$, e portanto

$$w_k = \int_{-1}^{1} l_k(x)\,dx$$

O algebrismo para determinar uma expressão melhor para os coeficientes $w_k$ fogem ao escopo do trabalho, então apenas os explicitaremos abaixo:

$$w_k = \frac{c_k}{n}\left(1 - \sum_{i=1}^{[\frac{n}{2}]} \frac{b_i}{4i^2-1}\cos\left(\frac{2ik\pi}{n}\right)\right),$$

com $b_i = \begin{cases} 1, & \text{se } i = \frac{n}{2} \\ 2, & \text{se } i < \frac{n}{2} \end{cases}$ e $c_k = \begin{cases} 1, & \text{se } k \equiv 0\; mod(n) \\ 2, & \text{c.c.} \end{cases}$.

## 2.2. Mudança de variável e série de Fourier

Outra abordagem para introduzir a Quadratura de Clenshaw-Curtis pode ser vista em [1]. Consiste em efetuar a mudança de variável $x(\theta) = \cos(\theta)$ na integral

$$\int_{-1}^{1} f(x)\, dx,$$

obtendo a seguinte integral:

$$\int_{0}^{\pi} f(\cos\theta) \sin\theta \, d\theta$$

Note que se $f$ é contínua, então $f(\cos\theta)$ é uma função periódica (e par) de período $2\pi$ que também é contínua, portanto pode ser representada por sua série de Fourier (que será uma série de cossenos):

$$f(\cos\theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(k\theta),$$

com

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\cos x) \cos(kx)\, dx = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\pi} f(\cos x) \cos(kx)\, dx.$$

Substituindo na integral que desejávamos integrar novamente, obtemos:

$$\int_{0}^{\pi} \left( \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(k\theta) \right) \sin\theta \, d\theta$$

$$= \frac{a_0}{2} \int_{0}^{\pi} \sin\theta \, d\theta + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \int_{0}^{\pi} \cos(\theta k) \sin\theta \, d\theta$$

$$= a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \int_{0}^{\pi} \frac{1}{2} \left( \sin((1+k)\theta) + \sin((1-k)\theta) \right) \, d\theta$$

Quanto ao somatório na expressão acima, o termo $k = 1$ é nulo. Para $k \geq 2$, a primitiva do integrando será

$$-\frac{1}{2} \left( \frac{\cos((1+k)\theta)}{k+1} + \frac{\cos((1-k)\theta)}{1-k} \right),$$

e portanto

$$\int_{0}^{\pi} f(\cos(\theta)) \sin(\theta)\, d\theta = a_0 + \sum_{k=2}^{\infty} a_k \left( \frac{1 + (-1)^k}{1 - k^2} \right).$$

Note que apenas os elementos pares do somatório são não nulos. A aproximação utilizando a Quadratura de Clenshaw-Curtis é obtida truncando a série acima em algum índice. Faltaria, a priori, calcular os coeficientes $a_k$'s, que também são integrais.

Mas acontece algo deveras agradável ao tratar de integrais de funções periódicas: a aproximação da integral de uma função periódica utilizando a regra do trapézio repetida em um intervalo de comprimento $2\pi$ é o mesmo que integrar a aproximação da função pela sua série de Fourier discreta, ou seja, é uma aproximação muito boa.

Note que todas as funções que aparecem nas integrais dos coeficientes $a_k$ são funções pares, e a integral é de $0$ a $\pi$. Ou seja, é metade da integral de $-\pi$ a $\pi$ dessa mesma função. Portanto, a aproximação utilizando a regra do trapézio repetida é muito boa!

Fazendo o restante das contas, chegamos em expressões similares às apresentadas na seção acima. Aqui, no entanto, não estamos pensando em pesos $w_k$ e nós pré-definidos, mas estes aparecem naturalmente na aproximação dos coeficientes $a_k$'s e do truncamento da série.

## 3. Código e análises

Com os pesos $w_k$ definidos como no final da seção 2.1, escrevemos o seguinte código para calcular a integral de uma função $f$ no intervalo $[-1, 1]$, usando $n + 1$ nós:

```
function quad_cc(f, n)
    x = zeros(1,n+1);
    c = zeros(1,n+1);
    w = zeros(1,n+1);
    b = zeros(1,div(n,2)+1);
    for i=0:n
        x[i+1] = cos((i)*pi/n);
        if mod(i,n)==0
            c[i+1] = 1;
        else
            c[i+1] = 2;
        end
    end
    for i=0:div(n,2)
        if i==n/2
            b[i+1]=1;
        else
            b[i+1]=2;
        end
    end
    for i=0:n
        soma=0
        for j=1:div(n,2)
            soma = soma + b[j+1]*cos(2*j*(i)*pi/n)/(4*j^2 -1);
        end
        w[i+1] = c[i+1]*(1-soma)/n
    end
    soma=0;
    for i=0:n
        soma = soma + f(x[i+1])*w[i+1];
    end
    return soma
end
```

Comparamos o método da Quadratura de Clenshaw-Curtis com o método da Quadratura Gaussiana e os métodos de Simpson e Trapézio repetidos. Escolhemos um conjunto de 10 funções (listadas abaixo) e analisamos os gráficos ”Número de avaliações de função x Erro relativo médio”e ”Número de pontos utilizados na malha x Erro relativo médio”. Tivemos uma limitação - por falta de tempo - para fazer uma comparação melhor com a Quadratura Gaussiana. Conseguimos apenas a Quadratura Gaussiana até ordem 8, pois a quadratura de ordem geral necessitaria algum conhecimento sobre Polinômios de Legendre. Integrando sempre de $-1$ a 1, o banco de funções escolhido foi:

- $f_1 = \begin{cases} 0, & \text{se } x = 0 \\ 3x^2 \sin \frac{1}{x} - x \cos \frac{1}{x} + x^2 & \text{se } x \neq 0 \end{cases}$

- $f_2 = 2xe^{x^2} + 1$
- $f_3 = e^{x+4} \sin x$
- $f_4 = \sqrt{x+1}$
- $f_5 = 1000x^5 + 50x^4 - \frac{95}{3}x^3 - \frac{23}{2}x^2 + 6x$
- $f_6 = 500x^5 - \frac{3625}{3}x^3 + 1296x + 100$
- $f_7 = 5000x^4 + 200x^3 - 95x^2 - 23x + 6$
- $f_8 = ln(x+2)$
- $f_9 = (\sin x)^5$
- $f_{10} = \frac{1}{\sqrt{1,21 - x^2}}$

O erro absoluto médio foi calculado efetuando a média, para cada função f, dos valores:

$$\left| \frac{Int_{exata} - Int_{aprox}}{Int_{exata}} \right|.$$

Obtemos os seguintes gráficos:

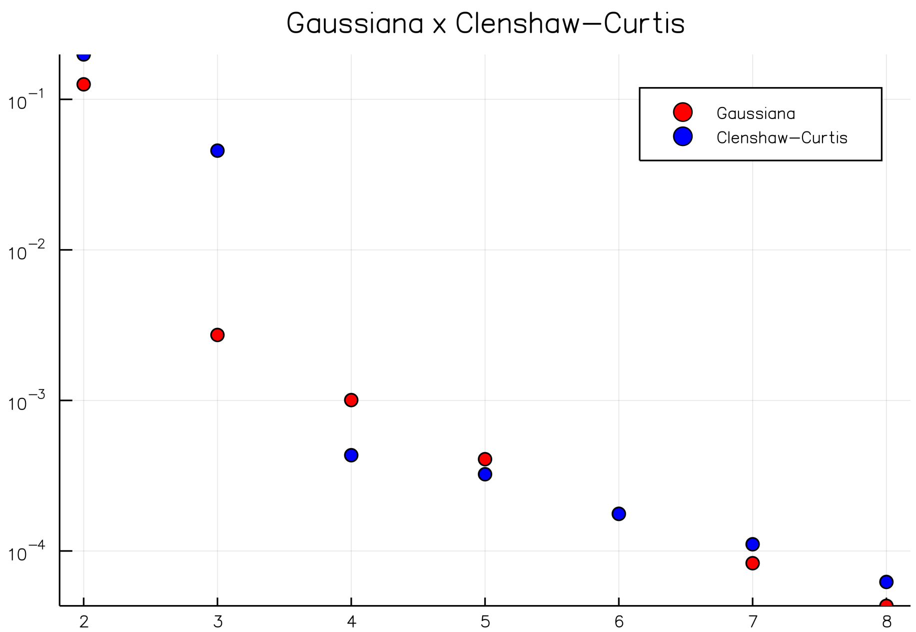


Figura 1: Quadratura de Clenshaw-Curtis e a Quadratura Gaussiana

Este gráfico compara a quadratura de Clenshaw-Curtis com a quadratura Gaussiana, com o número de avaliações de função variando de 2 até 8. Apesar do número de avaliações ser baixo, conseguimos notar que a quadratura Gaussiana leva uma pequena vantagem.

Também temos o seguinte gráfico comparando a quadratura de Clenshaw Curtis com as regras do Trapézio e de Simpson repetidos:

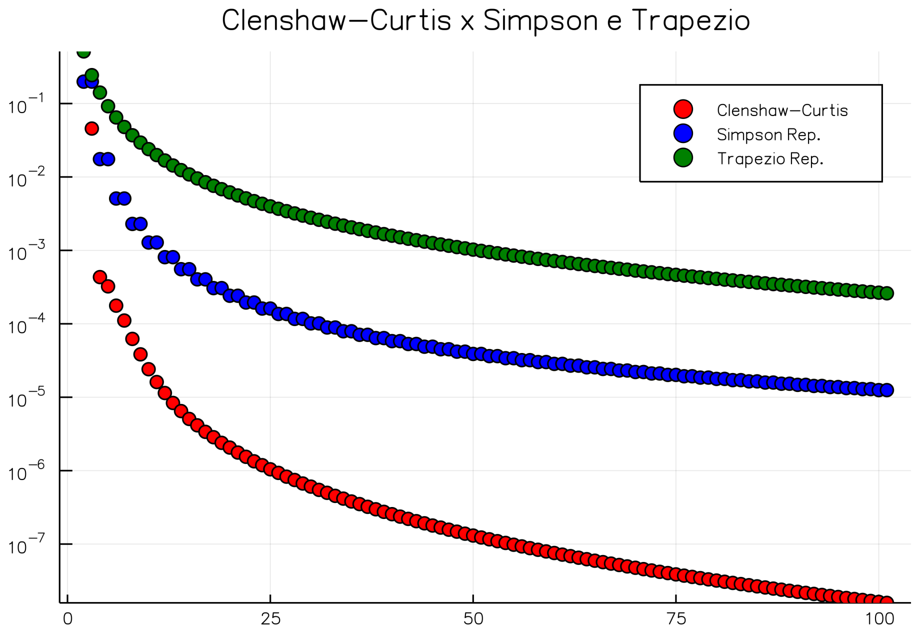


Figura 2: Quadratura de Clenshaw-Curtis, Regra do Trapézio e Regra de Simpson repetidos

Concluimos que a Quadratura de Clenshaw-Curtis leva ligeira desvantagem comparado a Quadratura Gaussiana, mas é bastante superior às regras do Trapézio e Simpson repetidos. Uma possível vantagem em relação à Quadratura Gaussiana é que a fórmula geral dos pesos e os nós são bastante fáceis de calcular. Já a outra quadratura, teríamos que calcular os pesos e nós dependendo dos Polinômios de Legendre.

**Referências**

[1] Domingues, R. O. (2016). Teoria, implementação e comparação de métodos de integração numérica. `https://abelsiqueira.github.io/assets/renan-integral.pdf`. Acessado: 2018-11-06.

[2] Waldvoge, J. (2018). Fast construction of the fejér and clenshaw-curtis quadrature rules. `http://www.sam.math.ethz.ch/~waldvoge/Papers/fejer.pdf`. Acessado: 2018-11-06.