EXAMEN2022parcial2.pdf

user_3087779

Técnicas de Optimización

3º Grado en Ingeniería Informática

Escuela Técnica Superior de Ingeniería Informática
Universidad Politécnica de Valencia

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE VALÈNCIA

etsinf

GII - Técnicas de Optimización

Segundo examen parcial

6 junio 2022

Apellidos

Nombre

DNI

Firma

Grupo de matrícula ☐ Mañana ☐ Tarde

- Contesta razonada y claramente a las preguntas que se plantean.
- No se permite el uso de ningún tipo de apuntes, anotaciones, etc.
- No se permite desgrapar las hojas.
- No se facilitarán hojas de escritura adicionales.
- No se permite el uso de ningún dispositivo electrónico, excepto calculadoras no programables.
- Se permite escribir las respuestas a lápiz.
- Tiempo estimado: 2 horas y 30minutos.

Departamento de Estadística e Investigación Operativa Aplicadas y Calidad. UPV

Dado el siguiente programa lineal:

$$\left.\begin{array}{ll} \textbf{Min} & \mathbf{z = 20x_1 + 30x_2 + 16\,x_3} \\ \textbf{s.a:} & \mathbf{[R1]\ \frac{5}{2}x_1 + 3\,x_2 + x_3 \geq 3} \\ & \mathbf{[R2]\ x_1 + 3\,x_2 + 2x_3 \geq 4} \\ & \mathbf{x_1, x_2, x_3 \geq 0} \end{array}\right\} (P),$$

cuya solución óptima se incluye en la siguiente tabla,

V. Básicas	B^{-1}		x_B
x_2	2/3	-1/3	2/3
x_3	-1	1	1
$c_B^t\ B^{-1}$	4	6	Z = 36

a) Calcula el intervalo de análisis de sensibilidad del coeficiente en la función objetivo de x_2. ¿Qué conclusiones prácticas se obtienen de este análisis? [1,5 puntos]

b) Calcula el coste de oportunidad asociado a la restricción [R2]. Indica el signo con el que lo mostraría LINGO y describe su significado.
Calcula el intervalo de análisis de sensibilidad del segundo miembro de dicha restricción. ¿Qué conclusiones prácticas se obtienen de este análisis? [1,5 puntos]

Dado el siguiente programa lineal:

$$\left.\begin{array}{ll}\mathbf{Min} & \mathbf{z = x_1 - 2x_2 + 2x_3} \\ \mathbf{s.a:} & \mathbf{[R1]\ \ x_1 + x_2 - 2x_3 \leq 4} \\ & \mathbf{[R2]\ \ x_1 - x_2 - x_3 \geq 3} \\ & \mathbf{x_1, x_2, x_3 \geq 0 \text{ y enteras}}\end{array}\right\} (\mathrm{P}),$$

Cuya solución óptima continua se muestra en la tabla siguiente:

V.Básicas	B^{-1}		x_B
x_2	1/2	-1/2	1/2
x_1	1/2	1/2	7/2
$c_B^t B^{-1}$	-1/2	3/2	Z = 5/2

a) Aplica el algoritmo de Bifurcación y Acotación (B&B) hasta encontrar la **primera solución factible** del problema (P). Recorre el árbol de soluciones utilizando la **técnica de la mejor cota (en anchura).** Comienza bifurcando la variable X1 y, en cada nodo, empieza acotando inferiormente (≥) las variables.
Dibuja el árbol de soluciones generado y en cada nodo, indica el valor de las variables decisión y de la función objetivo. [2,25 puntos]

b) La solución encontrada en a), ¿es óptima? Justifica tu respuesta. En caso de que no lo sea, explica cómo continuaría el proceso de búsqueda de la solución óptima. [0,75 puntos]

c) Explica cómo habría sido el proceso de búsqueda en caso de haber aplicado la técnica del **nodo de creación más reciente (en profundidad)**. ¿Cuál habría sido en este caso la solución óptima? [0,5 puntos]

Una empresa debe suministrar el producto que fabrica a dos de sus clientes. La compañía cuenta con 5 factorías desde las que enviar su producción. Con el fin de hacer frente a un incremento imprevisto de la demanda, la empresa se plantea la posibilidad de ampliar temporalmente la capacidad de producción de algunas de sus factorías.

En concreto, los clientes 1 y 2 demandan exactamente 2.000 y 3.000 toneladas de producto. La tabla siguiente muestra, para cada una de las cinco factorías, el stock disponible actualmente, el coste que tendría ampliar temporalmente su capacidad, y el incremento productivo que supondría dicha ampliación, en caso de realizarse.

	Stock disponible (toneladas)	Coste de la ampliación (miles de euros)	Incremento productivo que supondría la ampliación (toneladas)
Factoría 1	400	50	500
Factoría 2	300	60	1.000
Factoría 3	200	70	1.500
Factoría 4	100	80	2.000
Factoría 5	0	90	2.500

Los costes de envío de la mercancía desde cada factoría a cada cliente se muestran en la siguiente tabla.

Costes de envío (miles de euros/tonelada)	Cliente 1	Cliente 2
Factoría 1	1	5
Factoría 2	1.5	4
Factoría 3	2	3
Factoría 4	2.5	2
Factoría 5	3	1

a) Formula un modelo LINEAL (indicando claramente variables, función objetivo y restricciones) que permita a la empresa conocer la forma más barata de hacer frente a los pedidos de los clientes 1 y 2, utilizando únicamente el stock disponible y el incremento productivo generado por las ampliaciones que se lleven a cabo. [1,25 puntos]

Explica qué hay que modificar, eliminar o añadir en el modelo del apartado (a) para que incluya las siguientes condiciones adicionales, teniendo en cuenta que el modelo resultante debe **continuar siendo lineal**, en cada caso:

b) La empresa se plantea enviar al cliente 2 una cantidad de producto inferior a la demandada (hasta un máximo de 200 toneladas menos). Se sabe que, en caso de que la demanda total no satisfecha sea menor de 50 toneladas, cada tonelada que se deje de servir a este cliente supondrá un coste de 1.900 euros para la empresa (en concepto de pérdidas de ingresos y penalización por demanda no satisfecha), mientras que, en el caso de que la demanda total no satisfecha supere esta cantidad, cada tonelada que se deje de servir a este cliente supondrá un coste de 2.000 euros. [1 punto]

c) Si la factoría 4 envía más de 400 toneladas (en total), entonces la factoría 5 no debe enviar más de 1.500 toneladas (en total). [0,75 puntos]

d) Las factorías 2 y 3 están muy próximas por lo que en el caso de que se realicen ambas ampliaciones, el coste total conjunto de ambas ampliaciones será de 95.000 euros (es decir 15.000 euros inferior a la suma de lo que cuesta cada una por separado). [0,5 puntos]

SOLUCIÓN

SOLUCION PROBLEMA 1:

a)

Como X2 es variable básica, una modificación en su coeficiente en la función objetivo puede afectar a todo Cj-Zj asociado a variable no básica.

En primer lugar, calcularemos $(c_B^t \cdot B^{-1})$ en función del coeficiente en la función objetivo asociado a X2, (c_{x2}):

$$(c_B^t \cdot B^{-1}) = (c_2, 16)\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \left(\frac{2}{3}c_2 - 16, -\frac{1}{3}c_2 + 16\right)$$

La solución actual seguirá siendo solución óptima siempre que Cj-Zj $\geq 0 \forall$j, es decir, asumiendo *h1* y *h2* las variables de holgura de las dos restricciones:

$$C_{x1} - Z_{x1} = 20 - \left(\frac{2}{3}c_{x2} - 16, -\frac{1}{3}c_{x2} + 16\right)\binom{5/2}{1} \geq 0 \rightarrow \boldsymbol{C_{x2} \leq 33}$$

$$C_{h1} - Z_{h1} = C_{h1} - \left(\frac{2}{3}c_{x2} - 16, -\frac{1}{3}c_{x2} + 16\right)\binom{-1}{0} \geq 0 \rightarrow \boldsymbol{C_{x2} \geq 24}$$

$$C_{h2} - Z_{h2} = C_{h2} - \left(\frac{2}{3}c_{x2} - 16, -\frac{1}{3}c_{x2} + 16\right)\binom{0}{-1} \geq 0 \rightarrow C_{x2} \leq 48$$

Y el valor óptimo de la función objetivo es:

$$Z = c_B^t \cdot X_B = (c_2, 16)\binom{2/3}{1} = 2/3c_2 + 16$$

Por tanto, mientras $C_{x2} \in [24, 33]$:

- La solución óptima No cambia (es decir las variables básicas seguirán con el mismo valor)
- El valor de la función objetivo cambia según $2/3c_2 + 16$
- En los límites del intervalo existen soluciones alternativas.

b)

El coste de oportunidad de la Restricción [R2] corresponde al Cj-Zj de la variable de holgura de la restricción. Sea h_2 la variable de holgura de la restricción [R2], el coste de oportunidad es:

$Zh_2 = c_B^t\, B^{-1}\, ah_2 = (4, 6)\binom{0}{-1} = -6$; $Ch_2 - Zh_2 = 6$

Teniendo en cuenta que se trata de una restricción de tipo ≥, el coste de oportunidad es desfavorable a la función objetivo, es decir, el incremento del lado derecho de la restricción implicará un empeoramiento (incremento) del valor de la función objetivo igual a 6. Por tanto, LINGO indicaría un signo NEGATIVO para el coste de oportunidad.

El análisis de sensibilidad del segundo miembro de una restricción determina el intervalo en el que puede variar dicho coeficiente y mantenerse constante el coste de oportunidad de la restricción. Esto ocurrirá mientras la solución óptima actual siga siendo factible, es decir:

$$X_B'^* = \begin{pmatrix} x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = B^{-1}\, b = \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ b_2 \end{pmatrix} \geq 0$$

$x_2' = 2 - \frac{1}{3} b_2 \geq 0 \rightarrow b_2 \leq 6$

$x_3' = -3 + b_2 \geq 0 \rightarrow b_2 \geq 3$

Mientras $b2 \in [3,..., 6]$:

- El coste de oportunidad se mantiene constante e igual a –6. Por tanto, por cada unidad de b2 que se incremente, el valor óptimo de la función objetivo empeorará (aumentara por que estamos minimizando) en 6 unidades.
- La solución óptima y el valor óptimo de la función objetivo cambian según
  $x_2' = 2 - \frac{1}{3} b_2$
  $x_3' = -3 + b_2$
  Z*' = (6 b2+12)
  puesto que la restricción [R2] es limitativa en la solución óptima.
- Se mantiene la misma base óptima.

SOLUCION PROBLEMA 2:

a)

P0:

V.Básicas	B^{-1}		x_B
x_2	1/2	-1/2	1/2
x_1	1/2	1/2	7/2
$c_B^t\, B^{-1}$	-1/2	3/2	Z = 5/2

P0: X1=7/2; X2=1/2; Z=5/2 (Z*=+inf)

P1=P0(X1,X2,X3,X4,X5) + X1 ≥ 4; X1 = 4 + l_1 ; l_1≥ 0

- Necesitamos incrementar X1, para ello VNB en P0: X3, X4 y X5:

$$Y_{X3} = B^{-1}a_{X3} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ -3/2 \end{pmatrix};\quad Y_{X4} = B^{-1}a_{X4} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix};\ Y_{X5} = B^{-1}a_{X5} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}$$

- Para incrementar el valor de X1 necesitamos αij<0, por tanto nos sirven tanto X3 como X5. Aplicamos el criterio del dual para escoger la variable JE:

$$\min \left\{ \left| \frac{c_{xk} - z_{xk}}{y_{xk}} \right| \;\middle|\; y_{xk} < 0 \right.$$

$$z_{x3}=(c^t_B\, B^{-1})\, a_{x3}=(-1/2,\ 3/2)\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix} = -1/2 \rightarrow c_{x3}-z_{x3}= 5/2$$

$$z_{x5}=(c^t_B\, B^{-1})\, a_{x5}=(-1/2,\ 3/2)\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = -3/2 \rightarrow c_{x5}-z_{x5}= 3/2$$

entonces, min{5/3, 3}=5/3 →**JE:x3**

Modelo Equivalente con x1=4+l1

MIN Z= 4+l1 -2x2 + 2 X3

$l_1 + X_2 - 2x3 \leq 0$

$l_1 - X_2 - X_3 \geq -1$

- B^{-1} de la nueva solución:

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & -2/3 \\ -1/3 & -1/3 \end{pmatrix}$$

$$X_B = B^{-1}\, b = \begin{pmatrix} 1/3 & -2/3 \\ -1/3 & -1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}$$

$$Z = 4 + C_B^t X_B = 4 + (-2,2) \begin{pmatrix} 2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix} = 10/3$$

P1 (l1, x2, x3, x4, x5)

V.básicas	B^{-1}		X_B
X2 X3	1/3 -1/3	-2/3 -1/3	2/3 1/3
$c_B^t\, B^{-1}$			**10/3**

P1: X1=4; X2=1/3; Z=10/3; Z*=+inf

Como utilizamos la técnica de la mejor cota, debemos volver a P0 y generar y resolver P2: P0 + X1≤ 1

P2 = P0 (X1,X2,X3,X4) + X1≤3; X1=3-u1; u1 ≤3

A partir de su valor actual, necesitamos decrementar X1

VNB en P0: X3, X4 y X5.

- $Y_{X3} = B^{-1}a_{X3} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ -3/2 \end{pmatrix}$; $Y_{X4} = B^{-1}a_{X4} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$; $Y_{X5} = B^{-1}a_{X5} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}$
- Para decrementar el valor de X1 necesitamos $\alpha ij>0$, por tanto sólo nos sirve X4 →**JE=X4.**
- El pivote del cambio de base será ½.
- Sale de la base la variable que alcanza la cota, X1 que será reemplazada en el modelo por u1.

Modelo Equivalente con $x1=3-u_1$

MIN Z = 3-u1 -2x2 + 2 X3

$-u_1 + X_2 - 2x3 \leq 1$

$-u_1 - X_2 - X_3 \geq 0$

- B^{-1} de la nueva solución:

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X_B = B^{-1}\, b = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$Z = 3 + C_B^t X_B = 3 + (-2,0) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 3 < Z^*$, **actualizamos Z*=3**

P1: (u1, x2, x3, x4)

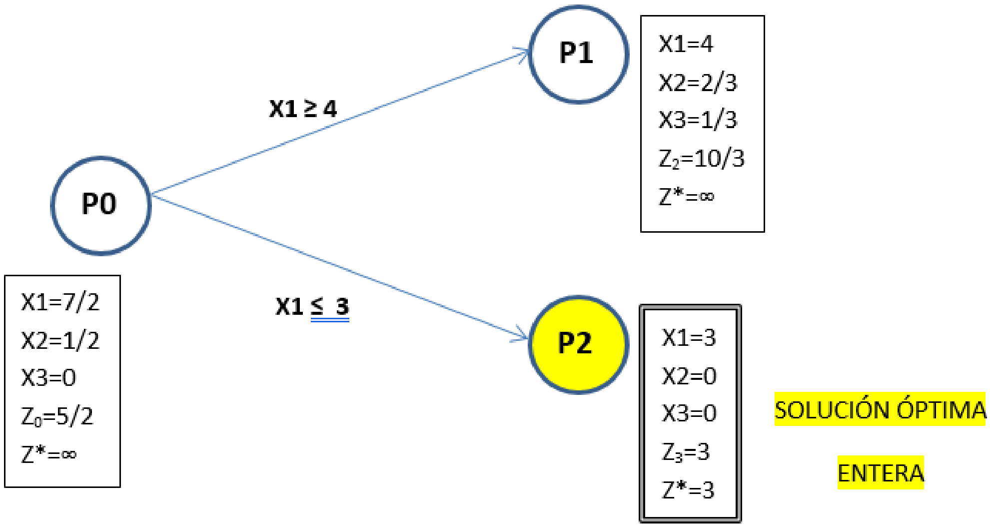
V.básicas	B^{-1}		X_B
X2	0	-1	0
X4	1	1	1
$c_B^t B^{-1}$			**3**

La solución en P2 es:

X1=3; X2=0; X3=0 y Z=3.

Dado que tanto X1 como X2 y X3 toman valor entero, la solución de P2 es solución entera y por tanto solución factible para el problema (P).

El árbol de soluciones que se ha generado es el siguiente:



b)

Como la solución obtenida en P2 es entera, es una hoja del árbol de soluciones. El único nodo que queda abierto es P1, pero como el valor de la función objetivo es peor (mayor) al de la mejor cota (Z1=10/3 > Z*=3) , la solución en P1 se poda de forma que la solución actual (la de P2) es la solución óptima.

c)

En caso de haber aplicado la técnica del nodo de creación más reciente el proceso de búsqueda habría seguido a partir de P_1 hasta alcanzar una hoja. En ese momento habríamos empezado el backtracking hasta llegar de nuevo a P_0 y resolver el problema P_2.

La solución óptima sería la misma que la obtenida en el apartado a).

SOLUCION PROBLEMA 3:

a)

Variables

$\delta_i =$ Binaria. Vale 1 si se realiza la ampliación de la factoría i; vale 0 en caso contrario.

$x_{ij} =$ Cantidad de producto que se enviará desde la factoría i al cliente j (toneladas).

$i = 1, \dots, 5; \quad j = 1, 2.$

Función objetivo

$$\text{Min} \quad z = \begin{aligned} &50\delta_1 + 60\delta_2 + 70\delta_3 + 80\delta_4 + 90\delta_5 + \\ &x_{11} + 5x_{12} + 1{,}5x_{21} + 4x_{22} + 2x_{31} + 3x_{32} + \\ &2{,}5x_{41} + 2x_{42} + 3x_{51} + x_{52} \ \text{(miles de euros)} \end{aligned}$$

Restricciones

Cada factoría puede enviar una determinada cantidad como máximo, en función de si se realiza o no la ampliación:

[Oferta 1] $\quad x_{11} + x_{12} \leq 400 + 500\delta_1$

[Oferta 2] $\quad x_{21} + x_{22} \leq 300 + 1.000\delta_2$

[Oferta 3] $\quad x_{31} + x_{32} \leq 200 + 1.500\delta_3$

[Oferta 4] $\quad x_{41} + x_{42} \leq 100 + 2.000\delta_4$

[Oferta 5] $\quad x_{51} + x_{52} \leq 2.500\delta_5$

Cada cliente debe recibir la cantidad de producto que solicita:

[Demanda 1] $\quad x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} + x_{51} = 2000$

[Demanda 2] $\quad x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} + x_{52} = 3000$

Naturaleza de las variables:

$x_{ij} \geq 0$, para todo i y todo j.

δ_i binaria, para todo i.

b)

Añadimos las siguientes variables:

$h_{21} =$ Demanda del cliente 2 no satisfecha, con tarifa 1 (toneladas).

$h_{22} =$ Demanda del cliente 2 no satisfecha, con tarifa 2 (toneladas).

$\delta_{C2} =$ Binaria. Vale 1 si se activa la tarifa 2 para la demanda no satisfecha del cliente 2; vale 0 en caso contrario.

Modificamos la función objetivo para añadir los costes de la demanda no satisfecha:

$$z = \cdots + 1{,}9h_{21} + 2h_{22}.$$

Modificamos la restricción de la demanda del cliente 2:

[Demanda 2] $\quad x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} + x_{52} + h_{21} + h_{22} = 3000$

La tarifa 1 de demanda no satisfecha se activa sólo si dejamos de servir entre 0 y 50 unidades; a partir de ahí, hasta 200, se activa la 2 (PARA TODAS LAS UNIDADES no servidas). Por tanto:

[Tarifa 1] $\quad h_{21} \leq 50(1 - \delta_{C2})$

[Tarifa 2] $\quad 50\delta_{C2} \leq h_{22} \leq 200\delta_{C2}$

Naturaleza de las nuevas variables:

$$h_{21}, h_{22} \geq 0$$

$$\delta_{C2} \text{ binaria}$$

c)

Añadimos la siguiente variable:

$\delta_{45} =$ Binaria. Vale 1 si la factoría 4 envía más de 400 toneladas de producto; vale 0 en caso contrario.

Añadimos las siguientes restricciones:

[Límite sup. 4] $\quad x_{41} + x_{42} \leq 400 + M\delta_{45}$

[Límite sup. 5] $\quad x_{51} + x_{52} \leq 1.500 + M(1 - \delta_{45})$

donde M representa una cantidad positiva suficientemente grande.

Naturaleza de la nueva variable: $\quad \delta_{45}$ binaria.

MODELIZACIÓN ALTERNATIVA (apartado (c))

Añadimos la siguiente variable:

$\delta_{45} =$ Binaria. Vale 1 si la factoría 4 envía más de 400 toneladas de producto; vale 0 en caso contrario.

Modificamos la función objetivo de la siguiente forma:

Min $z = \cdots + 80(\delta_4 + \delta_{45}) + \cdots$

Modificamos las siguientes restricciones:

[Oferta 4] $x_{41} + x_{42} \leq 100 + 300\delta_4 + 2.000\delta_{45}$

[Oferta 5] $x_{51} + x_{52} \leq 2.500\delta_5 - 1.000\delta_{45}$

Añadimos la siguiente restricción:

[Ampliación 4] $\delta_4 + \delta_{45} \leq 1$

Naturaleza de la nueva variable: δ_{45} binaria.

MODELIZACIÓN ALTERNATIVA (apartado (c))

Añadimos la siguiente variable:

$\delta_{45} =$ Binaria. Vale 1 si la factoría 4 envía más de 400 toneladas de producto; vale 0 en caso contrario.

Modificamos las siguientes restricciones:

[Oferta 4] $x_{41} + x_{42} \leq 100 + 300\delta_4 + 1.700\delta_{45}$

[Oferta 5] $x_{51} + x_{52} \leq 2.500\delta_5 - 1.000\delta_{45}$

Añadimos la siguiente restricción:

[Ampliación 4] $\delta_{45} \leq \delta_4$

Naturaleza de la nueva variable: δ_{45} binaria.

d)

Añadimos la siguiente variable:

$\delta_D =$ Binaria. Vale 1 si se aplica el descuento por la ampliación conjunta de las factorías 2 y 3; vale 0 en caso contrario.

Modificamos la función objetivo añadiendo el siguiente término:

$$z = \cdots - 15\delta_D,$$

lo que representa el hecho de que, en caso de realizar las dos ampliaciones, el coste se reduce en 15.000 euros respecto a la suma de los dos costes por separado.

El descuento sólo se puede aplicar si se realiza la ampliación de las factorías 2 y 3:

[Descuento] $2\delta_{\mathrm{D}} \leq \delta_2 + \delta_3$

Esta restricción tiene el efecto que buscamos: si $\delta_D = 1$ (es decir, si queremos 'tener derecho al descuento'), entonces necesariamente se tiene que cumplir $\delta_2 + \delta_3 = 2$ (es decir, se tienen que realizar las dos ampliaciones).

NOTA: Debido al papel que tiene δ_D en la función objetivo, la restricción [Descuento] que hemos añadido es suficiente. También podría haberse expresado de la siguiente forma, más 'completa', aunque el lado derecho NO es estrictamente necesario en este caso:

[Descuento] $2\delta_D \leq \delta_2 + \delta_3 \leq 1 + \delta_D$.

Naturaleza de la nueva variable añadida:

δ_D binaria.