TOPETSInf2023parcial2.pdf

user_3087779

Técnicas de Optimización

3º Grado en Ingeniería Informática

Escuela Técnica Superior de Ingeniería Informática
Universidad Politécnica de Valencia

Apellidos, Nombre: ____ Firma:

Ejercicio 1 3 puntos

Considera el siguiente problema de Programación Lineal Binaria (P), en el que, de forma deliberada, se ha omitido el criterio de optimización (*):

$$\left.\begin{array}{ll}(*) & z = 9x_1 + 5x_2 + 6x_3 + 4x_4 \\ \text{s.a:} & 6x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 2x_4 \leq 10 \\ & x_3 + x_4 \leq 1 \\ & -x_1 + x_3 \leq 0 \\ & -x_2 + x_4 \leq 0 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \in \{0, 1\}\end{array}\right\} (P)$$

Para resolver el problema (P), se ha aplicado el algoritmo de bifurcación y acotación y en la página siguiente se muestran las iteraciones resultantes. En cada subproblema, se indica el valor de la función objetivo y de las variables decisión, así como la cota inferior y superior existentes sobre cada variable. El número de cada subproblema corresponde al orden en que se ha generado.

A partir de la información proporcionada por el algoritmo, responde a las siguientes cuestiones de forma razonada.

a) Representa en forma de árbol los pasos seguidos por el algoritmo. Indica claramente qué solución representa cada nodo del árbol y qué cota es la que se aplica en cada rama. Razona cuál es el criterio de la función objetivo e indica también, en cada nodo, el valor que va tomando la cota de la solución óptima entera. **[0,75 puntos]**

b) ¿Qué criterio, de los vistos en la asignatura, se ha utilizado para generar el árbol de soluciones? Justifica tu respuesta. **[0,25 puntos]**

c) De acuerdo con el algoritmo branch-and-bound y el orden de ramificación aplicado en este caso, explica si en este árbol hay nodos que no deberían haberse generado y si, por el contrario, falta bifurcar algún nodo. Justifica tu respuesta en cualquier caso. **[0,75 puntos]**

d) Con la información disponible, ¿es posible saber cuál es la solución óptima del problema? Si no lo es, indica cuál es la mejor solución entera encontrada. **[0,5 puntos]**

e) ¿Qué modelo se ha resuelto en el nodo (P_8)? Especifica claramente su función objetivo y sus restricciones. **[0,75 puntos]**

(P_1)	z = 16,5		
Variable	Valor	Cota inf.	Cota sup.
x_1	5/6	0	1
x_2	1	0	1
x_3	0	0	1
x_4	1	0	1

(P_6)	z = 15,2		
Variable	Valor	Cota inf.	Cota sup.
x_1	1	1	1
x_2	1	1	1
x_3	1/5	0	1
x_4	0	0	0

(P_2)	z = 9		
Variable	Valor	Cota inf.	Cota sup.
x_1	0	0	0
x_2	1	0	1
x_3	0	0	1
x_4	1	0	1

(P_7)	Problema imposible		
Variable	Valor	Cota inf.	Cota sup.
x_1		1	1
x_2		1	1
x_3		0	1
x_4		1	1

(P_3)	z = 16,2		
Variable	Valor	Cota inf.	Cota sup.
x_1	1	1	1
x_2	4/5	0	1
x_3	0	0	1
x_4	4/5	0	1

(P_8)	z = ¿?		
Variable	Valor	Cota inf.	Cota sup.
x_1	1	1	1
x_2	1	1	1
x_3	0	0	0
x_4	0	0	0

(P_4)	z = 13,8		
Variable	Valor	Cota inf.	Cota sup.
x_1	1	1	1
x_2	0	0	0
x_3	4/5	0	1
x_4	0	0	1

(P_9)	Problema imposible		
Variable	Valor	Cota inf.	Cota sup.
x_1		1	1
x_2		1	1
x_3		1	1
x_4		0	0

(P_5)	z = ¿?		
Variable	Valor	Cota inf.	Cota sup.
x_1	1	1	1
x_2	1	1	1
x_3	0	0	1
x_4	1/2	0	1

(P_{10})	z = 9		
Variable	Valor	Cota inf.	Cota sup.
x_1	1	1	1
x_2	0	0	0
x_3	0	0	0
x_4	0	0	1

(P_{11})	Problema imposible		
Variable	Valor	Cota inf.	Cota sup.
x_1		1	1
x_2		0	0
x_3		1	1
x_4		0	1

Dado el siguiente programa lineal:

$$\left.\begin{array}{ll} \boldsymbol{Max} & \boldsymbol{Z = 3x_1 + 5x_2 + 2x_3} \\ \boldsymbol{s.a}: & [\boldsymbol{R1}]\ \boldsymbol{x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 14} \\ & [\boldsymbol{R2}]\ \boldsymbol{2x_1 + 4x_2 + 3x_3 \leq 42} \\ & \\ & \boldsymbol{0 \leq x_1 \leq 4} \\ & \boldsymbol{7 \leq x_2 \leq 10} \\ & \boldsymbol{0 \leq x_3 \leq 3} \end{array}\right\} (P)$$

a) Plantea la tabla que corresponde a la Solución Básica inicial del problema (P) al aplicar el simplex revisado con la técnica de las cotas. Indica claramente el valor de todas las variables decisión y de la función objetivo en la solución. **(0,75 puntos)**

b) A partir de la tabla de la Solución Básica inicial del apartado a), realiza **UNA** iteración del algoritmo simplex con variables acotadas. Calcula el valor de los parámetros β, U_{JE} y δ y justifica la forma en la que se realiza el cambio de solución. Indica claramente el valor de todas las variables decisión y de la función objetivo en la nueva solución. **(1 punto)**

c) La siguiente tabla se ha obtenido en la aplicación del algoritmo simplex revisado con variables acotadas al programa lineal (P):

$$(\boldsymbol{x_1, u_{l2}, x_3, h_1, h_2})$$

v.básicas	B^{-1}		x_B
h_1	1	-1/2	3
x_1	0	1/2	1
$c_B^t\ B^{-1}$	0	3/2	Z=53

h_1 y h_2 son las variables de holgura de la restricciones R1 y R2 respectivamente

A partir de la información de esta tabla, continúa la aplicación del algoritmo hasta obtener la solución óptima del problema (P). En cada iteración, calcula los parámetros β, U_{JE} y δ y justifica la forma en la que se cambia de solución.

En la solución óptima, indica claramente el valor de todas las variables decisión y de la función objetivo. **(1,75 puntos)**

Una empresa desea planificar su expansión comercial en una nueva región geográfica que está dividida en ocho zonas. Existen seis ciudades en la región en las que la empresa podría abrir una delegación. La tabla siguiente muestra el coste económico de abrir y mantener una delegación en cada ciudad, y las zonas que quedarían cubiertas por ella en caso de abrirse.

Ciudad donde abrir delegación	Coste de apertura y mantenimiento (miles de euros/mes)	Zonas a las que daría servicio
1	20	A , B
2	50	B , C
3	70	A , B , D , E
4	50	B , C , E , F
5	40	E , F , G , H
6	30	F , H

Esta expansión comercial no tiene por qué cubrir todas las zonas de la región. Si la empresa decide dar servicio a una zona, se estima que obtendría los ingresos comerciales que se detallan en la tabla siguiente:

Zona	A	B	C	D	E	F	G	H
Ingresos en caso de darle servicio (miles de euros/mes)	100	150	90	110	200	100	50	90

No puede superarse el presupuesto disponible para mantener las delegaciones abiertas, establecido en 100.000 euros al mes.

a) Formula un modelo lineal binario que permita a la empresa planificar de manera óptima su expansión en la región, de forma que se maximicen sus beneficios (ingresos – costes), teniendo en cuenta todas las condiciones enunciadas. **[1,5 puntos]**

Modifica el modelo planteado en el apartado (a), para que incluya las siguientes condiciones adicionales, de forma que el modelo resultante continúe siendo lineal:

b) Por su situación geográfica, si se cubren las zonas E y H (las dos), entonces obligatoriamente debe cubrirse también la zona G. **[1 punto]**

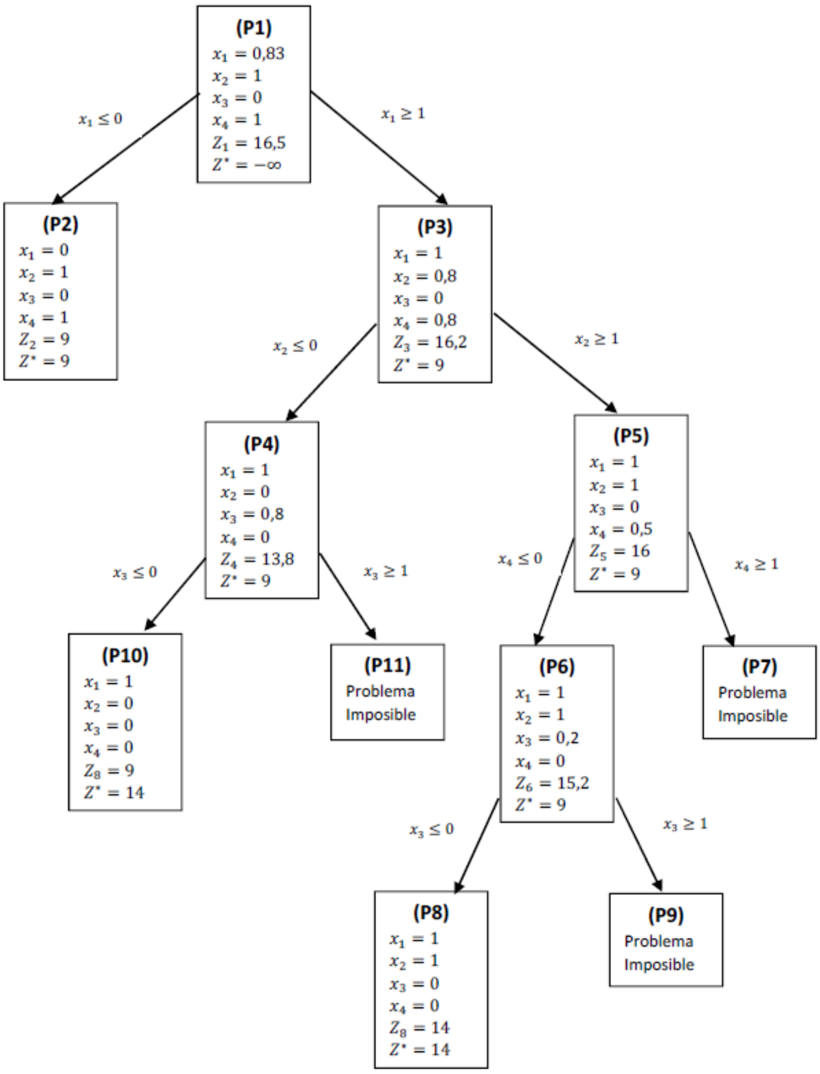
c) Se estima que, si la zona B es cubierta desde al menos dos delegaciones, entonces generará 30.000 euros más de ingresos mensuales. **[1 punto]**

SOLUCIÓN:

Ejercicio 1

a)

El árbol resultante de aplicar el algoritmo de branch-and-bound a este problema es el siguiente:



En la aplicación del algoritmo de Bifurcación y Acotación, el valor de la función objetivo va empeorando ya que cada vez se va restringiendo más el problema. Por tanto, visto que en este caso el valor de la función objetivo de la relajación lineal del problema es 16.5 y va disminuyendo en los problemas siguientes, se concluye que el criterio de la función objetivo del problema (P) es MAXIMIZACIÓN.

b)

El orden en el que se han ido generando los nodos coincide con el 'criterio de la mejor cota' según el cual, entre los nodos activos, el algoritmo continúa la búsqueda por aquel con mejor valor de la función objetivo. También se llega a esta conclusión viendo en el árbol generado que cada vez que se explora un nodo, se generan sus 2 hijos, ya que una vez generado uno de ellos, siempre se vuelve al nodo padre porque tiene mejor valor de la función objetivo.

c)

El problema (P4) presenta una solución NO binaria pero PEOR que la mejor solución encontrada hasta el momento (correspondiente al nodo P8), es por eso por lo que P4 no debe ser bifurcado, ya que estaría correctamente saturado de acuerdo con la mecánica del algoritmo, por lo que los nodos P_{10} y P_{11} **no** deberían de haberse generado.

Por otra parte, no falta bifurcar ningún nodo más ya que cumplen una de tres condiciones siguientes:

(i) se obtiene una solución binaria (nodos P2, P8 y P10),

(ii) el problema es imposible (nodos P7, P9 y P11),

(iii) la solución obtenida NO es binara, pero es PEOR (o no es mejor) que la mejor solución binaria encontrada hasta el momento (en este caso, se daba en el nodo P4, como se ha explicado, y no se da en ningún nodo más).

d)

El árbol está completo, tal como se ha justificado en el apartado anterior y la mejor solución binaria encontrada tras explorar toda la región factible es la del nodo P8, es decir:

$$x_1^* = 1, x_2^* = 1, x_3^* = 0 \; y \; x_4^* = 0 \quad con \quad z^* = 14$$

Por tanto, esta es la solución optima al problema (P).

e)

En el nodo (P_8) se ha resuelto el problema resultante de: tomar el problema original (P), eliminar la condición de integridad, y añadir las cotas o bifurcaciones que conducen a dicho nodo. En concreto el modelo que se ha resuelto en el nodo P_8 es:

$$\left.\begin{array}{lr}
(*) & z = 9x_1 + 5x_2 + 6x_3 + 4x_4 \\
\text{s.a:} & 6x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 2x_4 \leq 10 \\
 & x_3 + x_4 \leq 1 \\
 & -x_1 + x_3 \leq 0 \\
 & -x_2 + x_4 \leq 0 \\
 & x_1 \geq 1 \\
 & x_2 \geq 1 \\
 & x_3 \leq 0 \\
 & x_4 \leq 0 \\
 & x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4 \geq 0 \\
 & x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4 \leq 1
\end{array}\right\}$$

NOTA: Tras eliminar la condición de integridad, todas las variables binarias pasan a ser variables continuas, pero siguen ACOTADAS ENTRE 0 y 1, como se puede ver en la información proporcionada para la primera iteración (nodo P_1).

a)

$$\left.\begin{array}{ll} \boldsymbol{Max} & \boldsymbol{Z = 3x_1 + 5x_2 + 2x_3} \\ \boldsymbol{s.a:} & [\boldsymbol{R1}]\ \boldsymbol{x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 14} \\ & [\boldsymbol{R2}]\ \boldsymbol{2x_1 + 4x_2 + 3x_3 \leq 42} \\ & \\ & \boldsymbol{0 \leq x_1 \leq 4} \\ & \boldsymbol{7 \leq x_2 \leq 10} \\ & \boldsymbol{0 \leq x_3 \leq 3} \end{array}\right\} (P)$$

El modelo incluye una cota inferior ($\boldsymbol{x_2 \geq 7}$) por lo que, en primer lugar, aplicaremos la técnica de la cota inferior reemplazando $\boldsymbol{x_2}$ por $\boldsymbol{x_2 = 7 + l_2}$ en todo el modelo. El modelo resultante de aplicar la técnica de la cota inferior es el siguiente:

$$\left.\begin{array}{ll} \boldsymbol{Max} & \boldsymbol{Z = 35 + 3x_1 + 5l_2 + 2x_3} \\ \boldsymbol{s.a:} & [\boldsymbol{R1}]\ \boldsymbol{x_1 + l_2 + 2x_3 \leq 7} \\ & [\boldsymbol{R2}]\ \boldsymbol{2x_1 + 4l_2 + 3x_3 \leq 14} \\ & \\ & \boldsymbol{0 \leq x_1 \leq 4} \\ & \boldsymbol{l_2 \leq 3} \\ & \boldsymbol{0 \leq x_3 \leq 3} \end{array}\right\}$$

Pasamos el modelo en **forma estándar** incluyendo las variables de holgura de las restricciones R1 y R2. Además, dejamos planteadas las equivalencias que habrá que aplicar si es que alguna de las variables que tiene cota superior, la alcanza durante el proceso de cálculo.

$$\left.\begin{array}{ll} \boldsymbol{Max} & \boldsymbol{Z = 35 + 3x_1 + 5l_2 + 2x_3} \\ \boldsymbol{s.a:} & [\boldsymbol{R1}]\ \boldsymbol{x_1 + l_2 + 2x_3 + h_1 = 7} \\ & [\boldsymbol{R2}]\ \boldsymbol{2x_1 + 4l_2 + 3x_3 + h_2 = 14} \\ & \\ & \boldsymbol{0 \leq x_1 \leq 4} \rightarrow \boldsymbol{x_1} = 4 - \boldsymbol{u_1};\ \boldsymbol{u_1} \leq 4 \\ & \boldsymbol{l_2 \leq 3} \rightarrow \boldsymbol{l_2} = 3 - \boldsymbol{u_{l2}};\ \boldsymbol{u_{l2}} \leq 3 \\ & \boldsymbol{0 \leq x_3 \leq 3} \rightarrow \boldsymbol{x_3} = 3 - \boldsymbol{u_3};\ \boldsymbol{u_3} \leq 3 \end{array}\right\}$$

A partir del modelo en forma estándar, comienza la aplicación del algoritmo simplex(que en este caso debe contemplar la existencia de cotas).

La Solución Básica Factible Inicial es la que aparece en la siguiente tabla:

(Variables: $\boldsymbol{x_1, l_2, x_3, h_1, h_2}$**)**

v.básicas	B^{-1}		x_B
h_1	1	0	7
h_2	0	1	14
$c_B^t\ B^{-1}$	0	0	Z=35

b)
Partimos de la solución básica inicial del apartado a):

(Variables: $\boldsymbol{x_1, l_2, x_3, h_1, h_2}$)

v.básicas	B^{-1}		x_B
h_1	1	0	7
h_2	0	1	14
$c_B^t\ B^{-1}$	0	0	Z=35

Comprobamos la optimalidad de la solución calculando los $Cj - Zj\ \forall j \in VNB$:

$$C\boldsymbol{x_1}\text{-}Z\boldsymbol{x_1} = 3 - (0, 0)\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = 3$$

$$C\boldsymbol{l_2}\text{-}Z\boldsymbol{l_2} = 5 - (0, 0)\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix} = 5$$

$$C\boldsymbol{x_3}\text{-}Z\boldsymbol{x_3} = 2 - (0, 0)\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix} = 2$$

La solución no es óptima y es posible mejorar el valor de la función objetivo haciendo que entre en la solución la variable $\boldsymbol{l_2}$. Necesitamos calcular su vector Y_{l2}:

$$Y_{l2} = B^{-1}\, a_{l2} = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}$$

Calculamos los parámetros β, uj y δ para determinar cómo se hace el cambio de base:

$\beta = \min\ (X_Bi/\alpha_{i,j}^+) = 3,5$
$Ul2 = 3$
δ no existe ya que ninguna de las var. básicas tienen cota superior

$$\boldsymbol{\theta j} = \min\ (\beta, Ul2, \delta) = Ul2$$

- No hay cambio de variables básicas (por tanto, no hay que recalcular B^{-1})
- Pasamos a trabajar con un modelo en el que aparece $\boldsymbol{u_{l2}}$ en lugar de l_2 ($l_2 = 3 - u_{l2}$). $\boldsymbol{u_{l2}}$ aparecerá como variable no básica.
- Hay que recalcular el valor de las variables básicas y de la función objetivo.

Modelo Equivalente con $l_2 = 3 - u_{l2}$:

$$\left.\begin{array}{ll} \boldsymbol{Max} & \boldsymbol{Z = 35 + 15 + 3x_1 - 5u_{l2} + 2x_3} \\ \boldsymbol{s.a}: & \boldsymbol{[R1]\ x_1 - u_{l2} + 2x_3 + h_1 = 4} \\ & \boldsymbol{[R2]\ 2x_1 - 4u_{l2} + 3x_3 + h_2 = 2} \\ & \\ & \boldsymbol{0 \le x_1 \le 4} \ \rightarrow \boldsymbol{x_1} = 4 - \boldsymbol{u_1};\ \boldsymbol{u_1} \le\ 4 \\ & \boldsymbol{l_2 \le 3} \ \rightarrow \boldsymbol{l_2} = 3 - \boldsymbol{u_{l2}};\ \boldsymbol{u_{l2}} \le\ 3 \\ & \boldsymbol{0 \le x_3 \le 3} \ \rightarrow \boldsymbol{x_3} = 3 - \boldsymbol{u_3};\ \boldsymbol{u_3} \le\ 3 \end{array}\right\}$$

Por tanto, la nueva Solución Básica Factible es:

$$X_B = B^{-1} \cdot b = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$Z = 35 + 15 + c_B^t \cdot X_B = 50 + (0{,}0) \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} = 50$$

(Variables: $\boldsymbol{x_1, u_{l2}, x_3, h_1, h_2}$)

v.básicas	B^{-1}		x_B
h_1	1	0	4
h_2	0	1	2
$c_B^t\ B^{-1}$	0	0	Z=50

Por tanto, $(\boldsymbol{x_1 = 0};\ \boldsymbol{x_2 = 7 + l_2 = 7 + l_2 = 7 + 3 - u_{l2} = 10};\ \boldsymbol{x_3 = 0};\ \boldsymbol{Z = 50})$

c)

$(\boldsymbol{x_1, u_{l2}, x_3, h_1, h_2})$

v.básicas	B^{-1}		x_B
h_1	1	-1/2	3
x_1	0	1/2	1
$c_B^t\ B^{-1}$	0	3/2	Z=53

Partiendo de la solución básica que se muestra en la tabla y teniendo en cuenta las variables activas en esta solución $(\boldsymbol{x_1, u_{l2}, x_3, h_1, h_2})$, en primer lugar, debemos calcular los $Cj - Zj\ \forall j \in VNB$ para determinar si la solución es óptima y en caso negativo, identificar la variable que ha de entrar en la base:

$$C\boldsymbol{u_{l2}} - Z\boldsymbol{u_{l2}} = -5 - (0, 3/2) \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \end{pmatrix} = 1$$

$$Cx_3\text{-}Zx_3 = 2 - (0, 3/2)\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix} = -5/2$$

$$Ch_2\text{-}Zh_2 = 0 - (0, 3/2)\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = -3/2$$

La solución no es óptima y es posible mejorar el valor de la función objetivo haciendo que entre en la solución la variable $\boldsymbol{u_{l2}}$. Necesitamos calcular su vector $Y_{u_{l2}}$:

$$Y_{u_{l2}} = B^{-1}\, a_{u_{l2}} = \begin{pmatrix}1 & -1/2\\0 & 1/2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\-4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$$

Calculamos los parámetros β, uj y δ para determinar cómo se hace el cambio de base:

β = min ($X_{B}i/\alpha_{i,j}^{+}$)= 3

U$\boldsymbol{u_{l2}}$ = 3

$\delta = \frac{1-4}{-2} = 3/2$

θj = min (β, Ul2, δ) = **δ**

- Hay cambio de variables básicas (por tanto, hay que recalcular B^{-1} utilizando con pivote -2)
- Pasamos a trabajar con un modelo en el que aparece $\boldsymbol{u_{x1}}$ en lugar de $\boldsymbol{x1}$ ($x1 = 4 - u_{x1}$). $\boldsymbol{u_{x1}}$ como variable no básica.
- Hay que recalcular el valor de las variables básicas y de la función objetivo.

Modelo Equivalente con $x1 = 4 - u_{x1}$:

$$\left.\begin{array}{ll}\boldsymbol{Max} & \boldsymbol{Z = 50 + 12 - 3u_{x1} - 5u_{l2} + 2x_3}\\ \boldsymbol{s.a}: & \boldsymbol{[R1]\ -u_{x1} - u_{l2} + 2x_3 + h_1 = 0}\\ & \boldsymbol{[R2]\ -2u_{x1} - 4u_{l2} + 3x_3 + h_2 = -6}\\ & \\ & \boldsymbol{0 \le u_1 \le 4} \rightarrow \boldsymbol{u_1} = 4 - \boldsymbol{x_1};\ \boldsymbol{x_1} \le 4\\ & \boldsymbol{u_{l2} \le 3} \rightarrow \boldsymbol{u_{l2}} = 3 - \boldsymbol{l_2};\ \boldsymbol{l_2} \le 3\\ & \boldsymbol{0 \le x_3 \le 3} \rightarrow \boldsymbol{x_3} = 3 - \boldsymbol{u_3};\ \boldsymbol{u_3} \le 3\end{array}\right\}$$

Por tanto, la nueva Solución Básica Factible es:

$$X_B = B^{-1} \cdot b = \begin{pmatrix}1 & -1/4\\0 & -1/4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\-6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3/2\\3/2\end{pmatrix}$$

$$Z = 50 + 12 + c_B^t \cdot X_B = 62 + (0,-5) \cdot \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix} = \frac{109}{2} = 54{,}5$$

(Variables: $\boldsymbol{u_{x1}, u_{l2}, x_3, h_1, h_2}$)

v.básicas	B^{-1}		x_B
h_1	1	-1/4	3/2
u_{l2}	0	-1/4	3/2
$c_B^t\ B^{-1}$	0	5/4	Z=54,5

Comprobamos optimalidad:

$$C\boldsymbol{u_1} - Z\boldsymbol{u_1} = -3 - (0, 5/4) \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} = -1/2$$

$$C\boldsymbol{x_3} - Z\boldsymbol{x_3} = 2 - (0, 5/4) \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = -7/4$$

$$C\boldsymbol{h_2} - Z\boldsymbol{h_2} = 0 - (0, 5/4) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -5/4$$

Por tanto, como $Cj - Zj\ \forall j \in VNB$ es negativo y es un problema de maximizar, la solución obtenida es SOLUCIÓN ÓPTIMA.

Para calcular el valor de las variables decisión es necesario deshacer los cambios de variable por la aplicación de la técnica de las cotas:

$$(\boldsymbol{x_1} = 4 - u_{x1} = \boldsymbol{4};\ \boldsymbol{x_2} = \boldsymbol{7 + l_2 = 7 + l_2 = 7 + 3 - u_{l2} = 7 + 3 - \frac{3}{2} = \frac{17}{2} = 8{,}5};\ \boldsymbol{x_3 = 0};\ \boldsymbol{Z = 54{,}5})$$

a)

Variables

En este problema hay que decidir en qué ciudades abrimos delegación y qué zonas se quiere cubrir.

$\delta_j =$ Binaria. Vale 1 si se abre delegación en la ciudad j; vale 0 en caso contrario.

$\gamma_i =$ Binaria. Vale 1 si se decide dar servicio a la zona i; vale 0 en caso contrario.

$j = 1, \dots, 6$. $i = \mathrm{A}, \dots, \mathrm{H}$.

Función objetivo

El objetivo es maximizar ingresos – costes; es decir:

[Beneficio] Max $z = 100\gamma_{\mathrm{A}} + 150\gamma_{\mathrm{B}} + 90\gamma_{\mathrm{C}} + 110\gamma_{\mathrm{D}} + 200\gamma_{\mathrm{E}} + 100\gamma_{\mathrm{F}} + 50\gamma_{\mathrm{G}} + 90\gamma_{\mathrm{H}} - (20\delta_1 + 50\delta_2 + 70\delta_3 + 50\delta_4 + 40\delta_5 + 30\delta_6)$ (miles de euros/mes)

Restricciones

Cada zona que decidamos cubrir tiene que recibir servicio de al menos una delegación:

[Zona A]	$\delta_1 + \delta_3 \geq \gamma_{\mathrm{A}}$	[Zona E]	$\delta_3 + \delta_4 + \delta_5 \geq \gamma_{\mathrm{E}}$
[Zona B]	$\delta_1 + \delta_2 + \delta_3 + \delta_4 \geq \gamma_{\mathrm{B}}$	[Zona F]	$\delta_4 + \delta_5 + \delta_6 \geq \gamma_{\mathrm{F}}$
[Zona C]	$\delta_2 + \delta_4 \geq \gamma_{\mathrm{C}}$	[Zona G]	$\delta_5 \geq \gamma_{\mathrm{G}}$
[Zona D]	$\delta_3 \geq \gamma_{\mathrm{D}}$	[Zona H]	$\delta_5 + \delta_6 \geq \gamma_{\mathrm{H}}$

El presupuesto para abrir y mantener las delegaciones está limitado:

[Presupuesto] $20\delta_1 + 50\delta_2 + 70\delta_3 + 50\delta_4 + 40\delta_5 + 30\delta_6 \leq 100$

Naturaleza de las variables: δ_j binaria, $\forall j$. γ_i binaria, $\forall i$.

b)

Si se cubren E y H (las dos), se está obligado a cubrir también G. Añadimos:

[Si E y H, entonces G] $\gamma_{\mathrm{E}} + \gamma_{\mathrm{H}} \leq 1 + \gamma_{\mathrm{G}}$

NOTA: Equivalentemente, se podría haber modelizado así: $\gamma_{\mathrm{E}} + \gamma_{\mathrm{H}} \leq 1(1 - \gamma_{\mathrm{G}}) + 2\gamma_{\mathrm{G}}$

c)

Si se cubre B desde al menos dos delegaciones, los ingresos mensuales que aportará se incrementarán en 30.000 euros.

Variables

Añadimos la variable binaria siguiente:

$\gamma_{B2} =$ Binaria. Vale 1 si la zona B es cubierta desde al menos dos delegaciones; vale 0 en caso contrario.

Función objetivo

Añadimos el siguiente término:

[Beneficios] $\quad \text{Max } z = \; \cdots + 30\gamma_{B2}$

Restricciones

Modificamos la restricción [Zona B]:

[Zona B] $\quad \delta_1 + \delta_2 + \delta_3 + \delta_4 \geq \gamma_B + \gamma_{B2}$

Añadimos la condición de que γ_{B2} no puede tomar el valor 1 sin que γ_B también lo haga:

[Rel. γ_B-γ_{B2}] $\quad \gamma_{B2} \leq \gamma_B$

Naturaleza de la nueva variable añadida:

γ_{B2} binaria.

MODELIZACIÓN ALTERNATIVA (apartado (c))

[Zona B] $\quad \delta_1 + \delta_2 + \delta_3 + \delta_4 \geq 2\gamma_{B2}$

También se podría haber añadido: $1 + 3\gamma_{B2} \geq \delta_1 + \delta_2 + \delta_3 + \delta_4 \geq 2\gamma_{B2}$

Pero la restricción de la izquierda no es necesaria ya que la función objetivo hace que γ_{B2} sea igual a 1 por lo que se debe modelizar que si $\gamma_{B2} = 1$, entonces la zona B esté cubierta por al menos 2 delegaciones.

MODELIZACIÓN ALTERNATIVA (apartado (c))

[Beneficios] $\quad \text{Max } z = \; \cdots + (110 + 30)\gamma_{B2}$

[Zona B] $\quad \delta_1 + \delta_2 + \delta_3 + \delta_4 \geq \gamma_B + 2\gamma_{B2}$

[Rel. γ_B-γ_{B2}] $\quad \gamma_{B2} + \gamma_B \leq 1$