ASIGNATURA: TÉCNICAS DE OPTIMIZACIÓN

PRÁCTICA 3: INTERPRETACIÓN SOLUCIÓN ÓPTIMA Y ANÁLISIS DE SENSIBILIDAD

SESIONES: 1

SOFTWARE: LINGO

El análisis de sensibilidad o análisis posóptimo trata de evaluar cómo afectaría al resultado óptimo una variación realizada sobre el modelo del problema lineal que estemos considerando. Concretamente, se analiza qué cambios sufrirán la solución óptima (valor óptimo de las variables) y el valor óptimo de la función objetivo cuando varía un coeficiente en la función objetivo o se modifica el lado derecho o segundo miembro de una restricción. En esta práctica aprovecharemos un problema sencillo para aprender cómo Lingo® nos ayuda en esta tarea.

En Lingo®, por defecto no es posible obtener el informe de Análisis de Sensibilidad, para indicarle a Lingo que realice los cálculos de análisis de sensibilidad, en **Solver/Options...**, pestaña **General Solver**, y en **Dual Computations** indicar **Prices & Ranges**, Aplicar y **Ok**.

- Informe de Solución Óptima: opción **Solver/Solve** (o con el icono de la diana).
- Informe de Análisis de Sensibilidad (con la ventana del modelo activa): opción **Solver/Range**

Con esto tenemos que tener 3 ventanas: ventana del modelo matemático, ventana información solución optima y ventana límites análisis de sensibilidad.

Los responsables de la empresa Tektury, SA se plantean cómo planificar la producción de los tres tipos de embalaje de cartón A, B y C que fabrica.

Al mes, la empresa puede disponer de hasta 50 toneladas de cartón. El tiempo que se emplea en producir cada tonelada de embalaje es 20 horas para el de tipo A, 30 horas para el B, y 32 para el C. Cada tonelada de cartón da lugar a una tonelada de embalaje. Tektury dispone de varias líneas de producción, que suponen una capacidad de trabajo total de 1.000 horas/mes.

El beneficio neto que proporciona cada tonelada de embalaje A, B y C es 4.000, 6.000 y 8.000 euros, respectivamente.

Por compromisos comerciales previamente adquiridos, se deben producir mensualmente al menos 10 toneladas de embalajes tipo A o B, conjuntamente.

Construcción del modelo matemático

PREGUNTA 1

Plantea un modelo lineal que permita conocer la planificación de la producción que maximizaría el beneficio respetando todas las condiciones enunciadas.

X_A: cantidad de horas para producir embalaje de cartón A
X_B: cantidad de horas para producir embalaje de cartón B
X_C: cantidad de horas para producir embalaje de cartón C

-FUNCIÓN OBJETIVO:
```
[FO] MAX = 4*X_A + 6*X_B + 8*X_C; => MAX = 4000*X_A + 6000*X_B + 8000*X_C;
```

-RESTRICCIONES:
```
[CAP_TONELADAS] X_A + X_B + X_C <= 50; (ton/mes)

[CAP_HORAS] 20*X_A + 30*X_B + 32*X_C <= 1000; (h/mes)

[DEMANDA_A_B]X_A + X_B >= 10; (ton/mes)
```

-NO NEGATIVIDAD:
```
X_A, X_B y X_C >= 0
```

Modelización y resolución con Excel

PREGUNTA 2

Introduce en Lingo® el modelo lineal planteado y obtén la solución óptima y el análisis de sensibilidad.

El valor de la función objetivo es 240 miles de € y la solución óptima es: X_A = 10, X_B = 0, X_C = 25.

Los informes de solución óptima y análisis de sensibilidad resultantes de resolver el modelo con Lingo® se muestran a continuación.

```
Global optimal solution found.
Objective value:                              240.0000

        Variable           Value        Reduced Cost
               A        10.00000            0.000000
               B        0.000000           0.5000000
               C        25.00000            0.000000

             Row    Slack or Surplus      Dual Price
               1        240.0000            1.000000
          CARTON        15.00000            0.000000
          TIEMPO        0.000000           0.2500000
     DEMANDA_A_B        0.000000           -1.000000
```

Ranges in which the basis is unchanged:

Objective Coefficient Ranges:

Variable	Current Coefficient	Allowable Increase	Allowable Decrease
A	4.000000	1.000000	0.5000000
B	6.000000	0.5000000	INFINITY
C	8.000000	INFINITY	1.600000

Righthand Side Ranges:

Row	Current RHS	Allowable Increase	Allowable Decrease
CARTON	50.00000	INFINITY	15.00000
TIEMPO	1000.000	480.0000	800.0000
DEMANDA_A_B	10.00000	40.00000	10.00000

A partir de la información proporcionada por el programa, y SIN resolver de nuevo el problema en ningún caso, responde razonadamente a las cuestiones que se plantean a continuación.

Si la restriccion es >=, el dual price es negativo
Si la restricción es <=, el dual price es positivo.

Análisis de la solución óptima

PREGUNTA 3

Con las limitaciones actuales, ¿cuál es el máximo beneficio que puede alcanzar la empresa, y cómo debe organizar su producción para conseguirlo?

El máximo benificio es 240 miles de € y los valores de las variables decisión para que la solución sea la óptima son:
X_A: 10
X_B : 0
X_C: 25

PREGUNTA 4

¿Qué restricciones son limitativas (es decir, cuáles son los cuellos de botella del sistema o proceso)?

La restriccion no limitativa en este problema es la capacidad máxima de toneladas de cartón que puede tener la empresa, pues la variable de holgura toma valor 15, lo que significa que no se está haciendo uso de todos los recursos disponibles y que no está generando un cuello de botella para maximizar el valor de la función objetivo.

Por tanto, la restricciones limitativas son la cantidad de toneladas de embalajes tipo A o B que se pueden producir al mes(DEMANDA_A_B) y la capacidad de trabajo total de horas al mes(TIEMPO). Esto se sabe porque las variables de holgura toman valor 0, lo cual indica que se está utilizando al máximo los recursos disponibles y no hay margen para aprovechar más recursos en esas restricciones específicas. Lo que genera un cuello de botella, porque limita las capacidades de producción y en consecuencia no permite maximizar el VFO.

Análisis de sensibilidad de la solución

NOTA: Todas preguntas de esta sección se abordan de manera independiente entre sí; es decir, los sucesivos cambios que se plantean sobre el modelo original NO se acumulan.

PREGUNTA 5

El próximo mes hay que atender un pedido de un cliente especial que demanda 1 tonelada de embalaje tipo B. ¿Cómo afectará esto al beneficio y al plan de producción óptimos?

Cuando aumentamos la demanda del embalaje tipo B en 1, el plan de producción óptimo inicial, que no contemplaba la producción de embalaje tipo B, ahora debe ajustarse para incluir la producción de al menos una unidad de B. Este cambio en la demanda afectará a la solución óptima del problema, ya que los valores de las variables de decisión se verán modificados para cumplir con la nueva demanda.

Por tanto como el coste reducido de X_B es 0.5, esto indica que por cada unidad adicional de embalaje tipo B producida, se empeorará el valor de la función objetivo (beneficio) en 0.5 miles de €, que eso equivale a 500€ (6000*0.5).

En conclusión, el impacto que habrá si hay un aumento en la demanda de embalaje tipo B es:

- Hay cambio de base, pues en este caso la variable B deja de valer 0.
- La solución óptima cambia y el valor de la función objetivo también cambia.

PREGUNTA 6

a) ¿Cómo afectaría al plan de producción óptimo y al beneficio asociado un aumento de 500 euros en el beneficio obtenido por cada tonelada de embalaje tipo A?

```
[FO] MAX = 4.5*X_A + 6*X_B + 8*X_C;
```

La modificación del C_i asociado a la variable X_A no afectará al plan de producción óptimo porque su valor 4.5 (4+0.5) se encuentra dentro del intervalo de análisis de sensibilidad. Por tanto, la solución óptima y la base óptima no cambiará, pero el valor de la función objetivo sí cambiará, pues se obtiene un benificio mayor: $Z^{*\prime} = Z^* + \Delta C_A = 240 + 0{,}5*10 = 245$ miles de €.

b) ¿Y si dicho incremento fuese de 1.000 euros?

La modificación del C_i asociado a la variable X_A no afectará al plan de producción óptimo ni al beneficio por las mismas razones anteriores. El valor de $C_i = 5$ (4+1) se encuentra dentro del intervalo de análisis de sensibilidad. Por tanto, la solución óptima y la base óptima no cambiará, pero el valor de la función objetivo sí cambiará por lo que el benificio mejorará, pasará de 240 miles de € a 250 miles de €: $Z^{*\prime} = Z^* + \Delta C_A = 240 + 1*10$

La sol.óptima no será única -> infinitas soluciones óptimas

c) ¿Y si dicho incremento fuese de 1.500 euros?

Este incremento hará que el coeficiente C_i asociado a X_A no se encuentre dentro del intervalo de análisis de sensibilidad, pues como mucho se puede incrementar en 1 el benificio de A. En consecuencia, la solución óptima cambia (X_A = 50, X_B = 0, X_C = 0), el valor de la función objetivo cambia (275 miles de €) y la base óptima también cambia debido a que el valor de la variable X_C que era distinto de 0 pasa a valer 0.

PREGUNTA 7

¿Cómo afectaría al plan de producción óptimo y al beneficio asociado una disminución de 2.000 euros en el beneficio obtenido por cada tonelada de embalaje tipo C?

El benificio del embalaje tipo C no puede disminuir más de 1600€ por tonelada, por lo tanto, como la disminución de 2000€ no se encuentra dentro del intervalo de análisis de sensibilidad:
- El nuevo valor óptimo de Z* cambia y está acotado entre:
  $Z^{*\prime} \le Z^* + \Delta C_A = 240 + (-1.6)*25 = 200$ miles de €/mes
  $Z^{*\prime} \ge Z^* + \Delta C_A = 240 + (-2)*25 = 190$ miles de €/mes
- La solución óptima y la base óptima cambian: X_A = 0, X_B = 33.3, X_C = 0

PREGUNTA 8

a) Debido a una avería temporal en las instalaciones, la capacidad de trabajo disminuye a la mitad. ¿Seguirá siendo válido el plan de trabajo actual? ¿Cuál será el máximo beneficio que podría obtenerse en dichas condiciones?

Estamos ante la modificación de un b_i , cuya restricción es limitativa , y en consecuencia afecta a la solución óptima.
Dado que Δb_i (b_2 = 500) <= 800, nos encontramos dentro del intervalo de análisis de sensibilidad y como he dicho antes la solución óptima cambia pero la base óptima no:

- X_A = 10, X_B = 0, X_C = 9.375
- Como la holgura es igual a cero, el coste de oportunidad es distinto de cero: +0.25 miles de €/hora
- El valor de la función objetivo cambia y empeora el beneficio. Su valor se puede predecir en función del coste de oportunidad:
  $Z^{*\prime} = Z^* + C.O*([\text{Tiempo}]) * \Delta b_2 = 240 + 0.25 * (-500) = 115$ miles de €/mes

b) En el nuevo plan óptimo, ¿se fabricará embalaje de tipo B?

No, ya que la modificación del b_2 se encuentra del intervalo [480, 800] la base óptima no cambia, y por tanto si antes no se fabricaba embalaje tipo B, es decir, era una variable no básica que toma valor 0, ahora tampoco dejará de ser no básica.

PREGUNTA 9

a) Se plantea a la empresa la posibilidad de alquilar maquinaria adicional, a un precio de 90.000 euros al mes. Dicha operación supondría una capacidad extra de trabajo equivalente a 400 horas/mes. ¿Debe la empresa aceptar la oferta?

Primero de todo, mencionar que nos encontramos frente a una modificación de un b_i que está dentro de los límites de análisis de sensibilidad (Δb_i (b_2 = 400) <= 480)) y cuya restricción es limitativa.

Por consiguiente podemos obtener las mismas conclusiones que en el ejercicio anterior, la solución óptima si cambia pero la base óptima no. El coste de oportunidad es distinto de 0 (+0.25 miles de €/hora). La diferencia es que en este caso el beneficio es mejor que el original:

$\Delta Z^{*\prime}$ = C.O([Tiempo]) * Δb_2 = 0.25*400 = +100 miles de €/mes

$Z^{*\prime}$ = Z^* + C.O([Tiempo]) * Δb_2 = 240 + 100 = 340 miles de €/mes

Al ganar 100 miles de euros/mes , recuperamos lo perdido por alquilarla y nos llevamos un beneficio, lo cual, considero que la empresa debe aceptar la oferta.

b) ¿Y si la oferta fuese ampliar en 500 horas/mes, con un coste de 150.000 euros?

En este caso, sí nos encontramos fuera de los límites de análisis de sensibilidad ((Δb_i (b_2 = (500)>= 480))), por lo que la solución óptima y $Z^{*\prime}$ cambian, hay cambio de base, el coste de oportunidad cambia y podemos acotar la $Z^{*\prime}$:

- Cota inferior: $Z^{*\prime}$ >= 480*0,25 = 120 miles de €/mes
- Cota superior: $Z^{*\prime}$ <= 500*0,25 = 125 miles de €/mes

Las 20 horas que están fuera de rango, aportan menos de 0.25 miles de €/mes, por lo tanto, la oferta no es rentable. Pues además, como mucho ganaremos 125 y la máquina tendrá un coste de 150.

c) ¿Y si la oferta fuese ampliar en 500 horas/mes, con un coste de 110.000 euros?

Estamos en la misma situación que antes, solo que ahora el coste de la máquina es menor y por tanto si que nos interesa la oferta: $\Delta Z^{*\prime}$ >= 120 > 110

PREGUNTA 10

Se prevé que la demanda mínima conjunta de A y B disminuya en 2 toneladas el mes que viene. ¿Cómo afectará esto al plan óptimo de producción y a su beneficio asociado?

La disminución en 2 toneladas de la demanda de A y B es la modificación de un b_i que se encuentra dentro de los límites de análisis de sensibilidad: $\Delta b_i = 2 <= 10$. La solución óptima si cambía pero la base óptima no al estar dentro del rango. El coste de oportunidad sigue siendo -1, por lo que podemos calcular el incremento del benificio que se produce por el recorte en la demanda de A y B:

$\Delta Z^{*\prime}$ = C.O([Demanda_A_B]) * Δb_3 = (-1)*(-2) = +2 miles €/mes

$Z^{*\prime} = Z^*$ + C.O([Demanda_A_B]) * Δb_3 = 240 + 2 = 242 miles €/mes

El beneficio asociado mejorará levemente respecto al original.