EXAMEN2023SOLUCION.pdf

user_3087779

Técnicas de Optimización

3º Grado en Ingeniería Informática

Escuela Técnica Superior de Ingeniería Informática
Universidad Politécnica de Valencia

Apellidos, Nombre:___________________________________e-mail:__________________

Ejercicio 1 3 puntos

Una pequeña empresa fabrica 3 productos: A, B y C usando tres máquinas M1, M2 y M3 de las que dispone 430, 460 y 450 horas/mes respectivamente. La empresa ha asumido el compromiso de producir al menos 90 unidades del producto A cada mes y no puede en ningún caso sobrepasar el tiempo mensual disponible de cada una de las máquinas. Los responsables de la empresa han formulado el siguiente programa lineal para conocer el plan óptimo de fabricación que maximiza el beneficio mensual (miles de €) respetando todas las condiciones enunciadas:

$$
\left.
\begin{array}{lrl}
\text{Max} & [beneficio] & z = 4x_1 + 6x_2 + 5x_3 \; (miles\ €) \\
\text{s.a:} & [\text{M1}] & x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 430 \\
 & [\text{M2}] & 3x_1 + 2x_3 \leq 460 \\
 & [\text{M3}] & x_1 + 4x_2 \leq 450 \\
 & [\text{DemA}] & x_1 \geq 90 \\
 & & x_1, x_2, x_3 \geq 0
\end{array}
\right\} ,
$$

donde x1, x2, x3 son las cantidades de los productos A, B y C. M1, M2 y M3 son las restricciones relativas a la capacidad disponible (horas) de las máquinas.

El modelo se ha resuelto con **LINGO** y la solución óptima y su análisis de sensibilidad se incluyen en el siguiente informe:

Variable	Value	Reduced Cost
X1	90.00000	0.000000
X2	90.00000	0.000000
X3	95.00000	0.000000

Row	Slack or Surplus	Dual Price
1	1375.000	1.000000
M1	65.00000	0.000000
M2	0.000000	2.500000
M3	0.000000	1.500000
DemA	0.000000	-5.000000

Ranges in which the basis is unchanged:

Objective Coefficient Ranges:

Variable	Current Coefficient	Allowable Increase	Allowable Decrease
X1	4.000000	5.000000	INFINITY
X2	6.000000	INFINITY	6.000000
X3	5.000000	INFINITY	3.333333

Righthand Side Ranges:

Row	Current RHS	Allowable Increase	Allowable Decrease
M1	430.0000	INFINITY	65.00000
M2	460.0000	130.0000	190.0000
M3	450.0000	130.0000	360.0000
DemA	90.00000	63.33333	65.00000

Contesta a las siguientes cuestiones **<u>justificando en todos los casos la respuesta</u>**:

a) ¿Cuál es el beneficio máximo que se puede obtener? ¿qué hay que producir para conseguirlo? ¿Cuáles son los cuellos de botella del sistema productivo? Si hubiera que aconsejar una única mejora, ¿sobre qué restricción debería aplicarse y en qué sentido (incremento o decremento) tendría que aplicarse la mejora? **[0,5 puntos]**

b) El departamento de producción está estudiando una modificación en el proceso de fabricación del producto A que duplicaría su actual beneficio unitario ~~(pasaría a ser 12.000 euros)~~. Si se lleva a cabo la mejora, ¿cambiaría la solución óptima actual? ¿se seguirían produciendo unidades de los tres productos? ¿cuál sería el nuevo valor de la función objetivo y de las variables decisión? Sé tan preciso/-a como lo permita la información facilitada por los informes de Lingo®. **[0,5 puntos]**

c) Supongamos que nuevos acuerdos comerciales obligan ahora a producir como mínimo 97 unidades de A al mes, en lugar de las 90 actuales. ¿Cómo afectaría esto al plan de producción óptimo y al beneficio asociado? ¿se seguirían produciendo unidades de los tres productos? Sé tan preciso/-a como lo permita la información facilitada por los informes de Lingo®. **[0,75 puntos]**

d) La empresa ha recibido una oferta de mejora de las prestaciones de M2 con un coste de 300.000 euros/mes. Dicha operación supondría un incremento de 100 horas de M2. ¿Debe la empresa aceptar la oferta? Y si -con el mismo coste, el aumento de capacidad de M2 fuera de 200 horas/mes, ¿debería aceptarse la oferta? **[0,75 puntos]**

e) La empresa está considerando comenzar la fabricación de un nuevo producto D. Cada unidad de producto D requeriría 2 horas de máquina 1, y 3 horas de la máquina 3. ¿Cuál debería ser el beneficio mínimo para que fuera rentable producirlo? **[0,5 puntos]**

Ejercicio 2 — 3,5 puntos

Una empresa que fabrica tres tipos de productos desea conocer cuál es la política de producción óptima desde el punto de vista económico. Con esta finalidad, se ha construido un programa lineal, el cual contempla la minimización de los costes de producción, asegurando la capacidad de fabricación y la demanda mínima prevista:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Min} & [\text{Coste}]\ z = x_1 + \frac{3}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 \text{ (miles de euros/semana)} \\ \text{s.a:} & \\ & [\text{Fabricación}]\ 2x_1 + x_2 + x_3 \leq 20 \text{ (horas/semana)} \\ & [\text{Demanda}]\ x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 \geq 5 \text{ (unidades/semana)} \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{array}\right\} (P).$$

Las variables de decisión del modelo, x_1, x_2 y x_3 representan, respectivamente, la cantidad a fabricar de producto 1, 2 y 3 (en unidades/semana).


coches.net
En este momento hay alguien teniendo relaciones sexuales dentro de un coche.
Y no eres tú.
Pero podrías serlo.
coches.net
No pierdas ni un minuto

a) Plantea el modelo matemático en **forma estándar**. Plantea el modelo matemático **ampliado**. **[0,25 puntos]**
b) Obtén la Solución Básica inicial y realiza **una iteración** del algoritmo Simplex Revisado. Indica claramente el valor de las variables decisión y de holgura. **[0,75 puntos]**
c) La solución obtenida en el apartado b), ¿es solución óptima del problema (P)? En caso negativo, realiza las iteraciones necesarias hasta obtener la solución óptima del problema (P). **[0,75 puntos]**
d) ¿La solución óptima obtenida en el apartado c), es única? Justifica tu respuesta En caso de que existan soluciones óptimas alternativas, obtén dos nuevas soluciones óptimas a partir de la solución óptima obtenida en el apartado c). Las nuevas soluciones, ¿son soluciones básicas? **[0,75 puntos]**
e) Utilizando los datos obtenidos en el apartado c), completa el informe que proporcionaría LINGO (aplicando su misma convención de signos). **[0,5 puntos]**

```
        Variable          Value          Reduced Cost
              X1
              X2
              X3

             Row    Slack or Surplus       Dual Price
   [Fabricación]
       [Demanda]
```

f) ¿Cuál debería ser el beneficio unitario del producto 2 para que fuera interesante fabricarlo? Justifica tu respuesta a partir de la información obtenida en la solución óptima calculada en el apartado c) **[0,5 puntos]**

Ejercicio 3 — 3,5 puntos

Una empresa especializada en la producción de un cierto tipo de piezas de metal para motores de automóvil desea organizar su producción semanal.

Cada semana debe servir a sus clientes exactamente 50000 unidades. Para ello, dispone de tres máquinas, cada una de las cuales, con una capacidad máxima de trabajo de 100 horas semanales, y cuyas características son las siguientes:

	Máquina 1	Máquina 2	Máquina 3
Piezas que puede producir por hora	300 unidades	250 unidades	350 unidades
Coste por hora de trabajo	20 euros	50 euros	40 euros
Porcentaje de piezas defectuosas	5%	10%	1%

Las piezas defectuosas producidas son detectadas de forma automática y son enviadas a destruir (porque no son aptas para la venta); el resto son entregadas a los clientes. La destrucción de cada pieza defectuosa cuesta a la empresa 0,20 euros.

Por política de calidad, se desea que el porcentaje global de piezas defectuosas no supere el 3% sobre el total de piezas producidas.

a) Formula un modelo lineal que permita conocer cuál es la manera más económica de organizar la producción para cumplir con el pedido semanal. **[1,5 puntos]**

NOTA: Toda pieza producida terminará siendo entregada a los clientes (si no es defectuosa) o destruida (si es defectuosa).

b) Consideremos ahora que la empresa ‘retrabaja’ (o sea, intenta reparar) las piezas defectuosas antes de ser destruidas. El retrabajo se produce también en las máquinas 1, 2 y 3. Cada máquina puede ser destinada para retrabajar cualquier cantidad de piezas defectuosas, independientemente de que provengan de ella misma o de las otras máquinas. Es decir, ahora cada máquina deberá distribuir sus 100 horas semanales entre producir y retrabajar piezas.

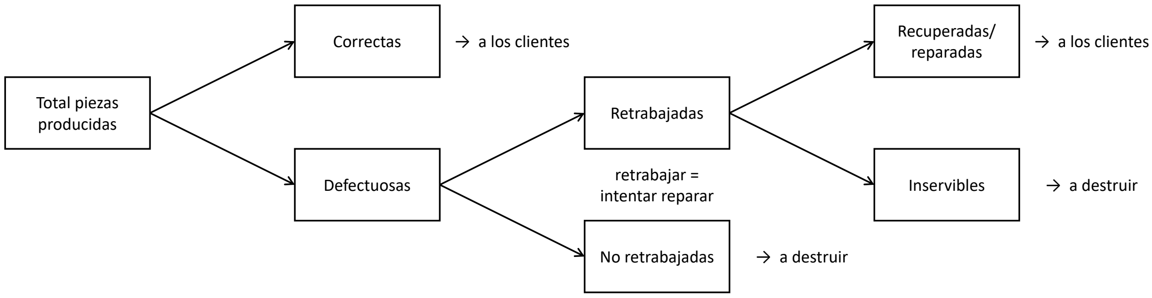
La máquina 1 puede retrabajar hasta 100 piezas por hora, con un porcentaje de éxito del 75%; es decir, consigue reparar el 75% de las piezas defectuosas que retrabaja. Las piezas reparadas son aptas para la venta. El resto son consideradas irrecuperables y son enviadas a destruir (con el consiguiente coste ya mencionado). La máquina 2 puede retrabajar hasta 50 piezas por hora, con un éxito del 50%, y la máquina 3 puede retrabajar 200 piezas por hora, con un éxito del 80%.

NOTA: No hay obligación de retrabajar todas las piezas defectuosas. Por tanto, serán enviadas a destruir las piezas defectuosas que decidamos no retrabajar y las que sean irrecuperables después de haberlas retrabajado. Esas mismas piezas son las que se considerarán defectuosas, a efectos de la política de calidad.

Indica qué elementos deben ser añadidos, modificados o eliminados en el modelo formulado en el apartado (a) para que tenga en cuenta estas nuevas condiciones. El modelo resultante debe continuar siendo lineal. **[2 puntos]**

NOTA: Toda pieza producida terminará siendo entregada a los clientes (si no es defectuosa) o destruida (si es defectuosa).

Esquema del flujo de producción según el apartado (b)



Ejercicio 1

a) - El valor óptimo de la función objetivo es de 4*90 + 6*90 + 5* 95 = 1375 mil €/mes
- Para obtener este beneficio, hay que producir mensualmente 90 unidades de A, 90 unidades de B y 95 unidades de C.

- Los cuellos de botella son las restricciones con holgura igual a cero. En este caso las restricciones M2, M3 y DemA.

- La mejora debería aplicarse sobre la restricción DemA ya que tiene un coste de oportunidad más alto en valor absoluto. Concretamente, convendría reducir la demanda mínima de A ya que se trata de una restricción cuello de botella mayor e igual

b) El beneficio actual del producto A es de 4 mil €/unidad. Duplicar el beneficio de A implicaría disponer de un beneficio de 8 mil €/unidad. Este incremento de 4mil € del beneficio de A se encuentra dentro de los límites del análisis de sensibilidad, por tanto:
- La solución óptima no cambiará y por tanto se seguirían produciendo los mismos tipos de productos y en las mismas cantidades.
- El valor óptimo de la función objetivo *mejorará* (en este caso aumentará porque max) en 4*90 = 360mil€. Por tanto, el nuevo valor óptimo de la función objetivo será: 1375 + 360 = 1735 mil€.

c) Se incrementa la demanda de A en 7 unidades. Esta modificación se encuentra dentro de los límites del análisis de sensibilidad y por tanto:
- El coste de oportunidad -5 es contante y podemos predecir el nuevo valor óptimo de la función objetivo. Como estamos incrementando un bi de una restricción mayor o igual, esta modificación implicará empeorar el beneficio óptimo en 5*7 = 35mil€. Esto implica que se reducirá el valor óptimo de la función objetivo y el nuevo beneficio será: 1375 – 35 = 1340mil€.
- Al modificar el bi de una restricción cuello de botella, la solución óptima actual cambiará. No se puede predecir el nuevo valor óptimo de las variables.
- La base óptima permanecerá constante y por tanto se seguirán produciendo unidades de los tres productos.

d) Un incremento de 100 horas de capacidad de M2 se encuentra dentro del análisis de sensibilidad de M2 y por tanto el valor óptimo de la función objetivo se vería mejorado en 2.5*100 = 250mil€/mes. Como el coste es de 300€/mes, la oferta NO debe aceptarse.

Un incremento de 200 horas de capacidad de M2 NO se encuentra dentro del análisis de sensibilidad de M2 y por tanto el coste de oportunidad no será constante en todo el rango de incremento de bi de la restricción M2. Sin embargo, hasta un incremento de 130 horas, el coste de oportunidad será de 2.5 obteniéndose una mejora de al menos 130*2.5 = 325mil€/mes. Incremento mínimo del beneficio que es superior al coste y por tanto, en este caso la oferta SI se debe aceptarse.

e) Cada unidad del producto D requiere 2 horas de máquina 1 y 3 horas de máquina 3.

Una vez obtenida la solución óptima, la máquina 1 tiene una holgura de 65 horas. La máquina 3 es un cuello de botella (holgura cero) con un coste de oportunidad de +1.5. Por tanto, para poder producir una unidad del producto D es necesario "liberar" 3 horas en la máquina 3. Este decremento en el bi de la restricción M3 está dentro de los límites de sensibilidad (360) por lo que el valor óptimo actual de la función objetivo empeoraría (se decrementa) en 1.5 * 3 = 4.5 (miles de €). Por tanto, para que fuera rentable utilizar esas 3 horas "liberadas" en la producción de D, debería de obtenerse un beneficio mayor de 4500 €.

Ejercicio 2

a)

Modelo matemático en forma estándar:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Min} & [\text{Coste}]\ z = x_1 + \frac{3}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 \ (\text{miles de euros/semana}) \\ \text{s.a:} & \\ & [\text{Fabricación}]\ \ 2x_1 + x_2 + x_3 + h_1 = 20 \ \ (\text{horas/semana}) \\ & [\text{Demanda}]\ \ x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 - h_2 = 5 \ \ (\text{unidades/semana}) \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{array}\right\} (P).$$

Modelo matemático ampliado:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Min} & [\text{Coste}]\ z = x_1 + \frac{3}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 \ (\text{miles de euros/semana}) \\ \text{s.a:} & \\ & [\text{Fabricación}]\ \ 2x_1 + x_2 + x_3 + h_1 = 20 \ \ (\text{horas/semana}) \\ & [\text{Demanda}]\ \ x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 - h_2 + a_2 = 5 \ \ (\text{unidades/semana}) \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{array}\right\} (P).$$

b)

Es necesario aplicar el método simplex de 2 fases y la **fase 1** supone la siguiente función objetivo:

Min $z = a_2$

Tabla inicial simplex: SBF0:

Var. Básicas	B^{-1}		X_B
h_1	1	0	20
a_2	0	1	5
$C_B^t \cdot B^{-1}$	0	1	5

$X_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 20 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 5 \end{pmatrix}$; $c_B^t B^{-1} = (0, 1)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (0, 1)$

$Z = c_B^t X_B = (0, 1)\begin{pmatrix}20\\5\end{pmatrix} = 5$

A partir de la tabla de la solución básica dada, comprobamos optimalidad:

$$\boldsymbol{c_{x1} - z_{x1}} = 0 - (0, 1)\begin{pmatrix}\boldsymbol{2}\\\boldsymbol{1}\end{pmatrix} = -1$$

$$c_{x2} - z_{x2} = 0 - (0, 1)\begin{pmatrix}1\\\frac{1}{2}\end{pmatrix} = -\frac{1}{2}$$

$$c_{x3} - z_{x3} = 0 - (0, 1)\begin{pmatrix}1\\\frac{1}{2}\end{pmatrix} = -\frac{1}{2}$$

$$c_{h2} - z_{h2} = 0 - (0, 1)\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix} = 1$$

Por tanto, la solución actual no cumple el criterio de optimalidad para un problema de minimización ya que todavía es posible mejorar más el valor de la función objetivo.

La **variable que entra en la base** es $\boldsymbol{x_1}$ y su vector Y_{x1}es:

$$Y_{x1} = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$$

v.básicas	B^{-1}		x_B	Y_{x1}
h_1	1	0	20	2
a_3	0	1	5	1
$C_B^t \cdot B^{-1}$	0	1	5	

Y la **variable que sale de la base** es $\boldsymbol{a_3}$ (es la primera que alcanza el valor 0 cuando entra en la solución x_1).

La nueva solución SBF1 es:

v.básicas	B^{-1}		x_B
h_1	1	-2	10
x_1	0	1	5
$C_B^t \cdot B^{-1}$			0

El valor de las variables decisión es: x1=5; x2=x3=0

c)

La solución obtenida en el apartado c) es óptima para la Fase 1 del método de las 2 Fases. Para verificar si esta solución es también óptima para el problema (P), es necesario aplicar la Fase 2:

$$Min\ z = x_1 + \frac{3}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3$$

SBF0:

v.básicas	B^{-1}		x_B
h_1	1	-2	10
x_1	0	1	5
$C_B^t \cdot B^{-1}$	0	1	5

Comprobamos optimalidad:

$$c_{x2} - z_{x2} = 3/2 - (0, 1)\begin{pmatrix}1\\\frac{1}{2}\end{pmatrix} = 1$$

$$c_{x3} - z_{x3} = 1/2 - (0, 1)\begin{pmatrix}1\\ \frac{1}{2}\end{pmatrix} = 0$$

$$c_{h2} - z_{h2} = 0 - (0, 1)\begin{pmatrix}0\\ -1\end{pmatrix} = 1$$

Por tanto, la solución actual cumple el criterio de optimalidad (minimización) ya que los cj-zj de las variables no básicas son mayor o igual a cero.

Sol. óptima: $(x_1^* = 5\,,\ x_2^* = 0\,,\ x_3^* = 0\,,\ h_1^* = 10,\ h_2^* = 0\,)$.

Valor óptimo de la función objetivo: $z^* = 5$

d)

La solución óptima obtenida **no es única** y por tanto hay infinitas soluciones óptima con mismo valor óptimo de la función objetivo $z^* = 5$. Esto es así, porque hay una **variable no básica** (X3) con Cj-Zj (coeficiente reducido) igual a cero.

Para obtener otra solución óptima, a partir de la tabla óptima del apartado c) haremos una nueva iteración del símplex en la entrará en la base X3 (lo que mantendrá el valor de la función objetivo inalterado) y saldrá la primera variable básica que alcance el valor 0.

Calculamos el vector Y_{x3} es:

$$Y_{x3} = \begin{pmatrix}1 & -2\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\ 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}$$

v.básicas	B^{-1}		x_B	Y_{x3}
h_1	1	-2	10	0
x_1	0	1	5	1
$C_B^t \cdot B^{-1}$	0	1	5	

Y la **variable que sale de la base** es $\boldsymbol{x_1}$ (es la única que alcanza el valor 0 cuando entra en la solución x_3).

La nueva solución SBF es:

v.básicas	B^{-1}		x_B
h_1	1	-2	10
x_3	0	2	10
$C_B^t \cdot B^{-1}$			5

Sol. Óptima_2: $(x_1^* = 0\,,\ x_2^* = 0\,,\ x_3^* = 10\,,\ h_1^* = 10,\ h_2^* = 0\,)$.

Valor óptimo de la función objetivo: $z^* = 5$

Por tanto, por combinación lineal convexa y con α=0.5, otra solución óptima (Sol. Óptima_3) es:

$$\begin{pmatrix} x_1^* \\ x_2^* \\ x_3^* \\ h_1^* \\ h_2^* \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix} + (1-\alpha) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{2.5} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{5} \\ \mathbf{10} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

Valor óptimo de la función objetivo: $z^* = 5$

La solución óptima 2 es Solución básica ya que tiene 2 variables distintas de 0, sin embargo, la solución óptima 3 no es solución básica ya que tiene 3 variables distintas de 0 en un problema con 2 restricciones.

e)

```
     Variable           Valor      Coste Reducido
           X1        5.000000            0.000000
           X2        0.000000            1.000000
           X3        0.000000            0.000000

  Restricción         Holgura   Coste oportunidad
[Fabricación]        10.00000            0.000000
    [Demanda]        0.000000           -1.000000
```

f)

En la solución óptima no se fabrican unidades del producto 2, para conocer la mejora mínima en el coeficiente en la función objetivo de x_2 para que sea interesante fabricarlo, debemos tener en cuenta el coste reducido de la variable x_2 que hemos calculado en la última solución de la aplicación del algoritmo símplex:

Coste Reducido de x_2: c_{x2} - z_{x2}= 1,

por tanto, para que sea interesante producir unidades del producto 2, su coeficiente en la función objetivo debe ser 'mejor' en 1 miles de euros, es decir, el coste máximo de x_2 debe ser 3/2 -1= 0.5 mil euros por unidad.

Ejercicio 3

a)

Variables

Para organizar la producción, se necesita saber cuántas piezas deberá producir cada máquina:

x_i = Cantidad de **horas** que la máquina i está produciendo piezas (horas/semana).

$i = 1,2,3.$

Con solo estas tres variables es posible modelizar el problema.

Función objetivo

Se desea minimizar los costes. Para construir la función objetivo, tendremos en cuenta, para cada máquina, cuántas piezas produce por hora y el porcentaje de piezas defectuosas que genera:

$$\text{Min} \quad z = 20 \cdot x_1 + 50 \cdot x_2 + 40 \cdot x_3 + 0{,}20 \cdot (0{,}05 \cdot 300 \cdot x_1 + 0{,}10 \cdot 250 \cdot x_2 + 0{,}01 \cdot 350 \cdot x_3)$$

(expresada en euros/semana)

Restricciones

Cada máquina tiene una capacidad de 100 horas semanales:

[Máquina 1] $x_1 \leq 100$

[Máquina 2] $x_2 \leq 100$

[Máquina 3] $x_3 \leq 100$

Hay que entregar a los clientes 50000 piezas correctas (las defectuosas se destruyen):

[Demanda] $0{,}95 \cdot 300 \cdot x_1 + 0{,}90 \cdot 250 \cdot x_2 + 0{,}99 \cdot 350 \cdot x_3 = 50000$

No debemos producir más de un 3% de piezas defectuosas:

[Calidad] $0{,}05 \cdot 300 \cdot x_1 + 0{,}10 \cdot 250 \cdot x_2 + 0{,}01 \cdot 350 \cdot x_3 \leq 0{,}03 \cdot (300 \cdot x_1 + 250 \cdot x_2 + 350 \cdot x_3)$

Naturaleza de las variables: $x_1, x_2, x_3 \geq 0$

NOTA: No es necesario exigir que sean variables enteras, ya que estamos hablando de una tasa de producción semanal, que se supone que servirá para varias semanas.

b)

Variables

Mantenemos la definición de las variables x_i.

Ahora debemos decidir también cuántas horas va a retrabajar cada máquina. Por tanto, añadimos estas variables:

$r_i =$ Cantidad de *horas* que la máquina *i* estará dedicada a retrabajar piezas.

$i = 1,2,3.$

$nr =$ Cantidad de piezas defectuosas *antes* de los retrabajos que decidimos *no retrabajar* (unidades).

Función objetivo

Adaptamos la función objetivo para que tenga en cuenta el tiempo que dedicamos a retrabajar en cada máquina. Además, expresamos la cantidad de piezas defectuosas usando la variable auxiliar que hemos definido.

$$\text{Min} \quad z = 20 \cdot (x_1 + r_1) + 50 \cdot (x_{2+r_2}) + 40 \cdot (x_3 + r_3) + 0{,}20 \cdot (0{,}25 \cdot 100 \cdot r_1 + 0{,}5 \cdot 50 \cdot r_2 + 0{,}2 \cdot 200 \cdot r_3 + nr)$$

Restricciones

Modificamos las restricciones de las máquinas para indicar que deben distribuir su tiempo entre producir y retrabajar:

[Máquina 1] $x_1 + r_1 \leq 100$

[Máquina 2] $x_2 + r_2 \leq 100$

[Máquina 3] $x_3 + r_3 \leq 100$

Modificamos la restricción de la demanda. Las piezas recuperadas tras el retrabajo también son entregadas a los clientes:

[Demanda] $0{,}95 \cdot 300 \cdot x_1 + 0{,}90 \cdot 250 \cdot x_2 + 0{,}99 \cdot 350 \cdot x_3 + 0{,}75 \cdot 100 \cdot r_1 + 0{,}5 \cdot 50 \cdot r_2 + 0{,}8 \cdot 200 \cdot r_3 = 50000$

Modificamos la restricción sobre la política de calidad, para que tenga en cuenta solo las unidades defectuosas que quedan *después* de haber hecho los retrabajos:

[Calidad] $0{,}25 \cdot 100 \cdot r_1 + 0{,}5 \cdot 50 \cdot r_2 + 0{,}2 \cdot 200 \cdot r_3 + nr \leq 0{,}03 \cdot (300 \cdot x_1 + 250 \cdot x_2 + 350 \cdot x_3)$

No podemos retrabajar más piezas de las defectuosas (*antes* de los retrabajos):

[Relación_xi_ri] $100 \cdot r_1 + 50 \cdot r_2 + 200 \cdot r_3 + nr = 0{,}05 \cdot 300 \cdot x_1 + 0{,}10 \cdot 250 \cdot x_2 + 0{,}01 \cdot 350 \cdot x_3$

Hemos tenido en cuenta que, según el enunciado, no importa qué máquina fabricó las piezas que cada máquina va a retrabajar.

Naturaleza de las nuevas variables:

$r_i \geq 0, \ \forall\, i$

$nr \geq 0$

<Modelizacion alternativa 2>

a)

Variables

Para organizar la producción, se necesita saber **cuántas piezas** deberá producir cada máquina:

$x_i =$ Cantidad de piezas que producirá la máquina i (unidades/semana).

$i = 1,2,3.$

Función objetivo

Se desea minimizar los costes. Para construir la función objetivo, tendremos en cuenta, para cada máquina, cuántas piezas produce por hora y el porcentaje de piezas defectuosas que genera:

$$\text{Min} \quad z = 20\frac{x_1}{300} + 50\frac{x_2}{250} + 40\frac{x_3}{350} + 0{,}20(0{,}05x_1 + 0{,}10x_2 + 0{,}01x_3)$$

(expresada en euros/semana)

Restricciones

Cada máquina tiene una capacidad de 100 horas semanales:

[Máquina 1] $x_1/300 \leq 100$

[Máquina 2] $x_2/250 \leq 100$

[Máquina 3] $x_3/350 \leq 100$

Hay que entregar a los clientes 50000 piezas correctas (las defectuosas se destruyen):

[Demanda] $0{,}95x_1 + 0{,}90x_2 + 0{,}99x_3 = 50000$

No debemos producir más de un 3% de piezas defectuosas:

[Calidad] $0{,}05x_1 + 0{,}10x_2 + 0{,}01x_3 \leq 0{,}03(x_1 + x_2 + x_3)$

Naturaleza de las variables: $x_1, x_2, x_3 \geq 0$

NOTA: No es necesario exigir que sean variables enteras, ya que estamos hablando de una tasa de producción semanal, que se supone que servirá para varias semanas.

b)

Variables

Mantenemos la definición de las variables x_i.

Ahora debemos decidir también cuántas piezas va a retrabajar cada máquina. Por tanto, **añadimos** estas variables:

$r_i =$ Cantidad de piezas defectuosas que retrabajará la máquina i (unidades).

$i = 1,2,3.$

$nr =$ Cantidad de piezas defectuosas *antes* de los retrabajos que decidimos no retrabajar (unidades).

Función objetivo

Adaptamos la función objetivo para que tenga en cuenta el tiempo que dedicamos a retrabajar en cada máquina. Además, expresamos la cantidad de piezas defectuosas usando la variable auxiliar que hemos definido.

$$\text{Min} \quad z = 20\left(\frac{x_1}{300} + \frac{r_1}{100}\right) + 50\left(\frac{x_2}{250} + \frac{r_2}{50}\right) + 40\left(\frac{x_3}{350} + \frac{r_3}{200}\right) + 0{,}20(0{,}25r_1 + 0{,}5r_2 + 0{,}2r_3 + nr)$$

Restricciones

Modificamos las restricciones de las máquinas para indicar que deben distribuir su tiempo entre producir y retrabajar:

[Máquina 1] $x_1/300 + r_1/100 \leq 100$

[Máquina 2] $x_2/250 + r_2/50 \leq 100$

[Máquina 3] $x_3/350 + r_3/200 \leq 100$

Modificamos la restricción de la demanda. Las piezas recuperadas tras el retrabajo también son entregadas a los clientes:

[Demanda] $0{,}95x_1 + 0{,}90x_2 + 0{,}99x_3 + 0{,}75r_1 + 0{,}5r_2 + 0{,}8r_3 = 50000$

Modificamos la restricción sobre la política de calidad, para que tenga en cuenta solo las unidades defectuosas que quedan después de haber hecho los retrabajos:

[Calidad] $0{,}25r_1 + 0{,}5r_2 + 0{,}2r_3 + nr \leq 0{,}03(x_1 + x_2 + x_3)$

No podemos retrabajar más piezas de las defectuosas (antes de los retrabajos):

[Retrabajos] $r_1 + r_2 + r_3 + nr = 0{,}05x_1 + 0{,}10x_2 + 0{,}01x_3$

Hemos tenido en cuenta que, según el enunciado, no importa qué máquina fabricó las piezas que cada máquina va a retrabajar.

Naturaleza de las nuevas variables:

$$r_i \geq 0,\ \forall\, i$$

$$nr \geq 0$$

<Modelizacion alternativa 3>

b)

<u>Variables</u>

Mantenemos la definición de las variables x_i.

Ahora debemos decidir también cuántas piezas va a retrabajar cada máquina. Por tanto, <u>añadimos</u> estas variables:

$r_i =$ Cantidad de piezas defectuosas que retrabajará la máquina i (unidades).

$i = 1,2,3.$

Por comodidad y claridad, definiremos también las siguientes <u>variables auxiliares</u>:

$d =$ Cantidad de piezas defectuosas *después* de los retrabajos (unidades).

$nr =$ Cantidad de piezas defectuosas *antes* de los retrabajos que decidimos no retrabajar (unidades).

<u>Función objetivo</u>

Adaptamos la función objetivo para que tenga en cuenta el tiempo que dedicamos a retrabajar en cada máquina. Además, expresamos la cantidad de piezas defectuosas usando la variable auxiliar que hemos definido.

Debemos tener en cuenta que d representa cuántas piezas quedan defectuosas ***después*** de haber hecho los retrabajos. Esta variable incluye tanto las piezas defectuosas que hayamos decidido no retrabajar como las que no se han podido recuperar al retrabajarlas. Todas ellas son destruidas, con el consiguiente coste.

$$\text{Min} \quad z = 20\left(\frac{x_1}{300} + \frac{r_1}{100}\right) + 50\left(\frac{x_2}{250} + \frac{r_2}{50}\right) + 40\left(\frac{x_3}{350} + \frac{r_3}{200}\right) + 0{,}20d$$

<u>Restricciones</u>

Modificamos las restricciones de las máquinas para indicar que deben distribuir su tiempo entre producir y retrabajar:

[Máquina 1] $\quad x_1/300 + r_1/100 \leq 100$

[Máquina 2] $\quad x_2/250 + r_2/50 \leq 100$

[Máquina 3] $\quad x_3/350 + r_3/200 \leq 100$

Modificamos la restricción de la demanda. Las piezas recuperadas tras el retrabajo también son entregadas a los clientes. En este caso, es más fácil expresar las correctas como “producidas menos defectuosas”:

[Demanda] $\quad x_1 + x_2 + x_3 - d = 50000$

Modificamos la restricción sobre la política de calidad, para que tenga en cuenta solo las unidades defectuosas que quedan después de haber hecho los retrabajos:

[Calidad] $\quad d \leq 0{,}03(x_1 + x_2 + x_3)$

No podemos retrabajar más piezas de las defectuosas (antes de los retrabajos):

[Retrabajos] $\quad r_1 + r_2 + r_3 + nr = 0{,}05x_1 + 0{,}10x_2 + 0{,}01x_3$

Hemos tenido en cuenta que, según el enunciado, no importa qué máquina fabricó las piezas que cada máquina va a retrabajar.

NOTA: La variable h_{D} la definimos por comodidad, para representar cuántas piezas de las inicialmente defectuosas *no* serán retrabajadas. Recordemos que el enunciado permite no retrabajar todas las piezas defectuosas.

Expresamos qué valor toma la variable d: incluye tanto las piezas defectuosas que hemos decidido no retrabajar (a esa cantidad la hemos llamado h_{D}) como las que quedan inservibles después de los retrabajos:

[Defectuosas] $\quad d = nr + 0{,}25r_1 + 0{,}50r_2 + 0{,}20r_3$

En la restricción anterior hemos tenido en cuenta el porcentaje de 'fracaso' de cada máquina al retrabajar.

Naturaleza de las nuevas variables:

$$r_i \geq 0,\ \forall i$$

$$d\,, nr \geq 0$$