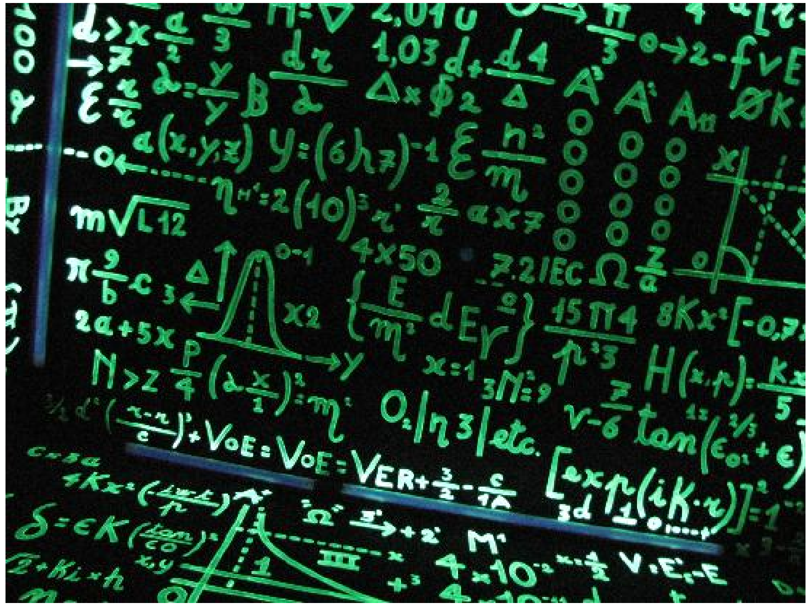
Dall'Algoritmo al Codice



Il Pensiero Computazionale

Percorso Formativo per i Docenti della Scuola Secondaria di II Grado

Lezione 1 - Parte 2 (per *coder* "esperti")

Stefano Forti and Davide Neri

Algoritmi (e Python)

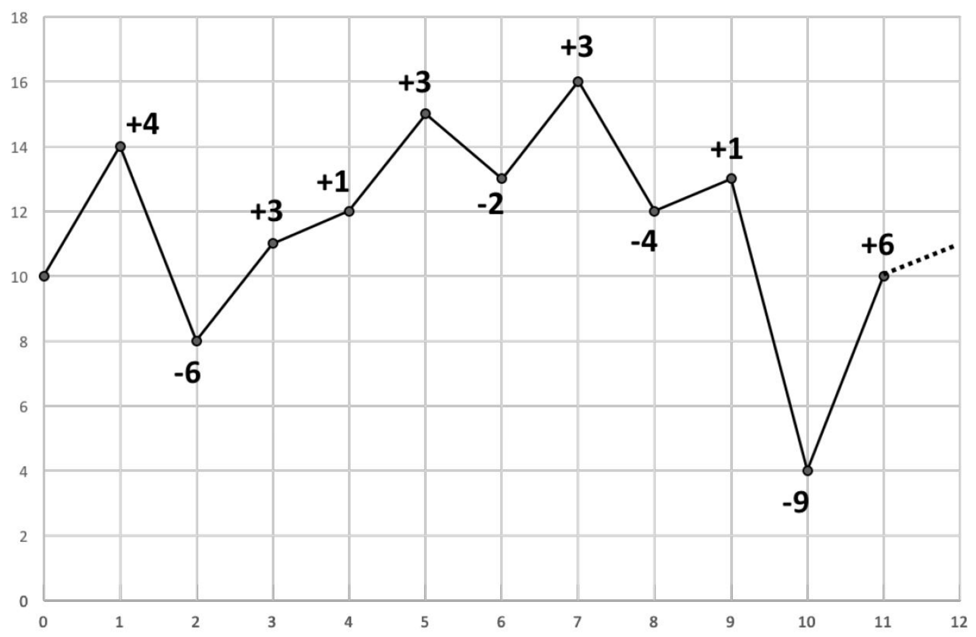
Risolveremo tre problemi con Python:

1. Un Problema Finanziario
2. Multi-Key Quick Sort
3. Il Problema della Partizione

Un Problema Finanziario

Andamento delle quotazioni di una particolare società *S*.

(*asse x* = giorni di un anno, *asse y* = quotazione di un'azione)



Obiettivo: determinare l'istante di acquisto *a* e quello di vendita *v* al fine di garantire che la differenza di quotazione tra la vendita e l'acquisto sia *massima*.

Sotto Sequenza Massima

> Data una lista D di n interi (positivi e negativi), come si può stabilire la sottolista di somma massima, ovvero trovare due indici, a e b, tali da ottenere il massimo $\max_{a,b}\{\sum_{i=a}^{b} D[i]\}$.

Esistono almeno tre soluzioni rispettivamente di complessità cubica $O(n^3)$, quadratica $O(n^2)$ e lineare $O(n)$.

🤓 Scrivere lo pseudocodice di almeno due soluzioni e implementare la più efficiente.

Algoritmo Cubico (Pseudocodice)

Si provano tutti i possibili intervalli $[i, j]$ e si memorizza la soluzione migliore trovata ogni volta.

```
programma CUBICO (D)
// Il vettore D[1 : n] consiste di n numeri positivi e negativi
MaxSomma ← −∞; a ← 1; v ← 0;
for i = 1 to n
    for j = i to n
        Tmp ← 0; // Tmp è un valore temporaneo
        for k = i to j
            Tmp ← Tmp + D[k];
        if Tmp > MaxSomma
            MaxSomma ← Tmp; a ← i; v ← j;
print "Il guadagno massimo è" MaxSomma;
print "Esso si realizza nell'intervallo di giorni" [a, v];
```

Algoritmo Cubico (Codice)

```python
def cubico(d):
    n = len(d)                          # n indica il numero di elementi di d
    max_somma = -float('inf')
    a = 1
    v = 0

    for i in range(1, n):
        for j in range(i, n):
            tmp = 0  # tmp e' un valore temporaneo
            for k in range(i, j + 1):  # sommiamo gli elementi in d[i,j]
                tmp = tmp + d[k]
            if tmp > max_somma:
                max_somma = tmp
                a = i
                v = j

    print ("Il guadagno massimo e' {}".format(max_somma))
    print ("Esso si realizza nell'intervallo di giorni [{},{}]".format(a, v))
    print ("Porzione di d avente somma massima {}".format(d[a:v+1]))
```

Algoritmo Quadratico (Pseudocodice)

Si provano tutti i possibili intervalli in $[1, n]$ mediante il calcolo incrementale della somma di ogni porzione di vettore esaminata, memorizzando la soluzione migliore trovata.

```
programma QUADRATICO (D)
// Il vettore D[1 : n] consiste di n numeri positivi e negativi
MaxSomma ← −∞; a ← 1; v ← 0;
for i = 1 to n
    Tmp ← 0;
    for j = i to n
        Tmp ← Tmp + D[j];
        if Tmp > MaxSomma
            MaxSomma ← Tmp; a ← i − 1; v ← j;
print "Il guadagno massimo è" MaxSomma;
print "Esso si realizza nell'intervallo di giorni" [a, v];
```

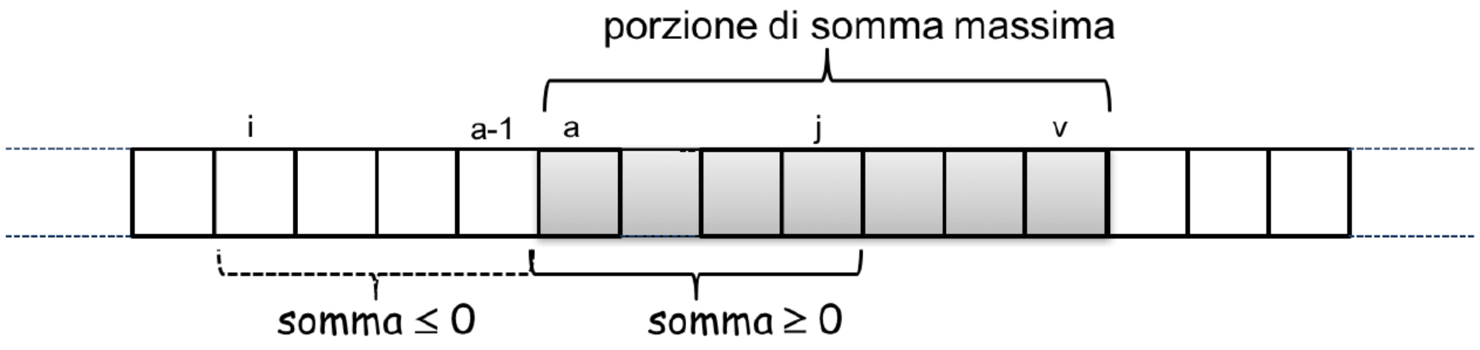
Algoritmo quadratico (Codice)

```
def quadratico(d):
    n = len(d)                          # n indica il numero di elementi di d
    max_somma = -float('inf')
    a = 1
    v = 0

    for i in range(1, n):
        tmp = 0                         # tmp e' un valore temporaneo
        for j in range(i, n):
            tmp = tmp + d[j]
            if tmp > max_somma:
                max_somma = tmp
                a = i
                v = j

    print ("Il guadagno massimo e' {}".format(max_somma))
    print ("Esso si realizza nell'intervallo di giorni [{},{}]".format(a, v))
    print ("Porzione di d avente somma massima {}".format(d[a:v+1]))
```

Algoritmo Lineare (Idea)



Proprietà 1 - Ogni porzione che termina immediatamente prima della porzione di somma massima, e quindi avente la forma $D[i : a - 1]$, ha somma negativa.

Proprietà 2 - Ogni porzione che inizia ove inizia la porzione di somma massima ed è inclusa in essa, e quindi avente la forma $D[a : j]$, ha somma positiva.

Algoritmo Lineare (Pseudocodice)

Si provano n intervalli in $[1, n]$, memorizzando la soluzione migliore trovata ogni volta.

programma LINEARE (D)

// Il vettore D consiste di n numeri positivi e negativi

$MaxSomma \leftarrow -\infty$; $v \leftarrow 0$; $Tmp \leftarrow 0$;

$a \leftarrow 1$; $atmp \leftarrow 1$;

for $i = 1$ **to** n

    $Tmp \leftarrow Tmp + D[i]$;

    if $Tmp > MaxSomma$

        $MaxSomma \leftarrow Tmp$; $v \leftarrow i$; $a \leftarrow atmp$;

    if $Tmp < 0$

        $Tmp \leftarrow 0$; $atmp \leftarrow i + 1$;

print “Il guadagno massimo è” $MaxSomma$;

print “Esso si realizza nell’intervallo di giorni” $[a, v]$;

Algoritmo lineare* (Codice)

```
def lineare(d):
    n = len(d)  # n indica il numero di elementi di d
    max_somma = -float('inf')
    a = 1
    v = 0
    atmp = a  # atmp e' un indice temporaneo
    tmp = 0  # tmp e' un valore temporaneo

    for i in range(1, n):
        tmp = tmp + d[i]
        if tmp > max_somma:
            max_somma = tmp
            a = atmp
            v = i
        if tmp < 0:
            tmp = 0
            atmp = i + 1

    print ("Il guadagno massimo e' {}".format(max_somma))
    print ("Esso si realizza nell'intervallo di giorni [{},{}]".format(a, v))
    print ("Porzione di d avente somma massima {}".format(d[a:v+1]))
```

Prendere il tempo!

⌛ In Python possiamo cronometrare la durata di esecuzione di un programma. Basta importare la libreria `time` e usare la funzione `time.time()` come nell'esempio qui sotto:

```
import time
import random

giorni = 5000
d = [random.randrange(-10,10) for num in range(giorni)]

start = time.time()
cubico(d)
stop = time.time()
print('Cubico ', stop-start, "secondi.")
```

Confrontare il tempo di esecuzione dei tre algoritmi che risolvono il problema precedente.

Risultati

Risultati dei tempi di esecuzione con `d = 5000` sulla "nostra" macchina:

```
Cubico  16.844367742538452 secondi.
Quadratico  0.07895207405090332 secondi.
Lineare  0.0009975433349609375 secondi.
```

Multi-key QuickSort (Idea e Complessità)

Come si ordina una collezione S di n parole di lunghezza L?

💡 *L'algoritmo è simile al QuickSort.*

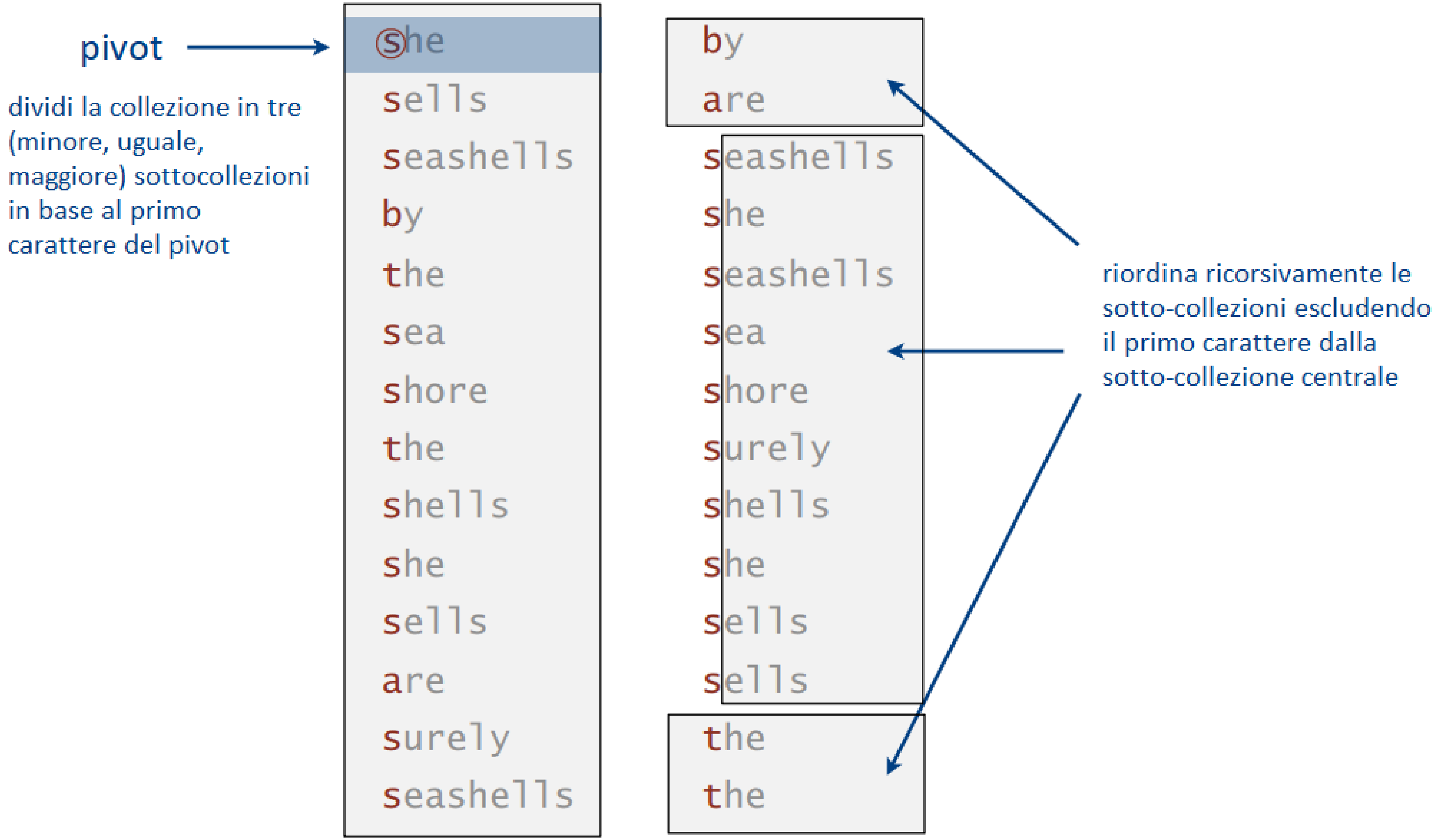
L'idea di base segue due passi che si applicano a $\langle S, r\rangle$:

1. Sceglie una stringa p (*pivot*) tra quelle da ordinare e divide la collezione S in tre sotto-collezioni, una $S_<$ con le stringhe s tali che $s[r] < p[r]$, una $S_=$ con le strighe s tali che $s[r] = p[r]$, la terza $S_>$ con le stringhe s tali che $s[r] > p[r]$.
2. Ripete (1) su $\langle S_<, r\rangle$, $\langle S_=, r+1\rangle$ e $\langle S_>, r\rangle$.

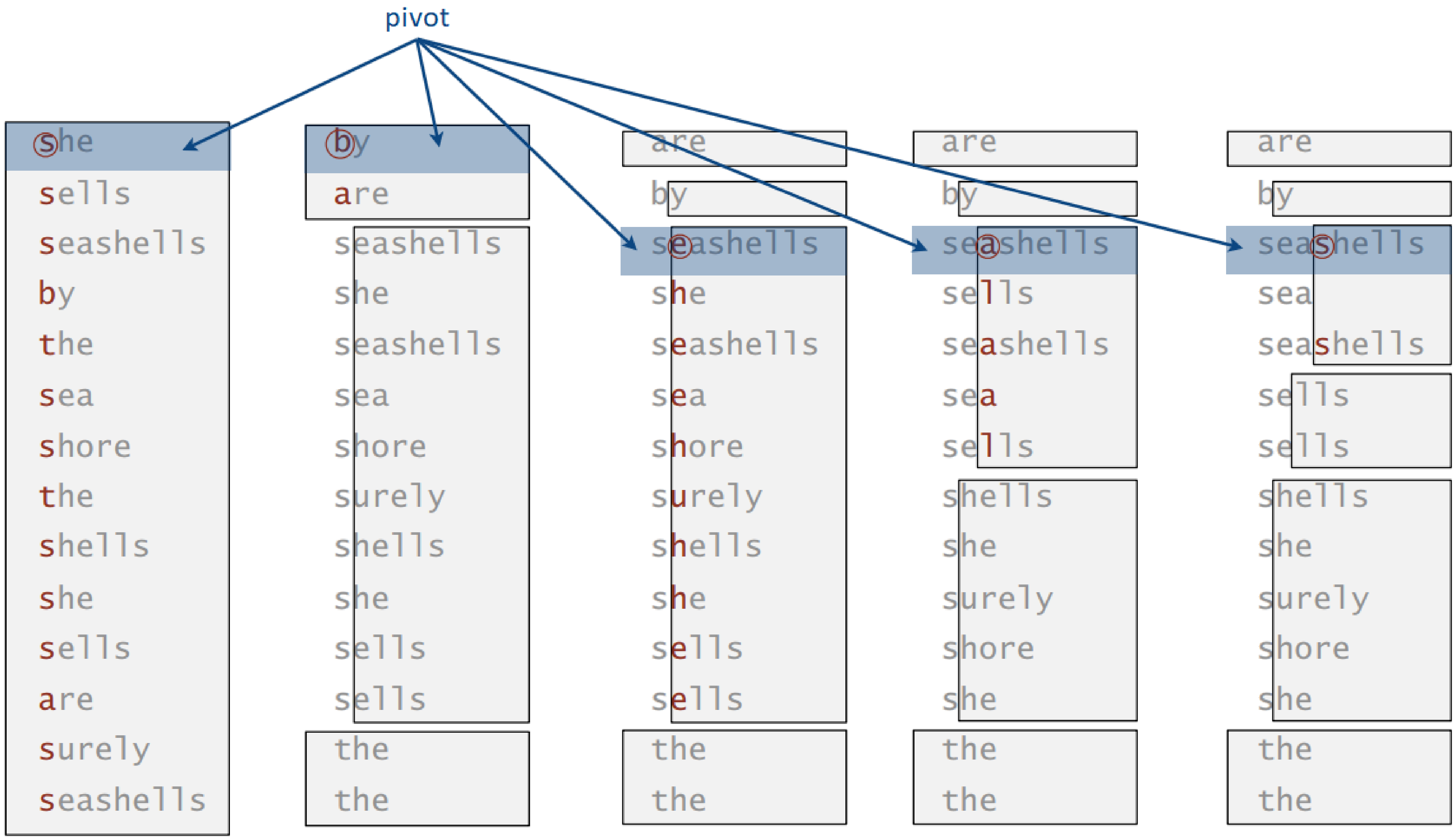
La complessità in tempo è $O(D + n\lg n)$ dove D è la lunghezza del prefisso distintivo di S (ovvero, quello che distingue una stringa da tutte le altre).

Multi-key QuickSort (Demo)

Inizialmente $r = 0$.



Multi-key QuickSort (Demo)



Multi-key QuickSort (Codice)

```
def multikeyQS(S,k):
    if (len(S) <= 1):
        return S
    pivot_pos = random.randint(0, len(S)-1)
    pivot_char = S[pivot_pos][k]
    S1 = []
    S2 = []
    S3 = []
    for s in S:
        if (s[k] < pivot_char):
            S1.append(s)
        elif (s[k] == pivot_char):
                S2.append(s)
        else:
            S3.append(s)
    L1 = multikeyQS(S1,k)
    L2 = multikeyQS(S2,k+1)
    L3 = multikeyQS(S3,k)
    return L1+L2+L3
```

Multi-key QuickSort (Codice)

```
B = []
with open("280000_parole_italiane.txt","r") as file:
   for parola in file.readlines():
      parola = parola.replace('\n', '  ')
      B.append(parola)

start = time.time()
B_sorted = multikeyQS(B,0)
stop = time.time()

print('MQSort',stop-start)
```

Multi-Key QuickSort In-Place (🤓 Molto Avanzato!)

```
def multikeyQS2(a, lo, hi, r):
    if hi <= lo:
        return
    lt = lo
    gt = hi
    v = a[lo][r]
    i = lo + 1

    while i <= gt:
        t = a[i][r]
        if t < v:
            swap(a, lt, i)
            lt += 1
            i += 1
        elif t > v:
            swap(a, i, gt)
            gt-=1
        else:
            i+=1

    multikeyQS2(a, lo, lt-1, r)
    if ord(v) >= 0:
        multikeyQS2(a, lt, gt, r+1)
    multikeyQS2(a, gt+1, hi, r)
```

Il Problema della Partizione

Se abbiamo a disposizione due dischi rigidi da s byte ciascuno e vogliamo usarli per memorizzare n file che occupano $2s$ byte in totale, è possibile dividere i file in due **partizioni** ciascuna di s byte?

Formalmente:

> Dato un insieme di interi $A = \{a_0, \cdots, a_{n-1}\}$ tali che $\sum_{i=0}^{n-1} a_i = 2s$, vogliamo verificare se esiste $A' \subseteq A$ tale che $\sum_{a_i \in A'} a_i = s$.

Il Problema della Partizione

Una semplice soluzione, ma inefficiente, consiste nel generare tutti i possibili sottoinsiemi di A. Essa impiega un tempo proporzionale a $O(2^n)$, quindi è esponenziale nella dimensione dell'input.

Una soluzione più "furba" prova a risolvere una serie di sottoproblemi per arrivare alla soluzione del problema originale e sfrutta la cosiddetta **programmazione dinamica**.

> Determiniamo il booleano `T(i,j)`, per $0 \leqslant i \leqslant n$ e $0 \leqslant j \leqslant s$, che è `True` se e solo se esiste un sottoinsieme di $A_{i-1} = \{a_0, \cdots, a_{i-1}\}$ con somma pari a j.

La soluzione del problema originale si troverà in $T(n, s)$.

Partizione (Idea e Complessità)

Banalmente: `T(0,0) = True` e `T(0,j) = False` per `j != 0`.

Nel caso generale:

- `T(i,j) = True` se `i = 0` e `j = 0`
- `T(i,j) = True` se `i > 0` e `T(i-1,j) = True` (la parte di somma j non contiene a_{i-1})
- `T(i,j) = True` se `i > 0`, `j >= a[i-1]` e `T(i-1, j-a[i-1]) = True` (contiene a_{i-1})
- `T(i,j) = False` altrimenti.

Il risultato è una tabella $T(i,j)$ che si riempie con una complessità in tempo pari a $O(ns)$ (dovendo infatti risolvere $(n+1) \times (s+1)$ sotto-problemi).

Partizione (Codice)

```
def partizione(a):
    if (sum(a) % 2) != 0:
        return False

    n = len(a)
    s = sum(a)/2
    parti = []

    for i in range(n+1):
        parti.append([])
        for j in range(s+1):
            parti[i].append(False)

    parti[0][0] = True
    for i in range(1, n+1):
        for j in range(s+1):
            if parti[i-1][j]:
                parti[i][j] = True
            if j >= a[i-1] and parti[i-1][j-a[i-1]]:
                parti[i][j] = True
    return parti[n][s]
```

Pseudopolinomialità di Partizione

L'algoritmo proposto per il problema della partizione ha un costo $O(ns)$. Tale costo in tempo è **polinomiale** in n e s ma non lo è necessariamente nella dimensione dei dati in ingresso.

Infatti, ciascuno degli n interi da partizionare richiede $k = O(\lg s)$ bit di rappresentazione.

Quindi la dimensione dei dati è $O(nk)$ e il costo dell'algoritmo $O(ns) = O(n2^k)$ che rimane polinomiale solo se si usano interi piccoli rispetto a n (es., $s = O(n^c)$ con c costante fissata).

Questa *anomalia* è dovuta al fatto che, per valori numerici sufficientemente grandi, il problema della partizione è NP-completo.

Esercizio

1. **Il problema dello zaino** Un ladro si introduce in un museo in cui sono esposti gli elementi dell'insieme $A = \{a_0, \cdots, a_{n-1}\}$ ciascuni associati a un $valore(a)$ e un $peso(a)$ interi positivi. Lo zaino del ladro ha una capacità massima `cap`. Come può il ladro usare il paradigma della programmazione dinamica per determinare un sottoinsieme $A' \subseteq A$ tale che il peso totale di A' sia minore di `cap` e tale per cui $\sum_{a \in A'} valore(a)$ sia il massimo possibile?