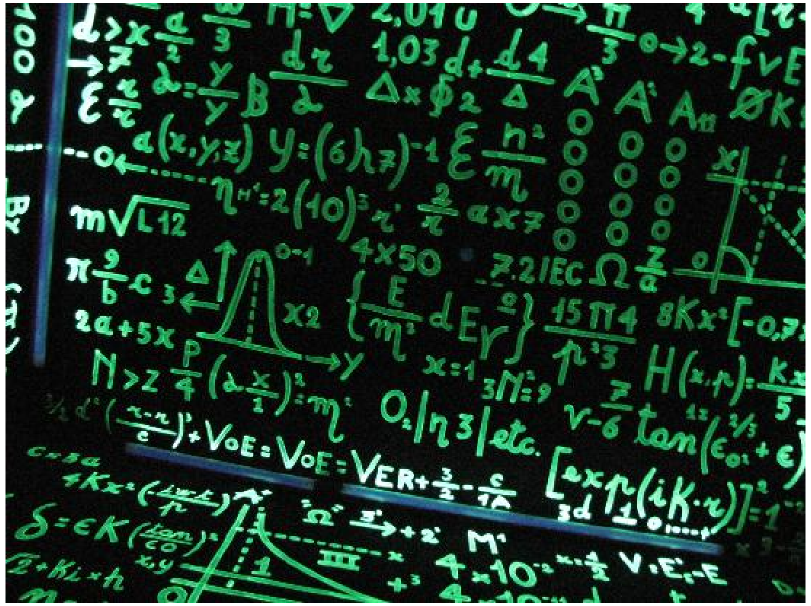
Dall'Algoritmo al Codice



Il Pensiero Computazionale

Percorso Formativo per i Docenti della Scuola Secondaria di II Grado

Lezione 1 - Parte 2

Stefano Forti and Davide Neri

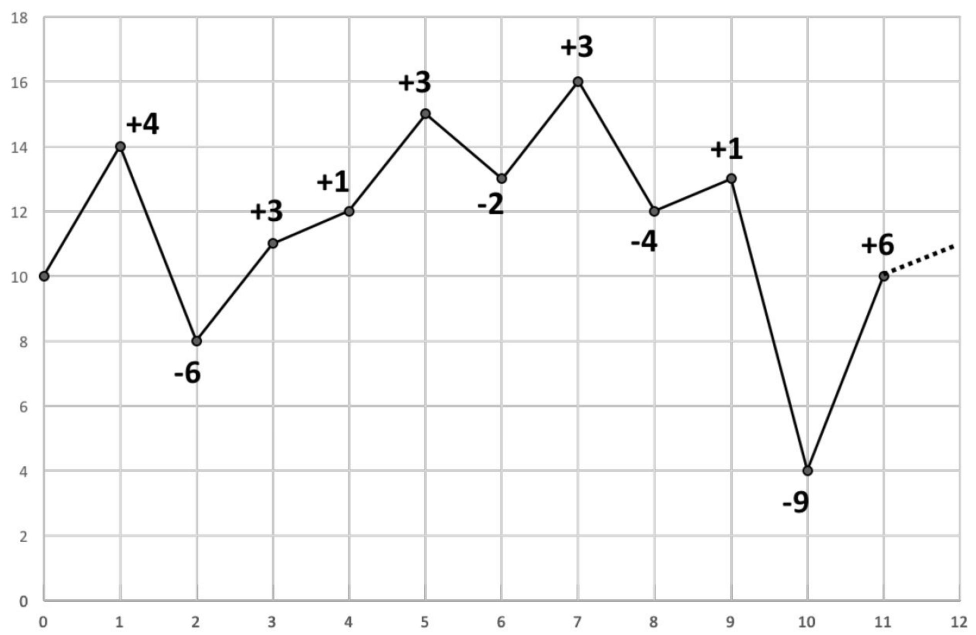
Algoritmi (e Python)

Risovleremo tre problemi algoritmici con Python:

1. Un Problema Finanziario
2. Multi-Key Quick Sort
3. Il Problema della Partizione

Un Problema Finanziario

Andamento delle quotazioni di una particolare società *S*.
(*asse x* = giorni di un anno, *asse y* = quotazione di un'azione)



Obiettivo: determinare l'istante di acquisto *a* e quello di vendita *v* al fine di garantire che la differenza di quotazione tra la vendita e l'acquisto sia *massima*.

Sotto Sequenza Massima

> Data una lista D di n interi (positivi e negativi), come si può stabilire la sottolista di somma massima, ovvero come possiamo scegliere due valori, a e b, tali da ottenere il massimo $\max\limits_{a,b \in \mathbb{N}_n} \{\sum_{i=a}^{b} D[i]\}$?

Esistono almeno tre soluzioni rispettivamente di complessità cubica $O(n^3)$, quadratica $O(n^2)$ e lineare $O(n)$.

🤓 Scrivere lo pseudocodice di almeno due soluzioni e implementare la più efficiente.

Algoritmo Cubico (Pseudocodice)

programma CUBICO (D)

// Il vettore $D[1:n]$ consiste di n numeri positivi e negativi

$\quad MaxSomma \leftarrow -\infty;\ a \leftarrow 1;\ v \leftarrow 0;$

$\quad$ **for** $i = 1$ **to** n

$\quad\quad$ **for** $j = i$ **to** n

$\quad\quad\quad Tmp \leftarrow 0;$ // Tmp è un valore temporaneo

$\quad\quad\quad$ **for** $k = i$ **to** j

$\quad\quad\quad\quad Tmp \leftarrow Tmp + D[k];$

$\quad\quad\quad$ **if** $Tmp > MaxSomma$

$\quad\quad\quad\quad MaxSomma \leftarrow Tmp;\ a \leftarrow i;\ v \leftarrow j;$

$\quad$ **print** "Il guadagno massimo è" $MaxSomma;$

$\quad$ **print** "Esso si realizza nell'intervallo di giorni" $[a, v];$

Algoritmo Cubico (Codice)

```
def cubico(d):
    n = len(d)                      # n indica il numero di elementi di d
    max_somma = -float('inf')
    a = 1
    v = 0

    for i in range(1, n):
        for j in range(i, n):
            tmp = 0  # tmp e' un valore temporaneo
            for k in range(i, j + 1):  # sommiamo gli elementi in d[i,j]
                tmp = tmp + d[k]
            if tmp > max_somma:
                max_somma = tmp
                a = i
                v = j

    print ("Il guadagno massimo e' {}".format(max_somma))
    print ("Esso si realizza nell'intervallo di giorni [{},{}]".format(a, v))
    print ("Porzione di d avente somma massima {}".format(d[a:v+1]))
```

Algoritmo Quadratico (Pseudocodice)

programma QUADRATICO (D)

// Il vettore $D[1:n]$ consiste di n numeri positivi e negativi

$MaxSomma \leftarrow -\infty;\ a \leftarrow 1;\ v \leftarrow 0;$

for $i = 1$ **to** n

  $Tmp \leftarrow 0;$

  for $j = i$ **to** n

    $Tmp \leftarrow Tmp + D[j];$

    if $Tmp > MaxSomma$

      $MaxSomma \leftarrow Tmp;\ a \leftarrow i - 1;\ v \leftarrow j;$

print "Il guadagno massimo è" $MaxSomma;$

print "Esso si realizza nell'intervallo di giorni" $[a, v];$

Algoritmo quadratico (Codice)

```python
def quadratico(d):
    n = len(d)                          # n indica il numero di elementi di d
    max_somma = -float('inf')
    a = 1
    v = 0

    for i in range(1, n):
        tmp = 0                         # tmp e' un valore temporaneo
        for j in range(i, n):
            tmp = tmp + d[j]
            if tmp > max_somma:
                max_somma = tmp
                a = i
                v = j

    print ("Il guadagno massimo e' {}".format(max_somma))
    print ("Esso si realizza nell'intervallo di giorni [{},{}]".format(a, v))
    print ("Porzione di d avente somma massima {}".format(d[a:v+1]))
```

Algoritmo Lineare (Pseudocodice)

programma LINEARE (D)

// Il vettore D consiste di n numeri positivi e negativi

$MaxSomma \leftarrow -\infty$; $v \leftarrow 0$; $Tmp \leftarrow 0$;

$a \leftarrow 1$; $atmp \leftarrow 1$;

for $i = 1$ **to** n

    $Tmp \leftarrow Tmp + D[i]$;

    if $Tmp > MaxSomma$

        $MaxSomma \leftarrow Tmp$; $v \leftarrow i$; $a \leftarrow atmp$;

    if $Tmp < 0$

        $Tmp \leftarrow 0$; $atmp \leftarrow i + 1$;

print "Il guadagno massimo è" $MaxSomma$;

print "Esso si realizza nell'intervallo di giorni" $[a, v]$;

Algoritmo lineare* (Codice)

```
def lineare(d):
    n = len(d)  # n indica il numero di elementi di d
    max_somma = -float('inf')
    a = 1
    v = 0
    atmp = a  # atmp e' un indice temporaneo
    tmp = 0  # tmp e' un valore temporaneo

    for i in range(1, n):
        tmp = tmp + d[i]
        if tmp > max_somma:
            max_somma = tmp
            a = atmp
            v = i
        if tmp < 0:
            tmp = 0
            atmp = i + 1

    print ("Il guadagno massimo e' {}".format(max_somma))
    print ("Esso si realizza nell'intervallo di giorni [{},{}]".format(a, v))
    print ("Porzione di d avente somma massima {}".format(d[a:v+1]))
```

Prendere il tempo!

⏳ In Python possiamo cronometrare la durata di esecuzione di un programma. Basta importare la libreria `time` e usare la funzione `time.time()` come nell'esempio qui sotto:

```
import time
import random

giorni = 5000
d = [random.randrange(-10,10) for num in range(giorni)]

start = time.time()
cubico(d)
stop = time.time()
print('Cubico ', stop-start, "secondi.")
```

Confrontare il tempo di esecuzione delle tre versioni dell'algoritmo.

Risultati

Risultati dei tempi di esecuzione con `d = 5000`:

```
Cubico  16.844367742538452 secondi.
Quadratico  0.07895207405090332 secondi.
Lineare  0.0009975433349609375 secondi.
```

Multi-key Quick Sort (Idea e Complessità)

Come si ordina una collezione S di n parole di lunghezza L?

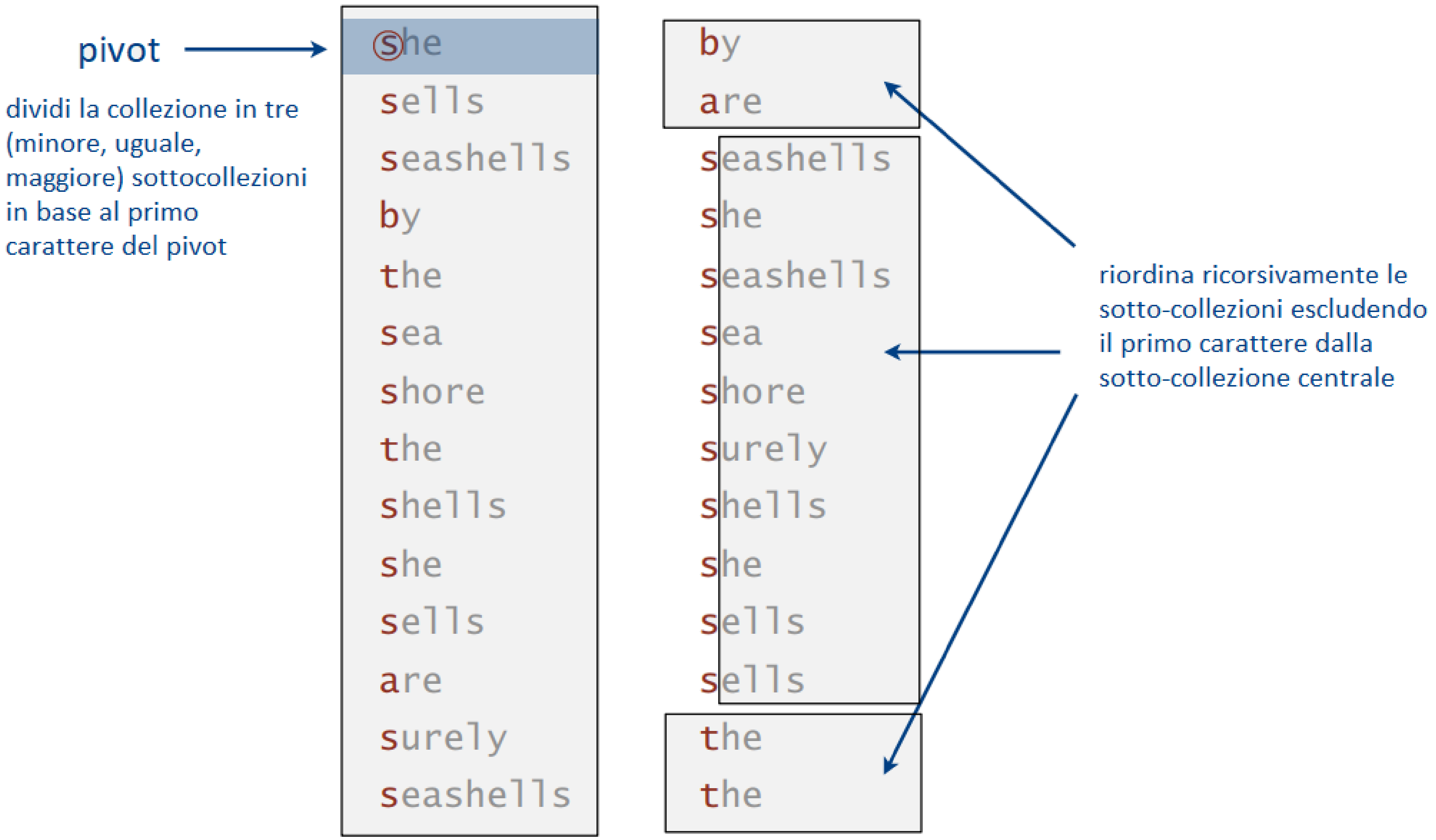
💡 *L'algoritmo è simile al Quick Sort.*

L'idea di base segue due passi:

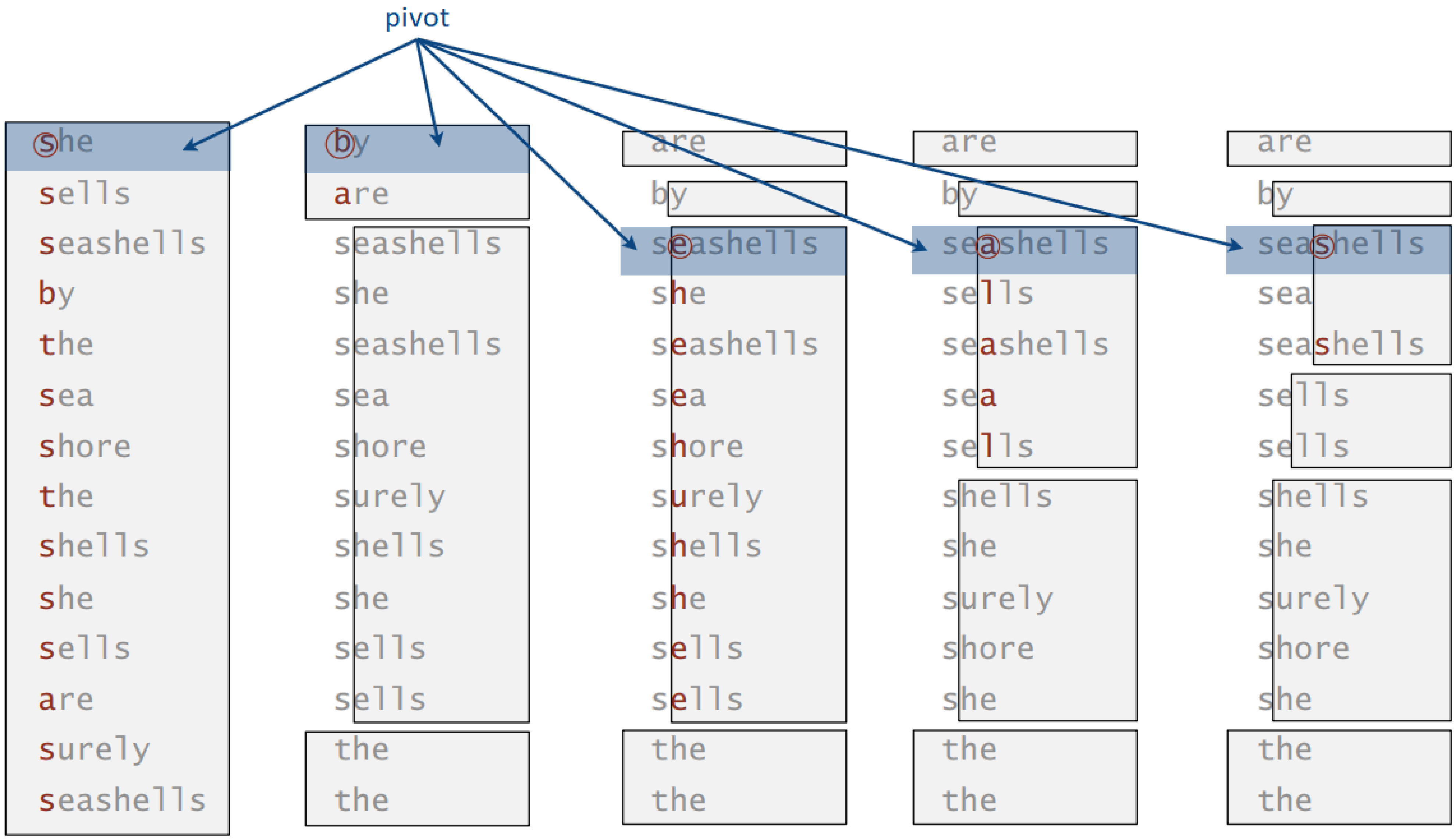
1. Sceglie una stringa p (*pivot*) tra quelle da ordinare e divide la collezione S in tre sotto-collezioni, una $S_<$ con le stringhe $e[r] < p[r]$, una $S_=$ con le strighe $e[r] = p[r]$ la terza $S_>$ con le stringhe $e[r] > p[r]$.
2. Ripete (1) su $\langle S_<, r \rangle$, $\langle S_=, r+1 \rangle$ e $\langle S_>, r \rangle$.

La complessità è di $O(D + n \lg n)$ dove D è la lunghezza del prefisso distintivo di S (ovvero, quello che distingue una stringa da tutte le altre).

Multi-key Quick Sort (Demo)



Multi-key Quick Sort (Demo)



Multi-key Quick Sort (Codice)

```python
def multikeyQS(S,k):
    if (len(S) <= 1):
        return S
    pivot_pos = random.randint(0, len(S)-1)
    pivot_char = S[pivot_pos][k]
    S1 = []
    S2 = []
    S3 = []
    for s in S:
        if (s[k] < pivot_char):
            S1.append(s)
        elif (s[k] == pivot_char):
                S2.append(s)
        else:
            S3.append(s)
    L1 = multikeyQS(S1,k)
    L2 = multikeyQS(S2,k+1)
    L3 = multikeyQS(S3,k)
    return L1+L2+L3
```

Multi-key Quick Sort (Codice)

```
B = []
with open("280000_parole_italiane.txt","r") as file:
   for parola in file.readlines():
      parola = parola.replace('\n', '  ')
      B.append(parola)

start = time.time()
B_sorted = multikeyQS(B,0)
stop = time.time()

print('MQSort',stop-start)
```

Multi-Key QuickSort In-Place (🤓 Molto Avanzato!)

```
def multikeyQS2(a, lo, hi, r):
   if hi <= lo:
      return
   lt = lo
   gt = hi
   v = a[lo][r]
   i = lo + 1

   while i <= gt:
      t = a[i][r]
      if t < v:
         swap(a, lt, i)
         lt += 1
         i += 1
      elif t > v:
         swap(a, i, gt)
         gt-=1
      else:
         i+=1

   multikeyQS2(a, lo, lt-1, r)
   if ord(v) >= 0:
      multikeyQS2(a, lt, gt, r+1)
   multikeyQS2(a, gt+1, hi, r)
```

Il Problema della Partizione

Se abbiamo a disposizione due dischi rigidi da s byte ciascuno e vogliamo usarli per memorizzare n file che occupano $2s$ byte in totale, è possibile dividere i file in due **partizioni** ciascuna di s byte?

Formalmente:

> Dato un insieme di interi $A = \{a_0, \cdots, a_{n-1}\}$ tali che $\sum_{i=0}^{n-1} a_i = 2s$, vogliamo verificare se esiste $A' \subseteq A$ tale che $\sum_{a_i \in A'} a_i = s$.

Quali soluzioni esistono?

Il Problema della Partizione (Soluzioni)

Ce n'è una esponenziale, ovvero che impiega un tempo proporzionale a $O(2^n)$ e consiste nel generare tutti i possibili sottoinsiemi di A.

Una soluzione più "furba" prova a risolvere una serie di sottoproblemi per arrivare alla soluzione del problema originale e sfrutta la cosiddetta **programmazione dinamica**.

> Determiniamo il booleano `T(i,j)`, per $0 \leqslant i \leqslant n$ e $0 \leqslant j \leqslant s$, che è `True` se e solo se esiste un sottoinsieme di $A_{i-1} = \{a_0, \cdots, a_{i-1}\}$ con somma pari a j.

La soluzione del problema originale si troverà in $T(n, s)$.

Partizione (Idea e Complessità)

Banalmente: `T(0,0) = True` e `T(0,j) = False` per `j != 0`.

Nel caso generale:

- `T(i,j) = True` se `i = 0` e `j = 0`
- `T(i,j) = True` se `i > 0` e `T(i-1,j) = True` (la parte di somma j non contiene a_{i-1})
- `T(i,j) = True` se `i > 0`, `j >= a[i]` e `T(i-1, j-a[i]) = True` (o contiene a_{i-1})
- `T(i,j) = False` altrimenti.

Il risultato è una tabella $T(i,j)$ che si riempie con una complessità in tempo pari a $O(ns)$ (dovendo infatti risolvere $(n+1)\times(s+1)$ sotto-problemi).

Partizione (Codice)

```
def partizione(a):
    if (sum(a) % 2) != 0:
        return False

    n = len(a)
    s = sum(a)/2
    parti = []

    for i in range(n+1):
        parti.append([])
        for j in range(s+1):
            parti[i].append(False)

    parti[0][0] = True
    for i in range(1, n+1):
        for j in range(s+1):
            if parti[i-1][j]:
                parti[i][j] = True
            if j >= a[i-1] and parti[i-1][j-a[i-1]]:
                parti[i][j] = True
    return parti[n][s]
```

Pseudopolinomialità di Partizione

Esercizi