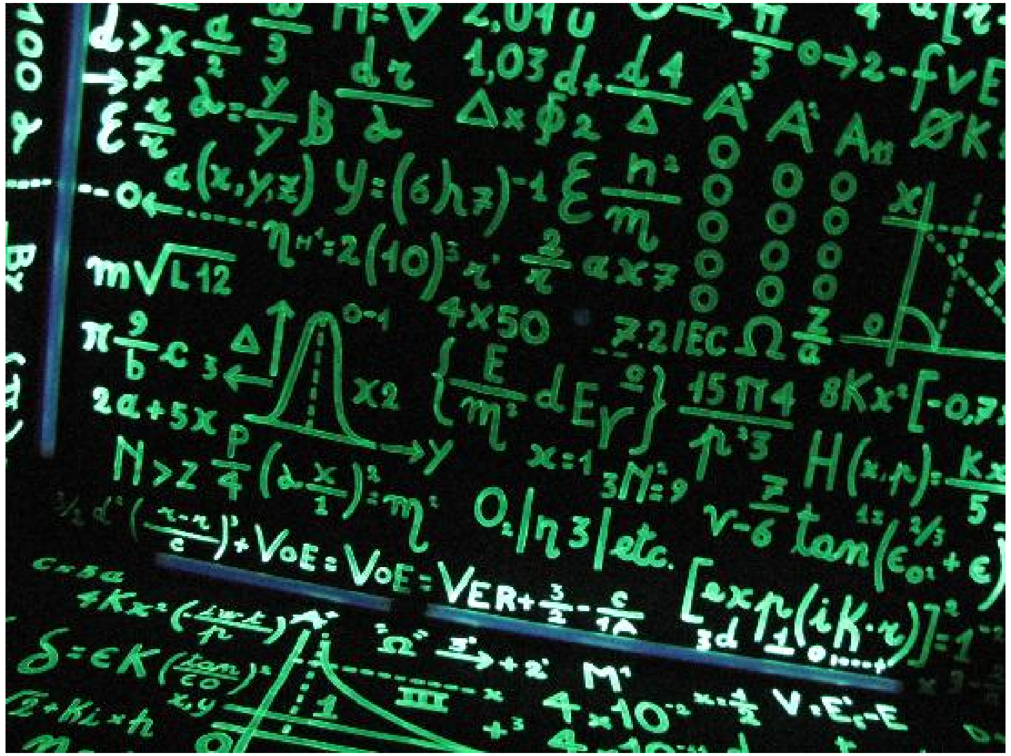
Laboratorio di Crittografia



Il Pensiero Computazionale

Percorso Formativo per i Docenti della Scuola Secondaria di II Grado

Lezione 3

Stefano Forti and Davide Neri

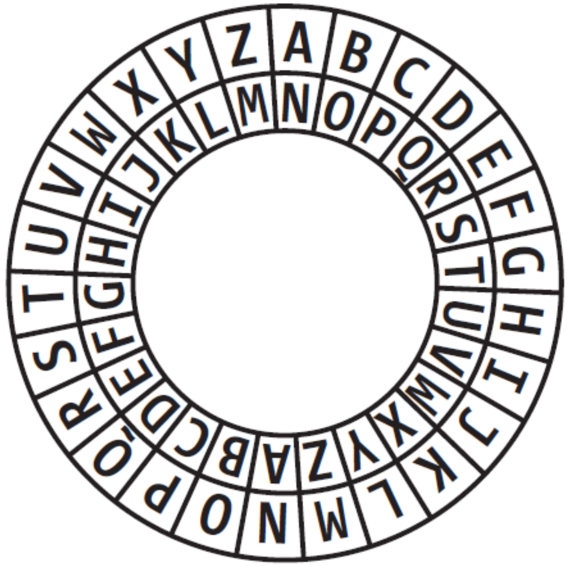
Cosa faremo oggi ?

- [Introduzione al Python 🐍]
- Cifrario di Cesare
- One Time Pad
- Diffie-Hellman e l'Esponenziazione Veloce

Cifrario di Cesare (Idea)

Un *cifrario* è un codice segreto che trasforma un messaggio in modo da renderlo incomprensibile a chi non conosce la chiave del codice.

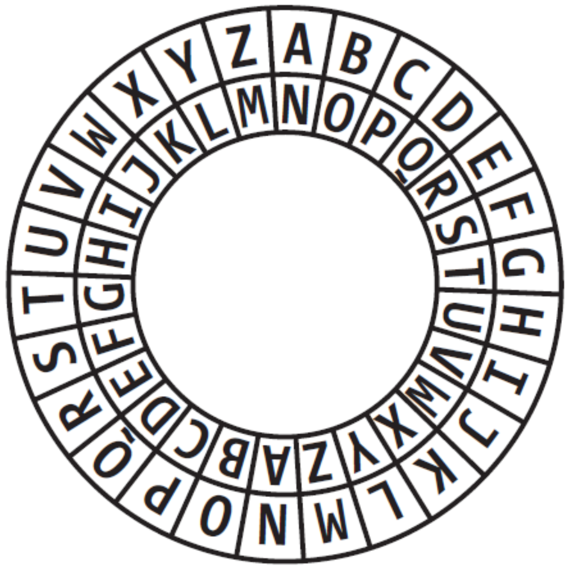
Giulio Cesare (100-44 a.C.) inviava messaggi facendo "scorrere" l'alfabeto come mostrato dall'anello qui sotto:



La *chiave* del cifrario (o *rotazione*) è rappresentata dal numero di posizioni k di cui far scorrere ciascuna lettera del messaggio ($k = 13$ nell'esempio).

Cifrario Simmetrico

Scegliendo $k = 13$ come chiave, otteniamo che $l \to l'$ e che $l' \to l$ dove l, l' rappresentano lettere dell'alfabeto.



Un cifrario di questo tipo si dice *simmetrico* in quanto permette di **crittare** e **decrittare** un messaggio eseguendo la stessa operazione.

Per esempio: `HELLO` $\to$ `URYYB` $\to$ `HELLO`.

Due Utili Funzioni

Per il laboratorio di oggi, iniziamo col definire due funzioni molto utili hanno bisogno di

```
import string
```

La prima funzione, dato un numero `n` tra `0` e `25`, ci restituisce il carattere dell'alfabeto inglese in quella posizione:

```
def from_value_to_char(n):
     alphabet = list(string.ascii_uppercase)
     return alphabet[n]
```

La seconda, dato un carattere `c`, ci restituisce la sua posizione nell'alfabeto inglese:

```
#TODO: provate a scriverla voi...
def from_char_to_value(c):
```

Due Utili Funzioni

Per il laboratorio di oggi, iniziamo col definire due funzioni molto utili hanno bisogno di

```
import string
```

La prima funzione, dato un numero `n` tra `0` e `25`, ci restituisce il carattere dell'alfabeto inglese in quella posizione:

```
def from_value_to_char(n):
    alphabet = list(string.ascii_uppercase)
    return alphabet[n]
```

La seconda, dato un carattere `c`, ci restituisce invece la sua posizione nell'alfabeto inglese:

```
def from_char_to_value(c):
    alphabet = list(string.ascii_uppercase)
    return alphabet.index(c)
```

Cifrario di Cesare (Codice)

```
def cifrario_di_cesare(msg):
    msg = msg.upper()
    output = ""

    for l in msg:

  #TODO: completare il codice in modo da gestire anche [' ', '.', ',', '!', '?', ':']

        output += l
    return output
```

Cifrario di Cesare (Codice)

```
def cifrario_di_cesare(msg):
    msg = msg.upper()
    output = ""

    for l in msg:
        if not(l in [' ', '.', ',', '!', '?', ':']):
            v = (from_char_to_value(l) + 13) % 26
            l = from_value_to_char(v)
        output += l
    return output

print(cifrario_di_cesare('URYYB, URYYB!'))
```

Prova Tu!

A chi è destinato il messaggio che Eva ed Eustachio hanno rubato a una famosa spia internazionale?

FVYIVN, EVZRZOEV NAPBEN?

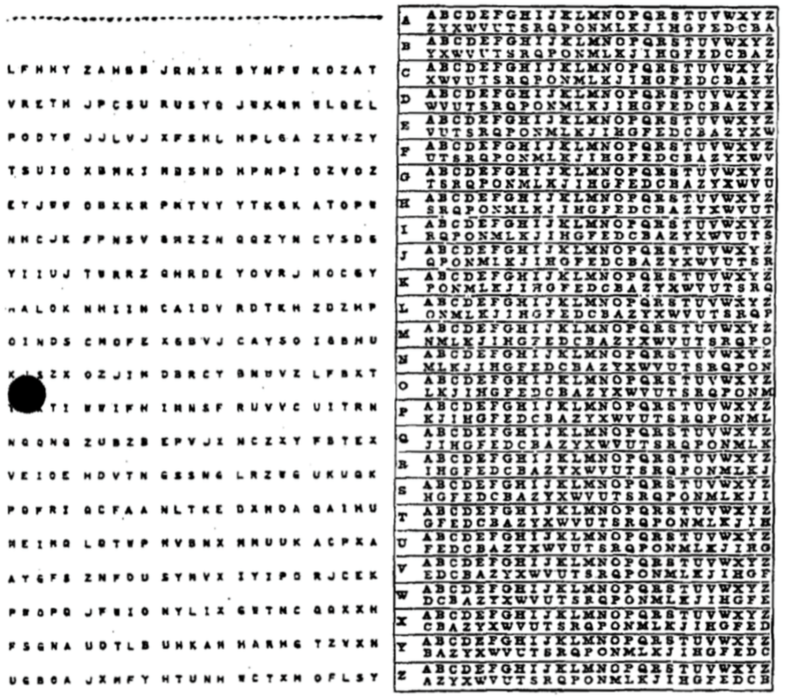
Esercizio 1

Definire la funzione `def cifra_cesare(m, k):` e la funzione `def decifra_cesare(m, k):` che permettano l'utilizzo di una chiave `k` arbitraria per cifrare e decifrare il messaggio in ingresso `m`.

One Time Pad (OTP)

Si tratta del cosiddetto *cifrario perfetto* che fu utilizzato per le comunicazioni a partire dalla Seconda Guerra Mondiale dalle spie americane e sovietiche.

L'uso più celebre rimane quello di cifratura delle comunicazioni sulla *Linea Rossa* tra il Cremlino e la Casa Bianca negli anni successivi alla crisi dei missili di Cuba (1963).



Ingredienti

OTP si basa sulla somma in modulo di un messaggio m con una chiave k (entrambe su un dato alfabeto di simboli).

Affinchè OTP funzioni e sia possibile considerarlo perfetto, la chiave k deve essere:

- completamente **casuale**,
- lunga **almeno quanto** il messaggio,
- **non riutilizzabile**,
- **segreta e condivisa** trale parti.

Come funziona OTP?

Ad ogni lettera viene associato un numero.

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

Crittazione: Le lettere del messaggio e della chiave, vengono trasformate una a una negli indici corrispondenti i_m e i_k. Le lettere vengono poi crittate usando la funzione:

$$i_c \equiv i_m + i_k \pmod{26}$$

Si torna infine alla lettera corrispondente all'indice i_c.

Come possiamo decrittare il messaggio m?

Come funziona OTP?

Ad ogni lettera viene associato un numero.

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

Decrittazione: Le lettere del crittogramma e della chiave, vengono trasformate negli indici corrispondenti i_c e i_k. Le lettere vengono poi crittate usando la funzione:

$$i_m \equiv i_c - i_k \pmod{26}$$

Si torna infine alla lettera corrispondente all'indice i_m.

One Time Pad (OTP) - Esempio

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

```
# crittazione
Testo in chiaro: C I A O  | 2 8 0 14
Chiave:          A J R F  | 0 9 17 5
-------------------------------------
Testo cifrato:   C R R T  | 2 17 17 19

# decrittazione
Testo cifrato:   C R R T  | 2 17 17 19
Chiave:          A J R F  | 0 9  17 5
-----------------------------------
Testo in chiaro: C I A O  | 2 8  0 4
```

Un'Introduzione *Hands-On* a OTP

Come fare:

- si usano due rotoli di carta igienica e due pennarelli,
- incontrarsi in un luogo segreto e scrivere una chiave **segreta** su ciascuno dei due rotoli (una lettera per ogni strappo).

Proviamo! 😃

OTP - Perchè è perfetto?

La *perfezione* di OTP si dimostra con un semplice ragionamento probabilistico.

Ipotesi: la chiave di OTP è scelta in maniera completamente casuale.

Supponiamo di avere una versione di OTP che, per crittare un bit $m_i \in \{0, 1\}$ del messaggio, calcola lo $\otimes$ (*xor*, somma binaria) tra m_i e il corrispondente bit della chiave k_i.

Si ottiene dunque:

$$c_i = m_i \otimes k_i \qquad \forall i \in 1, \cdots, n$$

Se Eva, la crittoanalista, osserva il passaggio del crittogramma c sul canale di comunicazione tra Alice e Bob, con quale probabilità può risalire al messaggio originale?

Ovvero, qual è la probabilità che un dato crittogramma c corrisponda al messaggio m?

OTP - Perchè è perfetto? (2)

Usiamo due variabili aleatorie per definire il messaggio M e il crittogramma C.

$$P\{M = m | C = c\} = \frac{P\{M = m \wedge C = c\}}{P\{C = c\}}$$

Dato che la chiave K per cifrare m è scelta a caso e che è possibile ottenere c da un certo m con una e una sola chiave k. Abbiamo, con n lunghezza della chiave:

$$P\{K = k\} = \frac{1}{2^n}$$

Dunque, gli eventi $M = m$ e $C = c$ sono **indipendenti**. E si conclude che:

$$P\{M = m | C = c\} = \frac{P\{M = m \wedge C = c\}}{P\{C = c\}} = \frac{P\{M = m\} P\{C = c\}}{P\{C = c\}} = P\{M = m\}$$

Creare Chiavi Casuali (Codice)

Per scrivere il codice di OTP, iniziamo col definire una funzione che ci consente di creare chiavi casuali che ha bisogno di:

```
import random
```

La funzione genera stringhe alfabetiche casuali di lunghezza `length`:

```
def create_otp_key(length, seed=0):
    key = ''
    random.seed(seed)
    for _ in range(length):
        key += random.choice(list(string.ascii_uppercase))
    return key
```

One Time Pad (Codice)

```python
def otp_encrypt(msg, key):
	result = ''
	msg=msg.upper()

	#TODO: Completare la funzione

	return result

def otp_decrypt(msg, key):
	result = ''
	msg=msg.upper()

	#TODO: Completare la funzione

	return result
```

One Time Pad (Codice)

```
def otp_encrypt(msg, key):
     result = ''
     msg=msg.upper()
     for i in range(len(msg)):
          c = from_char_to_value(msg[i])
          k = from_char_to_value(key[i])
          result += from_value_to_char((c + k) % 26)
     return result

def otp_decrypt(msg, key):
     result = ''
     msg=msg.upper()
     for i in range(len(msg)):
          c = from_char_to_value(msg[i])
          k = from_char_to_value(key[i])
          result += from_value_to_char((c - k) % 26)
     return result
```

One Time Pad (Esempio)

```
msg = "CIAO"
key = "AJRF"

cifrato = otp_encrypt(msg, key)
print("Messaggio cifrato: ", cifrato)

inchiaro =  otp_decrypt(cifrato, key)
print("Messaggio decifrato: ", inchiaro)
```

Esercizio 2

Dove si incontreranno Eva ed Eustachio per iniziare la loro prossima missione segreta?

CSRM HPYN SPD BEPS GB KFIN, LKB QYAXH N FYFQDUYWSMF, QDW YOE RKABXA TGU HRSVFTQDJT MZ IREDZ, MLLCC T EOFP J F ZJTUK.

data la chiave:

MYNBIQPMZJPLSGQEJEYDTZIRWZTEJDXCVKPRDLNKTUGRPOQIBZRA CXMWZVUATPKHXKWCGSHHZEZROCCKQPDJRJWDRKRGZTRSJOCTZ MKSHJFGFBTVIPCC

One Time Pad (Byte-wise)

Si tratta di una versione simmetrica del cifrario, dove crittazione e decrittazione si fanno con la stessa funzione:

```
def otp(msg, key):
     result = ''
     msg=msg.upper()
     for i in range(len(msg)):
          result += chr(ord(msg[i]) ^ ord(key[i]))
     return result
```

L'operatore `^` esegue lo XOR tra byte del messaggio e byte -della chiave.
Le funzioni `ord(c)` e `chr(v)` trasformano un carattere `c` nel corrispondente codice ASCII e viceversa.

Diffie-Helmann (Ripasso)

programma DH_ALICE

// Alice sceglie una coppia p, g nota a tutti
// e la comunica a Bob

1. **comunica** a Bob: p, g ;
2. **attende** da Bob: OK ;
3. **sceglie** un numero casuale a, con $2 \leq a \leq p-2$;
4. **calcola** $A \leftarrow g^{a} \bmod p$;
5. **comunica** a Bob: A ;
6. **attende** da Bob: B ;
   // sarà $B = g^{b} \bmod p$; b è il segreto di Bob
7. **calcola** $K_A \leftarrow B^{a} \bmod p$; // risulta $K_A = g^{b \cdot a} \bmod p$

programma DH_BOB

1. **attende** da Alice: p, g ;
2. **comunica** ad Alice: OK ;
3. **sceglie** un numero casuale b, con $2 \leq b \leq p-2$;
4. **calcola** $B \leftarrow g^{b} \bmod p$;
5. **comunica** ad Alice: B ;
6. **attende** da Alice: A ;
   // sarà $A = g^{a} \bmod p$; a è il segreto di Alice
7. **calcola** $K_B \leftarrow A^{b} \bmod p$; // risulta $K_B = g^{a \cdot b} \bmod p$

Esponenziazioni Veloci

Una delle parti cruciali dell'algoritmo DH riguarda il tempo di calcolo del valore di x^n nelle varie fasi dell'algoritmo.

Il metodo si basa sulla regola *ricorsiva*:

$$x^n = x(x^2)^{\lceil \frac{n-1}{2} \rceil} \;\; se\ n\ dispari$$

e

$$x^n = (x^2)^{\lceil \frac{n}{2} \rceil} \;\; se\ n\ pari$$

col caso base che $x^0 = 1$ e $x^1 = x$, e considerando che per $x < 0$ si ha che $x^n = \frac{1}{x^{-n}}$.

Questa operazione esegue al più $\lfloor \lg n \rfloor = O(\lg n)$ passaggi invece di $O(n)$ necessari per eseguire l'esponenziazione classica per moltiplicazioni successive.

Esercizio 3

Si scriva il codice di `quadrature_successive(n, x)` e si confronti con l'esponenziazione classica per moltiplicazioni successive, come riportato qui sotto.

```
import time

x, n = 10000, 100000

start = time.time()
quadrature_successive(x, n)
stop = time.time()

print("Quadrature Successive (s): ", stop-start)

start = time.time()
result = 1
for i in range(n):
     result = result * x
stop = time.time()

print("Moltiplicazioni Successive (s): ",stop-start)
```

Esponenziazioni Veloci (Codice)

```python
import math

def quadrature_successive(x, n):
     if n < 0:
          return quadrature_successive(1/x, -n)
     elif n == 0:
          return 1
     elif n == 1:
          return x
     elif n % 2 == 0:
          return quadrature_successive(x*x, math.ceil(n/2))
     elif n % 2 == 1:
          return x * quadrature_successive(x*x, math.ceil((n-1)/2))
```

Esponenziazioni Veloci (Tempi)

Risultati dei tempi di esecuzione con `x, n = 10000, 100000` sulla nostra macchina:

```
Quadrature Successive (s):  0.35705089569091797
Moltiplicazioni Successive (s):  5.113025665283203
```