Математическое моделирование

Лабораторная работа № 2

Джафар Идрисов

2026-02-24

Содержание (i)

1. Вводная часть

Цель работы

Показать, как с помощью математической модели выбрать стратегию поиска и перехвата цели.

Сюжет: катер береговой охраны преследует лодку браконьеров в тумане. В момент прояснения лодка наблюдается на расстоянии k км от катера, затем снова скрывается и продолжает движение прямолинейно в неизвестном направлении. Скорость катера в n раз больше скорости лодки. Требуется найти траекторию катера, обеспечивающую перехват.

Задание

1. Выполнить вывод дифференциальных уравнений для случая, когда скорость катера превышает скорость лодки в n раз.

Задание

1. Выполнить вывод дифференциальных уравнений для случая, когда скорость катера превышает скорость лодки в n раз.
2. Построить траектории катера и лодки для двух вариантов начальных условий.

Задание

1. Выполнить вывод дифференциальных уравнений для случая, когда скорость катера превышает скорость лодки в n раз.
2. Построить траектории катера и лодки для двух вариантов начальных условий.
3. По графику определить точку пересечения траекторий (момент перехвата).

2. Теория: постановка и вывод модели

Начальные обозначения и выбор координат

Примем момент обнаружения за $t_0 = 0$.

В этот момент:

- лодка находится в точке $X_0 = 0$,

Переходим к полярным координатам:

Начальные обозначения и выбор координат

Примем момент обнаружения за $t_0 = 0$.

В этот момент:

- лодка находится в точке $X_0 = 0$,
- катер расположен на расстоянии k от лодки (вдоль линии визирования): $X_0 = k$.

Переходим к полярным координатам:

Начальные обозначения и выбор координат

Примем момент обнаружения за $t_0 = 0$.

В этот момент:

- лодка находится в точке $X_0 = 0$,
- катер расположен на расстоянии k от лодки (вдоль линии визирования): $X_0 = k$.

Переходим к полярным координатам:

- полюс — точка обнаружения лодки ($r = 0$),

Начальные обозначения и выбор координат

Примем момент обнаружения за $t_0 = 0$.

В этот момент:

- лодка находится в точке $X_0 = 0$,
- катер расположен на расстоянии k от лодки (вдоль линии визирования): $X_0 = k$.

Переходим к полярным координатам:

- полюс — точка обнаружения лодки ($r = 0$),
- полярная ось r направлена через начальное положение катера.

Дистанция перехода к «обходу» полюса

Найдём радиус x, при котором катер и лодка оказываются на одинаковом расстоянии от полюса.

За время t:

- лодка проходит путь x,

Так как скорость лодки равна v, а скорость катера равна nv, равенство времен приводит к двум режимам.

Дистанция перехода к «обходу» полюса

Найдём радиус x, при котором катер и лодка оказываются на одинаковом расстоянии от полюса.

За время t:

- лодка проходит путь x,
- катер проходит $x - k$ или $x + k$ (в зависимости от стартовой конфигурации относительно полюса).

Так как скорость лодки равна v, а скорость катера равна nv, равенство времен приводит к двум режимам.

Из условия равенства времени получаем начальные радиусы для двух случаев:

- case = plus:

$$x_1 = \frac{k}{n+1}, \quad \theta_0 = 0$$

Далее катер должен удерживать ту же радиальную скорость удаления, что и лодка, то есть $dr/dt = v$, и одновременно иметь тангенциальную составляющую, обеспечивающую «обметание» направлений.

Разложение скорости катера и система ОДУ

Из условия равенства времени получаем начальные радиусы для двух случаев:

- case = plus:

$$x_1 = \frac{k}{n+1}, \quad \theta_0 = 0$$

- case = minus:

$$x_2 = \frac{k}{n-1}, \quad \theta_0 = -\pi$$

Далее катер должен удерживать ту же радиальную скорость удаления, что и лодка, то есть $dr/dt = v$, и одновременно иметь тангенциальную составляющую, обеспечивающую «обметание» направлений.

Уравнение траектории катера

Исключая параметр времени t, получаем уравнение траектории:

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{r}{\sqrt{n^2 - 1}}.$$

Качественный вывод: решение имеет вид экспоненциально расходящейся спирали в полярных координатах.

3. Эксперимент: численное моделирование

Условие задачи для расчётов

Дано:

- расстояние обнаружения: $k = 20$ км,

Цель: построить траектории катера и лодки и определить момент перехвата по пересечению кривых.

Условие задачи для расчётов

Дано:

- расстояние обнаружения: $k = 20$ км,
- превосходство скорости: $n = 5$.

Цель: построить траектории катера и лодки и определить момент перехвата по пересечению кривых.


Базовый эксперимент (case=plus)
катер
лодка
90°
45°
135°
180°
0°
225°
315°
12
10
8
6
4
2
0

Базовый эксперимент: case = plus

Наблюдения:

- траектория катера — расходящаяся спираль;

Базовый эксперимент: case = plus

Наблюдения:

- траектория катера — расходящаяся спираль;
- радиус r монотонно возрастает при увеличении угла θ;

Базовый эксперимент: case = plus

Наблюдения:

- траектория катера — расходящаяся спираль;
- радиус r монотонно возрастает при увеличении угла θ;
- траектория лодки в полярных координатах выглядит как луч (так как в декартовой системе движение прямолинейное).

Базовый эксперимент: case = minus

Базовый эксперимент: case = minus

Отличия от режима case=plus:

- стартовый радиус больше, поэтому траектория целиком «сдвинута» наружу;

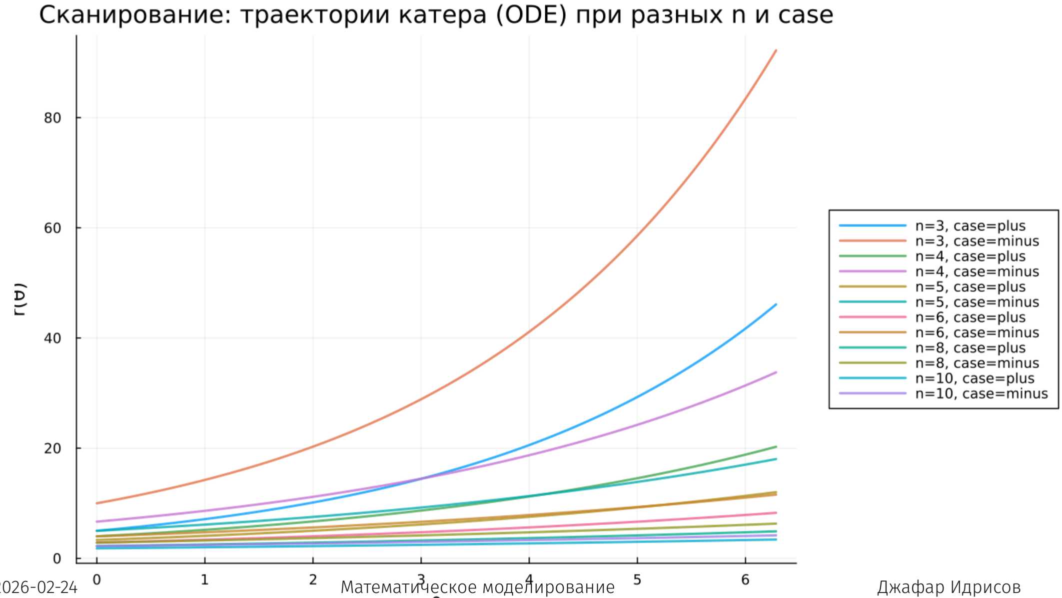
Базовый эксперимент: case = minus

Отличия от режима case=plus:

- стартовый радиус больше, поэтому траектория целиком «сдвинута» наружу;
- форма спирали сохраняется, меняется преимущественно масштаб.

4. Параметрический анализ

Сканирование по параметру n



Сканирование по параметру n

Из уравнения

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{r}{\sqrt{n^2 - 1}}$$

следует, что коэффициент роста по углу равен $1/\sqrt{n^2 - 1}$. Поэтому:

- при малых n спираль «раскручивается» быстрее;

Сканирование по параметру n

Из уравнения

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{r}{\sqrt{n^2 - 1}}$$

следует, что коэффициент роста по углу равен $1/\sqrt{n^2 - 1}$. Поэтому:

- при малых n спираль «раскручивается» быстрее;
- при больших n радиус растёт медленнее;

Сканирование по параметру n

Из уравнения

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{r}{\sqrt{n^2 - 1}}$$

следует, что коэффициент роста по углу равен $1/\sqrt{n^2 - 1}$. Поэтому:

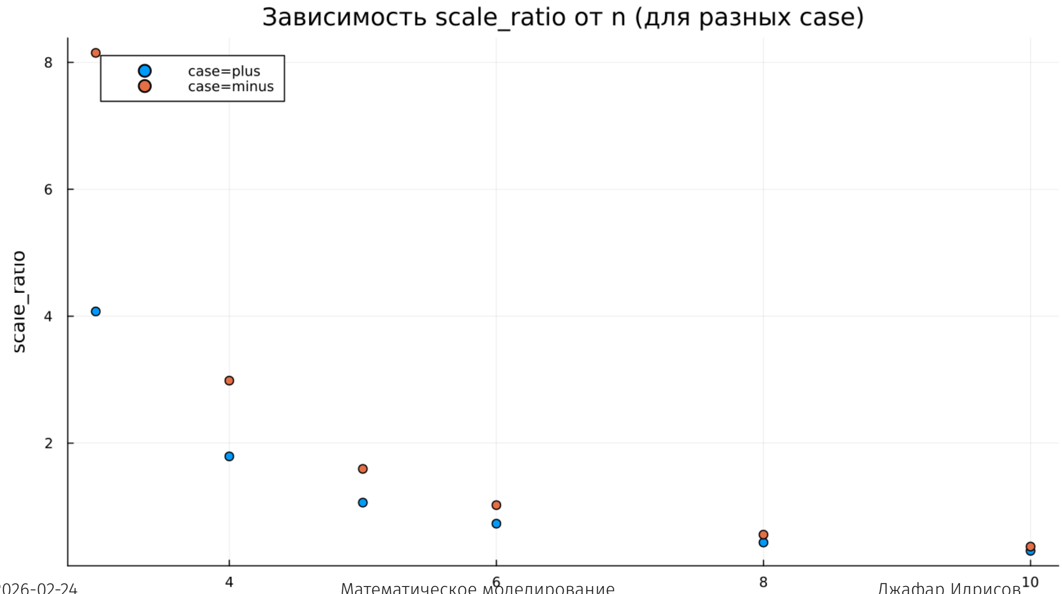
- при малых n спираль «раскручивается» быстрее;
- при больших n радиус растёт медленнее;
- траектория становится более «пологой» по θ.

Метрика scale_ratio

Введём показатель относительного масштаба:

$$\text{scale\_ratio} = \frac{r_{\text{final}}}{\max(r_{\text{boat}})}.$$

Метрика scale_ratio



Метрика scale_ratio

Интерпретация:

- при малых n значение заметно больше 1, то есть катер существенно превосходит лодку по «радиальному масштабу» движения;

Для режима case=minus значения выше вследствие увеличенного стартового радиуса.

Метрика scale_ratio

Интерпретация:

- при малых n значение заметно больше 1, то есть катер существенно превосходит лодку по «радиальному масштабу» движения;
- с ростом n метрика быстро снижается;

Для режима case=minus значения выше вследствие увеличенного стартового радиуса.

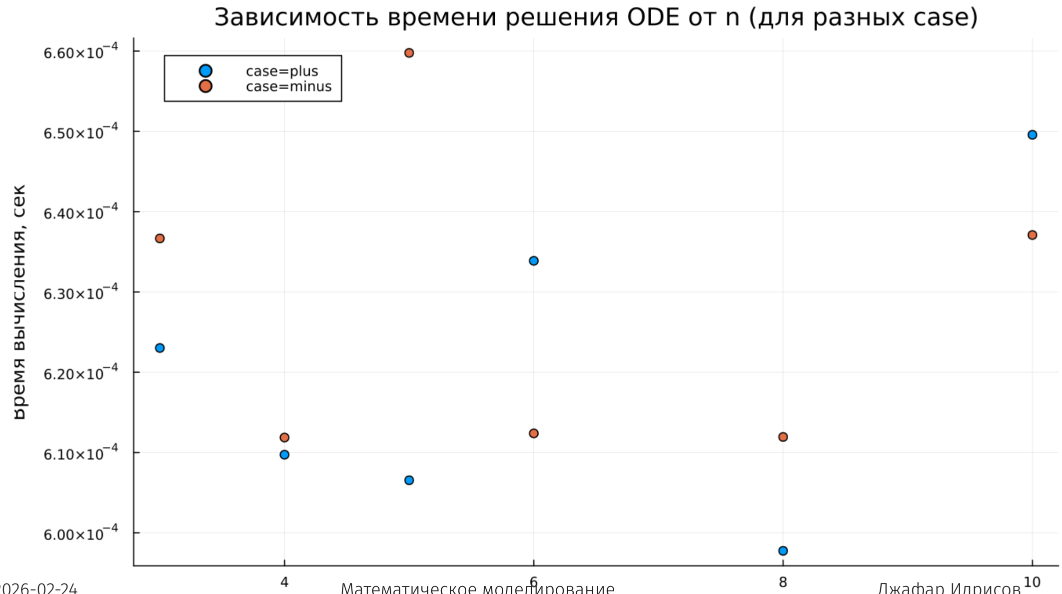
Метрика scale_ratio

Интерпретация:

- при малых n значение заметно больше 1, то есть катер существенно превосходит лодку по «радиальному масштабу» движения;
- с ростом n метрика быстро снижается;
- при больших n масштабы траекторий становятся близкими.

Для режима case=minus значения выше вследствие увеличенного стартового радиуса.

Время вычислений



Время вычислений

Итоги бенчмаркинга:

- время расчёта порядка $\sim 6 \times 10^{-4}$ сек;

Время вычислений

Итоги бенчмаркинга:

- время расчёта порядка $\sim 6 \times 10^{-4}$ сек;
- выраженной зависимости от n не обнаружено;

Время вычислений

Итоги бенчмаркинга:

- время расчёта порядка $\sim 6 \times 10^{-4}$ сек;
- выраженной зависимости от n не обнаружено;
- небольшие флуктуации обусловлены адаптивным шагом интегрирования.

5. Итоги

Выводы

1. Траектория катера в полярных координатах описывается экспоненциально расходящейся спиралью.

Выводы

1. Траектория катера в полярных координатах описывается экспоненциально расходящейся спиралью.
2. Параметр n управляет темпом роста: при увеличении n радиус возрастает медленнее при росте θ.

Выводы

1. Траектория катера в полярных координатах описывается экспоненциально расходящейся спиралью.
2. Параметр n управляет темпом роста: при увеличении n радиус возрастает медленнее при росте θ.
3. Режим начального условия (case) меняет масштаб траектории, но не её качественную форму.

Выводы

1. Траектория катера в полярных координатах описывается экспоненциально расходящейся спиралью.
2. Параметр n управляет темпом роста: при увеличении n радиус возрастает медленнее при росте θ.
3. Режим начального условия (case) меняет масштаб траектории, но не её качественную форму.
4. Численное решение устойчиво, а вычислительная стоимость практически не чувствительна к n.