洗衣服中蕴涵着学问

山东沂南四中　(276300)　李树臣

e 是数学中的一个重要的无理数,它有着许多重要的性质,数学中的许多问题都与它有关.我们生活中的一些自然现象、社会现象也与它有着密切的联系.本文试图通过研究洗衣服这件日常的生活小事,来推出与 e 有关的几个数学结论.

一、问题的提出

洗一件衣服,先要用少许水和洗衣粉,把衣服充分浸泡、揉搓,以便使污物充分溶解或飘浮于水中.将衣服"拧干"后,它上面肯定还带有一定数量的含污物的水.设衣服上残存的污物为 m_0 克(当然包括残留的洗衣粉),残存水重 w 千克.另外,我们还有一桶清水,设为 A 千克.问题:怎样合理的运用这 A 千克水,尽可能地把衣服洗干净?

二、建立数学模型

设把这 A 千克水分成 n 次使用,每次的用水量分别为 $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n$(千克),经过 n 次洗涤,衣服上还剩多少污物?

第一次,把带有 m_0 克污物和 w 千克水的衣服放到 a_1 千克水中,经过充分搓洗,这 m_0 克污物溶于 $(w+a_1)$ 千克的水中.此时,把污水倒掉,把衣服拧干,衣服上一定还残留一定的污物 m_1 克(必有 $m_1 < m_2$),残存的水重仍为 w 千克.显然有:

$$\frac{\text{衣服上残存的污物量 } m_1}{\text{原来的残存物污量 } m_0} = \frac{\text{拧“干”后残存水量 } w}{w + a_1},$$

$$\therefore m_1 = m_0 \cdot \frac{w}{w + a_1} = \frac{m_0}{1 + \frac{a_1}{w}}.$$

类似可得,第二次把带有 m_1 克污物和 w 千克水的衣服放到 a_2 千克水中,洗涤拧干后的残存污物量为

$$m_2 = \frac{m_1}{1 + \frac{a_2}{w}} = \frac{m_0}{(1 + \frac{a_1}{w})(1 + \frac{a_2}{w})}.$$

依此类推,经过 n 次洗涤后,衣服上的残存污物量为

$$m_n = \frac{m_0}{(1 + \frac{a_1}{w})(1 + \frac{a_2}{w}) \cdots (1 + \frac{a_n}{w})}. \quad (1)$$

通过上述的分析,我们得到了数学模型(1),把洗衣服的问题转化为研究公式(1)的最小值问题.

现在,要讨论的"纯"数学问题是:

1. 对于固定的 n,如何选取 $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n$,才能使得 m_n 取得最小值?

2. 当 n 增大时,m_n 的最小值怎样变化?

三、问题的解决

由公式(1)知,要让 m_n 最小,必须使 $(1 + \frac{a_1}{w})(1 + \frac{a_2}{w}) \cdots (1 + \frac{a_n}{w})$ 在 $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = A$ 的条件下取得最大值.

因为 $(1 + \frac{a_1}{w}) + (1 + \frac{a_2}{w}) + \cdots + (1 + \frac{a_n}{w}) = n + \frac{A}{w}$,当 n 固定时,$n + \frac{A}{w}$ 也是固定的,所以问题转化为:

已知 n 个正实数 $1 + \frac{a_1}{w}, 1 + \frac{a_2}{w}, \cdots, 1 + \frac{a_n}{w}$ 之和为定数 $S = n + \frac{A}{w}$,问这 n 个正数的乘积在什么时候取得最大值?

$$\because (1 + \frac{a_1}{w})(1 + \frac{a_2}{w}) \cdots (1 + \frac{a_n}{w}) \leqslant \left(\frac{n + \frac{A}{w}}{n}\right)^n = (1 + \frac{A}{nw})^n,$$

$\therefore$ 当 $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$,即每次的用水量相等时,可以使残存的污物量 m_n 达到最小值.

下面研究问题 2.如果把同样多的水(A 千

特殊化方法的解题功能

山东省单县第五中学　(274318)　刘　明

辨证唯物主义告诉我们:一般性寓于特殊性之中,并通过特殊性表现出来,没有特殊性就没有一般性.这一原理可用于指导数学解题,对于一个数学问题,我们可通过考察其特殊情形,

---

克)分成$(n+1)$次来洗,看看洗涤的效果是怎样的?

$\because 1+\frac{A}{nw}\neq 1,$

$\therefore (1+\frac{A}{nw})^n\times 1<\left[\frac{n(1+\frac{A}{nw})+1}{n+1}\right]^{n+1}$

$=\left[1+\frac{A}{(n+1)w}\right]^{n+1}$. (2)

$\therefore$ 数列 $\left\{S_n=(1+\frac{A}{nw})^n\right\}$ 是递增的,这说明,把水分成$(n+1)$份,洗$(n+1)$次比分成n次洗的效果要好.至此,洗衣服的问题已经全部解决了.

四、进一步的思考与探讨

通过前面的讨论,我们得到了在水量一定的情况下,洗衣服的次数多了洗得干净.那么,是不是只要洗得次数足够的多,就能使残留的污物要怎样的少就能达到怎样的少呢?也就是问数列$\left\{S_n=(1+\frac{A}{nw})^n\right\}$是不是会无限的增大呢?

不会的.事实上,$(\frac{2n+2}{n})^n=(\frac{2n+2}{n})^n\times 1\times 1<\left(\frac{n\times\frac{2n+2}{n}+2}{n+2}\right)^{n+2}=2^{n+2}$,即 $2^n(1+\frac{1}{n})^n<2^{n+2}$,$\therefore (1+\frac{1}{n})^n<4$. (3)

设n很大时$\frac{1}{k+1}\leqslant\frac{A}{nw}\leqslant\frac{1}{k}$,此时有$n\leqslant(k+1)\frac{A}{w}$,

$(1+\frac{A}{nw})^n\leqslant(1+\frac{1}{k})^n\leqslant\left[(1+\frac{1}{k})^{k+1}\right]^{\frac{A}{w}}\leqslant 8^{\frac{A}{w}}$. (4)

(4)式说明数列$\left\{S_n=(1+\frac{A}{nw})^n\right\}$是有上界的.数列的有界性进一步说明当水量$A$一定,衣服拧干后含水量$w$一定时,不管把水分成多少次来洗时,总有一定数量的污物残留在衣服上.而且从(3)式可看出,如果让$w=A$,想让残留在衣服上的污物少于原来的$\frac{1}{4}$是不可能的.

数列$\left\{S_n=(1+\frac{A}{nw})^n\right\}$递增且有上界,故必有极限.

当$w=A$时,极限是

$\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n=2.71828\cdots$ (5)

这个极限就是e.

至此,我们从日常的洗衣服谈起,找到了e.这个无理数e在计算利息、研究生物物种的生长规律、估计化学元素的蜕变规律时也会用到.

关于对e的计算,通常是用e的级数表达式去进行的,即 $e=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\cdots$ (6)

例如,在(6)式中,取$n=6$,则

$e\approx 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{24}+\frac{1}{120}+\frac{1}{720}\approx 2.718$.

关于e的无理性的证明,我们在本文不去研究.

(本文是在张景中院士《从$\sqrt{2}$谈起》的有关内容的基础上整理而成的.)□