개념원리 | 확률과 통계

정답과 풀이

개념원리 익히기 · 확인체크

Ⅰ. 경우의 수

1

x, y가 자연수일 때, 부등식 $x+y<4$를 만족시키는 경우는 $x+y=2$ 또는 $x+y=3$이므로 각 경우의 순서쌍 (x, y)는
(ⅰ) $x+y=2$일 때, $(1, 1)$의 1개
(ⅱ) $x+y=3$일 때, $(1, 2)$, $(2, 1)$의 2개
(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 순서쌍의 개수는
$1+2=3$ **답 3**

2

서로 다른 두 개의 주사위를 동시에 던질 때, 나오는 눈의 수의 차가 1 이하인 경우는 1 또는 0이므로
(ⅰ) 눈의 수의 차가 1이 되는 경우
$(1, 2)$, $(2, 1)$, $(2, 3)$, $(3, 2)$, $(3, 4)$, $(4, 3)$, $(4, 5)$, $(5, 4)$, $(5, 6)$, $(6, 5)$의 10가지
(ⅱ) 눈의 수의 차가 0이 되는 경우
$(1, 1)$, $(2, 2)$, $(3, 3)$, $(4, 4)$, $(5, 5)$, $(6, 6)$의 6가지
(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 경우의 수는
$10+6=16$ **답 16**

3

(1) 54를 소인수분해하면 $54=2\times3^3$이므로
2의 양의 약수는 1, 2의 2개,
3^3의 양의 약수는 1, 3, 3^2, 3^3의 4개이다.
따라서 54의 양의 약수의 개수는
$2\times4=8$
(2) 120을 소인수분해하면 $12=2^3\times3\times5$이므로
2^3의 양의 약수는 1, 2, 2^2, 2^3의 4개,
3의 양의 약수는 1, 3의 2개,
5의 양의 약수는 1, 5의 2개이다.
따라서 120의 양의 약수의 개수는
$4\times2\times2=16$
(3) 252를 소인수분해하면 $252=2^2\times3^2\times7$이므로
2^2의 양의 약수는 1, 2, 2^2의 3개,
3^2의 양의 약수는 1, 3, 3^2의 3개,
7의 양의 약수는 1, 7의 2개이다.
따라서 252의 양의 약수의 개수는
$3\times3\times2=18$

답 (1) **8** (2) **16** (3) **18**

4

주어진 다항식에서 a를 택하면
이 경우에 대하여 p, q의 2가지의 선택이 가능하고
그 각각에 대하여 x, y의 2가지의 선택이 가능하다.
따라서 a를 포함한 항의 개수는
$1\times2\times2=4$ **답 4**

5

두 자리 자연수 중에서 십의 자리의 수가 홀수인 경우는 1, 3, 5, 7, 9의 5가지이고, 일의 자리의 수가 소수인 경우는 2, 3, 5, 7의 4가지이다.
따라서 구하는 두 자리 자연수의 개수는
$5\times4=20$ **답 20**

6

관광지 4곳에서 4곳을 택하는 순열의 수이므로
${}_4P_4=4!=4\times3\times2\times1=24$ **답 24**

7

5개에서 3개를 택하는 순열의 수이므로
${}_5P_3=5\times4\times3=60$ **답 60**

8

c와 y를 제외한 5개의 문자를 일렬로 나열하는 경우의 수는
$5!=5\times4\times3\times2\times1=120$

c와 y를 양 끝에 나열하는 경우의 수는

$2!=2\times1=2$

따라서 구하는 경우의 수는

$120\times2=240$ 답 240

9

12명에서 5명을 택하는 조합의 수이므로

${}_{12}C_5=\frac{12\times11\times10\times9\times8}{5\times4\times3\times2\times1}=792$ 답 792

10

7개의 문자 중에서 C, F를 포함하여 4개를 뽑는 경우의 수는 C와 F를 제외한 나머지 5개의 문자 중에서 2개를 뽑는 경우의 수와 같으므로

${}_5C_2=\frac{5\times4}{2\times1}=10$

C, F를 포함하여 뽑은 4개의 문자 중에서 C, F를 제외한 2개의 문자를 일렬로 나열하는 경우의 수는 $2!$이고, 그 사이와 양 끝의 3개의 자리 중에서 2개의 자리에 C, F를 나열하는 경우의 수는 ${}_3P_2$이므로 C, F가 이웃하지 않게 나열하는 경우의 수는

$2!\times{}_3P_2=2\times6=12$

따라서 구하는 경우의 수는

$10\times12=120$ 답 120

11

세 수의 곱이 짝수가 되려면 세 수 중에서 적어도 하나가 짝수이어야 한다. 즉, 서로 다른 세 수를 택하는 경우에서 홀수만 세 개를 택하는 경우를 제외하면 된다.

9개의 자연수 중에서 서로 다른 세 수를 택하는 경우의 수는

${}_9C_3=\frac{9\times8\times7}{3\times2\times1}=84$

이때 홀수만 택하는 경우의 수는

${}_5C_3=\frac{5\times4\times3}{3\times2\times1}=10$

따라서 구하는 경우의 수는

$84-10=74$ 답 74

12

답 (1) **6** (2) **3** (3) **3, 2**

13

$(5-1)!=4!=4\times3\times2\times1=24$ 답 24

14

수진이와 경호를 한 사람으로 생각하면 모두 4명이고, 이들이 앉는 원순열의 수는

$(4-1)!=3!=6$

이때 각 경우에 대하여 수진이와 경호가 자리를 바꾸는 경우의 수는

$2!=2$

따라서 구하는 경우의 수는

$6\times2=12$ 답 12

15

구하는 경우의 수는 4가지의 색을 원형으로 배열하는 원순열의 수와 같으므로

$(4-1)!=3!=6$ 답 6

16

남자 5명이 원탁에 둘러앉는 경우의 수는

$(5-1)!=4!=24$

남자와 남자 사이의 5개의 자리에 여자 5명을 앉히는 경우의 수는

${}_5P_5=5!=120$

따라서 구하는 경우의 수는

$24\times120=2880$ 답 2880

17

(1) 할머니의 자리가 결정되면 할아버지의 자리는 마주 보는 자리로 고정되므로 구하는 경우의 수는 5명이 원탁에 둘러앉는 수와 같다.
따라서 구하는 경우의 수는
$(5-1)!=4!=24$

(2) 할머니와 할아버지를 한 사람으로 생각하면 모두 5명이고, 이들이 원탁에 둘러앉는 경우의 수는
$(5-1)!=4!=24$

이때 각 경우에 대하여 할머니와 할아버지가 자리를 바꾸는 경우의 수는

$2!=2$

따라서 구하는 경우의 수는

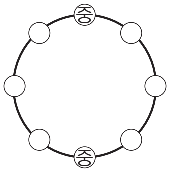
$24\times2=48$

답 (1) **24** (2) **48**

다른풀이 (1) 할머니와 할아버지가 마주 보도록 원탁에 앉은 다음 나머지 네 자리에 4명이 앉으면 되므로 구하는 경우의 수는 ${}_4P_4=4!=24$

18

중국인 사이에 세 명의 일본인이 앉게 되면 중국인끼리 마주 보게 된다.



이때 중국인 한 명의 자리가 결정되면 남은 중국인 한 명의 자리는 마주 보는 자리로 고정되므로 구하는 경우의 수는 7명이 원탁에 둘러앉는 경우의 수와 같다.

따라서 구하는 경우의 수는

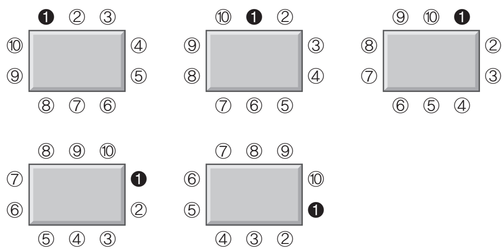
$(7-1)!=6!=720$ 답 **720**

19

(1) 10명이 원형으로 둘러앉는 경우의 수는

$(10-1)!=9!=362880$

10명이 직사각형 모양의 탁자에 둘러앉을 때, ①의 자리를 어느 자리에 고정시키느냐에 따라 둘러앉는 경우가 다음 그림과 같이 5가지 경우로 달라진다.



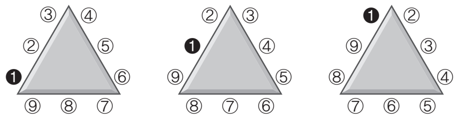
따라서 구하는 경우의 수는

$362880\times5=1814400$

(2) 9명이 원형으로 둘러앉는 경우의 수는

$(9-1)!=8!=40320$

9명이 정삼각형 모양의 탁자에 둘러앉을 때, ①의 자리를 어느 자리에 고정시키느냐에 따라 둘러앉는 경우가 다음 그림과 같이 3가지 경우로 달라진다.

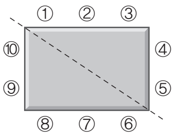


따라서 구하는 경우의 수는

$40320\times3=120960$

답 (1) **1814400** (2) **120960**

주의 (1) A를 ①에 고정시키는 것과 ⑥에 고정시키는 것, ②와 ⑦, ③과 ⑧, ④와 ⑨, ⑤와 ⑩에 고정시키는 것은 서로 같다.

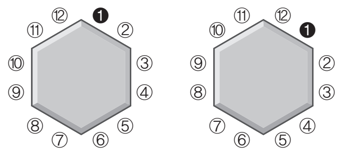


20

12명이 원형으로 둘러앉는 경우의 수는

$(12-1)!=11!$

12명이 정육각형 모양의 탁자에 둘러앉을 때, ①의 자리를 어느 자리에 고정시키느냐에 따라 둘러앉는 경우가 다음 그림과 같이 2가지 경우로 달라진다.



따라서 구하는 경우의 수는 $2\times11!$이므로

$a=11$ 답 **11**

21

가운데 정육각형을 칠하는 경우의 수는 7

나머지 6개의 영역을 칠하는 경우의 수는

$(6-1)!=5!=120$

따라서 구하는 경우의 수는

$7\times120=840$ 답 **840**

22

사각뿔의 밑면을 칠하는 경우의 수는 5

밑면을 제외한 4개의 옆면을 칠하는 경우의 수는

$(4-1)!=3!=6$

따라서 구하는 경우의 수는

$5\times6=30$ 답 30

23

(1) ${}_6\Pi_2=6^2=36$

(2) ${}_3\Pi_4=3^4=81$

(3) ${}_7\Pi_1=7^1=7$

(4) ${}_2\Pi_2=2^2=4$

답 (1) **36** (2) **81** (3) **7** (4) **4**

24

(1) ${}_n\Pi_3=125$이므로 $n^3=125=5^3$

$\therefore n=5$

(2) ${}_n\Pi_5=243$이므로 $n^5=243=3^5$

$\therefore n=3$

(3) ${}_2\Pi_r=128$이므로 $2^r=128=2^7$

$\therefore r=7$

(4) ${}_7\Pi_r=343$이므로 $7^r=343=7^3$

$\therefore r=3$

답 (1) $\boldsymbol{n=5}$ (2) $\boldsymbol{n=3}$ (3) $\boldsymbol{r=7}$ (4) $\boldsymbol{r=3}$

25

1, 2, 3, 4, 5의 5개에서 4개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로 ${}_5\Pi_4=5^4=625$ 답 625

26

○, ×의 2개에서 5개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로 ${}_2\Pi_5=2^5=32$ 답 32

27

서로 다른 2개의 우체통에서 3개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로 ${}_2\Pi_3=2^3=8$ 답 8

28

서로 다른 3곳의 호텔에서 5개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로 ${}_3\Pi_5=3^5=243$ 답 243

29

남학생 5명을 홀수반인 1반, 3반에 편성하는 경우의 수는 서로 다른 2개 반에서 5개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로 ${}_2\Pi_5=2^5=32$

남학생 5명을 모두 1반 또는 3반에 편성하는 경우의 수는 2

여학생 4명을 짝수반인 2반에 편성하는 경우의 수는 1

따라서 구하는 경우의 수는

$(32-2)\times1=30$ 답 30

30

청색, 녹색, 적색의 3가지 깃발에서 중복을 허용하여

깃발을 1번 들어 올려서 만들 수 있는 신호의 개수는

${}_3\Pi_1=3^1=3$

깃발을 2번 들어 올려서 만들 수 있는 신호의 개수는

${}_3\Pi_2=3^2=9$

깃발을 3번 들어 올려서 만들 수 있는 신호의 개수는

${}_3\Pi_3=3^3=27$

따라서 구하는 신호의 개수는

$3+9+27=39$ 답 39

31

n개의 깃발을 사용하여 만들 수 있는 신호의 개수는

${}_2\Pi_n=2^n$

만들려고 하는 신호의 개수가 100 이상이므로

$2^n\geq100$ …… ㉠

이때 $2^6=64$, $2^7=128$이므로 ㉠을 만족시키는 자연수 n의 최솟값은 7이다. 답 7

32

(1) 천의 자리에는 0이 올 수 없으므로 5가지

백의 자리, 십의 자리에는 0, 1, 2, 3, 4, 5가 모두 중복하여 올 수 있으므로 ${}_6\Pi_2=6^2=36$

일의 자리에는 0, 2, 4가 올 수 있으므로 3가지

따라서 구하는 짝수의 개수는

$5\times36\times3=540$

(2) (i) 0 또는 한 자리의 정수의 개수

6

(ii) 두 자리의 정수의 개수

십의 자리에는 0이 올 수 없으므로 5가지, 일의 자리에는 0, 1, 2, 3, 4, 5가 올 수 있으므로 6가지

$\therefore 5\times6=30$

(iii) 세 자리의 정수의 개수

백의 자리에는 0이 올 수 없으므로 5가지, 십의 자리와 일의 자리에는 0, 1, 2, 3, 4, 5가 모두 중복하여 올 수 있으므로

${}_6\Pi_2=6^2=36$

$\therefore 5\times36=180$

(i)~(iii)에 의하여 구하는 정수의 개수는

$6+30+180=216$

답 (1) **540** (2) **216**

33

2000보다 큰 수는 2□□□, 3□□□의 꼴이다.

2□□□, 3□□□ 꼴의 자연수의 개수는 4개의 숫자에서 3개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

$2\times{}_4\Pi_3=2\times4^3=128$

그런데 2000보다 큰 자연수이므로 2000은 제외된다.

따라서 2000보다 큰 자연수의 개수는

$128-1=127$

답 **127**

34

X에서 Y로의 함수의 개수는 집합 Y의 원소 a, b, c, d, e의 5개에서 중복을 허용하여 3개를 뽑아 집합 X의 원소 1, 2, 3에 대응시키는 중복순열의 수와 같으므로

$m={}_5\Pi_3=5^3=125$

X에서 Y로의 일대일함수의 개수는 집합 Y의 원소 a, b, c, d, e의 5개에서 서로 다른 3개를 뽑아 집합 X의 원소 1, 2, 3에 대응시키는 순열의 수와 같으므로

$n={}_5\mathrm{P}_3=60$

$\therefore m+n=125+60=185$

답 **185**

35

$f(1)$, $f(3)$의 값은 짝수이므로 $\{1, 3\}$에서 $\{6, 8\}$로의 함수의 개수는 원소 6, 8의 2개에서 중복을 허용하여 2개를 뽑아 원소 1, 3에 대응시키는 중복순열의 수와 같다.

$\therefore {}_2\Pi_2=2^2=4$

$f(2)$, $f(4)$의 값은 홀수이므로 $\{2, 4\}$에서 $\{5, 7, 9\}$로의 함수의 개수는 원소 5, 7, 9의 3개에서 중복을 허용하여 2개를 뽑아 원소 2, 4에 대응시키는 중복순열의 수와 같다.

$\therefore {}_3\Pi_2=3^2=9$

따라서 구하는 함수 f의 개수는

$4\times9=36$

답 **36**

36

일의 자리에 올 수 있는 수는 1이므로 나머지 네 자리에 1이 2개, 2가 2개인 숫자를 일렬로 나열하는 순열의 수이다.

따라서 구하는 홀수의 개수는

$\dfrac{4!}{2!2!}=6$

답 **6**

37

(i) 일의 자리에 0이 오는 경우

나머지 여섯 자리에 1, 1, 1, 2, 2, 3을 일렬로 나열하는 경우의 수이고, 이때 6개의 숫자 중 1이 3개, 2가 2개이므로

$\dfrac{6!}{3!2!}=60$

(ii) 일의 자리에 2가 오는 경우

나머지 여섯 자리에 0, 1, 1, 1, 2, 3을 일렬로 나열하는 경우의 수는 6개의 숫자 중 1이 3개이므로

$\dfrac{6!}{3!}=120$

맨 앞자리에 0이 오는 경우의 수는 맨 앞자리의 수를 뺀 1, 1, 1, 2, 3의 5개의 숫자를 일렬로 나열하는 경우의 수이고, 이때 5개의 숫자 중 1이 3개이므로

$\dfrac{5!}{3!}=20$

따라서 만들 수 있는 짝수의 개수는

$120-20=100$

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 짝수의 개수는

$60+100=160$ **답 160**

38

3의 배수인 경우는 각 자리의 숫자의 합이 3의 배수일 때이다.

1, 1, 2, 2, 2, 3, 3에서 4개를 택하여 그 합이

6이 되는 경우는 (1, 1, 2, 2)

9가 되는 경우는 (1, 2, 3, 3), (2, 2, 2, 3)

(ⅰ) (1, 1, 2, 2)로 만들 수 있는 3의 배수의 개수는

$\frac{4!}{2!2!}=6$

(ⅱ) (1, 2, 3, 3)으로 만들 수 있는 3의 배수의 개수는

$\frac{4!}{2!}=12$

(ⅲ) (2, 2, 2, 3)으로 만들 수 있는 3의 배수의 개수는

$\frac{4!}{3!}=4$

(ⅰ)~(ⅲ)에서 구하는 3의 배수의 개수는

$6+12+4=22$ **답 22**

39

$\mathrm{m}\underbrace{\square\cdots\square}_{9개}\mathrm{m}$과 같이 양 끝에 m을 나열하고 중간에 a, t, h, e, a, t, i, c, s를 일렬로 나열하면 되는데 a, t가 각각 2개씩이므로 구하는 경우의 수는

$\frac{9!}{2!2!}=90720$ **답 90720**

40

8개의 문자를 일렬로 나열하는 경우의 수는 8개의 문자 중 n이 2개, t가 2개, e가 2개이므로

$\frac{8!}{2!2!2!}=5040$

t□□□□□□t와 같이 양 끝에 t를 나열하고 중간에 i, n, e, r, n, e를 일렬로 나열하는 경우의 수는 6개의 문자 중 n이 2개, e가 2개이므로

$\frac{6!}{2!2!}=180$

따라서 구하는 경우의 수는

$5040-180=4860$ **답 4860**

41

자음 c, l, n, d, r를 한 문자 A로 생각하면

A, a, e, a의 4개의 문자를 일렬로 나열하는 경우의 수는 4개의 문자 중 a가 2개이므로

$\frac{4!}{2!}=12$

이때 자음 c, l, n, d, r끼리 자리를 바꾸는 경우의 수는

$5!=120$

따라서 구하는 경우의 수는

$12\times120=1440$ **답 1440**

42

t, n, i의 순서가 정해져 있으므로 t, n, i를 모두 A로 생각하면 A, A, A, e, c, h, q, u, e의 9개의 문자를 일렬로 나열한 후 첫 번째 A는 t, 두 번째 A는 n, 세 번째 A는 i로 바꾸면 된다.

따라서 구하는 경우의 수는

$\frac{9!}{3!2!}=30240$ **답 30240**

43

d, y의 순서가 정해져 있으므로 d, y를 모두 A로 생각하면 A, A, s, t, u의 5개의 문자를 일렬로 나열한 후 첫 번째 A는 d, 두 번째 A는 y로 바꾸면 된다.

따라서 구하는 경우의 수는

$\frac{5!}{2!}=60$ **답 60**

44

모음 a, i, e를 한 문자로 생각하고, 자음 h, p, p, n, s, s를 다른 한 문자로 생각할 때, 모음이 자음보다 앞에 오도록 나열하는 경우의 수는 1

이때 모음끼리 자리를 바꾸는 경우의 수는 $3!=6$

또, 자음끼리 자리를 바꾸는 경우의 수는 $\frac{6!}{2!2!}=180$

따라서 구하는 경우의 수는

$1\times6\times180=1080$ **답 1080**

45

A 지점에서 B 지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수는

$\dfrac{9!}{5!4!}=126$

A 지점에서 C 지점을 거쳐 B 지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수는

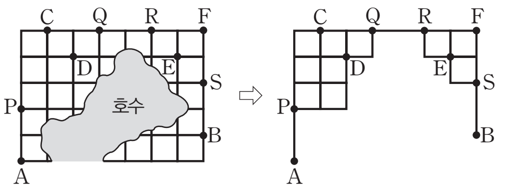
$\dfrac{4!}{2!2!}\times\dfrac{5!}{3!2!}=6\times10=60$

따라서 A 지점에서 C 지점을 거치지 않고 B 지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수는

$126-60=66$ **답 66**

46

다음 그림에서 A 지점에서 B 지점까지 최단 거리로 가는 경우는 A → P → Q → R → S → B이다.



(i) A → P로 가는 경우의 수: 1

(ii) P → Q로 가는 경우의 수

P → C → Q: $\dfrac{4!}{3!}\times1=4$

P → D → Q: $\dfrac{4!}{2!2!}\times\dfrac{2!}{1!1!}=6\times2=12$

$\therefore 4+12=16$

(iii) Q → R로 가는 경우의 수: 1

(iv) R → S로 가는 경우의 수

R → E → S: $\dfrac{2!}{1!1!}\times\dfrac{2!}{1!1!}=2\times2=4$

R → F → S: $1\times1=1$

$\therefore 4+1=5$

(v) S → B로 가는 경우의 수: 1

따라서 구하는 경우의 수는

$1\times16\times1\times5\times1=80$ **답 80**

47

(1) ${}_7H_4={}_{7+4-1}C_4={}_{10}C_4=210$

(2) ${}_2H_5={}_{2+5-1}C_5={}_6C_5={}_6C_1=6$

(3) ${}_4H_4={}_{4+4-1}C_4={}_7C_4={}_7C_3=35$

(4) ${}_3H_0={}_{3+0-1}C_0={}_2C_0=1$

답 (1) **210** (2) **6** (3) **35** (4) **1**

48

(1) ${}_5H_2={}_6C_2$이므로 $n=6$

(2) ${}_2H_3={}_4C_3={}_4C_1$이므로 $n=4$

답 (1) **6** (2) **4**

49

서로 다른 4개에서 5개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_4H_5={}_8C_5={}_8C_3=56$ **답 56**

50

서로 다른 3개에서 5개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_3H_5={}_7C_5={}_7C_2=21$ **답 21**

51

서로 다른 4개에서 6개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_4H_6={}_9C_6={}_9C_3=84$ **답 84**

52

서로 다른 3개에서 10개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_3H_{10}={}_{12}C_{10}={}_{12}C_2=66$ **답 66**

53

서로 다른 3개에서 7개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_3H_7={}_9C_7={}_9C_2=36$ **답 36**

54

각 학생에게 적어도 한 장의 영화표를 나누어 주어야 하므로 먼저 4명의 학생에게 영화표를 한 장씩 나누어 주고 나머지 4장의 영화표를 중복을 허용하여 4명의 학생에게 나누어 주면 된다.
따라서 구하는 경우의 수는
${}_4H_4={}_7C_4={}_7C_3=35$ **답 35**

55

먼저 오렌지 주스 2병, 사과 주스 4병을 산 후, 오렌지 주스, 사과 주스, 포도 주스, 딸기 주스 중에서 중복을 허용하여 5병의 주스를 사면 된다.
따라서 구하는 경우의 수는
${}_4H_5={}_8C_5={}_8C_3=56$ **답 56**

56

초콜릿 5개를 4명의 아이에게 먼저 1개씩 나누어 주고 남은 초콜릿 1개를 한 명에게 주면 되므로 서로 같은 종류의 초콜릿 5개를 4명의 아이에게 각각 1개 이상씩 나누어 주는 경우의 수는 4이다.
이때 초콜릿을 1개 받은 3명의 아이에게만 먼저 사탕 1개씩을 나누어 주고 남은 4개의 사탕을 중복을 허용하여 나누어 주면 되므로 1개의 초콜릿을 받은 아이에게만 사탕을 1개 이상씩 나누어 주는 경우의 수는
${}_3H_4={}_6C_4={}_6C_2=15$
따라서 구하는 경우의 수는
$4\times15=60$ **답 60**

57

(1) 서로 다른 2개의 문자 a, b 중에서 중복을 허용하여 4개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로
${}_2H_4={}_5C_4={}_5C_1=5$
(2) 서로 다른 3개의 문자 a, b, c 중에서 중복을 허용하여 6개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로
${}_3H_6={}_8C_6={}_8C_2=28$
답 (1) **5** (2) **28**

58

$(a+b)^5$을 전개할 때 생기는 서로 다른 항의 개수는 서로 다른 2개의 문자 a, b 중에서 중복을 허용하여 5개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로
${}_2H_5={}_6C_5={}_6C_1=6$
$(x+y+z)^4$을 전개할 때 생기는 서로 다른 항의 개수는 서로 다른 3개의 문자 x, y, z 중에서 중복을 허용하여 4개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로
${}_3H_4={}_6C_4={}_6C_2=15$
따라서 구하는 항의 개수는
$6\times15=90$ **답 90**

59

$(a+b+c)^3$을 전개할 때 생기는 서로 다른 항의 개수는 서로 다른 3개의 문자 a, b, c 중에서 중복을 허용하여 3개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로
${}_3H_3={}_5C_3={}_5C_2=10$
$(p-q)^2$을 전개할 때 생기는 서로 다른 항의 개수는 서로 다른 2개의 문자 p, q 중에서 중복을 허용하여 2개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로
${}_2H_2={}_3C_2={}_3C_1=3$
$(x+y+z+w)$에서 서로 다른 항의 개수는 4이다.
따라서 구하는 항의 개수는
$10\times3\times4=120$ **답 120**

60

(1) 음이 아닌 정수해의 개수는 서로 다른 4개의 문자 x, y, z, w에서 중복을 허용하여 8개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로
${}_4H_8={}_{11}C_8={}_{11}C_3=165$
(2) $x=x'+1$, $y=y'+1$, $z=z'+1$, $w=w'+1$이라 하면
$(x'+1)+(y'+1)+(z'+1)+(w'+1)=8$
$\therefore x'+y'+z'+w'=4$
(x', y', z', w'은 음이 아닌 정수)
따라서 구하는 양의 정수해의 개수는 방정식

$x'+y'+z'+w'=4$의 음이 아닌 정수해의 개수와 같으므로

${}_4H_4={}_7C_4={}_7C_3=35$

답 (1) **165** (2) **35**

61

x, y, z가 음이 아닌 정수이므로

$x+y+z=0$ 또는 $x+y+z=1$ 또는 $x+y+z=2$

(i) 방정식 $x+y+z=0$의 음이 아닌 정수해의 개수는

${}_3H_0={}_2C_0=1$

(ii) 방정식 $x+y+z=1$의 음이 아닌 정수해의 개수는

${}_3H_1={}_3C_1=3$

(iii) 방정식 $x+y+z=2$의 음이 아닌 정수해의 개수는

${}_3H_2={}_4C_2=6$

(i)~(iii)에서 구하는 해의 개수는

$1+3+6=10$ 답 **10**

62

조건 (가)에서 $a\times b\times c$의 값이 홀수이므로 a, b, c는 모두 홀수이어야 한다.

조건 (나)에서 a, b, c는 12 이하이고 $a\le b\le c$이므로 6개의 홀수 중에서 중복을 허용하여 3개를 택하는 중복조합의 수와 같다.

$\therefore$ ${}_6H_3={}_8C_3=56$

즉, 구하는 순서쌍 (a, b, c)의 개수는 56이다. 답 **56**

63

$1<a<b\le 5<c\le d\le 10$ …… ㉠

㉠에서 자연수 a, b의 순서쌍 (a, b)는 2, 3, 4, 5 중에서 서로 다른 두 자연수를 택하면 되므로 이 경우의 수는

${}_4C_2=6$

이 각각에 대하여 자연수 c, d의 순서쌍 (c, d)는 6, 7, 8, 9, 10 중에서 중복을 허용하여 두 자연수를 택하면 되므로 이 경우의 수는 서로 다른 5개에서 2개를 택하는 중복조합의 수와 같다.

$\therefore$ ${}_5H_2={}_6C_2=15$

따라서 구하는 모든 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수는

$6\times 15=90$ 답 **90**

64

주어진 조건에 의하여 $f(1)\ge f(2)\ge f(3)$

즉, 집합 Y의 원소 6개 중 3개를 순서에 상관없이 중복을 허용하여 뽑아 크기가 크거나 같은 것부터 차례로 $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$에 대응시키면 된다.

따라서 함수 f의 개수는 집합 Y의 원소 6개 중 3개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_6H_3={}_8C_3=56$ 답 **56**

65

답 **${}_6C_1$, ${}_6C_4$, 5, ${}_6C_6$, 6, 15, 5**

66

(1) $(2a+1)^4$

$$={}_4C_0(2a)^4+{}_4C_1(2a)^3\times 1+{}_4C_2(2a)^2\times 1^2+{}_4C_3(2a)\times 1^3+{}_4C_4\times 1^4$$

$$=16a^4+32a^3+24a^2+8a+1$$

(2) $(3x-2y)^5$

$$={}_5C_0(3x)^5+{}_5C_1(3x)^4(-2y)+{}_5C_2(3x)^3(-2y)^2+{}_5C_3(3x)^2(-2y)^3+{}_5C_4(3x)(-2y)^4+{}_5C_5(-2y)^5$$

$$=243x^5-810x^4y+1080x^3y^2-720x^2y^3+240xy^4-32y^5$$

(3) $\left(x+\frac{1}{x}\right)^6$

$$={}_6C_0x^6+{}_6C_1x^5\times\frac{1}{x}+{}_6C_2x^4\times\frac{1}{x^2}+{}_6C_3x^3\times\frac{1}{x^3}+{}_6C_4x^2\times\frac{1}{x^4}+{}_6C_5x\times\frac{1}{x^5}+{}_6C_6\frac{1}{x^6}$$

$$=x^6+6x^4+15x^2+20+\frac{15}{x^2}+\frac{6}{x^4}+\frac{1}{x^6}$$

답 (1) $\boldsymbol{16a^4+32a^3+24a^2+8a+1}$

(2) $\boldsymbol{243x^5-810x^4y+1080x^3y^2-720x^2y^3+240xy^4-32y^5}$

(3) $\boldsymbol{x^6+6x^4+15x^2+20+\frac{15}{x^2}+\frac{6}{x^4}+\frac{1}{x^6}}$

67

(1) $(2a-3b)^5$의 전개식의 일반항은

$${}_5C_r(2a)^{5-r}(-3b)^r={}_5C_r2^{5-r}a^{5-r}(-3)^rb^r$$
$$={}_5C_r2^{5-r}(-3)^ra^{5-r}b^r$$

(2) $(x^2+x)^4$의 전개식의 일반항은

$${}_4C_r(x^2)^{4-r}x^r={}_4C_rx^{8-2r}x^r$$
$$={}_4C_rx^{8-r}$$

(3) $\left(x-\frac{2}{y}\right)^6$의 전개식의 일반항은

$${}_6C_rx^{6-r}\left(-\frac{2}{y}\right)^r={}_6C_rx^{6-r}\frac{(-2)^r}{y^r}$$
$$={}_6C_r(-2)^r\frac{x^{6-r}}{y^r}$$

(4) $\left(x^2+\frac{1}{x}\right)^8$의 전개식의 일반항은

$${}_8C_r(x^2)^{8-r}\left(\frac{1}{x}\right)^r={}_8C_rx^{16-2r}\frac{1}{x^r}$$
$$={}_8C_r\frac{x^{16-2r}}{x^r}$$

답 (1) $\boldsymbol{{}_5C_r2^{5-r}(-3)^ra^{5-r}b^r}$ (2) $\boldsymbol{{}_4C_rx^{8-r}}$
(3) $\boldsymbol{{}_6C_r(-2)^r\frac{x^{6-r}}{y^r}}$ (4) $\boldsymbol{{}_8C_r\frac{x^{16-2r}}{x^r}}$

68

(1) $(2x-y)^7$의 전개식의 일반항은

${}_7C_r(2x)^{7-r}(-y)^r={}_7C_r2^{7-r}(-1)^rx^{7-r}y^r$

x^4y^3항은 $7-r=4$일 때이므로 $r=3$

따라서 x^4y^3의 계수는

${}_7C_32^4(-1)^3=-560$

(2) $\left(2x^3+\frac{1}{x}\right)^8$의 전개식의 일반항은

$${}_8C_r(2x^3)^{8-r}\left(\frac{1}{x}\right)^r={}_8C_r2^{8-r}\frac{x^{24-3r}}{x^r}$$

상수항은 $24-3r-r=0$일 때이므로 $r=6$

따라서 상수항은

${}_8C_62^2=112$

(3) $\left(x^3-\frac{1}{x}\right)^{10}$의 전개식의 일반항은

$${}_{10}C_r(x^3)^{10-r}\left(-\frac{1}{x}\right)^r={}_{10}C_r(-1)^r\frac{x^{30-3r}}{x^r}$$

$\frac{1}{x^2}$항은 $r-(30-3r)=2$일 때이므로 $r=8$

따라서 $\frac{1}{x^2}$의 계수는 ${}_{10}C_8(-1)^8=45$

(4) $\left(x-\frac{1}{y}\right)^7$의 전개식의 일반항은

$${}_7C_rx^{7-r}\left(-\frac{1}{y}\right)^r={}_7C_r(-1)^r\frac{x^{7-r}}{y^r}$$

$\frac{x^4}{y^3}$항은 $7-r=4$일 때이므로 $r=3$

따라서 $\frac{x^4}{y^3}$의 계수는 ${}_7C_3(-1)^3=-35$

답 (1) **−560** (2) **112** (3) **45** (4) **−35**

69

$\left(x-\frac{a}{x^2}\right)^6$의 전개식의 일반항은

$${}_6C_rx^{6-r}\left(-\frac{a}{x^2}\right)^r={}_6C_r(-a)^r\frac{x^{6-r}}{x^{2r}}$$

상수항은 $6-r-2r=0$일 때이므로 $r=2$

따라서 상수항은 ${}_6C_2(-a)^2=60$

$15a^2=60$, $a^2=4$

$\therefore a=2$ ($\because a>0$) **답 2**

70

$\left(x-\frac{2}{x}\right)^5$의 전개식의 일반항은

$${}_5C_rx^{5-r}\left(-\frac{2}{x}\right)^r={}_5C_r(-2)^r\frac{x^{5-r}}{x^r} \quad \cdots\cdots ㉠$$

이때 $(2x+3)\left(x-\frac{2}{x}\right)^5=2x\left(x-\frac{2}{x}\right)^5+3\left(x-\frac{2}{x}\right)^5$

이므로 전개식에서 x항은 $2x\times$(㉠의 상수항),

$3\times$(㉠의 x항)일 때 나타난다.

(i) ㉠에서 상수항은 $5-r-r=0$, 즉 $r=\frac{5}{2}$일 때이다.

그런데 r는 $0\le r\le5$인 정수이므로 ㉠에서 상수항은 존재하지 않는다.

(ii) ㉠에서 x항은 $5-r-r=1$, 즉 $r=2$일 때이므로

${}_5C_2(-2)^2x=40x$

(i), (ii)에서 구하는 x의 계수는

$3\times40=120$ **답 120**

71

$\dfrac{(1+2x)^5-1}{x}$의 전개식에서 x^2의 계수는
$(1+2x)^5$의 전개식에서 x^3의 계수와 같다.
$(1+2x)^5$의 전개식의 일반항은
${}_5\mathrm{C}_r 1^{5-r}(2x)^r={}_5\mathrm{C}_r 2^r x^r$ $\therefore r=3$
따라서 구하는 x^2의 계수는 ${}_5\mathrm{C}_3 2^3=80$ **답 80**

72

$x(x+a)(x+2)^4$의 전개식에서 x^4의 계수는
$(x+a)(x+2)^4$의 전개식에서 x^3의 계수와 같다.
$(x+2)^4$의 전개식의 일반항은
${}_4\mathrm{C}_r x^{4-r}2^r={}_4\mathrm{C}_r 2^r x^{4-r}$ …… ㉠
이때 $(x+a)(x+2)^4=x(x+2)^4+a(x+2)^4$이므로 전개식에서 x^3항은 $x\times$(㉠의 x^2항),
$a\times$(㉠의 x^3항)일 때 나타난다.
(i) ㉠에서 x^2항은 $4-r=2$, 즉 $r=2$일 때이므로
${}_4\mathrm{C}_2 2^2 x^2=24x^2$
(ii) ㉠에서 x^3항은 $4-r=3$, 즉 $r=1$일 때이므로
${}_4\mathrm{C}_1 2x^3=8x^3$
따라서 $(x+a)(x+2)^4$의 전개식에서 x^3항은
$x\times24x^2+a\times8x^3=(24+8a)x^3$
이므로 $24+8a=32$
$\therefore a=1$ **답 1**

73

$(x+3)^4$의 전개식의 일반항은
${}_4\mathrm{C}_r x^{4-r}3^r={}_4\mathrm{C}_r 3^r x^{4-r}$ …… ㉠
$(3x^2+1)^3$의 전개식의 일반항은
${}_3\mathrm{C}_p(3x^2)^{3-p}1^p={}_3\mathrm{C}_p 3^{3-p}x^{6-2p}$ …… ㉡
$(x+3)^4(3x^2+1)^3$ …… ㉢
㉢의 전개식에서 x^4항은
(㉠의 x^4항)$\times$(㉡의 상수항)
+(㉠의 x^2항)$\times$(㉡의 x^2항)
+(㉠의 상수항)$\times$(㉡의 x^4항)
이므로
${}_4\mathrm{C}_0 x^4\times1+{}_4\mathrm{C}_2 3^2x^2\times{}_3\mathrm{C}_2 3x^2+3^4\times{}_3\mathrm{C}_1 3^2x^4$
$=x^4+486x^4+2187x^4=2674x^4$
따라서 x^4의 계수는 2674이다. **답 2674**

74

$(1+x)^m$의 전개식의 일반항은
${}_m\mathrm{C}_r 1^{m-r}x^r={}_m\mathrm{C}_r x^r$
$(1+x^2)^5$의 전개식의 일반항은
${}_5\mathrm{C}_p 1^{5-p}(x^2)^p={}_5\mathrm{C}_p x^{2p}$
$(1+x)^m(1+x^2)^5$ …… ㉠
㉠의 전개식에서 x^2항은
$(1+x)^m$의 상수항과 $(1+x^2)^5$의 x^2항을 곱할 때와 $(1+x)^m$의 x^2항과 $(1+x^2)^5$의 상수항을 곱할 때이다.
따라서 ㉠의 전개식에서 x^2항은
$m=1$일 때, $1\times{}_5\mathrm{C}_1x^2=5x^2$
$m\ge2$일 때, $1\times{}_5\mathrm{C}_1x^2+{}_m\mathrm{C}_2x^2\times1=(5+{}_m\mathrm{C}_2)x^2$
그런데 x^2의 계수가 11이므로 $m\ne1$
따라서 $m\ge2$일 때, $(5+{}_m\mathrm{C}_2)x^2=11x^2$이므로
$5+\dfrac{m(m-1)}{2\times1}=11$, $\dfrac{m(m-1)}{2}=6$
$m^2-m-12=0$, $(m+2)(m-4)=0$
$\therefore m=4$ ($\because m$은 자연수) **답 4**

75

답 (1) **4, 10, 5, 15, 15**
(2) **${}_2\mathrm{C}_1$, ${}_4\mathrm{C}_1$, ${}_4\mathrm{C}_3$, ${}_5\mathrm{C}_2$, ${}_5\mathrm{C}_4$**

76

1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1

(1) 위의 그림의 파스칼의 삼각형에서 $(x+y)^5$의 전개식의 이항계수는 1, 5, 10, 10, 5, 1이므로

$(2x+1)^5=(2x)^5+5\times(2x)^4+10\times(2x)^3$
$+10\times(2x)^2+5\times2x+1$
$=32x^5+80x^4+80x^3+40x^2+10x+1$

(2) 앞의 그림의 파스칼의 삼각형에서 $(a+b)^4$의 전개식의 이항계수는 1, 4, 6, 4, 1이므로

$(a-2b)^4=a^4+4a^3(-2b)+6a^2(-2b)^2$
$+4a(-2b)^3+(-2b)^4$
$=a^4-8a^3b+24a^2b^2-32ab^3+16b^4$

답 (1) $\boldsymbol{32x^5+80x^4+80x^3+40x^2+10x+1}$
(2) $\boldsymbol{a^4-8a^3b+24a^2b^2-32ab^3+16b^4}$

77

(1) ${}_3C_0+{}_3C_1+{}_3C_2+{}_3C_3=2^3=8$

(2) ${}_{10}C_0-{}_{10}C_1+{}_{10}C_2-{}_{10}C_3+\cdots+{}_{10}C_{10}=0$

(3) ${}_{51}C_0+{}_{51}C_2+{}_{51}C_4+\cdots+{}_{51}C_{50}=2^{51-1}=2^{50}$

(4) ${}_{100}C_1+{}_{100}C_3+{}_{100}C_5+\cdots+{}_{100}C_{99}=2^{100-1}=2^{99}$

답 (1) **8** (2) **0** (3) $\boldsymbol{2^{50}}$ (4) $\boldsymbol{2^{99}}$

78

(1) ${}_2C_0+{}_3C_1+{}_4C_2+{}_5C_3+\cdots+{}_{11}C_9$
$=({}_3C_0+{}_3C_1)+{}_4C_2+{}_5C_3+\cdots+{}_{11}C_9$
$(\because {}_2C_0={}_3C_0)$
$=({}_4C_1+{}_4C_2)+{}_5C_3+\cdots+{}_{11}C_9$
$(\because {}_3C_0+{}_3C_1={}_4C_1)$
$=({}_5C_2+{}_5C_3)+\cdots+{}_{11}C_9$ $(\because {}_4C_1+{}_4C_2={}_5C_2)$
$\vdots$
$={}_{11}C_8+{}_{11}C_9={}_{12}C_9={}_{12}C_3=220$

(2) ${}_3C_3+{}_4C_3+{}_5C_3+{}_6C_3+\cdots+{}_{10}C_3$
$=({}_4C_4+{}_4C_3)+{}_5C_3+{}_6C_3+\cdots+{}_{10}C_3$
$(\because {}_3C_3={}_4C_4)$
$=({}_5C_4+{}_5C_3)+{}_6C_3+\cdots+{}_{10}C_3$
$(\because {}_4C_4+{}_4C_3={}_5C_4)$
$=({}_6C_4+{}_6C_3)+\cdots+{}_{10}C_3$ $(\because {}_5C_4+{}_5C_3={}_6C_4)$
$\vdots$
$={}_{10}C_4+{}_{10}C_3={}_{11}C_4=330$

답 (1) **220** (2) **330**

79

${}_{15}C_6+{}_{16}C_7+{}_{17}C_8+{}_{18}C_9+{}_{19}C_{10}+{}_{20}C_{11}$
$=({}_{15}C_5+{}_{15}C_6)+{}_{16}C_7+{}_{17}C_8+{}_{18}C_9+{}_{19}C_{10}+{}_{20}C_{11}$
$-{}_{15}C_5$
$=({}_{16}C_6+{}_{16}C_7)+{}_{17}C_8+{}_{18}C_9+{}_{19}C_{10}+{}_{20}C_{11}-{}_{15}C_5$
$=({}_{17}C_7+{}_{17}C_8)+{}_{18}C_9+{}_{19}C_{10}+{}_{20}C_{11}-{}_{15}C_5$
$=({}_{18}C_8+{}_{18}C_9)+{}_{19}C_{10}+{}_{20}C_{11}-{}_{15}C_5$
$=({}_{19}C_9+{}_{19}C_{10})+{}_{20}C_{11}-{}_{15}C_5$
$=({}_{20}C_{10}+{}_{20}C_{11})-{}_{15}C_5$
$={}_{21}C_{11}-{}_{15}C_5$

답 ②

80

$(1+x^3)^n$의 전개식의 일반항은 ${}_nC_r(x^3)^r={}_nC_rx^{3r}$이고 $2\le n\le15$인 경우에만 x^6항이 나오므로

$(1+x^3)^2$의 전개식에서 x^6의 계수는 ${}_2C_2$
$(1+x^3)^3$의 전개식에서 x^6의 계수는 ${}_3C_2$
$\vdots$
$(1+x^3)^{15}$의 전개식에서 x^6의 계수는 ${}_{15}C_2$

따라서 x^6의 계수는

${}_2C_2+{}_3C_2+{}_4C_2+\cdots+{}_{15}C_2$
$=({}_3C_3+{}_3C_2)+{}_4C_2+\cdots+{}_{15}C_2$ $(\because {}_2C_2={}_3C_3)$
$=({}_4C_3+{}_4C_2)+\cdots+{}_{15}C_2$ $(\because {}_3C_3+{}_3C_2={}_4C_3)$
$\vdots$
$={}_{15}C_3+{}_{15}C_2$
$={}_{16}C_3=560$

답 **560**

다른풀이 $(1+x^3)+(1+x^3)^2+(1+x^3)^3$
$+\cdots+(1+x^3)^{15}$ ⋯⋯ ㉠

㉠은 첫째항이 $1+x^3$, 공비가 $1+x^3$, 항의 개수가 15인 등비수열의 합이므로

$$\frac{(1+x^3)\{(1+x^3)^{15}-1\}}{(1+x^3)-1}=\frac{(1+x^3)^{16}-(1+x^3)}{x^3}$$ ⋯⋯ ㉡

㉠의 전개식에서 x^6의 계수는 ㉡의 $(1+x^3)^{16}$의 전개식에서 x^9의 계수와 같다.

이때 $(1+x^3)^{16}$의 전개식의 일반항은

${}_{16}C_r(x^3)^r={}_{16}C_rx^{3r}$

따라서 $r=3$일 때이므로 구하는 계수는 ${}_{16}C_3=560$

81

$x^2(1+x^2)^n$의 전개식의 일반항은

$x^2\times{}_nC_r(x^2)^r=x^2\times{}_nC_rx^{2r}={}_nC_rx^{2r+2}$

이때 $4\le n\le 10$인 경우에만 x^{10}항이 나오므로

$x^2(1+x^2)^4$의 전개식에서 x^{10}의 계수는 ${}_4C_4$

$x^2(1+x^2)^5$의 전개식에서 x^{10}의 계수는 ${}_5C_4$

⋮

$x^2(1+x^2)^{10}$의 전개식에서 x^{10}의 계수는 ${}_{10}C_4$

따라서 x^{10}의 계수는

${}_4C_4+{}_5C_4+{}_6C_4+\cdots+{}_{10}C_4$

$=({}_5C_5+{}_5C_4)+{}_6C_4+\cdots+{}_{10}C_4$ $(\because {}_4C_4={}_5C_5)$

$=({}_6C_5+{}_6C_4)+\cdots+{}_{10}C_4$ $(\because {}_5C_5+{}_5C_4={}_6C_5)$

⋮

$={}_{10}C_5+{}_{10}C_4$

$={}_{11}C_5=462$

답 462

다른풀이 $x^2(1+x^2)+x^2(1+x^2)^2+x^2(1+x^2)^3+\cdots+x^2(1+x^2)^{10}$ …… ㉠

㉠은 첫째항이 $x^2(1+x^2)$, 공비가 $1+x^2$, 항의 개수가 10인 등비수열의 합이므로

$$\frac{x^2(1+x^2)\{(1+x^2)^{10}-1\}}{(1+x^2)-1}=(1+x^2)^{11}-(1+x^2)$$ …… ㉡

㉠의 전개식에서 x^{10}의 계수는 ㉡의 $(1+x^2)^{11}$의 전개식에서 x^{10}의 계수와 같다.

이때 $(1+x^2)^{11}$의 전개식의 일반항은

${}_{11}C_r(x^2)^r={}_{11}C_rx^{2r}$

따라서 $r=5$일 때이므로 구하는 계수는 ${}_{11}C_5=462$

82

${}_{19}C_0+{}_{19}C_2+{}_{19}C_4+\cdots+{}_{19}C_{18}=2^{19-1}=2^{18}$이므로

${}_{19}C_2+{}_{19}C_4+{}_{19}C_6+\cdots+{}_{19}C_{18}=2^{18}-{}_{19}C_0$

$=2^{18}-1$

답 $2^{18}-1$

83

${}_{15}C_k={}_{15}C_{15-k}$ $(k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 15)$이므로

${}_{15}C_8+{}_{15}C_9+{}_{15}C_{10}+\cdots+{}_{15}C_{15}$

$={}_{15}C_7+{}_{15}C_6+{}_{15}C_5+\cdots+{}_{15}C_0$

이때 ${}_{15}C_0+{}_{15}C_1+{}_{15}C_2+\cdots+{}_{15}C_{15}=2^{15}$이므로

${}_{15}C_8+{}_{15}C_9+{}_{15}C_{10}+\cdots+{}_{15}C_{15}=\frac{1}{2}\times 2^{15}=2^{14}$

답 2^{14}

84

${}_nC_0+{}_nC_1+{}_nC_2+\cdots+{}_nC_n=2^n$이므로

${}_nC_1+{}_nC_2+\cdots+{}_nC_n=2^n-{}_nC_0=2^n-1$

따라서 주어진 식은 $2000<2^n-1<3000$

$\therefore 2001<2^n<3001$

이때 $2^{10}=1024$, $2^{11}=2048$, $2^{12}=4096$이므로

$n=11$

답 11

85

$31^{12}=(1+30)^{12}$

$={}_{12}C_0+{}_{12}C_1 30+{}_{12}C_2 30^2+\cdots+{}_{12}C_{12}30^{12}$

이때 ${}_{12}C_2 30^2+\cdots+{}_{12}C_{12}30^{12}$은 900으로 나누어떨어진다.

따라서 31^{12}을 900으로 나누었을 때의 나머지는 ${}_{12}C_0+{}_{12}C_1 30=361$을 900으로 나누었을 때의 나머지와 같으므로 구하는 나머지는 361이다.

답 361

86

$(1+x)^n={}_nC_0+{}_nC_1x+{}_nC_2x^2+\cdots+{}_nC_nx^n$이므로

$x=3$, $n=15$를 대입하면

$(1+3)^{15}={}_{15}C_0+{}_{15}C_1 3+{}_{15}C_2 3^2+\cdots+{}_{15}C_{15}3^{15}$

$\therefore {}_{15}C_0+3\,{}_{15}C_1+3^2\,{}_{15}C_2+\cdots+3^{15}\,{}_{15}C_{15}=4^{15}=2^{30}$

답 2^{30}

Ⅱ. 확률

87

$A=\{1, 3, 5, 7\}$, $B=\{3, 6\}$, $C=\{1, 2, 4\}$이므로
$A\cap B=\{3\}$, $B\cap C=\varnothing$, $A\cap C=\{1\}$
따라서 서로 배반사건인 것은 ㄴ이다.
답 ㄴ

88

사건 E와 서로 배반인 사건은
$E^C=\{4, 5, 6\}$의 부분집합이고,
사건 F와 서로 배반인 사건은
$F^C=\{1, 5, 6\}$의 부분집합이다.
따라서 두 사건 E, F와 모두 배반인 사건 H는
$H=E^C\cap F^C=\{5, 6\}$
의 부분집합이다.
따라서 사건 H의 개수는
$2^2=4$
답 4

89

표본공간을 S라 하면
$n(S)=6\times6=36$
(i) 나오는 두 눈의 수의 차가 3인 경우
$(1, 4)$, $(2, 5)$, $(3, 6)$, $(4, 1)$, $(5, 2)$, $(6, 3)$의 6가지
(ii) 나오는 두 눈의 수의 차가 4인 경우
$(1, 5)$, $(2, 6)$, $(5, 1)$, $(6, 2)$의 4가지
(iii) 나오는 두 눈의 수의 차가 5인 경우
$(1, 6)$, $(6, 1)$의 2가지
(i)~(iii)에서 나오는 두 눈의 수의 차가 3 이상인 사건을 A라 하면
$n(A)=6+4+2=12$
따라서 구하는 확률은
$\mathrm{P}(A)=\dfrac{n(A)}{n(S)}=\dfrac{12}{36}=\dfrac{1}{3}$
답 $\dfrac{1}{3}$

90

$108=2^2\times3^3$이므로 108의 양의 약수의 개수는
$(2+1)\times(3+1)=12$
108의 양의 약수 중 60의 양의 약수는 108과 60의 공약수와 같다.
$60=2^2\times3\times5$이므로 108과 60의 최대공약수는
$2^2\times3$
따라서 108과 60의 공약수의 개수는
$(2+1)\times(1+1)=6$
이므로 구하는 확률은
$\dfrac{6}{12}=\dfrac{1}{2}$
답 $\dfrac{1}{2}$

91

여섯 사람이 한 줄로 서는 경우의 수는 $6!$
특정한 세 사람을 한 사람으로 생각하여 4명이 한 줄로 서는 경우의 수는 $4!$
특정한 세 사람끼리 자리를 바꾸는 경우의 수는 $3!$
즉, 특정한 세 사람이 이웃하여 서게 되는 경우의 수는
$4!\times3!$
따라서 구하는 확률은
$\dfrac{4!\times3!}{6!}=\dfrac{1}{5}$
답 $\dfrac{1}{5}$

92

7개의 문자를 일렬로 나열하는 경우의 수는 $7!$
자음 p, r, m, s를 일렬로 나열하는 경우의 수는 $4!$
$\vee$ p $\vee$ r $\vee$ m $\vee$ s $\vee$
자음 사이사이와 양 끝의 5개의 자리 중 3개의 자리에 모음 o, i, e를 하나씩 나열하는 경우의 수는 ${}_5\mathrm{P}_3$
즉, 모음끼리 이웃하지 않는 경우의 수는 $4!\times{}_5\mathrm{P}_3$
따라서 구하는 확률은
$\dfrac{4!\times{}_5\mathrm{P}_3}{7!}=\dfrac{2}{7}$
답 $\dfrac{2}{7}$

93

5명의 학생을 일렬로 세우는 경우의 수는 $5!$
A, B를 양 끝에 세우는 경우의 수는 $2!$

나머지 3명을 그 사이에 일렬로 세우는 경우의 수는 3! $\boxed{A}$ C D E $\boxed{B}$

즉, A, B가 양 끝에 서게 되는 경우의 수는

$2!\times3!$

따라서 구하는 확률은

$\frac{2!\times3!}{5!}=\frac{1}{10}$ **답** $\mathbf{\frac{1}{10}}$

94

8명이 원탁에 둘러앉는 경우의 수는

$(8-1)!=7!$

영국인 4명이 원탁에 둘러앉는 경우의 수는

$(4-1)!=3!$

영국인 사이사이의 4개의 자리에 프랑스인 4명이 앉는 경우의 수는 4!

즉, 영국인과 프랑스인이 교대로 앉는 경우의 수는

$3!\times4!$

따라서 구하는 확률은

$\frac{3!\times4!}{7!}=\frac{1}{35}$ **답** $\mathbf{\frac{1}{35}}$

95

8가지의 색을 원에 모두 칠하는 경우의 수는

$(8-1)!=7!$

빨간색을 칠한 맞은편에 초록색을 칠하고 나머지 6가지 색을 6개의 영역에 칠하는 경우의 수는

${}_6P_6=6!$

따라서 구하는 확률은

$\frac{6!}{7!}=\frac{1}{7}$ **답** $\mathbf{\frac{1}{7}}$

96

세 사람이 다섯 가지 맛 아이스크림 중에서 임의로 하나씩 택하는 경우의 수는

${}_5\Pi_3=5^3=125$

세 사람이 서로 다른 맛 아이스크림을 택하는 경우의 수는

${}_5P_3=60$

따라서 구하는 확률은

$\frac{60}{125}=\frac{12}{25}$ **답** $\mathbf{\frac{12}{25}}$

97

집합 X에서 집합 Y로의 함수 f의 개수는

${}_3\Pi_3=3^3=27$

이때 일대일대응의 개수는

${}_3P_3=3!=6$

따라서 구하는 확률은

$\frac{6}{27}=\frac{2}{9}$ **답** $\mathbf{\frac{2}{9}}$

KEY Point

함수의 개수

두 집합 X, Y가

$X=\{a_1, a_2, \cdots, a_r\}$, $Y=\{b_1, b_2, \cdots, b_n\}$ $(r\le n)$일 때,

X에서 Y로의 함수 f에 대하여

① 함수 f의 개수 ⇨ ${}_n\Pi_r$

② 일대일함수의 개수 ⇨ ${}_nP_r$

③ 일대일대응의 개수 (단, $r=n$) ⇨ ${}_nP_n$

④ $p<q$이면 $f(p)<f(q)$를 만족시키는 함수 f의 개수 ⇨ ${}_nC_r$

⑤ $p<q$이면 $f(p)\le f(q)$를 만족시키는 함수 f의 개수 ⇨ ${}_nH_r$

98

백의 자리에는 0이 올 수 없으므로 0, 1, 2의 세 개의 숫자 중에서 중복을 허용하여 만들 수 있는 세 자리 정수의 개수는

백	십	일
↑ 2	${}_3\Pi_2$	

$2\times{}_3\Pi_2=2\times3^2=18$

이때 십의 자리의 숫자가 0인 정수의 개수는 $2\times3=6$

백	0	일
↑ 2		↑ 3

따라서 구하는 확률은

$\frac{6}{18}=\frac{1}{3}$ **답** $\mathbf{\frac{1}{3}}$

99

6개의 문자 P, E, P, P, E, R를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\frac{6!}{3!2!}=60$

맨 앞에 E를 나열하고 나머지 문자 P, P, P, E, R를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\frac{5!}{3!}=20$

따라서 구하는 확률은

$\frac{20}{60}=\frac{1}{3}$

답 $\frac{1}{3}$

100

7개의 숫자 1, 1, 2, 3, 4, 4, 5를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\frac{7!}{2!2!}=1260$

짝수 2, 4, 4와 홀수 1, 1, 3, 5를 각각 한 숫자로 생각하여 2개의 숫자를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$2!=2$

짝수 2, 4, 4를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\frac{3!}{2!}=3$

홀수 1, 1, 3, 5를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\frac{4!}{2!}=12$

즉, 짝수는 짝수끼리, 홀수는 홀수끼리 이웃하도록 나열하는 경우의 수는

$2\times3\times12=72$

따라서 구하는 확률은

$\frac{72}{1260}=\frac{2}{35}$

답 $\frac{2}{35}$

101

X에서 X로의 함수 f의 개수는

${}_3\Pi_3=3^3=27$

$f(1)+f(2)+f(3)=8$을 만족시키는 함수 f의 개수는 2, 3, 3을 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로

$\frac{3!}{2!}=3$

따라서 구하는 확률은

$\frac{3}{27}=\frac{1}{9}$

답 $\frac{1}{9}$

102

16개의 제비 중에서 3개의 제비를 뽑는 경우의 수는

${}_{16}C_3=560$

(1) 7개의 당첨 제비 중에서 3개를 뽑는 경우의 수는

${}_7C_3=35$

따라서 구하는 확률은

$\frac{35}{560}=\frac{1}{16}$

(2) 7개의 당첨 제비 중에서 1개, 당첨 제비가 아닌 9개의 제비 중에서 2개를 뽑는 경우의 수는

${}_7C_1\times{}_9C_2=7\times36=252$

따라서 구하는 확률은

$\frac{252}{560}=\frac{9}{20}$

(3) 7개의 당첨 제비 중에서 2개, 당첨 제비가 아닌 9개의 제비 중에서 1개를 뽑는 경우의 수는

${}_7C_2\times{}_9C_1=21\times9=189$

따라서 구하는 확률은

$\frac{189}{560}=\frac{27}{80}$

답 (1) $\frac{1}{16}$ (2) $\frac{9}{20}$ (3) $\frac{27}{80}$

103

6명 중에서 3명의 대표를 뽑는 경우의 수는

${}_6C_3=20$

A는 포함되고 C는 포함되지 않는 경우의 수는 A, C를 제외한 4명 중에서 2명을 뽑고 A를 포함시키는 경우의 수와 같으므로

${}_4C_2=6$

따라서 구하는 확률은

$\frac{6}{20}=\frac{3}{10}$

답 $\frac{3}{10}$

104

6개의 공 중에서 2개의 공을 꺼내는 경우의 수는

${}_6C_2=15$

흰 공의 개수를 x라 하면 x개의 흰 공 중에서 2개를 꺼내는 경우의 수는 ${}_xC_2$이므로 2개 모두 흰 공일 확률은

$\frac{{}_xC_2}{15}=\frac{2}{5}$, $\frac{x(x-1)}{30}=\frac{2}{5}$

$x^2-x-12=0$, $(x-4)(x+3)=0$

$\therefore x=4$ ($\because x>0$)

따라서 흰 공의 개수는 4이다. **답** 4

105

10명의 유권자가 3명의 후보에게 무기명으로 투표하는 경우의 수는 서로 다른 3개에서 10개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_3\mathrm{H}_{10}={}_{12}\mathrm{C}_{10}=66$

C 후보가 한 표도 받지 못하는 경우는 10명의 유권자가 후보 A, B 중 한 명에게 투표하는 경우이므로 그 경우의 수는 서로 다른 2개에서 10개를 택하는 중복조합의 수와 같다. 즉,

${}_2\mathrm{H}_{10}={}_{11}\mathrm{C}_{10}=11$

따라서 구하는 확률은

$\frac{11}{66}=\frac{1}{6}$ **답** $\frac{1}{6}$

106

방정식 $x+y+z=7$의 음이 아닌 정수해의 개수는 3개의 문자 x, y, z 중에서 7개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_3\mathrm{H}_7={}_9\mathrm{C}_7=36$

$x+y+z=7$에서 x의 값이 3이면

$y+z=4$

즉, x의 값이 3인 경우의 수는 2개의 문자 y, z 중에서 4개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_2\mathrm{H}_4={}_5\mathrm{C}_4=5$

따라서 구하는 확률은 $\frac{5}{36}$이다. **답** $\frac{5}{36}$

107

치료제를 투여한 쥐의 수는 100이고, 치료제를 투여한 후 완치되기까지 걸린 기간이 2일 이하인 쥐의 수는

$22+43=65$

따라서 구하는 확률은

$\frac{65}{100}=\frac{13}{20}$ **답** $\frac{13}{20}$

108

조사한 고등학교의 전체 학생 수는

$72+104+160+56+8=400$

스마트폰 사용 시간이 3시간 미만인 학생 수는

$72+104+160=336$

따라서 구하는 확률은

$\frac{336}{400}=\frac{21}{25}$ **답** $\frac{21}{25}$

109

과녁 전체의 넓이는

$\pi\times4^2=16\pi$

작은 원부터 넓이가 4π, 9π, 16π이므로 색칠한 도형의 넓이는

$16\pi-9\pi=7\pi$

따라서 화살이 색칠한 도형에 맞을 확률은

$\frac{7\pi}{16\pi}=\frac{7}{16}$ **답** $\frac{7}{16}$

110

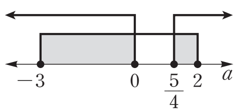
이차방정식 $x^2-4ax+5a=0$의 판별식을 D라 할 때, 이 이차방정식이 실근을 가지려면

$\frac{D}{4}=(-2a)^2-5a\geq0$

$a(4a-5)\geq0$

$\therefore a\leq0$ 또는 $a\geq\frac{5}{4}$ …… ㉠

이때 $-3\leq a\leq2$와 ㉠의 공통부분을 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



따라서 구하는 확률은

$$\frac{\{0-(-3)\}+\left(2-\frac{5}{4}\right)}{2-(-3)}=\frac{3}{4}$$ **답** $\frac{3}{4}$

111

(1) $\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$

$=\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{12}=\frac{1}{2}$

(2) $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$이므로

$0.6=0.2+0.5-P(A\cap B)$

$\therefore P(A\cap B)=0.1$

답 (1) $\mathbf{\frac{1}{2}}$ (2) $\mathbf{0.1}$

112

표본공간을 S라 하면 $S=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

두 사건 A, B는 $A=\{2, 4, 6\}$, $B=\{1, 2, 4\}$

(1) $P(A)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$

(2) $P(B)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$

(3) $A\cap B=\{2, 4\}$이므로 $P(A\cap B)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$

(4) $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$

답 (1) $\mathbf{\frac{1}{2}}$ (2) $\mathbf{\frac{1}{2}}$ (3) $\mathbf{\frac{1}{3}}$ (4) $\mathbf{\frac{2}{3}}$

113

$P(A^C)=1-P(A)=1-\frac{3}{8}=\frac{5}{8}$ 답 $\mathbf{\frac{5}{8}}$

114

(1) $P(A)=\frac{{}_6C_2}{{}_9C_2}=\frac{15}{36}=\frac{5}{12}$

(2) $P(A^C)=1-P(A)=1-\frac{5}{12}=\frac{7}{12}$

답 (1) $\mathbf{\frac{5}{12}}$ (2) $\mathbf{\frac{7}{12}}$

115

36명의 학생 중에서 임의로 한 학생을 택하였을 때, 버스를 이용하는 학생인 사건을 A, 지하철을 이용하는 학생인 사건을 B라 하면

$n(A)=16$, $n(B)=11$, $n(A\cap B)=7$

$\therefore P(A)=\frac{16}{36}=\frac{4}{9}$, $P(B)=\frac{11}{36}$, $P(A\cap B)=\frac{7}{36}$

따라서 구하는 확률은

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

$=\frac{4}{9}+\frac{11}{36}-\frac{7}{36}=\frac{5}{9}$ 답 $\mathbf{\frac{5}{9}}$

116

갑, 을이 문제를 푸는 사건을 각각 A, B라 하면

$P(A)=0.7$, $P(B)=0.5$, $P(A\cup B)=0.85$

따라서 갑, 을 모두 문제를 풀 확률은

$P(A\cap B)=P(A)+P(B)-P(A\cup B)$

$=0.7+0.5-0.85=0.35$ 답 $\mathbf{0.35}$

117

서로 다른 두 개의 주사위를 동시에 던질 때 모든 경우의 수는

$6\times6=36$

두 눈의 수의 합이 5인 사건을 A, 차가 5인 사건을 B라 하면

$A=\{(1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1)\}$

$B=\{(1, 6), (6, 1)\}$

$\therefore P(A)=\frac{4}{36}=\frac{1}{9}$, $P(B)=\frac{2}{36}=\frac{1}{18}$

이때 두 사건 A, B는 서로 배반사건이므로 구하는 확률은

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)$

$=\frac{1}{9}+\frac{1}{18}=\frac{1}{6}$ 답 $\mathbf{\frac{1}{6}}$

118

딸기 맛 사탕이 포도 맛 사탕보다 많으려면 5개의 사탕 중에서 딸기 맛 사탕이 3개 또는 4개이어야 한다.

딸기 맛 사탕이 3개인 사건을 A, 4개인 사건을 B라 하면

$P(A)=\frac{{}_4C_3\times{}_5C_2}{{}_9C_5}=\frac{20}{63}$, $P(B)=\frac{{}_4C_4\times{}_5C_1}{{}_9C_5}=\frac{5}{126}$

이때 두 사건 A, B는 서로 배반사건이므로 구하는 확률은

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)$

$=\frac{20}{63}+\frac{5}{126}=\frac{5}{14}$ 답 $\mathbf{\frac{5}{14}}$

119

$P(A^C\cup B^C)=P((A\cap B)^C)=1-P(A\cap B)=\frac{5}{6}$

$\therefore P(A\cap B)=\frac{1}{6}$

$P(A\cap B^C)=P(A)-P(A\cap B)$에서

$\frac{1}{2}=P(A)-\frac{1}{6}$

$\therefore P(A)=\frac{2}{3}$

$\therefore P(A^C)=1-P(A)=1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$ 답 $\frac{1}{3}$

120

치역의 모든 원소의 곱이 짝수인 함수인 사건을 A라 하면 치역의 모든 원소의 곱이 홀수인 함수인 사건은 A^C이다.

이때 치역의 모든 원소의 곱이 홀수이려면 치역의 모든 원소가 홀수이어야 하고, 집합 X의 원소 중 홀수는 3, 5의 2개이므로

$P(A^C)=\frac{{}_2\Pi_3}{{}_3\Pi_3}=\frac{2^3}{3^3}=\frac{8}{27}$

$\therefore P(A)=1-P(A^C)=1-\frac{8}{27}=\frac{19}{27}$ 답 $\frac{19}{27}$

121

적어도 한 명의 남자가 포함되는 사건을 A라 하면 남자가 한 명도 포함되지 않는 사건은 A^C이므로

$P(A^C)=\frac{{}_6C_3}{{}_{10}C_3}=\frac{1}{6}$

$\therefore P(A)=1-P(A^C)=1-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$ 답 $\frac{5}{6}$

122

A와 B 사이에 적어도 한 명의 학생을 세우는 사건을 A라 하면 A와 B를 이웃하게 세우는 사건은 A^C이므로

$P(A^C)=\frac{5!\times 2!}{6!}=\frac{1}{3}$

$\therefore P(A)=1-P(A^C)=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$ 답 $\frac{2}{3}$

123

적어도 1개가 당첨 제비인 사건을 A라 하면 2개 모두 당첨 제비가 아닌 사건은 A^C이므로

$P(A^C)=\frac{{}_{20-n}C_2}{{}_{20}C_2}=\frac{(20-n)(19-n)}{380}$

$\therefore P(A)=1-P(A^C)$

$=1-\frac{(20-n)(19-n)}{380}=\frac{7}{19}$

$n^2-39n+140=0,\ (n-35)(n-4)=0$

$\therefore n=35$ 또는 $n=4$

그런데 $0\le n\le 20$이므로 $n=4$ 답 4

124

유통기한이 2일 남은 우유가 2개 이하인 사건을 A라 하면 유통기한이 2일 남은 우유가 3개인 사건은 A^C이므로

$P(A^C)=\frac{{}_4C_3}{{}_{12}C_3}=\frac{1}{55}$

$\therefore P(A)=1-P(A^C)=1-\frac{1}{55}=\frac{54}{55}$ 답 $\frac{54}{55}$

125

흰 공이 2개 이상 나오는 사건을 A라 하면 흰 공이 1개 이하로 나오는 사건은 A^C이다.

(i) 흰 공 1개, 파란 공 3개를 꺼낼 확률은

$\frac{{}_6C_1\times{}_4C_3}{{}_{10}C_4}=\frac{4}{35}$

(ii) 파란 공 4개를 꺼낼 확률은

$\frac{{}_4C_4}{{}_{10}C_4}=\frac{1}{210}$

(i), (ii)에서 $P(A^C)=\frac{4}{35}+\frac{1}{210}=\frac{5}{42}$

$\therefore P(A)=1-P(A^C)=1-\frac{5}{42}=\frac{37}{42}$ 답 $\frac{37}{42}$

126

네 자리 정수가 4500 이하인 사건을 A라 하면 4500보다 큰 사건은 A^C이다.

이때 4500보다 큰 정수는 45□□ 꼴 또는 5□□□ 꼴이다.

(i) 45□□ 꼴일 확률은 $\frac{{}_3P_2}{{}_5P_4}=\frac{1}{20}$

(ii) 5□□□ 꼴일 확률은 $\frac{{}_4P_3}{{}_5P_4}=\frac{1}{5}$

(i), (ii)에서 $P(A^C)=\frac{1}{20}+\frac{1}{5}=\frac{1}{4}$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$ 답 $\mathbf{\frac{3}{4}}$

127

(1) $\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\frac{1}{10}}{\frac{1}{2}}=\frac{1}{5}$

(2) $\mathrm{P}(A|B)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(B)}=\frac{\frac{1}{10}}{\frac{2}{5}}=\frac{1}{4}$

답 (1) $\mathbf{\frac{1}{5}}$ (2) $\mathbf{\frac{1}{4}}$

128

$A=\{2, 4, 6\}$, $B=\{2, 3, 5\}$에서

(1) $\mathrm{P}(A)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$

(2) $A\cap B=\{2\}$이므로 $\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{6}$

(3) $\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}}=\frac{1}{3}$

답 (1) $\mathbf{\frac{1}{2}}$ (2) $\mathbf{\frac{1}{6}}$ (3) $\mathbf{\frac{1}{3}}$

129

(1) $\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)$

$=0.2\times0.3=0.06$

(2) $\mathrm{P}(A|B)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(B)}=\frac{0.06}{0.6}=0.1$

답 (1) **0.06** (2) **0.1**

130

(1) $\mathrm{P}(A)=\frac{3}{10}$

(2) 갑이 당첨 제비를 뽑았으므로 상자 안에는 9개의 제비 중 2개의 당첨 제비가 들어 있다.

따라서 구하는 확률은 $\mathrm{P}(B|A)=\frac{2}{9}$

(3) $\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)=\frac{3}{10}\times\frac{2}{9}=\frac{1}{15}$

답 (1) $\mathbf{\frac{3}{10}}$ (2) $\mathbf{\frac{2}{9}}$ (3) $\mathbf{\frac{1}{15}}$

131

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$

$=\frac{3}{8}+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}=\frac{5}{8}$

$\therefore \mathrm{P}(B^C|A^C)=\frac{\mathrm{P}(A^C\cap B^C)}{\mathrm{P}(A^C)}=\frac{\mathrm{P}((A\cup B)^C)}{\mathrm{P}(A^C)}$

$=\frac{1-\mathrm{P}(A\cup B)}{1-\mathrm{P}(A)}=\frac{1-\frac{5}{8}}{1-\frac{3}{8}}=\frac{\frac{3}{8}}{\frac{5}{8}}$

$=\frac{3}{5}$ 답 $\mathbf{\frac{3}{5}}$

132

$\mathrm{P}(A\cap B^C)=\mathrm{P}(A)-\mathrm{P}(A\cap B)$에서

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)-\mathrm{P}(A\cap B^C)$

$=\frac{2}{3}-\frac{1}{4}=\frac{5}{12}$

$\therefore \mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\frac{5}{12}}{\frac{2}{3}}=\frac{5}{8}$ 답 $\mathbf{\frac{5}{8}}$

KEY Point

$\boldsymbol{A\cap B^C=A-B=A-(A\cap B)}$

133

$\mathrm{P}(A|B)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(B)}=\frac{1}{4}$에서

$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{4}\mathrm{P}(B)$

$\mathrm{P}(A^C\cap B^C)=\frac{1}{6}$이므로

$\mathrm{P}(A\cup B)=1-\mathrm{P}((A\cup B)^C)$

$=1-\mathrm{P}(A^C\cap B^C)$

$=1-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$

이때 $\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$이므로

$\frac{5}{6}=\frac{1}{3}+\mathrm{P}(B)-\frac{1}{4}\mathrm{P}(B)$

$\frac{3}{4}\mathrm{P}(B)=\frac{1}{2}$

$\therefore \mathrm{P}(B)=\frac{2}{3}$ 답 $\mathbf{\frac{2}{3}}$

134

두 눈의 수의 합이 6인 사건을 A, 두 눈의 수가 모두 3의 약수인 사건을 B라 하면

$A=\{(1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2), (5, 1)\}$

$B=\{(1, 1), (1, 3), (3, 1), (3, 3)\}$

$A\cap B=\{(3, 3)\}$

$\therefore$ $\mathrm{P}(A)=\frac{5}{36}$, $\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{36}$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\frac{1}{36}}{\frac{5}{36}}=\frac{1}{5}$$

답 $\frac{1}{5}$

135

임의로 뽑은 한 명이 여학생인 사건을 A, 자전거로 통학하는 학생인 사건을 B라 하면

$\mathrm{P}(A)=\frac{10}{30}=\frac{1}{3}$

$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{7}{30}$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\frac{7}{30}}{\frac{1}{3}}=\frac{7}{10}$$

답 $\frac{7}{10}$

136

임의로 뽑은 한 명의 혈액형이 A형인 사건을 A, 뽑은 한 명이 남학생인 사건을 B라 하면

$\mathrm{P}(A)=\frac{50}{100}=\frac{1}{2}$

$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{40}{100}=\frac{2}{5}$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\frac{2}{5}}{\frac{1}{2}}=\frac{4}{5}$$

답 $\frac{4}{5}$

137

갑이 탈락하는 사건을 A, 을이 탈락하지 않는 사건을 B라 하면

갑이 탈락할 확률은 $\mathrm{P}(A)=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$

갑이 탈락했을 때, 을이 탈락하지 않을 확률은

$\mathrm{P}(B|A)=\frac{6}{8}=\frac{3}{4}$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)$$
$$=\frac{1}{3}\times\frac{3}{4}=\frac{1}{4}$$

답 $\frac{1}{4}$

138

상자 B를 택하는 사건을 B, 딸기 맛 젤리를 꺼내는 사건을 E라 하면

상자 B를 택할 확률은 $\mathrm{P}(B)=\frac{1}{2}$

상자 B를 택하였을 때, 딸기 맛 젤리를 꺼낼 확률은

$\mathrm{P}(E|B)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(B\cap E)=\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(E|B)$$
$$=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$$

답 $\frac{1}{6}$

139

갑, 을이 흰 공을 꺼내는 사건을 각각 A, B라 하면

(i) 갑이 흰 공을 꺼냈을 때, 을도 흰 공을 꺼낼 확률

$\mathrm{P}(A)=\frac{5}{15}=\frac{1}{3}$, $\mathrm{P}(B|A)=\frac{4}{14}=\frac{2}{7}$이므로

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)$$
$$=\frac{1}{3}\times\frac{2}{7}=\frac{2}{21}$$

(ii) 갑이 검은 공을 꺼냈을 때, 을이 흰 공을 꺼낼 확률

$\mathrm{P}(A^C)=\frac{10}{15}=\frac{2}{3}$, $\mathrm{P}(B|A^C)=\frac{5}{14}$이므로

$$\mathrm{P}(A^C\cap B)=\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B|A^C)$$
$$=\frac{2}{3}\times\frac{5}{14}=\frac{5}{21}$$

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(B)=\mathrm{P}(A\cap B)+\mathrm{P}(A^C\cap B)$

$=\frac{2}{21}+\frac{5}{21}=\frac{1}{3}$ 답 $\frac{1}{3}$

참고 $\mathrm{P}(B|A^C)$는 갑이 검은 공을 꺼냈다는 조건하에서 을이 흰 공을 꺼낼 확률이다.

즉, 갑이 검은 공을 꺼낸 뒤, 남아 있는 공 14개 중 흰 공이 5개 있으므로

$\mathrm{P}(B|A^C)=\frac{5}{14}$

140

A반 학생을 뽑는 사건을 A, B반 학생을 뽑는 사건을 B, 수학 경시대회에 참가한 학생을 뽑는 사건을 E라 하면

(ⅰ) A반이고 수학 경시대회에 참가한 학생일 확률

$\mathrm{P}(A)=\frac{6}{11}$, $\mathrm{P}(E|A)=\frac{10}{100}=\frac{1}{10}$이므로

$\mathrm{P}(A\cap E)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(E|A)=\frac{6}{11}\times\frac{1}{10}=\frac{3}{55}$

(ⅱ) B반이고 수학 경시대회에 참가한 학생일 확률

$\mathrm{P}(B)=\frac{5}{11}$, $\mathrm{P}(E|B)=\frac{20}{100}=\frac{1}{5}$이므로

$\mathrm{P}(B\cap E)=\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(E|B)=\frac{5}{11}\times\frac{1}{5}=\frac{1}{11}$

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(E)=\mathrm{P}(A\cap E)+\mathrm{P}(B\cap E)$

$=\frac{3}{55}+\frac{1}{11}=\frac{8}{55}$ 답 $\frac{8}{55}$

141

주머니 A, B를 택하는 사건을 각각 A, B, 노란 구슬을 꺼내는 사건을 E라 하면

(ⅰ) 주머니 A를 택하여 꺼낸 구슬이 노란 구슬일 확률은

$\mathrm{P}(A\cap E)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(E|A)=\frac{2}{3}\times\frac{2}{5}=\frac{4}{15}$

(ⅱ) 주머니 B를 택하여 꺼낸 구슬이 노란 구슬일 확률은

$\mathrm{P}(B\cap E)=\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(E|B)=\frac{1}{3}\times\frac{3}{6}=\frac{1}{6}$

(ⅰ), (ⅱ)에서 두 사건 A, B는 서로 배반사건이므로

$\mathrm{P}(E)=\mathrm{P}(A\cap E)+\mathrm{P}(B\cap E)$

$=\frac{4}{15}+\frac{1}{6}=\frac{13}{30}$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A|E)=\frac{\mathrm{P}(A\cap E)}{\mathrm{P}(E)}=\frac{\frac{4}{15}}{\frac{13}{30}}=\frac{8}{13}$ 답 $\frac{8}{13}$

참고 주머니 A를 택하는 사건은 한 개의 주사위를 던져서 나온 눈의 수가 4 이하인 사건과 같으므로

$\mathrm{P}(A)=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$

마찬가지로 주머니 B를 택할 확률은

$\mathrm{P}(B)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$

142

임의로 택한 제품이 기계 A, B에서 생산된 제품인 사건을 각각 A, B, 불량품인 사건을 E라 하면

(ⅰ) 임의로 택한 제품이 기계 A에서 생산된 불량품일 확률은

$\mathrm{P}(A\cap E)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(E|A)$

$=\frac{40}{100}\times\frac{5}{100}=\frac{1}{50}$

(ⅱ) 임의로 택한 제품이 기계 B에서 생산된 불량품일 확률은

$\mathrm{P}(B\cap E)=\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(E|B)$

$=\frac{60}{100}\times\frac{3}{100}=\frac{9}{500}$

(ⅰ), (ⅱ)에서 두 사건 A, B는 서로 배반사건이므로

$\mathrm{P}(E)=\mathrm{P}(A\cap E)+\mathrm{P}(B\cap E)$

$=\frac{1}{50}+\frac{9}{500}=\frac{19}{500}$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A|E)=\frac{\mathrm{P}(A\cap E)}{\mathrm{P}(E)}=\frac{\frac{1}{50}}{\frac{19}{500}}=\frac{10}{19}$ 답 $\frac{10}{19}$

143

(1) $\mathrm{P}(B|A)=\mathrm{P}(B)=\frac{1}{4}$

(2) $\mathrm{P}(A|B)=\mathrm{P}(A)=\frac{1}{3}$

답 (1) $\frac{1}{4}$ (2) $\frac{1}{3}$

144

(1) $\mathrm{P}(B^C|A)=\mathrm{P}(B^C)=1-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$

(2) $\mathrm{P}(A^C|B^C)=\mathrm{P}(A^C)=1-\frac{3}{5}=\frac{2}{5}$

(3) $\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)=\frac{3}{5}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{10}$

(4) $\mathrm{P}(A\cap B^C)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B^C)$

$=\frac{3}{5}\times\left(1-\frac{1}{6}\right)$

$=\frac{3}{5}\times\frac{5}{6}=\frac{1}{2}$

답 (1) $\mathbf{\frac{5}{6}}$ (2) $\mathbf{\frac{2}{5}}$ (3) $\mathbf{\frac{1}{10}}$ (4) $\mathbf{\frac{1}{2}}$

145

(1) $\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)=0.15\times0.4=0.06$이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$

따라서 두 사건 A와 B는 서로 독립이다.

(2) $\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)=0.7\times0.3=0.21$이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)\neq\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$

따라서 두 사건 A와 B는 서로 종속이다.

답 (1) **독립** (2) **종속**

146

(1) 두 사건 A와 B는 서로 일어날 확률에 영향을 주지 않으므로 독립이다.

(2) 두 사건 A와 B는 서로 독립이고

$\mathrm{P}(A)=0.6$, $\mathrm{P}(B)=0.8$이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$

$=0.6\times0.8=0.48$

답 (1) **독립** (2) **0.48**

147

$A=\{3, 6, 9, \cdots, 18\}$, $B=\{5, 10, 15, 20\}$,

$A\cap B=\{15\}$이므로

$\mathrm{P}(A)=\frac{6}{20}=\frac{3}{10}$

$\mathrm{P}(B)=\frac{4}{20}=\frac{1}{5}$

$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{20}$

$\therefore \mathrm{P}(A\cap B)\neq\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$

따라서 두 사건 A와 B는 서로 종속이다. 답 **종속**

148

동전을 세 번 던질 때, 모든 경우의 수는

$2\times2\times2=8$

동전의 앞면을 H, 뒷면을 T라 하면

$A=\{(\mathrm{H, H, H}), (\mathrm{H, H, T}), (\mathrm{H, T, H}), (\mathrm{H, T, T})\}$

$B=\{(\mathrm{H, H, H}), (\mathrm{H, H, T}), (\mathrm{T, H, H}), (\mathrm{T, H, T})\}$

$C=\{(\mathrm{H, H, T}), (\mathrm{T, H, H})\}$

$A\cap B=\{(\mathrm{H, H, H}), (\mathrm{H, H, T})\}$

$A\cap C=\{(\mathrm{H, H, T})\}$

$B\cap C=\{(\mathrm{H, H, T}), (\mathrm{T, H, H})\}$

ㄱ. $\mathrm{P}(A)=\frac{1}{2}$, $\mathrm{P}(B)=\frac{1}{2}$, $\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{4}$이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$

따라서 두 사건 A와 B는 서로 독립이다.

ㄴ. $\mathrm{P}(A)=\frac{1}{2}$, $\mathrm{P}(C)=\frac{1}{4}$, $\mathrm{P}(A\cap C)=\frac{1}{8}$이므로

$\mathrm{P}(A\cap C)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(C)$

따라서 두 사건 A와 C는 서로 독립이다.

ㄷ. $\mathrm{P}(B)=\frac{1}{2}$, $\mathrm{P}(C)=\frac{1}{4}$, $\mathrm{P}(B\cap C)=\frac{1}{4}$이므로

$\mathrm{P}(B\cap C)\neq\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(C)$

따라서 두 사건 B와 C는 서로 종속이다.

이상에서 두 사건이 서로 독립인 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 **ㄱ, ㄴ**

149

$\mathrm{P}(A^C)=1-\mathrm{P}(A)=\frac{1}{3}$이므로

$\mathrm{P}(A)=\frac{2}{3}$

두 사건 A, B가 서로 독립이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$

$=\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{2}{9}$ 답 $\mathbf{\frac{2}{9}}$

150

$\mathrm{P}(A^C\cap B^C)=\mathrm{P}((A\cup B)^C)=1-\mathrm{P}(A\cup B)$에서

$\frac{2}{5}=1-\mathrm{P}(A\cup B)$

$\therefore \mathrm{P}(A\cup B)=\frac{3}{5}$

두 사건 A, B가 서로 독립이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)=\frac{3}{10}\mathrm{P}(B)$

즉, $\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$에서

$\frac{3}{5}=\frac{3}{10}+\mathrm{P}(B)-\frac{3}{10}\mathrm{P}(B)$

$\therefore \mathrm{P}(B)=\frac{3}{7}$

답 $\frac{3}{7}$

151

$\mathrm{P}((A-B)\cup(B-A))$

$=\mathrm{P}(A-B)+\mathrm{P}(B-A)$ ← $A-B$와 $B-A$는 서로 배반사건

$=\mathrm{P}(A\cap B^C)+\mathrm{P}(B\cap A^C)$

$=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B^C)+\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(A^C)$

$=\frac{3}{4}\times\left(1-\frac{5}{6}\right)+\frac{5}{6}\times\left(1-\frac{3}{4}\right)$

$=\frac{1}{3}$

답 $\frac{1}{3}$

152

A, B가 전 구간을 완주하는 사건을 각각 A, B라 하면 A, B는 서로 독립이다.

(1) (ⅰ) A만 완주할 확률은

$\mathrm{P}(A\cap B^C)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B^C)$

$=\frac{1}{5}\times\left(1-\frac{1}{4}\right)=\frac{3}{20}$

(ⅱ) B만 완주할 확률은

$\mathrm{P}(A^C\cap B)=\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B)$

$=\left(1-\frac{1}{5}\right)\times\frac{1}{4}=\frac{1}{5}$

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 확률은

$\frac{3}{20}+\frac{1}{5}=\frac{7}{20}$

(2) 두 사람 중 적어도 한 사람이 완주하는 사건은 두 사람 모두 완주하지 못하는 사건의 여사건이다.

두 사람 모두 완주하지 못할 확률은

$\mathrm{P}(A^C\cap B^C)=\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B^C)$

$=\left(1-\frac{1}{5}\right)\times\left(1-\frac{1}{4}\right)=\frac{3}{5}$

따라서 구하는 확률은

$1-\mathrm{P}(A^C\cap B^C)=1-\frac{3}{5}=\frac{2}{5}$

답 (1) $\frac{7}{20}$ (2) $\frac{2}{5}$

153

두 선수 A, B가 승부차기를 성공하는 사건을 각각 A, B라 하면 A, B는 서로 독립이다.

이때 두 선수 중 A만 성공할 확률은

$\mathrm{P}(A\cap B^C)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B^C)$

$=\frac{2}{3}(1-p)$

즉, $\frac{2}{3}(1-p)=\frac{4}{15}$이므로

$1-p=\frac{2}{5}$ $\quad\therefore p=\frac{3}{5}$

답 $\frac{3}{5}$

154

이 바둑 기사가 대국에서 이길 확률은 $\frac{3}{4}$, 이기지 못할 확률은 $\frac{1}{4}$이다.

(1) ${}_5\mathrm{C}_3\left(\frac{3}{4}\right)^3\left(\frac{1}{4}\right)^2=\frac{135}{512}$

(2) (ⅰ) 4번 이길 확률은

${}_5\mathrm{C}_4\left(\frac{3}{4}\right)^4\left(\frac{1}{4}\right)^1=\frac{405}{1024}$

(ⅱ) 5번 이길 확률은

$\left(\frac{3}{4}\right)^5=\frac{243}{1024}$

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 확률은

$\frac{405}{1024}+\frac{243}{1024}=\frac{81}{128}$

답 (1) $\frac{135}{512}$ (2) $\frac{81}{128}$

155

(ⅰ) A반이 1세트, 2세트 모두 이길 확률은

$\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{4}{9}$

(ⅱ) A반이 1세트, 2세트 중 1번 이기고 3세트에서 이길 확률은

$${}_2C_1\left(\frac{2}{3}\right)^1\left(\frac{1}{3}\right)^1\times\frac{2}{3}=\frac{8}{27}$$

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 확률은

$$\frac{4}{9}+\frac{8}{27}=\frac{20}{27}$$

답 $\frac{20}{27}$

156

한 개의 동전을 던질 때, 앞면이 나올 확률은 $\frac{1}{2}$, 뒷면이 나올 확률은 $\frac{1}{2}$이다.

(ⅰ) 상자에서 흰 공이 나오고, 한 개의 동전을 3번 던져서 앞면이 3번 나올 확률은

$$\frac{2}{5}\times\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{20}$$

(ⅱ) 상자에서 검은 공이 나오고, 한 개의 동전을 4번 던져서 앞면이 3번 나올 확률은

$$\frac{3}{5}\times{}_4C_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^1=\frac{3}{20}$$

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 확률은

$$\frac{1}{20}+\frac{3}{20}=\frac{1}{5}$$

답 $\frac{1}{5}$

157

한 개의 주사위를 던질 때, 짝수의 눈이 나올 확률은 $\frac{1}{2}$, 홀수의 눈이 나올 확률은 $\frac{1}{2}$이다.

(ⅰ) 짝수가 적힌 공이 나오고, 한 개의 주사위를 4번 던져서 짝수의 눈이 1번 나올 확률은

$$\frac{1}{2}\times{}_4C_1\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{8}$$

(ⅱ) 9의 약수가 적힌 공이 나오고, 한 개의 주사위를 3번 던져서 짝수의 눈이 1번 나올 확률은

$$\frac{3}{10}\times{}_3C_1\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{9}{80}$$

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 확률은

$$\frac{1}{8}+\frac{9}{80}=\frac{19}{80}$$

답 $\frac{19}{80}$

158

한 개의 주사위를 던질 때, 6의 약수의 눈이 나올 확률은 $\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$, 그 이외의 눈이 나올 확률은 $\frac{1}{3}$이다.

주사위를 4번 던져서 6의 약수의 눈이 나오는 횟수를 x, 그 이외의 눈이 나오는 횟수를 y라 하면

$x+y=4$ …… ㉠

또, 점 P의 위치가 2이므로

$x-y=2$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $x=3$, $y=1$

따라서 주사위를 4번 던져서 6의 약수의 눈이 3번, 그 이외의 눈이 1번 나와야 하므로 구하는 확률은

$${}_4C_3\left(\frac{2}{3}\right)^3\left(\frac{1}{3}\right)^1=\frac{32}{81}$$

답 $\frac{32}{81}$

159

한 개의 동전을 던질 때, 앞면이 나올 확률은 $\frac{1}{2}$, 뒷면이 나올 확률은 $\frac{1}{2}$이다.

동전을 3번 던져서 앞면이 나오는 횟수를 x, 뒷면이 나오는 횟수를 y라 하면

$x+y=3$ …… ㉠

또, 꼭짓점 A를 출발한 점 P가 다시 꼭짓점 A로 돌아올 때까지 움직인 거리는 4이므로

$x+2y=4$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $x=2$, $y=1$

따라서 동전을 3번 던져서 앞면이 2번, 뒷면이 1번 나와야 하므로 구하는 확률은

$${}_3C_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^1=\frac{3}{8}$$

답 $\frac{3}{8}$

참고 동전을 총 3번 던지므로 3번 모두 뒷면이 나올 때 점 P가 움직이는 거리는 6으로 최대이다. 즉, 꼭짓점 A를 출발한 점 P가 다시 꼭짓점 A로 돌아올 때까지 움직인 거리는 4가 되어야 한다.

Ⅲ. 통계

160

이산확률변수는 확률변수가 가질 수 있는 값을 셀 수 있어야 하므로 보기에서 이산확률변수인 것은 ㄱ, ㄷ, ㄹ이다.

답 ㄱ, ㄷ, ㄹ

161

동전의 앞면을 H, 뒷면을 T라 하자.

$X=0$인 경우는 (T, T, T)의 1가지이므로

$P(X=0)=\frac{1}{8}$

$X=1$인 경우는 (H, T, T), (T, H, T), (T, T, H)의 3가지이므로

$P(X=1)=\frac{3}{8}$

$X=2$인 경우는 (H, H, T), (H, T, H), (T, H, H)의 3가지이므로

$P(X=2)=\frac{3}{8}$

$X=3$인 경우는 (H, H, H)의 1가지이므로

$P(X=3)=\frac{1}{8}$

따라서 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	3	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	1

답 풀이 참조

162

(1) 확률변수 X가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2

(2) 한 개의 주사위를 한 번 던질 때, 홀수의 눈이 나올 확률은 $\frac{1}{2}$, 짝수의 눈이 나올 확률은 $\frac{1}{2}$이므로

$P(X=0)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$

$P(X=1)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

$P(X=2)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$

(3)

X	0	1	2	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	1

답 풀이 참조

163

(1) 확률의 총합은 1이므로

$\frac{1}{5}+a+\frac{3}{10}+\frac{1}{10}=1 \qquad \therefore a=\frac{2}{5}$

(2) $P(X=1$ 또는 $X=4)=P(X=1)+P(X=4)$

$=\frac{1}{5}+\frac{1}{10}=\frac{3}{10}$

(3) $P(X\geq 3)=P(X=3)+P(X=4)$

$=\frac{3}{10}+\frac{1}{10}=\frac{2}{5}$

답 (1) $\frac{2}{5}$ (2) $\frac{3}{10}$ (3) $\frac{2}{5}$

164

확률의 총합은 1이므로

$a^2+\frac{1}{3}+\frac{a}{3}=1$, $3a^2+a-2=0$

$(3a-2)(a+1)=0 \qquad \therefore a=\frac{2}{3}$ 또는 $a=-1$

이때 $0\leq P(X=x)\leq 1$이므로 $a=\frac{2}{3}$

답 $\frac{2}{3}$

165

확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	$\cdots$	7	합계
$P(X=x)$	$\frac{k}{1\times 2}$	$\frac{k}{2\times 3}$	$\cdots$	$\frac{k}{7\times 8}$	1

확률의 총합은 1이므로

$P(X=1)+P(X=2)+\cdots+P(X=7)$

$=\frac{k}{1\times 2}+\frac{k}{2\times 3}+\cdots+\frac{k}{7\times 8}$

$=k\left\{\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{8}\right)\right\}$

$=k\left(1-\frac{1}{8}\right)=1$

$\frac{7}{8}k=1 \qquad \therefore k=\frac{8}{7}$

답 $\frac{8}{7}$

166

$\mathrm{P}(-1\le X\le 0)=\frac{3}{4}$에서

$\mathrm{P}(X=-1)+\mathrm{P}(X=0)=a+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$

$\therefore a=\frac{1}{2}$

확률의 총합은 1이므로

$a+\frac{1}{4}+b=1,\ \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+b=1$

$\therefore b=\frac{1}{4}$

$\therefore a-b=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$

답 $\frac{1}{4}$

167

확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	3	4	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	k	$k-\frac{1}{3}$	$\frac{k}{3}$	$\frac{k}{2}$	$\frac{2}{3}k$	1

확률의 총합은 1이므로

$k+\left(k-\frac{1}{3}\right)+\frac{k}{3}+\frac{k}{2}+\frac{2}{3}k=1$

$\frac{7}{2}k-\frac{1}{3}=1 \qquad \therefore k=\frac{8}{21}$

$\therefore \mathrm{P}(X\le 2)=\mathrm{P}(X=0)+\mathrm{P}(X=1)+\mathrm{P}(X=2)$

$=\frac{8}{21}+\frac{1}{21}+\frac{8}{63}=\frac{5}{9}$

답 $\frac{5}{9}$

168

(1) 청소 당번 2명을 뽑을 때, 뽑힌 여학생 수가 확률변수 X이므로 X가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2이다.
이때 남학생 4명과 여학생 3명 중에서 2명을 뽑는 경우의 수는 ${}_7\mathrm{C}_2$이고 뽑힌 학생 중에서 여학생이 x명인 경우의 수는 ${}_3\mathrm{C}_x\times{}_4\mathrm{C}_{2-x}$이므로 X의 확률질량함수는

$\mathrm{P}(X=x)=\frac{{}_3\mathrm{C}_x\times{}_4\mathrm{C}_{2-x}}{{}_7\mathrm{C}_2}\ (x=0,\ 1,\ 2)$

X의 각 값에 대한 확률은 다음과 같다.

$\mathrm{P}(X=0)=\frac{{}_3\mathrm{C}_0\times{}_4\mathrm{C}_2}{{}_7\mathrm{C}_2}=\frac{2}{7}$

$\mathrm{P}(X=1)=\frac{{}_3\mathrm{C}_1\times{}_4\mathrm{C}_1}{{}_7\mathrm{C}_2}=\frac{4}{7}$

$\mathrm{P}(X=2)=\frac{{}_3\mathrm{C}_2\times{}_4\mathrm{C}_0}{{}_7\mathrm{C}_2}=\frac{1}{7}$

따라서 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{2}{7}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{1}{7}$	1

(2) 여학생이 1명 이하로 뽑힐 확률은

$\mathrm{P}(X\le 1)=\mathrm{P}(X=0)+\mathrm{P}(X=1)$

$=\frac{2}{7}+\frac{4}{7}=\frac{6}{7}$

답 (1) **풀이 참조** (2) $\frac{6}{7}$

다른풀이 (2) $\mathrm{P}(X\le 1)=1-\mathrm{P}(X>1)$

$=1-\mathrm{P}(X=2)$

$=1-\frac{1}{7}=\frac{6}{7}$

169

5장의 카드 중에서 2장을 뽑는 경우의 수는

${}_5\mathrm{C}_2=10$

두 수의 차가 1인 경우는

(5, 4), (4, 3), (3, 2), (2, 1)의 4가지

두 수의 차가 2인 경우는

(5, 3), (4, 2), (3, 1)의 3가지

두 수의 차가 3인 경우는

(5, 2), (4, 1)의 2가지

두 수의 차가 4인 경우는

(5, 1)의 1가지

즉, 확률변수 X가 가질 수 있는 값은 1, 2, 3, 4이고 X의 각 값에 대한 확률은 다음과 같다.

$\mathrm{P}(X=1)=\frac{4}{10}=\frac{2}{5},\ \mathrm{P}(X=2)=\frac{3}{10},$

$\mathrm{P}(X=3)=\frac{2}{10}=\frac{1}{5},\ \mathrm{P}(X=4)=\frac{1}{10}$

따라서 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	3	4	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$	1

$\therefore$ P($X=1$ 또는 $X=3$)$=\mathrm{P}(X=1)+\mathrm{P}(X=3)$

$=\frac{2}{5}+\frac{1}{5}=\frac{3}{5}$ 답 $\frac{3}{5}$

170

(1) $\mathrm{E}(X)=0\times\frac{1}{3}+3\times\frac{1}{6}+6\times\frac{1}{3}+9\times\frac{1}{6}=4$

(2) $\mathrm{E}(X^2)=0^2\times\frac{1}{3}+3^2\times\frac{1}{6}+6^2\times\frac{1}{3}+9^2\times\frac{1}{6}$

$=27$

이므로

$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$

$=27-4^2=11$

(3) $\sigma(X)=\sqrt{\mathrm{V}(X)}=\sqrt{11}$

답 (1) **4** (2) **11** (3) $\sqrt{11}$

다른풀이

(2) $\mathrm{V}(X)=(0-4)^2\times\frac{1}{3}+(3-4)^2\times\frac{1}{6}$

$+(6-4)^2\times\frac{1}{3}+(9-4)^2\times\frac{1}{6}$

$=11$

171

(1) 한 개의 동전을 던질 때 앞면이 나올 확률은 $\frac{1}{2}$이므로

$\mathrm{P}(X=0)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$

$\mathrm{P}(X=1)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

$\mathrm{P}(X=2)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$

따라서 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	1

(2) $\mathrm{E}(X)=0\times\frac{1}{4}+1\times\frac{1}{2}+2\times\frac{1}{4}=1$

$\mathrm{E}(X^2)=0^2\times\frac{1}{4}+1^2\times\frac{1}{2}+2^2\times\frac{1}{4}=\frac{3}{2}$이므로

$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2=\frac{3}{2}-1^2=\frac{1}{2}$

$\sigma(X)=\sqrt{\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

답 (1) **풀이 참조**

(2) $\mathbf{E}(X)=1$, $\mathbf{V}(X)=\frac{1}{2}$, $\sigma(X)=\frac{\sqrt{2}}{2}$

172

$\mathrm{V}(X)=4$에서 $\sigma(X)=2$

(1) $\mathrm{E}(Y)=\mathrm{E}(2X-1)=2\mathrm{E}(X)-1$

$=2\times3-1=5$

$\mathrm{V}(Y)=\mathrm{V}(2X-1)=2^2\mathrm{V}(X)=4\times4=16$

$\sigma(Y)=\sigma(2X-1)=|2|\sigma(X)=2\times2=4$

(2) $\mathrm{E}(Y)=\mathrm{E}(-3X+2)=-3\mathrm{E}(X)+2$

$=-3\times3+2=-7$

$\mathrm{V}(Y)=\mathrm{V}(-3X+2)=(-3)^2\mathrm{V}(X)$

$=9\times4=36$

$\sigma(Y)=\sigma(-3X+2)=|-3|\sigma(X)$

$=3\times2=6$

답 (1) $\mathbf{E}(Y)=5$, $\mathbf{V}(Y)=16$, $\sigma(Y)=4$

(2) $\mathbf{E}(Y)=-7$, $\mathbf{V}(Y)=36$, $\sigma(Y)=6$

173

(1) $\mathrm{E}(X)=(-1)\times\frac{5}{8}+0\times\frac{1}{4}+1\times\frac{1}{8}=-\frac{1}{2}$

$\mathrm{E}(X^2)=(-1)^2\times\frac{5}{8}+0^2\times\frac{1}{4}+1^2\times\frac{1}{8}=\frac{3}{4}$

이므로

$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2=\frac{3}{4}-\left(-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{2}$

$\sigma(X)=\sqrt{\mathrm{V}(X)}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

(2) $\mathrm{E}(Y)=\mathrm{E}(4X-3)=4\mathrm{E}(X)-3$

$=4\times\left(-\frac{1}{2}\right)-3=-5$

$\mathrm{V}(Y)=\mathrm{V}(4X-3)=4^2\mathrm{V}(X)=16\times\frac{1}{2}=8$

$\sigma(Y)=\sigma(4X-3)=|4|\sigma(X)=4\times\frac{\sqrt{2}}{2}=2\sqrt{2}$

답 (1) $\mathbf{E}(X)=-\frac{1}{2}$, $\mathbf{V}(X)=\frac{1}{2}$, $\sigma(X)=\frac{\sqrt{2}}{2}$

(2) $\mathbf{E}(Y)=-5$, $\mathbf{V}(Y)=8$, $\sigma(Y)=2\sqrt{2}$

174

확률의 총합은 1이므로

$\frac{1}{4}+a+\frac{1}{8}+b=1 \qquad \therefore a+b=\frac{5}{8}$ ...... ㉠

$\mathrm{E}(X)=5$이므로

$1\times\frac{1}{4}+2\times a+4\times\frac{1}{8}+8\times b=5$

$\therefore a+4b=\frac{17}{8}$ ...... ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=\frac{1}{8}$, $b=\frac{1}{2}$

$\mathrm{E}(X^2)=1^2\times\frac{1}{4}+2^2\times\frac{1}{8}+4^2\times\frac{1}{8}+8^2\times\frac{1}{2}=\frac{139}{4}$

이므로

$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$

$=\frac{139}{4}-5^2=\frac{39}{4}$

답 $\mathbf{\frac{39}{4}}$

175

확률의 총합은 1이므로

$\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+p=1 \qquad \therefore p=\frac{1}{2}$

$\mathrm{E}(X)=\frac{1}{2}$이므로

$-k\times\frac{1}{4}+0\times\frac{1}{4}+k\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

$\therefore k=2$

따라서 X의 확률분포는 다음 표와 같다.

X	-2	0	2	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1

$\mathrm{E}(X^2)=(-2)^2\times\frac{1}{4}+0^2\times\frac{1}{4}+2^2\times\frac{1}{2}=3$이므로

$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2=3-\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{11}{4}$

$\therefore \sigma(X)=\sqrt{\mathrm{V}(X)}=\sqrt{\frac{11}{4}}=\frac{\sqrt{11}}{2}$

답 $\mathbf{\frac{\sqrt{11}}{2}}$

176

동전의 앞면을 H, 뒷면을 T라 하자.

앞면이 0개인 경우는

(T, T, T)의 1가지

앞면이 1개인 경우는

(H, T, T), (T, H, T), (T, T, H)의 3가지

앞면이 2개인 경우는

(H, H, T), (H, T, H), (T, H, H)의 3가지

앞면이 3개인 경우는

(H, H, H)의 1가지

즉, 확률변수 X가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2, 3이고, 그 확률은 각각

$\mathrm{P}(X=0)=\frac{1}{8}$, $\mathrm{P}(X=1)=\frac{3}{8}$,

$\mathrm{P}(X=2)=\frac{3}{8}$, $\mathrm{P}(X=3)=\frac{1}{8}$

이므로 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	3	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	1

$\therefore \mathrm{E}(X)=0\times\frac{1}{8}+1\times\frac{3}{8}+2\times\frac{3}{8}+3\times\frac{1}{8}=\frac{3}{2}$

또, $\mathrm{E}(X^2)=0^2\times\frac{1}{8}+1^2\times\frac{3}{8}+2^2\times\frac{3}{8}+3^2\times\frac{1}{8}=3$

이므로

$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2=3-\left(\frac{3}{2}\right)^2=\frac{3}{4}$

$\therefore \sigma(X)=\sqrt{\mathrm{V}(X)}=\sqrt{\frac{3}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

답 $\mathbf{E(X)=\frac{3}{2}, \sigma(X)=\frac{\sqrt{3}}{2}}$

177

확률변수 X가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2이고, 그 확률은 각각

$\mathrm{P}(X=0)=\frac{{}_7\mathrm{C}_2}{{}_{10}\mathrm{C}_2}=\frac{7}{15}$

$\mathrm{P}(X=1)=\frac{{}_7\mathrm{C}_1\times{}_3\mathrm{C}_1}{{}_{10}\mathrm{C}_2}=\frac{7}{15}$

$\mathrm{P}(X=2)=\frac{{}_3\mathrm{C}_2}{{}_{10}\mathrm{C}_2}=\frac{1}{15}$

이므로 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{7}{15}$	$\frac{7}{15}$	$\frac{1}{15}$	1

$\therefore$ $E(X)=0\times\frac{7}{15}+1\times\frac{7}{15}+2\times\frac{1}{15}=\frac{3}{5}$

또, $E(X^2)=0^2\times\frac{7}{15}+1^2\times\frac{7}{15}+2^2\times\frac{1}{15}=\frac{11}{15}$이므로

$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2=\frac{11}{15}-\left(\frac{3}{5}\right)^2=\frac{28}{75}$

$\therefore$ $\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{\frac{28}{75}}=\frac{2\sqrt{21}}{15}$

답 $\mathbf{E(X)=\frac{3}{5},\ \sigma(X)=\frac{2\sqrt{21}}{15}}$

178

확률변수 X가 가질 수 있는 값은 1, 2, 3이고, 그 확률은 각각

$P(X=1)=\frac{{}_3C_1\times{}_2C_2}{{}_5C_3}=\frac{3}{10}$

$P(X=2)=\frac{{}_3C_2\times{}_2C_1}{{}_5C_3}=\frac{3}{5}$

$P(X=3)=\frac{{}_3C_3}{{}_5C_3}=\frac{1}{10}$

이므로 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	3	합계
$P(X=x)$	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{10}$	1

$\therefore$ $E(X)=1\times\frac{3}{10}+2\times\frac{3}{5}+3\times\frac{1}{10}=\frac{9}{5}$

또, $E(X^2)=1^2\times\frac{3}{10}+2^2\times\frac{3}{5}+3^2\times\frac{1}{10}=\frac{18}{5}$이므로

$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2=\frac{18}{5}-\left(\frac{9}{5}\right)^2=\frac{9}{25}$

$\therefore$ $\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{\frac{9}{25}}=\frac{3}{5}$ **답** $\mathbf{\frac{3}{5}}$

179

한 장의 복권으로 받을 수 있는 상금을 확률변수 X라 할 때, X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	10000	5000	1000	0	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{200}$	$\frac{1}{40}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{23}{25}$	1

$\therefore$ $E(X)=10000\times\frac{1}{200}+5000\times\frac{1}{40}+1000\times\frac{1}{20}+0\times\frac{23}{25}=225$

따라서 구하는 기댓값은 225원이다. **답 225원**

180

한 번의 시행에서 받을 수 있는 상금을 확률변수 X라 하면 X가 가질 수 있는 값은 500, 750, 1000이고, 그 확률은 각각

$P(X=500)=\frac{{}_3C_2}{{}_5C_2}=\frac{3}{10}$

$P(X=750)=\frac{{}_3C_1\times{}_2C_1}{{}_5C_2}=\frac{3}{5}$

$P(X=1000)=\frac{{}_2C_2}{{}_5C_2}=\frac{1}{10}$

이므로 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	500	750	1000	합계
$P(X=x)$	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{10}$	1

$\therefore$ $E(X)=500\times\frac{3}{10}+750\times\frac{3}{5}+1000\times\frac{1}{10}=700$

따라서 구하는 기댓값은 700원이다. **답 700원**

181

$E(-2X+3)=1$에서

$-2E(X)+3=1$ $\therefore$ $E(X)=1$

$\sigma(X)=2$에서 $V(X)=2^2=4$

이때 $V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$이므로

$E(X^2)=V(X)+\{E(X)\}^2=4+1^2=5$ **답 5**

182

$E(X)=5$, $E(X^2)=125$이므로

$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2=125-5^2=100$

$E(Y)=42$에서

$E(aX+b)=42$, $aE(X)+b=42$

$\therefore$ $5a+b=42$ ······ ㉠

또, $V(Y)=16$에서

$V(aX+b)=16$, $a^2V(X)=16$

$100a^2=16 \qquad \therefore a=\frac{2}{5}\ (\because a>0)$

$a=\frac{2}{5}$를 ㉠에 대입하면

$5\times\frac{2}{5}+b=42 \qquad \therefore b=40$

답 40

183

$E(X)=1080,\ \sigma(X)=100$이므로

$$E(Y)=E\left(\frac{5}{4}X+300\right)=\frac{5}{4}E(X)+300$$
$$=\frac{5}{4}\times1080+300=1650$$
$$\sigma(Y)=\sigma\left(\frac{5}{4}X+300\right)=\left|\frac{5}{4}\right|\sigma(X)$$
$$=\frac{5}{4}\times100=125$$

답 $E(Y)=1650,\ \sigma(Y)=125$

184

확률의 총합은 1이므로

$a+\frac{a}{2}+a^2=1$

$2a^2+3a-2=0,\ (2a-1)(a+2)=0$

$\therefore a=\frac{1}{2}\ (\because 0\le a\le1)$

$\therefore E(X)=(-1)\times\frac{1}{2}+0\times\frac{1}{4}+1\times\frac{1}{4}=-\frac{1}{4}$

또, $E(X^2)=(-1)^2\times\frac{1}{2}+0^2\times\frac{1}{4}+1^2\times\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$이므로

$$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2=\frac{3}{4}-\left(-\frac{1}{4}\right)^2=\frac{11}{16}$$
$$\therefore \sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{\frac{11}{16}}=\frac{\sqrt{11}}{4}$$

따라서 확률변수 $Y=2X+1$의 평균, 분산, 표준편차는 각각

$$E(Y)=E(2X+1)=2E(X)+1$$
$$=2\times\left(-\frac{1}{4}\right)+1=\frac{1}{2}$$
$$V(Y)=V(2X+1)=2^2V(X)=4\times\frac{11}{16}=\frac{11}{4}$$
$$\sigma(Y)=\sigma(2X+1)=|2|\sigma(X)=2\times\frac{\sqrt{11}}{4}=\frac{\sqrt{11}}{2}$$

답 $E(Y)=\frac{1}{2},\ V(Y)=\frac{11}{4},\ \sigma(Y)=\frac{\sqrt{11}}{2}$

185

확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	3	4	합계
$P(X=x)$	k	$4k$	$9k$	$16k$	1

확률의 총합은 1이므로

$k+4k+9k+16k=1$

$30k=1 \qquad \therefore k=\frac{1}{30}$

$$\therefore E(X)=1\times\frac{1}{30}+2\times\frac{4}{30}+3\times\frac{9}{30}+4\times\frac{16}{30}$$
$$=\frac{10}{3}$$
$$\therefore E(-9X-2)=-9E(X)-2$$
$$=(-9)\times\frac{10}{3}-2=-32$$

답 -32

186

확률변수 X가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2, 3이고, 그 확률은 각각

$$P(X=0)=\frac{{}_4C_3\times{}_3C_0}{{}_7C_3}=\frac{4}{35}$$
$$P(X=1)=\frac{{}_4C_2\times{}_3C_1}{{}_7C_3}=\frac{18}{35}$$
$$P(X=2)=\frac{{}_4C_1\times{}_3C_2}{{}_7C_3}=\frac{12}{35}$$
$$P(X=3)=\frac{{}_4C_0\times{}_3C_3}{{}_7C_3}=\frac{1}{35}$$

이므로 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	3	합계
$P(X=x)$	$\frac{4}{35}$	$\frac{18}{35}$	$\frac{12}{35}$	$\frac{1}{35}$	1

$$\therefore E(X)=0\times\frac{4}{35}+1\times\frac{18}{35}+2\times\frac{12}{35}+3\times\frac{1}{35}$$
$$=\frac{9}{7}$$
$$\therefore E(7X-2)=7E(X)-2=7\times\frac{9}{7}-2=7$$

답 7

187

1의 양의 약수는 1의 1개,

2의 양의 약수는 1, 2의 2개,

3의 양의 약수는 1, 3의 2개,
4의 양의 약수는 1, 2, 4의 3개,
5의 양의 약수는 1, 5의 2개
6의 양의 약수는 1, 2, 3, 6의 4개
이므로 확률변수 X가 가질 수 있는 값은 1, 2, 3, 4이고 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	3	4	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	1

$\therefore \mathrm{E}(X)=1\times\frac{1}{6}+2\times\frac{1}{2}+3\times\frac{1}{6}+4\times\frac{1}{6}=\frac{7}{3}$

또, $\mathrm{E}(X^2)=1^2\times\frac{1}{6}+2^2\times\frac{1}{2}+3^2\times\frac{1}{6}+4^2\times\frac{1}{6}=\frac{19}{3}$
이므로

$$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2=\frac{19}{3}-\left(\frac{7}{3}\right)^2=\frac{8}{9}$$

$$\therefore \sigma(X)=\sqrt{\mathrm{V}(X)}=\sqrt{\frac{8}{9}}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\therefore \sigma(-6X+5)=|-6|\sigma(X)=6\times\frac{2\sqrt{2}}{3}=4\sqrt{2}$$

답 $\mathbf{4\sqrt{2}}$

188

(1) 한 개의 주사위를 던질 때 짝수의 눈이 나올 확률은 $\frac{1}{2}$이고 각 주사위의 결과는 서로 독립이므로 짝수의 눈이 나오는 주사위의 개수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(10, \frac{1}{2}\right)$을 따른다.

(2) 제비를 차례대로 2개 뽑을 때, 처음 1개를 뽑는 시행과 다음 1개를 뽑는 시행은 서로 독립이 아니므로 이항분포를 따르지 않는다.

(3) 자유투를 한 번 던질 때 성공할 확률은 0.85이고 각 자유투의 결과는 서로 독립이므로 농구 선수가 자유투를 던져서 성공하는 횟수 X는 이항분포 $\mathrm{B}(50, 0.85)$를 따른다.

(4) 화장품을 재구매할 확률은 0.4이고 각 구매자가 재구매하는 것은 서로 독립이므로 화장품을 재구매하는 인원수 X는 이항분포 $\mathrm{B}(100, 0.4)$를 따른다.

답 (1) $\mathbf{B\left(10, \frac{1}{2}\right)}$ (2) **이항분포를 따르지 않는다.**
(3) $\mathbf{B(50, 0.85)}$ (4) $\mathbf{B(100, 0.4)}$

189

(1) $$\mathrm{P}(X=x)=\begin{cases} {}_3\mathrm{C}_0\left(\frac{1}{3}\right)^3 & (x=0) \\ {}_3\mathrm{C}_x\left(\frac{2}{3}\right)^x\left(\frac{1}{3}\right)^{3-x} & (x=1,\ 2) \\ {}_3\mathrm{C}_3\left(\frac{2}{3}\right)^3 & (x=3) \end{cases}$$

(2) $\mathrm{P}(X=2)={}_3\mathrm{C}_2\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)^1=\frac{4}{9}$

답 (1) **풀이 참조** (2) $\mathbf{\frac{4}{9}}$

190

(1) $\mathrm{E}(X)=36\times\frac{1}{3}=12$
$\mathrm{V}(X)=36\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=8$
$\sigma(X)=\sqrt{\mathrm{V}(X)}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$

(2) $\mathrm{E}(X)=100\times\frac{2}{5}=40$
$\mathrm{V}(X)=100\times\frac{2}{5}\times\frac{3}{5}=24$
$\sigma(X)=\sqrt{\mathrm{V}(X)}=\sqrt{24}=2\sqrt{6}$

답 (1) $\mathbf{E(X)=12,\ V(X)=8,\ \sigma(X)=2\sqrt{2}}$
(2) $\mathbf{E(X)=40,\ V(X)=24,\ \sigma(X)=2\sqrt{6}}$

191

(1) 4명의 환자에게 주사를 놓는 것이므로 4회의 독립시행이고, 한 환자에게 주사를 놓았을 때 치유될 확률이 $\frac{3}{4}$이므로 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(4, \frac{3}{4}\right)$을 따른다.

(2) X의 확률질량함수는

$$\mathrm{P}(X=x)=\begin{cases} {}_4\mathrm{C}_0\left(\frac{1}{4}\right)^4 & (x=0) \\ {}_4\mathrm{C}_x\left(\frac{3}{4}\right)^x\left(\frac{1}{4}\right)^{4-x} & (x=1,\ 2,\ 3) \\ {}_4\mathrm{C}_4\left(\frac{3}{4}\right)^4 & (x=4) \end{cases}$$

(3) $P(X \ge 1)=1-P(X=0)=1-{}_4C_0\left(\frac{1}{4}\right)^4$

$=1-\frac{1}{4^4}=\frac{255}{256}$

답 (1) $\mathbf{B\left(4, \frac{3}{4}\right)}$ (2) **풀이 참조** (3) $\mathbf{\frac{255}{256}}$

192

5가구를 조사하므로 5회의 독립시행이고, 한 가구에서 드라마를 시청할 확률이 $\frac{1}{5}$이므로 확률변수 X는 이항분포 $B\left(5, \frac{1}{5}\right)$을 따른다.

따라서 X의 확률질량함수는

$$P(X=x)=\begin{cases} {}_5C_0\left(\frac{4}{5}\right)^5 & (x=0) \\ {}_5C_x\left(\frac{1}{5}\right)^x\left(\frac{4}{5}\right)^{5-x} & (x=1,\ 2,\ 3,\ 4) \\ {}_5C_5\left(\frac{1}{5}\right)^5 & (x=5) \end{cases}$$

이므로 구하는 확률은

$P(X \ge 4)=P(X=4)+P(X=5)$

$={}_5C_4\left(\frac{1}{5}\right)^4\left(\frac{4}{5}\right)^1+{}_5C_5\left(\frac{1}{5}\right)^5$

$=\frac{21}{3125}$

답 $\mathbf{\frac{21}{3125}}$

193

(1) 확률변수 X는 이항분포 $B\left(50, \frac{1}{5}\right)$을 따른다.

(2) 확률변수 X의 평균, 분산, 표준편차는 각각

$E(X)=50\times\frac{1}{5}=10$

$V(X)=50\times\frac{1}{5}\times\frac{4}{5}=8$

$\sigma(X)=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$

답 (1) $\mathbf{B\left(50, \frac{1}{5}\right)}$

(2) $\mathbf{E(X)=10,\ V(X)=8,\ \sigma(X)=2\sqrt{2}}$

194

$E(X)=5$에서 $20p=5$

$\therefore p=\frac{1}{4}$

따라서 확률변수 X는 이항분포 $B\left(20, \frac{1}{4}\right)$을 따르므로

$V(X)=20\times\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}=\frac{15}{4}$

$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$에서

$E(X^2)=V(X)+\{E(X)\}^2$

$=\frac{15}{4}+5^2=\frac{115}{4}$

답 $\mathbf{\frac{115}{4}}$

195

$E(X)=\frac{4}{5}$이므로

$E(X)=np=\frac{4}{5}$ …… ㉠

또, $E(X^2)=\frac{32}{25}$이므로

$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2=\frac{32}{25}-\left(\frac{4}{5}\right)^2=\frac{16}{25}$

$\therefore V(X)=np(1-p)=\frac{16}{25}$ …… ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$\frac{4}{5}(1-p)=\frac{16}{25}$ $\therefore p=\frac{1}{5}$

$p=\frac{1}{5}$을 ㉠에 대입하면

$\frac{1}{5}n=\frac{4}{5}$ $\therefore n=4$

따라서 확률변수 X는 이항분포 $B\left(4, \frac{1}{5}\right)$을 따르므로

$P(X=3)={}_4C_3\left(\frac{1}{5}\right)^3\left(\frac{4}{5}\right)^1=\frac{16}{625}$

답 $\mathbf{\frac{16}{625}}$

196

씨앗 100개를 심으므로 100회의 독립시행이고, 씨앗 하나가 발아할 확률은 20 %, 즉 $\frac{1}{5}$이므로 확률변수 X는 이항분포 $B\left(100, \frac{1}{5}\right)$을 따른다.

$\therefore E(X)=100\times\frac{1}{5}=20$

답 **20**

197

3개의 동전을 동시에 160번 던지므로 160회의 독립시행이고, 3개의 동전을 동시에 한 번 던져서 앞면이 2개,

뒷면이 1개 나올 확률은

${}_3C_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^1=\frac{3}{8}$

이므로 확률변수 X는 이항분포 $B\left(160,\ \frac{3}{8}\right)$을 따른다.

$\therefore\ \sigma(X)=\sqrt{160\times\frac{3}{8}\times\frac{5}{8}}=\frac{5\sqrt{6}}{2}$ 답 $\frac{5\sqrt{6}}{2}$

198

갑, 을 두 사람이 가위바위보를 10번 하므로 10회의 독립시행이고, 가위바위보를 한 번 하여 갑이 이길 확률은 $\frac{1}{3}$이므로 확률변수 X는 이항분포 $B\left(10,\ \frac{1}{3}\right)$을 따른다.

$\therefore\ E(X)=10\times\frac{1}{3}=\frac{10}{3}$

$V(X)=10\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{20}{9}$

이때 $V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$이므로

$E(X^2)=V(X)+\{E(X)\}^2$

$=\frac{20}{9}+\left(\frac{10}{3}\right)^2=\frac{40}{3}$ 답 $\frac{40}{3}$

199

200명의 환자가 이 약을 복용하므로 200회의 독립시행이고, 약을 복용한 환자 한 명이 완치될 확률은 $\frac{4}{5}$이므로 확률변수 X는 이항분포 $B\left(200,\ \frac{4}{5}\right)$를 따른다.

$\therefore\ E(X)=200\times\frac{4}{5}=160$

$V(X)=200\times\frac{4}{5}\times\frac{1}{5}=32$

$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{32}=4\sqrt{2}$

따라서 확률변수 $Y=2X-1$의 평균과 표준편차는 각각

$E(Y)=E(2X-1)=2E(X)-1$

$=2\times160-1=319$

$\sigma(Y)=\sigma(2X-1)=|2|\sigma(X)$

$=2\times4\sqrt{2}=8\sqrt{2}$

답 $E(Y)=319,\ \sigma(Y)=8\sqrt{2}$

200

4개의 동전을 동시에 n번 던지므로 n회의 독립시행이고, 4개의 동전을 동시에 한 번 던져서 앞면이 1개, 뒷면이 3개 나올 확률은

${}_4C_1\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{4}$

이므로 확률변수 X는 이항분포 $B\left(n,\ \frac{1}{4}\right)$을 따른다.

$\therefore\ E(X)=n\times\frac{1}{4}=\frac{1}{4}n$

$V(X)=n\times\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}=\frac{3}{16}n$

이때 $V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$이므로

$\frac{3}{16}n=70-\left(\frac{1}{4}n\right)^2,\ n^2+3n-1120=0$

$(n+35)(n-32)=0$ $\therefore\ n=32\ (\because\ n>0)$

따라서 $V(X)=\frac{3}{16}\times32=6$이므로

$V(3X-2)=3^2V(X)=9\times6=54$ 답 54

201

(1) $\int_0^4 kx^2\,dx=k\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^4=1$

$\frac{64}{3}k=1$ $\therefore\ k=\frac{3}{64}$

(2) $P(2\le X\le4)=\int_2^4\frac{3}{64}x^2\,dx=\frac{3}{64}\left[\frac{1}{3}x^3\right]_2^4$

$=\frac{3}{64}\times\frac{56}{3}=\frac{7}{8}$

답 (1) $\frac{3}{64}$ (2) $\frac{7}{8}$

202

연속확률변수는 어떤 범위에 속하는 모든 실수 값을 가질 수 있으므로 보기 중에서 연속확률변수인 것은 ㄱ, ㄴ, ㄹ이다. 답 ㄱ, ㄴ, ㄹ

203

(1) $-1\le x\le1$에서 $f(x)\ge0$이고, 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=-1,\ x=1$로 둘러싸인 도형의 넓이가 $\frac{1}{2}\times2=1$이므로 확률밀도함수가 될 수 있다.

(2) $-1 \le x < 0$에서 $f(x) < 0$이므로 확률밀도함수가 될 수 없다.

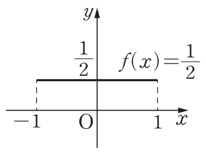
(3) 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 직선 $x=1$로 둘러싸인 도형의 넓이가 $\frac{1}{2} \times 2 \times 2 = 2$이므로 확률밀도함수가 될 수 없다.

(4) $-1 \le x \le 1$에서 $f(x) \ge 0$이고, 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=-1$, $x=1$로 둘러싸인 도형의 넓이가 $\frac{1}{2} \times 1 \times 1 + \frac{1}{2} \times 1 \times 1 = 1$이므로 확률밀도함수가 될 수 있다.

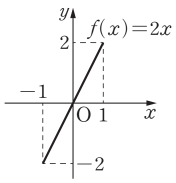
답 풀이 참조

참고 함수 $f(x)$에 대하여 $y=f(x)$ $(-1 \le x \le 1)$의 그래프는 다음과 같다.

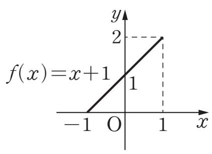
(1)



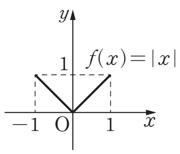
(2)



(3)

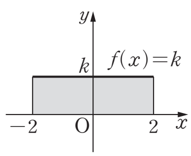


(4)



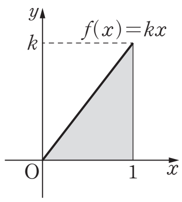
204

(1) 오른쪽 그림에서 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=-2$, $x=2$로 둘러싸인 도형의 넓이가 1이므로



$4 \times k = 1$ $\qquad \therefore k = \frac{1}{4}$

(2) 오른쪽 그림에서 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 직선 $x=1$로 둘러싸인 도형의 넓이가 1이므로



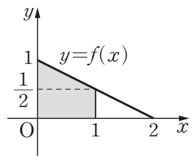
$\frac{1}{2} \times 1 \times k = 1$

$\therefore k = 2$

답 (1) $\frac{1}{4}$ (2) 2

205

$P(0 \le X \le 1)$은 오른쪽 그림에서 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=0$, $x=1$로 둘러싸인 도형의 넓이와 같으므로



$P(0 \le X \le 1) = \frac{1}{2} \times \left(1 + \frac{1}{2}\right) \times 1 = \frac{3}{4}$

답 $\frac{3}{4}$

206

함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=0$, $x=5$로 둘러싸인 도형의 넓이가 1이므로

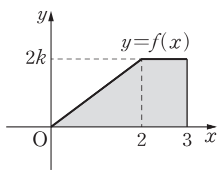
$\frac{1}{2} \times 2 \times k + \frac{1}{2} \times (5-2) \times k = 1$

$\frac{5}{2}k = 1$ $\qquad \therefore k = \frac{2}{5}$

답 $\frac{2}{5}$

207

함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고 그래프와 x축 및 직선 $x=3$으로 둘러싸인 도형의 넓이가 1이므로



$\frac{1}{2} \times (1+3) \times 2k = 1$

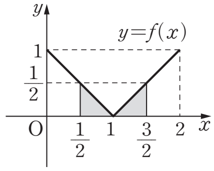
$\therefore k = \frac{1}{4}$

답 $\frac{1}{4}$

208

$$f(x) = |x-1| \ (0 \le x \le 2)$$
$$= \begin{cases} 1-x & (0 \le x \le 1) \\ x-1 & (1 \le x \le 2) \end{cases}$$

이때 $P\left(\frac{1}{2} \le X \le \frac{3}{2}\right)$은 오른쪽 그림에서 색칠한 도형의 넓이와 같으므로



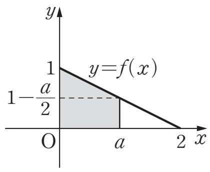
$P\left(\frac{1}{2} \le X \le \frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$

$= \frac{1}{4}$

답 $\frac{1}{4}$

209

$\mathrm{P}(0\le X\le a)$는 오른쪽 그림에서 색칠한 도형의 넓이와 같으므로 $\mathrm{P}(0\le X\le a)=\frac{3}{4}$에서



$\frac{1}{2}\times\left\{1+\left(1-\frac{a}{2}\right)\right\}\times a=\frac{3}{4}$

$a^2-4a+3=0$

$(a-1)(a-3)=0$

$\therefore a=1$ 또는 $a=3$

이때 $0\le a\le 2$이므로 $a=1$

답 **1**

210

(1) 평균이 5, 분산이 $9=3^2$이므로

$\mathrm{N}(5,\ 3^2)$

(2) 평균이 12, 분산이 $16=4^2$이므로

$\mathrm{N}(12,\ 4^2)$

답 (1) $\mathbf{N(5,\ 3^2)}$ (2) $\mathbf{N(12,\ 4^2)}$

211

(1) m의 값이 일정할 때, σ의 값이 클수록 곡선의 높이는 낮아진다.

(2) σ의 값이 일정할 때, m의 값이 변하면 대칭축의 위치는 바뀐다.

답 (1) ㈎ (2) ㈎

212

(1) $\mathrm{P}(Z\ge 2)=\mathrm{P}(Z\ge 0)-\mathrm{P}(0\le Z\le 2)$

$=0.5-0.4772=0.0228$

(2) $\mathrm{P}(Z\le 0.5)=\mathrm{P}(Z\le 0)+\mathrm{P}(0\le Z\le 0.5)$

$=0.5+0.1915=0.6915$

(3) $\mathrm{P}(1\le Z\le 2)=\mathrm{P}(0\le Z\le 2)-\mathrm{P}(0\le Z\le 1)$

$=0.4772-0.3413=0.1359$

(4) $\mathrm{P}(-1\le Z\le 1.5)$

$=\mathrm{P}(-1\le Z\le 0)+\mathrm{P}(0\le Z\le 1.5)$

$=\mathrm{P}(0\le Z\le 1)+\mathrm{P}(0\le Z\le 1.5)$

$=0.3413+0.4332=0.7745$

답 (1) **0.0228** (2) **0.6915**
(3) **0.1359** (4) **0.7745**

213

(1) $m=8$, $\sigma=2$이므로 $Z=\frac{X-8}{2}$

(2) $m=20$, $\sigma=5$이므로 $Z=\frac{X-20}{5}$

답 (1) $\boldsymbol{Z=\frac{X-8}{2}}$ (2) $\boldsymbol{Z=\frac{X-20}{5}}$

214

정규분포곡선은 직선 $x=20$에 대하여 대칭이고,

$\mathrm{P}(X\le a)=\mathrm{P}(X\ge 29)$이므로

$\frac{a+29}{2}=20$, $a+29=40$

$\therefore a=11$

답 **11**

215

정규분포곡선은 직선 $x=m$에 대하여 대칭이고,

$\mathrm{P}(X\le 6)=\mathrm{P}(X\ge 16)$이므로

$m=\frac{6+16}{2}=11$

또, $\mathrm{V}\left(\frac{1}{9}X\right)=1$에서 $\frac{1}{81}\mathrm{V}(X)=1$

$\therefore \mathrm{V}(X)=81$

즉, $\sigma^2=81$이므로 $\sigma=9$ ($\because \sigma>0$)

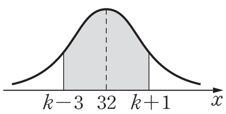
$\therefore m+\sigma=11+9=20$

답 **20**

216

확률변수 X의 확률밀도함수는 $x=32$에서 최댓값을 갖고, 정규분포곡선은 직선 $x=32$에 대하여 대칭이다. 따라서

$\mathrm{P}(k-3\le X\le k+1)$이 최대가 되려면



$\frac{(k-3)+(k+1)}{2}=32$, $k-1=32$

$\therefore k=33$

답 **33**

217

$Z=\frac{X-60}{4}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

(1) $P(48 \le X \le 64)$

$=P\left(\frac{48-60}{4} \le Z \le \frac{64-60}{4}\right)$

$=P(-3 \le Z \le 1)$

$=P(-3 \le Z \le 0)+P(0 \le Z \le 1)$

$=P(0 \le Z \le 3)+P(0 \le Z \le 1)$

$=0.4987+0.3413=0.84$

(2) $P(|X-64| \le 4)$

$=P(-4 \le X-64 \le 4)$

$=P(60 \le X \le 68)$

$=P\left(\frac{60-60}{4} \le Z \le \frac{68-60}{4}\right)$

$=P(0 \le Z \le 2)=0.4772$

답 (1) **0.84** (2) **0.4772**

218

$Z=\frac{X-32}{5}$로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따른다.

$P(28 \le X \le 36)=0.5762$에서

$P\left(\frac{28-32}{5} \le Z \le \frac{36-32}{5}\right)=0.5762$

$P(-0.8 \le Z \le 0.8)=0.5762$

$2P(0 \le Z \le 0.8)=0.5762$

$\therefore P(0 \le Z \le 0.8)=0.2881$

따라서 구하는 확률은

$P(X \ge 28)=\left(Z \ge \frac{28-32}{5}\right)$

$=P(Z \ge -0.8)$

$=P(-0.8 \le Z \le 0)+P(Z \ge 0)$

$=P(0 \le Z \le 0.8)+P(Z \ge 0)$

$=0.2881+0.5=0.7881$ 답 **0.7881**

219

$Z=\frac{X-16}{2}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따른다.

$P(k \le X \le 22)=0.9759$에서

$P\left(\frac{k-16}{2} \le Z \le \frac{22-16}{2}\right)=0.9759$

$P\left(\frac{k-16}{2} \le Z \le 3\right)=0.9759$

$P\left(\frac{k-16}{2} \le Z \le 0\right)+P(0 \le Z \le 3)=0.9759$

$P\left(0 \le Z \le -\frac{k-16}{2}\right)+0.4987=0.9759$

$\therefore P\left(0 \le Z \le -\frac{k-16}{2}\right)=0.4772$

이때 $P(0 \le Z \le 2)=0.4772$이므로

$-\frac{k-16}{2}=2$ $\quad \therefore k=12$ 답 **12**

220

$Z=\frac{X-m}{10}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따른다.

$P(X \le 45)=0.1587$에서

$P\left(Z \le \frac{45-m}{10}\right)=0.1587$

$P(Z \le 0)-P\left(\frac{45-m}{10} \le Z \le 0\right)=0.1587$

$0.5-P\left(0 \le Z \le -\frac{45-m}{10}\right)=0.1587$

$\therefore P\left(0 \le Z \le -\frac{45-m}{10}\right)=0.3413$

이때 $P(0 \le Z \le 1)=0.3413$이므로

$-\frac{45-m}{10}=1$ $\quad \therefore m=55$ 답 **55**

221

학생들의 몸무게를 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $N(53, 6^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-53}{6}$으로 놓으면 Z는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따른다.

$\therefore P(50 \le X \le 65)$

$=P\left(\frac{50-53}{6} \le Z \le \frac{65-53}{6}\right)$

$=P(-0.5 \le Z \le 2)$

$=P(-0.5 \le Z \le 0)+P(0 \le Z \le 2)$

$=P(0 \le Z \le 0.5)+P(0 \le Z \le 2)$

$=0.1915+0.4772=0.6687$

따라서 몸무게가 50 kg 이상 65 kg 이하인 학생은 전체의 66.87 %이다. 답 **66.87 %**

222

연필의 길이를 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $N(154,\ 4^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-154}{4}$로 놓으면 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따른다.

$$\begin{aligned}\therefore\ P(X\le 148)&=P\left(Z\le\frac{148-154}{4}\right)\\&=P(Z\le -1.5)\\&=P(Z\le 0)-P(-1.5\le Z\le 0)\\&=P(Z\le 0)-P(0\le Z\le 1.5)\\&=0.5-0.43=0.07\end{aligned}$$

따라서 길이가 148 mm 이하인 연필은

$400\times 0.07=28$(자루) **답 28자루**

223

민식이가 등교하는 데 걸리는 시간을 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $N(30,\ 5^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-30}{5}$으로 놓으면 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따른다.

따라서 $X>38$일 때 지각하게 되므로 지각할 확률은

$$\begin{aligned}P(X>38)&=P\left(Z>\frac{38-30}{5}\right)\\&=P(Z>1.6)\\&=P(Z\ge 0)-P(0\le Z\le 1.6)\\&=0.5-0.4452\\&=0.0548\end{aligned}$$

답 0.0548

224

시험에 응시한 수험생의 성적을 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $N(75,\ 9^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-75}{9}$로 놓으면 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따른다.

평점 A를 받기 위한 최저 점수를 k라 하면

$P(X\ge k)=0.1$

$P\left(Z\ge\frac{k-75}{9}\right)=0.1$

$P(Z\ge 0)-P\left(0\le Z\le\frac{k-75}{9}\right)=0.1$

$0.5-P\left(0\le Z\le\frac{k-75}{9}\right)=0.1$

$\therefore\ P\left(0\le Z\le\frac{k-75}{9}\right)=0.4$

이때 $P(0\le Z\le 1.28)=0.4$이므로

$\frac{k-75}{9}=1.28$ $\qquad\therefore\ k=86.52$

따라서 평점 A를 받기 위한 최저 점수는 86.52점이다.

답 86.52점

225

학생의 키를 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $N(165,\ 10^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-165}{10}$로 놓으면 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따른다.

키가 큰 쪽에서 100번째인 학생의 키를 k라 하면

$P(X\ge k)=\frac{100}{500}=0.2$

$P\left(Z\ge\frac{k-165}{10}\right)=0.2$

$P(Z\ge 0)-P\left(0\le Z\le\frac{k-165}{10}\right)=0.2$

$0.5-P\left(0\le Z\le\frac{k-165}{10}\right)=0.2$

$\therefore\ P\left(0\le Z\le\frac{k-165}{10}\right)=0.3$

이때 $P(0\le Z\le 0.84)=0.3$이므로

$\frac{k-165}{10}=0.84$ $\qquad\therefore\ k=173.4$

따라서 키가 큰 쪽에서 100번째인 학생의 키는 173.4 cm이다. **답 173.4 cm**

226

확률변수 X는 이항분포 $B\left(48,\ \frac{3}{4}\right)$을 따르므로

$E(X)=48\times\frac{3}{4}=36$

$V(X)=48\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{4}=9$

이때 48은 충분히 큰 수이므로 확률변수 X는 근사적으로 정규분포 $N(36,\ 3^2)$을 따른다.

따라서 $Z=\frac{X-36}{3}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따른다.

$\therefore \mathrm{P}(33 \le X \le 39)$

$=\mathrm{P}\left(\frac{33-36}{3} \le Z \le \frac{39-36}{3}\right)$

$=\mathrm{P}(-1 \le Z \le 1)$

$=2\mathrm{P}(0 \le Z \le 1)$

$=2\times 0.3413=0.6826$ **답 0.6826**

227

확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(450, \frac{2}{3}\right)$를 따르므로

$\mathrm{E}(X)=450\times\frac{2}{3}=300$

$\mathrm{V}(X)=450\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}=100$

이때 450은 충분히 큰 수이므로 확률변수 X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(300, 10^2)$을 따른다.

따라서 $Z=\frac{X-300}{10}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$을 따른다.

$\therefore \mathrm{P}(X \ge 280)=\mathrm{P}\left(Z \ge \frac{280-300}{10}\right)$

$=\mathrm{P}(Z \ge -2)$

$=\mathrm{P}(Z \ge 0)+\mathrm{P}(-2 \le Z \le 0)$

$=\mathrm{P}(Z \ge 0)+\mathrm{P}(0 \le Z \le 2)$

$=0.5+0.4772$

$=0.9772$ **답 0.9772**

228

100개의 제품 중 불량품의 개수를 확률변수 X라 하면 제품 1개가 불량품일 확률은 $\frac{1}{10}$이므로 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(100, \frac{1}{10}\right)$을 따른다.

$\therefore \mathrm{E}(X)=100\times\frac{1}{10}=10$

$\mathrm{V}(X)=100\times\frac{1}{10}\times\frac{9}{10}=9$

이때 100은 충분히 큰 수이므로 확률변수 X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(10, 3^2)$을 따른다.

따라서 $Z=\frac{X-10}{3}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$을 따른다.

$\therefore \mathrm{P}(7 \le X \le 16)$

$=\mathrm{P}\left(\frac{7-10}{3} \le Z \le \frac{16-10}{3}\right)$

$=\mathrm{P}(-1 \le Z \le 2)$

$=\mathrm{P}(-1 \le Z \le 0)+\mathrm{P}(0 \le Z \le 2)$

$=\mathrm{P}(0 \le Z \le 1)+\mathrm{P}(0 \le Z \le 2)$

$=0.3413+0.4772=0.8185$ **답 0.8185**

229

432번의 시행 중 동전 2개가 모두 앞면이 나오는 횟수를 확률변수 X라 하면 동전 2개를 동시에 한 번 던져 2개 모두 앞면이 나올 확률은 $\frac{1}{4}$이므로 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(432, \frac{1}{4}\right)$을 따른다.

$\therefore \mathrm{E}(X)=432\times\frac{1}{4}=108$

$\mathrm{V}(X)=432\times\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}=81$

이때 432는 충분히 큰 수이므로 확률변수 X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(108, 9^2)$을 따른다.

따라서 $Z=\frac{X-108}{9}$로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$을 따른다.

$\therefore \mathrm{P}(X \le 90)=\mathrm{P}\left(Z \le \frac{90-108}{9}\right)$

$=\mathrm{P}(Z \le -2)$

$=\mathrm{P}(Z \le 0)-\mathrm{P}(-2 \le Z \le 0)$

$=\mathrm{P}(Z \le 0)-\mathrm{P}(0 \le Z \le 2)$

$=0.5-0.4772=0.0228$ **답 0.0228**

230

가위바위보를 72번 하여 이기는 횟수를 확률변수 X라 하면 가위바위보를 한 번 하여 이길 확률은 $\frac{1}{3}$이므로 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(72, \frac{1}{3}\right)$을 따른다.

$\therefore \mathrm{E}(X)=72\times\frac{1}{3}=24$

$\mathrm{V}(X)=72\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=16$

이때 72는 충분히 큰 수이므로 확률변수 X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(24, 4^2)$을 따른다.

따라서 $Z=\dfrac{X-24}{4}$로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

$\mathrm{P}(X\geq k)=0.16$에서

$\mathrm{P}\left(Z\geq\dfrac{k-24}{4}\right)=0.16$

$\mathrm{P}(Z\geq 0)-\mathrm{P}\left(0\leq Z\leq\dfrac{k-24}{4}\right)=0.16$

$0.5-\mathrm{P}\left(0\leq Z\leq\dfrac{k-24}{4}\right)=0.16$

$\therefore\ \mathrm{P}\left(0\leq Z\leq\dfrac{k-24}{4}\right)=0.34$

이때 $\mathrm{P}(0\leq Z\leq 1)=0.34$이므로

$\dfrac{k-24}{4}=1$ $\qquad\therefore\ k=28$

답 28

231

답 ㄱ

232

크기가 2인 표본을 복원추출하는 경우의 수는

${}_{10}\Pi_{2}=10^2=100$

답 100

233

(1) 표본평균 $\overline{X}$의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

$\overline{X}$	1	2	3	4	5	합계
$\mathrm{P}(\overline{X}=\overline{x})$	$\dfrac{1}{9}$	$\dfrac{2}{9}$	$\dfrac{1}{3}$	$\dfrac{2}{9}$	$\dfrac{1}{9}$	1

(2) $\mathrm{E}(\overline{X})=1\times\dfrac{1}{9}+2\times\dfrac{2}{9}+3\times\dfrac{1}{3}+4\times\dfrac{2}{9}+5\times\dfrac{1}{9}$

$=3$

$\mathrm{V}(\overline{X})=1^2\times\dfrac{1}{9}+2^2\times\dfrac{2}{9}+3^2\times\dfrac{1}{3}+4^2\times\dfrac{2}{9}$

$+5^2\times\dfrac{1}{9}-3^2$

$=\dfrac{4}{3}$

$\sigma(\overline{X})=\sqrt{\dfrac{4}{3}}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

답 (1) **풀이 참조**

(2) $\mathbf{E}(\overline{X})=3,\ \mathbf{V}(\overline{X})=\dfrac{4}{3},\ \sigma(\overline{X})=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

234

모평균이 30, 모분산이 16, 표본의 크기가 100이므로

(1) $\mathrm{E}(\overline{X})=30$

(2) $\mathrm{V}(\overline{X})=\dfrac{16}{100}=\dfrac{4}{25}$

(3) $\sigma(\overline{X})=\sqrt{\dfrac{4}{25}}=\dfrac{2}{5}$

답 (1) **30** (2) $\dfrac{4}{25}$ (3) $\dfrac{2}{5}$

235

(1) 모평균 $m=200$, 모표준편차 $\sigma=10$, 표본의 크기 $n=100$이므로 표본평균 $\overline{X}$의 평균과 표준편차는

$\mathrm{E}(\overline{X})=m=200$

$\sigma(\overline{X})=\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}=\dfrac{10}{\sqrt{100}}=1$

(2) 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}(200,\ 1^2)$을 따르므로

$Z=\dfrac{\overline{X}-200}{1}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(\overline{X}\geq 202)=\mathrm{P}\left(Z\geq\dfrac{202-200}{1}\right)$

$=\mathrm{P}(Z\geq 2)$

$=\mathrm{P}(Z\geq 0)-\mathrm{P}(0\leq Z\leq 2)$

$=0.5-0.4772=0.0228$

답 (1) $\mathbf{E}(\overline{X})=200,\ \sigma(\overline{X})=1$ (2) **0.0228**

236

모집단이 정규분포 $\mathrm{N}(40,\ 4)$를 따르므로 모평균이 40, 모표준편차가 2이고, 표본의 크기가 n이다.

$\mathrm{E}(\overline{X})=m=40$

$\mathrm{V}(\overline{X})=\dfrac{2^2}{n}=\dfrac{1}{15}$ $\qquad\therefore\ n=60$

$\therefore\ m+n=100$

답 100

237

모표준편차가 12, 표본의 크기가 n이므로

표본평균 $\overline{X}$에 대하여

$\sigma(\overline{X})=\frac{12}{\sqrt{n}}\le 1$, $\sqrt{n}\ge 12$

$\therefore\ n\ge 144$

따라서 n의 최솟값은 144이다. **답 144**

238

상자에서 임의로 1개의 공을 꺼낼 때, 공에 적힌 숫자를 확률변수 X라 하면 X의 확률분포는 다음 표와 같다.

X	1	2	4	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	1

$\therefore\ \mathrm{E}(X)=1\times\frac{1}{3}+2\times\frac{1}{2}+4\times\frac{1}{6}=2$

$\mathrm{V}(X)=1^2\times\frac{1}{3}+2^2\times\frac{1}{2}+4^2\times\frac{1}{6}-2^2=1$

이때 표본의 크기가 4이므로

$\mathrm{V}(\overline{X})=\frac{1}{4}$

$\therefore\ \mathrm{V}(2\overline{X}+3)=2^2\mathrm{V}(\overline{X})=4\times\frac{1}{4}=1$ **답 1**

239

모집단이 정규분포 $\mathrm{N}(70,\ 20^2)$을 따르고 표본의 크기가 100이므로 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(70,\ \frac{20^2}{100}\right)$, 즉 $\mathrm{N}(70,\ 2^2)$을 따른다.

이때 $Z=\frac{\overline{X}-70}{2}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로

$\mathrm{P}(\overline{X}\ge 73)=\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{73-70}{2}\right)$

$=\mathrm{P}(Z\ge 1.5)$

$=\mathrm{P}(Z\ge 0)-\mathrm{P}(0\le Z\le 1.5)$

$=0.5-0.4332=0.0668$ **답 0.0668**

240

모집단이 정규분포 $\mathrm{N}(200,\ 10^2)$을 따르고 표본의 크기가 25이므로 25명의 성적의 평균을 $\overline{X}$라 하면 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(200,\ \frac{10^2}{25}\right)$, 즉 $\mathrm{N}(200,\ 2^2)$을 따른다.

이때 $Z=\frac{\overline{X}-200}{2}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로

$\mathrm{P}(198\le\overline{X}\le 204)$

$=\mathrm{P}\left(\frac{198-200}{2}\le Z\le\frac{204-200}{2}\right)$

$=\mathrm{P}(-1\le Z\le 2)$

$=\mathrm{P}(-1\le Z\le 0)+\mathrm{P}(0\le Z\le 2)$

$=\mathrm{P}(0\le Z\le 1)+\mathrm{P}(0\le Z\le 2)$

$=0.3413+0.4772=0.8185$ **답 0.8185**

241

모집단이 정규분포 $\mathrm{N}(50,\ 10^2)$을 따르고 표본의 크기가 n이므로 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(50,\ \frac{10^2}{n}\right)$을 따른다.

$Z=\frac{\overline{X}-50}{\frac{10}{\sqrt{n}}}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로 $\mathrm{P}(\overline{X}\ge 52)=0.1587$에서

$\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{52-50}{\frac{10}{\sqrt{n}}}\right)=0.1587$

$\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{\sqrt{n}}{5}\right)=0.1587$

$\mathrm{P}(Z\ge 0)-\mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{\sqrt{n}}{5}\right)=0.1587$

$0.5-\mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{\sqrt{n}}{5}\right)=0.1587$

$\therefore\ \mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{\sqrt{n}}{5}\right)=0.3413$

이때 $\mathrm{P}(0\le Z\le 1)=0.3413$이므로

$\frac{\sqrt{n}}{5}=1$, $\sqrt{n}=5$ $\therefore\ n=25$ **답 25**

242

모집단이 정규분포 $\mathrm{N}(1000,\ 50^2)$을 따르고 표본의 크기가 100이므로 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(1000,\ \frac{50^2}{100}\right)$, 즉 $\mathrm{N}(1000,\ 5^2)$을 따른다.

$Z=\frac{\overline{X}-1000}{5}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로

$P(\overline{X} \geq k)=0.0228$에서

$P\left(Z \geq \frac{k-1000}{5}\right)=0.0228$

$0.5-P\left(0 \leq Z \leq \frac{k-1000}{5}\right)=0.0228$

$\therefore P\left(0 \leq Z \leq \frac{k-1000}{5}\right)=0.4772$

이때 $P(0 \leq Z \leq 2)=0.4772$이므로

$\frac{k-1000}{5}=2$, $k-1000=10$

$\therefore k=1010$ **답 1010**

243

표본평균 $\overline{x}=167$, 표본의 크기 $n=64$이고, n은 충분히 크므로 모표준편차 대신 표본표준편차 12를 이용한다.

따라서 모평균 m의 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$167-1.96 \times \frac{12}{\sqrt{64}} \leq m \leq 167+1.96 \times \frac{12}{\sqrt{64}}$

$\therefore 164.06 \leq m \leq 169.94$ **답 $164.06 \leq m \leq 169.94$**

244

표본평균 $\overline{x}=150$, 모표준편차 $\sigma=5$이므로 모평균 m의 신뢰도 99 %의 신뢰구간은

$150-2.58 \times \frac{5}{\sqrt{n}} \leq m \leq 150+2.58 \times \frac{5}{\sqrt{n}}$

이때 $148.71 \leq m \leq 151.29$이므로

$150-2.58 \times \frac{5}{\sqrt{n}}=148.71$

$150+2.58 \times \frac{5}{\sqrt{n}}=151.29$

따라서 $2.58 \times \frac{5}{\sqrt{n}}=1.29$이므로

$\sqrt{n}=10$ $\therefore n=100$ **답 100**

245

표본평균이 75이고, 표본의 크기 100이 충분히 크므로 모표준편차 대신 표본표준편차 15를 이용한다.

따라서 모평균 m의 신뢰도 99 %의 신뢰구간 $\alpha \leq m \leq \beta$에 대하여

$\beta-\alpha=2 \times 2.58 \times \frac{15}{\sqrt{100}}=7.74$ **답 7.74**

246

표본의 크기를 n이라 하면 모표준편차가 5이고, 모평균 m의 신뢰도 99 %의 신뢰구간 $\alpha \leq m \leq \beta$에 대하여 $\beta-\alpha \leq 0.3$이므로

$2 \times 2.58 \times \frac{5}{\sqrt{n}} \leq 0.3$, $\sqrt{n} \geq 86$

$\therefore n \geq 7396$

따라서 표본의 크기의 최솟값은 7396이다. **답 7396**

247

표본의 크기를 n이라 하면

신뢰도 95 %로 추정한 모평균 m의 신뢰구간은

$\overline{x}-1.96 \times \frac{30}{\sqrt{n}} \leq m \leq \overline{x}+1.96 \times \frac{30}{\sqrt{n}}$

$-1.96 \times \frac{30}{\sqrt{n}} \leq m-\overline{x} \leq 1.96 \times \frac{30}{\sqrt{n}}$

$|m-\overline{x}| \leq 1.96 \times \frac{30}{\sqrt{n}}$

모평균 m과 표본평균 $\overline{x}$의 차가 2 g 이하이어야 하므로

$1.96 \times \frac{30}{\sqrt{n}} \leq 2$, $\sqrt{n} \geq 29.4$

$\therefore n \geq 864.36$

따라서 적어도 865개의 제품을 조사해야 한다.

답 865개

248

표본의 크기를 n이라 하면

신뢰도 99 %로 추정한 모평균 m의 신뢰구간은

$\overline{x}-2.58 \times \frac{75}{\sqrt{n}} \leq m \leq \overline{x}+2.58 \times \frac{75}{\sqrt{n}}$

$-2.58 \times \frac{75}{\sqrt{n}} \leq m-\overline{x} \leq 2.58 \times \frac{75}{\sqrt{n}}$

$|m-\overline{x}| \leq 2.58 \times \frac{75}{\sqrt{n}}$

모평균 m과 표본평균 $\overline{x}$의 차가 12.9 m 이하이어야 하므로

$2.58 \times \frac{75}{\sqrt{n}} \leq 12.9$, $\sqrt{n} \geq 15$

$\therefore n \geq 225$

따라서 표본의 크기의 최솟값은 225이다. **답 225**

연습문제 · 실력 UP

Ⅰ. 경우의 수

1

3학년 3명을 한 사람으로 생각하면 모두 4명이고, 이들이 원탁에 둘러앉는 경우의 수는

$(4-1)!=3!=6$

이때 각 경우에 대하여 3학년끼리 자리를 바꾸는 경우의 수는

$3!=6$

따라서 구하는 경우의 수는

$6\times6=36$ **답** ④

2

A, B, C 3명을 한 사람으로 생각하면 모두 3명이고, 이들이 원탁에 둘러앉는 경우의 수는

$(3-1)!=2!=2$

A를 가운데 두고 B, C가 자리를 바꾸는 경우의 수는

$2!=2$

따라서 구하는 경우의 수는

$2\times2=4$ **답 4**

3

(i) 탁자 A에 4명이 둘러앉는 경우의 수는

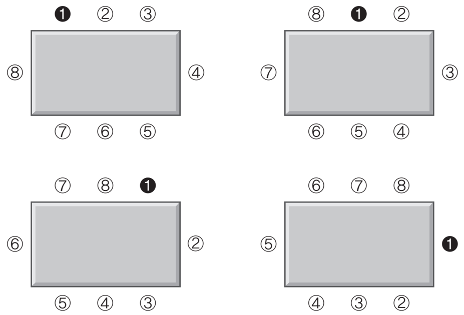
$(4-1)!=3!=6$

$\therefore a=6$

(ii) 8명이 원형으로 둘러앉는 경우의 수는

$(8-1)!=7!=5040$

8명이 직사각형 모양의 탁자 B에 둘러앉을 때, ①의 자리를 어느 자리에 고정시키느냐에 따라 둘러앉는 경우가 다음 그림과 같이 4가지 경우로 달라진다.



따라서 탁자 B에 8명이 둘러앉는 경우의 수는

$5040\times4=20160$ $\therefore b=20160$

(i), (ii)에서 $a+b=20166$ **답 20166**

4

서로 다른 영화 3편에서 4개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

${}_3\Pi_4=3^4=81$ **답** ⑤

5

천의 자리에는 0이 올 수 없으므로 4가지

백의 자리, 십의 자리에는 0, 1, 2, 3, 4가 모두 중복하여 올 수 있으므로

${}_5\Pi_2=5^2=25$(가지)

일의 자리에는 0, 2, 4가 올 수 있으므로 3가지

따라서 구하는 짝수의 개수는

$4\times25\times3=300$ **답 300**

6

3000보다 작은 수는 2□□□, 1□□□의 꼴이다.

2□□□, 1□□□ 꼴의 자연수의 개수는 5개의 숫자에서 3개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

$2\times{}_5\Pi_3=2\times5^3=250$ **답 250**

7

X에서 X로의 일대일대응의 개수는 집합 X의 원소 1, 2, 3, $\cdots$, n에서 서로 다른 n개를 뽑는 순열의 수와 같으므로

${}_{n}\mathrm{P}_{n}=n\times(n-1)\times\cdots\times1=120$
이때 $120=5\times4\times3\times2\times1$이므로 $n=5$
따라서 X에서 X로의 함수의 개수는 집합 X의 원소 1, 2, 3, 4, 5의 5개에서 중복을 허용하여 5개를 뽑아 집합 X의 원소 1, 2, 3, 4, 5에 대응시키는 중복순열의 수와 같으므로
${}_{5}\Pi_{5}=5^{5}=3125$ **답 3125**

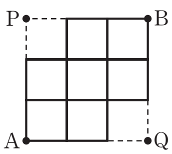
8

a, a, b, b의 4개의 문자를 일렬로 나열하는 경우의 수는
$\frac{4!}{2!2!}=6$
a, a, b, b의 양 끝과 사이사이에 c, d를 배열하는 경우의 수는 ${}_{5}\mathrm{P}_{2}=20$
따라서 구하는 경우의 수는
$6\times20=120$ **답 120**

다른풀이 a, a, b, b, c, d의 6개의 문자를 일렬로 나열하는 경우의 수는
$\frac{6!}{2!2!}=180$
c, d가 이웃한다고 할 때, c, d를 한 문자 A로 생각하면 a, a, b, b, A의 5개의 문자를 일렬로 나열하는 경우의 수는
$\frac{5!}{2!2!}=30$
이때 c와 d가 자리를 바꾸는 경우의 수는 $2!=2$
즉, c와 d가 이웃하도록 나열하는 경우의 수는
$30\times2=60$
따라서 구하는 경우의 수는
$180-60=120$

9

오른쪽 그림과 같이 지나갈 수 없는 길을 점선으로 연결하고 두 지점 P, Q를 잡으면 A 지점에서 B 지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수는



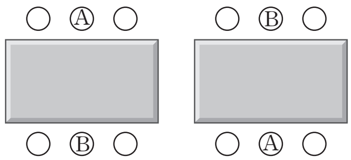
$\frac{6!}{3!3!}=20$
그런데
A → P → B로 가는 경우의 수: 1
A → Q → B로 가는 경우의 수: 1
이므로 구하는 경우의 수는
$20-(1+1)=18$ **답 18**

10

각 쌍을 묶어서 세 사람으로 생각하면 3명이 원탁에 둘러앉는 경우의 수는
$(3-1)!=2!=2$
세 쌍의 부부가 각각 자리를 바꾸는 경우의 수는
$2!\times2!\times2!=8$
따라서 구하는 경우의 수는
$2\times8=16$ **답 16**

11

A, B가 네 모퉁이에 앉지 않는 경우는 그림과 같은 경우이다.



이때 위의 두 경우는 회전하여 일치하므로 서로 같은 경우이다.
따라서 A, B를 제외한 4명을 남은 네 자리에 앉히는 경우의 수는
$4!=4\times3\times2\times1=24$ **답 24**

12

다섯 자리의 자연수 중 0을 세 번만 포함하는 경우는
□□000, □0□00, □00□0, □000□
의 4가지가 있다.
각각의 꼴의 자연수의 개수는 1, 2, 3의 3개의 숫자에서 중복을 허용하여 2개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로
${}_{3}\Pi_{2}=3^{2}=9$

따라서 구하는 자연수의 개수는

$4\times 9=36$ **답 36**

13

0, 1, 2, 3으로 중복을 허용하여 만든 자연수는 맨 앞 자리에는 0을 제외한 3개의 숫자가 올 수 있고 나머지 자리에는 4개의 숫자가 중복하여 올 수 있다.

(i) 한 자리의 자연수의 개수: 3

(ii) 두 자리의 자연수의 개수: $3\times{}_4\Pi_1=3\times 4=12$

(iii) 세 자리의 자연수의 개수: $3\times{}_4\Pi_2=3\times 4^2=48$

(iv) 10□□ 꼴의 자연수의 개수: ${}_4\Pi_2=4^2=16$

(v) 11□□ 꼴의 자연수의 개수: ${}_4\Pi_2=4^2=16$

(vi) 120□ 꼴의 자연수의 개수: 4

(i)~(vi)에서 $3+12+48+16+16+4=99$이고,
이 이후의 숫자는 1210, 1211, 1212, 1213, …이므로 100번째에 해당하는 자연수는 1210이다.

답 1210

14

X에서 Y로의 함수의 개수는

${}_4\Pi_3=4^3=64$

X에서 Y로의 함수 중 $f(1)=1$인 함수의 개수는

${}_4\Pi_2=4^2=16$

따라서 구하는 함수의 개수는

$64-16=48$ **답 ②**

다른풀이 $f(1)$의 값이 될 수 있는 수는 1을 제외한 3개, $f(2)$의 값이 될 수 있는 수는 4개, $f(3)$의 값이 될 수 있는 수는 4개이므로 구하는 함수의 개수는

$3\times 4\times 4=48$

15

일의 자리의 숫자가 1 또는 3일 때 홀수가 된다.

(i) 일의 자리의 숫자가 1일 때

(□□□□□□1인 경우의 수)

$-$(0□□□□□1인 경우의 수)

$=\dfrac{6!}{3!}-\dfrac{5!}{2!}=120-60=60$

(ii) 일의 자리의 숫자가 3일 때

(□□□□□□3인 경우의 수)

$-$(0□□□□□3인 경우의 수)

$=\dfrac{6!}{3!2!}-\dfrac{5!}{2!2!}=60-30=30$

(i), (ii)에서 구하는 홀수의 개수는

$60+30=90$ **답 90**

16

a와 c, b와 e의 순서가 각각 정해져 있으므로 a, c를 모두 x로, b, e를 모두 y로 생각하여 7개의 문자 x, y, x, d, y, f, g를 일렬로 나열한 후 첫 번째 x는 a, 두 번째 x는 c, 첫 번째 y는 b, 두 번째 y는 e로 바꾸면 된다.

따라서 구하는 경우의 수는

$\dfrac{7!}{2!2!}=1260$ **답 1260**

17

(i) $f(-2)$, $f(-1)$, $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$가 모두 1인 함수 f의 개수는 1이다.

(ii) $f(-2)$, $f(-1)$, $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$ 중 -1이 2개, 1이 3개인 함수 f의 개수는

$\dfrac{5!}{2!3!}=10$

(iii) $f(-2)$, $f(-1)$, $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$ 중 -1이 4개, 1이 1개인 함수 f의 개수는

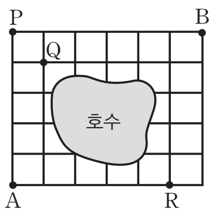
$\dfrac{5!}{4!1!}=5$

(i)~(iii)에서 구하는 함수의 개수는

$1+10+5=16$ **답 ③**

18

오른쪽 그림과 같이 세 지점 P, Q, R를 잡으면 A 지점에서 B 지점까지 최단 거리로 가는 경우는



A → P → B,

A → Q → B,

A → R → B이다.

(ⅰ) A → P → B로 가는 경우의 수: 1

(ⅱ) A → Q → B로 가는 경우의 수: $\frac{5!}{4!}\times\frac{6!}{5!}=30$

(ⅲ) A → R → B로 가는 경우의 수: $1\times\frac{6!}{5!}=6$

따라서 구하는 경우의 수는 $1+30+6=37$ **답 37**

19

정삼각형에 칠할 색을 정하는 경우의 수는

${}_8C_2=28$

나머지 6개의 색으로 등변사다리꼴을 칠하는 경우의 수는

${}_6C_3\times(3-1)!\times3!=240$

따라서 구하는 경우의 수는

$28\times240=6720$ **답 ③**

20

(ⅰ) a□□□ 꼴의 문자열의 개수는 ${}_4\Pi_3=4^3=64$

(ⅱ) ba□□ 꼴의 문자열의 개수는 ${}_4\Pi_2=4^2=16$

(ⅲ) bba□ 꼴의 문자열의 개수는 4

(ⅳ) bbb□ 꼴의 문자열의 개수는 4

(ⅰ)~(ⅳ)에서 $64+16+4+4=88$이고, 이 이후의 문자열은 $bbca$, $bbcb$, $bbcc$, $bbcd$, …이므로 90번째에 오는 문자열은 $bbcb$이다. **답 $bbcb$**

21

$f(1)+f(2)+f(3)=11$을 만족시키는 함수 f의 개수는 집합 Y의 원소인 1, 2, 3, 4, 5에서 중복을 허용하여 3개를 택하여 그 합이 11이 되도록 하는 경우의 수와 같으므로 합이 11인 경우를 순서쌍으로 나타내면

(1, 5, 5), (2, 4, 5), (3, 3, 5), (3, 4, 4)

이고 각각에 대하여 함수 f의 개수는 일렬로 나열하는 순열의 수와 같다.

(ⅰ) (1, 5, 5)를 나열하는 경우의 수: $\frac{3!}{2!}=3$

(ⅱ) (2, 4, 5)를 나열하는 경우의 수: $3!=6$

(ⅲ) (3, 3, 5)를 나열하는 경우의 수: $\frac{3!}{2!}=3$

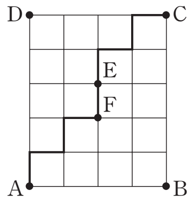
(ⅳ) (3, 4, 4)를 나열하는 경우의 수: $\frac{3!}{2!}=3$

따라서 구하는 함수 f의 개수는

$3+6+3+3=15$ **답 15**

22

갑과 을의 속력이 같으므로 갑과 을은 오른쪽 그림의 선분 EF의 중점에서 만나게 된다. 따라서 병은 선분 EF를 거쳐야 한다.

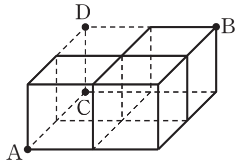


즉, 병은 B → F → E → D의 경로로 가야 하므로 구하는 경우의 수는

$\frac{4!}{2!2!}\times1\times\frac{4!}{2!2!}=36$ **답 36**

23

오른쪽 그림과 같이 지나갈 수 없는 모서리를 점선으로 연결하고 두 점 C, D를 잡자. 가로로 한 칸 가는 것을 a, 세로로 한 칸 가는 것을 b, 위로 한 칸 가는 것을 c라 하면 꼭짓점 A에서 꼭짓점 B까지 최단 거리로 가는 경우의 수는 a, a, b, b, c를 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로



$\frac{5!}{2!2!}=30$

(ⅰ) A → C → B로 가는 경우의 수: $1\times\frac{3!}{2!}=3$

(ⅱ) A → D → B로 가는 경우의 수: $\frac{3!}{2!}\times1=3$

그런데 (ⅰ), (ⅱ)에서 꼭짓점 C, D를 모두 지나는 경우, 즉 A → C → D → B로 가는 경우의 1가지가 중복되므로 구하는 경우의 수는

$30-(3+3-1)=25$ **답 25**

24

${}_4H_0+{}_4H_1+{}_4H_2+{}_4H_3+{}_4H_4$

$={}_3C_0+{}_4C_1+{}_5C_2+{}_6C_3+{}_7C_4$

$=1+4+10+20+35=70$ **답 70**

25

$_3H_n = {}_{n+2}C_n = {}_{n+2}C_2$

$= \dfrac{(n+2)(n+1)}{2} = 21$

이므로

$n^2+3n-40=0$, $(n-5)(n+8)=0$

$\therefore n=5$ ($\because n$은 자연수)　　　　　　**답 5**

26

사과 주스, 포도 주스, 감귤 주스를 각각 먼저 1병씩 선택하고 사과 주스, 포도 주스, 감귤 주스 중에서 중복을 허용하여 5병을 선택하면 된다.

따라서 구하는 경우의 수는

$_3H_5 = {}_7C_5 = {}_7C_2 = 21$　　　　　　**답 ③**

27

$(a+b+c+d)$에서 서로 다른 항의 개수는 4이다.

$(x+y+z)^4$을 전개할 때 생기는 서로 다른 항의 개수는 서로 다른 3개의 문자 x, y, z 중에서 중복을 허용하여 4개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$_3H_4 = {}_6C_4 = {}_6C_2 = 15$

따라서 구하는 항의 개수는

$4 \times 15 = 60$　　　　　　**답 60**

28

x, y, z가 양의 정수이므로 $x+y+z \geq 3$

$\therefore 3 \leq x+y+z < 6$

즉, $x+y+z=3$, $x+y+z=4$, $x+y+z=5$를 만족시키는 양의 정수해의 개수를 구한다.

이때 $x=x'+1$, $y=y'+1$, $z=z'+1$이라 하면

$x'+y'+z'=0$ 또는 $x'+y'+z'=1$ 또는

$x'+y'+z'=2$ (x', y', z'은 음이 아닌 정수)

(i) $x'+y'+z'=0$의 음이 아닌 정수해의 개수는

$_3H_0 = {}_2C_0 = 1$

(ii) $x'+y'+z'=1$의 음이 아닌 정수해의 개수는

$_3H_1 = {}_3C_1 = 3$

(iii) $x'+y'+z'=2$의 음이 아닌 정수해의 개수는

$_3H_2 = {}_4C_2 = 6$

(i)~(iii)에서 구하는 해의 개수는

$1+3+6=10$　　　　　　**답 10**

29

$_3H_r = {}_7C_2$에서 $_3H_r = {}_{r+2}C_r = {}_{r+2}C_2$이므로

$_{r+2}C_2 = {}_7C_2$　　$\therefore r=5$

$\therefore {}_5H_r = {}_5H_5 = {}_9C_5 = {}_9C_4 = 126$　　　　　　**답 126**

30

3명 중 햄버거를 하나도 받지 못하는 학생 1명을 택하는 경우의 수는

$_3C_1 = 3$

나머지 2명의 학생에게 햄버거를 1개씩 나누어 준 후 나머지 3개의 햄버거를 2명의 학생에게 나누어 주는 경우의 수는

$_2H_3 = {}_4C_3 = {}_4C_1 = 4$

따라서 구하는 경우의 수는

$3 \times 4 = 12$　　　　　　**답 12**

31

p는 포함하지 않고 r는 포함하는 항의 개수는 3개의 문자 q, r, s 중에서 중복을 허용하여 5개를 택하는 중복조합의 수와 같다.

따라서 구하는 항의 개수는

$_3H_5 = {}_7C_5 = {}_7C_2 = 21$　　　　　　**답 21**

32

$x+y+z=n$을 만족시키는 음이 아닌 정수해의 개수는 서로 다른 3개에서 중복을 허용하여 n개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$_3H_n = {}_{n+2}C_n = {}_{n+2}C_2$

$= \dfrac{(n+2)(n+1)}{2} = 105$

$n^2+3n-208=0$, $(n+16)(n-13)=0$

$\therefore n=13$ ($\because n$은 자연수)　　　　　　**답 13**

33

조건 ㈎를 만족시키는 경우의 수는 5개의 원소 2, 3, 4, 5, 6 중에서 중복을 허용하여 3개를 택한 후 정의역의 원소 1, 2, 3에 대응시키면 되므로

${}_5H_3={}_7C_3=35$

조건 ㈏를 만족시키는 경우의 수는 4개의 원소 1, 2, 3, 4 중에서 중복을 허용하여 3개를 택한 후 정의역의 원소 4, 5, 6에 대응시키면 되므로

${}_4H_3={}_6C_3=20$

따라서 구하는 함수 f의 개수는

$35\times20=700$ **답 700**

34

같은 종류의 사탕 5개를 3명의 아이에게 1개 이상씩 나누어 주는 경우의 수는 방정식 $x+y+z=2$의 음이 아닌 정수해의 개수와 같다.

이것은 서로 다른 3개에서 중복을 허용하여 2개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_3H_2={}_4C_2=6$

즉, 3명의 아이가 받는 사탕의 개수를 순서쌍으로 나타내면

$(1, 1, 3), (1, 3, 1), (3, 1, 1),$

$(1, 2, 2), (2, 1, 2), (2, 2, 1)$

각 경우에서 1개의 사탕을 받은 아이에게만 초콜릿 5개를 1개 이상씩 나누어 주는 경우의 수는 다음과 같다.

(i) $(1, 1, 3), (1, 3, 1), (3, 1, 1)$의 경우

먼저 1개의 사탕을 받은 2명의 아이에게 초콜릿 1개씩을 나누어 준 다음 나머지 3개의 초콜릿을 2명의 아이에게 나누어 주면 되므로 서로 다른 2개에서 중복을 허용하여 3개를 택하는 중복조합의 수와 같다.

$\therefore\ {}_2H_3={}_4C_3=4$

(ii) $(1, 2, 2), (2, 1, 2), (2, 2, 1)$의 경우

각각 1가지이다.

따라서 구하는 경우의 수는

$3\times4+3\times1=15$ **답 15**

35

조건 ㈏에서 네 자연수 x, y, z, w 중에서 3으로 나눈 나머지가 1인 수 2개를 선택하고, 3으로 나눈 나머지가 2인 수 2개를 선택하는 경우의 수는

${}_4C_2\times{}_2C_2=6$ ⋯⋯ ㉠

x, y는 3으로 나눈 나머지가 1인 수, z, w는 3으로 나눈 나머지가 2인 수라 하면

$x=3x'+1,\ y=3y'+1,\ z=3z'+2,\ w=3w'+2$

조건 ㈎에서 $x+y+z+w=12$이므로

$(3x'+1)+(3y'+1)+(3z'+2)+(3w'+2)=12$

$\therefore\ x'+y'+z'+w'=2$

(x', y', z', w'은 음이 아닌 정수)

즉, x', y', z', w'에서 중복을 허용하여 2개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_4H_2={}_5C_2=10$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡에서 구하는 모든 순서쌍 (x, y, z, w)의 개수는

$6\times10=60$ **답 60**

36

$\left(\frac{1}{x^2}-2x\right)^7$의 전개식의 일반항은

${}_7C_r\left(\frac{1}{x^2}\right)^{7-r}(-2x)^r={}_7C_r(-2)^r\frac{x^r}{x^{14-2r}}$

$\frac{1}{x^2}$항은 $14-2r-r=2$일 때이므로 $r=4$

따라서 $\frac{1}{x^2}$의 계수는

${}_7C_4(-2)^4=560$ **답 560**

37

$\left(ax^3+\frac{2}{x^2}\right)^4$의 전개식의 일반항은

${}_4C_r(ax^3)^{4-r}\left(\frac{2}{x^2}\right)^r={}_4C_r2^ra^{4-r}\frac{x^{12-3r}}{x^{2r}}$

x^2항은 $12-3r-2r=2$일 때이므로 $r=2$

따라서 x^2의 계수는 ${}_4C_2 2^2a^2=6$

$24a^2=6,\ a^2=\frac{1}{4}$

$\therefore\ a=\frac{1}{2}\ (\because\ a>0)$ **답 $\frac{1}{2}$**

38

$(x+2y)^5$의 전개식의 일반항은

${}_5C_r x^{5-r}(2y)^r={}_5C_r 2^r x^{5-r}y^r$ ⋯⋯ ㉠

이때 $(3x+y)(x+2y)^5=3x(x+2y)^5+y(x+2y)^5$

이므로 전개식에서 x^3y^3항은 $3x\times$(㉠의 x^2y^3항),

$y\times$(㉠의 x^3y^2항)일 때 나타난다.

(i) ㉠에서 x^2y^3항은 $5-r=2$, 즉 $r=3$일 때이므로

${}_5C_3 2^3x^2y^3=80x^2y^3$

(ii) ㉠에서 x^3y^2항은 $5-r=3$, 즉 $r=2$일 때이므로

${}_5C_2 2^2x^3y^2=40x^3y^2$

(i), (ii)에서 구하는 x^3y^3의 계수는

$3\times80+40=280$ 답 280

39

$(2x+1)^4$의 전개식의 일반항은

${}_4C_r(2x)^{4-r}1^r={}_4C_r 2^{4-r}x^{4-r}$ ⋯⋯ ㉠

$(x-3)^3$의 전개식의 일반항은

${}_3C_p x^{3-p}(-3)^p={}_3C_p(-3)^px^{3-p}$ ⋯⋯ ㉡

$(2x+1)^4(x-3)^3$ ⋯⋯ ㉢

㉢의 전개식에서 x^5항은 (㉠의 x^4항)$\times$(㉡의 x항),

(㉠의 x^3항)$\times$(㉡의 x^2항),

(㉠의 x^2항)$\times$(㉡의 x^3항)이므로 x^5의 계수는

${}_4C_0 2^4\times{}_3C_2(-3)^2+{}_4C_1 2^3\times{}_3C_1(-3)+{}_4C_2 2^2\times{}_3C_0$

$=432-288+24=168$ 답 168

40

${}_3C_3+{}_4C_3+{}_5C_3+{}_6C_3+\cdots+{}_{11}C_3$

$=({}_4C_4+{}_4C_3)+{}_5C_3+{}_6C_3+\cdots+{}_{11}C_3$ ($\because {}_3C_3={}_4C_4$)

$=({}_5C_4+{}_5C_3)+{}_6C_3+\cdots+{}_{11}C_3$ ($\because {}_4C_4+{}_4C_3={}_5C_4$)

$=({}_6C_4+{}_6C_3)+\cdots+{}_{11}C_3$ ($\because {}_5C_4+{}_5C_3={}_6C_4$)

⋮

$={}_{11}C_4+{}_{11}C_3$

$={}_{12}C_4={}_{12}C_8$ 답 ③

41

$(1+2x)^n$의 전개식의 일반항은

${}_nC_r(2x)^r={}_nC_r 2^rx^r$이고

$3\le n\le8$인 경우에만 x^3항이 나오므로

$(1+2x)^3$의 전개식에서 x^3의 계수는 ${}_3C_3 2^3$

$(1+2x)^4$의 전개식에서 x^3의 계수는 ${}_4C_3 2^3$

⋮

$(1+2x)^8$의 전개식에서 x^3의 계수는 ${}_8C_3 2^3$

따라서 x^3의 계수는

${}_3C_3 2^3+{}_4C_3 2^3+{}_5C_3 2^3+\cdots+{}_8C_3 2^3$

$=2^3({}_3C_3+{}_4C_3+{}_5C_3+\cdots+{}_8C_3)$

$=2^3\{({}_4C_4+{}_4C_3)+{}_5C_3+\cdots+{}_8C_3\}$ ($\because {}_3C_3={}_4C_4$)

$=2^3\{({}_5C_4+{}_5C_3)+\cdots+{}_8C_3\}$ ($\because {}_4C_4+{}_4C_3={}_5C_4$)

⋮

$=2^3({}_8C_4+{}_8C_3)$

$=2^3\times{}_9C_4=1008$ 답 1008

다른풀이 $(1+2x)+(1+2x)^2+(1+2x)^3$

$+\cdots+(1+2x)^8$ ⋯⋯ ㉠

㉠은 첫째항이 $1+2x$, 공비가 $1+2x$, 항의 개수가 8인 등비수열의 합이므로

$$\frac{(1+2x)\{(1+2x)^8-1\}}{(1+2x)-1}=\frac{(1+2x)^9-(1+2x)}{2x}$$ ⋯⋯ ㉡

㉠의 전개식에서 x^3의 계수는 ㉡의 $\dfrac{(1+2x)^9}{2x}$의 전개식에서 x^3의 계수와 같다.

이때 $(1+2x)^9$의 전개식의 일반항은 ${}_9C_r 2^rx^r$이므로

$\dfrac{(1+2x)^9}{2x}$의 전개식에서 일반항은 $\dfrac{{}_9C_r 2^rx^r}{2x}$

따라서 $r=4$일 때이므로 구하는 계수는

$\dfrac{{}_9C_4 2^4}{2}=1008$

42

${}_{19}C_k={}_{19}C_{19-k}$ $(k=0, 1, 2, \cdots, 19)$이므로

${}_{19}C_{10}+{}_{19}C_{11}+{}_{19}C_{12}+\cdots+{}_{19}C_{19}$

$={}_{19}C_9+{}_{19}C_8+{}_{19}C_7+\cdots+{}_{19}C_0$

이때 ${}_{19}C_0+{}_{19}C_1+{}_{19}C_2+\cdots+{}_{19}C_{19}=2^{19}$이므로

${}_{19}C_{10}+{}_{19}C_{11}+{}_{19}C_{12}+\cdots+{}_{19}C_{19}=\dfrac{1}{2}\times2^{19}=2^{18}$

답 2^{18}

43

${}_{20}C_0+{}_{20}C_2+{}_{20}C_4+\cdots+{}_{20}C_{20}=2^{20-1}=2^{19}$이므로

${}_{20}C_2+{}_{20}C_4+{}_{20}C_6+\cdots+{}_{20}C_{18}$

$=2^{19}-{}_{20}C_0-{}_{20}C_{20}=2^{19}-2$ **답 $2^{19}-2$**

44

$(x+3)^n$의 전개식의 일반항은 ${}_nC_r x^{n-r}3^r={}_nC_r 3^r x^{n-r}$

상수항은 $r=n$일 때이므로

${}_nC_n 3^n=81$, $3^n=3^4$ $\quad\therefore n=4$

즉, $(x+3)^4$의 전개식의 일반항은 ${}_4C_r 3^r x^{4-r}$

따라서 x항은 $r=3$일 때이므로

x의 계수는 ${}_4C_3 3^3=108$ **답 ①**

45

$(a+x)^5$의 전개식의 일반항은 ${}_5C_r a^{5-r}x^r$ …… ㉠

이때 $(1+2x)(a+x)^5=(a+x)^5+2x(a+x)^5$이므로 전개식에서 x^4항은 (㉠의 x^4항), $2x\times$(㉠의 x^3항)일 때 나타난다.

(i) ㉠에서 x^4항은 $r=4$일 때이므로

${}_5C_4 ax^4=5ax^4$

(ii) ㉠에서 x^3항은 $r=3$일 때이므로

${}_5C_3 a^2x^3=10a^2x^3$

(i), (ii)에서 x^4항은

$5ax^4+2x\times10a^2x^3=(5a+20a^2)x^4$

이때 x^4의 계수가 195이므로

$5a+20a^2=195$

$4a^2+a-39=0$, $(4a+13)(a-3)=0$

$\therefore a=3$ ($\because a>0$)

즉, $(1+2x)(3+x)^5$의 전개식에서 x^2항은

(㉠의 x^2항), $2x\times$(㉠의 x항)일 때 나타난다.

(i) ㉠에서 x^2항은 $r=2$일 때이므로

${}_5C_2 3^3x^2=270x^2$

(ii) ㉠에서 x항은 $r=1$일 때이므로

${}_5C_1 3^4x=405x$

(i), (ii)에서 구하는 x^2의 계수는

$270+2\times405=1080$ **답 1080**

46

$\left(x^2+\dfrac{1}{x}\right)^6$의 전개식의 일반항은

${}_6C_r(x^2)^{6-r}\left(\dfrac{1}{x}\right)^r={}_6C_r\dfrac{x^{12-2r}}{x^r}$ …… ㉠

$(x+1)^4$의 전개식의 일반항은

${}_4C_p x^{4-p}1^p={}_4C_p x^{4-p}$ …… ㉡

$\left(x^2+\dfrac{1}{x}\right)^6(x+1)^4$ …… ㉢

㉢의 전개식에서 x^3항은 (㉠의 x^3항)$\times$(㉡의 상수항), (㉠의 x^2항)$\times$(㉡의 x항), (㉠의 x항)$\times$(㉡의 x^2항), (㉠의 상수항)$\times$(㉡의 x^3항),

$\left(㉠의\ \dfrac{1}{x}항\right)\times$(㉡의 x^4항)일 때 나타난다.

그런데 ㉠에서 x^2항은 $r=\dfrac{10}{3}$, x항은 $r=\dfrac{11}{3}$,

$\dfrac{1}{x}$항은 $r=\dfrac{13}{3}$일 때이고 $0\le r\le6$인 정수가 아니므로 x^2항, x항, $\dfrac{1}{x}$항은 존재하지 않는다.

따라서 ㉢의 전개식에서 x^3항은

(㉠의 x^3항)$\times$(㉡의 상수항)

$+$(㉠의 상수항)$\times$(㉡의 x^3항)

이므로 x^3의 계수는

${}_6C_3\times{}_4C_4+{}_6C_4\times{}_4C_1=20+60=80$ **답 80**

47

$(1+x)^n={}_nC_0+{}_nC_1x+{}_nC_2x^2+\cdots+{}_nC_nx^n$이므로

$x=4$를 대입하면

$(1+4)^n={}_nC_0+{}_nC_1 4+{}_nC_2 4^2+\cdots+{}_nC_n 4^n$

따라서 $5^n=5^{20}$에서 $n=20$ **답 20**

48

$19^{19}=(20-1)^{19}$

$={}_{19}C_0 20^{19}+{}_{19}C_1 20^{18}(-1)+{}_{19}C_2 20^{17}(-1)^2$

$+\cdots+{}_{19}C_{18}20(-1)^{18}+{}_{19}C_{19}(-1)^{19}$

이때

${}_{19}C_0 20^{19}+{}_{19}C_1 20^{18}(-1)+\cdots+{}_{19}C_{17}20^2(-1)^{17}$

은 400으로 나누어떨어진다.

연습문제 실력UP

따라서 19^{19}을 400으로 나누었을 때의 나머지는 ${}_{19}C_{18}20(-1)^{18}+{}_{19}C_{19}(-1)^{19}=379$를 400으로 나누었을 때의 나머지와 같으므로 구하는 나머지는 379이다.

답 379

49

$(1+x)^n$의 전개식의 일반항은 ${}_nC_r x^r$이므로 x^8의 계수는 ${}_nC_8$, x^9의 계수는 ${}_nC_9$, x^{10}의 계수는 ${}_nC_{10}$이다.

즉, $a_8={}_nC_8$, $a_9={}_nC_9$, $a_{10}={}_nC_{10}$이므로

$a_9-a_8=a_{10}-a_9$에서 ${}_nC_9-{}_nC_8={}_nC_{10}-{}_nC_9$

$2\times{}_nC_9={}_nC_8+{}_nC_{10}$

$$2\times\frac{n!}{9!(n-9)!}=\frac{n!}{8!(n-8)!}+\frac{n!}{10!(n-10)!}$$

양변에 $\dfrac{10!(n-8)!}{n!}$을 곱하면

$2\times10(n-8)=10\times9+(n-8)(n-9)$

$20n-160=90+n^2-17n+72$

$n^2-37n+322=0$, $(n-14)(n-23)=0$

$\therefore n=14$ 또는 $n=23$

답 14 또는 23

50

원소가 1개인 부분집합의 개수는 ${}_{20}C_1$,

원소가 3개인 부분집합의 개수는 ${}_{20}C_3$,

원소가 5개인 부분집합의 개수는 ${}_{20}C_5$,

⋮

원소가 17개인 부분집합의 개수는 ${}_{20}C_{17}$,

원소가 19개인 부분집합의 개수는 ${}_{20}C_{19}$

이므로 원소의 개수가 홀수인 부분집합의 개수는

${}_{20}C_1+{}_{20}C_3+{}_{20}C_5+\cdots+{}_{20}C_{17}+{}_{20}C_{19}=2^{20-1}=2^{19}$

답 2^{19}

51

$$\begin{aligned}11^{11}&=(1+10)^{11}\\&={}_{11}C_0+{}_{11}C_1 10+{}_{11}C_2 10^2+{}_{11}C_3 10^3\\&\qquad+\cdots+{}_{11}C_{11}10^{11}\\&=1+11\times10+55\times100\\&\qquad+10^3({}_{11}C_3+{}_{11}C_4 10+\cdots+{}_{11}C_{11}10^8)\\&=5611+\underbrace{10^3\times(\text{자연수})}_{㉠}\end{aligned}$$

이때 ㉠은 1000의 배수이므로 11^{11}의 일의 자리, 십의 자리, 백의 자리의 숫자는 5611에서 각각 1, 1, 6이다.

따라서 $a=1$, $b=1$, $c=6$이므로

$a+b+c=8$

답 8

52

$(1+x)^{10}(1+x)^{10}=(1+x)^{20}$ …… ㉠

㉠의 좌변을 전개하였을 때 x^{10}의 계수는

${}_{10}C_0\times{}_{10}C_{10}+{}_{10}C_1\times{}_{10}C_9+\cdots+{}_{10}C_{10}\times{}_{10}C_0$

$=({}_{10}C_0)^2+({}_{10}C_1)^2+\cdots+({}_{10}C_{10})^2$

㉠의 우변을 전개하였을 때 x^{10}의 계수는 ${}_{20}C_{10}$

따라서 구하는 자연수 n의 값은 20이다.

답 20

53

$(1+x)^n={}_nC_0+{}_nC_1x+{}_nC_2x^2+\cdots+{}_nC_nx^n$이고

$${}_{10}C_{10}\times{}_{11}C_8+{}_{10}C_9\times{}_{11}C_7+{}_{10}C_8\times{}_{11}C_6$$
$$+\cdots+{}_{10}C_2\times{}_{11}C_0$$
$$={}_{10}C_0\times{}_{11}C_8+{}_{10}C_1\times{}_{11}C_7+{}_{10}C_2\times{}_{11}C_6$$
$$+\cdots+{}_{10}C_8\times{}_{11}C_0\ (\because {}_nC_r={}_nC_{n-r})$$

이므로 주어진 식은 $(1+x)^{10}(1+x)^{11}$,

즉 $(1+x)^{21}$의 전개식에서 x^8의 계수와 같다.

$\therefore$ (주어진 식)$={}_{21}C_8$

답 ②

54

동주는 알사탕 k ($k=0$, 1, 2, 3, 4, 5)개와 박하사탕 $(5-k)$개를 진서에게 주면 된다.

이때 동주가 알사탕 k개를 택하는 경우의 수는 ${}_5C_k$이고, 박하사탕 $(5-k)$개를 택하는 경우의 수는 1이므로 구하는 경우의 수는

${}_5C_0+{}_5C_1+{}_5C_2+{}_5C_3+{}_5C_4+{}_5C_5=2^5=32$

답 32

Ⅱ. 확률

55

사건 A와 서로 배반인 사건은 사건 A^C의 부분집합이고, 사건 B와 서로 배반인 사건은 사건 B^C의 부분집합이므로 사건 C는 $A^C \cap B^C$의 부분집합이다.
이때 $A=\{1, 2, 5, 10\}$에서 $A^C=\{3, 4, 6, 7, 8, 9\}$
이고 $B=\{1, 3, 5, 7, 9\}$에서 $B^C=\{2, 4, 6, 8, 10\}$
이므로 $A^C \cap B^C=\{4, 6, 8\}$
따라서 사건 C의 개수는
$2^3=8$ **답** 8

56

표본공간을 S라 하면
$n(S)=6\times6=36$
(홀수)×(홀수)=(홀수)이고, 주사위의 눈의 수 중 홀수는 1, 3, 5의 3개이므로 나오는 두 눈의 수의 곱이 홀수인 사건을 A라 하면
$n(A)=3\times3=9$
따라서 구하는 확률은
$\mathrm{P}(A)=\dfrac{n(A)}{n(S)}=\dfrac{9}{36}=\dfrac{1}{4}$ **답** $\dfrac{1}{4}$

57

집합 A의 부분집합의 개수는
$2^6=64$
원소 b는 포함하고 원소 f는 포함하지 않는 부분집합의 개수는
$2^{6-1-1}=2^4=16$
따라서 구하는 확률은
$\dfrac{16}{64}=\dfrac{1}{4}$ **답** $\dfrac{1}{4}$

58

6명이 일렬로 앉는 경우의 수는 $6!$
각 부부를 한 사람으로 생각하여 3명이 일렬로 앉는 경우의 수는 $3!$
각 부부가 서로 자리를 바꾸는 경우의 수는
$2!\times2!\times2!$
즉, 부부끼리 서로 이웃하여 앉는 경우의 수는
$3!\times2!\times2!\times2!$
따라서 구하는 확률은
$\dfrac{3!\times2!\times2!\times2!}{6!}=\dfrac{1}{15}$ **답** ①

59

만들 수 있는 네 자리 정수의 개수는
${}_7\mathrm{P}_4=840$
이때 4200보다 큰 정수의 개수는 다음과 같다.
(i) 42□□, 43□□, 45□□, 46□□, 47□□ 꼴인 정수의 개수는
$5\times{}_5\mathrm{P}_2=100$
(ii) 5□□□, 6□□□, 7□□□ 꼴인 정수의 개수는
$3\times{}_6\mathrm{P}_3=360$
(i), (ii)에서 4200보다 큰 정수의 개수는
$100+360=460$
따라서 구하는 확률은
$\dfrac{460}{840}=\dfrac{23}{42}$ **답** $\dfrac{23}{42}$

60

7명이 원탁에 둘러앉는 경우의 수는
$(7-1)!=6!=720$
남학생 4명이 원탁에 둘러앉는 경우의 수는
$(4-1)!=3!=6$
남학생 사이사이의 4개의 자리에 여학생 3명이 앉는 경우의 수는
${}_4\mathrm{P}_3=24$
즉, 여학생끼리 이웃하지 않게 앉는 경우의 수는
$6\times24=144$
따라서 구하는 확률은
$\dfrac{144}{720}=\dfrac{1}{5}$ **답** $\dfrac{1}{5}$

61

X에서 X로의 함수의 개수는

${}_4\Pi_4=4^4=256$

함숫값의 합이 7인 경우는 다음과 같다.

(ⅰ) 함숫값이 $(1,\ 1,\ 1,\ 4)$인 함수의 개수는 $\dfrac{4!}{3!}=4$

(ⅱ) 함숫값이 $(1,\ 1,\ 2,\ 3)$인 함수의 개수는 $\dfrac{4!}{2!}=12$

(ⅲ) 함숫값이 $(1,\ 2,\ 2,\ 2)$인 함수의 개수는 $\dfrac{4!}{3!}=4$

(ⅰ)~(ⅲ)에서 함숫값의 합이 7인 함수의 개수는

$4+12+4=20$

따라서 구하는 확률은 $\dfrac{20}{256}=\dfrac{5}{64}$ 답 $\dfrac{5}{64}$

62

6개의 공 중에서 3개의 공을 꺼내는 경우의 수는

${}_6C_3=20$

이때 공의 색깔이 모두 다르려면 흰 공 1개, 노란 공 1개, 파란 공 1개를 꺼내야 하므로 이 경우의 수는

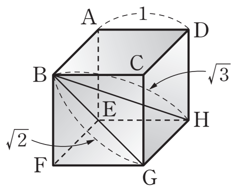
${}_2C_1\times{}_2C_1\times{}_2C_1=8$

따라서 구하는 확률은 $\dfrac{8}{20}=\dfrac{2}{5}$ 답 ①

63

8개의 꼭짓점 중에서 서로 다른 2개의 꼭짓점을 택하는 경우의 수는

${}_8C_2=28$



정육면체의 각 모서리의 길이는 1, 한 면에서의 대각선의 길이는 $\sqrt{2}$, 정육면체의 대각선의 길이는 $\sqrt{3}$이므로 선분의 길이가 $\sqrt{2}$ 이상인 경우는 다음과 같다.

(ⅰ) 선분의 길이가 $\sqrt{2}$인 경우

각 면의 대각선의 개수와 같으므로

$2\times6=12$(가지)

(ⅱ) 선분의 길이가 $\sqrt{3}$인 경우

정육면체의 대각선의 개수와 같으므로

$\overline{AG}$, $\overline{BH}$, $\overline{CE}$, $\overline{DF}$의 4가지

(ⅰ), (ⅱ)에서 선분의 길이가 $\sqrt{2}$ 이상인 경우의 수는

$12+4=16$

따라서 구하는 확률은

$\dfrac{16}{28}=\dfrac{4}{7}$ 답 $\dfrac{4}{7}$

64

표본공간을 S라 하면

$n(S)=6\times6=36$

이차방정식 $x^2+2ax+b=0$의 판별식을 D라 할 때, 실근을 가지므로

$\dfrac{D}{4}=a^2-b\geq0$ $\qquad\therefore a^2\geq b$

(ⅰ) $a=1$일 때, $b=1$의 1가지

(ⅱ) $a=2$일 때, $b=1,\ 2,\ 3,\ 4$의 4가지

(ⅲ) $a=3,\ 4,\ 5,\ 6$일 때,

b의 값은 각각 $1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6$이므로

$4\times6=24$(가지)

(ⅰ)~(ⅲ)에서 주어진 이차방정식이 실근을 갖는 사건을 A라 하면

$n(A)=1+4+24=29$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A)=\dfrac{n(A)}{n(S)}=\dfrac{29}{36}$ 답 $\dfrac{29}{36}$

65

네 사람을 일렬로 세우는 경우의 수는

$4!=24$

앞에서 두 번째에 서 있는 사람이 자신과 이웃한 두 사람보다 나이가 적으므로 두 번째에는 나이가 가장 적은 사람 또는 나이가 두 번째로 적은 사람이 설 수 있다.

(ⅰ) 나이가 가장 적은 사람이 두 번째에 서는 경우

나머지 3명을 남은 자리에 한 명씩 세우면 되므로 경우의 수는 $3!=6$

(ⅱ) 나이가 두 번째로 적은 사람이 두 번째에 서는 경우

나이가 가장 적은 사람을 네 번째에 세우고 나머지 2명을 첫 번째 자리, 세 번째 자리에 한 명씩 세우면 되므로 경우의 수는 $2!=2$

(ⅰ), (ⅱ)에서 앞에서 두 번째에 서 있는 사람이 자신과 이웃한 두 사람보다 나이가 적도록 세우는 경우의 수는

$6+2=8$

따라서 구하는 확률은 $\frac{8}{24}=\frac{1}{3}$ 답 $\frac{1}{3}$

66

1, 2, 3의 세 개의 숫자 중에서 중복을 허용하여 만들 수 있는 세 자리 정수의 개수는

${}_3\Pi_3=3^3=27$

이때 3의 배수가 되려면 각 자리의 숫자의 합이 3의 배수가 되어야 한다.

(ⅰ) 각 자리의 숫자의 합이 3인 경우

111의 1개

(ⅱ) 각 자리의 숫자의 합이 6인 경우

123, 132, 213, 231, 312, 321, 222의 7개

(ⅲ) 각 자리의 숫자의 합이 9인 경우

333의 1개

(ⅰ)~(ⅲ)에서 3의 배수인 세 자리 정수의 개수는

$1+7+1=9$

따라서 구하는 확률은 $\frac{9}{27}=\frac{1}{3}$ 답 $\frac{1}{3}$

67

7개의 공을 한 개씩 모두 꺼내는 경우의 수는 빨간 공 4개와 흰 공 3개를 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로

$\frac{7!}{4!3!}=35$

5번째에서 흰 공을 모두 꺼내는 경우의 수는 빨간 공 2개와 흰 공 2개를 일렬로 나열하고, 5번째에 흰 공을 놓는 경우의 수와 같으므로

$\frac{4!}{2!2!}=6$

따라서 구하는 확률은 $\frac{6}{35}$이다. 답 $\frac{6}{35}$

68

8개의 점 중에서 3개의 점을 택하는 경우의 수는

${}_8C_3=56$

이 중에서 삼각형이 만들어지는 경우는 다음과 같다.

(ⅰ) 직선 l에서 2개의 점을 택하고 직선 m에서 1개의 점을 택하는 경우

${}_3C_2\times{}_5C_1=15$

(ⅱ) 직선 l에서 1개의 점을 택하고 직선 m에서 2개의 점을 택하는 경우

${}_3C_1\times{}_5C_2=30$

(ⅰ), (ⅱ)에서 삼각형이 만들어지는 경우의 수는

$15+30=45$

따라서 구하는 확률은 $\frac{45}{56}$이다. 답 $\frac{45}{56}$

69

A에서 B로의 함수 f의 개수는

${}_5\Pi_3=5^3=125$

$x_1<x_2$이면 $f(x_1)\le f(x_2)$를 만족시키는 함수 f의 개수는 집합 B의 원소 5개 중에서 중복을 허용하여 원소 3개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_5H_3={}_{5+3-1}C_3={}_7C_3=35$

따라서 구하는 확률은

$\frac{35}{125}=\frac{7}{25}$ 답 $\frac{7}{25}$

70

ㄱ. 임의의 사건 A에 대하여 $0\le P(A)\le 1$ (참)

ㄴ. $P(S)=1$, $P(\varnothing)=0$이므로

$P(S)-P(\varnothing)=1-0=1$ (참)

ㄷ. $A\cup A^C=S$이므로 $P(A\cup A^C)=P(S)=1$ (참)

ㄹ. $P(S)=1$, $0\le P(A)\le 1$, $0\le P(B)\le 1$이므로

$1\le P(S)+P(A)+P(B)\le 3$ (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다. 답 ④

71

6명의 학생이 6개의 좌석에 앉는 경우의 수는

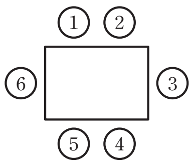
$6!=720$

같은 나라의 두 학생끼리 좌석 번호의 차가 1 또는 10이 되는 경우를 순서쌍으로 나타내면 다음과 같다.

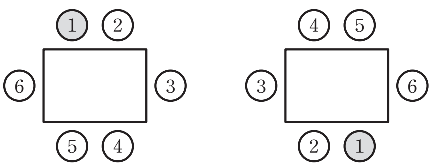
(i) (11, 12), (13, 23), (21, 22)
(ii) (11, 21), (12, 13), (22, 23)
(iii) (11, 21), (12, 22), (13, 23)
(i)에서 각 순서쌍에 세 나라를 정하는 경우의 수는 $3!$이고, 같은 나라의 학생 2명끼리 서로 자리를 바꾸는 경우의 수는 $2!\times2!\times2!$이므로 (i)과 같이 앉는 경우의 수는
$3!\times2!\times2!\times2!=48$
같은 방법으로 (ii), (iii)과 같이 앉는 경우의 수도 각각
$3!\times2!\times2!\times2!=48$
따라서 구하는 확률은
$\frac{48\times3}{720}=\frac{144}{720}=\frac{1}{5}$ 답 ④

72

6명의 학생이 주어진 직사각형 모양의 탁자에 둘러앉는 경우의 수는 6명을 원형으로 배열하는 한 가지 방법에 대하여 서로 다른 경우가 3가지씩 존재하므로
$(6-1)!\times3=360$
남학생과 여학생이 바로 앞에 마주 보고 앉으려면 오른쪽 그림에서 남학생은 ①, ⑤ 중 하나, ②, ④ 중 하나, ③, ⑥ 중 하나에 앉고 나머지의 자리에 여학생이 앉으면 된다.



이때 다음 그림과 같이 회전하여 일치하는 경우가 2가지씩 존재한다.



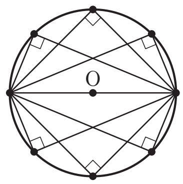
즉, 남학생과 여학생이 바로 앞에 마주 보고 앉는 경우의 수는
${}_2C_1\times{}_2C_1\times{}_2C_1\times3!\times3!\times\frac{1}{2}=144$
따라서 구하는 확률은
$\frac{144}{360}=\frac{2}{5}$ 답 $\frac{2}{5}$

73

A 지점에서 C 지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수는
$\frac{11!}{6!5!}=462$
A 지점에서 B 지점을 지나 C 지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수는
$\frac{5!}{2!3!}\times\frac{6!}{4!2!}=150$
따라서 구하는 확률은
$\frac{150}{462}=\frac{25}{77}$ 답 $\frac{25}{77}$

74

8개의 점 중에서 3개의 점을 택하는 경우의 수는
${}_8C_3=56$
오른쪽 그림과 같이 원의 중심 O를 지나는 한 개의 지름에 대하여 만들 수 있는 직각삼각형이 6개이고 서로 다른 지름이 4개이므로 만들 수 있는 직각삼각형의 개수는 $6\times4=24$



따라서 구하는 확률은
$\frac{24}{56}=\frac{3}{7}$ 답 $\frac{3}{7}$

75

$f(1)=1$인 사건을 A, $f(2)=4$인 사건을 B라 하면
$\mathrm{P}(A)=\frac{{}_4\Pi_2}{{}_4\Pi_3}=\frac{4^2}{4^3}=\frac{1}{4}$, $\mathrm{P}(B)=\frac{{}_4\Pi_2}{{}_4\Pi_3}=\frac{4^2}{4^3}=\frac{1}{4}$,
$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{{}_4\Pi_1}{{}_4\Pi_3}=\frac{4}{4^3}=\frac{1}{16}$
따라서 구하는 확률은
$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$
$=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{16}=\frac{7}{16}$ 답 $\frac{7}{16}$

76

2명 모두 남학생인 사건을 A, 2명 모두 여학생인 사건을 B라 하면
$\mathrm{P}(A)=\frac{{}_6C_2}{{}_{10}C_2}=\frac{1}{3}$, $\mathrm{P}(B)=\frac{{}_4C_2}{{}_{10}C_2}=\frac{2}{15}$

이때 두 사건 A, B는 서로 배반사건이므로 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)$

$=\frac{1}{3}+\frac{2}{15}=\frac{7}{15}$ 답 $\frac{7}{15}$

77

$\mathrm{P}(B^C)=1-\mathrm{P}(B)=\frac{2}{3}$이므로 $\mathrm{P}(B)=\frac{1}{3}$

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$에서

$\frac{1}{2}=\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\mathrm{P}(A\cap B)$

$\therefore \mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{12}$ 답 $\frac{1}{12}$

78

A 또는 B가 뽑히는 사건을 A라 하면 A, B 모두 뽑히지 않는 사건은 A^C이므로

$\mathrm{P}(A^C)=\frac{{}_6\mathrm{C}_5}{{}_8\mathrm{C}_5}=\frac{3}{28}$

$\therefore \mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)=1-\frac{3}{28}=\frac{25}{28}$ 답 ⑤

다른풀이 A가 뽑히는 사건을 A, B가 뽑히는 사건을 B라 하면

$\mathrm{P}(A)=\frac{{}_7\mathrm{C}_4}{{}_8\mathrm{C}_5}=\frac{5}{8}$, $\mathrm{P}(B)=\frac{{}_7\mathrm{C}_4}{{}_8\mathrm{C}_5}=\frac{5}{8}$,

$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{{}_6\mathrm{C}_3}{{}_8\mathrm{C}_5}=\frac{5}{14}$

$\therefore \mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$

$=\frac{5}{8}+\frac{5}{8}-\frac{5}{14}=\frac{25}{28}$

79

W, O, R, L, D, C, U, P에서 모음은 O, U이다.
적어도 한 개의 모음이 포함되는 사건을 A라 하면 모음이 한 개도 포함되지 않는 사건은 A^C이므로

$\mathrm{P}(A^C)=\frac{{}_6\mathrm{C}_2}{{}_8\mathrm{C}_2}=\frac{15}{28}$

$\therefore \mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)=1-\frac{15}{28}=\frac{13}{28}$ 답 $\frac{13}{28}$

80

남녀를 적어도 한 명씩 뽑는 사건을 A라 하면
모두 남자 또는 모두 여자를 뽑는 사건은 A^C이다.

(i) 4명 모두 남자를 뽑을 확률은

$\frac{{}_6\mathrm{C}_4}{{}_{11}\mathrm{C}_4}=\frac{1}{22}$

(ii) 4명 모두 여자를 뽑을 확률은

$\frac{{}_5\mathrm{C}_4}{{}_{11}\mathrm{C}_4}=\frac{1}{66}$

(i), (ii)에서 $\mathrm{P}(A^C)=\frac{1}{22}+\frac{1}{66}=\frac{2}{33}$

$\therefore \mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)=1-\frac{2}{33}=\frac{31}{33}$ 답 $\frac{31}{33}$

81

0은 백의 자리에 올 수 없으므로 6개의 숫자로 만들 수 있는 세 자리 정수의 개수는

$5\times5\times4=100$

이때 일의 자리의 숫자가 0, 2, 4인 사건을 각각 A, B, C라 하면

$\mathrm{P}(A)=\frac{{}_5\mathrm{P}_2}{100}=\frac{1}{5}$, $\mathrm{P}(B)=\frac{4\times4}{100}=\frac{4}{25}$,

$\mathrm{P}(C)=\frac{4\times4}{100}=\frac{4}{25}$

이때 세 사건 A, B, C는 모두 서로 배반사건이므로 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A\cup B\cup C)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)+\mathrm{P}(C)$

$=\frac{1}{5}+\frac{4}{25}+\frac{4}{25}=\frac{13}{25}$ 답 $\frac{13}{25}$

82

한 개의 주사위를 두 번 던질 때 모든 경우의 수는

$6\times6=36$

두 눈의 수의 합은 2, 3, 4, ⋯, 12 중 하나이고 이 중에서 12와 서로소인 것은 5, 7, 11이다.
두 눈의 수의 합이 5, 7, 11인 사건을 각각 A, B, C라 하면

$A=\{(1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1)\}$

$B=\{(1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (6, 1)\}$

$C=\{(5, 6), (6, 5)\}$

$\therefore \mathrm{P}(A)=\frac{4}{36}=\frac{1}{9}$, $\mathrm{P}(B)=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$,

$\mathrm{P}(C)=\frac{2}{36}=\frac{1}{18}$

이때 세 사건 A, B, C는 모두 서로 배반사건이므로 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(A\cup B\cup C)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)+\mathrm{P}(C)$$
$$=\frac{1}{9}+\frac{1}{6}+\frac{1}{18}=\frac{1}{3}$$

답 $\mathbf{\frac{1}{3}}$

83

두 사건 A, B가 서로 배반사건이므로

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)$에서

$$\mathrm{P}(B)=\mathrm{P}(A\cup B)-\mathrm{P}(A)$$
$$=\frac{2}{3}-\mathrm{P}(A)$$

이때 $\frac{1}{5}\le\mathrm{P}(A)\le\frac{3}{5}$에서

$$-\frac{3}{5}\le-\mathrm{P}(A)\le-\frac{1}{5}$$
$$\frac{1}{15}\le\frac{2}{3}-\mathrm{P}(A)\le\frac{7}{15}$$
$$\therefore\ \frac{1}{15}\le\mathrm{P}(B)\le\frac{7}{15}$$

따라서 $\mathrm{P}(B)$의 최솟값은 $\frac{1}{15}$이다.

답 $\mathbf{\frac{1}{15}}$

84

집합 $S=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$의 부분집합 중에서 임의로 하나의 부분집합을 택할 때, 원소의 합이 4 이상인 사건을 A라 하면

원소의 합이 3 이하인 사건, 즉 원소의 합이 0 또는 1 또는 2 또는 3인 사건은 A^C이다.

집합 S의 부분집합의 개수는 2^6

(i) 원소의 합이 0인 경우는 $\varnothing$이므로

확률은 $\frac{1}{2^6}=\frac{1}{64}$

(ii) 원소의 합이 1인 경우는 $\{1\}$이므로

확률은 $\frac{1}{2^6}=\frac{1}{64}$

(iii) 원소의 합이 2인 경우는 $\{2\}$이므로

확률은 $\frac{1}{2^6}=\frac{1}{64}$

(iv) 원소의 합이 3인 경우는 $\{1,\ 2\}$, $\{3\}$이므로

확률은 $\frac{2}{2^6}=\frac{1}{32}$

(i)~(iv)에서

$$\mathrm{P}(A^C)=\frac{1}{64}+\frac{1}{64}+\frac{1}{64}+\frac{1}{32}=\frac{5}{64}$$
$$\therefore\ \mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)$$
$$=1-\frac{5}{64}=\frac{59}{64}$$

답 $\mathbf{\frac{59}{64}}$

85

$6x^2-5ax+a^2=0$에서 $(2x-a)(3x-a)=0$

$\therefore\ x=\frac{a}{2}$ 또는 $x=\frac{a}{3}$

주어진 이차방정식이 정수해를 가지려면 a는 2의 배수이거나 3의 배수이어야 한다.

a가 2의 배수인 사건을 A, 3의 배수인 사건을 B라 하면 $A\cap B$는 2와 3의 최소공배수인 6의 배수인 사건이므로

$$\mathrm{P}(A)=\frac{25}{50}=\frac{1}{2},\ \mathrm{P}(B)=\frac{16}{50}=\frac{8}{25},$$
$$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{8}{50}=\frac{4}{25}$$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$$
$$=\frac{1}{2}+\frac{8}{25}-\frac{4}{25}=\frac{33}{50}$$

답 $\mathbf{\frac{33}{50}}$

86

방정식 $x+y+z=10$을 만족시키는 음이 아닌 정수 x, y, z의 모든 순서쌍 $(x,\ y,\ z)$의 개수는

${}_3\mathrm{H}_{10}={}_{3+10-1}\mathrm{C}_{10}={}_{12}\mathrm{C}_{10}=66$

이때 $(x-y)(y-z)(z-x)=0$에서 $x=y=z$를 만족시키는 음이 아닌 정수 x, y, z는 존재하지 않으므로 x, y, z 중에서 오직 두 개만 서로 같아야 한다.

$x=y$를 만족시키는 순서쌍 $(x,\ y,\ z)$는

$(0,\ 0,\ 10)$, $(1,\ 1,\ 8)$, $(2,\ 2,\ 6)$, $(3,\ 3,\ 4)$, $(4,\ 4,\ 2)$, $(5,\ 5,\ 0)$

의 6개이므로 $(x-y)(y-z)(z-x)=0$을 만족시키는 순서쌍의 개수는

${}_3\mathrm{C}_2\times6=3\times6=18$

즉, $(x-y)(y-z)(z-x)=0$을 만족시킬 확률은

$\frac{18}{66}=\frac{3}{11}$

이므로 $(x-y)(y-z)(z-x)\neq 0$을 만족시킬 확률은 $1-\frac{3}{11}=\frac{8}{11}$

따라서 $p=11$, $q=8$이므로

$p+q=11+8=19$ **답 19**

87

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$에서

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A\cap B)&=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cup B)\\&=0.3+0.2-0.4=0.1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A\cap B^C)&=\mathrm{P}(A)-\mathrm{P}(A\cap B)\\&=0.3-0.1=0.2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore \mathrm{P}(A|B^C)&=\frac{\mathrm{P}(A\cap B^C)}{\mathrm{P}(B^C)}\\&=\frac{\mathrm{P}(A\cap B^C)}{1-\mathrm{P}(B)}\\&=\frac{0.2}{1-0.2}\\&=\frac{0.2}{0.8}=0.25\end{aligned}$$

답 0.25

88

A가 위원으로 뽑히는 사건을 A, B가 위원으로 뽑히는 사건을 B라 하면

A가 위원으로 뽑힐 확률은

$\mathrm{P}(A)=\frac{{}_5\mathrm{C}_2}{{}_6\mathrm{C}_3}=\frac{1}{2}$

A, B가 모두 위원으로 뽑힐 확률은

$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{{}_4\mathrm{C}_1}{{}_6\mathrm{C}_3}=\frac{1}{5}$

따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(B|A)&=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}\\&=\frac{\frac{1}{5}}{\frac{1}{2}}=\frac{2}{5}\end{aligned}$$

답 $\frac{2}{5}$

89

첫 번째에 3의 배수가 적힌 카드를 뒤집는 사건을 A, 두 번째에 3의 배수가 적힌 카드를 뒤집는 사건을 B라 하면

첫 번째에 3의 배수가 적힌 카드를 뒤집을 확률은

$\mathrm{P}(A)=\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$

첫 번째에 3의 배수가 적힌 카드를 뒤집었을 때, 두 번째에도 3의 배수가 적힌 카드를 뒤집을 확률은

$\mathrm{P}(B|A)=\frac{3}{11}$

따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A\cap B)&=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)\\&=\frac{1}{3}\times\frac{3}{11}=\frac{1}{11}\end{aligned}$$

답 $\frac{1}{11}$

90

합격생 1명을 임의로 선택하였을 때, 수도권 출신인 사건을 A, 지방 출신인 사건을 B, 남학생인 사건을 E라 하면

(i) 선택한 합격생이 수도권 출신 남학생일 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A\cap E)&=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(E|A)\\&=\frac{40}{100}\times\frac{45}{100}=\frac{9}{50}\end{aligned}$$

(ii) 선택한 합격생이 지방 출신 남학생일 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(B\cap E)&=\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(E|B)\\&=\frac{60}{100}\times\frac{55}{100}=\frac{33}{100}\end{aligned}$$

(i), (ii)에서 구하는 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(E)&=\mathrm{P}(A\cap E)+\mathrm{P}(B\cap E)\\&=\frac{9}{50}+\frac{33}{100}=\frac{51}{100}\end{aligned}$$

답 $\frac{51}{100}$

91

갑, 을이 '형사'라고 적힌 카드를 꺼내는 사건을 각각 A, B라 하면

(i) 갑이 '형사'라고 적힌 카드를 꺼내고 을도 '형사'라고 적힌 카드를 꺼낼 확률은

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)=\frac{4}{6}\times\frac{3}{5}=\frac{2}{5}$

실력 UP 연습문제

(ⅱ) 갑이 '범인'이라고 적힌 카드를 꺼내고 을이 '형사'라고 적힌 카드를 꺼낼 확률은

$$\mathrm{P}(A^C\cap B)=\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B|A^C)=\frac{2}{6}\times\frac{4}{5}=\frac{4}{15}$$

(ⅰ), (ⅱ)에서 두 사건 A, B가 서로 배반사건이므로

$$\mathrm{P}(B)=\mathrm{P}(A\cap B)+\mathrm{P}(A^C\cap B)=\frac{2}{5}+\frac{4}{15}=\frac{2}{3}$$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(A|B)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(B)}=\frac{\frac{2}{5}}{\frac{2}{3}}=\frac{3}{5}$$

답 $\frac{3}{5}$

92

버스로 등교하는 사건을 A, 걸어서 등교하는 사건을 B, 지각하는 사건을 E라 하면

(ⅰ) 버스로 등교한 학생이 지각할 확률은

$$\mathrm{P}(A\cap E)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(E|A)=\frac{60}{100}\times\frac{1}{20}=\frac{3}{100}$$

(ⅱ) 걸어서 등교한 학생이 지각할 확률은

$$\mathrm{P}(B\cap E)=\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(E|B)=\frac{40}{100}\times\frac{1}{15}=\frac{2}{75}$$

(ⅰ), (ⅱ)에서 두 사건 A, B는 서로 배반사건이므로

$$\mathrm{P}(E)=\mathrm{P}(A\cap E)+\mathrm{P}(B\cap E)=\frac{3}{100}+\frac{2}{75}=\frac{17}{300}$$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(A|E)=\frac{\mathrm{P}(A\cap E)}{\mathrm{P}(E)}=\frac{\frac{3}{100}}{\frac{17}{300}}=\frac{9}{17}$$

답 ⑤

93

주어진 조건을 표로 나타내면 다음과 같다.

(단위: 명)

	남학생	여학생	합계
중국어	12	9	21
일본어	6	7	13
합계	18	16	34

따라서 이 학급에서 임의로 뽑은 한 학생이 중국어 수업을 받는 사건을 A, 여학생인 사건을 B라 하면

$$\mathrm{P}(A)=\frac{21}{34},\ \mathrm{P}(A\cap B)=\frac{9}{34}$$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\frac{9}{34}}{\frac{21}{34}}=\frac{3}{7}$$

답 $\frac{3}{7}$

94

임의로 뽑은 관객 한 명이 여자인 사건을 A, 배우 D를 선호하는 사건을 B라 하면

$$\mathrm{P}(A)=\frac{10+x}{35+x},\ \mathrm{P}(A\cap B)=\frac{x}{35+x}$$

이때 $\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{1}{6}$에서

$$\frac{\frac{x}{35+x}}{\frac{10+x}{35+x}}=\frac{1}{6},\ \frac{x}{10+x}=\frac{1}{6}$$

$6x=10+x\qquad\therefore x=2$

답 2

95

뽑은 제비 중 당첨 제비가 있는 사건을 A, 뽑은 제비 중 2등 당첨 제비가 있는 사건을 B라 하자.

당첨 제비가 있는 사건은 뽑은 제비 2개 모두 당첨 제비가 아닌 사건의 여사건이므로

$$\mathrm{P}(A)=1-\frac{{}_{6}\mathrm{C}_{2}}{{}_{10}\mathrm{C}_{2}}=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$$

2등 당첨 제비가 있는 사건은 뽑은 제비 2개 모두 2등 당첨 제비가 아닌 사건의 여사건이므로

$$\mathrm{P}(A\cap B)=1-\frac{{}_{7}\mathrm{C}_{2}}{{}_{10}\mathrm{C}_{2}}=1-\frac{7}{15}=\frac{8}{15}$$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\frac{8}{15}}{\frac{2}{3}}=\frac{4}{5}$$

답 $\frac{4}{5}$

96

첫 번째에 노란 구슬이 나오는 사건을 A, 두 번째에 파란 구슬이 나오는 사건을 B라 하면

$\mathrm{P}(A)=\dfrac{n}{n+4}$, $\mathrm{P}(B|A)=\dfrac{4}{n+3}$

즉, 첫 번째에 노란 구슬이 나오고 두 번째에 파란 구슬이 나올 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A\cap B)&=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)\\&=\frac{n}{n+4}\times\frac{4}{n+3}\\&=\frac{4n}{(n+4)(n+3)}\end{aligned}$$

이므로

$\dfrac{4n}{(n+4)(n+3)}=\dfrac{1}{5}$, $(n+4)(n+3)=20n$

$n^2-13n+12=0$, $(n-1)(n-12)=0$

$\therefore$ $n=1$ 또는 $n=12$

따라서 모든 n의 값의 합은

$1+12=13$ **답 13**

97

두 주머니 A, B에서 흰 공을 꺼내는 사건을 각각 A, B라 하면

$\mathrm{P}(A)=\dfrac{2}{5}$, $\mathrm{P}(A^C)=\dfrac{3}{5}$

주머니 B에서 흰 공을 꺼내는 경우는 다음과 같이 나누어 생각할 수 있다.

(i) 주머니 A에서 흰 공을 꺼내는 경우

주머니 B에 흰 공 2개를 넣으므로 주머니 B에는 흰 공 3개, 검은 공 3개가 들어 있다.

이때 주머니 B에서 흰 공을 꺼낼 확률은

$\mathrm{P}(B|A)=\dfrac{3}{6}=\dfrac{1}{2}$이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)=\dfrac{2}{5}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{5}$

(ii) 주머니 A에서 검은 공을 꺼내는 경우

주머니 B에 검은 공 2개를 넣으므로 주머니 B에는 흰 공 1개, 검은 공 5개가 들어 있다.

이때 주머니 B에서 흰 공을 꺼낼 확률은

$\mathrm{P}(B|A^C)=\dfrac{1}{6}$이므로

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A^C\cap B)&=\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B|A^C)\\&=\frac{3}{5}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{10}\end{aligned}$$

(i), (ii)에서 구하는 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(B)&=\mathrm{P}(A\cap B)+\mathrm{P}(A^C\cap B)\\&=\frac{1}{5}+\frac{1}{10}=\frac{3}{10}\end{aligned}$$

답 ⑤

98

$\mathrm{P}(A|B)=\dfrac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(B)}=\dfrac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\frac{1}{2}}=2\mathrm{P}(A\cap B)$

(i) $\mathrm{P}(A|B)$의 최댓값 M

$\mathrm{P}(A)>\mathrm{P}(B)$이므로 $\mathrm{P}(A\cap B)$가 최대가 되는 것은 $A\cap B=B$일 때이다.

즉, $\mathrm{P}(A\cap B)$의 최댓값은 $\mathrm{P}(B)=\dfrac{1}{2}$이므로

$M=2\mathrm{P}(A\cap B)=2\times\dfrac{1}{2}=1$

(ii) $\mathrm{P}(A|B)$의 최솟값 m

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$에서

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A\cap B)&=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cup B)\\&=\frac{7}{8}+\frac{1}{2}-\mathrm{P}(A\cup B)\\&=\frac{11}{8}-\mathrm{P}(A\cup B)\end{aligned}$$

이므로 $\mathrm{P}(A\cap B)$가 최소가 되는 것은 $\mathrm{P}(A\cup B)$가 최대일 때, 즉 $\mathrm{P}(A\cup B)=1$일 때이다.

즉, $\mathrm{P}(A\cap B)$의 최솟값은 $\dfrac{11}{8}-1=\dfrac{3}{8}$이므로

$m=2\mathrm{P}(A\cap B)=2\times\dfrac{3}{8}=\dfrac{3}{4}$

(i), (ii)에서

$M+m=1+\dfrac{3}{4}=\dfrac{7}{4}$ **답 $\dfrac{7}{4}$**

99

임의로 선택한 학생이 남학생인 사건을 A, K자격증을 가지고 있는 학생인 사건을 B라 하면

$\mathrm{P}(A)=\dfrac{2}{5}$, $\mathrm{P}(B)=\dfrac{7}{10}$, $\mathrm{P}(A\cap B)=\dfrac{1}{5}$

$\mathrm{P}(A)=\mathrm{P}(A\cap B)+\mathrm{P}(A\cap B^{C})$이므로

$\frac{2}{5}=\frac{1}{5}+\mathrm{P}(A\cap B^{C})$

$\therefore \mathrm{P}(A\cap B^{C})=\frac{1}{5}$

한편, $\mathrm{P}(B^{C})=1-\mathrm{P}(B)=\frac{3}{10}$이고

$\mathrm{P}(B^{C})=\mathrm{P}(A\cap B^{C})+\mathrm{P}(A^{C}\cap B^{C})$이므로

$\frac{3}{10}=\frac{1}{5}+\mathrm{P}(A^{C}\cap B^{C})$

$\therefore \mathrm{P}(A^{C}\cap B^{C})=\frac{1}{10}$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A^{C}|B^{C})=\frac{\mathrm{P}(A^{C}\cap B^{C})}{\mathrm{P}(B^{C})}=\frac{\frac{1}{10}}{\frac{3}{10}}=\frac{1}{3}$ 답 ②

다른풀이 남학생 수와 여학생 수의 비가 2 : 3이므로 각각 $200n$, $300n$(n은 자연수)이라 하고 주어진 조건을 표로 나타내면 다음과 같다.

(단위: 명)

	남학생	여학생	합계
자격증 소유	$100n$	$250n$	$350n$
자격증 미소유	$100n$	$50n$	$150n$
합계	$200n$	$300n$	$500n$

임의로 선택한 학생이 남학생인 사건을 A, K자격증을 가지고 있는 학생인 사건을 B라 하면

$n(B^{C})=150n$, $n(A^{C}\cap B^{C})=50n$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A^{C}|B^{C})=\frac{n(A^{C}\cap B^{C})}{n(B^{C})}=\frac{50n}{150n}=\frac{1}{3}$

100

$A=\{2, 4, 6\}$, $B=\{2, 3, 5\}$, $C=\{1, 3\}$이므로

$A\cap B=\{2\}$, $A\cap C=\varnothing$, $B\cap C=\{3\}$

(i) $\mathrm{P}(A)=\frac{1}{2}$, $\mathrm{P}(B)=\frac{1}{2}$, $\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{6}$이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)\neq\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$

즉, A와 B는 서로 종속이고 배반사건이 아니다.

(ii) $\mathrm{P}(A)=\frac{1}{2}$, $\mathrm{P}(C)=\frac{1}{3}$, $\mathrm{P}(A\cap C)=0$이므로

$\mathrm{P}(A\cap C)\neq\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(C)$

즉, A와 C는 서로 종속이고 배반사건이다.

(iii) $\mathrm{P}(B)=\frac{1}{2}$, $\mathrm{P}(C)=\frac{1}{3}$, $\mathrm{P}(B\cap C)=\frac{1}{6}$이므로

$\mathrm{P}(B\cap C)=\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(C)$

즉, B와 C는 서로 독립이고 배반사건이 아니다.

따라서 옳은 것은 ②이다. 답 ②

101

3개의 동전을 동시에 던질 때, 모든 경우의 수는

$2\times2\times2=8$

동전의 앞면을 H, 뒷면을 T라 하면

$A=\{(\mathrm{H, T, T}), (\mathrm{T, H, T}), (\mathrm{T, T, H}), (\mathrm{T, T, T})\}$

$B=\{(\mathrm{H, H, H}), (\mathrm{T, T, T})\}$

ㄱ. $\mathrm{P}(A)=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$ (참)

ㄴ. $A\cap B=\{(\mathrm{T, T, T})\}$이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{8}$ (참)

ㄷ. $\mathrm{P}(A)=\frac{1}{2}$, $\mathrm{P}(B)=\frac{1}{4}$, $\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{8}$이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$

따라서 두 사건 A와 B는 서로 독립이다. (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다. 답 ⑤

102

$\mathrm{P}(A)=\mathrm{P}(A|B)$이므로 두 사건 A, B는 서로 독립이다.

① $\mathrm{P}(A|B)=\mathrm{P}(A)$, $\mathrm{P}(A|B^{C})=\mathrm{P}(A)$

$\therefore \mathrm{P}(A|B)=\mathrm{P}(A|B^{C})$

② $\mathrm{P}(B)=\mathrm{P}(B|A)=\mathrm{P}(B|A^{C})$

③ $\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$

이때 두 사건 A, B가 서로 독립이라고 해서 $\mathrm{P}(A\cap B)=0$인 것은 아니다.

④ $\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$

⑤ $\mathrm{P}(B)=\mathrm{P}(A\cap B)+\mathrm{P}(A^{C}\cap B)$

$=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)+\mathrm{P}(A^{C})\mathrm{P}(B)$

따라서 옳지 않은 것은 ③이다. 답 ③

103

두 사건 A와 C는 서로 독립이므로

$\mathrm{P}(A\cap C)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(C)$

즉, $\frac{1}{4}=\frac{1}{2}\mathrm{P}(A)$이므로

$\mathrm{P}(A)=\frac{1}{2}$

또, 두 사건 A와 B는 서로 배반사건이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)=0$

따라서 $\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)$에서

$\frac{2}{3}=\frac{1}{2}+\mathrm{P}(B)$

$\therefore \mathrm{P}(B)=\frac{1}{6}$ 답 $\frac{1}{6}$

104

A가 표적을 맞히는 사건을 A, B가 표적을 맞히는 사건을 B라 하면 A와 B는 서로 독립이다.

A와 B 중 적어도 한 사람이 표적을 맞히는 사건은 A와 B 모두 표적을 맞히지 못하는 사건의 여사건이므로

$$\begin{aligned}1-\mathrm{P}(A^C\cap B^C)&=1-\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B^C)\\&=1-\left(1-\frac{2}{3}\right)\{1-\mathrm{P}(B)\}\\&=\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\mathrm{P}(B)\end{aligned}$$

즉, $\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\mathrm{P}(B)=\frac{3}{4}$이므로

$\mathrm{P}(B)=\frac{1}{4}$

따라서 B가 표적을 맞힐 확률은 $\frac{1}{4}$이다. 답 $\frac{1}{4}$

105

ㄱ. (반례) 한 개의 동전을 던지는 시행에서 앞면, 뒷면이 나오는 사건을 각각 A, B라 하면 두 사건 A, B는 서로 배반사건이다.

그러나 $\mathrm{P}(A)=\frac{1}{2}$, $\mathrm{P}(B)=\frac{1}{2}$, $\mathrm{P}(A\cap B)=0$에서 $\mathrm{P}(A\cap B)\neq\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$이므로 두 사건 A, B는 서로 종속이다. (거짓)

ㄴ. 두 사건 A, B가 서로 배반사건이면

$\mathrm{P}(A\cap B)=0$이므로

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A\cup B)&=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)\\&=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)\le 1\ (\text{참})\end{aligned}$$

ㄷ. 두 사건 A, B가 서로 독립이면 두 사건 A, B^C도 서로 독립이다.

$$\begin{aligned}\therefore \mathrm{P}(A^C)+\mathrm{P}(A|B^C)&=\mathrm{P}(A^C)+\mathrm{P}(A)\\&=1\ (\text{참})\end{aligned}$$

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다. 답 ㄴ, ㄷ

106

(i) 관람객 투표 점수 A(40), 심사 위원 점수 C(30)을 받을 확률은 $\frac{1}{2}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{12}$

(ii) 관람객 투표 점수 B(30), 심사 위원 점수 B(40)을 받을 확률은 $\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{9}$

(iii) 관람객 투표 점수 C(20), 심사 위원 점수 A(50)을 받을 확률은 $\frac{1}{6}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{12}$

(i)~(iii)에서 구하는 확률은

$\frac{1}{12}+\frac{1}{9}+\frac{1}{12}=\frac{5}{18}$ 답 ③

107

첫 번째와 두 번째 나온 수를 순서쌍으로 나타내면 합이 4가 되는 경우는 (1, 3) 또는 (2, 2) 또는 (3, 1)이다.

(i) (1, 3)인 경우, 세 번째 나온 수가 홀수일 확률은

$\frac{3}{6}\times\frac{1}{6}\times\frac{4}{6}=\frac{1}{18}$

(ii) (2, 2)인 경우, 세 번째 나온 수가 홀수일 확률은

$\frac{2}{6}\times\frac{2}{6}\times\frac{4}{6}=\frac{2}{27}$

(iii) (3, 1)인 경우, 세 번째 나온 수가 홀수일 확률은

$\frac{1}{6}\times\frac{3}{6}\times\frac{4}{6}=\frac{1}{18}$

(i)~(iii)에서 구하는 확률은

$\frac{1}{18}+\frac{2}{27}+\frac{1}{18}=\frac{5}{27}$ 답 ①

108

각 스위치가 열려 있을 확률과 닫혀 있을 확률은 각각 $\frac{1}{2}$이다.

7개의 스위치 a, b, c, d, e, f, g가 닫혀 있는 사건을 각각 A, B, C, D, E, F, G라 하자.
주어진 그림에서 P에서 Q로 적어도 하나의 선만 연결되면 전류는 흐르므로 P에서 Q로 전류가 흐르지 않을 확률은 다음과 같이 나누어 생각할 수 있다.

(i) 스위치 g가 열려 있을 확률은 $P(G^C)=\frac{1}{2}$

(ii) 스위치 g가 닫혀 있고, 스위치 a는 열려 있고, 스위치 b, c, d 중 적어도 하나가 열려 있고, 스위치 e, f 중 적어도 하나가 열려 있을 확률은

$$P(G\cap A^C\cap(B\cap C\cap D)^C\cap(E\cap F)^C)$$
$$=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\left(1-\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\right)\times\left(1-\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\right)$$
$$=\frac{21}{128}$$

(i), (ii)에서 전류가 흐르지 않을 확률은

$$\frac{1}{2}+\frac{21}{128}=\frac{85}{128}$$

따라서 구하는 확률은

$$1-\frac{85}{128}=\frac{43}{128}$$

답 $\frac{43}{128}$

109

적어도 2발은 10점 과녁에 맞히는 사건은 10점 과녁에 1발 이하로 맞히는 사건의 여사건이다.

(i) 10점 과녁에 0발 맞힐 확률은

$$\left(\frac{1}{3}\right)^4=\frac{1}{81}$$

(ii) 10점 과녁에 1발 맞힐 확률은

$${}_4C_1\left(\frac{2}{3}\right)^1\left(\frac{1}{3}\right)^3=\frac{8}{81}$$

(i), (ii)에서 구하는 확률은

$$1-\left(\frac{1}{81}+\frac{8}{81}\right)=\frac{8}{9}$$

답 $\frac{8}{9}$

110

한 개의 동전을 5번 던져서 앞면과 뒷면이 나오는 횟수의 곱이 6이려면 앞면이 나오는 횟수를 a, 뒷면이 나오는 횟수를 b라 할 때, $a+b=5$, $ab=6$이어야 하므로 $a=2$, $b=3$ 또는 $a=3$, $b=2$

(i) $a=2$, $b=3$일 확률은

$${}_5C_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{5}{16}$$

(ii) $a=3$, $b=2$일 확률은

$${}_5C_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{5}{16}$$

(i), (ii)에서 구하는 확률은

$$\frac{5}{16}+\frac{5}{16}=\frac{5}{8}$$

답 ①

111

다섯 번째 시합에서 갑이 우승하려면 네 번째 시합까지 2번 이기고 다섯 번째 시합에서 이겨야 한다.
따라서 구하는 확률은

$${}_4C_2\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)^2\times\frac{2}{3}=\frac{16}{81}$$

답 $\frac{16}{81}$

112

한 개의 동전을 던질 때, 앞면이 나올 확률은 $\frac{1}{2}$, 뒷면이 나올 확률은 $\frac{1}{2}$이다.

(i) 꺼낸 2개의 공의 색이 서로 다르고, 한 개의 동전을 3번 던져서 앞면이 2번 나올 확률은

$$\frac{{}_4C_1\times{}_3C_1}{{}_7C_2}\times{}_3C_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^1=\frac{3}{14}$$

(ii) 꺼낸 2개의 공의 색이 서로 같고, 한 개의 동전을 2번 던져서 앞면이 2번 나올 확률은

$$\frac{{}_4C_2+{}_3C_2}{{}_7C_2}\times\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{3}{28}$$

(i), (ii)에서 구하는 확률은

$$\frac{3}{14}+\frac{3}{28}=\frac{9}{28}$$

답 ①

113

점 O에서 출발하여 점 P에 도달하려면 오른쪽으로 3칸, 위쪽으로 1칸 움직여야 한다.
한 개의 주사위를 던질 때, 1 또는 6의 눈이 나올 확률은 $\frac{1}{3}$이고 그 이외의 눈이 나올 확률은 $\frac{2}{3}$이므로 점 P에 도달할 확률은

$${}_4C_3\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(\frac{2}{3}\right)^1=\frac{8}{81}$$

답 $\frac{8}{81}$

114

(i) A팀이 4차전, 5차전, 6차전에서 연속하여 이길 확률은

$\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{8}$

(ii) A팀이 4차전, 5차전, 6차전 중 두 번 이기고, 7차전에서 이길 확률은

${}_3C_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^1\times\frac{1}{2}=\frac{3}{16}$

(i), (ii)에서 구하는 확률은

$\frac{1}{8}+\frac{3}{16}=\frac{5}{16}$ 답 $\mathbf{\frac{5}{16}}$

115

1단계 치료 결과와 2단계 치료 결과는 서로 독립이고 1단계 치료와 2단계 치료에 성공할 확률이 각각 $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$ 이므로 완치된 것으로 판단될 확률은

$\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$

따라서 구하는 확률은

${}_4C_2\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{8}{27}$ 답 ②

116

동전의 앞면의 개수 : 가능한 주사위의 눈의 수 ⇨ 확률로 나타내면 다음과 같다.

6개 : 1, 2, 3, 4, 5 ⇨ $\left(\frac{1}{2}\right)^6\times\frac{5}{6}=\frac{5}{384}$

5개 : 1, 2, 3, 4 ⇨ ${}_6C_5\left(\frac{1}{2}\right)^5\left(\frac{1}{2}\right)^1\times\frac{2}{3}=\frac{1}{16}$

4개 : 1, 2, 3 ⇨ ${}_6C_4\left(\frac{1}{2}\right)^4\left(\frac{1}{2}\right)^2\times\frac{1}{2}=\frac{15}{128}$

3개 : 1, 2 ⇨ ${}_6C_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^3\times\frac{1}{3}=\frac{5}{48}$

2개 : 1 ⇨ ${}_6C_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^4\times\frac{1}{6}=\frac{5}{128}$

따라서 구하는 확률은

$\frac{5}{384}+\frac{1}{16}+\frac{15}{128}+\frac{5}{48}+\frac{5}{128}=\frac{43}{128}$ 답 $\mathbf{\frac{43}{128}}$

117

한 개의 주사위를 던질 때, 홀수의 눈이 나올 확률은 $\frac{1}{2}$, 짝수의 눈이 나올 확률은 $\frac{1}{2}$이다.

주사위를 4번 던져서 홀수의 눈이 나오는 횟수를 x, 짝수의 눈이 나오는 횟수를 y라 하면

$x+y=4$ …… ㉠

또, 처음 출발 위치로 돌아오려면 정팔각형의 둘레의 길이인 8만큼 움직여야 하므로

$3x+y=8$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $x=2$, $y=2$

따라서 주사위를 4번 던져서 홀수의 눈이 2번, 짝수의 눈이 2번 나와야 하므로 구하는 확률은

${}_4C_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{3}{8}$ 답 $\mathbf{\frac{3}{8}}$

118

한 개의 주사위를 던질 때, 짝수의 눈이 나올 확률은 $\frac{1}{2}$, 홀수의 눈이 나올 확률은 $\frac{1}{2}$이다.

주사위를 10번 던져서 짝수의 눈이 나오는 횟수를 x, 홀수의 눈이 나오는 횟수를 y라 하면

$x+y=10$ …… ㉠

또, 원점에서 점 P까지의 거리가 3 이하이므로

$|x-y|\le3$ …… ㉡

이때 ㉠에서 $y=10-x$이므로 이를 ㉡에 대입하면

$|2x-10|\le3$, $-3\le2x-10\le3$

$\therefore \frac{7}{2}\le x\le\frac{13}{2}$

즉, 짝수의 눈이 4번 또는 5번 또는 6번 나와야 한다.

따라서 구하는 확률은

${}_{10}C_4\left(\frac{1}{2}\right)^4\left(\frac{1}{2}\right)^6+{}_{10}C_5\left(\frac{1}{2}\right)^5\left(\frac{1}{2}\right)^5+{}_{10}C_6\left(\frac{1}{2}\right)^6\left(\frac{1}{2}\right)^4$

$=\frac{105}{512}+\frac{63}{256}+\frac{105}{512}=\frac{21}{32}$ 답 $\mathbf{\frac{21}{32}}$

Ⅲ. 통계

119

확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	-2	-1	0	1	2	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$k+\frac{2}{9}$	$k+\frac{1}{9}$	k	$k+\frac{1}{9}$	$k+\frac{2}{9}$	1

확률의 총합은 1이므로

$\left(k+\frac{2}{9}\right)+\left(k+\frac{1}{9}\right)+k+\left(k+\frac{1}{9}\right)+\left(k+\frac{2}{9}\right)=1$

$5k+\frac{2}{3}=1 \qquad \therefore k=\frac{1}{15}$ 답 ①

120

확률의 총합은 1이므로

$3k^2+k+(k^2+2k)=1,\ 4k^2+3k-1=0$

$(4k-1)(k+1)=0 \qquad \therefore k=\frac{1}{4}$ 또는 $k=-1$

이때 $0\le\mathrm{P}(X=x)\le1$이므로 $k=\frac{1}{4}$

즉, $\mathrm{P}(X=-1)=\frac{3}{16},\ \mathrm{P}(X=0)=\frac{1}{4}$,

$\mathrm{P}(X=1)=\frac{9}{16}$이므로

$\mathrm{P}(|X|=1)=\mathrm{P}(X=-1$ 또는 $X=1)$

$=\mathrm{P}(X=-1)+\mathrm{P}(X=1)$

$=\frac{3}{16}+\frac{9}{16}=\frac{3}{4}$ 답 $\frac{3}{4}$

121

정사면체를 2번 던질 때, 모든 경우의 수는

$4\times4=16$

두 수의 합이 3인 경우는

$(1,\ 2),\ (2,\ 1)$의 2가지

두 수의 합이 4인 경우는

$(1,\ 3),\ (2,\ 2),\ (3,\ 1)$의 3가지

두 수의 합이 5인 경우는

$(1,\ 4),\ (2,\ 3),\ (3,\ 2),\ (4,\ 1)$의 4가지

즉, $\mathrm{P}(X=3)=\frac{2}{16}=\frac{1}{8},\ \mathrm{P}(X=4)=\frac{3}{16}$,

$\mathrm{P}(X=5)=\frac{4}{16}=\frac{1}{4}$이므로

$\mathrm{P}(3\le X\le5)$

$=\mathrm{P}(X=3)+\mathrm{P}(X=4)+\mathrm{P}(X=5)$

$=\frac{1}{8}+\frac{3}{16}+\frac{1}{4}=\frac{9}{16}$ 답 $\frac{9}{16}$

참고 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	2	3	4	5	6	7	8	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	1

122

확률의 총합은 1이므로

$\frac{1}{4}+\frac{1}{2}+a+b=1 \qquad \therefore a+b=\frac{1}{4}$ ...... ㉠

또, $\mathrm{P}(X=2)=4\mathrm{P}(X=3)$이므로

$a=4b$ ...... ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=\frac{1}{5},\ b=\frac{1}{20}$

$\therefore ab=\frac{1}{5}\times\frac{1}{20}=\frac{1}{100}$ 답 $\frac{1}{100}$

123

$\mathrm{P}(X=x)=\frac{k}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$

$=\frac{k(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})}{(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})}$

$=k(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})$

확률의 총합은 1이므로

$k\{(\sqrt{2}-\sqrt{1})+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+\cdots+(\sqrt{9}-\sqrt{8})\}$

$=k(\sqrt{9}-\sqrt{1})=1$

$2k=1 \qquad \therefore k=\frac{1}{2}$

$\therefore \mathrm{P}(X\ge3)$

$=\mathrm{P}(X=3)+\mathrm{P}(X=4)+\cdots+\mathrm{P}(X=8)$

$=\frac{1}{2}\{(\sqrt{4}-\sqrt{3})+(\sqrt{5}-\sqrt{4})+\cdots+(\sqrt{9}-\sqrt{8})\}$

$=\frac{1}{2}(\sqrt{9}-\sqrt{3})=\frac{3-\sqrt{3}}{2}$ 답 $\frac{3-\sqrt{3}}{2}$

124

$p_2-p_1=p_3-p_2=p_4-p_3=\frac{1}{8}$이므로 $p_1=a$라 하면

$p_2=p_1+\frac{1}{8}=a+\frac{1}{8}$

$p_3=p_2+\frac{1}{8}=a+\frac{2}{8}$

$p_4=p_3+\frac{1}{8}=a+\frac{3}{8}$

확률의 총합은 1이므로 $p_1+p_2+p_3+p_4=1$에서

$a+\left(a+\frac{1}{8}\right)+\left(a+\frac{2}{8}\right)+\left(a+\frac{3}{8}\right)=1$

$4a+\frac{3}{4}=1 \qquad \therefore a=\frac{1}{16}$

$\therefore \mathrm{P}(X^2-6X+8<0)=\mathrm{P}((X-2)(X-4)<0)$
$=\mathrm{P}(2<X<4)$
$=\mathrm{P}(X=3)$
$=p_3=a+\frac{2}{8}$
$=\frac{1}{16}+\frac{2}{8}=\frac{5}{16}$ 답 $\frac{5}{16}$

125

확률의 총합은 1이므로

$\frac{1}{10}+\frac{1}{5}+\frac{2}{5}+a+b=1$

$\therefore a+b=\frac{3}{10}$ …… ㉠

$\mathrm{E}(X)=3$이므로

$1\times\frac{1}{10}+2\times\frac{1}{5}+3\times\frac{2}{5}+4\times a+5\times b=3$

$\therefore 4a+5b=\frac{13}{10}$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=\frac{1}{5}$, $b=\frac{1}{10}$

$\mathrm{E}(X^2)=1^2\times\frac{1}{10}+2^2\times\frac{1}{5}+3^2\times\frac{2}{5}+4^2\times\frac{1}{5}$
$+5^2\times\frac{1}{10}$
$=\frac{51}{5}$

이므로 $\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2=\frac{51}{5}-3^2=\frac{6}{5}$

$\therefore \sigma(X)=\sqrt{\mathrm{V}(X)}=\sqrt{\frac{6}{5}}=\frac{\sqrt{30}}{5}$ 답 $\frac{\sqrt{30}}{5}$

126

확률변수 X가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2이고, 그 확률은 각각

$\mathrm{P}(X=0)=\frac{{}_3\mathrm{C}_2}{{}_5\mathrm{C}_2}=\frac{3}{10}$

$\mathrm{P}(X=1)=\frac{{}_3\mathrm{C}_1\times{}_2\mathrm{C}_1}{{}_5\mathrm{C}_2}=\frac{3}{5}$

$\mathrm{P}(X=2)=\frac{{}_2\mathrm{C}_2}{{}_5\mathrm{C}_2}=\frac{1}{10}$

이므로 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{10}$	1

$\therefore \mathrm{E}(X)=0\times\frac{3}{10}+1\times\frac{3}{5}+2\times\frac{1}{10}=\frac{4}{5}$

또, $\mathrm{E}(X^2)=0^2\times\frac{3}{10}+1^2\times\frac{3}{5}+2^2\times\frac{1}{10}=1$이므로

$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$
$=1-\left(\frac{4}{5}\right)^2=\frac{9}{25}$ 답 $\frac{9}{25}$

127

$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$에서

$\mathrm{E}(X^2)=\mathrm{V}(X)+\{\mathrm{E}(X)\}^2$ …… ㉠

$\therefore \mathrm{E}((X-3)^2)$
$=\mathrm{E}(X^2-6X+9)$
$=\mathrm{E}(X^2)-6\mathrm{E}(X)+9$
$=\mathrm{V}(X)+\{\mathrm{E}(X)\}^2-6\mathrm{E}(X)+9$ ($\because$ ㉠)
$=7+2^2-6\times2+9$
$=8$ 답 8

128

$\mathrm{E}(X)=m$, $\sigma(X)=\sigma(\sigma>0)$이므로

$\mathrm{E}(T)=\mathrm{E}\left(10\times\frac{X-m}{\sigma}+50\right)$
$=\mathrm{E}\left(\frac{10}{\sigma}X-\frac{10m}{\sigma}+50\right)$
$=\frac{10}{\sigma}\mathrm{E}(X)-\frac{10m}{\sigma}+50$
$=\frac{10m}{\sigma}-\frac{10m}{\sigma}+50=50$

$$\sigma(T)=\sigma\left(10\times\frac{X-m}{\sigma}+50\right)$$
$$=\left|\frac{10}{\sigma}\right|\sigma(X)$$
$$=\frac{10}{\sigma}\times\sigma=10$$

답 $\mathbf{E(T)=50,\ \sigma(T)=10}$

129

확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	3	4	5	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{3}{7}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{1}{7}$	0	$\frac{1}{7}$	1

$$\therefore \mathrm{E}(X)=1\times\frac{3}{7}+2\times\frac{2}{7}+3\times\frac{1}{7}+4\times0+5\times\frac{1}{7}$$
$$=\frac{15}{7}$$
$$\therefore \mathrm{E}(14X+5)=14\mathrm{E}(X)+5$$
$$=14\times\frac{15}{7}+5=35$$

답 ②

130

확률변수 X가 가질 수 있는 값은 1, 2, 4이고, 그 확률은 각각

$$\mathrm{P}(X=1)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$$
$$\mathrm{P}(X=2)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$$
$$\mathrm{P}(X=4)=\frac{1}{6}$$

이므로 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	4	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	1

$$\therefore \mathrm{E}(X)=1\times\frac{1}{3}+2\times\frac{1}{2}+4\times\frac{1}{6}=2$$
$$\therefore \mathrm{E}(5X+3)=5\mathrm{E}(X)+3$$
$$=5\times2+3=13$$

답 **13**

131

확률의 총합은 1이므로

$$b+\frac{1}{4}+a=1$$
$$\therefore b=\frac{3}{4}-a \qquad \cdots\cdots ㉠$$
$$\mathrm{E}(X)=1\times b+2\times\frac{1}{4}+3\times a$$
$$=\left(\frac{3}{4}-a\right)+\frac{1}{2}+3a\ (\because ㉠)$$
$$=2a+\frac{5}{4}$$
$$\mathrm{E}(X^2)=1^2\times b+2^2\times\frac{1}{4}+3^2\times a$$
$$=\left(\frac{3}{4}-a\right)+1+9a\ (\because ㉠)$$
$$=8a+\frac{7}{4}$$

이므로

$$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$$
$$=8a+\frac{7}{4}-\left(2a+\frac{5}{4}\right)^2$$
$$=-4a^2+3a+\frac{3}{16}$$
$$=-4\left(a-\frac{3}{8}\right)^2+\frac{3}{4}$$

따라서 X의 분산은 $a=\frac{3}{8}$일 때 최대이다.

답 $\mathbf{\frac{3}{8}}$

132

한 개의 주사위를 한 번 던져서 나오는 눈의 수에 대한 상금을 확률변수 X라 하면

눈의 수가 1일 때, $X=1\times200=200$

눈의 수가 2일 때, $X=2\times100=200$

눈의 수가 3일 때, $X=3\times200=600$

눈의 수가 4일 때, $X=4\times100=400$

눈의 수가 5일 때, $X=5\times200=1000$

눈의 수가 6일 때, $X=6\times100=600$

이므로 X가 가질 수 있는 값은 200, 400, 600, 1000이고 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	200	400	600	1000	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	1

$\therefore$ $\mathrm{E}(X)=200\times\frac{1}{3}+400\times\frac{1}{6}+600\times\frac{1}{3}$
$\qquad+1000\times\frac{1}{6}$
$\qquad=500$

따라서 구하는 기댓값은 500원이다. **답 500원**

133

$\mathrm{E}(X)=0\times\frac{1}{8}+2\times\frac{3}{8}+4\times\frac{3}{8}+6\times\frac{1}{8}=3$

$\mathrm{E}(X^2)=0^2\times\frac{1}{8}+2^2\times\frac{3}{8}+4^2\times\frac{3}{8}+6^2\times\frac{1}{8}=12$

이므로

$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2=12-3^2=3$

$\mathrm{E}(Y)=6$에서 $\mathrm{E}(aX+b)=6$

$a\mathrm{E}(X)+b=6$ $\quad\therefore 3a+b=6$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

$\mathrm{V}(Y)=3$에서 $\mathrm{V}(aX+b)=3$

$a^2\mathrm{V}(X)=3$, $3a^2=3$

$a^2=1$ $\quad\therefore a=-1$ ($\because a<0$)

$a=-1$을 ㉠에 대입하면 $b=9$

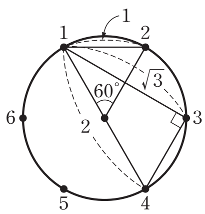
$\therefore a+b=(-1)+9=8$ **답 8**

134

한 개의 주사위를 두 번 던질 때, 모든 경우의 수는

$6\times6=36$

오른쪽 그림에서 확률변수 X가 가질 수 있는 값은 0, 1, $\sqrt{3}$, 2 이다.



(i) $X=0$일 때,

(1, 1), (2, 2), (3, 3),
(4, 4), (5, 5), (6, 6)
의 6가지이므로

$\mathrm{P}(X=0)=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$

(ii) $X=1$일 때,

(1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 5), (5, 6), (6, 1),
(2, 1), (3, 2), (4, 3), (5, 4), (6, 5), (1, 6)
의 12가지이므로

$\mathrm{P}(X=1)=\frac{12}{36}=\frac{1}{3}$

(iii) $X=\sqrt{3}$일 때,

(1, 3), (2, 4), (3, 5), (4, 6), (5, 1), (6, 2),
(3, 1), (4, 2), (5, 3), (6, 4), (1, 5), (2, 6)
의 12가지이므로

$\mathrm{P}(X=\sqrt{3})=\frac{12}{36}=\frac{1}{3}$

(iv) $X=2$일 때,

(1, 4), (2, 5), (3, 6), (4, 1), (5, 2), (6, 3)
의 6가지이므로

$\mathrm{P}(X=2)=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$

(i)~(iv)에서 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	$\sqrt{3}$	2	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	1

$\therefore$ $\mathrm{E}(X)=0\times\frac{1}{6}+1\times\frac{1}{3}+\sqrt{3}\times\frac{1}{3}+2\times\frac{1}{6}$
$\qquad=\frac{2+\sqrt{3}}{3}$ **답 ④**

135

확률변수 X가 가질 수 있는 값은 1, 2, 3이다.

(i) $X=1$일 때,

여학생 3명 중 1명을 맨 앞에 세우고, 그 뒤에 나머지 4명을 세우면 되므로

$\mathrm{P}(X=1)=\frac{{}_3\mathrm{P}_1\times4!}{5!}=\frac{3}{5}$

(ii) $X=2$일 때,

맨 앞에 남학생 2명 중 1명을, 두 번째 자리에 여학생 3명 중 1명을 세우고, 그 뒤에 나머지 3명을 세우면 되므로

$\mathrm{P}(X=2)=\frac{{}_2\mathrm{P}_1\times{}_3\mathrm{P}_1\times3!}{5!}=\frac{3}{10}$

(iii) $X=3$일 때,

남학생 2명을 세우고, 그 뒤에 여학생 3명을 세우면 되므로

$\mathrm{P}(X=3)=\frac{2!\times3!}{5!}=\frac{1}{10}$

(ⅰ)~(ⅲ)에서 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	3	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{10}$	1

$\therefore \mathrm{E}(X)=1\times\frac{3}{5}+2\times\frac{3}{10}+3\times\frac{1}{10}=\frac{3}{2}$

또, $\mathrm{E}(X^2)=1^2\times\frac{3}{5}+2^2\times\frac{3}{10}+3^2\times\frac{1}{10}=\frac{27}{10}$

이므로

$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2=\frac{27}{10}-\left(\frac{3}{2}\right)^2=\frac{9}{20}$

$\therefore \mathrm{V}(10X)=10^2\mathrm{V}(X)=100\times\frac{9}{20}=45$ 답 45

136

합격한 제품의 개수를 확률변수 X라 하자.
5개의 퓨즈를 검사하므로 5회의 독립시행이고, 이 공장에서 생산된 퓨즈 하나가 품질 기준에 합격할 확률은 $\frac{9}{10}$이므로 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(5, \frac{9}{10}\right)$를 따른다.
따라서 X의 확률질량함수는

$$\mathrm{P}(X=x)=\begin{cases} {}_5\mathrm{C}_0\left(\frac{1}{10}\right)^5 & (x=0) \\ {}_5\mathrm{C}_x\left(\frac{9}{10}\right)^x\left(\frac{1}{10}\right)^{5-x} & (x=1,\ 2,\ 3,\ 4) \\ {}_5\mathrm{C}_5\left(\frac{9}{10}\right)^5 & (x=5) \end{cases}$$

이므로 구하는 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X\le 1)&=\mathrm{P}(X=0)+\mathrm{P}(X=1)\\&={}_5\mathrm{C}_0\left(\frac{1}{10}\right)^5+{}_5\mathrm{C}_1\left(\frac{9}{10}\right)^1\left(\frac{1}{10}\right)^4\\&=\frac{23}{50000}\end{aligned}$$

답 $\frac{23}{50000}$

137

확률변수 X의 확률질량함수는

$$\mathrm{P}(X=x)=\begin{cases} {}_{160}\mathrm{C}_0\left(\frac{1}{4}\right)^{160} & (x=0) \\ {}_{160}\mathrm{C}_x\left(\frac{3}{4}\right)^x\left(\frac{1}{4}\right)^{160-x} & (x=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 159) \\ {}_{160}\mathrm{C}_{160}\left(\frac{3}{4}\right)^{160} & (x=160) \end{cases}$$

이므로 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(160, \frac{3}{4}\right)$을 따른다.
따라서 X의 평균과 분산은 각각

$\mathrm{E}(X)=160\times\frac{3}{4}=120$

$\mathrm{V}(X)=160\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{4}=30$

답 $\mathrm{E}(X)=120$, $\mathrm{V}(X)=30$

138

$\mathrm{E}(X)=15$, $\mathrm{V}(X)=\left(\frac{3\sqrt{5}}{2}\right)^2=\frac{45}{4}$이므로

$\mathrm{E}(X)=np=15$ ...... ㉠

$\mathrm{V}(X)=np(1-p)=\frac{45}{4}$ ...... ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면 $15(1-p)=\frac{45}{4}$

$\therefore p=\frac{1}{4}$

$p=\frac{1}{4}$을 ㉠에 대입하면 $\frac{1}{4}n=15$ $\therefore n=60$

$\therefore 4(n+p)=4\left(60+\frac{1}{4}\right)=241$ 답 241

139

49번 공을 꺼내므로 49회의 독립시행이고, 1회의 시행에서 같은 색의 공이 나올 확률은

$\frac{{}_3\mathrm{C}_2}{{}_7\mathrm{C}_2}+\frac{{}_4\mathrm{C}_2}{{}_7\mathrm{C}_2}=\frac{1}{7}+\frac{2}{7}=\frac{3}{7}$

이므로 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(49, \frac{3}{7}\right)$을 따른다.

$\therefore \sigma(X)=\sqrt{49\times\frac{3}{7}\times\frac{4}{7}}=2\sqrt{3}$ 답 $2\sqrt{3}$

140

$\mathrm{E}(3X-2)=16$에서

$3\mathrm{E}(X)-2=16$ $\therefore \mathrm{E}(X)=6$

이때 $\mathrm{E}(X^2)=40$이므로

$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2=40-6^2=4$

$\therefore \mathrm{V}(3X-2)=3^2\mathrm{V}(X)=9\times 4=36$ 답 36

141

동전 2개를 동시에 10번 던지므로 10회의 독립시행이고, 1회의 시행에서 동전 2개 모두 앞면이 나올 확률은

$_2C_2\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$

이므로 확률변수 X는 이항분포 $B\left(10, \frac{1}{4}\right)$을 따른다.

따라서 $V(X)=10\times\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}=\frac{15}{8}$이므로

$V(4X+1)=4^2V(X)=16\times\frac{15}{8}=30$ **답 30**

142

확률변수 X는 이항분포 $B(3, p)$를 따르므로

$P(X=3)={}_3C_3p^3=p^3$

확률변수 Y는 이항분포 $B(4, 2p)$를 따르므로

$$\begin{aligned}P(Y\geq3)&=P(Y=3)+P(Y=4)\\&={}_4C_3(2p)^3(1-2p)+{}_4C_4(2p)^4\\&=32p^3(1-2p)+16p^4\\&=16p^3(2-3p)\end{aligned}$$

$10P(X=3)=P(Y\geq3)$에서

$10p^3=16p^3(2-3p)$

$10=16(2-3p)$ ($\because p>0$)

$\therefore p=\frac{11}{24}$ **답 $\frac{11}{24}$**

143

$$\begin{aligned}\sigma(X)&=\sqrt{10p(1-p)}=\sqrt{-10(p^2-p)}\\&=\sqrt{-10\left(p-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{5}{2}}\end{aligned}$$

따라서 $p=\frac{1}{2}$일 때 표준편차 $\sigma(X)$가 최대이므로 이때의 X의 평균은

$E(X)=10\times p=10\times\frac{1}{2}=5$ **답 5**

144

1개의 구슬을 n번 꺼내므로 n회의 독립시행이고, 1회의 시행에서 검은 구슬이 나올 확률은 $\frac{x}{x+3}$이므로 확률변수 X는 이항분포 $B\left(n, \frac{x}{x+3}\right)$를 따른다.

$E(X)=n\times\frac{x}{x+3}=4$ …… ㉠

$V(X)=n\times\frac{x}{x+3}\times\frac{3}{x+3}=\frac{12}{5}$ …… ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면 $\frac{12}{x+3}=\frac{12}{5}$ $\therefore x=2$

$x=2$를 ㉠에 대입하면 $\frac{2}{5}n=4$ $\therefore n=10$

$\therefore x+n=2+10=12$ **답 12**

145

한 개의 동전을 3번 던지므로 3회의 독립시행이고, 1회의 시행에서 앞면이 나올 확률은 $\frac{1}{2}$이므로 확률변수 X는 이항분포 $B\left(3, \frac{1}{2}\right)$을 따른다.

$\therefore E(X)=3\times\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$

$V(X)=3\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{3}{4}$

이때 $V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$이므로

$E(X^2)=V(X)+\{E(X)\}^2=\frac{3}{4}+\left(\frac{3}{2}\right)^2=3$

$$\begin{aligned}\therefore f(a)&=E((X-a)^2)\\&=E(X^2)-2aE(X)+a^2\\&=3-2a\times\frac{3}{2}+a^2\\&=\left(a-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\end{aligned}$$

따라서 $a=\frac{3}{2}$일 때 $f(a)$는 최솟값 $\frac{3}{4}$을 갖는다.

답 $\frac{3}{4}$

다른풀이 $f(a)=E((X-a)^2)$

$=E(X^2)-2aE(X)+a^2$

한편, X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	3	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	1

$E(X)=0\times\frac{1}{8}+1\times\frac{3}{8}+2\times\frac{3}{8}+3\times\frac{1}{8}=\frac{3}{2}$

$E(X^2)=0^2\times\frac{1}{8}+1^2\times\frac{3}{8}+2^2\times\frac{3}{8}+3^2\times\frac{1}{8}=3$

이므로

$f(a)=3-3a+a^2=\left(a-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{3}{4}$

따라서 $a=\frac{3}{2}$일 때 $f(a)$는 최솟값 $\frac{3}{4}$을 갖는다.

146

빨간 공이 나오는 횟수를 확률변수 X라 하자.

5번 공을 꺼내므로 5회의 독립시행이고, 1회의 시행에서 빨간 공이 나올 확률은 $\frac{2}{5}$이므로 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(5, \frac{2}{5}\right)$를 따른다.

$\therefore \mathrm{E}(X)=5\times\frac{2}{5}=2$

이때 받는 총 금액을 확률변수 Y라 하면

$Y=100X+200(5-X)$

$\quad=-100X+1000$

$\therefore \mathrm{E}(Y)=\mathrm{E}(-100X+1000)$

$\qquad=-100\mathrm{E}(X)+1000$

$\qquad=-100\times2+1000$

$\qquad=800$

따라서 구하는 기댓값은 800원이다. **답 800원**

147

두 주사위 A, B를 동시에 던질 때 일어나는 모든 경우의 수는

$6\times6=36$

$1\le m\le6$, $1\le n\le6$인 자연수 m, n에 대하여

$m^2+n^2\le25$가 되는 사건 E가 일어나는 경우는 다음과 같다.

(i) $m=1$일 때,

$n^2\le24$이므로 $n=1$, 2, 3, 4의 4가지

(ii) $m=2$일 때,

$n^2\le21$이므로 $n=1$, 2, 3, 4의 4가지

(iii) $m=3$일 때,

$n^2\le16$이므로 $n=1$, 2, 3, 4의 4가지

(iv) $m=4$일 때,

$n^2\le9$이므로 $n=1$, 2, 3의 3가지

(v) $m=5$ 또는 $m=6$일 때,

부등식 $m^2+n^2\le25$를 만족시키는 자연수 n은 존재하지 않는다.

(i)~(v)에서 사건 E가 일어나는 경우의 수는

$4+4+4+3=15 \qquad \therefore \mathrm{P}(E)=\frac{15}{36}=\frac{5}{12}$

즉, 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(12, \frac{5}{12}\right)$를 따르므로

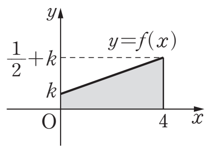
$\mathrm{V}(X)=12\times\frac{5}{12}\times\frac{7}{12}=\frac{35}{12}$

따라서 $p=12$, $q=35$이므로

$p+q=12+35=47$ **답 47**

148

오른쪽 그림에서 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=0$, $x=4$로 둘러싸인 도형의 넓이가 1이므로

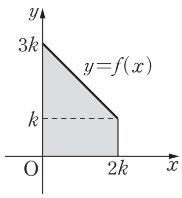


$\frac{1}{2}\times\left\{k+\left(\frac{1}{2}+k\right)\right\}\times4=1$

$\therefore k=0$ **답 0**

149

오른쪽 그림에서 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=0$, $x=2k$로 둘러싸인 도형의 넓이가 1이므로

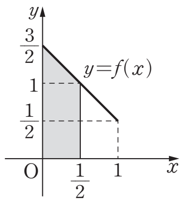


$\frac{1}{2}\times(3k+k)\times2k=1$

$4k^2=1 \qquad \therefore k=\frac{1}{2}\ (\because k\ge0)$

따라서 $f(x)=\frac{3}{2}-x$이므로

오른쪽 그림에서



$\mathrm{P}(0\le X\le k)$

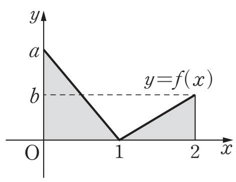
$=\mathrm{P}\left(0\le X\le\frac{1}{2}\right)$

$=\frac{1}{2}\times\left(\frac{3}{2}+1\right)\times\frac{1}{2}$

$=\frac{5}{8}$ **답 $\frac{5}{8}$**

150

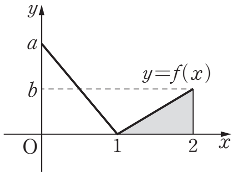
오른쪽 그림에서 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=0$, $x=2$로 둘러싸인 도형의 넓이가 1이므로



$\frac{1}{2}\times1\times a+\frac{1}{2}\times1\times b=1$

$\therefore\ a+b=2$ …… ㉠

또, $P(1\leq X\leq2)$는 오른쪽 그림에서 색칠한 도형의 넓이와 같고,



$P(1\leq X\leq2)=\frac{a}{6}$이므로

$\frac{1}{2}\times1\times b=\frac{a}{6}$ $\quad\therefore\ a=3b$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=\frac{3}{2},\ b=\frac{1}{2}$

$\therefore\ a-b=1$

답 ①

151

함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이는 1이므로

$\frac{1}{2}\times1\times k+1\times k+\frac{1}{2}\times2\times k=1$

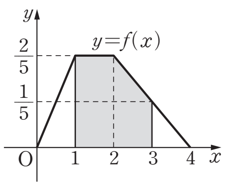
$\therefore\ k=\frac{2}{5}$

$k=\frac{2}{5}$이므로 $2\leq x\leq4$에서의 확률밀도함수의 그래프는 두 점 $\left(2,\ \frac{2}{5}\right)$, $(4,\ 0)$을 지나는 직선이다. 이 직선의 방정식은

$y=\dfrac{\frac{2}{5}-0}{2-4}(x-4)$

$\therefore\ y=-\frac{1}{5}x+\frac{4}{5}\ (2\leq x\leq4)$

따라서 $x=3$일 때 y의 값은 $\frac{1}{5}$이고 $P(1\leq X\leq3)$은 오른쪽 그림에서 색칠한 도형의 넓이와 같으므로



$P(1\leq X\leq3)$

$=1\times\frac{2}{5}+\frac{1}{2}\times\left(\frac{2}{5}+\frac{1}{5}\right)\times1$

$=\frac{7}{10}$

답 $\frac{7}{10}$

152

조건 ㈎에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이고, $P(-2\leq X\leq2)=1$이므로

$P(-2\leq X\leq0)=P(0\leq X\leq2)=\frac{1}{2}$

조건 ㈏에서 $P\left(\frac{3}{2}\leq X\leq2\right)=5P\left(0\leq X\leq\frac{3}{2}\right)$이므로

$P(0\leq X\leq2)$

$=P\left(0\leq X\leq\frac{3}{2}\right)+P\left(\frac{3}{2}\leq X\leq2\right)$

$=P\left(0\leq X\leq\frac{3}{2}\right)+5P\left(0\leq X\leq\frac{3}{2}\right)$

$=6P\left(0\leq X\leq\frac{3}{2}\right)=\frac{1}{2}$

$\therefore\ P\left(0\leq X\leq\frac{3}{2}\right)=\frac{1}{12}$

$\therefore\ P\left(|X|\leq\frac{3}{2}\right)=P\left(-\frac{3}{2}\leq X\leq\frac{3}{2}\right)$

$=2P\left(0\leq X\leq\frac{3}{2}\right)$

$=2\times\frac{1}{12}=\frac{1}{6}$

답 $\frac{1}{6}$

153

$Z=\frac{X-30}{4}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따른다.

$P(30\leq X\leq k)=P(0\leq Z\leq2)$에서

$P\left(\frac{30-30}{4}\leq Z\leq\frac{k-30}{4}\right)=P\left(0\leq Z\leq\frac{k-30}{4}\right)$

$=P(0\leq Z\leq2)$

따라서 $\frac{k-30}{4}=2$이므로

$k=38$

답 38

154

$Z=\frac{X-4}{2}$로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따른다.

① $P(1\leq X\leq4)=P\left(\frac{1-4}{2}\leq Z\leq\frac{4-4}{2}\right)$

$=P(-1.5\leq Z\leq0)$

$=P(0\leq Z\leq1.5)$

$=0.4332$

② $P(1\le X\le 7)=P\left(\frac{1-4}{2}\le Z\le \frac{7-4}{2}\right)$

$=P(-1.5\le Z\le 1.5)$

$=2P(0\le Z\le 1.5)$

$=2\times 0.4332=0.8664$

③ $P(4\le X\le 7)=P\left(\frac{4-4}{2}\le Z\le \frac{7-4}{2}\right)$

$=P(0\le Z\le 1.5)=0.4332$

④ $P(X\le 4)=P\left(Z\le \frac{4-4}{2}\right)=P(Z\le 0)=0.5$

⑤ $P(X\ge 7)=P\left(Z\ge \frac{7-4}{2}\right)=P(Z\ge 1.5)$

$=P(Z\ge 0)-P(0\le Z\le 1.5)$

$=0.5-0.4332=0.0668$

따라서 확률이 가장 큰 것은 ②이다. **답** ②

155

$E(X)=42$, $\sigma(X)=3$에서

$E(Y)=E(2X+4)=2E(X)+4$

$=2\times 42+4=88$

$\sigma(Y)=\sigma(2X+4)=|2|\sigma(X)=2\times 3=6$

이때 X가 정규분포 $N(42,\ 3^2)$을 따르므로 Y는 정규분포 $N(88,\ 6^2)$을 따른다.

$Z=\frac{Y-88}{6}$로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따르므로

$P(Y\ge 100)=P\left(Z\ge \frac{100-88}{6}\right)$

$=P(Z\ge 2)$

$=P(Z\ge 0)-P(0\le Z\le 2)$

$=0.5-0.4772=0.0228$ **답** **0.0228**

다른풀이 $Y=2X+4$이므로

$P(Y\ge 100)=P(2X+4\ge 100)=P(X\ge 48)$

$Z=\frac{X-42}{3}$로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따르므로

$P(Y\ge 100)=P(X\ge 48)$

$=P\left(Z\ge \frac{48-42}{3}\right)=P(Z\ge 2)$

$=P(Z\ge 0)-P(0\le Z\le 2)$

$=0.5-0.4772=0.0228$

156

연구원이 추출한 호르몬의 양을 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $N(30.2,\ 0.6^2)$을 따르므로

$Z=\frac{X-30.2}{0.6}$로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따른다.

$\therefore P(29.6\le X\le 31.4)$

$=P\left(\frac{29.6-30.2}{0.6}\le Z\le \frac{31.4-30.2}{0.6}\right)$

$=P(-1\le Z\le 2)$

$=P(-1\le Z\le 0)+P(0\le Z\le 2)$

$=P(0\le Z\le 1)+P(0\le Z\le 2)$

$=0.3413+0.4772=0.8185$ **답** ⑤

157

내용물의 용량을 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $N(180,\ 4^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-180}{4}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따른다.

$\therefore P(186\le X\le 188)$

$=P\left(\frac{186-180}{4}\le Z\le \frac{188-180}{4}\right)$

$=P(1.5\le Z\le 2)$

$=P(0\le Z\le 2)-P(0\le Z\le 1.5)$

$=0.4772-0.4332=0.044$

따라서 내용물의 용량이 186 mL 이상 188 mL 이하인 음료수는

$500\times 0.044=22$(캔) **답** **22캔**

158

수험생의 시험 성적을 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $N(248,\ 65^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-248}{65}$로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따른다.

합격자의 최저 점수를 k라 하면

$P(X\ge k)=\frac{800}{4000}=0.2$

$P\left(Z\ge \frac{k-248}{65}\right)=0.2$

$P(Z\ge 0)-P\left(0\le Z\le \frac{k-248}{65}\right)=0.2$

$0.5-\mathrm{P}\left(0\le Z\le\dfrac{k-248}{65}\right)=0.2$

$\therefore\ \mathrm{P}\left(0\le Z\le\dfrac{k-248}{65}\right)=0.3$

이때 $\mathrm{P}(0\le Z\le 0.84)=0.3$이므로

$\dfrac{k-248}{65}=0.84\qquad\therefore\ k=302.6$

따라서 합격자의 최저 점수는 302.6점이다.

답 302.6점

159

ㄱ. A, B 두 고등학교 학생들의 성적의 평균이 같고, A고등학교 학생들의 성적의 표준편차가 B고등학교보다 크므로 A고등학교에 성적이 우수한 학생들이 더 많이 있다. (참)

ㄴ. A, B 두 고등학교 학생들의 성적의 평균은 같다. (거짓)

ㄷ. B고등학교 학생들의 성적의 표준편차가 C고등학교보다 더 작다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ㄱ, ㄷ

160

이차방정식 $x^2+Zx+1=0$이 서로 다른 두 실근을 가지므로 판별식을 D라 하면

$D=Z^2-4>0\qquad\therefore\ Z<-2$ 또는 $Z>2$

확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로

$\mathrm{P}(Z<-2$ 또는 $Z>2)=\mathrm{P}(|Z|>2)$

$=1-\mathrm{P}(|Z|\le 2)$

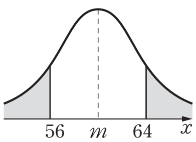
$=1-2\times 0.4772$

$=0.0456$

답 0.0456

161

정규분포 $\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$을 따르는 확률변수 X의 정규분포곡선은 오른쪽 그림과 같이 직선 $x=m$에 대하여 대칭이고, 조건 ㈎에서



$\mathrm{P}(X\ge 64)=\mathrm{P}(X\le 56)$이므로

$m=\dfrac{64+56}{2}=60$, 즉 $\mathrm{E}(X)=60$

조건 ㈏에 의하여

$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2=3616-3600=16$

$\therefore\ \sigma=\sqrt{16}=4$

$\therefore\ \mathrm{P}(X\le 68)=\mathrm{P}(X\le 60+2\times 4)$

$=\mathrm{P}(X\le m+2\sigma)$

$=\mathrm{P}(X\le m)+\mathrm{P}(m\le X\le m+2\sigma)$

$=0.5+0.4772=0.9772$

답 ④

162

확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}(5,\ 3^2)$을 따르므로

$Z_X=\dfrac{X-5}{3}$로 놓으면 Z_X는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

$\therefore\ \mathrm{P}(X\ge k)=\mathrm{P}\left(Z_X\ge\dfrac{k-5}{3}\right)$

또, 확률변수 Y는 정규분포 $\mathrm{N}(16,\ 4^2)$을 따르므로

$Z_Y=\dfrac{Y-16}{4}$으로 놓으면 Z_Y는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

$\therefore\ \mathrm{P}(Y\le -k)=\mathrm{P}\left(Z_Y\le\dfrac{-k-16}{4}\right)$

$=\mathrm{P}\left(Z_Y\ge -\dfrac{-k-16}{4}\right)$

즉, $\mathrm{P}\left(Z_X\ge\dfrac{k-5}{3}\right)=\mathrm{P}\left(Z_Y\ge -\dfrac{-k-16}{4}\right)$이므로

$\dfrac{k-5}{3}=-\dfrac{-k-16}{4}$, $4k-20=3k+48$

$\therefore\ k=68$

답 68

163

학생들의 국어, 영어, 수학 성적을 각각 확률변수 X_1, X_2, X_3이라 하면 X_1, X_2, X_3은 각각 정규분포 $\mathrm{N}(50,\ 13^2)$, $\mathrm{N}(64,\ 17^2)$, $\mathrm{N}(62,\ 14^2)$을 따르므로

$Z_1=\dfrac{X_1-50}{13}$, $Z_2=\dfrac{X_2-64}{17}$, $Z_3=\dfrac{X_3-62}{14}$

로 놓으면 확률변수 Z_1, Z_2, Z_3은 모두 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

A의 국어, 영어, 수학 성적을 표준화하면

국어: $Z_1=\dfrac{65-50}{13}=\dfrac{15}{13}$

영어: $Z_2=\dfrac{82-64}{17}=\dfrac{18}{17}$

수학: $Z_3=\frac{75-62}{14}=\frac{13}{14}$

이고 Z_1, Z_2, Z_3 중 그 값이 클수록 다른 학생에 비해 성적이 좋은 편이다.

따라서 $Z_1>Z_2>Z_3$이므로 상대적으로 가장 성적이 좋은 과목은 국어이다. **답** 국어

164

고객의 집에서 시장까지의 거리를 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(1740,\ 500^2)$을 따르므로

$Z=\frac{X-1740}{500}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

$$\begin{aligned}\therefore \mathrm{P}(X\ge 2000)&=\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{2000-1740}{500}\right)\\&=\mathrm{P}(Z\ge 0.52)\\&=\mathrm{P}(Z\ge 0)-\mathrm{P}(0\le Z\le 0.52)\\&=0.5-0.2=0.3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X<2000)&=1-\mathrm{P}(X\ge 2000)\\&=1-0.3=0.7\end{aligned}$$

집에서 시장까지의 거리가 2000 m 미만인 사건을 A, 자가용을 이용하여 시장에 오는 사건을 B라 하면

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A\cap B)&=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)\\&=0.7\times 0.05=0.035\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A^C\cap B)&=\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B|A^C)\\&=0.3\times 0.15=0.045\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore \mathrm{P}(B)&=\mathrm{P}(A\cap B)+\mathrm{P}(A^C\cap B)\\&=0.035+0.045=0.08\end{aligned}$$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A|B)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(B)}=\frac{0.035}{0.08}=\frac{7}{16}$ **답** ②

165

확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}(100,\ p)$를 따르므로

$\mathrm{E}(X)=100p$ …… ㉠

100은 충분히 큰 수이므로 확률변수 X는 근사적으로 정규분포를 따른다.

이때 $\mathrm{P}(X\ge 25)=0.5$이므로

$\mathrm{E}(X)=25$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $100p=25$ $\therefore p=\frac{1}{4}$

따라서 $\mathrm{V}(X)=100\times\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}=\frac{75}{4}$이므로

$\mathrm{V}(2X)=2^2\mathrm{V}(X)=4\times\frac{75}{4}=75$ **답** 75

166

192명의 고객 중 C 회사의 제품을 선택할 고객의 수를 확률변수 X라 하면 한 명의 고객이 C 회사의 제품을 선택할 확률은 $\frac{25}{100}=\frac{1}{4}$이므로 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(192,\ \frac{1}{4}\right)$을 따른다.

$\therefore \mathrm{E}(X)=192\times\frac{1}{4}=48$

$\mathrm{V}(X)=192\times\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}=36$

이때 192는 충분히 큰 수이므로 확률변수 X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(48,\ 6^2)$을 따른다.

따라서 $Z=\frac{X-48}{6}$로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

$$\begin{aligned}\therefore \mathrm{P}(X\ge 42)&=\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{42-48}{6}\right)=\mathrm{P}(Z\ge -1)\\&=\mathrm{P}(Z\ge 0)+\mathrm{P}(-1\le Z\le 0)\\&=\mathrm{P}(Z\ge 0)+\mathrm{P}(0\le Z\le 1)\\&=0.5+0.3413=0.8413\end{aligned}$$

답 ⑤

167

주어진 식은 한 번의 시행에서 일어날 확률이 $\frac{1}{5}$인 사건이 100번의 시행 중 22번 이상 일어날 확률이다.

한 번의 시행에서 어떤 사건이 일어날 확률이 $\frac{1}{5}$일 때, 100번의 독립시행에서 이 사건이 일어나는 횟수를 확률변수 X라 하면 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(100,\ \frac{1}{5}\right)$을 따르므로

$\mathrm{E}(X)=100\times\frac{1}{5}=20$

$\mathrm{V}(X)=100\times\frac{1}{5}\times\frac{4}{5}=16$

이때 100은 충분히 큰 수이므로 확률변수 X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(20,\ 4^2)$을 따른다.

따라서 $Z=\dfrac{X-20}{4}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

$\therefore$ (주어진 식)

$=\mathrm{P}(X=22)+\mathrm{P}(X=23)+\cdots+\mathrm{P}(X=100)$

$=\mathrm{P}(X\geq 22)$

$=\mathrm{P}\left(Z\geq \dfrac{22-20}{4}\right)$

$=\mathrm{P}(Z\geq 0.5)$

$=\mathrm{P}(Z\geq 0)-\mathrm{P}(0\leq Z\leq 0.5)$

$=0.5-0.1915=0.3085$ **답 0.3085**

168

한 개의 주사위를 450번 던질 때, 1 또는 2의 눈이 나오는 횟수를 확률변수 X라 하면 주사위를 1번 던져 1 또는 2의 눈이 나올 확률은 $\dfrac{2}{6}=\dfrac{1}{3}$이므로 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(450,\ \dfrac{1}{3}\right)$을 따른다.

$\therefore \mathrm{E}(X)=450\times\dfrac{1}{3}=150$

$\mathrm{V}(X)=450\times\dfrac{1}{3}\times\dfrac{2}{3}=100$

이때 450은 충분히 큰 수이므로 확률변수 X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(150,\ 10^2)$을 따른다.

따라서 $Z=\dfrac{X-150}{10}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

즉, $\mathrm{P}(130\leq X\leq c)=0.8185$에서

$\mathrm{P}\left(\dfrac{130-150}{10}\leq Z\leq \dfrac{c-150}{10}\right)=0.8185$

$\mathrm{P}\left(-2\leq Z\leq \dfrac{c-150}{10}\right)=0.8185$

$\mathrm{P}(-2\leq Z\leq 0)+\mathrm{P}\left(0\leq Z\leq \dfrac{c-150}{10}\right)=0.8185$

$\mathrm{P}(0\leq Z\leq 2)+\mathrm{P}\left(0\leq Z\leq \dfrac{c-150}{10}\right)=0.8185$

$0.4772+\mathrm{P}\left(0\leq Z\leq \dfrac{c-150}{10}\right)=0.8185$

$\therefore \mathrm{P}\left(0\leq Z\leq \dfrac{c-150}{10}\right)=0.3413$

이때 $\mathrm{P}(0\leq Z\leq 1)=0.3413$이므로

$\dfrac{c-150}{10}=1$ $\therefore c=160$ **답 160**

169

1600번의 시행 중 10점을 얻는 횟수를 확률변수 X, 2점을 잃는 횟수를 확률변수 Y라 하면

$X+Y=1600$ …… ㉠

점수가 832점인 경우는

$10X-2Y=832$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $X=336$, $Y=1264$

즉, 게임을 1600번 독립적으로 시행한 후의 점수가 832점 이상이려면 $X\geq 336$이어야 한다.

이때 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(1600,\ \dfrac{1}{5}\right)$을 따르므로

$\mathrm{E}(X)=1600\times\dfrac{1}{5}=320$

$\mathrm{V}(X)=1600\times\dfrac{1}{5}\times\dfrac{4}{5}=256$

이때 1600은 충분히 큰 수이므로 확률변수 X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(320,\ 16^2)$을 따른다.

따라서 $Z=\dfrac{X-320}{16}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

$\therefore \mathrm{P}(X\geq 336)=\mathrm{P}\left(Z\geq \dfrac{336-320}{16}\right)=\mathrm{P}(Z\geq 1)$

$=\mathrm{P}(Z\geq 0)-\mathrm{P}(0\leq Z\leq 1)$

$=0.5-0.3413=0.1587$ **답 0.1587**

170

주머니에서 임의로 1장의 카드를 꺼낼 때, 카드에 적힌 숫자를 확률변수 X라 하면 X의 확률분포는 다음 표와 같다.

X	1	3	5	7	9	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	1

$\therefore \mathrm{E}(X)=1\times\dfrac{1}{5}+3\times\dfrac{1}{5}+5\times\dfrac{1}{5}+7\times\dfrac{1}{5}+9\times\dfrac{1}{5}$

$=5$

$\mathrm{V}(X)=1^2\times\dfrac{1}{5}+3^2\times\dfrac{1}{5}+5^2\times\dfrac{1}{5}+7^2\times\dfrac{1}{5}$

$+9^2\times\dfrac{1}{5}-5^2$

$=8$

이때 표본의 크기가 2이므로

$\mathrm{E}(\overline{X})=\mathrm{E}(X)=5$

$\mathrm{V}(\overline{X})=\dfrac{\mathrm{V}(X)}{2}=\dfrac{8}{2}=4$

따라서 $\mathrm{E}(\overline{X}^2)=\mathrm{V}(\overline{X})+\{\mathrm{E}(\overline{X})\}^2=4+5^2=29$,

$\mathrm{V}(4\overline{X}+2)=4^2\mathrm{V}(\overline{X})=16\times4=64$이므로

$\mathrm{E}(\overline{X}^2)+\mathrm{V}(4\overline{X}+2)=93$ **답 93**

171

상자에서 임의로 1개의 공을 꺼낼 때, 공에 적힌 숫자를 확률변수 X라 하면 X의 확률분포는 다음 표와 같다.

X	1	2	3	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	1

$\therefore\ \mathrm{E}(X)=1\times\dfrac{1}{6}+2\times\dfrac{1}{3}+3\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{7}{3}$

$\mathrm{V}(X)=1^2\times\dfrac{1}{6}+2^2\times\dfrac{1}{3}+3^2\times\dfrac{1}{2}-\left(\dfrac{7}{3}\right)^2$

$=\dfrac{5}{9}$

이때 표본의 크기가 n이고 표본평균 $\overline{X}$의 분산이 $\dfrac{5}{36}$이므로

$\mathrm{V}(\overline{X})=\dfrac{\mathrm{V}(X)}{n}=\dfrac{\frac{5}{9}}{n}=\dfrac{5}{36}$

$\therefore\ n=4$ **답 4**

172

모집단이 정규분포 $\mathrm{N}(170,\ 12^2)$을 따르고 표본의 크기가 16이므로 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포

$\mathrm{N}\left(170,\ \dfrac{12^2}{16}\right)$, 즉 $\mathrm{N}(170,\ 3^2)$을 따른다.

이때 $Z=\dfrac{\overline{X}-170}{3}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로

$\mathrm{P}(167\le\overline{X}\le k)=0.8185$에서

$\mathrm{P}\left(\dfrac{167-170}{3}\le Z\le\dfrac{k-170}{3}\right)=0.8185$

$\mathrm{P}\left(-1\le Z\le\dfrac{k-170}{3}\right)=0.8185$

$\mathrm{P}(0\le Z\le1)+\mathrm{P}\left(0\le Z\le\dfrac{k-170}{3}\right)=0.8185$

$0.3413+\mathrm{P}\left(0\le Z\le\dfrac{k-170}{3}\right)=0.8185$

$\therefore\ \mathrm{P}\left(0\le Z\le\dfrac{k-170}{3}\right)=0.8185-0.3413$

$=0.4772$

그런데 $\mathrm{P}(0\le Z\le2)=0.4772$이므로

$\dfrac{k-170}{3}=2,\ k-170=6$

$\therefore\ k=176$ **답 176**

173

모집단이 정규분포 $\mathrm{N}(75,\ 4^2)$을 따르고 표본의 크기가 n이므로 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(75,\ \left(\dfrac{4}{\sqrt{n}}\right)^2\right)$을 따른다.

이때 $Z=\dfrac{\overline{X}-75}{\frac{4}{\sqrt{n}}}$로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로

$\mathrm{P}(73\le\overline{X}\le77)\ge0.9544$에서

$\mathrm{P}\left(\dfrac{73-75}{\frac{4}{\sqrt{n}}}\le Z\le\dfrac{77-75}{\frac{4}{\sqrt{n}}}\right)\ge0.9544$

$\mathrm{P}\left(-\dfrac{\sqrt{n}}{2}\le Z\le\dfrac{\sqrt{n}}{2}\right)\ge0.9544$

$2\mathrm{P}\left(0\le Z\le\dfrac{\sqrt{n}}{2}\right)\ge0.9544$

$\therefore\ \mathrm{P}\left(0\le Z\le\dfrac{\sqrt{n}}{2}\right)\ge0.4772$

그런데 $\mathrm{P}(0\le Z\le2)=0.4772$이므로

$\dfrac{\sqrt{n}}{2}\ge2,\ \sqrt{n}\ge4$ $\qquad\therefore\ n\ge16$

따라서 n의 최솟값은 16이다. **답 16**

174

표본평균 $\overline{x}=300$, 표본의 크기 $n=400$이고, n은 충분히 크므로 모표준편차 대신 표본표준편차 50을 이용한다.

즉, 모평균 m의 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$300-1.96\times\dfrac{50}{\sqrt{400}}\le m\le300+1.96\times\dfrac{50}{\sqrt{400}}$

$\therefore\ 295.1\le m\le304.9$

따라서 신뢰구간에 속하는 자연수는 296, 297, ⋯, 304의 9개이다. **답 9**

175

표본의 크기 1600이 충분히 크므로 모표준편차 대신 표본표준편차 16을 이용한다.
따라서 모평균 m의 신뢰도 95 %의 신뢰구간 $\alpha \le m \le \beta$에 대하여

$\beta-\alpha=2\times1.96\times\dfrac{16}{\sqrt{1600}}=1.568$ **답 1.568**

176

표본의 크기를 n이라 하면
신뢰도 99 %로 추정한 모평균 m의 신뢰구간은

$\bar{x}-2.58\times\dfrac{1}{\sqrt{n}}\le m\le\bar{x}+2.58\times\dfrac{1}{\sqrt{n}}$

$-2.58\times\dfrac{1}{\sqrt{n}}\le m-\bar{x}\le2.58\times\dfrac{1}{\sqrt{n}}$

$|m-\bar{x}|\le2.58\times\dfrac{1}{\sqrt{n}}$

모평균 m과 표본평균 $\bar{x}$의 차가 0.43 km/L 이하이어야 하므로

$2.58\times\dfrac{1}{\sqrt{n}}\le0.43,\ \sqrt{n}\ge6$

$\therefore\ n\ge36$

따라서 적어도 36대의 자동차를 조사해야 한다.
답 36대

177

모집단이 정규분포 $\mathrm{N}(70,\ 2.5^2)$을 따르고 표본의 크기가 16이므로 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포

$\mathrm{N}\left(70,\ \dfrac{2.5^2}{16}\right)$, 즉 $\mathrm{N}\left(70,\ \left(\dfrac{2.5}{4}\right)^2\right)$을 따른다.

이때 $Z=\dfrac{\overline{X}-70}{\frac{2.5}{4}}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로

$\mathrm{P}(|\overline{X}-70|\le a)=0.9544$에서

$\mathrm{P}\left(|Z|\le\dfrac{a}{\frac{2.5}{4}}\right)=0.9544,\ \mathrm{P}\left(|Z|\le\dfrac{8}{5}a\right)=0.9544$

그런데 $\mathrm{P}(|Z|\le2)=0.9544$이므로

$\dfrac{8}{5}a=2$ $\therefore\ a=1.25$ **답 ②**

178

모집단이 정규분포 $\mathrm{N}(9.27,\ 4^2)$을 따르고 표본의 크기가 64이므로 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포

$\mathrm{N}\left(9.27,\ \dfrac{4^2}{64}\right)$, 즉 $\mathrm{N}\left(9.27,\ \left(\dfrac{1}{2}\right)^2\right)$을 따른다.

이때 $Z=\dfrac{\overline{X}-9.27}{\frac{1}{2}}$로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로

$\mathrm{P}(\overline{X}\ge c)\le0.9830$에서 $\mathrm{P}\left(Z\ge\dfrac{c-9.27}{\frac{1}{2}}\right)\le0.9830$

$\mathrm{P}(Z\ge2(c-9.27))\le0.9830$

$\mathrm{P}(2(c-9.27)\le Z\le0)+\mathrm{P}(Z\ge0)\le0.9830$

$\therefore\ \mathrm{P}(2(c-9.27)\le Z\le0)\le0.4830$

그런데 $\mathrm{P}(0\le Z\le2.12)=0.4830$이므로

$2(c-9.27)\ge-2.12$

$c-9.27\ge-1.06$

$\therefore\ c\ge8.21$

따라서 c의 최솟값은 8.21이다. **답 8.21**

179

모집단이 정규분포 $\mathrm{N}(1400,\ 100^2)$을 따르고 표본의 크기가 n이므로 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포

$\mathrm{N}\left(1400,\ \left(\dfrac{100}{\sqrt{n}}\right)^2\right)$을 따른다.

이때 $Z=\dfrac{\overline{X}-1400}{\frac{100}{\sqrt{n}}}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로

$\mathrm{P}\left(\overline{X}\ge1350+\dfrac{165}{\sqrt{n}}\right)\ge0.90$에서

$\mathrm{P}\left(Z\ge\dfrac{-50+\frac{165}{\sqrt{n}}}{\frac{100}{\sqrt{n}}}\right)\ge0.90$

$\mathrm{P}\left(Z\ge1.65-\dfrac{\sqrt{n}}{2}\right)\ge0.90$

$\mathrm{P}\left(1.65-\frac{\sqrt{n}}{2} \leq Z \leq 0\right)+\mathrm{P}(Z \geq 0) \geq 0.90$

$\therefore \mathrm{P}\left(1.65-\frac{\sqrt{n}}{2} \leq Z \leq 0\right) \geq 0.40$

그런데 $\mathrm{P}(0 \leq Z \leq 1.28)=0.40$이므로

$1.65-\frac{\sqrt{n}}{2} \leq -1.28$, $\sqrt{n} \geq 5.86$

$\therefore n \geq 34.3396$

따라서 n의 최솟값은 35이다. **답 35**

180

표본평균 $\overline{x}=20$, 표본표준편차 $s=5$의 결과를 이용하여 모평균 m을 신뢰도 95 %로 추정한 신뢰구간은

$20-1.96 \times \frac{5}{\sqrt{n}} \leq m \leq 20+1.96 \times \frac{5}{\sqrt{n}}$

이때 주어진 신뢰구간이 $19.02 \leq m \leq a$이므로

$20-1.96 \times \frac{5}{\sqrt{n}}=19.02$에서 $0.98=1.96 \times \frac{5}{\sqrt{n}}$

$\sqrt{n}=10$ $\quad\quad \therefore n=100$

$20+1.96 \times \frac{5}{\sqrt{n}}=a$에서 $a=20.98$

$\therefore n+a=120.98$ **답 120.98**

181

모표준편차가 σ, 표본평균이 $\overline{x_1}$, 표본의 크기가 4인 신뢰도 95 %의 신뢰구간 $a \leq m \leq b$에 대하여

$b-a=2 \times 2 \times \frac{\sigma}{\sqrt{4}}=2\sigma$

또, 모표준편차가 σ, 표본평균이 $\overline{x_2}$, 표본의 크기가 n인 신뢰도 99 %의 신뢰구간 $c \leq m \leq d$에 대하여

$d-c=2 \times 3 \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}}=\frac{6\sigma}{\sqrt{n}}$

이때 $b-a=2(d-c)$가 성립하므로

$2\sigma=2 \times \frac{6\sigma}{\sqrt{n}}$

$\sqrt{n}=6$ $\quad\quad \therefore n=36$ **답 36**

182

일반적으로 $\mathrm{P}(-k \leq Z \leq k)=\frac{\alpha}{100}$일 때, 모평균 m의 신뢰도 α %의 신뢰구간은

$\overline{x}-k\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq m \leq \overline{x}+k\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

이므로 $b-a=2k\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

ㄱ. n이 일정할 때, 신뢰도 α %가 커지면 k의 값이 커지므로 $b-a$의 값은 커진다. (참)

ㄴ. 신뢰도 α %가 일정하면 k의 값도 일정하므로 n이 커지면 $b-a$의 값은 작아진다. (거짓)

ㄷ. 신뢰도 α %가 일정하면 k의 값도 일정하므로 n이 2배가 되면 $b-a$의 값은 $\frac{1}{\sqrt{2}}$배가 된다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ이다. **답 ㄱ**