《人工智能逻辑》作业W4

朱致远 3220101842 人工智能

2024.3.20

Q1. 1.把下列公式转化为合取范式和析取范式:

- (a) $(p \vee q) \to (r \vee s)$
- (b) $\neg(p \wedge q \wedge \neg r)$
- (c) $\neg((p \wedge q) \vee (q \vee r) \vee (p \wedge r))$

- (a)

$$\begin{aligned}(p \vee q) \to (r \vee s) &\equiv \neg(p \vee q) \vee (r \vee s) \\ &\equiv (\neg p \wedge \neg q) \vee (r \vee s) \\ &\equiv (\neg p \wedge \neg q) \vee r \vee s\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(p \vee q) \to (r \vee s) &\equiv \neg(p \vee q) \vee (r \vee s) \\ &\equiv (\neg p \wedge \neg q) \vee (r \vee s) \\ &\equiv (\neg p \vee r \vee s) \wedge (\neg q \vee r \vee s)\end{aligned}$$

  DNF: $(\neg p \wedge \neg q) \vee r \vee s$
  CNF: $(\neg p \vee r \vee s) \wedge (\neg q \vee r \vee s)$
- (b)

$$\neg(p \wedge q \wedge \neg r) \equiv \neg p \vee \neg q \vee r$$

  DNF: $\neg p \vee \neg q \vee r$
  CNF: $\neg p \vee \neg q \vee r$
- (c)

$$
\begin{aligned}
\neg((p \wedge q) \vee (q \vee r) \vee (p \wedge r)) &\equiv \neg(p \wedge q) \wedge \neg(q \vee r) \wedge \neg(p \wedge r) \\
&\equiv (\neg p \vee \neg q) \wedge (\neg q \wedge \neg r) \wedge (\neg p \vee \neg r) \\
&\equiv (\neg p \vee \neg q) \wedge \neg q \wedge (\neg p \vee \neg r) \wedge \neg r \\
&\equiv \neg q \wedge \neg r
\end{aligned}
$$

DNF: $\neg q \wedge \neg r$

CNF: $\neg q \wedge \neg r$

Q2. 判断下列子句集合的可满足性。对于可满足的，给出真假赋值；对于不可满足的，说明原因：

- (a) $\{[p, q], [\neg p, \neg q], [\neg p, q]\}$
- (b) $\{[\neg p], [p, \neg q], [q]\}$
- (c) $\{[p], [\,]\}$

- (a)
  $\{[p, q], [\neg p, \neg q], [\neg p, q]\}$可满足等价于 $(p \vee q) \wedge (\neg p \vee \neg q) \wedge (\neg p \vee q)$ 可满足

$$
\begin{aligned}
(p \vee q) \wedge (\neg p \vee \neg q) \wedge (\neg p \vee q) &\equiv (p \wedge (\neg p \vee \neg q)) \vee (q \wedge (\neg p \vee \neg q)) \wedge (\neg p \vee q) \\
&\equiv (p \wedge \neg q) \vee (q \wedge \neg p) \wedge (\neg p \vee q) \\
&\equiv (p \oplus q) \wedge (\neg p \vee q) \\
&\equiv \neg p \vee q
\end{aligned}
$$

  因此$(p \vee q) \wedge (\neg p \vee \neg q) \wedge (\neg p \vee q)$是可满足的，真假赋值$p^v = 0, q^v = 1$即可满足，此时
  $(p \vee q)^v = 1$
  $(\neg p \vee \neg q)^v = 1$
  $(\neg p \vee q)^v = 1$
  所以$\{[p, q], [\neg p, \neg q], [\neg p, q]\}$是可满足的
- (b)
  $\{[\neg p], [p, \neg q], [q]\}$可满足等价于 $\neg p \wedge (p \vee \neg q) \wedge q$ 可满足

$$
\begin{aligned}
\neg p \wedge (p \vee \neg q) \wedge q &\equiv \neg p \wedge (\neg p \to \neg q) \wedge q \\
&\equiv \neg q \wedge q \\
&\equiv \perp
\end{aligned}
$$

  因此$(p \vee q) \wedge (\neg p \vee \neg q) \wedge (\neg p \vee q)$是矛盾式，

所以$\{[\neg p],[p,\neg q],[q]\}$是不可满足的

- (c) $\{[p],[\ ]\}$中已经包含了空子句，这是不可满足的

Q3.用消解来证明如下公式是不可满足的:

- (a) $(p \leftrightarrow (q \rightarrow r)) \wedge ((p \leftrightarrow q) \wedge (p \leftrightarrow \neg r))$
- (b) $\neg(((p \rightarrow q) \rightarrow \neg q) \rightarrow \neg q)$

(a)

$$\begin{aligned}
&(p \leftrightarrow (q \rightarrow r)) \wedge ((p \leftrightarrow q) \wedge (p \leftrightarrow \neg r)) \\
\equiv\ &(p \rightarrow (q \rightarrow r)) \wedge ((q \rightarrow r) \rightarrow p) \wedge ((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)) \wedge (p \rightarrow \neg r) \wedge (\neg r \rightarrow p) \\
\equiv\ &(\neg p \vee (\neg q \vee r)) \wedge (\neg(\neg q \vee r) \vee p) \wedge ((\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee p)) \wedge (\neg p \vee \neg r) \wedge (r \vee p) \\
\equiv\ &(\neg p \vee \neg q \vee r) \wedge ((q \wedge \neg r) \vee p) \wedge (\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee p) \wedge (\neg p \vee \neg r) \wedge (r \vee p) \\
\equiv\ &(\neg p \vee \neg q \vee r) \wedge (q \vee p) \wedge (\neg r \vee p) \wedge (\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee p) \wedge (\neg p \vee \neg r) \wedge (r \vee p)
\end{aligned}$$

得到合取范式的形式，等价于$S=\{[\neg p,\neg q,r],[q,p],[\neg r,p],[\neg p,q],[\neg q,p],[\neg p,\neg r],[r,p]\}$
考虑S的消解闭包$R(S)$进行消解

$$R(S)=\{(\neg p \vee \neg q \vee r),(p \vee q),(p \vee \neg r),(\neg p \vee q),(\neg q \vee p),(\neg p \vee \neg r),(r \vee p)\}$$

$p \vee \neg r$ 和 $p \vee r$: 可以通过将它们消解成 p 得到一个新子句，因此添加 p 到 $R(S)$
p 和 $\neg p \vee q$：由消解规则可知，可以得到 q 为两者的消解，因此添加 q 到 $R(S)$
p 和 $\neg p \vee \neg r$：由消解规则可知，可以得到 $(\neg r)$ 为两者的消解，因此添加 $(\neg r)$ 到 $R(S)$
$\neg r$ 和 $\neg p \vee \neg q \vee r$：由消解规则可知，可得 $(\neg p \vee \neg q)$ 为两者的消解，因此添加 $(\neg p \vee \neg q)$ 到 $R(S)$
p 和 $\neg p \vee \neg q$：由消解规则可知，可以得到 $(\neg q)$ 为两者的消解，因此添加 $(\neg q)$ 到 $R(S)$
q 和 $\neg q$：由消解规则可知，可以得到一个空子句 $[\ ]$。空子句的出现说明 S 是不可满足的
由于子句集合S和命题的等价性，可知命题$(p \leftrightarrow (q \rightarrow r)) \wedge ((p \leftrightarrow q) \wedge (p \leftrightarrow \neg r))$不可满足

- (b)

$$
\begin{aligned}
\neg(((p \to q) \to \neg q) \to \neg q) &\equiv \neg(\neg((p \to q) \to \neg q) \vee \neg q) \\
&\equiv \neg(\neg(\neg(p \to q) \vee \neg q) \vee \neg q) \\
&\equiv \neg(((p \to q) \wedge q) \vee \neg q) \\
&\equiv \neg\big(((p \to q) \vee \neg q) \wedge (q \vee \neg q)\big) \\
&\equiv \neg\big((p \to q) \vee \neg q\big) \\
&\equiv \neg(p \to q) \wedge q \\
&\equiv \neg(\neg p \vee q) \wedge q \\
&\equiv (p \wedge \neg q \wedge q)
\end{aligned}
$$

得到合取范式的形式，等价于$S = \{[p], [\neg q], [q]\}$

由消解规则可知，两个子句 $[\neg q]$ 和 $[q]$ 消解得到空子句 $[\ ]$，因此 S 是不可满足的

由于子句集合S和命题的等价性，可知命题$\neg(((p \to q) \to \neg q) \to \neg q)$不可满足