

《人工智能逻辑》作业W8

朱致远 3220101842 人工智能

2024.4.22

Q1.给定如下TBox T:

$$\begin{aligned}A &\sqsubseteq B \\ B &\sqsubseteq C \\ C &\sqsubseteq \exists R.D \\ D &\sqsubseteq \neg A\end{aligned}$$

- (1) T是否可满足? 如果是, 给出T的一个模型。
- (2) 概念表达式 $A \sqcap D$ 是否关于T可满足? 如果是, 给出T的一个模型, 使得 $A \sqcap D$ 的解释为非空。
- (1)

TBox可满足的定义是: 如果存在一个解释 (interpretation), 可以使得TBox中的所有概念和关系都被赋予了非空的解释, 则该TBox是可满足的。

我们给出如下的解释 \mathcal{I} :

$$\Delta^{\mathcal{I}} = \{a, b, c, d\}$$

$$A^{\mathcal{I}} = \{a\}$$

$$B^{\mathcal{I}} = \{a, b\}$$

$$C^{\mathcal{I}} = \{a, b, c\}$$

$$R^{\mathcal{I}} = \{(a, d), (b, d), (c, d)\}$$

$$D^{\mathcal{I}} = \{d\}$$

则根据以上解释 \mathcal{I} , 我们有

$$\begin{aligned}(\neg A)^{\mathcal{I}} &= \Delta^{\mathcal{I}} / A^{\mathcal{I}} = \{b, c, d\} \\ (\exists R.D)^{\mathcal{I}} &= \{x \in \Delta^{\mathcal{I}} \mid \exists y \in \Delta^{\mathcal{I}} : (x, y) \in R^{\mathcal{I}}, y \in D^{\mathcal{I}}\} = \{a, b, c\}\end{aligned}$$

带入可知, 以上模型可以使得 TBox \mathcal{T} 的概念与关系都被赋予非空的解释。因此, \mathcal{T} 是可满足的。

- (2)

我们证明, 概念表达式 $A \sqcap D$ 关于 \mathcal{T} 不可满足。

$A \sqcap D$ 关于 \mathcal{T} 不可满足 $\iff A$ 与 D 不相交 \iff 对于 \mathcal{T} 的任何解释 \mathcal{I} , 都有 $A^{\mathcal{I}} \cap D^{\mathcal{I}} = \emptyset$

对于任意可满足的解释 \mathcal{I} ，我们有

$$(\neg A)^{\mathcal{I}} = \Delta^{\mathcal{I}} / A^{\mathcal{I}}$$

$$D^{\mathcal{I}} \subseteq (\neg A)^{\mathcal{I}} = \Delta^{\mathcal{I}} / A^{\mathcal{I}}$$

$$\therefore A^{\mathcal{I}} \cap D^{\mathcal{I}} \subseteq A^{\mathcal{I}} \cap (\Delta^{\mathcal{I}} / A^{\mathcal{I}}) = \emptyset$$

因此我们有 A 和 D 不相交，即 $A \sqcap D$ 关于 \mathcal{T} 不可满足。

Q2. 给定知识库 $\mathcal{K} = (\mathcal{T}, \mathcal{A})$ ，其中 \mathcal{T} 是如下的 **TBox**：

$$\begin{aligned} (Ax1) \quad & A \sqsubseteq B \\ (Ax2) \quad & B \sqsubseteq C \\ (Ax3) \quad & C \sqsubseteq \exists R.D \\ (Ax4) \quad & D \sqsubseteq \neg A \\ (Ax5) \quad & A \sqsubseteq \forall R.A \end{aligned}$$

\mathcal{A} 是如下的 **ABox**：

$$\{a : A, c : D, (a, b) : R, (b, c) : R\}$$

- 使用表方法来计算知识库 \mathcal{K} 是否可满足。如果是，给出 \mathcal{K} 的一个模型。

根据 \mathcal{T} 中的普通包含公理可知：

$$\hat{C} = (\neg A \sqcup B) \sqcap (\neg B \sqcup C) \sqcap (\neg C \sqcup \exists R.D) \sqcap (\neg D \sqcup \neg A) \sqcap (\neg A \sqcup \forall R.A)$$

随后，我们对 \mathcal{A} 结合 $\top \sqsubseteq \hat{C}$ 验证可满足性：

由 \mathcal{A} 和 \sqcap 规则可知， $a : B$

类似地，我们可以推出 $a : C$

由 \forall 规则可知： $(a : a) \in R$

由 \exists 规则可知： $b : D, b : C$

综合以上推断与规则，我们得到了一个解释 \mathcal{I} ：

$$\Delta^{\mathcal{I}} = \{a, b, c\}$$

$$\mathcal{A}^{\mathcal{I}} = \{a\}$$

$$\mathcal{B}^{\mathcal{I}} = \{a\}$$

$$\mathcal{C}^{\mathcal{I}} = \{a, b\}$$

$$\mathcal{D}^{\mathcal{I}} = \{b, c\}$$

$$\mathcal{R}^{\mathcal{I}} = \{(a,b), (b,c), (a,a)\}$$

该解释经过验证满足 $\mathcal{K} = (\mathcal{T}, \mathcal{A})$ 中的所有条件，所以知识库 \mathcal{K} 是可以满足的