作业四(一)

241880547 韩朝

EX4.1

16.
$|A_1 \times A_2 \times A_3| = |A_1 \times A_2||A_3| = |A_1||A_2||A_3| = n_1 \cdot n_2 \cdot n_3$

18.
投影(选择雇员[部门 = 公共关系部])[姓氏] $= \{Gonzalaz\}$
投影(选择雇员[部门 = 研究部])[姓氏] $= \{Boswell, Sahni\}$

24.
不是, 因为$0 \in \mathbb{Z}$而$0 \notin A_1, 0 \notin A_2$

30.
(1)按能否被6整除划分，$\{\{0, 6, 12, 18, \cdots\}, \{3, 9, 15, 21, \cdots\}\}$
(2)按模9的余数划分, 余数为$0, 3, 6\{\{0, 9, 18, \cdots\}, \{3, 12, 21, \cdots\}, \{6, 15, 24, \cdots\}\}$

31.
(1)$\{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}$
(2)$\{\{1\}, \{2, 3\}\}$
(3)$\{\{2\}, \{1, 3\}\}$
(4)$\{\{3\}, \{1, 2\}\}$
(5)$\{\{1, 2, 3\}\}$

33.
$S(3, 2) = S(2, 1) + 2S(2, 2) = 1 + 2 \times 1 = 3$，与31题结果一致

34.
$S(4, 2) = S(3, 1) + 2 + 3S(3, 2) = 1 + 2 \times 3 = 7$，与32题结果一致

35.
$S(4, 3) = S(3, 2) + 3S(3, 3) = 3 + 3 \times 1 = 6$

36.
$S(5,2) = S(4,1) + 2S(4,2) = 1 + 2 \times 7 = 15$

37.
$\forall (x,y) \in A \times (B \cup C)$
$\Leftrightarrow x \in A \land y \in (B \cup C)$
$\Leftrightarrow (x \in A \land y \in B) \lor (x \in A \land y \in C)$
$\Leftrightarrow (x,y) \in A \times B \lor (x,y) \in A \times C$
$\Leftrightarrow (x,y) \in (A \times B) \cup (A \times C)$
$\therefore A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$

38.
$B \cap C = \{7\}, A \times (B \cap C) = \{(1,7),(2,7),(4,7)\}$
$A \times B = \{(1,2),(1,5),(1,7),(2,2),(2,5),(2,7),(4,2),(4,5),(4,7)\}$
$A \times C = \{(1,1),(1,3),(1,7),(2,1),(2,3),(2,7),(4,1),(4,3),(4,7)\}$
$(A \times B) \cap (A \times C) = \{(1,7),(2,7),(4,7)\}$
$\therefore A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$

39.
设B的一个划分为$\{B_1, B_2, \cdots, B_m\}$
$\forall a \in A, \exists i, a \in B_i$, 即$a \in A \cap B_i$
排除$A \cap B_j$为空集的情况, A的一个划分为$\{B_1 \cap A, B_2 \cap A, \cdots, B_n \cap A\}$
40.
$A_i \times B_j \subseteq A \times B$
$\forall (i,j) \neq (k,l), A_i \cap A_k = \emptyset, B_j \cap B_k = \emptyset$
$\therefore (A_i \times B_j) \cap (A_k \times B_l) = \emptyset$
$\bigcup_{i=1}^{k} \bigcup_{j=1}^{m} (A_i \times B_j) = A \times B$
$\therefore p$是$A \times B$的一个划分

EX4.2

20.
$(\Rightarrow) \forall A_1, A_2 \subseteq A, R(A_1 \cap A_2) = R(A_1) \cap R(A_2)$
取$A_1 = \{a\}, A_2 = \{b\}, a \neq b, a, b \in A$
则$A_1 \cap A_2 = \emptyset$
$\therefore R(a) \cap R(b) = R(\{a\}) \cap R(\{b\})$
$= R(A_1 \cap A_2) = R(\emptyset) = \emptyset$

$(\Leftarrow) \forall a, b \in A, a \neq b, R(a) \cap R(b) = \emptyset$

$\forall y \in R(A_1) \cap R(A_2), \exists x_1 \in A_1, x_2 \in A_2, (x_1, y) \in R, (x_2, y) \in R$
若$x_1 \neq x_2$,则$R(x_1) \cap R(x_2) = \emptyset$,与$y \in R(A_1) \cap R(A_2)$矛盾
$\therefore x_1 = x_2$,即$x_1 \in A_1 \cap A_2$
$\therefore y \in R(A_1 \cap A_2)$
$\therefore R(A_1) \cap R(A_2) \subseteq R(A_1 \cap A_2)$
又$\because R(A_1 \cap A_2) \subseteq R(A_1) \cap R(A_2)$
$\therefore R(A_1 \cap A_2) = R(A_1) \cap R(A_2)$
综上，命题成立

25.
$R = \{(1,2),(2,2),(2,3),(3,4),(4,4),(5,1),(5,4),\}$
$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$
26.
$R = \{(1,2),(1,3),(1,4),(2,2),(2,3),(4,1),(4,4),(4,5)\}$
$$M_R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
28.

顶点	1	2	3	4	5
入度	1	2	2	2	1
出度	3	2	0	3	0

32.
假设$A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}, B = \{a_{i_1}, a_{i_2}, ..., a_{i_k}\}, i_1, ..., i_k$是$B$中元素在$A$中的索引
从M_R中提取行和列对应于B中元素的子矩阵
例如$A = \{a_1, a_2, a_3\}, B = \{a_1, a_3\}$
$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
$$M_{R|B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$
34.
(a)查看M_R中第k列的所有非零元素对应行的索引i
$R(a_k) = \{a_i | M_R[i][k] = 1\}$
$(b)R(\{a_1, a_2, a_3\}) = R(a_1) \cup R(a_2) \cup R(a_3)$

用(a)的方法求$R(a_1), R(a_2), R(a_3)$再取并集

36.
$|S| = 2 \times 3 = 6, |S \times S| = 36,$ 有2^{36}种关系

EX4.3

18.
$M_{R \cup S}[i][j] = 1$
$\Leftrightarrow (a_i, a_j) \in R$或$(a_i, a_j) \in S$
$\Leftrightarrow (M_R[i][j] = 1) \vee (M_S[i][j] = 1) \therefore M_{R \cup S} = M_R \vee M_S$

19.
$x_i R^* x_j$当且仅当$i = j$或对某个$n, M_{R_n}[i][j] = 1$
$\because R^\infty = \bigcup_{i=1}^{\infty} R^i$
$\therefore M_{R^*}[i][j] = 1$当且仅当$i = j$或$M_{R^\infty}[i][j] = 1$
$\therefore M_{R^*} = I_n \vee M_{R^*}$

$20. 1, 2, 4, 3, 5, 6, 4$

$21. 1, 7, 5, 6, 7, 4, 3$

27.
表明$M_R \cdot M_R$中第(i, j)位置元素是从i到j长度为2的道路数
因为它也是满足$a_{ik} = b_{kj} = 1$的k的个数

28.
一般化：$(M_R)^n$表明$M_R \cdot M_R$中第(i, j)位置元素是从i到j长度为n的道路数
例如，$(M_R)^3$表明$M_R \cdot M_R$中第(i, j)位置元素是从i到j长度为n的道路数

30.
(a)
$P(2)$为真为归纳法提供了初始条件
由$P(k)$为真得出$P(k+1)$为真，覆盖了所有$n \geq$ 的情况，说明其证明是恰当的
(b)
中心思想是将长度为$k+1$的路径分解为长度为k的路径 $+$
一条边，运用矩阵乘积完成递推证明

31.

假设D中所有顶点的出度至少为1，那么从任意顶点v_0出发，可以到达另一个顶点v_1
重复此过程，由于顶点有限，最终会重复访问某个顶点，形成环
这与D中无任何环矛盾
所z至少有一个顶点的出度为0

32.

$V_1 \to V_2 \to V_3 \to V_4 \to V_5 \to V_6$

33.
(1)比较顶点集是否相同
(2)比较边是否完全相同
(3)如果顶点和边完全一致，则正确，否则至少一个图是错的

EX4.4

14.自反，对称

16.自反，对称，传递

18.对称

20.自反，对称，传递

22.自反，对称，传递

31.
假设aRb且bRa
$\because R$是传递的
$\therefore aRa$
这与R是非自反的矛盾
所以假设不成立，R是非对称的

32.
假设$(a,b) \in R^2$且$(b,c) \in R^2$
则$\exists x \in A, (a,x) \in R$且$(x,b) \in R$
$\exists x \in A, (b,y) \in R$且$(y,c) \in R$
$\because R$是传递的$, (x,b) \in R, (b,y) \in R$

$\therefore (x,y) \in R \because (a,x) \in R$
$\therefore (a,y) \in R \because (y,c) \in R$
$\therefore (a,c) \in R^2$
$\therefore R^2$是传递的

33.
考虑$(a,b) \in R$
$\because R$是对称的 $\therefore (b,a) \in R$
$\because R$是传递的 $\therefore (a,a) \in R$
$\therefore R$不能是非自反的

34.
假设$(a,b) \in R^2$
则$\exists x \in A, (a,x) \in R$且$(x,b) \in R$
$\because R$是对称的
$\therefore (b,x) \in R, (x,a) \in R$
$\therefore (b,a) \in R^2$
$\therefore R^2$是对称的

35.
$n=1$时$R^1 = R$是对称的
假设R^k是对称的,考虑$(a,b) \in R^{k+1}$
$\exists c \in A, (a,c) \in R^k$且$(c,b) \in R$
$\because R$和R^k都是对称的
$\therefore (b,c) \in R, (c,a) \in R^k$
$\therefore (b,a) \in R^{k+1}$
$\therefore R^{k+1}$是对称的
$\therefore R^n$对任意$n \geq 1$也是对称的

36.
定义R在$\mathbb{Z}^+$上$(a,b) \in R$当j仅当a和b为奇数
自反性 : a为奇数,则$(a,a) \in R$
对称性 : $(a,b) \in R, b$和a都是奇数,则$(b,a) \in R$
传递性 : $(a,b) \in R$且$(b,c) \in R$,则a,b,c都是奇数,则$(a,c) \in R$

38.
$(1) R = \{(a,b),(b,c),(a,c)\}$
$(2) R = \{(a,a),(b,b),(c,c),(d,d),(a,b),(b,c),\}$

40.
$(\Rightarrow)$假设R是传递的，需证$\forall n \geq 1, R^n \subseteq R$
显然$R^1 \subseteq R$
假设$R^k \subseteq R,$ 考虑$(a,c) \in R^{k+1}$
则$\exists b, (a,b) \in R^k, (b,c) \in R$
$\therefore (a,b) \in R \because R$是传递的
$\therefore (a,c) \in R \therefore R^{k+1} \subseteq R$
$\therefore \forall n \geq 1, R^n \subseteq R$

$(\Leftarrow)$假设$\forall n \geq 1, R^n \subseteq R,$ 需证R是传递的
取$n = 2,$ 则$R^2 \subseteq R$
若$(a,b) \in R$且$(b,c) \in R,$ 则$(a,c) \in R^2$
$\because R^2 \subseteq R \therefore (a,c) \in R$
$\therefore R$是传递的
综上，命题成立

EX4.5

19.
(a)
自反性 : $a^2 + b^2 = a^2 + b^2$
对称性 : $a^2 + b^2 = b^2 + a^2$
传递性 : 若$a^2 + b^2 = c^2 + d^2, c^2 + d^2 = e^2 + f^2,$ 则$a^2 + b^2 = e^2 + f^2$
$(b) A/R$包括$(0,0)$以及以$(0,0)$为中心的所有同心圆

20.
$R(a) = R(b) = R(c) = R(e) = \{a,b,c,e\}, R(d) = \{d\}$
$A/R = \{\{a,b,c,e\},\{d\}\}$
22.
(a)
自反性 : $a + b = a + b$
对称性 : $a + b = b + a$
传递性 : 若$a + b = c + d, c + d = e + f,$ 则$a + b = e + f$
$(b) A/R = \{\{(1,1)\},\{(1,2),(2,1)\},\{(1,3),(2,2),(3,1)\},$
$\{(1,4),(2,3),(3,2),(4,1)\},\{(2,4),(3,3),(4,2),\},\{(3,4),(4,3)\},\{(4,4)\},\}$

23.
$(\Rightarrow)$假设R是自反的和循环的，需证R是一个等价关系
考虑aRb, bRb，则$bRa,$ 所有R是对称的

考虑aRb, bRc，则cRa, 所以aRc, 所有R是传递的
$\therefore R$是一个等价关系

($\Leftarrow$)假设R是一个等价关系, 需证R是自反的和循环的
显然R是自反和对称的
考虑aRb, bRc，则aRc, 所以cRa, 所有R是循环的
综上，命题成立

24.
自反性 : $(a, a) \in R_1, (a, a) \in R_2, (a, a) \in R_1 \cap R_2$
对称性 : 考虑$(a, b) \in R_1 \cap R_2$
则$(a, b) \in R_1, (a, b) \in R_2$
则$(b, a) \in R_1, (b, a) \in R_2$
则$(b, a) \in R_1 \cap R_2$
传递性 : $(a, b) \in R_1 \cap R_2, (b, c) \in R_1 \cap R_2$
则$(a, b) \in R_1, (a, b) \in R_2$ $(b, c) \in R_1, (b, c) \in R_2$
则$(a, c) \in R_1, (a, c) \in R_2$
则$(a, c) \in R_1 \cap R_2$

27.
如果a和b奇偶性相同, $R(a) + R(b) = \{x|x = s + t, s \in R(a), t \in R(b)\} = \{x|x$是偶数$\} = R(a + b)$
如果a和b奇偶性相反, $R(a) + R(b) = \{x|x = s + t, s \in R(a), t \in R(b)\} = \{x|x$是奇数$\} = R(a + b)$
综上，$R(a) + R(b) = R(a + b)$

28.
$R((a, b)) = (x, y) \in A|y = b$
则$R(b_1) + R(b_2) = R(b_1 + b_2)$
$\forall a, b \in \mathbb{Z}, R(a) + (b) = R(a + b)$

29.
$(1, 2)R(2, 4), (1, 3)R(3, 1)$, 但$((1, 2) + (1, 3)) \not R\ ((2, 4) + (3, 1))$
所以$R((a, b)) + R((a', b'))$不是一个等价类