### **AUTOVALORES Y AUTOVECTORES**

Definiciones. Interpretación geométrica. Círculos de Gerschgorin. Método de las potencias. Método de la potencia: código. Factorización QR. Código.

#### Manuel Carlevaro

Departamento de Ingeniería Mecánica

Grupo de Materiales Granulares - UTN FRLP

manuel.carlevaro@gmail.com

## Definición: Autovalor y autovector.

Sea  ${\pmb A} \in K^{n \times n}$  y  ${\pmb v} \in K^n$ .  ${\pmb v}$  es un **autovector** de  ${\pmb A}$  si

$$Av = \lambda v$$

donde  $\lambda$  es un escalar en K, denominado **autovalor** asociado con  ${m v}$ .

1

### Definición: Autovalor y autovector.

Sea  ${m A} \in K^{n imes n}$  y  ${m v} \in K^n$ .  ${m v}$  es un **autovector** de  ${m A}$  si

$$\mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda \mathbf{v}$$

donde  $\lambda$  es un escalar en K, denominado **autovalor** asociado con  ${m v}$ .

En forma equivalente:

$$(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})\mathbf{v} = \mathbf{0} \tag{1}$$

Este sistema tiene solución  $oldsymbol{v} 
eq oldsymbol{0}$  si y solo si:

$$\det(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I}) = 0$$

denominado **polinomio característico**,  $p_A(\lambda)$ , y por el teorema fundamental del álgebra:  $\mapsto n$  raíces.

1

## Definición: Autovalor u autovector.

Sea  ${m A} \in K^{n imes n}$  y  ${m v} \in K^n$ .  ${m v}$  es un **autovector** de  ${m A}$  si

$$\mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda \mathbf{v}$$

donde  $\lambda$  es un escalar en K, denominado **autovalor** asociado con  ${m v}$ .

En forma equivalente:

$$(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})\mathbf{v} = \mathbf{0} \tag{1}$$

Este sistema tiene solución  $oldsymbol{v} 
eq oldsymbol{0}$  si y solo si:

$$\det(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I}) = 0$$

denominado **polinomio característico**,  $p_A(\lambda)$ , y por el teorema fundamental del álgebra:  $\mapsto n$  raíces.

### Ejemplo:

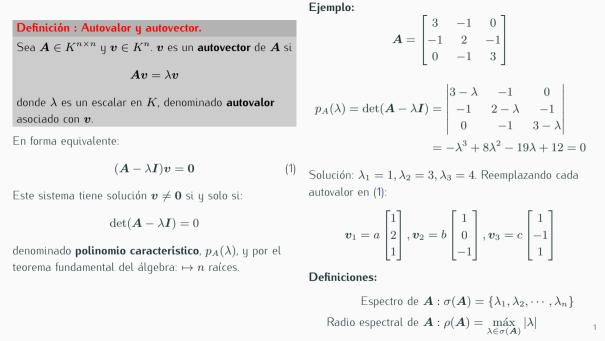
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$p_A(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = \begin{vmatrix} 3 - \lambda & -1 & 0 \\ -1 & 2 - \lambda & -1 \\ 0 & -1 & 3 - \lambda \end{vmatrix}$$
$$= -\lambda^3 + 8\lambda^2 - 19\lambda + 12 = 0$$

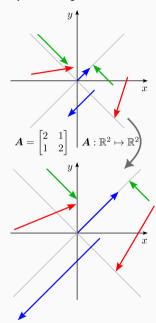
Solución:  $\lambda_1=1, \lambda_2=3, \lambda_3=4$ . Reemplazando cada autovalor en (1):

$$oldsymbol{v}_1 = aegin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}, oldsymbol{v}_2 = begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}, oldsymbol{v}_3 = cegin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix}$$

1

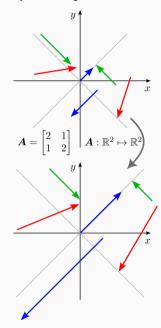


## Intepretación gráfica



$$p_A(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = \begin{vmatrix} 2 - \lambda & 1\\ 1 & 2 - \lambda \end{vmatrix}$$
$$= (2 - \lambda)^2 - 1 = \lambda^2 - 4\lambda + 3 = (\lambda - 3)(\lambda - 1) = 0$$

## Intepretación gráfica

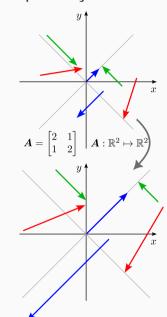


$$p_A(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = \begin{vmatrix} 2 - \lambda & 1\\ 1 & 2 - \lambda \end{vmatrix}$$
$$= (2 - \lambda)^2 - 1 = \lambda^2 - 4\lambda + 3 = (\lambda - 3)(\lambda - 1) = 0$$

Con  $\lambda_1 = 3$ :

$$\begin{cases} (2-3)x + y &= 0 \\ x + (2-3)y &= 0 \end{cases} \Longrightarrow \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

### Intepretación gráfica



$$p_A(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = \begin{vmatrix} 2 - \lambda & 1\\ 1 & 2 - \lambda \end{vmatrix}$$
$$= (2 - \lambda)^2 - 1 = \lambda^2 - 4\lambda + 3 = (\lambda - 3)(\lambda - 1) = 0$$

Con  $\lambda_1 = 3$ :

$$\begin{cases} (2-3)x + y &= 0 \\ x + (2-3)y &= 0 \end{cases} \Longrightarrow \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Con  $\lambda_2 = 1$ :

$$\begin{cases} (2-1)x + y &= 0 \\ x + (2-1)y &= 0 \end{cases} \Longrightarrow \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

**Nota:** si consideramos la norma vectorial  $l_2:\|\cdot\|$ :

$$\|\boldsymbol{A}\|_2 = \rho(\boldsymbol{A}^{\dagger}\boldsymbol{A})^{1/2}$$

Si 
$$m{A}$$
 es simétrica,  $\|m{A}\|_2 = 
ho(m{A})$ .

### Métodos:

- Analítico: n < 5.
- Parciales: computan solo autovalores extremos (módulo máximo o mínimo). Método de las potencias.
- Globales: aproximan a todo el **espectro** de A,  $\sigma(A)$ . Método QR.

#### Métodos:

- Analítico: n < 5.
- Parciales: computan solo autovalores extremos (módulo máximo o mínimo). Método de las potencias.
- Globales: aproximan a todo el **espectro** de A,  $\sigma(A)$ . Método QR.

### Teorema : Círculo de Gerschgorin.

 $m{A} \in K^{n \times n}$ ,  $r_i = \sum_{j \neq i}^n |a_{ij}|$  para cada  $i = 1, 2, \cdots, n$ . Sea

$$C_i = \{ z \in \mathbb{C} : |z - a_{ii}| \le r_i \}$$

- 1. Si  $\lambda$  es un autovalor, está en uno de los  $C_i$ .
- 2. Si k círculos  $C_i$  forman una región conectada  $R \in \mathbb{C}$ , disjunta de los restantes n-k círculos, entonces R contiene exactamente k autovalores.

#### Métodos:

- Analítico: n < 5.
- Parciales: computan solo autovalores extremos (módulo máximo o mínimo). Método de las potencias.
- Globales: aproximan a todo el **espectro** de A,  $\sigma(A)$ . Método QR.

# Teorema : Círculo de Gerschgorin.

 $A \in K^{n \times n}$ ,  $r_i = \sum_{j \neq i}^n |a_{ij}|$  para cada  $i = 1, 2, \cdots, n$ . Sea

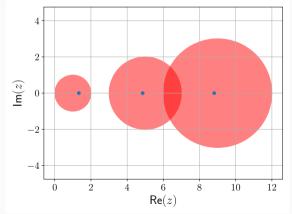
$$C_i = \{ z \in \mathbb{C} : |z - a_{ii}| \le r_i \}$$

- 1. Si  $\lambda$  es un autovalor, está en uno de los  $C_i$ .
- 2. Si k círculos  $C_i$  forman una región conectada  $R \in \mathbb{C}$ , disjunta de los restantes n-k círculos, entonces R contiene exactamente k autovalores.

### Ejemplo:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 5 & 1 \\ -2 & -1 & 9 \end{bmatrix}$$

$$r_1 = |-1| + |0| = 1, r_2 = |1| + |1| = 2, r_3 = |-2| + |-1| = 3.$$
  
 $\lambda_1 = 1.33192769, \lambda_2 = 8.81113862, \lambda_3 = 4.85693369.$ 



#### Método de las potencias:

 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , con elementos de  $\sigma(A)$  que satisfacen: $|\lambda_1| > |\lambda_2| \ge |\lambda_3| \ge \cdots \ge |\lambda_n|$ .  $\lambda_1$ : autovalor dominante.  $\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$  forman una base en  $\mathbb{R}^n$  (linealmente independientes).

$$x = \sum_{j=1}^{n} \beta_j v_j$$

Multiplicando ambos miembros por  $m{A}, m{A}^2, \cdots, m{A}^k, \cdots$ :

$$oldsymbol{A}oldsymbol{x} = \sum_{j=1}^n eta_j oldsymbol{A}oldsymbol{v}_j = \sum_{j=1}^n eta_j \lambda_j oldsymbol{v}_j$$

$$oldsymbol{A}^2oldsymbol{x} = \sum_{j=1}^n eta_j \lambda_j oldsymbol{A} oldsymbol{v}_j = \sum_{j=1}^n eta_j \lambda_j^2 oldsymbol{v}_j$$

$$oldsymbol{A}^k oldsymbol{x} = \sum_{j=1}^n eta_j \lambda_j^k oldsymbol{v}_j$$

Factorizando  $\lambda_1$  en la última ecuación:

$$oldsymbol{A}^k oldsymbol{x} = \lambda_1^k \sum_{j=1}^n eta_j \left(rac{\lambda_j}{\lambda_1}
ight)^k oldsymbol{v}_j$$

Dado que  $\forall j, |\lambda_1| > |\lambda_j|; \lim_{k \to \infty} (\lambda_j/\lambda_1)^k = 0$ , y

$$\lim_{k \to \infty} \mathbf{A}^k \mathbf{x} = \lim_{k \to \infty} \lambda_1^k \beta_1 \mathbf{v}_1 \tag{2}$$

Si  $|\lambda_1| < 1$ , (2)  $\mapsto$  **0**, si  $|\lambda_1| > 1$ , (2) diverge  $(\beta_1 \neq 0)$ .

# Método de las potencias:

 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , con elementos de  $\sigma(A)$  que satisfacen: $|\lambda_1| > |\lambda_2| \ge |\lambda_3| \ge \cdots \ge |\lambda_n|$ .  $\lambda_1$ : autovalor dominante.  $\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$  forman una base en  $\mathbb{R}^n$  (linealmente independientes).

$$x = \sum_{j=1}^{n} \beta_j v_j$$

Multiplicando ambos miembros por  $m{A}, m{A}^2, \cdots, m{A}^k, \cdots$ :

$$oldsymbol{A}oldsymbol{x} = \sum_{j=1}^n eta_j oldsymbol{A}oldsymbol{v}_j = \sum_{j=1}^n eta_j \lambda_j oldsymbol{v}_j$$

$$oldsymbol{A}^2oldsymbol{x} = \sum_{j=1}^n eta_j \lambda_j oldsymbol{A} oldsymbol{v}_j = \sum_{j=1}^n eta_j \lambda_j^2 oldsymbol{v}_j$$

$$oldsymbol{A}^k oldsymbol{x} = \sum_{j=1}^n eta_j \lambda_j^k oldsymbol{v}_j$$

Factorizando  $\lambda_1$  en la última ecuación:

$$oldsymbol{A}^k oldsymbol{x} = \lambda_1^k \sum_{j=1}^n eta_j \left(rac{\lambda_j}{\lambda_1}
ight)^k oldsymbol{v}_j$$

Dado que  $\forall j, |\lambda_1| > |\lambda_j|; \lim_{k \to \infty} (\lambda_j/\lambda_1)^k = 0$ , y

$$\lim_{k \to \infty} \mathbf{A}^k \mathbf{x} = \lim_{k \to \infty} \lambda_1^k \beta_1 \mathbf{v}_1 \tag{2}$$

Si  $|\lambda_1| < 1$ , (2)  $\mapsto$  **0**, si  $|\lambda_1| > 1$ , (2) diverge  $(\beta_1 \neq 0)$ .

#### **Procedimiento:**

- lacktriangle Iniciamos con  $oldsymbol{x}=[1,1,\cdots,1]^{\intercal}$
- ▶ Generamos la secuencia

$$oldsymbol{y}_k = oldsymbol{A} oldsymbol{x}_k, \quad oldsymbol{x}_{k+1} = rac{1}{c_{k+1}} oldsymbol{y}_k$$

donde  $c_{k+1} = \| \boldsymbol{y}_k \|_{\infty}$ 

#### **Entonces:**

$$\lim_{k\to\infty} \boldsymbol{x}_k = \boldsymbol{v}_1, \quad \lim_{k\to\infty} c_k = \lambda_1$$

## Ejemplo:

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}, v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Con 
$$\sigma(\boldsymbol{A}) = \{4,1\}$$
. Tomemos  $\boldsymbol{x}_0 = [1,1]^\intercal$ :

$$\mathbf{A}\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} -5\\13 \end{bmatrix} = 13[-0.38462, 1]^{\mathsf{T}} = c_1\mathbf{x}_1$$

$$A x_1 = \begin{bmatrix} -2.23077 \\ 4.69231 \end{bmatrix} = 4.69231[-0.47541, 1]^{\mathsf{T}} = c_2 x_2$$

$$\mathbf{A}\mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} -2.04918 \\ 4.14754 \end{bmatrix} = 4.14754[-0.49407, 1]^{\mathsf{T}} = c_3\mathbf{x}_3$$

$$\mathbf{A}\mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix} -2.01186\\ 4.03557 \end{bmatrix} = 4.03557[-0.49853, 1]^{\mathsf{T}} = c_4\mathbf{x}_4$$

$$\mathbf{A}\mathbf{x}_4 = \begin{bmatrix} -2.00294 \\ 4.00881 \end{bmatrix} = 4.00881[-0.49963, 1]^{\mathsf{T}} = c_5\mathbf{x}_5$$

$$m{A}m{x}_5 = egin{bmatrix} -2.00073 \ 4.00220 \end{bmatrix} = 4.00220[-0.49991, 1]^\intercal = c_6m{x}_6$$

# Resulta:

$$\lim_{k o \infty} oldsymbol{x}_k = egin{bmatrix} -rac{1}{2} \ 1 \end{bmatrix}, & \lim_{k o \infty} c_k = 4 \end{bmatrix}$$

### Ejemplo:

$$m{A} = \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}, m{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}, m{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\text{Con } \sigma(m{A}) = \{4,1\}. \text{ Tomemos } m{x}_0 = [1,1]^\intercal:$$

$$_{2} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$_{2}=\begin{bmatrix} \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}^{\mathsf{T}}$$

$$\begin{bmatrix} 2 \\ \end{bmatrix}$$
  $\begin{bmatrix} -1 \\ \end{bmatrix}$   
=  $[1,1]^{\mathsf{T}}$ :

$$= [1, 1]^{\mathsf{T}}$$
:

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_0 = \begin{bmatrix} -5\\13 \end{bmatrix} = 13[-0.38462,1]^{\mathsf{T}} = c_1\boldsymbol{x}_1$$

$$\mathbf{A}\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} -2.23077 \\ 4.69231 \end{bmatrix} = 4.69231[-0.47541, 1]^{\mathsf{T}} = c_2\mathbf{x}_2$$

$$\mathbf{A}\mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} -2.04918 \\ 4.14754 \end{bmatrix} = 4.14754[-0.49407, 1]^{\mathsf{T}} = c_3\mathbf{x}_3$$

$$lackbox{ t No}$$
 No se sabe al inicio si  $oldsymbol{A}$  tiene un autovalor dominante.

lacktriangle No se conoce cómo debe elegirse  $m{x}_0$  para que tenga una contribución no nula del autovector asociado al autovalor dominante, si existe.

$$\mathbf{A}\mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix} -2.01186 \\ 4.03557 \end{bmatrix} = 4.03557[-0.49853, 1]^{\mathsf{T}} = c_4\mathbf{x}_4$$

$$\begin{bmatrix} -2.00294 \end{bmatrix} = 4.03881[-0.40963, 1]^{\mathsf{T}} = c_4\mathbf{x}_4$$

$$\mathbf{A}\mathbf{x}_4 = \begin{bmatrix} -2.00294 \\ 4.00881 \end{bmatrix} = 4.00881[-0.49963, 1]^{\mathsf{T}} = c_5\mathbf{x}_5$$

$$\mathbf{A}\mathbf{x}_5 = \begin{bmatrix} -2.00073 \\ 4.00220 \end{bmatrix} = 4.00220[-0.49991, 1]^{\mathsf{T}} = c_6\mathbf{x}_6$$

$$\lim_{k o \infty} oldsymbol{x}_k = egin{bmatrix} -rac{1}{2} \ 1 \end{bmatrix}, & \lim_{k o \infty} c_k = 4$$

### Método de las potencias: código

```
1 #!/usr/bin/env pvthon3
 2 import numpy as np
 3
 4 def iter potencia(A, num iteraciones):
       n = A.shape[0]
 5
       # Inicializar un vector unitario de tamaño n
       x = np.ones(n)
 8
       for in range(num iteraciones):
 9
           # Multiplicar la matriz A por el vector x
10
           y = np.dot(A, x)
1.1
           # Obtener la norma máxima
12
           y abs = np.abs(y)
13
           c = v abs.max()
14
           # Normalizar el vector resultante
15
           x = v / c
16
17
       # Devolver el autovalor dominante y el autovector
18
       # correspondiente
19
       return c. x
20
```

```
22 # Eiemplo de uso
23 # Definir una matriz de ejemplo
24 A = np.array([[0, 11, -5],
                 [-2, 17, -7],
25
                 [-4, 26, -1011)
26
27
28 # Especificar el número de iteraciones
29 \text{ num iteraciones} = 100
30
31 # Aplicar el algoritmo de las potencias
32 autovalor, autovector = iter potencia(A, num iteraciones)
33
34 print(f"Autovalor dominante: {autovalor}")
35 print("Autovector correspondiente:")
36 print(autovector)
```

```
$ ./potencias.py
Autovalor dominante: 3.99999999999876
Autovector correspondiente:
[0.4 0.6 1.]
```

# Método QR

#### Teorema:.

Si A es una matriz y  $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k$  son autovalores distintos de A con autovectores asociados  $\{v_1, v_2, \cdots, v_k\}$ , entonces  $\{v_1, v_2, \cdots, v_k\}$  es un conjunto linealmente independiente.

## Método QR

#### Teorema:.

Si A es una matriz y  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$  son autovalores distintos de A con autovectores asociados  $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ , entonces  $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$  es un conjunto **linealmente independiente**.

## Definición: Conjunto ortogonal/ortonormal.

Un conjunto de vectores  $\{ m{v}_1, m{v}_2, \cdots, m{v}_k \}$  recibe el nombre de **ortogonal** si  $\langle m{v}_i, m{v}_j \rangle = 0$  para todo  $i \neq j$ . Si, además,  $\langle m{v}_i, m{v}_i \rangle = 1$  para toda  $i = 1, 2, \cdots, n$ , el conjunto recibe el nombre de **ortonormal**.

Dado que  $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle = \|\boldsymbol{x}\|_2^2, \forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ , el conjunto  $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_k\}$  es ortonormal si y solo si:

$$\| {m v}_i \|_2 = 1$$
 para todo  $i = 1, 2, \cdots, n$ 

## MÉTODO QR

#### Teorema:.

Si A es una matriz y  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$  son autovalores distintos de A con autovectores asociados  $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ , entonces  $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$  es un conjunto **linealmente independiente**.

## Definición: Conjunto ortogonal/ortonormal.

Un conjunto de vectores  $\{ m{v}_1, m{v}_2, \cdots, m{v}_k \}$  recibe el nombre de **ortogonal** si  $\langle m{v}_i, m{v}_j \rangle = 0$  para todo  $i \neq j$ . Si, además,  $\langle m{v}_i, m{v}_i \rangle = 1$  para toda  $i = 1, 2, \cdots, n$ , el conjunto recibe el nombre de **ortonormal**.

Dado que  $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle = \|\boldsymbol{x}\|_2^2, \forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ , el conjunto  $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_k\}$  es ortonormal si y solo si:

$$\| {m v}_i \|_2 = 1$$
 para todo  $i = 1, 2, \cdots, n$ 

#### Teorema : Proceso de Gram-Schmidt.

Sea  $\{x_1, x_2, \cdots, x_k\}$  un conjunto de k vectores linealmente independientes en  $\mathbb{R}^n$ . Entonces,  $\{v_1, v_2, \cdots, v_k\}$  definido mediante:

$$egin{aligned} oldsymbol{v}_1 &= oldsymbol{x}_1 \ oldsymbol{v}_2 &= oldsymbol{x}_2 - rac{\langle oldsymbol{x}_2, oldsymbol{v}_1 
angle}{\langle oldsymbol{v}_1, oldsymbol{v}_1 
angle} oldsymbol{v}_1 \ oldsymbol{v}_3 &= oldsymbol{x}_3 - rac{\langle oldsymbol{x}_3, oldsymbol{v}_1 
angle}{\langle oldsymbol{v}_1, oldsymbol{v}_1 
angle} oldsymbol{v}_1 - rac{\langle oldsymbol{x}_3, oldsymbol{v}_2 
angle}{\langle oldsymbol{v}_2, oldsymbol{v}_2 
angle} oldsymbol{v}_2 \end{aligned}$$

$$oldsymbol{v}_k = oldsymbol{x}_k - \sum_{i=1}^{k-1} rac{\langle oldsymbol{x}_k, oldsymbol{v}_i 
angle}{\langle oldsymbol{v}_i, oldsymbol{v}_i 
angle} oldsymbol{v}_i$$

es un conjunto de k vectores ortogonales en  $\mathbb{R}^n$ .

$$S = \left\{ oldsymbol{x}_1 = egin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}, oldsymbol{x}_2 = egin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} 
ight\}$$

$$S = \left\{ \boldsymbol{x}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{x}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$$

$$v_1 = x_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$v_2 = x_2 - \frac{\langle x_2, v_1 \rangle}{\langle v_1, v_1 \rangle} v_1$$

$$= \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} - \frac{8}{10} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2/5 \\ 6/5 \end{bmatrix}$$

$$S = \left\{ \boldsymbol{x}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{x}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$$

$$v_1 = x_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$v_2 = x_2 - \frac{\langle x_2, v_1 \rangle}{\langle v_1, v_1 \rangle} v_1$$

$$= \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} - \frac{8}{10} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2/5 \\ 6/5 \end{bmatrix}$$

Verificación:

$$\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \rangle = -\frac{6}{5} + \frac{6}{5} = 0$$

$$S = \left\{ \boldsymbol{x}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{x}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$$

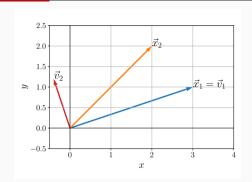
$$v_1 = x_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$v_2 = x_2 - \frac{\langle x_2, v_1 \rangle}{\langle v_1, v_1 \rangle} v_1$$

$$= \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} - \frac{8}{10} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2/5 \\ 6/5 \end{bmatrix}$$

Verificación:

$$\langle oldsymbol{v}_1,oldsymbol{v}_2
angle = -rac{6}{5}+rac{6}{5}=0$$



Vectores ortonormales:

$$\hat{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\hat{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{\frac{40}{25}}} \begin{bmatrix} -2/5 \\ 6/5 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

# Definición: Matriz ortogonal.

Se dice que una matriz Q es **ortogonal** si sus columnas  $\{q_1,q_2,\cdots,q_n\}$  forman un conjunto ortonormal en  $\mathbb{R}^n$ .

## Definición : Matriz ortogonal.

Se dice que una matriz Q es **ortogonal** si sus columnas  $\{q_1,q_2,\cdots,q_n\}$  forman un conjunto ortonormal en  $\mathbb{R}^n$ .

## Propiedades:

- $lackbox{ } oldsymbol{Q}$  es invertible con  $oldsymbol{Q}^{-1} = oldsymbol{Q}^\intercal$
- $lackbox{} orall oldsymbol{x}, oldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n, \langle oldsymbol{Q} oldsymbol{x}, oldsymbol{Q} oldsymbol{y} 
  angle = \langle oldsymbol{x}, oldsymbol{y} 
  angle$
- $lackbox{lack} orall oldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n, \|oldsymbol{Q}oldsymbol{x}\|_2 = \|oldsymbol{x}\|_2$
- $lackbox{ }$  Cualquier matriz invertible  $oldsymbol{Q}$  con  $oldsymbol{Q}^{-1} = oldsymbol{Q}^\intercal$  es ortogonal.

## Definición : Matriz ortogonal.

Se dice que una matriz Q es **ortogonal** si sus columnas  $\{q_1, q_2, \cdots, q_n\}$  forman un conjunto ortonormal en  $\mathbb{R}^n$ .

# Propiedades:

- $lackbox{ } oldsymbol{Q}$  es invertible con  $oldsymbol{Q}^{-1} = oldsymbol{Q}^\intercal$
- $lackbox{} orall oldsymbol{x}, oldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n, \langle oldsymbol{Q} oldsymbol{x}, oldsymbol{Q} oldsymbol{y} 
  angle = \langle oldsymbol{x}, oldsymbol{y} 
  angle$
- $lackbox{lack} orall oldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n, \|oldsymbol{Q}oldsymbol{x}\|_2 = \|oldsymbol{x}\|_2$
- $lackbox{ }$  Cualquier matriz invertible  $oldsymbol{Q}$  con  $oldsymbol{Q}^{-1} = oldsymbol{Q}^\intercal$  es ortogonal.

#### Definición: Matriz similar.

Dos matrices  $\boldsymbol{A}$  y  $\boldsymbol{B}$  son **similares** si existe una matriz no singular  $\boldsymbol{S}$  con  $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{S}$ .

### Definición: Matriz ortogonal.

Se dice que una matriz Q es **ortogonal** si sus columnas  $\{q_1, q_2, \cdots, q_n\}$  forman un conjunto ortonormal en  $\mathbb{R}^n$ .

## **Propiedades:**

- $lackbox{ } oldsymbol{Q}$  es invertible con  $oldsymbol{Q}^{-1} = oldsymbol{Q}^\intercal$
- $lackbox{} orall oldsymbol{x}, oldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n, \langle oldsymbol{Q} oldsymbol{x}, oldsymbol{Q} oldsymbol{y} 
  angle = \langle oldsymbol{x}, oldsymbol{y} 
  angle$
- $\blacktriangleright \ \forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n, \|\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}\|_2 = \|\boldsymbol{x}\|_2$
- $lackbox{ }$  Cualquier matriz invertible  $oldsymbol{Q}$  con  $oldsymbol{Q}^{-1} = oldsymbol{Q}^\intercal$  es ortogonal.

## Definición: Matriz similar.

Dos matrices A y B son **similares** si existe una matriz no singular S con  $A = S^{-1}BS$ .

#### Teorema:.

Si  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{B}$  son matrices similares con  $\mathbf{A} = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{S}$ , y  $\lambda$  es un autovalor de  $\mathbf{A}$  con el autovector  $\mathbf{v}$  asociado, entonces  $\lambda$  es un autovalor de  $\mathbf{B}$  con autovector asociado  $\mathbf{S}\mathbf{v}$ .

## Definición: Matriz ortogonal.

Se dice que una matriz Q es **ortogonal** si sus columnas  $\{q_1,q_2,\cdots,q_n\}$  forman un conjunto ortonormal en  $\mathbb{R}^n$ .

## **Propiedades:**

- $oldsymbol{Q}$  es invertible con  $oldsymbol{Q}^{-1} = oldsymbol{Q}^\intercal$
- $lackbox{} orall oldsymbol{x}, oldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n, \langle oldsymbol{Q} oldsymbol{x}, oldsymbol{Q} oldsymbol{y} 
  angle = \langle oldsymbol{x}, oldsymbol{y} 
  angle$
- $lackbox{lack} orall oldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n, \|oldsymbol{Q}oldsymbol{x}\|_2 = \|oldsymbol{x}\|_2$
- $lackbox{ }$  Cualquier matriz invertible  $oldsymbol{Q}$  con  $oldsymbol{Q}^{-1} = oldsymbol{Q}^\intercal$  es ortogonal.

#### Definición: Matriz similar.

Dos matrices A y B son **similares** si existe una matriz no singular S con  $A = S^{-1}BS$ .

### Teorema:.

Si  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{B}$  son matrices similares con  $\mathbf{A} = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{S}$ , y  $\lambda$  es un autovalor de  $\mathbf{A}$  con el autovector  $\mathbf{v}$  asociado, entonces  $\lambda$  es un autovalor de  $\mathbf{B}$  con autovector asociado  $\mathbf{S}\mathbf{v}$ .

### Teorema:.

Una matriz  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es similar a una matriz diagonal  $\mathbf{D}$  si y sólo si  $\mathbf{A}$  tiene n autovectores linealmente independientes. En este caso  $\mathbf{D} = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{S}$ , donde las columnas de  $\mathbf{S}$  son los autovectores y el i-ésimo elemento diagonal de  $\mathbf{D}$  es el autovalor que corresponde a la i-ésima columna de  $\mathbf{S}$ .

#### Teorema: Teorema de Schur.

Sea  $m{A}$  una matriz arbitraria. Existe una matriz no singular  $m{U}$  con la propiedad de que

$$T = U^{-1}AU$$

donde T es una matriz triangular superior, cuyas entradas diagonales consisten en autovalores de A.

Se cumple  $\|\boldsymbol{U}\boldsymbol{x}\|_2 = \|\boldsymbol{x}\|_2, \forall \boldsymbol{x} \mapsto \text{matrices unitarias}.$ 

#### Teorema: Teorema de Schur.

Sea  $m{A}$  una matriz arbitraria. Existe una matriz no singular  $m{U}$  con la propiedad de que

$$T = U^{-1}AU$$

donde T es una matriz triangular superior, cuyas entradas diagonales consisten en autovalores de A.

Se cumple  $\| \boldsymbol{U} \boldsymbol{x} \|_2 = \| \boldsymbol{x} \|_2, \forall \boldsymbol{x} \mapsto \mathsf{matrices}$  unitarias.

Factorización QR:  $oldsymbol{A} = oldsymbol{Q} oldsymbol{R}$ , donde:

- $lackbox{ } oldsymbol{Q}$  es una matriz ortogonal
- $lackbox{ } oldsymbol{R}$  es una matriz triangular superior

### Teorema : Teorema de Schur.

Sea  $m{A}$  una matriz arbitraria. Existe una matriz no singular  $m{U}$  con la propiedad de que

$$T = U^{-1}AU$$

donde T es una matriz triangular superior, cuyas entradas diagonales consisten en autovalores de A.

Se cumple  $\| \boldsymbol{U} \boldsymbol{x} \|_2 = \| \boldsymbol{x} \|_2, \forall \boldsymbol{x} \mapsto \mathsf{matrices}$  unitarias.

## Factorización QR: $oldsymbol{A} = oldsymbol{Q} oldsymbol{R}$ , donde:

- $lackbox{ } oldsymbol{Q}$  es una matriz ortogonal
- lacktriangledown R es una matriz triangular superior

#### Cálculo de la factorización:

- Ortogonalización de Gram-Schmidt
- ▶ Reflexiones de Householder

# Ortogonalización de Gram-Schmidt:

$$A=[oldsymbol{a}_1|oldsymbol{a}_2|\cdots|oldsymbol{a}_n] \ u_1=oldsymbol{a}_1,\quad oldsymbol{e}_1=rac{oldsymbol{u}_1}{\|oldsymbol{u}_1\|} \ u_2=oldsymbol{a}_2-\langleoldsymbol{e}_1,oldsymbol{a}_2
angle,\quad oldsymbol{e}_2=rac{oldsymbol{u}_2}{\|oldsymbol{u}_2\|} \ u_3=oldsymbol{a}_3-\langleoldsymbol{e}_1,oldsymbol{a}_2
angle,\quad oldsymbol{e}_2=rac{oldsymbol{u}_2}{\|oldsymbol{u}_2\|} \ dots$$

$$oldsymbol{u}_k = oldsymbol{a}_k - \sum_{j=1}^{k-1} \langle oldsymbol{e}_j, oldsymbol{a}_k 
angle, \quad oldsymbol{e}_k = rac{oldsymbol{u}_k}{\|oldsymbol{u}_k\|}$$

### Teorema : Teorema de Schur.

Sea  $m{A}$  una matriz arbitraria. Existe una matriz no singular  $m{U}$  con la propiedad de que

$$T = U^{-1}AU$$

donde T es una matriz triangular superior, cuyas entradas diagonales consisten en autovalores de A.

Se cumple  $\| \boldsymbol{U} \boldsymbol{x} \|_2 = \| \boldsymbol{x} \|_2, \forall \boldsymbol{x} \mapsto \mathsf{matrices}$  unitarias.

# Factorización QR: $oldsymbol{A} = oldsymbol{Q} oldsymbol{R}$ , donde:

- $lackbox{ } oldsymbol{Q}$  es una matriz ortogonal
- lacktriangleright R es una matriz triangular superior

#### Cálculo de la factorización:

- Ortogonalización de Gram-Schmidt
- ▶ Reflexiones de Householder

## Ortogonalización de Gram-Schmidt:

$$egin{align} m{A} &= m{[a_1|a_2|\cdots|a_n]} \ m{u}_1 &= m{a}_1, \quad m{e}_1 = rac{m{u}_1}{\|m{u}_1\|} \ m{u}_2 &= m{a}_2 - \langle m{e}_1, m{a}_2 
angle, \quad m{e}_2 = rac{m{u}_2}{\|m{u}_2\|} \ m{u}_3 &= m{a}_3 - \langle m{e}_1, m{a}_3 
angle - \langle m{e}_2, m{a}_3 
angle, \quad m{e}_3 = rac{m{u}_3}{\|m{u}_3\|} \ m{\cdot} \ \m{\cdot} \ m{\cdot} \ m{\cdot} \ \m{\cdot} \m{\cdot} \m{\cdot} \$$

$$oldsymbol{u}_k = oldsymbol{a}_k - \sum_{j=1}^{k-1} \langle oldsymbol{e}_j, oldsymbol{a}_k 
angle, \quad oldsymbol{e}_k = rac{oldsymbol{u}_k}{\|oldsymbol{u}_k\|}$$

Ahora podemos expresar los  $oldsymbol{a}_i$  en la nueva base:

$$egin{aligned} oldsymbol{a}_1 &= \langle oldsymbol{e}_1, oldsymbol{a}_1 
angle e_1, oldsymbol{a}_2 
angle e_1 + \langle oldsymbol{e}_2, oldsymbol{a}_2 
angle e_2 \ oldsymbol{a}_3 &= \langle oldsymbol{e}_1, oldsymbol{a}_3 
angle e_1 + \langle oldsymbol{e}_2, oldsymbol{a}_3 
angle e_2 + \langle oldsymbol{e}_3, oldsymbol{a}_3 
angle e_3 \ & \ldots \end{aligned}$$

$$oldsymbol{a}_k = \sum_{j=1}^k \langle oldsymbol{e}_j, oldsymbol{a}_k 
angle oldsymbol{e}_j$$

Resulta  $oldsymbol{A} = oldsymbol{Q} oldsymbol{R}$ , con  $oldsymbol{Q} = [oldsymbol{e}_1 | oldsymbol{e}_2 | \cdots | oldsymbol{e}_n]$ , y

$$m{R} = egin{bmatrix} \langle m{e_1}m{a_1}
angle & \langle m{e_1}m{a_2}
angle & \langle m{e_1}m{a_3}
angle & \cdots & \langle m{e_1}m{a_n}
angle \ 0 & \langle m{e_2}m{a_2}
angle & \langle m{e_2}m{a_3}
angle & \cdots & \langle m{e_2}m{a_n}
angle \ 0 & 0 & \langle m{e_3}m{a_3}
angle & \cdots & \langle m{e_3}m{a_n}
angle \ dots & dots & dots & dots & \ddots & \ddots \ 0 & 0 & 0 & \cdots & \langle m{e_n},m{a_n}
angle \end{bmatrix}$$

Resulta  $oldsymbol{A} = oldsymbol{Q} oldsymbol{R}$ , con  $oldsymbol{Q} = [oldsymbol{e}_1 | oldsymbol{e}_2 | \cdots | oldsymbol{e}_n]$ , y

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \langle \mathbf{e}_1 \mathbf{a}_1 \rangle & \langle \mathbf{e}_1 \mathbf{a}_2 \rangle & \langle \mathbf{e}_1 \mathbf{a}_3 \rangle & \cdots & \langle \mathbf{e}_1 \mathbf{a}_n \rangle \\ 0 & \langle \mathbf{e}_2 \mathbf{a}_2 \rangle & \langle \mathbf{e}_2 \mathbf{a}_3 \rangle & \cdots & \langle \mathbf{e}_2 \mathbf{a}_n \rangle \\ 0 & 0 & \langle \mathbf{e}_3 \mathbf{a}_3 \rangle & \cdots & \langle \mathbf{e}_3 \mathbf{a}_n \rangle \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \langle \mathbf{e}_n, \mathbf{a}_n \rangle \end{bmatrix}$$

## Código Python:

```
1 #!/usr/bin/env python3
2
3 import numpy as np
4
6 def gram_schmidt_qr(A):
6     m, n = A.shape
7     Q = np.zeros((m, n))
8     R = np.zeros((n, n))
```

```
for j in range(n):
10
11
           v = A[:, i]
12
           for i in range(i):
               R[i, j] = np.dot(0[:, i], A[:, j])
13
               v = v - R[i, i] * 0[:, i]
14
15
           R[j, j] = np.linalg.norm(v)
16
           0[:. i] = v / R[i. i]
17
18
       return Q, R
19
20 # Eiemplo de uso
21 # Definir una matriz de ejemplo
22 A = np.array([[1, 4, 3],
                 [2, 5, 1],
23
                 [3, 6, 211)
24
25
26 # Aplicar la factorización OR usando el método
27 # de Gram-Schmidt
28 O. R = gram schmidt gr(A)
20
30 print("Matriz Q:")
31 print(0)
32 print("Matriz R:")
33 print(R)
```

## Método QR para el cálculo de autovalores:

Algoritmo recursivo que computa  $\{A_k\}_{k=0}^{\infty}$  con los siquientes pasos:

- 1.  $A_0 = A$
- 2. Para  $k = 0, 1, 2, ..., \, \mathsf{dado} \, \boldsymbol{A}_k$ :
  - 2.1 Calcular  $oldsymbol{Q}_{k+1}oldsymbol{R}_{k+1}=oldsymbol{A}_k$
  - 2.2 Definir  $oldsymbol{A}_{k+1} = oldsymbol{Q}_{k+1} oldsymbol{R}_{k+1}$

### Método QR para el cálculo de autovalores:

Algoritmo recursivo que computa  $\{A_k\}_{k=0}^{\infty}$  con los siguientes pasos:

- 1.  $A_0 = A$
- 2. Para  $k = 0, 1, 2, ..., dado A_k$ :
  - 2.1 Calcular  $oldsymbol{Q}_{k+1}oldsymbol{R}_{k+1}=oldsymbol{A}_k$
  - 2.2 Definir  $oldsymbol{A}_{k+1} = oldsymbol{Q}_{k+1} oldsymbol{R}_{k+1}$

### Teorema: Convergencia.

Si los autovalores de una matriz  $oldsymbol{A}$  verifican que

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| > \dots > |\lambda_n| > 0$$

entonces la suceción de matrices equivalentes contruidas con el algoritmo QR converge a una matriz triangular superior.

## Código Python:

```
1 #!/usr/bin/env pvthon3
 2 import numpy as np
 4 def algoritmo gr(A, num iter):
       n = A.shape[0]
       autovalores = np.zeros(n, dtype=np.complex128)
       for in range(num iter):
           0, R = np.linalg.gr(A)
           A = np.dot(R. 0)
 9
       for i in range(n):
10
           autovalores[i] = A[i, i]
1.1
       return autovalores
12
13
14 A = np.array([[1, 2. 3].
15
                 [4, 5, 6].
                 [7, 8, 911)
16
17
18 \text{ num iter} = 100
19 autovalores = algoritmo gr(A, num iter)
20 print("Autovalores:")
21 print(autovalores)
```

- ▶ R.L. Burden, D.J. Faires y A.M. Burden. *Análisis numérico*. 10.ª ed. Mexico: Cengage Learning, 2017. Capítulo 9.
- Carlos Moreno González. Introducción al cálculo numérico. Madrid, España: Universidad Nacional de Educación a Distancia, 2014. Capítulo 3.
- ▶ B. Bradie. *A Friendly Introduction to Numerical Analysis*. New Jersey, United States: Pearson Education Inc., 2006. Capítulo 4.
- A.J. Salgado y S.M. Wise. *Classical Numerical Analysis*. Cambridge, United Kingdom: Cambridge University Press, 2023. DOI: 10.1017/9781108942607. Capítulo 8.
- A. Quarteroni, R. Sacco y F. Saleri. *Numerical Mathematics*. New York, United States: Springer-Verlag, 2000. Capítulo 5.