

NORMAS DE VECTORES Y MATRICES

Manuel Carlevaro

Departamento de Ingeniería Mecánica

Grupo de Materiales Granulares - UTN FRLP

manuel.carlevaro@gmail.com

Cálculo Avanzado • 2024

 · Xe_{La}TeX · 

Motivación:

Error en escalar:

$$|x^* - x| \sim \delta x$$

¿Cómo es el error en \mathbb{R}^n o en $\mathbb{R}^{m \times n}$?

$$\boldsymbol{x} \mapsto \delta \boldsymbol{x}$$

o

$$(\boldsymbol{A} + \delta \boldsymbol{A})(\boldsymbol{x} + \delta \boldsymbol{x}) = \boldsymbol{b} + \delta \boldsymbol{b}$$

Motivación:

Error en escalar:

$$|x^* - x| \sim \delta x$$

¿Cómo es el error en \mathbb{R}^n o en $\mathbb{R}^{m \times n}$?

$$\boldsymbol{x} \mapsto \delta \boldsymbol{x}$$

o

$$(\boldsymbol{A} + \delta \boldsymbol{A})(\boldsymbol{x} + \delta \boldsymbol{x}) = \boldsymbol{b} + \delta \boldsymbol{b}$$

Definición : Espacio vectorial.

Un *espacio vectorial* sobre el cuerpo K ($K = \mathbb{R}$ o $K = \mathbb{C}$), es un conjunto no vacío V , cuyos elementos se denominan **vectores**, y en el que se definen dos operaciones: **suma** y **multiplicación escalar**.

Motivación:

Error en escalar:

$$|x^* - x| \sim \delta x$$

¿Cómo es el error en \mathbb{R}^n o en $\mathbb{R}^{m \times n}$?

$$x \mapsto \delta x$$

o

$$(A + \delta A)(x + \delta x) = b + \delta b$$

Definición : Espacio vectorial.

Un *espacio vectorial* sobre el cuerpo K ($K = \mathbb{R}$ o $K = \mathbb{C}$), es un conjunto no vacío V , cuyos elementos se denominan **vectores**, y en el que se definen dos operaciones: **suma** y **multiplicación escalar**.

Propiedades:

1. La suma es conmutativa y asociativa.
2. $\exists \mathbf{0} \in V$ (vector cero o nulo) tal que $\mathbf{v} + \mathbf{0} = \mathbf{v}$, $\forall \mathbf{v} \in V$.
3. $0 \cdot \mathbf{v} = \mathbf{0}$, $1 \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v}$, donde 0 y 1 son respectivamente el cero y uno de K .
4. $\forall \mathbf{v} \in V, \exists -\mathbf{v} \in V : \mathbf{v} + (-\mathbf{v}) = \mathbf{0}$.
5. Propiedad distributiva:
 - $\forall \alpha \in K, \forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V, \alpha(\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \alpha\mathbf{v} + \alpha\mathbf{w}$.
 - $\forall \alpha, \beta \in K, \forall \mathbf{v} \in V, (\alpha + \beta)\mathbf{v} = \alpha\mathbf{v} + \beta\mathbf{v}$.
6. Propiedad asociativa:
 - $\forall \alpha, \beta \in K, \forall \mathbf{v} \in V, (\alpha\beta)\mathbf{v} = \alpha(\beta\mathbf{v})$

Motivación:

Error en escalar:

$$|x^* - x| \sim \delta x$$

¿Cómo es el error en \mathbb{R}^n o en $\mathbb{R}^{m \times n}$?

$$x \mapsto \delta x$$

o

$$(A + \delta A)(x + \delta x) = b + \delta b$$

Definición : Espacio vectorial.

Un *espacio vectorial* sobre el cuerpo K ($K = \mathbb{R}$ o $K = \mathbb{C}$), es un conjunto no vacío V , cuyos elementos se denominan **vectores**, y en el que se definen dos operaciones: **suma** y **multiplicación escalar**.

Propiedades:

1. La suma es conmutativa y asociativa.
2. $\exists \mathbf{0} \in V$ (vector cero o nulo) tal que $\mathbf{v} + \mathbf{0} = \mathbf{v}$, $\forall \mathbf{v} \in V$.
3. $0 \cdot \mathbf{v} = \mathbf{0}$, $1 \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v}$, donde 0 y 1 son respectivamente el cero y uno de K .
4. $\forall \mathbf{v} \in V, \exists -\mathbf{v} \in V : \mathbf{v} + (-\mathbf{v}) = \mathbf{0}$.
5. Propiedad distributiva:
 - ▶ $\forall \alpha \in K, \forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V, \alpha(\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \alpha\mathbf{v} + \alpha\mathbf{w}$.
 - ▶ $\forall \alpha, \beta \in K, \forall \mathbf{v} \in V, (\alpha + \beta)\mathbf{v} = \alpha\mathbf{v} + \beta\mathbf{v}$.
6. Propiedad asociativa:
 - ▶ $\forall \alpha, \beta \in K, \forall \mathbf{v} \in V, (\alpha\beta)\mathbf{v} = \alpha(\beta\mathbf{v})$

Ejemplos:

- ▶ $V = \mathbb{R}^n$ ($V = \mathbb{C}^n$), $n > 1$.
- ▶ $V = \mathbb{P}_n = \{p_n(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k\}$, $n \geq 0$.
- ▶ $V = \mathcal{C}^p([a, b])$, $0 \leq p \leq \infty$.

Definición : Producto escalar.

Un **producto escalar** en V definido sobre K es cualquier mapeo $\langle \cdot, \cdot \rangle, V \times V \mapsto K$ con las siguientes propiedades:

1. Es lineal respecto de los vectores en V :

$$\langle \gamma \mathbf{x} + \lambda \mathbf{z}, \mathbf{y} \rangle = \gamma \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + \lambda \langle \mathbf{z}, \mathbf{y} \rangle$$

$$\forall \mathbf{x}, \mathbf{z} \in V, \forall \gamma, \lambda \in K.$$

2. Es hermítico:

$$\langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle = \overline{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle}, \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$$

3. Es definido positivo:

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \geq 0, \quad \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}$$

Definición : Producto escalar.

Un **producto escalar** en V definido sobre K es cualquier mapeo $\langle \cdot, \cdot \rangle, V \times V \mapsto K$ con las siguientes propiedades:

1. Es lineal respecto de los vectores en V :

$$\langle \gamma \mathbf{x} + \lambda \mathbf{z}, \mathbf{y} \rangle = \gamma \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + \lambda \langle \mathbf{z}, \mathbf{y} \rangle$$

$$\forall \mathbf{x}, \mathbf{z} \in V, \forall \gamma, \lambda \in K.$$

2. Es hermítico:

$$\langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle = \overline{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle}, \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$$

3. Es definido positivo:

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \geq 0, \quad \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}$$

Definición : Norma vectorial.

Sea V un espacio vectorial sobre K . El mapeo $\|\cdot\| \mapsto \mathbb{R}$ es una **norma** si se cumple que:

1. (i) $\|\mathbf{v}\| \geq 0 \forall \mathbf{v} \in V$ y (ii) $\|\mathbf{v}\| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{v} = \mathbf{0}$;
2. $\|\alpha \mathbf{v}\| = |\alpha| \|\mathbf{v}\| \forall \alpha \in K, \forall \mathbf{v} \in V$ (propiedad de homogeneidad);
3. $\|\mathbf{v} + \mathbf{w}\| \leq \|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{w}\| \forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ (desigualdad triangular),

donde $|\alpha|$ denota el valor absoluto de α si $K = \mathbb{R}$, o el módulo de α si $K = \mathbb{C}$. El par $(V, \|\cdot\|)$ se denomina **espacio normado**.

Ejemplo: Norma p , o l_p , $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_p)$

$$\|\mathbf{x}\| = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p}, \quad 1 \leq p \leq \infty$$

- ▶ Cuando $p \rightarrow \infty$ (l_∞): **norma infinita** o **norma máxima**

$$\|\mathbf{x}\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$$

- ▶ Cuando $p = 1$ (l_1): **norma del taxista**

$$\|\mathbf{x}\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$$

- ▶ Cuando $p = 2$ (l_2): **norma euclídea**

$$\|\mathbf{x}\|_2 = \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle^{1/2} = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2 \right)^{1/2}$$

Ejemplo: Norma p , o l_p , $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_p)$

$$\|\mathbf{x}\| = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p}, \quad 1 \leq p \leq \infty$$

- ▶ Cuando $p \rightarrow \infty$ (l_∞): **norma infinita** o **norma máxima**

$$\|\mathbf{x}\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$$

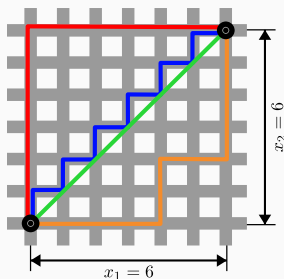
- ▶ Cuando $p = 1$ (l_1): **norma del taxista**

$$\|\mathbf{x}\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$$

- ▶ Cuando $p = 2$ (l_2): **norma euclídea**

$$\|\mathbf{x}\|_2 = \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle^{1/2} = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2 \right)^{1/2}$$

Interpretación gráfica en \mathbb{R}^2 :



$$\mathbf{x} = [6, 6]$$

$$l_\infty = \max\{|6|, |6|\} = 6$$

Camino más corto:

- ▶ l_1 (rojo, azul, naranja): 12

- ▶ l_2 (verde): $6\sqrt{2} \approx 8.49$

Ejemplo: Norma p , o l_p , $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_p)$

$$\|\mathbf{x}\| = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p}, \quad 1 \leq p \leq \infty$$

- ▶ Cuando $p \rightarrow \infty$ (l_∞): **norma infinita** o **norma máxima**

$$\|\mathbf{x}\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$$

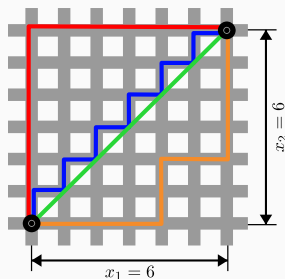
- ▶ Cuando $p = 1$ (l_1): **norma del taxista**

$$\|\mathbf{x}\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$$

- ▶ Cuando $p = 2$ (l_2): **norma euclídea**

$$\|\mathbf{x}\|_2 = \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle^{1/2} = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2 \right)^{1/2}$$

Interpretación gráfica en \mathbb{R}^2 :



$$\mathbf{x} = [6, 6]$$

$$l_\infty = \max\{|6|, |6|\} = 6$$

Camino más corto:

- ▶ l_1 (red, blue, orange): 12

- ▶ l_2 (green): $6\sqrt{2} \approx 8.49$

Desigualdad de Cauchy-Schwarz: $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$:

$$|\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle| \leq \|\mathbf{x}\|_2 \|\mathbf{y}\|_2$$

donde la igualdad vale si y solo si $\mathbf{y} = \alpha \mathbf{x}, \alpha \in \mathbb{R}$.

Continuidad: Cualquier $\|\cdot\|$ en V es una **función continua** de sus argumentos: $\forall \varepsilon > 0, \exists C > 0$ tal que si $\|\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}\| \leq \varepsilon$, entonces $|\|\mathbf{x}\| - \|\hat{\mathbf{x}}\|| \leq C\varepsilon$ para cualquier $\mathbf{x}, \hat{\mathbf{x}} \in V$.

Cálculo de normas:

$$\mathbf{x}_1 = [1, -2, 3]$$

$$\mathbf{x}_2 = [2, 0, -1, 2]$$

$$\mathbf{x}_3 = [0, 1, -4, 2, -1]$$

Norma máxima:

$$\|\mathbf{x}_1\|_\infty = \max\{|1|, |-2|, |3|\} = 3$$

$$\|\mathbf{x}_2\|_\infty = \max\{|2|, |0|, |-1|, |2|\} = 2$$

$$\|\mathbf{x}_3\|_\infty = \max\{|0|, |1|, |-4|, |2|, |-1|\} = 4$$

Norma l_1 :

$$\|\mathbf{x}_1\|_1 = |1| + |-2| + |3| = 6$$

$$\|\mathbf{x}_2\|_1 = |2| + |0| + |-1| + |2| = 5$$

$$\|\mathbf{x}_3\|_1 = |0| + |1| + |-4| + |2| + |-1| = 8$$

Norma l_2 :

$$\|\mathbf{x}_1\|_2 = \sqrt{|1|^2 + |-2|^2 + |3|^2} = \sqrt{14} \approx 3.74$$

$$\|\mathbf{x}_2\|_2 = \sqrt{|2|^2 + |0|^2 + |-1|^2 + |2|^2} = \sqrt{9} = 3$$

$$\|\mathbf{x}_3\|_2 = \sqrt{|0|^2 + |1|^2 + |-4|^2 + |2|^2 + |-1|^2} = \sqrt{22} \approx 4.69$$

Definición : Norma matricial.

Una **norma matricial** es un mapeo $\|\cdot\| : K^{m \times n} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que:

1. $\|\mathbf{A}\| \geq 0 \ \forall \mathbf{A} \in K^{m \times n}$ y $\|\mathbf{A}\| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{A} = \mathbf{0}$;
2. $\|\alpha \mathbf{A}\| = |\alpha| \|\mathbf{A}\|$, $\forall \alpha \in K, \forall \mathbf{A} \in K^{m \times n}$
(homogeneidad);
3. $\|\mathbf{A} + \mathbf{B}\| \leq \|\mathbf{A}\| + \|\mathbf{B}\|$, $\forall \mathbf{A}, \mathbf{B} \in K^{m \times n}$
(desigualdad triangular).

La **distancia entre matrices** $m \times n$ con esta norma es $\|\mathbf{A} - \mathbf{B}\|$.

Definición : Norma matricial.

Una **norma matricial** es un mapeo $\|\cdot\| : K^{m \times n} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que:

1. $\|\mathbf{A}\| \geq 0 \ \forall \mathbf{A} \in K^{m \times n}$ y $\|\mathbf{A}\| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{A} = \mathbf{0}$;
2. $\|\alpha \mathbf{A}\| = |\alpha| \|\mathbf{A}\|$, $\forall \alpha \in K, \forall \mathbf{A} \in K^{m \times n}$
(homogeneidad);
3. $\|\mathbf{A} + \mathbf{B}\| \leq \|\mathbf{A}\| + \|\mathbf{B}\|$, $\forall \mathbf{A}, \mathbf{B} \in K^{m \times n}$
(desigualdad triangular).

La **distancia entre matrices** $m \times n$ con esta norma es $\|\mathbf{A} - \mathbf{B}\|$.

Norma por componentes:

Matriz $m \times n \mapsto$ vector $m \cdot n$. Sea $\mathbf{A} = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{m \times n}$:

► Norma p :

$$\|\mathbf{A}\|_p = \left(\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n |a_{ij}|^p \right)^{1/p}$$

► Norma de Frobenius: ($p = 2$)

$$\|\mathbf{A}\|_F^2 = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2$$

► Norma máxima:

$$\|\mathbf{A}\|_{\max} = \max_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} |a_{ij}|$$

Teorema : Norma inducida.

Si $\|\cdot\|$ es una norma vectorial en K^n , entonces

$$\|A\| = \max_{\|x\|=1} \|Ax\|$$

es la norma matricial **natural** o **inducida** asociada con la norma vectorial.

Alternativamente:

$$\|A\| = \max_{z \neq 0} \frac{\|Az\|}{\|z\|}$$

Corolario: $\forall z \neq 0, A$ y cualquier norma natural $\|\cdot\|$:

$$\|Az\| \leq \|A\| \cdot \|z\|$$

Teorema : Norma inducida.

Si $\|\cdot\|$ es una norma vectorial en K^n , entonces

$$\|A\| = \max_{\|x\|=1} \|Ax\|$$

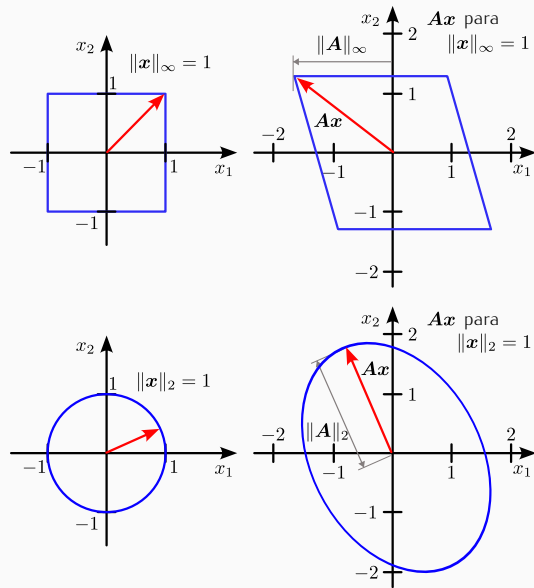
es la norma matricial **natural** o **inducida** asociada con la norma vectorial.

Alternativamente:

$$\|A\| = \max_{z \neq 0} \frac{\|Az\|}{\|z\|}$$

Corolario: $\forall z \neq 0, A$ y cualquier norma natural $\|\cdot\|$:

$$\|Az\| \leq \|A\| \cdot \|z\|$$



Norma inducida l_p : si \mathbf{A} es una matriz en $K^{m \times n}$

$$\|\mathbf{A}\|_p = \max_{\mathbf{x} \neq \mathbf{0}} \frac{\|\mathbf{Ax}\|_p}{\|\mathbf{x}\|_p}$$

► **Norma inducida l_1 :** (norma suma columna)

$$\|\mathbf{A}\|_1 = \max_{j=1, \dots, n} \sum_{i=1}^m |a_{ij}|$$

► **Norma inducida ∞ :** (norma suma fila)

$$\|\mathbf{A}\|_\infty = \max_{i=1, \dots, m} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$$

► **Norma inducida l_2 :** \mapsto próxima clase.

Norma inducida l_p : si A es una matriz en $K^{m \times n}$

$$\|A\|_p = \max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_p}{\|x\|_p}$$

► **Norma inducida l_1 :** (norma suma columna)

$$\|A\|_1 = \max_{j=1, \dots, n} \sum_{i=1}^m |a_{ij}|$$

► **Norma inducida ∞ :** (norma suma fila)

$$\|A\|_\infty = \max_{i=1, \dots, m} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$$

► **Norma inducida l_2 :** \mapsto próxima clase.

Definición : Norma sub-multiplicativa.

Una norma matricial $\|\cdot\|$ es **sub-multiplicativa** si $\forall A \in K^{n \times m}, \forall B \in K^{m \times q}$:

$$\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$$

Definición : Consistencia.

Si $\|\cdot\|_{K^n} : K^n \rightarrow \mathbb{R}$, y $\|\cdot\|_{K^m} : K^m \rightarrow \mathbb{R}$ son normas, y $\|\cdot\| : K^{m \times n} \rightarrow \mathbb{R}$ es una norma matricial, decimos que $\|\cdot\|$ es **consistente** (o **compatible**) respecto de las normas $\|\cdot\|_{K^n}$ y $\|\cdot\|_{K^m}$ si y solo si

$$\|Ax\|_{K^m} \leq \|A\| \|x\|_{K^n}$$

En matrices cuadradas, las normas inducidas son **sub-multiplicativas** y **consistentes**.

Determinar $\|\mathbf{A}\|_1$ y $\|\mathbf{A}\|_\infty$ para la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 5 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Norma $\|\cdot\|_1$:

$$\sum_{i=1}^3 |a_{i,1}| = |1| + |0| + |5| = 6$$

$$\sum_{i=1}^3 |a_{i,2}| = |2| + |3| + |-1| = 6$$

$$\sum_{i=1}^3 |a_{i,3}| = |-1| + |-1| + |1| = 3$$

$$\|\mathbf{A}\|_1 = \max\{6, 6, 3\} = 6$$

Norma $\|\cdot\|_\infty$:

$$\sum_{j=1}^3 |a_{1,j}| = |1| + |2| + |-1| = 4$$

$$\sum_{j=1}^3 |a_{2,j}| = |0| + |3| + |-1| = 4$$

$$\sum_{j=1}^3 |a_{3,j}| = |5| + |-1| + |1| = 7$$

$$\|\mathbf{A}\|_\infty = \max\{4, 4, 7\} = 7$$

- ▶ R.L. Burden, D.J. Faires y A.M. Burden. **Análisis numérico**. 10.^a ed. Mexico: Cengage Learning, 2017. Capítulo 7.
- ▶ Carlos Moreno González. **Introducción al cálculo numérico**. Madrid, España: Universidad Nacional de Educación a Distancia, 2014. Capítulo 2.
- ▶ B. Bradie. **A Friendly Introduction to Numerical Analysis**. New Jersey, United States: Pearson Education Inc., 2006. Sección 3.3.
- ▶ A. Quarteroni, R. Sacco y F. Saleri. **Numerical Mathematics**. New York, United States: Springer-Verlag, 2000. Capítulo 1.