

CÁLCULO DE RAÍCES DE ECUACIONES DE UNA VARIABLE

Manuel Carlevaro

Departamento de Ingeniería Mecánica

Grupo de Materiales Granulares - UTN FRLP

manuel.carlevaro@gmail.com

Cálculo Avanzado • 2023

 ·  · 

Problema:

$$f(x) = 0$$

$$f(x) = g(x) \implies h(x) = f(x) - g(x) = 0$$

Teorema : Valores intermedios.

Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función **continua** en $[a, b]$ tal que $f(a) < f(b)$. Entonces: $\forall u \in (f(a), f(b))$ existe $c \in [a, b]$ tal que $f(c) = u$.

Problema:

$$f(x) = 0$$

$$f(x) = g(x) \implies h(x) = f(x) - g(x) = 0$$

Teorema : Valores intermedios.

Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función **continua** en $[a, b]$ tal que $f(a) < f(b)$. Entonces: $\forall u \in (f(a), f(b))$ existe $c \in [a, b]$ tal que $f(c) = u$.

Estrategia general:

- ▶ Mostrar que existe al menos una solución (x^*)
- ▶ Aislar una raíz: $D \subset \mathbb{R}$, $x^* \in D$ y
$$f(x) \neq 0 \quad \forall x \in D \setminus \{x^*\}$$
- ▶ Iterar

Problema:

$$f(x) = 0$$

$$f(x) = g(x) \implies h(x) = f(x) - g(x) = 0$$

Teorema : Valores intermedios.

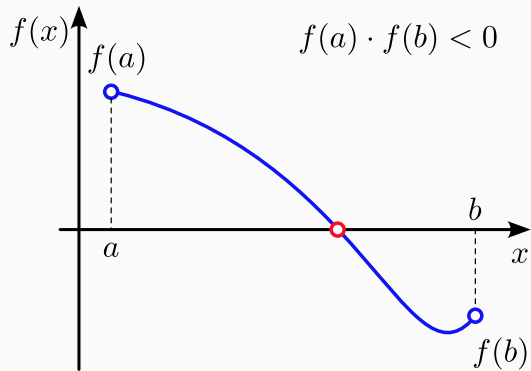
Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función **continua** en $[a, b]$ tal que $f(a) < f(b)$. Entonces: $\forall u \in (f(a), f(b))$ existe $c \in [a, b]$ tal que $f(c) = u$.

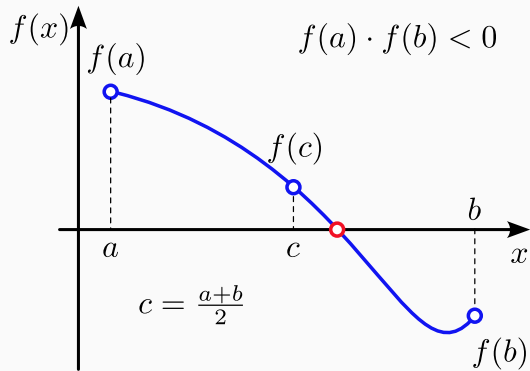
Estrategia general:

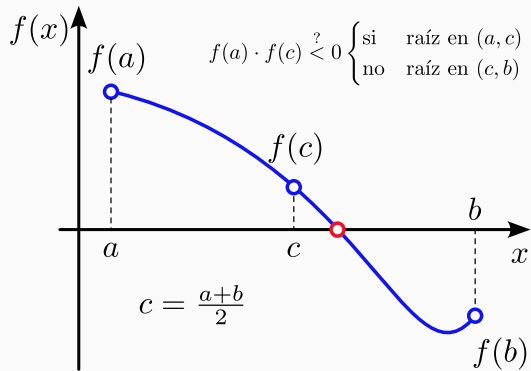
- ▶ Mostrar que existe al menos una solución (x^*)
- ▶ Aislar una raíz: $D \subset \mathbb{R}$, $x^* \in D$ y
$$f(x) \neq 0 \quad \forall x \in D \setminus \{x^*\}$$
- ▶ Iterar

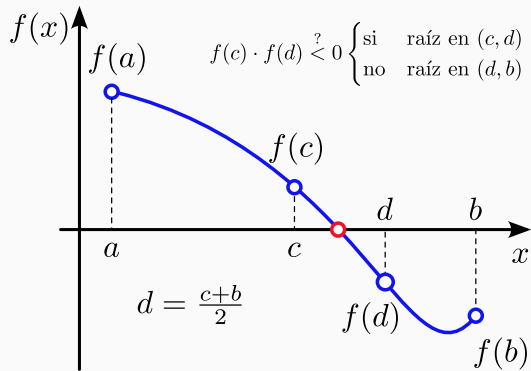
Métodos:

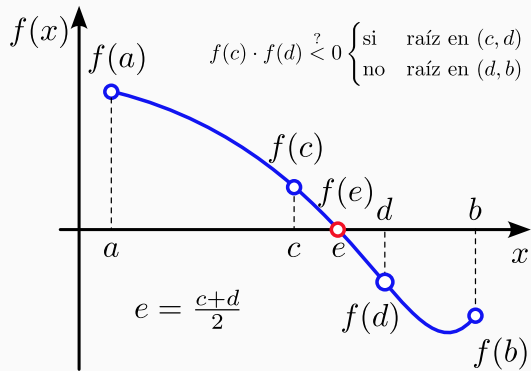
- ▶ *Bracketing* (cerrados)
 - > Bisección
 - > Posición falsa (*regula falsi*)
 - > ITP
- ▶ Interpolación
 - > Secante
 - > Muller
- ▶ Iterativos (abiertos)
 - > Punto fijo
 - > Newton-Raphson
 - > Secante
 - > Broyden
- ▶ Combinación de cerrados y abiertos
 - > Brent
 - > Ridders

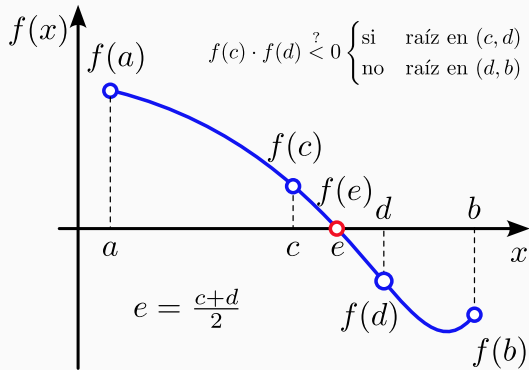












Teorema : Convergencia y error .

Sea $[a, b]$ el intervalo inicial, donde $f(a) \cdot f(b) < 0$.
Defina una raíz aproximada como

$$x_n = \frac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2}$$

Entonces existe una raíz x^* tal que

$$|x^* - x_n| \leq \frac{b-a}{2^n}$$

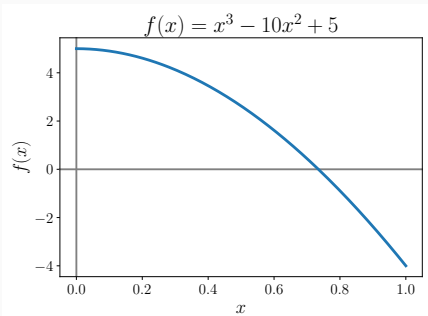
Además, para obtener una precisión de $|x^* - x_n| \leq \epsilon$ es necesario iterar n veces con

$$n \geq \frac{\log(b-a) - \log \epsilon}{\log 2}$$

Código

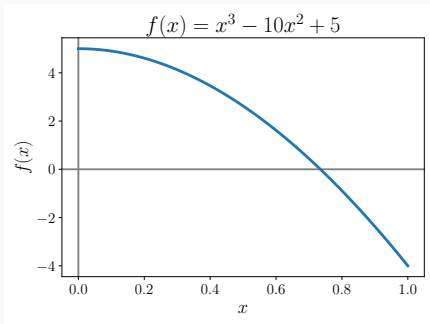
```
1 #!/usr/bin/env python3
2
3 def biseccion(f, x1, x2, switch=0, eps=1.0e-9):
4     """
5     raiz = biseccion(f, x1, x2, switch=0, tol=1.0e-9)
6     Encuentra una raíz de  $f(x) = 0$  por el método de
7     bisección. La raíz debe estar acotada en  $(x1, x2)$ .
8     Haciendo switch = 1 devuelve raiz = None
9     si  $f(x)$  aumenta como resultado de la bisección.
10    """
11    from math import log, ceil
12    f1 = f(x1)
13    if abs(f1) < eps: return x1
14    f2 = f(x2)
15    if abs(f2) < eps: return x2
16    if f1 * f2 > 0:
17        print("Error: la raíz no está acotada.")
18        quit()
19    n = ceil(log(abs(x2 - x1)/eps) / log(2.0))
```

```
20    for i in range(n):
21        x3 = 0.5 * (x1 + x2)
22        f3 = f(x3)
23        if switch and (abs(f3) > abs(f1)) \
24            and (abs(f3) > abs(f2)):
25            return None
26        if abs(f3) < eps: return x3
27        if f2 * f3 < 0.0:
28            x1 = x3
29            f1 = f3
30        else:
31            x2 = x3
32            f2 = f3
33    return (x1 + x2) / 2.0
34
35 def f(x):
36     return x**3 - 10 * x**2 + 5
37
38 raiz = biseccion(f, 0.0, 1.0)
39 print(f"La raíz de  $f(x) = 0$  es {raiz}")
```



```
$ ./biseccion.py
```

```
La raiz de  $f(x) = 0$  es 0.7346035079099238
```



```
$ ./biseccion.py
```

```
La raiz de f(x) = 0 es 0.7346035079099238
```

SciPy: optimize

```
1 #!/usr/bin/env python3
2
3 from scipy import optimize
4
5 def f(x):
6     return x**3 - 10 * x**2 + 5
7
8 raiz = optimize.bisect(f, 0.0, 1.0)
9 print(f"La raiz de f(x) = 0 es {raiz}")
```

```
$ ./scipy-biseccion.py
```

```
La raiz de f(x) = 0 es 0.7346035077880515
```

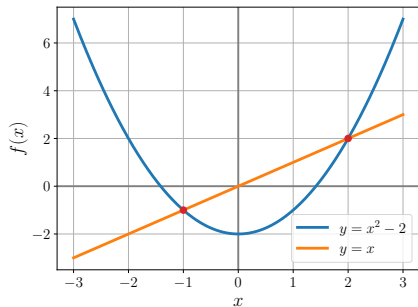
p es un **punto fijo** de g si $g(p) = p$.

Si g tiene un punto fijo en p , entonces:

$$f(x) = x - g(x)$$

tiene un cero en p .

Ejemplo: $g(x) = x^2 - 2 \rightarrow p = \{-1, 2\}$.



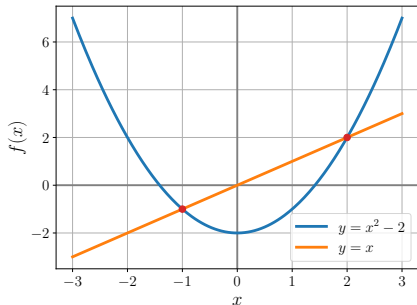
p es un **punto fijo** de g si $g(p) = p$.

Si g tiene un punto fijo en p , entonces:

$$f(x) = x - g(x)$$

tiene un cero en p .

Ejemplo: $g(x) = x^2 - 2 \rightarrow p = \{-1, 2\}$.



Teorema : Existencia y unicidad.

- i) Si $g \in \mathcal{C}[a, b]$ y $g(x) \in [a, b] \forall x \in [a, b]$, entonces g tiene por lo menos un punto fijo en $[a, b]$.
- ii) Si, además, $g'(x)$ existe en $[a, b]$ y hay una constante positiva $k < 1$ con

$$|g'(x)| \leq k, \forall x \in [a, b]$$

entonces existe exactamente un punto fijo en $[a, b]$.

Iteración de punto fijo:

- ▶ Aproximación inicial p_0
- ▶ $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ con $p_n = g(p_{n-1})$, $n \geq 1$
- ▶ Si la sucesión converge a p y g es continua:

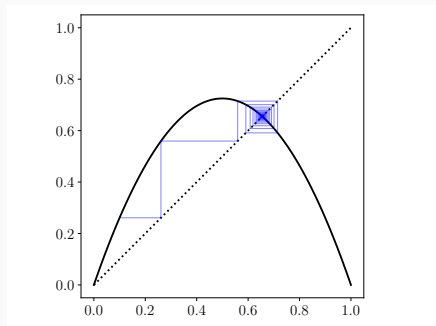
$$p = \lim_{n \rightarrow \infty} p_n = \lim_{n \rightarrow \infty} g(p_{n-1}) = g\left(\lim_{n \rightarrow \infty} p_{n-1}\right) = g(p)$$

Código

```
1 #!/usr/bin/env python3
2
3 def punto_fijo(g, x0, max_n=200, eps=1.0e-5):
4     """
5     p = punto_fijo(g, x0, max_n=200, eps=1.0e-5)
6     Itera la relación  $x = g(x_0)$ ,  $x_0 \leftarrow x$ 
7     hasta agotar el número de iteraciones (en ese
8     caso devuelve None), o hasta que se produzca
9     convergencia con la tolerancia eps, en la que
10    devuelve el punto fijo.
11    """
12    for k in range(max_n):
13        x = g(x0)
14        delta_x = x - x0
15        print(f"{k:3d} {x:1.16f} {delta_x:1.16f}")
16        if abs(delta_x / x) < eps:
17            break
18        x0 = x
19    else:
20        x = None
21    return x
```

```
23 def g(x):
24     """
25     Mapeo logístico  $x_{n+1} = r x_n (1 - x_n)$ 
26     """
27     r = 2.9 # Un punto fijo
28     # r = 3.1 # Atractor de dos puntos
29     # r = 4.0 # Región caótica
30     return r * x * (1 - x)
31
32 pfijo = punto_fijo(g, 0.1)
33 print(f"La raíz de  $g(x) = 0$  es {pfijo}")
```

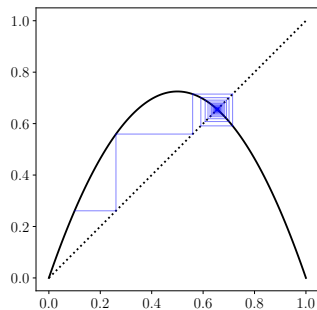
```
> ./pfijo.py
0 0.2610000000000000 0.1610000000000000
1 0.5593491000000000 0.2983491000000000
2 0.7147852845546510 0.1554361845546509
...
94 0.6551757611798358 0.0000070667498989
95 0.6551694011125498 -0.0000063600672859
La raíz de  $g(x) = 0$  es 0.6551694011125498
```

$$r = 2.9$$

$$p = g(p) = \frac{19}{29}$$

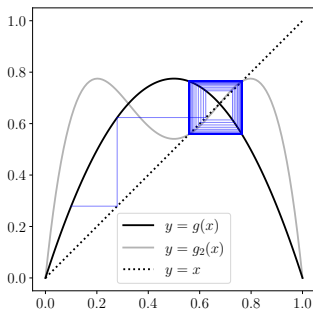
$$g'(p) = -\frac{9}{10}$$



$$r = 2.9$$

$$p = g(p) = \frac{19}{29}$$

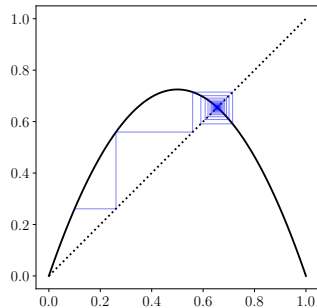
$$g'(p) = -\frac{9}{10}$$



$$r = 3.1$$

$$p = g(p) = \frac{21}{31}$$

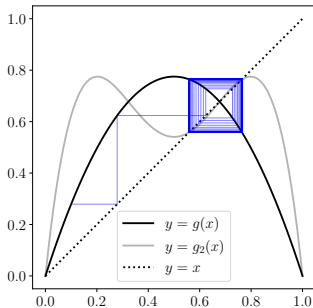
$$g'(p) = -\frac{11}{10}$$



$$r = 2.9$$

$$p = g(p) = \frac{19}{29}$$

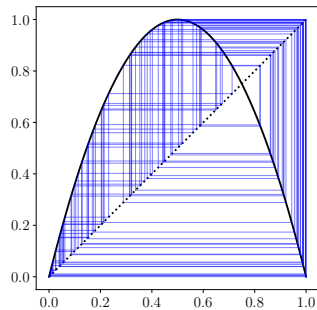
$$g'(p) = -\frac{9}{10}$$



$$r = 3.1$$

$$p = g(p) = \frac{21}{31}$$

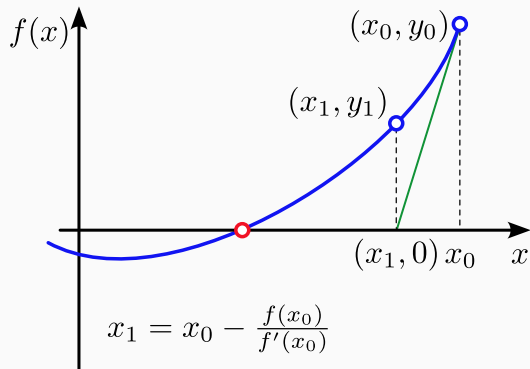
$$g'(p) = -\frac{11}{10}$$



$$r = 4.0$$

$$p = g(p) = \frac{3}{4}$$

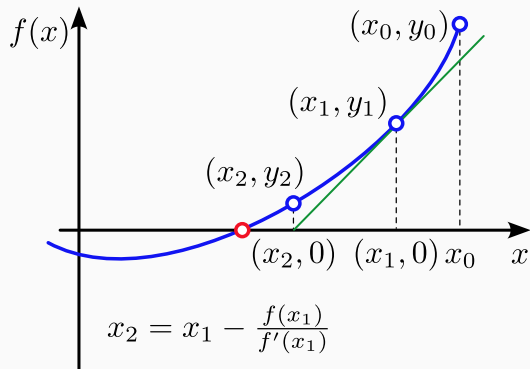
$$g'(p) = -2$$



$$\frac{y - y_0}{x - x_0} = f'(x_0) \Rightarrow y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Haciendo $y = 0$:

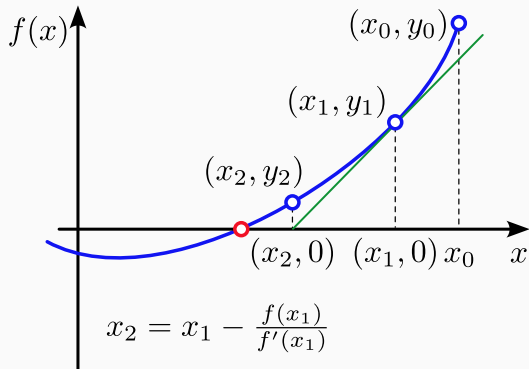
$$x = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \mapsto x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$



$$\frac{y - y_0}{x - x_0} = f'(x_0) \Rightarrow y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Haciendo $y = 0$:

$$x = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \mapsto x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$



$$\frac{y - y_0}{x - x_0} = f'(x_0) \Rightarrow y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Haciendo $y = 0$:

$$x = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \mapsto x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Serie de Taylor ($x_n \approx x^*$):

$$f(x) = f(x_n) + (x - x_n)f'(x_n) + \frac{1}{2}(x - x_n)^2 f''(\xi)$$

$\xi_n \in (x, x_n)$ Hacemos $f(x) = 0$:

$$x = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} - \frac{1}{2}(x - x_n)^2 \frac{f''(\xi_n)}{f'(x_n)}$$

$$\mapsto x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Código:

```
1 #!/usr/bin/env python3
2
3 from scipy import optimize
4
5 def NR(f, df, x, n=30, eps=1.0e-9):
6     """
7     raiz, iter = NR(f, df, x, n=30, tol=1.0e-9)
8     Encuentra una raíz de  $f(x) = 0$  por el método de
9     Newton-Raphson. Si se alcanza el máximo número
10    de iteraciones  $n$ , devuelve None
11    """
12    for i in range(n):
13        try:
14            dx = -f(x) / df(x)
15        except ZeroDivisionError:
16            print("No hay convergencia.")
17            quit()
18        x += dx
19        if abs(dx) < eps:
20            return x, i
21    print("Límite de iteraciones alcanzado.")
22    return None, i
```

```
24 def f(x):
25     return x**3 - 10 * x**2 + 5
26
27 def df(x):
28     return 3 * x**2 - 20 * x
29
30 raiz, iteraciones = NR(f, df, 1.0)
31 print(f"La raíz de  $f(x) = 0$  es {raiz}.")
32 print(f"Iteraciones: {iteraciones}")
33
34 raiz_2 = optimize.newton(f, 1.0, fprime=df)
35 print(f"La raíz 2 de  $f(x) = 0$  es {raiz_2}.")
36 print(f"Diferencia: {abs(raiz_2 - raiz)}")
```

```
$ ./newton-raphson.py
```

```
La raíz de  $f(x) = 0$  es 0.7346035077893033.
```

```
Iteraciones: 4
```

```
La raíz 2 de  $f(x) = 0$  es 0.7346035077893033.
```

```
Diferencia: 0.0
```

Convergencia: Serie de Taylor alrededor de α ,
($f(\alpha) = 0$):

$$f(\alpha) = f(x_n) + f'(x_n)(\alpha - x_n) + R_1 \quad (1)$$

Forma de Lagrange de R_1 :

$$R_1 = \frac{1}{2!} f''(\xi_n)(\alpha - x_n)^2$$

donde ξ_n está entre α y x_n . Como $f(\alpha) = 0$:

$$0 = f(x_n) + f'(x_n)(\alpha - x_n) + \frac{1}{2!} f''(\xi_n)(\alpha - x_n)^2 \quad (2)$$

Dividiendo (2) por $f'(x_n)$ y acomodando:

$$\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} + (\alpha - x_n) = -\frac{f''(\xi_n)}{2f'(x_n)}(\alpha - x_n)^2 \quad (3)$$

$$\text{NR: } x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad (4)$$

resulta:

$$\underbrace{\alpha - x_{n+1}}_{\epsilon_{n+1}} = -\frac{f''(\xi_n)}{2f'(x_n)} \underbrace{(\alpha - x_n)_{\epsilon_n}}_{\epsilon_n}^2$$

$$|\epsilon_{n+1}| = \frac{|f''(x_n)|}{2|f'(x_n)|} \cdot \epsilon_n^2 \quad (5)$$

Convergencia al menos **cuadrática** si:

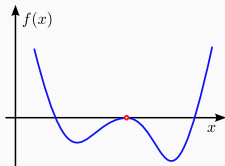
- ▶ $f'(x) \neq 0, \forall x \in I \equiv [\alpha - |\epsilon_0|, \alpha + |\epsilon_0|]$
- ▶ $f''(x) \in \mathcal{C}, \forall x \in I$
- ▶ $M|\epsilon_0| < 1$ con

$$M = \frac{1}{2} \left(\sup_{x \in I} |f''(x)| \right) \left(\sup_{x \in I} \frac{1}{|f'(x)|} \right)$$

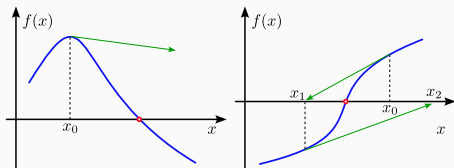
$|\epsilon_{n+1}| \leq M \cdot \epsilon_n^2$

Problemas:

► Raíz doble:

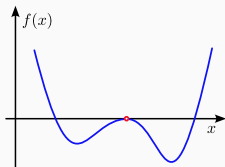


► Divergencia:

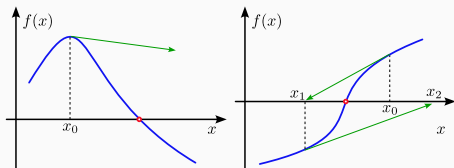


Problemas:

► Raíz doble:



► Divergencia:



Scipy.optimize

```
1 #!/usr/bin/env python3
2
3 from scipy import optimize
4
5 def f(x):
6     return x**3 - 10 * x**2 + 5
7
8 def df(x):
9     return 3 * x**2 - 20 * x
10
11 metodos = ['bisect', 'newton', 'brentq', 'toms748']
12
13 for m in metodos:
14     sol = optimize.root_scalar(f, x0=1.0,
15                               bracket=[0.01, 2], fprime=df, method=m)
16     print(f"Método: {m:7s}, raiz = {sol.root}")
```

```
$ ./root_scalar.py
```

```
Método: bisect , raiz = 0.7346035077910437
```

```
Método: newton , raiz = 0.7346035077893033
```

```
Método: brentq , raiz = 0.7346035077893016
```

```
Método: toms748, raiz = 0.7346035077893033
```

- ▶ R.L. Burden, D.J. Faires y A.M. Burden. *Análisis numérico*. 10.^a ed. Mexico: Cengage Learning, 2017. Capítulo 2.
- ▶ J.F. Epperson. *An Introduction to Numerical Methods and Analysis*. 2.^a ed. Hoboken, United States: John Wiley & Sons, 2013. Capítulo 3.
- ▶ J. Kiusalaas. *Numerical Methods in Engineering with Python*. Cambridge, United Kingdom: Cambridge University Press, 2005. Capítulo 4.
- ▶ E. Kreyszig, H. Kreyszig y E.J. Norminton. *Advanced Engineering Mathematics*. Hoboken, USA: John Wiley & Sons, Inc, 2011. Capítulo 19.