

# TRANSFORMADA DE LAPLACE

TRANSFORMADA DE LAPLACE. TRANSFORMADA INVERSA. SOLUCIÓN DE PROBLEMAS CON CONDICIONES INICIALES.

---

Manuel Carlevaro

Departamento de Ingeniería Mecánica

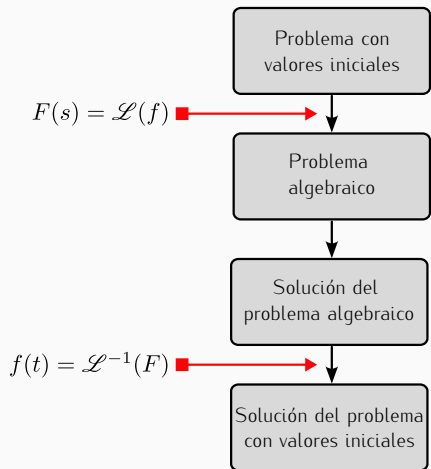
Grupo de Materiales Granulares - UTN FRLP

manuel.carlevaro@gmail.com

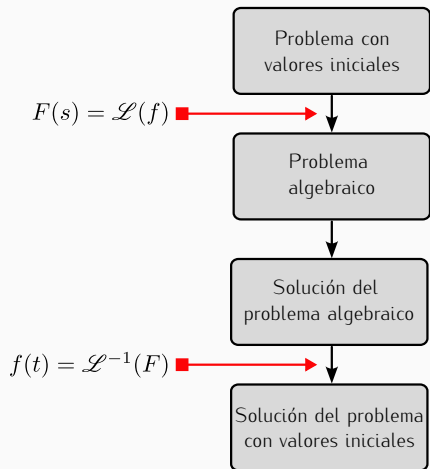
Cálculo Avanzado • 2023

 · X<sub>y</sub>LaT<sub>E</sub>X · 

## Motivación:



## Motivación:

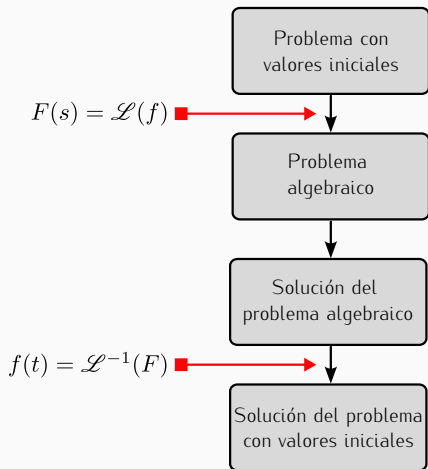


## Definición : Transformada de Laplace.

Sea  $f(t)$  definida para todo  $t \geq 0$ . Su transformada de Laplace se define:

$$F(s) = \mathcal{L}(f) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt$$

## Motivación:



## Definición : Transformada de Laplace.

Sea  $f(t)$  definida para todo  $t \geq 0$ . Su transformada de Laplace se define:

$$F(s) = \mathcal{L}(f) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt$$

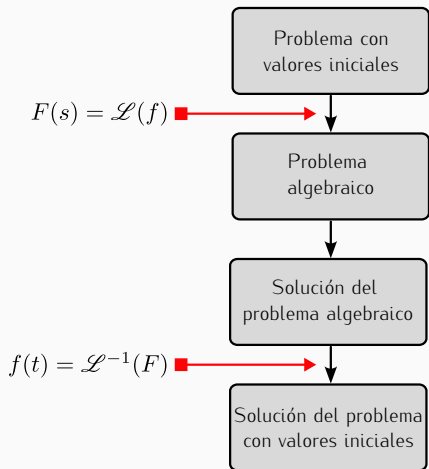
## Teorema : Existencia.

Si  $f(t)$  está definida y es continua a tramos en cada intervalo finito de  $\mathbb{R}^+$ , y satisface la condición

$$|f(t)| \leq M e^{kt} \text{ (restricción de crecimiento exponencial)}$$

para algunas constantes,  $M$  y  $k$ , entonces existe  $\mathcal{L}(f)$ ,  $\forall s > k$ .

## Motivación:



## Definición : Transformada de Laplace.

Sea  $f(t)$  definida para todo  $t \geq 0$ . Su transformada de Laplace se define:

$$F(s) = \mathcal{L}(f) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt$$

## Teorema : Existencia.

Si  $f(t)$  está definida y es continua a tramos en cada intervalo finito de  $\mathbb{R}^+$ , y satisface la condición

$$|f(t)| \leq M e^{kt} \text{ (restricción de crecimiento exponencial)}$$

para algunas constantes,  $M$  y  $k$ , entonces existe  $\mathcal{L}(f)$ ,  $\forall s > k$ .

Si  $F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$ ,  $f(t)$  es la **transformada inversa** de  $F(s)$ :

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)]$$

Por lo tanto:  $\mathcal{L}^{-1}[\mathcal{L}(f)] = f$  y  $\mathcal{L}[\mathcal{L}^{-1}(F)] = F$ .

Caso general:

$$(Tf)(u) = \int_{t_1}^{t_2} f(t) K(t, u) dt = F(u)$$

donde  $K(t, u)$  es la función **núcleo** o **kernel**.

Cuando  $K$  tiene asociado un *kernel inverso*  $K^{-1}(u, t)$ , se puede definir (más o menos) la transformación inversa:

$$f(t) = \int_{u_1}^{u_2} (Tf)(u) K^{-1}(u, t) dt$$

Si el kernel es **simétrico**:  $K(t, u) = K(u, t) \mapsto$  operadores auto-adjuntos.

Transformada	Símbolo	$K$	$(t_1, t_2)$	$K^{-1}$	$(u_1, u_2)$
Fourier	$\mathcal{F}$	$\frac{e^{-iut}}{\sqrt{2\pi}}$	$(-\infty, \infty)$	$\frac{e^{+iut}}{\sqrt{2\pi}}$	$(-\infty, \infty)$
Fourier seno	$\mathcal{F}_s$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \operatorname{sen}(ut)$	$(0, \infty)$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \operatorname{sen}(ut)$	$(0, \infty)$
Fourier coseno	$\mathcal{F}_c$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \operatorname{cos}(ut)$	$(0, \infty)$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \operatorname{cos}(ut)$	$(0, \infty)$
Laplace	$\mathcal{L}$	$e^{-ut}$	$(0, \infty)$	$\frac{e^{+ut}}{2\pi i}$	$(c - i\infty, c + i\infty)$
Laplace bilateral	$\mathcal{B}$	$e^{-ut}$	$(-\infty, \infty)$	$\frac{e^{+ut}}{2\pi i}$	$(c - i\infty, c + i\infty)$
Hilbert	$\mathcal{Hil}$	$\frac{1}{\pi} \frac{1}{u-t}$	$(-\infty, \infty)$	$\frac{1}{\pi} \frac{1}{u-t}$	$(-\infty, \infty)$
Legendre	$\mathcal{J}$	$P_n(t)$	$(-1, 1)$	$(^*)$	$(0, \infty)$

$$(^*) \mathcal{J}[f(x)] = \tilde{f}(n) = \int_{-1}^1 P_n(x) f(x) dx$$

$$\mathcal{J}^{-1}[\tilde{f}(n)] = f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{2} \tilde{f}(n) P_n(x)$$

$$f(t) = 1, t \geq 0$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(f) &= \mathcal{L}(1) = \int_0^{\infty} e^{-st} dt \\&= \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T 1 \cdot e^{-st} dt \\&= \lim_{T \rightarrow \infty} \left[ -\frac{1}{s} e^{-st} \right]_0^T \\&= \lim_{T \rightarrow \infty} \left[ -\frac{1}{s} e^{-sT} + \frac{1}{s} e^0 \right] \\&= \frac{1}{s}\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathcal{L}(1) = \frac{1}{s}}$$



$$f(t) = 1, t \geq 0$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(f) &= \mathcal{L}(1) = \int_0^{\infty} e^{-st} dt \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T 1 \cdot e^{-st} dt \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \left[ -\frac{1}{s} e^{-st} \right]_0^T \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \left[ -\frac{1}{s} e^{-sT} + \frac{1}{s} e^0 \right] \\ &= \frac{1}{s}\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathcal{L}(1) = \frac{1}{s}}$$

$$f(t) = e^{at}, t \geq 0$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(e^{at}) &= \int_0^{\infty} e^{-st} e^{at} dt \\ &= \frac{1}{a-s} e^{-(s-a)t} \Big|_0^{\infty} \\ &= \frac{1}{s-a}\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathcal{L}(e^{at}) = \frac{1}{s-a}}$$

cuando  $s - a > 0$ .

## Teorema : Linealidad de $\mathcal{L}$ .

*Para funciones  $f(t)$  y  $g(t)$  cuyas transformadas de Laplace existan, y para dos constantes arbitrarias  $a$  y  $b$ , se cumple que:*

$$\mathcal{L}[af(t) + bg(t)] = a\mathcal{L}[f(t)] + b\mathcal{L}[g(t)]$$

**Teorema : Linealidad de  $\mathcal{L}$ .**

Para funciones  $f(t)$  y  $g(t)$  cuyas transformadas de Laplace existan, y para dos constantes arbitrarias  $a$  y  $b$ , se cumple que:

$$\mathcal{L}[af(t) + bg(t)] = a\mathcal{L}[f(t)] + b\mathcal{L}[g(t)]$$

**Ejemplo:** Hallar las transformadas de  $\cosh at$  y  $\sinh at$ .

Dado que:

$$\cosh at = \frac{1}{2}(e^{at} + e^{-at})$$

$$\sinh at = \frac{1}{2}(e^{at} - e^{-at})$$

Por la linealidad:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(\cosh at) &= \frac{1}{2}[\mathcal{L}(e^{at}) + \mathcal{L}(e^{-at})] \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{s-a} + \frac{1}{s+a} \right) \\ &= \frac{s}{s^2 - a^2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(\sinh at) &= \frac{1}{2}[\mathcal{L}(e^{at}) - \mathcal{L}(e^{-at})] \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{s-a} - \frac{1}{s+a} \right) \\ &= \frac{a}{s^2 - a^2}\end{aligned}$$

## Teorema : Transformada de $f'$ .

Sea  $f$  continua en  $[0, \infty)$ , con  $f'$  continua a tramos en  $[0, k]$  para todo  $k > 0$ , y  $\lim_{k \rightarrow \infty} e^{-sk} f(k) = 0$  si  $s > 0$ . Entonces:

$$\mathcal{L}[f'(t)] = sF(s) - f(0)$$

## Demostración.

De la definición, integrando por partes:

$$\begin{aligned} \int_0^k e^{-st} f'(t) dt &= [e^{-st} f(t)]_0^k - \int_0^k -se^{-st} f(t) dt \\ &= e^{-sk} f(k) - f(0) + s \int_0^k e^{-st} f(t) dt \end{aligned}$$

Tomando el límite  $k \rightarrow \infty$ :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[f'(t)] &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left[ e^{-sk} f(k) - f(0) + s \int_0^k e^{-st} f(t) dt \right] \\ &= -f(0) + s \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt = -f(0) + sF(s) \end{aligned}$$

□

Si  $f$  y  $f'$  son continuas para  $t \geq 0$ , cumplen la restricción de crecimiento exponencial y  $f''$  es continua por tramos en cada intervalo finito en  $\mathbb{R}^+$ :

$$\mathcal{L}(f'') = s^2 \mathcal{L}(f) - sf(0) - f'(0)$$

Aplicamos el teorema anterior a  $f''$ :

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(f'') &= s\mathcal{L}(f') - f'(0) \\ &= s[s\mathcal{L}(f) - f(0)] - f'(0) \\ &= s^2 \mathcal{L}(f) - sf(0) - f'(0)\end{aligned}$$

Si  $f$  y  $f'$  son continuas para  $t \geq 0$ , cumplen la restricción de crecimiento exponencial y  $f''$  es continua por tramos en cada intervalo finito en  $\mathbb{R}^+$ :

$$\mathcal{L}(f'') = s^2 \mathcal{L}(f) - sf(0) - f'(0)$$

Aplicamos el teorema anterior a  $f''$ :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(f'') &= s\mathcal{L}(f') - f'(0) \\ &= s[s\mathcal{L}(f) - f(0)] - f'(0) \\ &= s^2 \mathcal{L}(f) - sf(0) - f'(0) \end{aligned}$$

Transformada de derivada  $n$ -ésima:

Si  $f, f', \dots, f^{(n-1)}$  son continuas para todo  $t \geq 0$  y satisfacen la restricción de crecimiento exponencial, y si  $f^{(n)}$  es una función continua por tramos en cada intervalo finito en  $\mathbb{R}^+$ , entonces la transformada de  $f^{(n)}$  satisface:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[f^{(n)}] &= s^n \mathcal{L}(f) - s^{n-1}f(0) \\ &\quad - s^{n-2}f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0) \end{aligned}$$

**Transformada de  $\cos \omega t$ :**

$$f(t) = \cos \omega t,$$

$$f(0) = 1, f'(0) = 0, f''(t) = -\omega^2 \cos \omega t:$$

$$\mathcal{L}(f'') = s^2 \mathcal{L}(f) - s = -\omega^2 \mathcal{L}(f)$$

$$\boxed{\mathcal{L}(\cos \omega t) = \frac{s}{s^2 + \omega^2}}$$

**Transformada de  $\cos \omega t$ :**

$$f(t) = \cos \omega t,$$

$$f(0) = 1, f'(0) = 0, f''(t) = -\omega^2 \cos \omega t:$$

$$\mathcal{L}(f'') = s^2 \mathcal{L}(f) - s = -\omega^2 \mathcal{L}(f)$$

$$\boxed{\mathcal{L}(\cos \omega t) = \frac{s}{s^2 + \omega^2}}$$

**Transformada de  $\sin \omega t$ :**

$$g(t) = \sin \omega t, g(0) = 0, g'(t) = \omega \cos \omega t:$$

$$\mathcal{L}(g') = s \mathcal{L}(g) = \omega \mathcal{L}(\cos \omega t)$$

$$\boxed{\mathcal{L}(\sin \omega t) = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}}$$



$$f'' + af' + bf = r(t), \quad f(0) = K_0, \quad f'(0) = K_1$$

$$f'' + af' + bf = r(t), \quad f(0) = K_0, \quad f'(0) = K_1$$

► **Paso 1:**  $t \mapsto s$

$$[s^2 F - sf(0) - f'(0)] + a[sF - f(0)] + bF = R(s)$$

$$(s^2 + as + b)F = (s + a)f(0) + f'(0) + R(s)$$

$$f'' + af' + bf = r(t), \quad f(0) = K_0, \quad f'(0) = K_1$$

► **Paso 1:**  $t \mapsto s$

$$[s^2 F - sf(0) - f'(0)] + a[sF - f(0)] + bF = R(s)$$

$$(s^2 + as + b)F = (s + a)f(0) + f'(0) + R(s)$$

► **Paso 2:** Resolver  $F(s)$

**Función transferencia:**

$$Q(s) = \frac{1}{s^2 + as + b} = \frac{1}{\left(s + \frac{1}{2}a\right)^2 + b - \frac{1}{4}a^2}$$

$$F(s) = [(s + a)f(0) + f'(0)]Q(s) + R(s)Q(s)$$

$$f'' + af' + bf = r(t), \quad f(0) = K_0, \quad f'(0) = K_1$$

► **Paso 1:**  $t \mapsto s$

$$[s^2 F - sf(0) - f'(0)] + a[sF - f(0)] + bF = R(s)$$

$$(s^2 + as + b)F = (s + a)f(0) + f'(0) + R(s)$$

► **Paso 2:** Resolver  $F(s)$

**Función transferencia:**

$$Q(s) = \frac{1}{s^2 + as + b} = \frac{1}{\left(s + \frac{1}{2}a\right)^2 + b - \frac{1}{4}a^2}$$

$$F(s) = [(s + a)f(0) + f'(0)]Q(s) + R(s)Q(s)$$

Si  $f(0) = f'(0) = 0$ ,  $F = RQ$ :

$$Q = \frac{F}{R} = \frac{\mathcal{L}(\text{salida})}{\mathcal{L}(\text{entrada})}$$

$Q$  no depende de  $r$  ni de las condiciones iniciales (solo de  $a$  y  $b$ ).

$$f'' + af' + bf = r(t), \quad f(0) = K_0, \quad f'(0) = K_1$$

► **Paso 1:**  $t \mapsto s$

$$[s^2 F - sf(0) - f'(0)] + a[sF - f(0)] + bF = R(s)$$

$$(s^2 + as + b)F = (s + a)f(0) + f'(0) + R(s)$$

► **Paso 2:** Resolver  $F(s)$

**Función transferencia:**

$$Q(s) = \frac{1}{s^2 + as + b} = \frac{1}{\left(s + \frac{1}{2}a\right)^2 + b - \frac{1}{4}a^2}$$

$$F(s) = [(s + a)f(0) + f'(0)]Q(s) + R(s)Q(s)$$

Si  $f(0) = f'(0) = 0$ ,  $F = RQ$ :

$$Q = \frac{F}{R} = \frac{\mathcal{L}(\text{salida})}{\mathcal{L}(\text{entrada})}$$

$Q$  no depende de  $r$  ni de las condiciones iniciales (solo de  $a$  y  $b$ ).

► **Paso 3:** Inversión de  $F$

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}(F)$$

## EJEMPLO

**Resolver:**

$$y'' - y = t, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1$$

**Solución:**

Paso 1

$$s^2 Y - sy(0) - y'(0) - Y = \frac{1}{s^2}$$
$$(s^2 - 1)Y = s + 1 + \frac{1}{s}$$

Paso 2

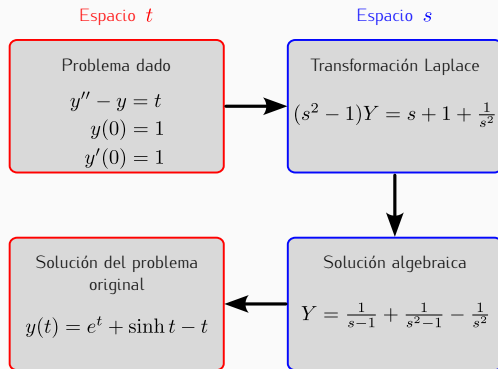
La función transferencia es  $Q = 1/(s^2 - 1)$  y

$$Y = (s + 1)Q + \frac{1}{s^2}Q = \frac{s + 1}{s^2 - 1} + \frac{1}{s^2(s^2 - 1)}$$

$$Y = \frac{1}{s - 1} + \left( \frac{1}{s^2 - 1} - \frac{1}{s^2} \right)$$

Paso 3

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}(Y)$$
$$= \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s - 1}\right) + \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2 - 1}\right) + \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2}\right)$$
$$= e^t + \sinh t - t$$



- ▶ E. Kreyszig, H. Kreyszig y E.J. Norminton. *Advanced Engineering Mathematics*. Hoboken, USA: John Wiley & Sons, Inc, 2011. Capítulo 6.
- ▶ Peter V O'Neil. *Matemáticas avanzadas para ingeniería*. 7.<sup>a</sup> ed. México, DF: CENGAGE Learning Custom Publishing, 2012. Capítulo 1.
- ▶ K A Stroud y Dexter J Booth. *Advanced Engineering Mathematics*. 6.<sup>a</sup> ed. London, England: Bloomsbury Academic, 2020. Programas 2, 3 y 4.