# Resolución de problemas de contorno

Manuel Carlevaro

Departamento de Ingeniería Mecánica

Grupo de Materiales Granulares - UTN FRLP

manuel.carlevaro@gmail.com

Cálculo Avanzado • 2023

## Problema de contorno

$$\begin{aligned} y'' = f(x, y, y'),\ a \le x \le b \\ \alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) = \alpha \\ \beta_1 y(b) + \beta_2 y'(b) = \beta \end{aligned}$$

Si $f$ es de la forma

$$f(x, y, y') = p(x)y' + q(x)y + r(x)$$

el problema de contorno se llama **lineal**, de otro modo es **no lineal**.

## Problema de contorno

$$y'' = f(x, y, y'),\ a \leq x \leq b$$
$$\alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) = \alpha$$
$$\beta_1 y(b) + \beta_2 y'(b) = \beta$$

Si $f$ es de la forma

$$f(x, y, y') = p(x)y' + q(x)y + r(x)$$

el problema de contorno se llama **lineal**, de otro modo es **no lineal**.

## Condiciones de borde o frontera:

- Dirichlet: $\alpha_2 = \beta_2 = 0$
- Neumann: $\alpha_1 = \beta_1 = 0$
- Robin: combinación lineal de valores de la función y sus derivadas en la frontera

## Problema de contorno

$$y'' = f(x, y, y'),\ a \leq x \leq b$$
$$\alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) = \alpha$$
$$\beta_1 y(b) + \beta_2 y'(b) = \beta$$

Si $f$ es de la forma

$$f(x, y, y') = p(x)y' + q(x)y + r(x)$$

el problema de contorno se llama **lineal**, de otro modo es **no lineal**.

### Condiciones de borde o frontera:

- Dirichlet: $\alpha_2 = \beta_2 = 0$
- Neumann: $\alpha_1 = \beta_1 = 0$
- Robin: combinación lineal de valores de la función y sus derivadas en la frontera

**Teorema : Existencia y unicidad.**

*Sea $f(x, y, y') \in C$ en el conjunto*

$$D = \{(x, y, y') \mid a \leq x \leq b, -\infty \leq y \leq \infty, -\infty \leq y' \leq \infty\}$$

*y que las derivadas parciales $f_y$ y $f_{y'}$ son también continuas en $D$. Si*

- $f_y(x, y, y') > 0,\ \forall (x, y, y') \in D$ *y*
- *existe una constante $M$ tal que*

$$\left| f_{y'}(x, y, y') \right| \leq M,\ \forall (x, y, y') \in D$$

*entonces el problema con valores de contorno tiene una solución.*

**Ejemplo:** mostrar que

$$y'' + e^{-xy} + \operatorname{sen} y' = 0,\ 1 \leq x \leq 2$$
$$y(1) = y(2) = 0$$

tiene una solución única.
**Solución:** tenemos

$$f(x, y, y') = -e^{-xy} - \operatorname{sen} y'$$

y para todas las $x$ en $[1, 2]$:

$$f_y(x, y, y') = xe^{-xy} > 0 \quad \text{y}$$
$$\left| f_{y'}(x, y, y') \right| = \left| -\cos y' \right| \leq 1$$

Por lo que el problema tiene solución única.

**Ejemplo:** mostrar que

$$\begin{aligned} y'' + e^{-xy} + \operatorname{sen} y' = 0, \; 1 \leq x \leq 2 \\ y(1) = y(2) = 0 \end{aligned}$$

tiene una solución única.

**Solución:** tenemos

$$f(x, y, y') = -e^{-xy} - \operatorname{sen} y'$$

y para todas las $x$ en $[1, 2]$:

$$\begin{aligned} f_y(x, y, y') = xe^{-xy} > 0 \quad \text{y} \\ |f_{y'}(x, y, y')| = |-\cos y'| \leq 1 \end{aligned}$$

Por lo que el problema tiene solución única.

**Teorema : Problema lineal (corolario).**

*Si el problema lineal*

$$\begin{aligned} y'' = p(x)y' + q(x)y + r(x), \; a \leq x \leq b \\ y(a) = \alpha, \; y(b) = \beta \end{aligned}$$

*satisface*

- $p(x)$, $q(x)$ *y* $r(x)$ *son continuas en* $[a, b]$
- $q(x) > 0$ *en* $[a, b]$

*Entonces el problema con valor en la frontera tiene una única solución.*

**Ejemplo:** mostrar que

$$\begin{aligned} y'' + e^{-xy} + \operatorname{sen} y' = 0,\ 1 \leq x \leq 2 \\ y(1) = y(2) = 0 \end{aligned}$$

tiene una solución única.

**Solución:** tenemos

$$f(x, y, y') = -e^{-xy} - \operatorname{sen} y'$$

y para todas las $x$ en $[1, 2]$:

$$\begin{aligned} f_y(x, y, y') = xe^{-xy} > 0 \quad \text{y} \\ \left|f_{y'}(x, y, y')\right| = \left|-\cos y'\right| \leq 1 \end{aligned}$$

Por lo que el problema tiene solución única.

**Teorema : Problema lineal (corolario).**

*Si el problema lineal*

$$\begin{aligned} y'' = p(x)y' + q(x)y + r(x),\ a \leq x \leq b \\ y(a) = \alpha,\ y(b) = \beta \end{aligned}$$

*satisface*

- $p(x)$, $q(x)$ *y* $r(x)$ *son continuas en* $[a, b]$
- $q(x) > 0$ *en* $[a, b]$

*Entonces el problema con valor en la frontera tiene una única solución.*

**Métodos de solución:**

- Método de disparo
- Diferencias finitas

**Método de disparo:** transformamos el problema de condiciones de contorno (Dirichlet):

$$y'' = f(x, y, y'),\ a \le x \le b$$
$$y(a) = \alpha,\ y(b) = \beta$$

en un problema de valor inicial:

$$y'' = f(x, y, y'),\ a \le x \le b$$
$$y(a) = \alpha,\ y'(a) = r_0$$

donde $r_0$ es un parámetro inicial: $y(b) \mapsto y(b, r_0)$
Resolvemos el problema de valor inicial con algún método conocido (por ejemplo Runge-Kutta de cuarto orden).
Si $y(b, r_0)$ no está cerca de $\beta$, corregimos la aproximación con $r_1, r_2, \ldots$ hasta que

$$|y(b, r_k) - \beta| < \varepsilon$$

Si $f(x, y, y')$ satisface las condiciones de existencia y unicidad, el problema:

$$y(b, r) - \beta = 0$$

es una ecuación no lineal en la variable $r$.

**Método de disparo:** transformamos el problema de condiciones de contorno (Dirichlet):

$$y'' = f(x, y, y'),\ a \leq x \leq b$$
$$y(a) = \alpha,\ y(b) = \beta$$

en un problema de valor inicial:

$$y'' = f(x, y, y'),\ a \leq x \leq b$$
$$y(a) = \alpha,\ y'(a) = r_0$$

donde $r_0$ es un parámetro inicial: $y(b) \mapsto y(b, r_0)$
Resolvemos el problema de valor inicial con algún método conocido (por ejemplo Runge-Kutta de cuarto orden).
Si $y(b, r_0)$ no está cerca de $\beta$, corregimos la aproximación con $r_1, r_2, \ldots$ hasta que

$$|y(b, r_k) - \beta| < \varepsilon$$

Si $f(x, y, y')$ satisface las condiciones de existencia y unicidad, el problema:

$$y(b, r) - \beta = 0$$

es una ecuación no lineal en la variable $r$.

**Procedimiento:**

- Seleccionamos aproximaciones iniciales $r_0$ y $r_1$ que encierren la solución:

$$y(b, r_0) < \beta < f(b, r_1)$$

- Calculamos la raíz $r^*$ de

$$f_{\text{residuo}}(r) = f(b, r) - \beta$$

  con el método de bisección.
- Resolvemos el problema de valor inicial con

$$y(a) = \alpha,\ y'(a) = r^*$$

## Ejemplo:

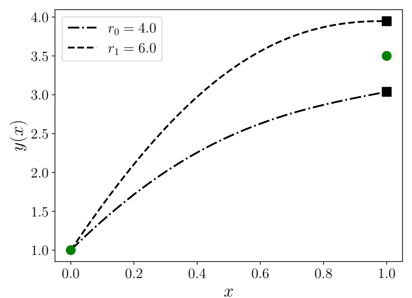
$$y'' = 12x - 4y,\ 0 \le x \le 1$$
$$y(0) = 1,\ y(1) = 3.5$$

Exploramos la solución para los valores $y'(0) = r_1 = 4$ y $y'(0) = r_2 = 6$:

```python
def f(x, y):
    f = np.zeros(2)
    f[0] = y[1]
    f[1] = 12 * x - 4 * y[0]
    return f
```

```python
x_a, x_b = 0.0, 1.0
n_points = 100
beta = 3.5
x = np.linspace(x_a, x_b, n_points)

sol_1 = solve_ivp(f, [x_a, x_b], [1.0, 4.0], dense_output=True)
y_1 = sol_1.sol(x)
sol_2 = solve_ivp(f, [x_a, x_b], [1.0, 6.0], dense_output=True)
y_2 = sol_2.sol(x)
plt.plot(x, y_1.T[:, 0], '-.k', label=r"$r_0 = 4.0$")
plt.plot(x, y_2.T[:, 0], '--k', label=r"$r_1 = 6.0$")
plt.plot([0, 1], [1.0, 3.5], 'go')
```



```python
def residuo(r, a, b, beta):
    x = np.linspace(a, b, 100)
    sol = solve_ivp(f, [a, b], [1, r], dense_output=True)
    z = sol.sol(x)
    resid = z.T[-1, 0] - beta
    return resid
```

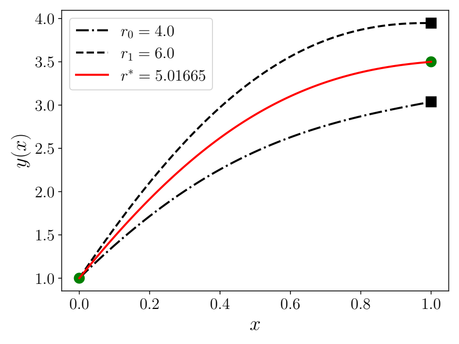
```python
r_opt = bisect(residuo, 4.0, 6.0, args=(x_a, x_b, beta),
    full_output=True)
print(r_opt[1])
sol = solve_ivp(f, [x_a, x_b], [1.0, r_opt[0]],
    dense_output=True)
y = sol.sol(x)
plt.plot(x, y.T[:, 0], '-r', label=r"$r^* = 5.01665$")
```

```
$ ./disparo.py
      converged: True
           flag: 'converged'
 function_calls: 42
     iterations: 40
           root: 5.016654027140248
```

```python
def residuo(r, a, b, beta):
    x = np.linspace(a, b, 100)
    sol = solve_ivp(f, [a, b], [1, r], dense_output=True)
    z = sol.sol(x)
    resid = z.T[-1, 0] - beta
    return resid
```

```python
r_opt = bisect(residuo, 4.0, 6.0, args=(x_a, x_b, beta),
    full_output=True)
print(r_opt[1])
sol = solve_ivp(f, [x_a, x_b], [1.0, r_opt[0]],
    dense_output=True)
y = sol.sol(x)
plt.plot(x, y.T[:, 0], '-r', label=r"$r^* = 5.01665$")
```

```
$ ./disparo.py
      converged: True
           flag: 'converged'
 function_calls: 42
     iterations: 40
           root: 5.016654027140248
```



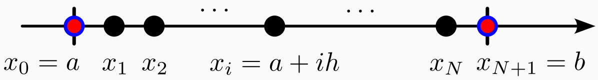
**Diferencias finitas:** aproximación de derivadas por diferencias finitas. Problema lineal con valores de contorno:

$$y'' = p(x)y' + q(x)y + r(x),\ a \leq x \leq b,\ y(a) = \alpha,\ y(b) = \beta \tag{1}$$

**Diferencias finitas:** aproximación de derivadas por diferencias finitas. Problema lineal con valores de contorno:

$$y'' = p(x)y' + q(x)y + r(x), \; a \leq x \leq b, \; y(a) = \alpha, \; y(b) = \beta \tag{1}$$

**Malla:** dividimos $[a, b]$ en $(N + 1)$ subintervalos:

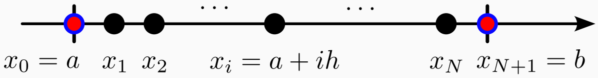



con $h = (b - a)/(N + 1)$, $x_i = a + ih, i = 0, 1, \ldots, N, N + 1$.

**Diferencias finitas:** aproximación de derivadas por diferencias finitas. Problema lineal con valores de contorno:

$$y'' = p(x)y' + q(x)y + r(x), \; a \leq x \leq b, \; y(a) = \alpha, \; y(b) = \beta \tag{1}$$

**Malla:** dividimos $[a, b]$ en $(N+1)$ subintervalos:




con $h = (b-a)/(N+1)$, $x_i = a + ih, i = 0, 1, \ldots, N, N+1$.

Expansión de $y$: polinomio de Taylor, alrededor de $x_i$ evaluando en $x_{i+1}$ y $x_{i-1}$, con $y \in C^4[x_{i-1}, x_{i+1}]$:

$$y(x_i + h) = y(x_i) + hy'(x_i) + \frac{h^2}{2}y''(x_i) + \frac{h^3}{6}y'''(x_i) + \frac{h^4}{24}h^{(4)}y^{(4)}(\xi_i^+)$$
$$y(x_i - h) = y(x_i) - hy'(x_i) + \frac{h^2}{2}y''(x_i) - \frac{h^3}{6}y'''(x_i) + \frac{h^4}{24}h^{(4)}y^{(4)}(\xi_i^-)$$

con $\xi_i^+(x_i, x_i + h)$ y $\xi_i^- \in (x_i - h, x_i)$. Restando y sumando:

$$\begin{aligned} y'(x_i) &= \frac{1}{2h}[y(x_{i+1}) - y(x_{i-1})] - \frac{h^2}{6}y'''(\eta_i) \\ y''(x_i) &= \frac{1}{h^2}[y(x_{i+1}) - 2y(x_i) + y(x_{i-1})] - \frac{h^2}{12}y^{(4)}(\xi_i) \end{aligned} \tag{2}$$

con $\eta_i, \xi_i \in (x_{i-1}, x_{i+1})$.

Reemplazando (2) en (1):

$$\frac{y(x_{i+1}) - 2y(x_i) + y(x_{i-1})}{h^2} = p(x_i)\left[\frac{y(x_{i+1}) - y(x_{i-1})}{2h}\right] + q(x_i)y(x_i) + r(x_i) - \frac{h^2}{12}[2p(x_i)y'''(\eta_i) - y^{(4)}]$$

Reemplazando (2) en (1):

$$\frac{y(x_{i+1}) - 2y(x_i) + y(x_{i-1})}{h^2} = p(x_i)\left[\frac{y(x_{i+1}) - y(x_{i-1})}{2h}\right] + q(x_i)y(x_i) + r(x_i) - \frac{h^2}{12}[2p(x_i)y'''(\eta_i) - y^{(4)}]$$

$y(x_i) \mapsto y_i$, condiciones de borde $y_0 = \alpha$, $y_{N+1} = \beta$, error de truncamiento $\mathcal{O}(h^2) \mapsto$ sistema de ecuaciones lineales:

$$\left(\frac{-y_{i+1} + 2y_i - y_{i-1}}{h^2}\right) + p(x_i)\left(\frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h}\right) + q(x_i)y_i = -r(x_i)$$

para los puntos interiores de la malla $i = 1, 2, \ldots, N$. Reordenando:

$$-\left(1 + \frac{h}{2}p(x_i)\right)y_{i-1} + \left(2 + h^2 q(x_i)\right)y_i - \left(1 - \frac{h}{2}p(x_i)\right)y_{i+1} = -h^2 r(x_i)$$

Sistema con matriz tridiagonal $N \times N$:

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{b}$$

$$
\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2+h^2q(x_1) & -1+\frac{h}{2}p(x_1) & & & & \text{\Huge 0} \\ -1-\frac{h}{2}p(x_2) & 2+h^2q(x_2) & -1+\frac{h}{2}p(x_2) & & & \\ & -1-\frac{h}{2}p(x_3) & 2+h^2q(x_3) & -1+\frac{h}{2}p(x_3) & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & & -1+\frac{h}{2}p(x_{N-1}) \\ \text{\Huge 0} & & & & -1-\frac{h}{2}p(x_N) & 2+h^2q(x_N) \end{bmatrix}
$$

$$
\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{N-1} \\ y_N \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} -h^2r(x_1) + \left(1+\frac{h}{2}p(x_1)\right) y_0 \\ -h^2r(x_2) \\ \vdots \\ -h^2r(x_{N-1}) \\ -h^2r(x_n) + \left(1-\frac{h}{2}p(x_N)\right) y_{N+1} \end{bmatrix}
$$

- R.L. Burden, D.J. Faires y A.M. Burden. ***Análisis numérico.*** 10.ª ed. Mexico: Cengage Learning, 2017. Capítulo 11.
- B. Bradie. ***A Friendly Introduction to Numerical Analysis.*** New Jersey, United States: Pearson Education Inc., 2006. Capítulo 8.
- J. Kiusalaas. ***Numerical Methods in Engineering with Python 3.*** Cambridge, United Kingdom: Cambridge University Press, 2013. Capítulo 8.
- J.H. Mathews y K.D. Fink. ***Numerical methods using MATLAB.*** New Jersey, United States: Pearson Education Inc., 2004. Capítulo 9.