Resolución de problemas de valor inicial

Manuel Carlevaro

Departamento de Ingeniería Mecánica

Grupo de Materiales Granulares - UTN FRLP

manuel.carlevaro@gmail.com

Cálculo Avanzado • 2023

Problema de valor inicial:

$$\begin{cases} y'(t) = f[t, y(t)], \quad t_0 \leq t \leq T \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

Problema de valor inicial:

$$\begin{cases} y'(t) = f[t, y(t)], \quad t_0 \leq t \leq T \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

Definición : Condición de Lipschitz.

Una función $f(t, y)$ satisface una **condición de Lipschitz** en la variable y en un conjunto $D \in \mathbf{R}^2$ si existe una constante $L > 0$ tal que

$$|f(t, y_1) - f(t, y_2)| \leq L\,|y_1 - y_2|$$

siempre que (t, y_1) y (t, y_2) estén en D. La constante L se llama **constante de Lipschitz** para f.

Ejemplo: mostrar que $f(t, y) = t\,|y|$ satisface una condición de Lipschitz en el intevalo $D = \{(t, y)\,|\,1 \leq t \leq 2 \text{ y } -3 \leq y \leq 4\}$:
Para cada par de puntos (t, y_1) y (t, y_2) en D, tenemos:

$$\begin{aligned} |f(t, y_1) - f(t, y_2)| &= |t\,|y_1| - t\,|y_2|| \\ &= |t|\,||y_1| - |y_2|| \\ &\leq 2\,|y_1 - y_2| \end{aligned}$$

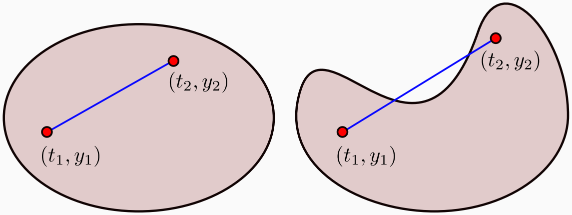
f satisface una condición de Lipschitz sobre D con $L = 2$ (menor valor posible). Por ejemplo:

$$|f(2, 1) - f(2, 0)| = |2 - 0| = 2\,|1 - 0|$$

Definición : Conjunto convexo.

Un conjunto $D \in \mathbf{R}^2$ se dice que es **convexo** si, dados (t_1, y_1) y (t_2, y_2) pertenecientes a D, entonces

$$[(1-\lambda)t_1 + \lambda t_2, (1-\lambda)y_1 + \lambda y_2] \in D \; \forall \lambda \in [0,1]$$



Teorema : .

Sea $f(t,y)$ definida en un conjunto convexo $D \in \mathbf{R}^2$. Si existe una constante $L > 0$ tal que

$$\left| \frac{\partial f(t,y)}{\partial y} \right| \leq L, \; \forall (t,y) \in D$$

entonce f satisface una condición de Lipschitz sobre D en la variable y con constante de Lipschitz L.

Teorema : .

Sea $D = \{(t,y) \,|\, t_0 \leq t \leq T \text{ y } -\infty < y < \infty\}$, y $f(t,y)$ continua en D. Si f satisface una condición de Lipschitz sobre D en la variable y, entonces el problema de valor inicial:

$$\begin{cases} y'(t) = f(t,y), \; t_0 \leq T \leq b \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

tiene una solución única $y(t)$ para $t_0 \leq t \leq T$.

Problema bien formulado:

- Existencia: el problema tiene al menos una solución.
- Unicidad: el problema tiene solución única.
- Estabilidad: pequeñas variaciones en los datos de entrada no generan grandes cambios en la solución.

Problema bien formulado:

- Existencia: el problema tiene al menos una solución.
- Unicidad: el problema tiene solución única.
- Estabilidad: pequeñas variaciones en los datos de entrada no generan grandes cambios en la solución.

El problema de valor inicial:

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y), \; t_0 \leq t \leq T \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

está bien formulado si:

- Existe una solución única $y(t)$, y
- Existen constantes $\varepsilon_0 > 0$ y $k > 0$ tal que para cada $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, siempre que $\delta(t)$ sea continua con $|\delta(t)| < \varepsilon, \; \forall t \in [t_0, T]$, y cuando $|\delta_0| < \varepsilon$, el problema de valor inicial:

$$\begin{cases} z'(t) = f(t, z) + \delta(t), \; t_0 \leq t \leq T \\ z(t_0) = y_0 + \delta_0 \end{cases}$$

tiene una solución única que satisface

$$|z(t) - y(t)| < k\varepsilon, \; \forall t \in [t_0, T]$$

Teorema : .

Sea $D = \{(t, y) \,|\, t_0 \leq t \leq T \; y \; -\infty < y < \infty\}$. Si f es continua y satisface una condición de Lipschitz en la variable y sobre el conjunto D, el problema de valor inicial:

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y), \; t_0 \leq t \leq T \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

está bien formulado.

Serie de Taylor: $f \in C^{(\infty)}$

$$f(t) = f(t_0) + \frac{f'(t_0)}{1!}(t - t_0) + \frac{f''(t_0)}{2!}(t - t_0)^2 + \frac{f^{(3)}(t_0)}{3!}(t - t_0)^3 + \cdots$$

Serie de Taylor: $f \in C^{(\infty)}$

$$f(t) = f(t_0) + \frac{f'(t_0)}{1!}(t-t_0) + \frac{f''(t_0)}{2!}(t-t_0)^2 + \frac{f^{(3)}(t_0)}{3!}(t-t_0)^3 + \cdots$$

Teorema : Teorema de Taylor.

Sea $k \geq 1$ un entero y $f : \mathbf{R} \mapsto \mathbf{R}$ k veces diferenciable en $t_0 \in \mathbf{R}$. Entonces existe $h_k : \mathbf{R} \mapsto \mathbf{R}$ tal que:

$$f(t) = f(t_0) + \frac{f'(t_0)}{1!}(t-t_0) + \frac{f''(t_0)}{2!}(t-t_0)^2 + \frac{f^{(3)}(t_0)}{3!}(t-t_0)^3 + \cdots + \frac{f^{(k)}(t_0)}{k!}(t-t_0)^k + h_k(t)(t-t_0)^k$$

y

$$\lim_{t \to t_0} h_k(t) = 0$$

Serie de Taylor: $f \in C^{(\infty)}$

$$f(t) = f(t_0) + \frac{f'(t_0)}{1!}(t-t_0) + \frac{f''(t_0)}{2!}(t-t_0)^2 + \frac{f^{(3)}(t_0)}{3!}(t-t_0)^3 + \cdots$$

Teorema : Teorema de Taylor.

Sea $k \geq 1$ un entero y $f : \mathbf{R} \mapsto \mathbf{R}$ k veces diferenciable en $t_0 \in \mathbf{R}$. Entonces existe $h_k : \mathbf{R} \mapsto \mathbf{R}$ tal que:

$$f(t) = f(t_0) + \frac{f'(t_0)}{1!}(t-t_0) + \frac{f''(t_0)}{2!}(t-t_0)^2 + \frac{f^{(3)}(t_0)}{3!}(t-t_0)^3 + \cdots + \frac{f^{(k)}(t_0)}{k!}(t-t_0)^k + h_k(t)(t-t_0)^k$$

y

$$\lim_{t \to t_0} h_k(t) = 0$$

Forma de Lagrange para el resto: Sea $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ $k+1$ veces diferenciable en (t_0, t) con $f^{(k)}$ continua en t_0, t:

$$R_k(t) = \frac{f^{(k+1)}(\tau)}{(k+1)!}(t-t_0)^{k+1}$$

para $t_0 \leq \tau \leq t$.

Método de Euler: $h = t_1 - t_0, y'(t) = f(t, y)$

$$y_1 = y(t_1) = y(t_0) + y'(t_0)(t_1 - -t_0) + \frac{y''(\tau)}{2}(t_1 - t_0)^2$$
$$= y_0 + hf[t_0, y(t_0, y_0)] + y''(\tau)\frac{h^2}{2}$$

- Aproximación: $y_1 = y_0 + hf(t_0, y_0)$
- Error local: $\mathcal{O}(h^2)$
- Error global: $\mathcal{O}(h)$

- R.L. Burden, D.J. Faires y A.M. Burden. ***Análisis numérico.*** 10.ª ed. Mexico: Cengage Learning, 2017. Capítulo 6.
- Gilbert Strang. ***Linear Algebra and Its Applications, 4th Edition.*** 4th. Brooks Cole, 2006. Capítulo 7.
- A.J. Salgado y S.M. Wise. ***Classical Numerical Analysis.*** Cambridge, United Kingdom: Cambridge University Press, 2023. DOI: 10.1017/9781108942607. Capítulo 3.
- A. Quarteroni, R. Sacco y F. Saleri. ***Numerical Mathematics.*** New York, United States: Springer-Verlag, 2000. Capítulo 3.