

# NORMAS DE VECTORES Y MATRICES

---

Manuel Carlevaro

Departamento de Ingeniería Mecánica

Grupo de Materiales Granulares - UTN FRLP

manuel.carlevaro@gmail.com

Cálculo Avanzado • 2024

 · Xe<sub>La</sub>TeX · 

## Motivación:

Error en escalar:

$$|x^* - x| \sim \delta x$$

¿Cómo es el error en  $\mathbb{R}^n$  o en  $\mathbb{R}^{m \times n}$ ?

$$\boldsymbol{x} \mapsto \delta \boldsymbol{x}$$

o

$$(\boldsymbol{A} + \delta \boldsymbol{A})(\boldsymbol{x} + \delta \boldsymbol{x}) = \boldsymbol{b} + \delta \boldsymbol{b}$$

## Motivación:

Error en escalar:

$$|x^* - x| \sim \delta x$$

¿Cómo es el error en  $\mathbb{R}^n$  o en  $\mathbb{R}^{m \times n}$ ?

$$\mathbf{x} \mapsto \delta \mathbf{x}$$

o

$$(\mathbf{A} + \delta \mathbf{A})(\mathbf{x} + \delta \mathbf{x}) = \mathbf{b} + \delta \mathbf{b}$$

### Definición : Espacio vectorial.

Un *espacio vectorial* sobre el cuerpo  $K$  ( $K = \mathbb{R}$  o  $K = \mathbb{C}$ ), es un conjunto no vacío  $V$ , cuyos elementos se denominan **vectores**, y en el que se definen dos operaciones: **suma** y **multiplicación escalar**.

## Motivación:

Error en escalar:

$$|x^* - x| \sim \delta x$$

¿Cómo es el error en  $\mathbb{R}^n$  o en  $\mathbb{R}^{m \times n}$ ?

$$x \mapsto \delta x$$

o

$$(A + \delta A)(x + \delta x) = b + \delta b$$

## Definición : Espacio vectorial.

Un *espacio vectorial* sobre el cuerpo  $K$  ( $K = \mathbb{R}$  o  $K = \mathbb{C}$ ), es un conjunto no vacío  $V$ , cuyos elementos se denominan **vectores**, y en el que se definen dos operaciones: **suma** y **multiplicación escalar**.

## Propiedades:

1. La suma es conmutativa y asociativa.
2.  $\exists \mathbf{0} \in V$  (vector cero o nulo) tal que  $\mathbf{v} + \mathbf{0} = \mathbf{v}$ ,  $\forall \mathbf{v} \in V$ .
3.  $0 \cdot \mathbf{v} = \mathbf{0}$ ,  $1 \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v}$ , donde 0 y 1 son respectivamente el cero y uno de  $K$ .
4.  $\forall \mathbf{v} \in V, \exists -\mathbf{v} \in V : \mathbf{v} + (-\mathbf{v}) = \mathbf{0}$ .
5. Propiedad distributiva:
  - $\forall \alpha \in K, \forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V, \alpha(\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \alpha\mathbf{v} + \alpha\mathbf{w}$ .
  - $\forall \alpha, \beta \in K, \forall \mathbf{v} \in V, (\alpha + \beta)\mathbf{v} = \alpha\mathbf{v} + \beta\mathbf{v}$ .
6. Propiedad asociativa:
  - $\forall \alpha, \beta \in K, \forall \mathbf{v} \in V, (\alpha\beta)\mathbf{v} = \alpha(\beta\mathbf{v})$

## Motivación:

Error en escalar:

$$|x^* - x| \sim \delta x$$

¿Cómo es el error en  $\mathbb{R}^n$  o en  $\mathbb{R}^{m \times n}$ ?

$$x \mapsto \delta x$$

o

$$(A + \delta A)(x + \delta x) = b + \delta b$$

## Definición : Espacio vectorial.

Un *espacio vectorial* sobre el cuerpo  $K$  ( $K = \mathbb{R}$  o  $K = \mathbb{C}$ ), es un conjunto no vacío  $V$ , cuyos elementos se denominan **vectores**, y en el que se definen dos operaciones: **suma** y **multiplicación escalar**.

## Propiedades:

1. La suma es conmutativa y asociativa.
2.  $\exists \mathbf{0} \in V$  (vector cero o nulo) tal que  $\mathbf{v} + \mathbf{0} = \mathbf{v}$ ,  $\forall \mathbf{v} \in V$ .
3.  $0 \cdot \mathbf{v} = \mathbf{0}$ ,  $1 \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v}$ , donde 0 y 1 son respectivamente el cero y uno de  $K$ .
4.  $\forall \mathbf{v} \in V, \exists -\mathbf{v} \in V : \mathbf{v} + (-\mathbf{v}) = \mathbf{0}$ .
5. Propiedad distributiva:
  - ▶  $\forall \alpha \in K, \forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V, \alpha(\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \alpha\mathbf{v} + \alpha\mathbf{w}$ .
  - ▶  $\forall \alpha, \beta \in K, \forall \mathbf{v} \in V, (\alpha + \beta)\mathbf{v} = \alpha\mathbf{v} + \beta\mathbf{v}$ .
6. Propiedad asociativa:
  - ▶  $\forall \alpha, \beta \in K, \forall \mathbf{v} \in V, (\alpha\beta)\mathbf{v} = \alpha(\beta\mathbf{v})$

## Ejemplos:

- ▶  $V = \mathbb{R}^n$  ( $V = \mathbb{C}^n$ ),  $n > 1$ .
- ▶  $V = \mathbb{P}_n = \{p_n(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k\}$ ,  $n \geq 0$ .
- ▶  $V = \mathcal{C}^p([a, b])$ ,  $0 \leq p \leq \infty$ .

### Definición : Producto escalar.

Un **producto escalar** en  $V$  definido sobre  $K$  es cualquier mapeo  $\langle \cdot, \cdot \rangle, V \times V \mapsto K$  con las siguientes propiedades:

1. Es lineal respecto de los vectores en  $V$ :

$$\langle \gamma \mathbf{x} + \lambda \mathbf{z}, \mathbf{y} \rangle = \gamma \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + \lambda \langle \mathbf{z}, \mathbf{y} \rangle$$

$$\forall \mathbf{x}, \mathbf{z} \in V, \forall \gamma, \lambda \in K.$$

2. Es hermítico:

$$\langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle = \overline{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle}, \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$$

3. Es definido positivo:

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \geq 0, \quad \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}$$

### Definición : Producto escalar.

Un **producto escalar** en  $V$  definido sobre  $K$  es cualquier mapeo  $\langle \cdot, \cdot \rangle, V \times V \mapsto K$  con las siguientes propiedades:

1. Es lineal respecto de los vectores en  $V$ :

$$\langle \gamma \mathbf{x} + \lambda \mathbf{z}, \mathbf{y} \rangle = \gamma \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + \lambda \langle \mathbf{z}, \mathbf{y} \rangle$$

$$\forall \mathbf{x}, \mathbf{z} \in V, \forall \gamma, \lambda \in K.$$

2. Es hermítico:

$$\langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle = \overline{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle}, \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$$

3. Es definido positivo:

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \geq 0, \quad \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}$$

### Definición : Norma vectorial.

Sea  $V$  un espacio vectorial sobre  $K$ . El mapeo  $\|\cdot\| \mapsto \mathbb{R}$  es una **norma** si se cumple que:

1. (i)  $\|\mathbf{v}\| \geq 0 \forall \mathbf{v} \in V$  y (ii)  $\|\mathbf{v}\| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{v} = \mathbf{0}$ ;
2.  $\|\alpha \mathbf{v}\| = |\alpha| \|\mathbf{v}\| \forall \alpha \in K, \forall \mathbf{v} \in V$  (propiedad de homogeneidad);
3.  $\|\mathbf{v} + \mathbf{w}\| \leq \|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{w}\| \forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$  (desigualdad triangular),

donde  $|\alpha|$  denota el valor absoluto de  $\alpha$  si  $K = \mathbb{R}$ , o el módulo de  $\alpha$  si  $K = \mathbb{C}$ . El par  $(V, \|\cdot\|)$  se denomina **espacio normado**.

**Ejemplo:** Norma  $p$ , o  $l_p$ ,  $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_p)$

$$\|\mathbf{x}\| = \left( \sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p}, \quad 1 \leq p \leq \infty$$

- ▶ Cuando  $p \rightarrow \infty$  ( $l_\infty$ ): **norma infinita** o **norma máxima**

$$\|\mathbf{x}\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$$

- ▶ Cuando  $p = 1$  ( $l_1$ ): **norma del taxista**

$$\|\mathbf{x}\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$$

- ▶ Cuando  $p = 2$  ( $l_2$ ): **norma euclídea**

$$\|\mathbf{x}\|_2 = \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle^{1/2} = \left( \sum_{i=1}^n |x_i|^2 \right)^{1/2}$$



**Ejemplo:** Norma  $p$ , o  $l_p$ ,  $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_p)$

$$\|\mathbf{x}\| = \left( \sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p}, \quad 1 \leq p \leq \infty$$

- ▶ Cuando  $p \rightarrow \infty$  ( $l_\infty$ ): **norma infinita** o **norma máxima**

$$\|\mathbf{x}\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$$

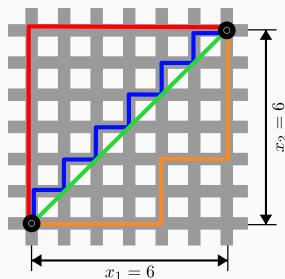
- ▶ Cuando  $p = 1$  ( $l_1$ ): **norma del taxista**

$$\|\mathbf{x}\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$$

- ▶ Cuando  $p = 2$  ( $l_2$ ): **norma euclídea**

$$\|\mathbf{x}\|_2 = \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle^{1/2} = \left( \sum_{i=1}^n |x_i|^2 \right)^{1/2}$$

**Interpretación gráfica en  $\mathbb{R}^2$ :**



$$\mathbf{x} = [6, 6]$$

$$l_\infty = \max\{|6|, |6|\} = 6$$

Camino más corto:

▶  $l_1$  ■, ■, ■: 12

▶  $l_2$  ■:  $6\sqrt{2} \approx 8.49$

**Ejemplo:** Norma  $p$ , o  $l_p$ ,  $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_p)$

$$\|\mathbf{x}\| = \left( \sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p}, \quad 1 \leq p \leq \infty$$

- ▶ Cuando  $p \rightarrow \infty$  ( $l_\infty$ ): **norma infinita** o **norma máxima**

$$\|\mathbf{x}\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$$

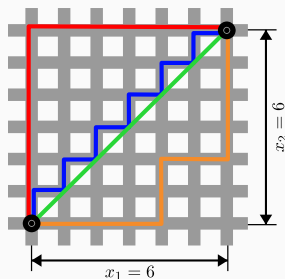
- ▶ Cuando  $p = 1$  ( $l_1$ ): **norma del taxista**

$$\|\mathbf{x}\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$$

- ▶ Cuando  $p = 2$  ( $l_2$ ): **norma euclídea**

$$\|\mathbf{x}\|_2 = \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle^{1/2} = \left( \sum_{i=1}^n |x_i|^2 \right)^{1/2}$$

**Interpretación gráfica en  $\mathbb{R}^2$ :**



$$\mathbf{x} = [6, 6]$$

$$l_\infty = \max\{|6|, |6|\} = 6$$

Camino más corto:

- ▶  $l_1$  (red, blue, orange): 12

- ▶  $l_2$  (green):  $6\sqrt{2} \approx 8.49$

**Desigualdad de Cauchy-Schwarz:**  $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ :

$$|\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle| \leq \|\mathbf{x}\|_2 \|\mathbf{y}\|_2$$

donde la igualdad vale si y solo si  $\mathbf{y} = \alpha \mathbf{x}, \alpha \in \mathbb{R}$ .

**Continuidad:** Cualquier  $\|\cdot\|$  en  $V$  es una **función continua** de sus argumentos:  $\forall \varepsilon > 0, \exists C > 0$  tal que si  $\|\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}\| \leq \varepsilon$ , entonces  $|\|\mathbf{x}\| - \|\hat{\mathbf{x}}\|| \leq C\varepsilon$  para cualquier  $\mathbf{x}, \hat{\mathbf{x}} \in V$ .

### Cálculo de normas:

$$\mathbf{x}_1 = [1, -2, 3]$$

$$\mathbf{x}_2 = [2, 0, -1, 2]$$

$$\mathbf{x}_3 = [0, 1, -4, 2, -1]$$

### Norma máxima:

$$\|\mathbf{x}_1\|_\infty = \max\{|1|, |-2|, |3|\} = 3$$

$$\|\mathbf{x}_2\|_\infty = \max\{|2|, |0|, |-1|, |2|\} = 2$$

$$\|\mathbf{x}_3\|_\infty = \max\{|0|, |1|, |-4|, |2|, |-1|\} = 4$$

### Norma $l_1$ :

$$\|\mathbf{x}_1\|_1 = |1| + |-2| + |3| = 6$$

$$\|\mathbf{x}_2\|_1 = |2| + |0| + |-1| + |2| = 5$$

$$\|\mathbf{x}_3\|_1 = |0| + |1| + |-4| + |2| + |-1| = 8$$

### Norma $l_2$ :

$$\|\mathbf{x}_1\|_2 = \sqrt{|1|^2 + |-2|^2 + |3|^2} = \sqrt{14} \approx 3.74$$

$$\|\mathbf{x}_2\|_2 = \sqrt{|2|^2 + |0|^2 + |-1|^2 + |2|^2} = \sqrt{9} = 3$$

$$\|\mathbf{x}_3\|_2 = \sqrt{|0|^2 + |1|^2 + |-4|^2 + |2|^2 + |-1|^2} = \sqrt{22} \approx 4.69$$

### Definición : Norma matricial.

Una **norma matricial** es un mapeo  $\|\cdot\| : K^{m \times n} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que:

1.  $\|\mathbf{A}\| \geq 0 \ \forall \mathbf{A} \in K^{m \times n}$  y  $\|\mathbf{A}\| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{A} = \mathbf{0}$ ;
2.  $\|\alpha \mathbf{A}\| = |\alpha| \|\mathbf{A}\|$ ,  $\forall \alpha \in K, \forall \mathbf{A} \in K^{m \times n}$   
(homogeneidad);
3.  $\|\mathbf{A} + \mathbf{B}\| \leq \|\mathbf{A}\| + \|\mathbf{B}\|$ ,  $\forall \mathbf{A}, \mathbf{B} \in K^{m \times n}$   
(desigualdad triangular).

La **distancia entre matrices**  $m \times n$  con esta norma es  $\|\mathbf{A} - \mathbf{B}\|$ .

### Definición : Norma matricial.

Una **norma matricial** es un mapeo  $\|\cdot\| : K^{m \times n} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que:

1.  $\|\mathbf{A}\| \geq 0 \ \forall \mathbf{A} \in K^{m \times n}$  y  $\|\mathbf{A}\| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{A} = \mathbf{0}$ ;
2.  $\|\alpha \mathbf{A}\| = |\alpha| \|\mathbf{A}\|$ ,  $\forall \alpha \in K, \forall \mathbf{A} \in K^{m \times n}$   
(homogeneidad);
3.  $\|\mathbf{A} + \mathbf{B}\| \leq \|\mathbf{A}\| + \|\mathbf{B}\|$ ,  $\forall \mathbf{A}, \mathbf{B} \in K^{m \times n}$   
(desigualdad triangular).

La **distancia entre matrices**  $m \times n$  con esta norma es  $\|\mathbf{A} - \mathbf{B}\|$ .

### Norma por componentes:

Matriz  $m \times n \mapsto$  vector  $m \cdot n$ . Sea  $\mathbf{A} = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{m \times n}$ :

#### ► Norma $p$ :

$$\|\mathbf{A}\|_p = \left( \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n |a_{ij}|^p \right)^{1/p}$$

#### ► Norma de Frobenius: ( $p = 2$ )

$$\|\mathbf{A}\|_F^2 = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2$$

#### ► Norma máxima:

$$\|\mathbf{A}\|_{\max} = \max_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} |a_{ij}|$$

### Teorema : Norma inducida.

Si  $\|\cdot\|$  es una norma vectorial en  $K^n$ , entonces

$$\|A\| = \max_{\|x\|=1} \|Ax\|$$

es la norma matricial **natural** o **inducida** asociada con la norma vectorial.

Alternativamente:

$$\|A\| = \max_{z \neq 0} \frac{\|Az\|}{\|z\|}$$

**Corolario:**  $\forall z \neq 0, A$  y cualquier norma natural  $\|\cdot\|$ :

$$\|Az\| \leq \|A\| \cdot \|z\|$$

**Teorema : Norma inducida.**

Si  $\|\cdot\|$  es una norma vectorial en  $K^n$ , entonces

$$\|A\| = \max_{\|x\|=1} \|Ax\|$$

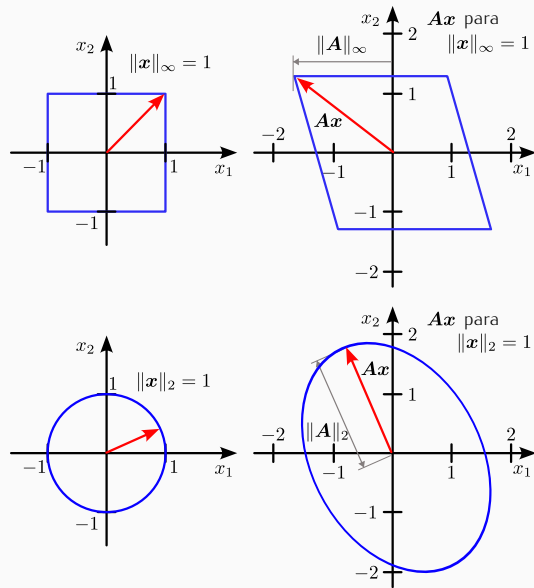
es la norma matricial **natural** o **inducida** asociada con la norma vectorial.

Alternativamente:

$$\|A\| = \max_{z \neq 0} \frac{\|Az\|}{\|z\|}$$

**Corolario:**  $\forall z \neq 0, A$  y cualquier norma natural  $\|\cdot\|$ :

$$\|Az\| \leq \|A\| \cdot \|z\|$$



**Norma inducida  $l_p$ :** si  $\mathbf{A}$  es una matriz en  $K^{m \times n}$

$$\|\mathbf{A}\|_p = \max_{\mathbf{x} \neq \mathbf{0}} \frac{\|\mathbf{Ax}\|_p}{\|\mathbf{x}\|_p}$$

► **Norma inducida  $l_1$ :** (norma suma columna)

$$\|\mathbf{A}\|_1 = \max_{j=1, \dots, n} \sum_{i=1}^m |a_{ij}|$$

► **Norma inducida  $\infty$ :** (norma suma fila)

$$\|\mathbf{A}\|_\infty = \max_{i=1, \dots, m} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$$

► **Norma inducida  $l_2$ :**  $\mapsto$  próxima clase.



**Norma inducida  $l_p$ :** si  $A$  es una matriz en  $K^{m \times n}$

$$\|A\|_p = \max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_p}{\|x\|_p}$$

► **Norma inducida  $l_1$ :** (norma suma columna)

$$\|A\|_1 = \max_{j=1, \dots, n} \sum_{i=1}^m |a_{ij}|$$

► **Norma inducida  $\infty$ :** (norma suma fila)

$$\|A\|_\infty = \max_{i=1, \dots, m} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$$

► **Norma inducida  $l_2$ :**  $\mapsto$  próxima clase.

### Definición : Norma sub-multiplicativa.

Una norma matricial  $\|\cdot\|$  es **sub-multiplicativa** si  $\forall A \in K^{n \times m}, \forall B \in K^{m \times q}$ :

$$\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$$

### Definición : Consistencia.

Si  $\|\cdot\|_{K^n} : K^n \rightarrow \mathbb{R}$ , y  $\|\cdot\|_{K^m} : K^m \rightarrow \mathbb{R}$  son normas, y  $\|\cdot\| : K^{m \times n} \rightarrow \mathbb{R}$  es una norma matricial, decimos que  $\|\cdot\|$  es **consistente** (o **compatible**) respecto de las normas  $\|\cdot\|_{K^n}$  y  $\|\cdot\|_{K^m}$  si y solo si

$$\|Ax\|_{K^m} \leq \|A\| \|x\|_{K^n}$$

En matrices cuadradas, las normas inducidas son **sub-multiplicativas** y **consistentes**.

Determinar  $\|\mathbf{A}\|_1$  y  $\|\mathbf{A}\|_\infty$  para la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 5 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Norma  $\|\cdot\|_1$ :

$$\sum_{i=1}^3 |a_{i,1}| = |1| + |0| + |5| = 6$$

$$\sum_{i=1}^3 |a_{i,2}| = |2| + |3| + |-1| = 6$$

$$\sum_{i=1}^3 |a_{i,3}| = |-1| + |-1| + |1| = 3$$

$$\|\mathbf{A}\|_1 = \max\{6, 6, 3\} = 6$$

Norma  $\|\cdot\|_\infty$ :

$$\sum_{j=1}^3 |a_{1,j}| = |1| + |2| + |-1| = 4$$

$$\sum_{j=1}^3 |a_{2,j}| = |0| + |3| + |-1| = 4$$

$$\sum_{j=1}^3 |a_{3,j}| = |5| + |-1| + |1| = 7$$

$$\|\mathbf{A}\|_\infty = \max\{4, 4, 7\} = 7$$

- ▶ **burden2017**. Capítulo 7.
- ▶ **moreno2014**. Capítulo 2.
- ▶ **bradie2006**. Sección 3.3.
- ▶ **quarteroni2000**. Capítulo 1.