Resolución de problemas de valor inicial

Manuel Carlevaro

Departamento de Ingeniería Mecánica

Grupo de Materiales Granulares - UTN FRLP

manuel.carlevaro@gmail.com

Cálculo Avanzado • 2023

Problema de valor inicial:

$$\begin{cases} y'(t) = f[t, y(t)], \quad t_0 \leq t \leq T \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

Problema de valor inicial:

$$\begin{cases} y'(t) = f[t, y(t)], \quad t_0 \leq t \leq T \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

Definición : Condición de Lipschitz.

Una función $f(t, y)$ satisface una **condición de Lipschitz** en la variable y en un conjunto $D \in \mathbf{R}^2$ si existe una constante $L > 0$ tal que

$$|f(t, y_1) - f(t, y_2)| \leq L\,|y_1 - y_2|$$

siempre que (t, y_1) y (t, y_2) estén en D. La constante L se llama **constante de Lipschitz** para f.

Ejemplo: mostrar que $f(t, y) = t\,|y|$ satisface una condición de Lipschitz en el intevalo $D = \{(t, y) \,|\, 1 \leq t \leq 2 \text{ y } -3 \leq y \leq 4\}$:
Para cada par de puntos (t, y_1) y (t, y_2) en D, tenemos:

$$\begin{aligned} |f(t, y_1) - f(t, y_2)| &= |t\,|y_1| - t\,|y_2|| \\ &= |t|\,||y_1| - |y_2|| \\ &\leq 2\,|y_1 - y_2| \end{aligned}$$

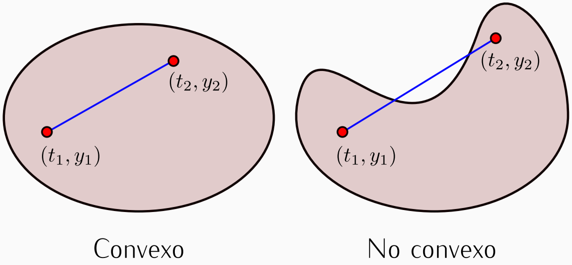
f satisface una condición de Lipschitz sobre D con $L = 2$ (menor valor posible). Por ejemplo:

$$|f(2, 1) - f(2, 0)| = |2 - 0| = 2\,|1 - 0|$$

Definición : Conjunto convexo.

Un conjunto $D \in \mathbf{R}^2$ se dice que es **convexo** si, dados (t_1, y_1) y (t_2, y_2) pertenecientes a D, entonces

$$[(1-\lambda)t_1 + \lambda t_2, (1-\lambda)y_1 + \lambda y_2] \in D \ \forall \lambda \in [0,1]$$



Teorema : .

Sea $f(t,y)$ definida en un conjunto convexo $D \in \mathbf{R}^2$. Si existe una constante $L > 0$ tal que

$$\left|\frac{\partial f(t,y)}{\partial y}\right| \le L, \ \forall (t,y) \in D$$

entonce f satisface una condición de Lipschitz sobre D en la variable y con constante de Lipschitz L.

Teorema : .

Sea $D = \{(t,y) \,|\, t_0 \le t \le T$ y $-\infty < y < \infty\}$, y $f(t,y)$ continua en D. Si f satisface una condición de Lipschitz sobre D en la variable y, entonces el problema de valor inicial:

$$\begin{cases} y'(t) = f(t,y), \ t_0 \le T \le b \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

tiene una solución única $y(t)$ para $t_0 \le t \le T$.

Problema bien formulado:

- Existencia: el problema tiene al menos una solución.
- Unicidad: el problema tiene solución única.
- Estabilidad: pequeñas variaciones en los datos de entrada no generan grandes cambios en la solución.

Problema bien formulado:

- Existencia: el problema tiene al menos una solución.
- Unicidad: el problema tiene solución única.
- Estabilidad: pequeñas variaciones en los datos de entrada no generan grandes cambios en la solución.

El problema de valor inicial:

$$\begin{cases} y'(t) = f(t,y), \; t_0 \leq t \leq T \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

está bien formulado si:

- Existe una solución única $y(t)$, y
- Existen constantes $\varepsilon_0 > 0$ y $k > 0$ tal que para cada $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, siempre que $\delta(t)$ sea continua con $|\delta(t)| < \varepsilon, \; \forall t \in [t_0, T]$, y cuando $|\delta_0| < \varepsilon$, el problema de valor inicial:

$$\begin{cases} z'(t) = f(t,z) + \delta(t), \; t_0 \leq t \leq T \\ z(t_0) = y_0 + \delta_0 \end{cases}$$

tiene una solución única que satisface

$$|z(t) - y(t)| < k\varepsilon, \; \forall t \in [t_0, T]$$

Teorema : .

Sea $D = \{(t,y) \,|\, t_0 \leq t \leq T \text{ y } -\infty < y < \infty\}$. Si f es continua y satisface una condición de Lipschitz en la variable y sobre el conjunto D, el problema de valor inicial:

$$\begin{cases} y'(t) = f(t,y), \; t_0 \leq t \leq T \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

está bien formulado.

Serie de Taylor: $f \in C^{(\infty)}$

$$f(t) = f(t_0) + \frac{f'(t_0)}{1!}(t - t_0) + \frac{f''(t_0)}{2!}(t - t_0)^2 + \frac{f^{(3)}(t_0)}{3!}(t - t_0)^3 + \cdots$$

Serie de Taylor: $f \in C^{(\infty)}$

$$f(t) = f(t_0) + \frac{f'(t_0)}{1!}(t-t_0) + \frac{f''(t_0)}{2!}(t-t_0)^2 + \frac{f^{(3)}(t_0)}{3!}(t-t_0)^3 + \cdots$$

Teorema : Teorema de Taylor.

Sea $k \geq 1$ un entero y $f : \mathbf{R} \mapsto \mathbf{R}$ k veces diferenciable en $t_0 \in \mathbf{R}$. Entonces existe $h_k : \mathbf{R} \mapsto \mathbf{R}$ tal que:

$$f(t) = f(t_0) + \frac{f'(t_0)}{1!}(t-t_0) + \frac{f''(t_0)}{2!}(t-t_0)^2 + \frac{f^{(3)}(t_0)}{3!}(t-t_0)^3 + \cdots + \frac{f^{(k)}(t_0)}{k!}(t-t_0)^k + h_k(t)(t-t_0)^k$$

y

$$\lim_{t \to t_0} h_k(t) = 0$$

Serie de Taylor: $f \in C^{(\infty)}$

$$f(t) = f(t_0) + \frac{f'(t_0)}{1!}(t-t_0) + \frac{f''(t_0)}{2!}(t-t_0)^2 + \frac{f^{(3)}(t_0)}{3!}(t-t_0)^3 + \cdots$$

Teorema : Teorema de Taylor.

Sea $k \geq 1$ un entero y $f : \mathbf{R} \mapsto \mathbf{R}$ k veces diferenciable en $t_0 \in \mathbf{R}$. Entonces existe $h_k : \mathbf{R} \mapsto \mathbf{R}$ tal que:

$$f(t) = f(t_0) + \frac{f'(t_0)}{1!}(t-t_0) + \frac{f''(t_0)}{2!}(t-t_0)^2 + \frac{f^{(3)}(t_0)}{3!}(t-t_0)^3 + \cdots + \frac{f^{(k)}(t_0)}{k!}(t-t_0)^k + h_k(t)(t-t_0)^k$$

y

$$\lim_{t \to t_0} h_k(t) = 0$$

Forma de Lagrange para el resto: Sea $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ $k+1$ veces diferenciable en (t_0, t) con $f^{(k)}$ continua en t_0, t:

$$R_k(t) = \frac{f^{(k+1)}(\tau)}{(k+1)!}(t-t_0)^{k+1}$$

para $t_0 \leq \tau \leq t$.

Método de Euler: $h = t_1 - t_0, y'(t) = f(t, y)$

$$y_1 = y(t_1) = y(t_0) + y'(t_0)(t_1 - -t_0) + \frac{y''(\tau)}{2}(t_1 - t_0)^2$$
$$= y_0 + hf[t_0, y(t_0, y_0)] + y''(\tau)\frac{h^2}{2}$$

- Aproximación: $y_1 = y_0 + hf(t_0, y_0)$
- Error local: $\mathcal{O}(h^2)$
- Error global: $\mathcal{O}(h)$

Método de Taylor: y tiene $n+1$ derivadas continuas en $[t_0, T]$, expansión de Taylor alrededor de t_i:

$$y(t) = y_0 + y_i' + \frac{y_i''}{2}(t-t_i)^2 + \cdots + \frac{y_i^{(n)}}{n!}(t-t_i)^n + \frac{y^{(n+1)}(\tau)}{(n+1)!}(t-t_i)^{n+1}$$

$$\begin{aligned}
y_i' &= f(t_i, y_i) \\
y_i'' &= \left.\frac{d}{dt} f(t,y)\right|_{t=t_i} = \left.\left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y} f\right)\right|_{t=t_i} \\
y_i''' &= \left.\frac{d^2}{dt^2} f(t,y)\right|_{t=t_i} = \left.\left(\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} + 2f\frac{\partial^2 f}{\partial t \partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} f^2 + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial t} + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 f\right)\right|_{t=t_i}
\end{aligned}$$

Evaluando en $t = t_{i+1}$, descartando el resto y haciendo $h = t_{i+1} - t_i$:

$$y_{i+1} = y_i + hf(t_i, y_i) + \frac{h^2}{2}\left.\frac{d}{dt} f(t,y)\right|_{(t_i,y_i)} + \cdots + \frac{h^n}{n!}\left.\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} f(t,y)\right|_{(t_i,y_i)}$$

Nota: el método de Euler es el de Taylor con $n = 1$.

Runge-Kutta de segundo orden

$$\begin{cases} y' = f(t,y),\ t_0 \le t \le T \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

$$y_{n+1} = y_n + \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t,y)\,dt$$

Regla del trapecio:

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t,y)\,dt \simeq \frac{h}{2}[f(t_n,y_n) + f(t_{n+1},y_{n+1})]$$

Aproximamos:

$$\begin{aligned} y_{n+1} \approx \overline{y}_{n+1} &= y_n + hf(t_n,y_n) \\ y_{n+1} &= y_n + \frac{h}{2}[f(t_n,y_n) + f(t_{n+1},\overline{y}_{n+1})] \end{aligned}$$

Forma canónica:

$$\begin{aligned} k_1 &= hf(t_n,y_n) \\ k_2 &= hf(t_{n+1},y_n + k_1) \\ y_{n+1} &= y_n + \frac{1}{2}(k_1 + k_2) \end{aligned}$$

Errores:

- Error local: $\mathcal{O}(h^3)$
- Error global $\mathcal{O}(h^2)$

RK2 óptimo (minimiza coeficiente de error):

$$\begin{aligned} k_1 &= \frac{2}{3}hf(t_i,y_i) \\ k_2 &= \frac{3}{4}hf(t_i + \tfrac{2h}{3},k_1) \\ y_{n+1} &= y_n + \frac{1}{4}\left(\tfrac{3}{2}k_1 + 4k_2\right) \end{aligned}$$

Runge-Kutta de cuarto orden

$$\begin{cases} y' = f(t,y),\ t_0 \le t \le T \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(k_0 + 2k_1 + 2k_2 + k_3)$$

con

$$k_0 = hf(t_n, y_n)$$

$$k_1 = hf\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_0}{2}\right)$$

$$k_2 = hf\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_1}{2}\right)$$

$$k_3 = hf\left(t_n + h, y_n + k_2\right)$$

Errores:

- Error local: $\mathcal{O}(h^5)$
- Error global $\mathcal{O}(h^4)$

Nota: Si $f(t,y) = f(t)$: regla de integración de Simpson

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}\left[f(x_n) + 4f(x_n + \tfrac{h}{2}) + f(t_{n+1})\right]$$

Sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} \boldsymbol{y}'(t) = \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{y}(t)) \\ \boldsymbol{y}(t_0) = \boldsymbol{y}_0 \end{cases}$$

Euler:

$$\boldsymbol{y}_{n+1} = \boldsymbol{y}_n + h\boldsymbol{f}(t_n, \boldsymbol{y}_n)$$

RK4:

$$\boldsymbol{k}_0 = h\boldsymbol{f}(t_n, \boldsymbol{y}_n)$$

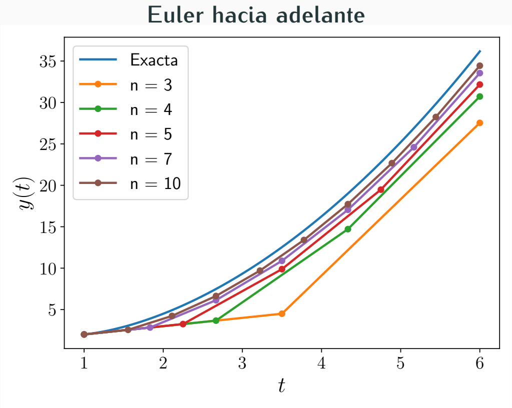
$$\boldsymbol{k}_1 = h\boldsymbol{f}\left(t_n + \frac{h}{2}, \boldsymbol{y}_n + \frac{\boldsymbol{k}_0}{2}\right)$$

$$\boldsymbol{k}_2 = h\boldsymbol{f}\left(t_n + \frac{h}{2}, \boldsymbol{y}_n + \frac{\boldsymbol{k}_1}{2}\right)$$

$$\boldsymbol{k}_3 = h\boldsymbol{f}\left(t_n + h, \boldsymbol{y}_n + \boldsymbol{k}_2\right)$$

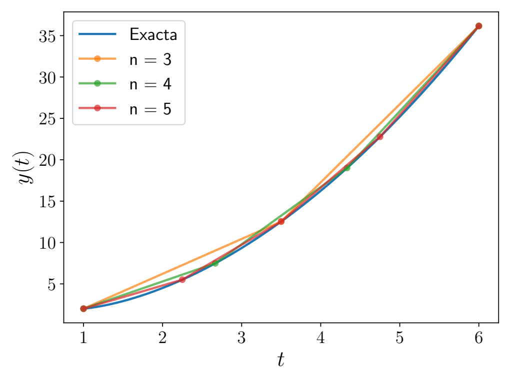
$$\boldsymbol{y}_{n+1} = \boldsymbol{y}_n + \frac{1}{6}(\boldsymbol{k}_0 + 2\boldsymbol{k}_1 + 2\boldsymbol{k}_2 + \boldsymbol{k}_3)$$

```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
plt.style.use('../../utils/clases.mplstyle')

def f(t, y):
    return 3 * t - y / t

def y_exacta(t):
    return t**2 + 1 / t

def euler(f, t_0, T, n, y_0):
    h = (T - t_0) / (n - 1)
    ts = t_0 + np.arange(n) * h
    ys = np.zeros(n)
    y = y_0
    for n, t in enumerate(ts):
        ys[n] = y
        y += h * f(t, y)
    return ts, ys

t_e = np.linspace(1, 6, 100)
plt.plot(t_e, y_exacta(t_e), label='Exacta')
for n in [3, 4, 5, 7, 10]:
    t, y = euler(f, 1, 6, n, 2)
    plt.plot(t, y, '.-', label=f"n = {n}")
```



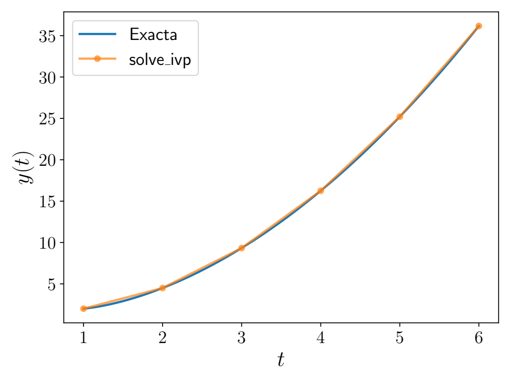
```python
def rk4(f, t_0, T, n, y_0):
    h = (T - t_0) / (n - 1)
    ts = t_0 + np.arange(n) * h
    ys = np.zeros(n)
    y = y_0
    for n, t in enumerate(ts):
        ys[n] = y
        k0 = h * f(t, y)
        k1 = h * f(t + h/2, y + k0 / 2)
        k2 = h * f(t + h/2, y + k1 / 2)
        k3 = h * f(t + h, y + k2)
        y += (k0 + 2 * k1 + 2 * k2 + k3) / 6
    return ts, ys

t_e = np.linspace(1, 6, 100)
plt.plot(t_e, y_exacta(t_e), label='Exacta')
for n in [3, 4, 5]:
    t, y = rk4(f, 1, 6, n, 2)
    plt.plot(t, y, '.-', label=f"n = {n}", alpha=0.7)
```

Runge-Kutta de cuarto orden



```python
t_e = np.linspace(1, 6, 100)
plt.plot(t_e, y_exacta(t_e), label='Exacta')

from scipy.integrate import solve_ivp

sol = solve_ivp(f, [1, 6], [2], method='RK45',
    t_eval=[1, 2, 3, 4, 5, 6])

plt.plot(sol.t, sol.y[0], '.-',label="solve_ivp",
         alpha=0.7)

plt.xlabel(r"$t$")
plt.ylabel(r"$y(t)$")
plt.legend()
plt.tight_layout()
plt.savefig("solve_ivp.pdf")
```

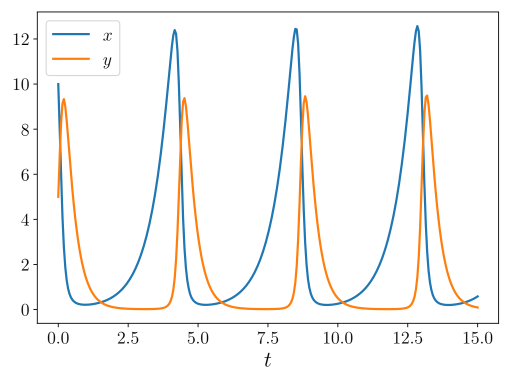
solve_ivp de SciPy



Sistema Lotka-Volterra

```python
#!/usr/bin/env python3
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.integrate import solve_ivp
plt.style.use('../../utils/clases.mplstyle')

def LV(t, z, a, b, d, g):
    x, y = z
    return [a * x - b * x * y, d * x * y - g * y]

sol = solve_ivp(LV, [0, 15], [10, 5],
    args=(1.5, 1, 1, 3), dense_output=True)

t = np.linspace(0, 15, 300)
z = sol.sol(t)
plt.plot(t, z.T[:,0], label=r'$x$')
plt.plot(t, z.T[:,1], label=r'$y$')
plt.xlabel(r"$t$")
plt.legend()
plt.tight_layout()
plt.savefig("lv.pdf")
```

$$\frac{dx}{dt} = \alpha x - \beta xy$$
$$\frac{dy}{dt} = \delta xy - \gamma y$$
$$x(0) = x_0, \; y(0) = y_0$$



- R.L. Burden, D.J. Faires y A.M. Burden. ***Análisis numérico.*** 10.ª ed. Mexico: Cengage Learning, 2017. Capítulo 5.
- B. Bradie. ***A Friendly Introduction to Numerical Analysis.*** New Jersey, United States: Pearson Education Inc., 2006. Capítulo 7.
- A. Gezerlis. ***Numerical Methods in Physics With Python.*** Cambridge, United Kingdom: Cambridge University Press, 2020. DOI: 10.1017/9781108772310. Capítulo 8.
- J. Kiusalaas. ***Numerical Methods in Engineering with Python 3.*** Cambridge, United Kingdom: Cambridge University Press, 2013. Capítulo 7.