

APROXIMACIÓN POR MÍNIMOS CUADRADOS

AJUSTE CONTINUO POLINÓMICO

Manuel Carlevaro

Departamento de Ingeniería Mecánica

Grupo de Materiales Granulares - UTN FRLP

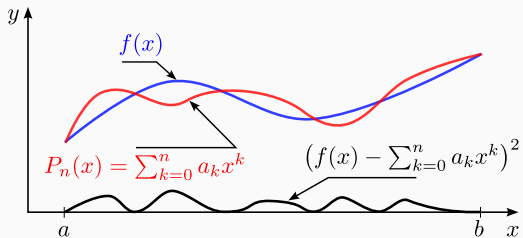
manuel.carlevaro@gmail.com

Cálculo Avanzado • 2023

 · X_yTikZ · 

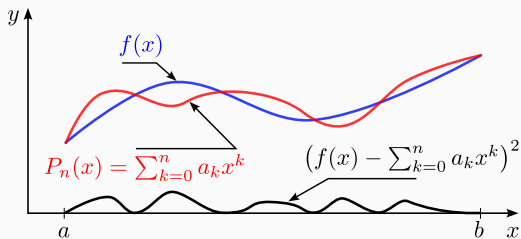
$f(x) \in \mathbf{C}[a, b]$, hallar $P_n(x)$ que minimize:

$$\int_a^b [f(x) - P_n(x)]^2 dx$$



$f(x) \in \mathbf{C}[a, b]$, hallar $P_n(x)$ que minimize:

$$\int_a^b [f(x) - P_n(x)]^2 dx$$

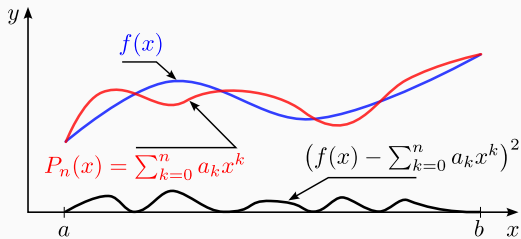


$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = \sum_{k=0}^n a_k x^k$$

$$E \equiv E_2(a_0, a_1, \cdots, a_n) = \int_a^b \left(f(x) - \sum_{k=0}^n a_k x^k \right)^2 dx$$

$f(x) \in \mathbf{C}[a, b]$, hallar $P_n(x)$ que minimize:

$$\int_a^b [f(x) - P_n(x)]^2 dx$$



$$\frac{\partial E}{\partial a_j} = 0 \quad \text{para cada } j = 0, 1, \dots, n$$

$$E = \int_a^b [f(x)]^2 dx - 2 \sum_{k=0}^n a_k \int_a^b x^k f(x) dx + \int_a^b \left(\sum_{k=0}^n a_k x^k \right)^2 dx$$

$$\frac{\partial E}{\partial a_j} = -2 \int_a^b x^j f(x) dx + 2 \sum_{k=0}^n a_k \int_a^b x^{j+k} dx$$

Ecuaciones normales lineales $(n+1)$:

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = \sum_{k=0}^n a_k x^k$$

$$\sum_{k=0}^n a_k \int_a^b x^{j+k} dx = \int_a^b x^j f(x) dx$$

para cada $j = 0, 1, \dots, n$.

$$E \equiv E_2(a_0, a_1, \dots, a_n) = \int_a^b \left(f(x) - \sum_{k=0}^n a_k x^k \right)^2 dx$$

Ejemplo: aproximar $f(x) = \sin \pi x$ por un polinomio de grado 2 en $[0, 1]$.

Ecuaciones normales:

$$a_0 \int_0^1 1 dx + a_1 \int_0^1 x dx + a_2 \int_0^1 x^2 dx = \int_0^1 \sin \pi x dx$$

$$a_0 \int_0^1 x dx + a_1 \int_0^1 x^2 dx + a_2 \int_0^1 x^3 dx = \int_0^1 x \sin \pi x dx$$

$$a_0 \int_0^1 x^2 dx + a_1 \int_0^1 x^3 dx + a_2 \int_0^1 x^4 dx = \int_0^1 x^2 \sin \pi x dx$$

$$a_0 + \frac{1}{2}a_1 + \frac{1}{3}a_2 = \frac{2}{\pi}$$

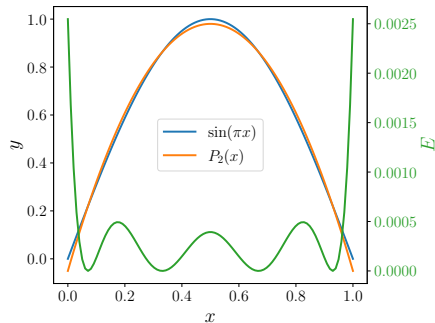
$$\frac{1}{2}a_0 + \frac{1}{3}a_1 + \frac{1}{4}a_2 = \frac{1}{\pi}$$

$$\frac{1}{3}a_0 + \frac{1}{4}a_1 + \frac{1}{5}a_2 = \frac{\pi^2 - 4}{\pi^3}$$

Solución

$$a_0 = \frac{12\pi^2 - 120}{\pi^3} \approx -0.050465$$

$$a_1 = -a_2 = \frac{720 - 60\pi^2}{\pi^3} \approx 4.12251$$



Problemas:

- ▶ matriz de Hilbert

$$H_{ij} = \int_a^b x^{j+k+1} dx = \frac{b^{j+k+1} - a^{j+k+1}}{j+k+1}$$

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

$$\text{cond}(\mathbf{H}) \approx 524.05678$$

Problemas:

- ▶ matriz de Hilbert

$$H_{ij} = \int_a^b x^{j+k+1} dx = \frac{b^{j+k+1} - a^{j+k+1}}{j+k+1}$$

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

$$\text{cond}(\mathbf{H}) \approx 524.05678$$

- ▶ No es fácil obtener $P_{n+1}(x)$ si ya tenemos $P_n(x)$

Problemas:

- ▶ matriz de Hilbert

$$H_{ij} = \int_a^b x^{j+k+1} dx = \frac{b^{j+k+1} - a^{j+k+1}}{j+k+1}$$

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

$$\text{cond}(\mathbf{H}) \approx 524.05678$$

- ▶ No es fácil obtener $P_{n+1}(x)$ si ya tenemos $P_n(x)$

Definición : Funciones linealmente independientes .

Se dice que el conjunto de funciones $\{\phi_0, \dots, \phi_n\}$ es **linealmente independiente** (LI) en $[a, b]$ si

$$P(x) = c_0\phi_0(x) + c_1\phi_1(x) + \dots + c_n\phi_n(x) = 0, \forall x \in [a, b]$$

entonces $c_0 = c_1 = \dots = c_n = 0$. De lo contrario, se dice que el conjunto de funciones es **linealmente dependiente**.

Problemas:

- matriz de Hilbert

$$H_{ij} = \int_a^b x^{j+k+1} dx = \frac{b^{j+k+1} - a^{j+k+1}}{j+k+1}$$

$$H = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

$$\text{cond}(H) \approx 524.05678$$

- No es fácil obtener $P_{n+1}(x)$ si ya tenemos $P_n(x)$

Definición : Funciones linealmente independientes .

Se dice que el conjunto de funciones $\{\phi_0, \dots, \phi_n\}$ es **linealmente independiente** (LI) en $[a, b]$ si

$$P(x) = c_0\phi_0(x) + c_1\phi_1(x) + \dots + c_n\phi_n(x) = 0, \forall x \in [a, b]$$

entonces $c_0 = c_1 = \dots = c_n = 0$. De lo contrario, se dice que el conjunto de funciones es **linealmente dependiente**.

Teorema : Polinomios LI.

Si para cada $j = 0, 1, \dots, n$, $\phi_j(x)$ es un polinomio de grado j , entonces el conjunto $\{\phi_0, \dots, \phi_n\}$ es LI en cualquier intervalo $[a, b]$.

Ejemplo. Si $\phi_0(x) = 2$, $\phi_1(x) = x - 3$, $\phi_2(x) = x^2 + 2x + 7$ y $Q(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$, mostrar que existen constantes c_0, c_1, c_2 tales que $Q(x) = c_0\phi_0(x) + c_1\phi_1(x) + c_2\phi_2(x)$.

Ejemplo. Si $\phi_0(x) = 2$, $\phi_1(x) = x - 3$, $\phi_2(x) = x^2 + 2x + 7$ y $Q(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$, mostrar que existen constantes c_0, c_1, c_2 tales que $Q(x) = c_0\phi_0(x) + c_1\phi_1(x) + c_2\phi_2(x)$.

Por el teorema anterior, $\{\phi_0, \phi_1, \phi_2\}$ es LI en cualquier $[a, b]$. Además:

$$1 = \frac{1}{2}\phi_0(x)$$

$$x = \phi_1(x) + 3 = \phi_1(x) + \frac{3}{2}\phi_0(x)$$

$$x^2 = \phi_2(x) - 2x - 7$$

$$= \phi_2(x) - 2\left[\phi_1(x) + \frac{3}{2}\phi_0(x)\right] - 7\left[\frac{1}{2}\phi_0(x)\right]$$

$$= \phi_2(x) - 2\phi_1(x) - \frac{13}{2}\phi_0(x)$$

Ejemplo. Si $\phi_0(x) = 2$, $\phi_1(x) = x - 3$, $\phi_2(x) = x^2 + 2x + 7$ y $Q(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$, mostrar que existen constantes c_0, c_1, c_2 tales que $Q(x) = c_0\phi_0(x) + c_1\phi_1(x) + c_2\phi_2(x)$.

Por el teorema anterior, $\{\phi_0, \phi_1, \phi_2\}$ es LI en cualquier

Entonces:

$[a, b]$. Además:

$$1 = \frac{1}{2}\phi_0(x)$$

$$x = \phi_1(x) + 3 = \phi_1(x) + \frac{3}{2}\phi_0(x)$$

$$x^2 = \phi_2(x) - 2x - 7$$

$$= \phi_2(x) - 2\left[\phi_1(x) + \frac{3}{2}\phi_0(x)\right] - 7\left[\frac{1}{2}\phi_0(x)\right]$$

$$= \phi_2(x) - 2\phi_1(x) - \frac{13}{2}\phi_0(x)$$

$$\begin{aligned} Q(x) &= a_0\left[\frac{1}{2}\phi_0\right] + a_1\left[\phi_1(x) + \frac{3}{2}\phi_0(x)\right] \\ &\quad + a_2\left[\phi_2(x) - 2\phi_1(x) - \frac{13}{2}\phi_0(x)\right] \\ &= \left(\frac{1}{2}a_0 + \frac{3}{2}a_1 - \frac{13}{2}a_2\right)\phi_0(x) \\ &\quad + [a_1 - 2a_2]\phi_1(x) + a_2\phi_2(x) \end{aligned}$$

Ejemplo. Si $\phi_0(x) = 2$, $\phi_1(x) = x - 3$, $\phi_2(x) = x^2 + 2x + 7$ y $Q(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$, mostrar que existen constantes c_0, c_1, c_2 tales que $Q(x) = c_0\phi_0(x) + c_1\phi_1(x) + c_2\phi_2(x)$.

Por el teorema anterior, $\{\phi_0, \phi_1, \phi_2\}$ es LI en cualquier

Entonces:

$[a, b]$. Además:

$$1 = \frac{1}{2}\phi_0(x)$$

$$x = \phi_1(x) + 3 = \phi_1(x) + \frac{3}{2}\phi_0(x)$$

$$x^2 = \phi_2(x) - 2x - 7$$

$$= \phi_2(x) - 2\left[\phi_1(x) + \frac{3}{2}\phi_0(x)\right] - 7\left[\frac{1}{2}\phi_0(x)\right]$$

$$= \phi_2(x) - 2\phi_1(x) - \frac{13}{2}\phi_0(x)$$

$$\begin{aligned} Q(x) &= a_0\left[\frac{1}{2}\phi_0\right] + a_1\left[\phi_1(x) + \frac{3}{2}\phi_0(x)\right] \\ &\quad + a_2\left[\phi_2(x) - 2\phi_1(x) - \frac{13}{2}\phi_0(x)\right] \\ &= \left(\frac{1}{2}a_0 + \frac{3}{2}a_1 - \frac{13}{2}a_2\right)\phi_0(x) \\ &\quad + [a_1 - 2a_2]\phi_1(x) + a_2\phi_2(x) \end{aligned}$$

Teorema : .

Si Π_n denota el conjunto de todos los polinomios de grado a lo sumo n , y $\{\phi_0(x), \phi_1(x), \dots, \phi_n(x)\}$ es un conjunto de polinomios LI en Π_n , entonces **cualquier** polinomio en Π_n se puede escribir como combinación lineal de $\phi_0(x), \phi_1(x), \dots, \phi_n(x)$.

Definición : Función de peso.

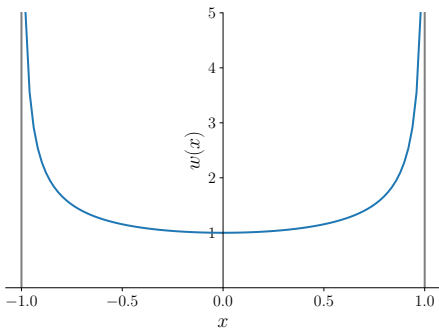
Una función integrable w se denomina **función de peso** en el intervalo I si $w(x) \geq 0, \forall x \in I$, pero $w(x) \not\equiv 0$ en cualquier subintervalo de I

Definición : Función de peso.

Una función integrable w se denomina **función de peso** en el intervalo I si $w(x) \geq 0, \forall x \in I$, pero $w(x) \not\equiv 0$ en cualquier subintervalo de I

Ejemplo:

$$w(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$



Definición : Funciones ortogonales.

Se dice que $\{\phi_0, \phi_1, \dots, \phi_n\}$ es un **conjunto ortogonal de funciones** en el intervalo $[a, b]$ respecto de la función de peso $w(x)$ si

$$\langle \phi_k, \phi_j \rangle = \int_a^b w(x) \phi_k(x) \phi_j(x) dx = \begin{cases} 0, & j \neq k, \\ \alpha_j > 0, & j = k \end{cases}$$

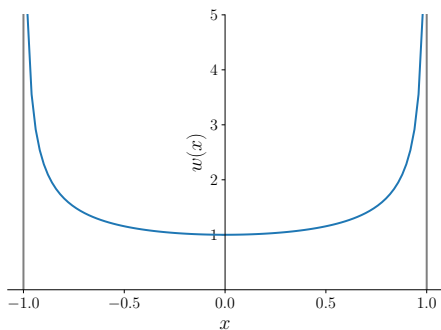
Si además $\alpha_j = 1$ para cada $j = 0, 1, 2, \dots, n$, se dice que el conjunto es **ortonormal**.

Definición : Función de peso.

Una función integrable w se denomina **función de peso** en el intervalo I si $w(x) \geq 0, \forall x \in I$, pero $w(x) \not\equiv 0$ en cualquier subintervalo de I

Ejemplo:

$$w(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$



Definición : Funciones ortogonales.

Se dice que $\{\phi_0, \phi_1, \dots, \phi_n\}$ es un **conjunto ortogonal de funciones** en el intervalo $[a, b]$ respecto de la función de peso $w(x)$ si

$$\langle \phi_k, \phi_j \rangle = \int_a^b w(x) \phi_k(x) \phi_j(x) dx = \begin{cases} 0, & j \neq k, \\ \alpha_j > 0, & j = k \end{cases}$$

Si además $\alpha_j = 1$ para cada $j = 0, 1, 2, \dots, n$, se dice que el conjunto es **ortonormal**.

Ejemplo: $\{\cos nx, \sin mx\}$, $n, m = 0, 1, \dots$ es ortogonal en $[-\pi, \pi]$ con $w(x) = 1$:

$$\begin{array}{l|l} \langle \cos nx, \cos mx \rangle = 0 & \langle \cos nx, \cos nx \rangle = \pi \\ \langle \sin nx, \sin mx \rangle = 0 & \langle \sin nx, \sin nx \rangle = \pi \\ \langle \cos nx, \sin mx \rangle = 0 & n \neq m \end{array}$$

Teorema : .

Si $\{\phi_0, \dots, \phi_n\}$ es un conjunto ortogonal de funciones en un intervalo $[a, b]$ respecto de la función de peso $w(x)$, entonces la aproximación por mínimos cuadrados para f en $[a, b]$ respecto de w es:

$$P(x) = \sum_{j=0}^n a_j \phi_j(x)$$

donde para cada $j = 0, 1, \dots, n$:

$$a_j = \frac{1}{\alpha_j} \langle f, \phi_j \rangle$$

Teorema : .

Si $\{\phi_0, \dots, \phi_n\}$ es un conjunto ortogonal de funciones en un intervalo $[a, b]$ respecto de la función de peso $w(x)$, entonces la aproximación por mínimos cuadrados para f en $[a, b]$ respecto de w es:

$$P(x) = \sum_{j=0}^n a_j \phi_j(x)$$

donde para cada $j = 0, 1, \dots, n$:

$$a_j = \frac{1}{\alpha_j} \langle f, \phi_j \rangle$$

Teorema : .

El conjunto de polinomios $\{\phi_0, \phi_1, \dots, \phi_n\}$ definido de la siguiente forma es ortogonal en $[a, b]$ respecto de la función de peso $w(x)$:

$$\phi_0(x) \equiv 1, \quad \phi_1(x) = x - B_1, \quad \forall x \in [a, b]$$

donde

$$B_1 = \frac{\langle x\phi_0, \phi_0 \rangle}{\langle \phi_0, \phi_0 \rangle}$$

y cuando $k \geq 2$:

$$\phi_k(x) = (x - B_k)\phi_{k-1}(x) - C_k\phi_{k-2}(x), \quad \forall x \in [a, b]$$

donde

$$B_k = \frac{\langle x\phi_{k-1}, \phi_{k-1} \rangle}{\langle \phi_{k-1}, \phi_{k-1} \rangle} \quad \Bigg| \quad C_k = \frac{\langle x\phi_{k-1}, \phi_{k-2} \rangle}{\langle \phi_{k-2}, \phi_{k-2} \rangle}$$

(Proceso de Gram-Schmidt)

Ejemplo: polinomios de Legendre.

$\{P_n(x)\}$ es ortogonal en $[-1, 1]$ con $w(x) \equiv 1$. Usando Gram-Schmidt con $P_0(x) \equiv 1$:

$$B_1 = \frac{\int_{-1}^1 x \, dx}{\int_{-1}^1 dx} = 0, \quad P_1(x) = (x - B_1)P_0(x) = x$$

Ejemplo: polinomios de Legendre.

$\{P_n(x)\}$ es ortogonal en $[-1, 1]$ con $w(x) \equiv 1$. Usando Gram-Schmidt con $P_0(x) \equiv 1$:

$$B_1 = \frac{\int_{-1}^1 x \, dx}{\int_{-1}^1 dx} = 0, \quad P_1(x) = (x - B_1)P_0(x) = x$$

Luego:

$$B_2 = \frac{\int_{-1}^1 x^3 \, dx}{\int_{-1}^1 x^2 \, dx} = 0, \quad C_2(x) = \frac{\int_{-1}^1 x^2 \, dx}{\int_{-1}^1 1 \, dx} = \frac{1}{3}$$

$$\begin{aligned} P_2(x) &= (x - B_2)P_1(x) - C_2P_0(x) \\ &= (x - 0)x - \frac{1}{3}1 \\ &= x^2 - \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Ejemplo: polinomios de Legendre.

$\{P_n(x)\}$ es ortogonal en $[-1, 1]$ con $w(x) \equiv 1$. Usando Gram-Schmidt con $P_0(x) \equiv 1$:

$$B_1 = \frac{\int_{-1}^1 x \, dx}{\int_{-1}^1 dx} = 0, \quad P_1(x) = (x - B_1)P_0(x) = x$$

Luego:

$$B_2 = \frac{\int_{-1}^1 x^3 \, dx}{\int_{-1}^1 x^2 \, dx} = 0, \quad C_2(x) = \frac{\int_{-1}^1 x^2 \, dx}{\int_{-1}^1 1 \, dx} = \frac{1}{3}$$

$$\begin{aligned} P_2(x) &= (x - B_2)P_1(x) - C_2P_0(x) \\ &= (x - 0)x - \frac{1}{3}1 \\ &= x^2 - \frac{1}{3} \end{aligned}$$

$$P_3(x) = xP_2(x) - \frac{4}{15}P_1(x) = x^3 - \frac{3}{5}x$$

$$P_4(x) = x^4 - \frac{6}{7}x^2 + \frac{3}{35}, \quad P_5(x) = x^5 - \frac{10}{9}x^3 + \frac{5}{21}x$$

Ejemplo: polinomios de Legendre.

$\{P_n(x)\}$ es ortogonal en $[-1, 1]$ con $w(x) \equiv 1$. Usando Gram-Schmidt con $P_0(x) \equiv 1$:

$$B_1 = \frac{\int_{-1}^1 x dx}{\int_{-1}^1 dx} = 0, P_1(x) = (x - B_1)P_0(x) = x$$

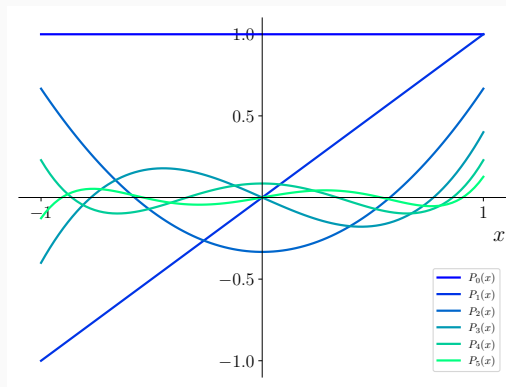
Luego:

$$B_2 = \frac{\int_{-1}^1 x^3 dx}{\int_{-1}^1 x^2 dx} = 0, C_2(x) = \frac{\int_{-1}^1 x^2 dx}{\int_{-1}^1 1 dx} = \frac{1}{3}$$

$$\begin{aligned} P_2(x) &= (x - B_2)P_1(x) - C_2P_0(x) \\ &= (x - 0)x - \frac{1}{3}1 \\ &= x^2 - \frac{1}{3} \end{aligned}$$

$$P_3(x) = xP_2(x) - \frac{4}{15}P_1(x) = x^3 - \frac{3}{5}x$$

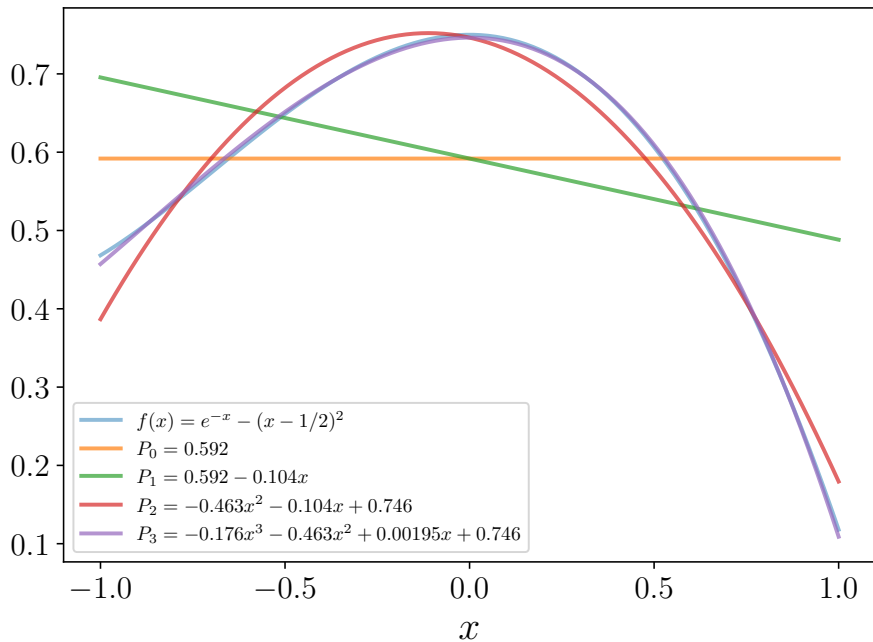
$$P_4(x) = x^4 - \frac{6}{7}x^2 + \frac{3}{35}, P_5(x) = x^5 - \frac{10}{9}x^3 + \frac{5}{21}x$$



Ejemplo: Python

```
5 import numpy as np
6 import sympy as sym
7 from sympy.abc import x, n
8 import sympy.printing as prt
9
10 def min_Legendre(f, L):
11     c = []
12     for i, l in enumerate(L):
13         # print(f"L[{i}] = {l}")
14         fl = sym.integrate(l * f, (x, -1, 1))
15         alfa = sym.integrate(l * l, (x, -1, 1))
16         # print(f"f * l[{i}] = {fl}, alfa = {alfa}")
17         c.append(fl / alfa)
18     return c
19
20 f = sym.exp(-x) - (x-1/2)**2
21 x = sym.Symbol('x')
22 f_num = sym.lambdify([x], f, modules='numpy')
23 x_points = np.linspace(-1, 1, 100)
24 y_exact = f_num(x_points)
```

```
26
27 for n in range(1, 5):
28     print(f"n = {n}")
29     L = [sym.legendre(n, x) for n in range(n)]
30     c = min_Legendre(f, L)
31     P = sum(c[i] * L[i] for i in range(len(L)))
32     lbl = f"$P_{n-1} = {prt.latex(sym.N(sym.collect(P, x), 3))}$"
33     print(lbl)
34     if n == 1:
35         y_approx = P * np.ones(x_points.size)
36     else:
37         Pn = sym.lambdify([x], P, modules='numpy')
38         y_approx = Pn(x_points)
39     plt.plot(x_points, y_approx, label=lbl, alpha=0.7)
40
41 plt.legend(fontsize=10)
42 plt.xlabel('$x$')
43 plt.tight_layout()
44 plt.savefig("fig-05.pdf")
```



- ▶ R.L. Burden, D.J. Faires y A.M. Burden. *Análisis numérico*. 10.^a ed. Mexico: Cengage Learning, 2017. Capítulo 8.
- ▶ E. Kreyszig, H. Kreyszig y E.J. Norminton. *Advanced Engineering Mathematics*. Hoboken, USA: John Wiley & Sons, Inc, 2011. Capítulo 25.9.