

SERIE Y TRANSFORMADA DE FOURIER

INTEGRAL DE FOURIER

Manuel Carlevaro

Departamento de Ingeniería Mecánica

Grupo de Materiales Granulares - UTN FRLP

manuel.carlevaro@gmail.com

Cálculo Avanzado • 2023

 · X_YL^AT_EX · 

Del ejercicio 6 (Práctica 3):

$$f_L(x) = \begin{cases} 0, & -L < x < -1 \\ 1, & -1 < x < 1 \\ 0, & 1 < x < L \end{cases}$$

Del ejercicio 6 (Práctica 3):

$$f_L(x) = \begin{cases} 0, & -L < x < -1 \\ 1, & -1 < x < 1 \\ 0, & 1 < x < L \end{cases}$$

Función par:

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{L}, \quad a_0 = \frac{1}{2L} \int_{-1}^1 dx = \frac{1}{L}$$

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-1}^1 \cos \frac{n\pi x}{L} dx = \frac{2}{L} \int_0^1 \cos \frac{n\pi x}{L} dx = \frac{2}{L} \frac{\operatorname{sen}(n\pi/L)}{n\pi/L}$$

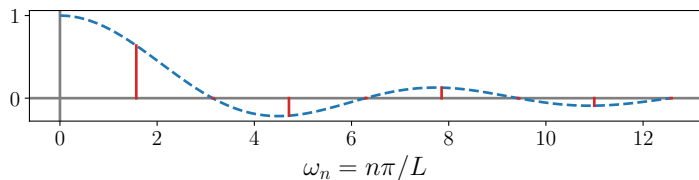
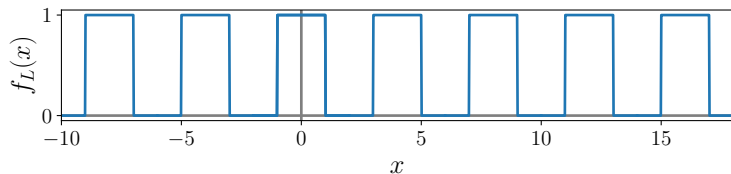
Del ejercicio 6 (Práctica 3):

Función par:

$$f_L(x) = \begin{cases} 0, & -L < x < -1 \\ 1, & -1 < x < 1 \\ 0, & 1 < x < L \end{cases}$$

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{L}, \quad a_0 = \frac{1}{2L} \int_{-1}^1 dx = \frac{1}{L}$$

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-1}^1 \cos \frac{n\pi x}{L} dx = \frac{2}{L} \int_0^1 \cos \frac{n\pi x}{L} dx = \frac{2}{L} \frac{\sin(n\pi/L)}{n\pi/L}$$



$$2L = 4$$

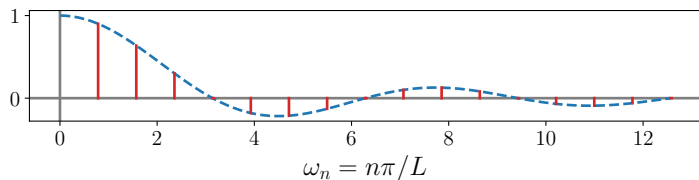
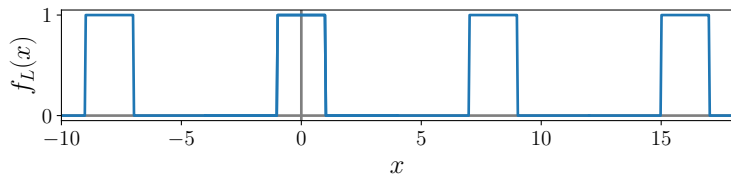
Del ejercicio 6 (Práctica 3):

Función par:

$$f_L(x) = \begin{cases} 0, & -L < x < -1 \\ 1, & -1 < x < 1 \\ 0, & 1 < x < L \end{cases}$$

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{L}, \quad a_0 = \frac{1}{2L} \int_{-1}^1 dx = \frac{1}{L}$$

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-1}^1 \cos \frac{n\pi x}{L} dx = \frac{2}{L} \int_0^1 \cos \frac{n\pi x}{L} dx = \frac{2}{L} \frac{\sin(n\pi/L)}{n\pi/L}$$



$$2L = 8$$

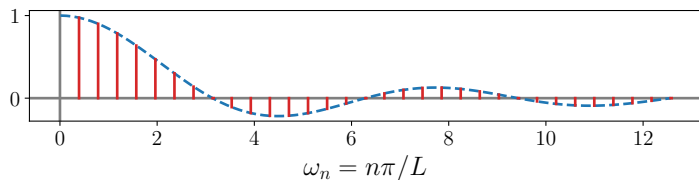
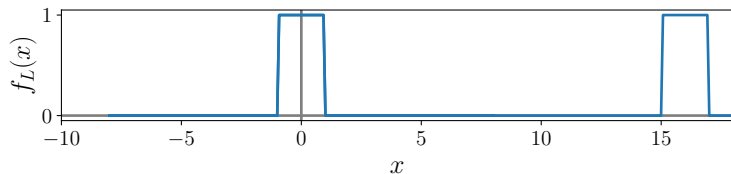
Del ejercicio 6 (Práctica 3):

Función par:

$$f_L(x) = \begin{cases} 0, & -L < x < -1 \\ 1, & -1 < x < 1 \\ 0, & 1 < x < L \end{cases}$$

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{L}, \quad a_0 = \frac{1}{2L} \int_{-1}^1 dx = \frac{1}{L}$$

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-1}^1 \cos \frac{n\pi x}{L} dx = \frac{2}{L} \int_0^1 \cos \frac{n\pi x}{L} dx = \frac{2}{L} \frac{\sin(n\pi/L)}{n\pi/L}$$



$$2L = 16$$

Sea $f_L(x)$ una función de período $2L$:

$$f_L(x) = a_0 + \sum_{i=1}^{\infty} (a_n \cos \omega_n x + b_n \operatorname{sen} \omega_n x)$$

donde

$$\omega_n = \frac{n\pi}{L} \quad a_0 = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f_L(x) dx$$

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f_L(x) \cos \omega_n x dx$$

$$b_0 = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f_L(x) \operatorname{sen} \omega_n x dx$$

$$\begin{aligned} f_L(x) = & \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f_L(\xi) d\xi \\ & + \frac{1}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\cos \omega_n x \int_{-L}^L f_L(\xi) \cos \omega_n \xi d\xi \right. \\ & \left. + \operatorname{sen} \omega_n x \int_{-L}^L f_L(\xi) \operatorname{sen} \omega_n \xi d\xi \right] \end{aligned}$$

Ahora hacemos:

$$\Delta\omega = \omega_{n+1} - \omega_n = \frac{(n+1)\pi}{L} - \frac{n\pi}{L} = \frac{\pi}{L}$$

$$\begin{aligned} f_L(x) = & \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f_L(\xi) d\xi \\ & + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left[(\cos \omega_n x) \Delta\omega \int_{-L}^L f_L(\xi) \cos \omega_n \xi d\xi \right. \\ & \left. + (\operatorname{sen} \omega_n x) \Delta\omega \int_{-L}^L f_L(\xi) \operatorname{sen} \omega_n \xi d\xi \right] \end{aligned}$$

Ahora: $L \rightarrow \infty$, y asumimos que

$$f(x) = \lim_{L \rightarrow \infty} f_L(x)$$

es **absolutamente** integrable en el eje x :

$$\lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^0 |f(x)| dx + \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b |f(x)| dx \mapsto \text{existe}$$

La representación de $f(x)$ por una **integral de Fourier**:

$$f(x) = \int_0^{\infty} [A(\omega) \cos \omega x + B(\omega) \sin \omega x] d\omega \quad (1)$$

donde:

$$\begin{aligned} A(\omega) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \cos \omega \xi d\xi \\ B(\omega) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \sin \omega \xi d\xi \end{aligned} \quad (2)$$

Teorema : Integral de Fourier.

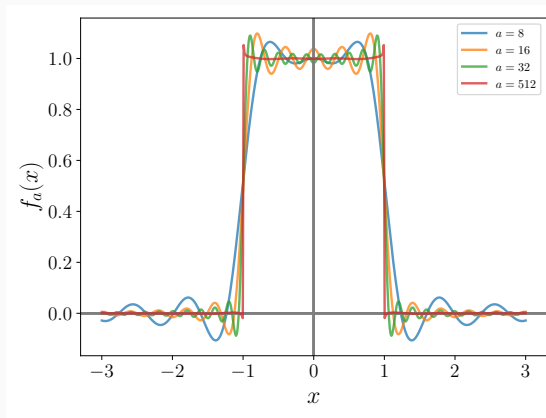
Si $f(x)$ es suave a tramos en cada intervalo finito y tiene derivadas por derecha y por izquierda en cada punto, y si es absolutamente integrable en $(-\infty, \infty)$, entonces $f(x)$ puede representarse como una integral de Fourier (1) con A y B dados por (2). En los puntos en que $f(x)$ es discontinua, el valor de la integral de Fourier es el promedio de los valores laterales de $f(x)$ en esos puntos.

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } |x| < 1 \\ 0, & \text{si } |x| > 1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} A(\omega) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \cos \omega \xi \, d\xi \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 f(\xi) \cos \omega \xi \, d\xi = \left. \frac{\text{sen } \omega \xi}{\pi \omega} \right|_{-1}^1 = \frac{2 \text{sen } \omega}{\pi \omega} \end{aligned}$$

$$B(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \text{sen } \omega \xi \, d\xi = 0$$

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\cos \omega x \text{sen } \omega}{\omega} \, d\omega$$



Transformada coseno: Si $f(x)$ es par, de (2):

$$f(x) = \int_0^{\infty} A(\omega) \cos \omega x d\omega$$
$$\text{con } A(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} f(\xi) \cos \omega \xi d\xi$$

Llamamos $A(\omega) = \sqrt{2/\pi} \hat{f}_c(\omega)$:

$$\hat{f}_c(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(x) \cos \omega x dx \quad (3.a)$$

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \hat{f}_c(\omega) \cos \omega x d\omega \quad (3.b)$$

Transformada seno: Si $f(x)$ es impar, de (2):

$$f(x) = \int_0^{\infty} A(\omega) \sen \omega x d\omega$$
$$\text{con } B(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} f(\xi) \sen \omega \xi d\xi$$

Llamamos $B(\omega) = \sqrt{2/\pi} \hat{f}_s(\omega)$:

$$\hat{f}_s(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(x) \sen \omega x dx \quad (4.a)$$

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \hat{f}_s(\omega) \sen \omega x d\omega \quad (4.b)$$

De las ecuaciones (1) y (2):

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) [\cos \omega \xi \cos \omega x \\ &\quad + \sin \omega \xi \sin \omega x] d\xi d\omega \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \cos(\omega x - \omega \xi) d\xi \right] d\omega \end{aligned}$$

$[\cdot]$ es una función par:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \cos(\omega x - \omega \xi) d\xi \right] d\omega \quad (5)$$

Si usamos sen en vez de cos, $[\cdot]$ es impar y

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \sin(\omega x - \omega \xi) d\xi \right] d\omega = 0 \quad (6)$$

De las ecuaciones (1) y (2):

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) [\cos \omega \xi \cos \omega x \\ &\quad + \sin \omega \xi \sin \omega x] d\xi d\omega \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \cos(\omega x - \omega \xi) d\xi \right] d\omega \end{aligned}$$

$[\cdot]$ es una función par:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \cos(\omega x - \omega \xi) d\xi \right] d\omega \quad (5)$$

Si usamos sen en vez de cos, $[\cdot]$ es impar y

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \sin(\omega x - \omega \xi) d\xi \right] d\omega = 0 \quad (6)$$

Tomamos el integrando de (5) y le sumamos i por el integrando de (6), usando la fórmula de Euler

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

obtenemos la **integral de Fourier compleja**:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) e^{i\omega(x-\xi)} d\xi d\omega$$

Escribiendo la exponencial de la suma como producto de exponenciales:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} f(\xi) e^{-i\omega \xi} d\xi \right] e^{i\omega x} d\omega \quad (7)$$

Transformada de Fourier de f :

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx \quad (8)$$

Transformada inversa de Fourier de \hat{f} :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega x} d\omega \quad (9)$$

Otra nomenclatura:

$$\hat{f} = \mathcal{F}(f), \quad f = \mathcal{F}^{-1}(\hat{f})$$

Teorema : Existencia de \hat{f} .

Si $f(x)$ es absolutamente convergente en $(-\infty, \infty)$ y continua a tramos en intervalos finitos, entonces existe la transformada de Fourier $\hat{f}(\omega)$ de $f(x)$ dada por la ecuación (8).

Encontrar \hat{f} de $f(x) = 1$ si $|x| < 1$ y $f(x) = 0$ en otro caso.

$$\begin{aligned}\hat{f}(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1}^1 e^{-i\omega x} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left. \frac{e^{-i\omega x}}{-i\omega} \right|_{-1}^1 = \frac{1}{-i\omega\sqrt{2\pi}} (e^{-i\omega} - e^{i\omega})\end{aligned}$$

Usando la fórmula de Euler:

$$e^{i\omega} - e^{-i\omega} = 2i \operatorname{sen} \omega$$

resulta

$$\hat{f}(\omega) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{sen} \omega}{\omega} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \operatorname{senc} \omega$$

Encontrar \hat{f} de $f(x) = 1$ si $|x| < 1$ y $f(x) = 0$ en otro caso.

$$\begin{aligned}\hat{f}(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1}^1 e^{-i\omega x} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left. \frac{e^{-i\omega x}}{-i\omega} \right|_{-1}^1 = \frac{1}{-i\omega\sqrt{2\pi}} (e^{-i\omega} - e^{i\omega})\end{aligned}$$

Usando la fórmula de Euler:

$$e^{i\omega} - e^{-i\omega} = 2i \operatorname{sen} \omega$$

resulta

$$\hat{f}(\omega) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{sen} \omega}{\omega} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \operatorname{senc} \omega$$

Encontrar \hat{f} de $f(x) = e^{-ax}$ si $x > 0$ y $f(x) = 0$ si $x < 0$.

$$\begin{aligned}\hat{f}(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty e^{-ax} e^{-i\omega x} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left. \frac{e^{-(a+i\omega x)}}{-(a+i\omega)} \right|_0^\infty \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}(a+i\omega)}\end{aligned}$$

Representación **espectral**:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega x} d\omega$$

Densidad espectral $\hat{f}(\omega) \mapsto$ intensidad de $f(x)$ en $(\omega, \omega + d\omega)$.

$$mx'' + kx = 0$$

$\times x'$: $mx'x'' + kx'x = 0$. Integrando:

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = E_0 = \text{constante}$$

Solución general:

$$x = a_1 \cos \omega_0 t + b_1 \sin \omega_0 t = \underbrace{c_1 e^{i\omega_0 t}}_A + \underbrace{c_{-1} e^{-i\omega_0 t}}_B$$

donde $\omega_0^2 = k/m$, $c_1 = (a_1 - ib_1)/2$,
 $c_{-1} = \bar{c}_1 = (a_1 + ib_1)/2$.

INTERPRETACIÓN FÍSICA: ESPECTRO DE ENERGÍA

Representación **espectral**:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega x} d\omega$$

Densidad espectral $\hat{f}(\omega) \mapsto$ intensidad de $f(x)$ en $(\omega, \omega + d\omega)$.

$$mx'' + kx = 0$$

$\times x'$: $mx'x'' + kx'x = 0$. Integrando:

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = E_0 = \text{constante}$$

Solución general:

$$x = a_1 \cos \omega_0 t + b_1 \sin \omega_0 t = \underbrace{c_1 e^{i\omega_0 t}}_A + \underbrace{c_{-1} e^{-i\omega_0 t}}_B$$

donde $\omega_0^2 = k/m$, $c_1 = (a_1 - ib_1)/2$,
 $c_{-1} = \bar{c}_1 = (a_1 + ib_1)/2$.

$$x = A + B, x' = v = A' + B' = i\omega_0(A - B):$$

$$E_0 = \frac{1}{2}m(i\omega_0)^2(A - B)^2 + \frac{1}{2}k(A + B)^2$$

$$E_0 = \frac{1}{2}k [-(A - B)^2 + (A + B)^2]$$

$$= 2kAB = 2kc_1 e^{i\omega_0 t} c_{-1} e^{-i\omega_0 t}$$

$$= 2kc_1 c_{-1} = 2k|c_1|^2$$

Sistema más complejo: $x = f(t) \mapsto$ periódica:

Espectro discreto: $|c_1|^2 \mapsto |c_n|^2$ (conjunto contable de frecuencias aisladas).

Sistema más complejo: $x = f(t) \mapsto$ no periódica:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega$$

es la **energía total** del sistema.

Teorema : Linealidad de \mathcal{F} .

La transformada de Fourier es una **operación lineal**, esto es, para cualquier par de funciones $f(x)$ y $g(x)$ cuyas transformadas existan, y para cualesquiera constantes a y b , la transformada de Fourier de $af + bg$ existe y

$$\mathcal{F}(af + bg) = a\mathcal{F}(f) + b\mathcal{F}(g)$$

Teorema : Linealidad de \mathcal{F} .

La transformada de Fourier es una **operación lineal**, esto es, para cualquier par de funciones $f(x)$ y $g(x)$ cuyas transformadas existan, y para cualesquiera constantes a y b , la transformada de Fourier de $af + bg$ existe y

$$\mathcal{F}(af + bg) = a\mathcal{F}(f) + b\mathcal{F}(g)$$

Teorema : Transformada de la derivada.

Sea $f(x)$ continua en $(-\infty, \infty)$ y $f(x) \rightarrow 0$ cuando $|x| \rightarrow \infty$. Entonces, si $f'(x)$ es absolutamente integrable en el eje x :

$$\mathcal{F}[f'(x)] = i\omega\mathcal{F}[f(x)]$$

Teorema : Linealidad de \mathcal{F} .

La transformada de Fourier es una **operación lineal**, esto es, para cualquier par de funciones $f(x)$ y $g(x)$ cuyas transformadas existan, y para cualesquiera constantes a y b , la transformada de Fourier de $af + bg$ existe y

$$\mathcal{F}(af + bg) = a\mathcal{F}(f) + b\mathcal{F}(g)$$

Teorema : Transformada de la derivada.

Sea $f(x)$ continua en $(-\infty, \infty)$ y $f(x) \rightarrow 0$ cuando $|x| \rightarrow \infty$. Entonces, si $f'(x)$ es absolutamente integrable en el eje x :

$$\mathcal{F}[f'(x)] = i\omega\mathcal{F}[f(x)]$$

La **convolución** $f * g$ de las funciones f y g se define complejo:

$$\begin{aligned} h(x) = (f * g)(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(x - \tau) d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x - \tau)g(\tau) d\tau \end{aligned}$$

Teorema : Linealidad de \mathcal{F} .

La transformada de Fourier es una **operación lineal**, esto es, para cualquier par de funciones $f(x)$ y $g(x)$ cuyas transformadas existan, y para cualesquiera constantes a y b , la transformada de Fourier de $af + bg$ existe y

$$\mathcal{F}(af + bg) = a\mathcal{F}(f) + b\mathcal{F}(g)$$

Teorema : Transformada de la derivada.

Sea $f(x)$ continua en $(-\infty, \infty)$ y $f(x) \rightarrow 0$ cuando $|x| \rightarrow \infty$. Entonces, si $f'(x)$ es absolutamente integrable en el eje x :

$$\mathcal{F}[f'(x)] = i\omega \mathcal{F}[f(x)]$$

La **convolución** $f * g$ de las funciones f y g se define complejo:

$$\begin{aligned} h(x) = (f * g)(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(x - \tau) d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x - \tau)g(\tau) d\tau \end{aligned}$$

Teorema : Convolución.

Sean $f(x)$ y $g(x)$ funciones acotadas, continuas por tramos, y absolutamente integrables en $(-\infty, \infty)$, entonces

$$\mathcal{F}(f * g) = \sqrt{2\pi} \mathcal{F}(f) \mathcal{F}(g)$$

- ▶ E. Kreyszig, H. Kreyszig y E.J. Norminton. *Advanced Engineering Mathematics*. Hoboken, USA: John Wiley & Sons, Inc, 2011. Capítulo 11 (11.7 – 11.9).
- ▶ Peter V O'Neil. *Matemáticas avanzadas para ingeniería*. 7.^a ed. México, DF: CENGAGE Learning Custom Publishing, 2012. Capítulo 3.
- ▶ K A Stroud y Dexter J Booth. *Advanced Engineering Mathematics*. 6.^a ed. London, England: Bloomsbury Academic, 2020. Capítulos 9.