Errores en el cálculo numérico

Manuel Carlevaro

Departamento de Ingeniería Mecánica

Grupo de Materiales Granulares - UTN FRLP

manuel.carlevaro@gmail.com

Cálculo Avanzado • 2023

¿Para qué?

- Análisis numérico
- Manipulación simbólica
- Colección y análisis de datos
- Visualización
- Simulación

¿Para qué?

- Análisis numérico
- Manipulación simbólica
- Colección y análisis de datos
- Visualización
- Simulación

¿Cómo?

- Modelado: sistema de ecuaciones, ecuaciones diferenciales, integral
- Método numérico: elección, parametrización, estimación de errores
- Programación: Python, C/C++, Fortran, Julia
- Ejecución del código
- Interpretación de resultados: visualización, análisis estadístico, rediseño y ejecución

1. **Error inherente**. Provienen desde el principio en los datos originales y están fuera del alcance del control de cálculo. Ejemplo: incertezas en las mediciones.
2. **Error de truncamiento**. Se producen como resultado de reemplazar un proceso infinito por uno finito. Ejemplo: usar solo los primeros términos de una serie de Taylor.
3. **Error de redondeo**. Se originan en la representación con precisión finita de los números en una computadora.
4. **Error por equivocación**. Causado por realizar una operación aritmética incorrectamente.

1. **Error inherente**. Provienen desde el principio en los datos originales y están fuera del alcance del control de cálculo. Ejemplo: incertezas en las mediciones.
2. **Error de truncamiento**. Se producen como resultado de reemplazar un proceso infinito por uno finito. Ejemplo: usar solo los primeros términos de una serie de Taylor.
3. **Error de redondeo**. Se originan en la representación con precisión finita de los números en una computadora.
4. **Error por equivocación**. Causado por realizar una operación aritmética incorrectamente.

$1-3$ son errores **inevitables** $\mapsto$ control del error.

4 es **evitable**.

Números enteros y de punto flotante

Una cuenta simple: $a + a + a - 3a = 0$

```
>>> 0.1 + 0.1 + 0.1 - 0.3
5.551115123125783e-17
```

En computadoras hay **dos tipos** de números:

- **Punto fijo:** cantidad fija de números decimales
  Ejemplo: $35.6247, 0.4573, -1.0000$
  Enteros: 0 números decimales $\mapsto$ **exacta**
- **Punto flotante:** cantidad fija de cifras significativas
  Ejemplo:
  $0.1900 \cdot 10^4, 0.8691 \cdot 10^{-6}, -0.2000 \cdot 10^{-13}$ (4 cifras significativas) $\mapsto$ representación **aproximada**

```
>>> 7 + 0.000000000000001
7.000000000000001
>>> 7 + 0.0000000000000001
7.0
>>> 0.1 + 0.2
0.30000000000000004
```

Estándar IEEE 754: tres **enteros**

$$r = (-1)^s \, m \, b^e$$

s: signo, m: mantisa, b: base (10, 2, 16), e: exponente.

Ejemplo decimal:

$$\begin{aligned} s &= 0 \\ m &= 31415926 \\ b &= 10 \\ e &= -7 \\ r &= (-1)^0 31415926 \cdot 10^{-7} = 3.1415926 \end{aligned}$$

Ejemplo binario:

$$r = \pm m \cdot 2^n, \quad m = 0.d_1 d_2 \cdots d_k, \quad d_1 > 0$$

número de máquina de k-dígitos.

Características del formato:

- Permite representar números de órdenes de magnitud enormemente dispares (limitado por la longitud del exponente)
- Proporciona la misma precisión relativa para todos los órdenes (limitado por la longitud de la mantisa)
- Permite cálculos entre magnitudes (número grande $\times$ número pequeño) conservando la precisión de ambos en el resultado.

$$6.022 \cdot 10^{23} \longleftrightarrow \texttt{6.022E23}$$

- Existe solo un número finito de números de máquina, y son menos "densos" a medida que el número es más grande. Hay tantos números entre 2 y 4 como entre 1024 y 2048.
- El menor número de máquina positivo ε_m para el cual $1 + \varepsilon_m > 1$ se denomina **precisión de la máquina**. No se pueden representar números en los intervalos $[1, 1 + \varepsilon_m], [2, 2 + 2\varepsilon_m], \cdots$

- E. Kreyszig, H. Kreyszig y E.J. Norminton. *Advanced Engineering Mathematics*. Hoboken, USA: John Wiley & Sons, Inc, 2011. Capítulo 6.
- Peter V O'Neil. *Matemáticas avanzadas para ingeniería*. 7.ª ed. México, DF: CENGAGE Learning Custom Publishing, 2012. Capítulo 1.
- K A Stroud y Dexter J Booth. *Advanced Engineering Mathematics*. 6.ª ed. London, England: Bloomsbury Academic, 2020. Programas 2, 3 y 4.