Autovalores y autovectores

Definiciones. Interpretación geométrica. Círculos de Gerschgorin. Método de las potencias. Método de la potencia: código. Factorización QR. Código.

Manuel Carlevaro

Departamento de Ingeniería Mecánica

Grupo de Materiales Granulares - UTN FRLP

manuel.carlevaro@gmail.com

Definición : Autovalor y autovector.

Sea $\boldsymbol{A} \in K^{n \times n}$ y $\boldsymbol{v} \in K^n$. $\boldsymbol{v}$ es un **autovector** de $\boldsymbol{A}$ si

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{v} = \lambda \boldsymbol{v}$$

donde λ es un escalar en K, denominado **autovalor** asociado con $\boldsymbol{v}$.

Definición : Autovalor y autovector.

Sea $\boldsymbol{A} \in K^{n \times n}$ y $\boldsymbol{v} \in K^n$. $\boldsymbol{v}$ es un **autovector** de $\boldsymbol{A}$ si

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{v} = \lambda \boldsymbol{v}$$

donde λ es un escalar en K, denominado **autovalor** asociado con $\boldsymbol{v}$.

En forma equivalente:

$$(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I})\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0} \tag{1}$$

Este sistema tiene solución $\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0}$ si y solo si:

$$\det(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I}) = 0$$

denominado **polinomio característico**, $p_A(\lambda)$, y por el teorema fundamental del álgebra: $\mapsto n$ raíces.

Definición : Autovalor y autovector.

Sea $\boldsymbol{A} \in K^{n\times n}$ y $\boldsymbol{v} \in K^n$. $\boldsymbol{v}$ es un **autovector** de $\boldsymbol{A}$ si

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{v} = \lambda \boldsymbol{v}$$

donde λ es un escalar en K, denominado **autovalor** asociado con $\boldsymbol{v}$.

En forma equivalente:

$$(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I})\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0} \tag{1}$$

Este sistema tiene solución $\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0}$ si y solo si:

$$\det(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I}) = 0$$

denominado **polinomio característico**, $p_A(\lambda)$, y por el teorema fundamental del álgebra: $\mapsto n$ raíces.

Ejemplo:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$p_A(\lambda) = \det(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I}) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 & 0 \\ -1 & 2-\lambda & -1 \\ 0 & -1 & 3-\lambda \end{vmatrix}$$
$$= -\lambda^3 + 8\lambda^2 - 19\lambda + 12 = 0$$

Solución: $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 3, \lambda_3 = 4$. Reemplazando cada autovalor en (1):

$$\boldsymbol{v}_1 = a \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{v}_2 = b \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{v}_3 = c \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Definición : Autovalor y autovector.

Sea $\boldsymbol{A} \in K^{n\times n}$ y $\boldsymbol{v} \in K^n$. $\boldsymbol{v}$ es un **autovector** de $\boldsymbol{A}$ si

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{v} = \lambda \boldsymbol{v}$$

donde λ es un escalar en K, denominado **autovalor** asociado con $\boldsymbol{v}$.

En forma equivalente:

$$(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I})\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0} \tag{1}$$

Este sistema tiene solución $\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0}$ si y solo si:

$$\det(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I}) = 0$$

denominado **polinomio característico**, $p_A(\lambda)$, y por el teorema fundamental del álgebra: $\mapsto n$ raíces.

Ejemplo:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) = \det(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I}) &= \begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 & 0 \\ -1 & 2-\lambda & -1 \\ 0 & -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} \\ &= -\lambda^3 + 8\lambda^2 - 19\lambda + 12 = 0 \end{aligned}$$

Solución: $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 3, \lambda_3 = 4$. Reemplazando cada autovalor en (1):

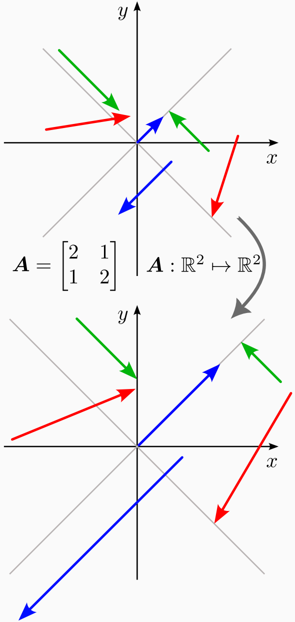
$$\boldsymbol{v}_1 = a \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{v}_2 = b \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{v}_3 = c \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Definiciones:

$$\text{Espectro de } \boldsymbol{A} : \sigma(\boldsymbol{A}) = \{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n\}$$

$$\text{Radio espectral de } \boldsymbol{A} : \rho(\boldsymbol{A}) = \max_{\lambda \in \sigma(\boldsymbol{A})} |\lambda|$$

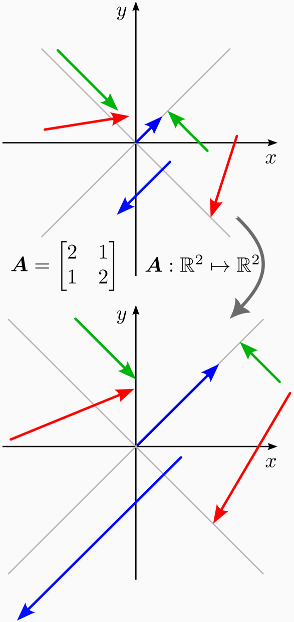
Intepretación gráfica



$$p_A(\lambda) = \det(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I}) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (2-\lambda)^2 - 1 = \lambda^2 - 4\lambda + 3 = (\lambda - 3)(\lambda - 1) = 0$$

Intepretación gráfica

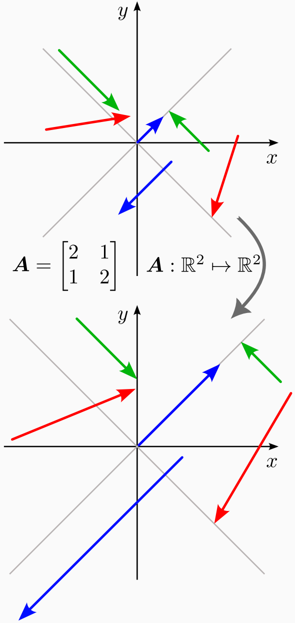


$$p_A(\lambda) = \det(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I}) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix}$$
$$= (2-\lambda)^2 - 1 = \lambda^2 - 4\lambda + 3 = (\lambda - 3)(\lambda - 1) = 0$$

Con $\lambda_1 = 3$:

$$\begin{cases} (2-3)x + y &= 0 \\ x + (2-3)y &= 0 \end{cases} \Longrightarrow \boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Intepretación gráfica



$$p_A(\lambda) = \det(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I}) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (2-\lambda)^2 - 1 = \lambda^2 - 4\lambda + 3 = (\lambda - 3)(\lambda - 1) = 0$$

Con $\lambda_1 = 3$:

$$\begin{cases} (2-3)x + y &= 0 \\ x + (2-3)y &= 0 \end{cases} \Longrightarrow \boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Con $\lambda_2 = 1$:

$$\begin{cases} (2-1)x + y &= 0 \\ x + (2-1)y &= 0 \end{cases} \Longrightarrow \boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Nota: si consideramos la norma vectorial $l_2 : \|\cdot\|$:

$$\|\boldsymbol{A}\|_2 = \rho(\boldsymbol{A}^\dagger \boldsymbol{A})^{1/2}$$

Si $\boldsymbol{A}$ es simétrica, $\|\boldsymbol{A}\|_2 = \rho(\boldsymbol{A})$.

Métodos:

- Analítico: $n < 5$.
- Parciales: computan solo autovalores **extremos** (módulo máximo o mínimo). Método de las potencias.
- Globales: aproximan a todo el **espectro** de $\boldsymbol{A}$, $\sigma(\boldsymbol{A})$. Método QR.

Métodos:

- Analítico: $n < 5$.
- Parciales: computan solo autovalores **extremos** (módulo máximo o mínimo). Método de las potencias.
- Globales: aproximan a todo el **espectro** de $\boldsymbol{A}$, $\sigma(\boldsymbol{A})$. Método QR.

Teorema : Círculo de Gerschgorin.

$\boldsymbol{A} \in K^{n\times n}$, $r_i = \sum_{j\neq i}^{n} |a_{ij}|$ para cada $i = 1, 2, \cdots, n$. Sea

$$C_i = \{z \in \mathbb{C} : |z - a_{ii}| \leq r_i\}$$

1. *Si λ es un autovalor, está en uno de los C_i.*
2. *Si k círculos C_i forman una región conectada $R \in \mathbb{C}$, dijunta de los restantes $n - k$ círculos, entonces R contiene exactamente k autovalores.*

Métodos:

- Analítico: $n < 5$.
- Parciales: computan solo autovalores **extremos** (módulo máximo o mínimo). Método de las potencias.
- Globales: aproximan a todo el **espectro** de $\boldsymbol{A}$, $\sigma(\boldsymbol{A})$. Método QR.

Teorema : Círculo de Gerschgorin.

$\boldsymbol{A} \in K^{n\times n}$, $r_i = \sum_{j\neq i}^{n} |a_{ij}|$ para cada $i = 1, 2, \cdots, n$. Sea

$$C_i = \{z \in \mathbb{C} : |z - a_{ii}| \leq r_i\}$$

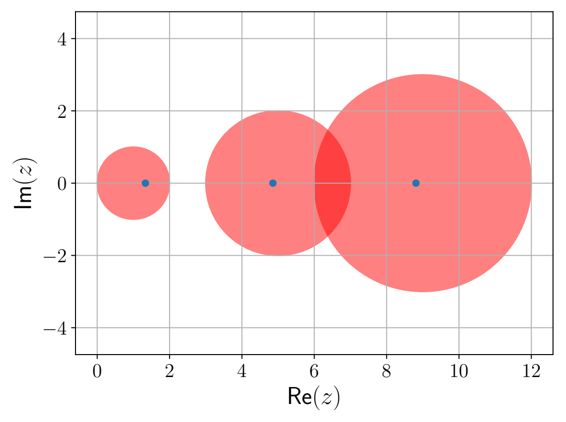
1. *Si λ es un autovalor, está en uno de los C_i.*
2. *Si k círculos C_i forman una región conectada $R \in \mathbb{C}$, dijunta de los restantes $n-k$ círculos, entonces R contiene exactamente k autovalores.*

Ejemplo:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 5 & 1 \\ -2 & -1 & 9 \end{bmatrix}$$

$r_1 = |-1| + |0| = 1, r_2 = |1| + |1| = 2, r_3 = |-2| + |-1| = 3.$

$\lambda_1 = 1.33192769, \lambda_2 = 8.81113862, \lambda_3 = 4.85693369$.



Método de las potencias:

$\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, con elementos de $\sigma(\boldsymbol{A})$ que satisfacen:$|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq |\lambda_3| \geq \cdots \geq |\lambda_n|$. λ_1: **autovalor dominante**. $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_n\}$ forman una **base** en $\mathbb{R}^n$ (linealmente independientes).

$$\boldsymbol{x} = \sum_{j=1}^{n} \beta_j \boldsymbol{v}_j$$

Multiplicando ambos miembros por $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{A}^2, \cdots, \boldsymbol{A}^k, \cdots$:

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \sum_{j=1}^{n} \beta_j \boldsymbol{A}\boldsymbol{v}_j = \sum_{j=1}^{n} \beta_j \lambda_j \boldsymbol{v}_j$$

$$\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x} = \sum_{j=1}^{n} \beta_j \lambda_j \boldsymbol{A}\boldsymbol{v}_j = \sum_{j=1}^{n} \beta_j \lambda_j^2 \boldsymbol{v}_j$$

$$\vdots$$

$$\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{x} = \sum_{j=1}^{n} \beta_j \lambda_j^k \boldsymbol{v}_j$$

Factorizando λ_1 en la última ecuación:

$$\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{x} = \lambda_1^k \sum_{j=1}^{n} \beta_j \left(\frac{\lambda_j}{\lambda_1}\right)^k \boldsymbol{v}_j$$

Dado que $\forall j$, $|\lambda_1| > |\lambda_j|$; $\lim_{k\to\infty} (\lambda_j/\lambda_1)^k = 0$, y

$$\lim_{k\to\infty} \boldsymbol{A}^k\boldsymbol{x} = \lim_{k\to\infty} \lambda_1^k \beta_1 \boldsymbol{v}_1 \tag{2}$$

Si $|\lambda_1| < 1$, (2) $\mapsto \boldsymbol{0}$, si $|\lambda_1| > 1$, (2) diverge ($\beta_1 \neq 0$). Elegimos $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^{(0)}$ con $\|\cdot\|_\infty$: $x_{p_0}^{(0)}$ con

$$x_{p_0}^{(0)} = 1 = \|\boldsymbol{x}^{(0)}\|_\infty$$

Hacemos $\boldsymbol{y}_{(1)} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^{(0)}$ y definimos $\mu^{(1)} = y_{p_0}^{(1)}$:

$$\mu^{(1)} = y_{p_0}^{(1)} = \frac{y_{p_1}^{(1)}}{x_{p_0}^{(0)}} = \frac{\beta_1 \lambda_1 v_{p_0}^{(1)} + \sum_{j=2}^{n} \beta_j \lambda_j v_{p_0}^{(j)}}{\beta_1 v_{p_0}^{(1)} + \sum_{j=2}^{n} \beta_j v_{p_0}^{(j)}}$$

$$= \lambda_1 \left[\frac{\beta_1 v_{p_0}^{(1)} + \sum_{j=2}^{n} \beta_j (\lambda_j/\lambda_1) v_{p_0}^{(j)}}{\beta_1 v_{p_0}^{(1)} + \sum_{j=2}^{n} \beta_j v_{p_0}^{(j)}}\right]$$

Sea p_1 el menor entero tal que $|y_{p_1}^{(1)}| = \|\boldsymbol{y}^{(1)}\|_\infty$:

$$\boldsymbol{x}^{(1)} = \frac{\boldsymbol{y}^{(1)}}{y_{p_1}^{(1)}} = \frac{1}{y_{p_1}^{(1)}} \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^{(0)}$$

Entonces: $x_{p_1}^{(1)} = 1 = \|\boldsymbol{x}^{(1)}\|_\infty$. Ahora

$$\boldsymbol{y}^{(2)} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^{(1)} = \frac{1}{y_{p_1}^{(1)}} \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x}^{(0)}$$

y

$$\mu^{(2)} = y_{p_1}^{(2)} = \frac{y_{p_1}^{(2)}}{x_{p_1}^{(1)}} = \frac{\left[\beta_1\lambda_1^2 v_{p_1}^{(1)} + \sum_{j=2}^n \beta_j\lambda_j^2 v_{p_1}^{(j)}\right/ y_{p_1}^{(1)}\Big]}{\left[\beta_1\lambda_1 v_{p_1}^{(1)} + \sum_{j=2}^n \beta_j\lambda_j v_{p_1}^{(j)}\right/ y_{p_1}^{(1)}\Big]}$$

$$= \lambda_1 \left[\frac{\beta_1 v_{p_1}^{(1)} + \sum_{j=2}^n \beta_j(\lambda_j/\lambda_1)^2 v_{p_1}^{(j)}}{\beta_1 v_{p_1}^{(1)} + \sum_{j=2}^n \beta_j(\lambda_j/\lambda_1) v_{p_1}^{(j)}}\right]$$

Sea p_2 el menor entero tal que $|y_{p_2}^{(2)}| = \|\boldsymbol{y}^{(2)}\|_\infty$:

$$\boldsymbol{x}^{(2)} = \frac{\boldsymbol{y}^{(2)}}{y_{p_2}^{(2)}} = \frac{1}{y_{p_2}^{(2)}} \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^{(1)} = \frac{1}{y_{p_2}^{(2)} y_{p_1}^{(1)}} \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x}^{(0)}$$

$\mapsto$ secuencias $\{\boldsymbol{x}^{(m)}\}_{m=0}^\infty$, $\{\boldsymbol{y}^{(m)}\}_{m=0}^\infty$, $\{\mu^{(m)}\}_{m=0}^\infty$, inductivamente:

$$\boldsymbol{y}^{(m)} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^{(m-1)}$$

$$\begin{aligned}\mu^{(m)} &= y_{p_{m-1}}^{(m)} \\ &= \lambda_1 \left[\frac{\beta_1 v_{p_{m-1}}^{(1)} + \sum_{j=2}^n (\lambda_j/\lambda_1)^m \beta_j v_{p_{m-1}}^{(j)}}{\beta_1 v_{p_{m-1}}^{(1)} + \sum_{j=2}^n (\lambda_j/\lambda_1)^{m-1} \beta_j v_{p_{m-1}}^{(j)}}\right]\end{aligned}$$

y

$$\boldsymbol{x}^{(m)} = \frac{\boldsymbol{y}^{(m)}}{y_{p_m^{(m)}}} = \frac{\boldsymbol{A}^m\boldsymbol{x}^{(0)}}{\prod_{k=1}^m y_{p_k}^{(k)}}$$

donde para cada paso, p_m es el menor entero para el cual $|y_{p_m}^{(m)}| = \|\boldsymbol{y}^{(m)}\|_\infty$.
Dado que $|\lambda_j/\lambda_1| < 1, j = 2, \cdots, n$,
$\lim_{m\to\infty} \mu^{(m)} = \lambda_1$, eligiendo $\boldsymbol{x}^{(0)}$ tal que $\beta_1 \neq 0$.
Además, la secuencia $\{\boldsymbol{x}^{(m)}\}_{m=0}^\infty$ converge al autovalor asociado con λ_1 con norma l_∞ igual a 1.

Ejemplo:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}, \boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Con $\sigma(\boldsymbol{A}) = \{4, 1\}$. Tomemos $\boldsymbol{x}^{(0)} = [1, 1]^\intercal$:

$$\boldsymbol{x}^{(1)} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^{(0)} = \begin{bmatrix} -5 \\ 13 \end{bmatrix}, \boldsymbol{x}^{(2)} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^{(1)} = \begin{bmatrix} -29 \\ 61 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{x}^{(3)} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^{(2)} = \begin{bmatrix} -125 \\ 253 \end{bmatrix}, \boldsymbol{x}^{(4)} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^{(3)} = \begin{bmatrix} -509 \\ 1021 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{x}^{(5)} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^{(4)} = \begin{bmatrix} -2045 \\ 4093 \end{bmatrix}, \boldsymbol{x}^{(6)} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^{(5)} = \begin{bmatrix} -8189 \\ 16381 \end{bmatrix}$$

Aproximaciones al autovalor dominante λ_1:

$$\lambda_1^{(1)} = \frac{61}{13} = 4.6923, \qquad \lambda_1^{(2)} = \frac{253}{61} = 4.14654$$

$$\lambda_1^{(3)} = \frac{1021}{253} = 4.03557, \qquad \lambda_1^{(4)} = \frac{4093}{1021} = 4.00881$$

$$\lambda_1^{(5)} = \frac{16381}{4093} = 4.00200$$

Un autovector aproximado para $\lambda_1^{(5)} = 16381/4093 = 4.00200$ es

$$\boldsymbol{x}^{(6)} = \begin{bmatrix} -8189 \\ 16381 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} -0.49908 \\ 1 \end{bmatrix} \approx \boldsymbol{v}_1$$

Ejemplo:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}, \boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Con $\sigma(\boldsymbol{A}) = \{4, 1\}$. Tomemos $\boldsymbol{x}^{(0)} = [1, 1]^\intercal$:

$$\boldsymbol{x}^{(1)} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^{(0)} = \begin{bmatrix} -5 \\ 13 \end{bmatrix}, \boldsymbol{x}^{(2)} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^{(1)} = \begin{bmatrix} -29 \\ 61 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{x}^{(3)} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^{(2)} = \begin{bmatrix} -125 \\ 253 \end{bmatrix}, \boldsymbol{x}^{(4)} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^{(3)} = \begin{bmatrix} -509 \\ 1021 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{x}^{(5)} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^{(4)} = \begin{bmatrix} -2045 \\ 4093 \end{bmatrix}, \boldsymbol{x}^{(6)} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^{(5)} = \begin{bmatrix} -8189 \\ 16381 \end{bmatrix}$$

Aproximaciones al autovalor dominante λ_1:

$$\lambda_1^{(1)} = \frac{61}{13} = 4.6923, \qquad \lambda_1^{(2)} = \frac{253}{61} = 4.14654$$

$$\lambda_1^{(3)} = \frac{1021}{253} = 4.03557, \qquad \lambda_1^{(4)} = \frac{4093}{1021} = 4.00881$$

$$\lambda_1^{(5)} = \frac{16381}{4093} = 4.00200$$

Un autovector aproximado para $\lambda_1^{(5)} = 16381/4093 = 4.00200$ es

$$\boldsymbol{x}^{(6)} = \begin{bmatrix} -8189 \\ 16381 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} -0.49908 \\ 1 \end{bmatrix} \approx \boldsymbol{v}_1$$

Desventajas:

- No se sabe al inicio si $\boldsymbol{A}$ tiene un autovalor dominante.
- No se conoce cómo debe elegirse $\boldsymbol{x}^{(9)}$ para que tenga una contribución no nula del autovector asociado al autovalor dominante, si existe.

Método de las potencias: código

```python
#!/usr/bin/env python3
import numpy as np

def iter_potencia(A, num_iteraciones):
    n = A.shape[0]
    # Inicializar un vector aleatorio de tamaño n
    b = np.random.rand(n)
    # Normalizar el vector
    b = b / np.linalg.norm(b)

    for _ in range(num_iteraciones):
        # Multiplicar la matriz A por el vector b
        Ab = np.dot(A, b)
        # Calcular el autovalor dominante
        autovalor = np.dot(b, Ab)
        # Normalizar el vector resultante
        b = Ab / np.linalg.norm(Ab)

    # Devolver el autovalor dominante y el autovector
    # correspondiente
    return autovalor, b
```

```python
# Ejemplo de uso
# Definir una matriz de ejemplo

A = np.array([[2, 0, 0],
              [1, 1, 2],
              [1, -1, 4]])

# Especificar el número de iteraciones
num_iteraciones = 100

# Aplicar el algoritmo de las potencias
autovalor, autovector = iter_potencia(A, num_iteraciones)

print(f"Autovalor dominante: {autovalor}")
print("Autovector correspondiente:")
```

```
$ ./potencias.py
Autovalor dominante: 3.000000000000001
Autovector correspondiente:
[ 2.62486865e-19 -7.07106781e-01 -7.07106781e-01]
```

Teorema : .

Si $\boldsymbol{A}$ *es una matriz y* $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k$ *son autovalores distintos de* $\boldsymbol{A}$ *con autovectores asociados* $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_k\}$, *entonces* $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_k\}$ *es un conjunto* ***linealmente independiente***.

Teorema : .

*Si $\boldsymbol{A}$ es una matriz y $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k$ son autovalores distintos de $\boldsymbol{A}$ con autovectores asociados $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_k\}$, entonces $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_k\}$ es un conjunto **linealmente independiente**.*

Definición : Conjunto ortogonal/ortonormal.

Un conjunto de vectores $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_k\}$ recibe el nombre de **ortogonal** si $\langle \boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{v}_j \rangle = 0$ para todo $i \neq j$. Si, además, $\langle \boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{v}_i \rangle = 1$ para toda $i = 1, 2, \cdots, n$, el conjunto recibe el nombre de **ortonormal**.

Dado que $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle = \|\boldsymbol{x}\|_2^2, \forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$, el conjunto $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_k\}$ es ortonormal si y solo si:

$$\|\boldsymbol{v}_i\|_2 = 1 \text{ para todo } i = 1, 2, \cdots, n$$

Teorema : .

*Si $\boldsymbol{A}$ es una matriz y $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k$ son autovalores distintos de $\boldsymbol{A}$ con autovectores asociados $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_k\}$, entonces $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_k\}$ es un conjunto **linealmente independiente**.*

Definición : Conjunto ortogonal/ortonormal.

Un conjunto de vectores $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_k\}$ recibe el nombre de **ortogonal** si $\langle \boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{v}_j \rangle = 0$ para todo $i \neq j$. Si, además, $\langle \boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{v}_i \rangle = 1$ para toda $i = 1, 2, \cdots, n$, el conjunto recibe el nombre de **ortonormal**.

Dado que $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle = \|\boldsymbol{x}\|_2^2, \forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$, el conjunto $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_k\}$ es ortonormal si y solo si:

$$\|\boldsymbol{v}_i\|_2 = 1 \text{ para todo } i = 1, 2, \cdots, n$$

Teorema : Proceso de Gram-Schmidt.

Sea $\{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_k\}$ un conjunto de k vectores linealmente independientes en $\mathbb{R}^n$. Entonces, $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_k\}$ definido mediante:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{v}_1 &= \boldsymbol{x}_1 \\
\boldsymbol{v}_2 &= \boldsymbol{x}_2 - \frac{\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{x}_2 \rangle}{\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_1 \rangle} \boldsymbol{v}_1 \\
\boldsymbol{v}_3 &= \boldsymbol{x}_3 - \frac{\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{x}_3 \rangle}{\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_1 \rangle} \boldsymbol{v}_1 - \frac{\langle \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{x}_3 \rangle}{\langle \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_2 \rangle} \boldsymbol{v}_2 \\
&\vdots \\
\boldsymbol{v}_k &= \boldsymbol{x}_k - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\langle \boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{x}_k \rangle}{\langle \boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{v}_i \rangle} \boldsymbol{v}_i
\end{aligned}$$

es un conjunto de k vectores ortogonales en $\mathbb{R}^n$.

Definición : Matriz ortogonal.

Se dice que una matriz $\boldsymbol{Q}$ es **ortogonal** si sus columnas $\{\boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{q}_2, \cdots, \boldsymbol{q}_n\}$ forman un conjunto ortonormal en $\mathbb{R}^n$.

Definición : Matriz ortogonal.

Se dice que una matriz $\boldsymbol{Q}$ es **ortogonal** si sus columnas $\{\boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{q}_2, \cdots, \boldsymbol{q}_n\}$ forman un conjunto ortonormal en $\mathbb{R}^n$.

Propiedades:

- $\boldsymbol{Q}$ es invertible con $\boldsymbol{Q}^{-1} = \boldsymbol{Q}^\intercal$
- $\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n, \langle \boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}, \boldsymbol{Q}\boldsymbol{y} \rangle = \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle$
- $\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n, \|\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}\|_2 = \|\boldsymbol{x}\|_2$
- Cualquier matriz invertible $\boldsymbol{Q}$ con $\boldsymbol{Q}^{-1} = \boldsymbol{Q}^\intercal$ es ortogonal.

Definición : Matriz ortogonal.

Se dice que una matriz $\boldsymbol{Q}$ es **ortogonal** si sus columnas $\{\boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{q}_2, \cdots, \boldsymbol{q}_n\}$ forman un conjunto ortonormal en $\mathbb{R}^n$.

Propiedades:

- $\boldsymbol{Q}$ es invertible con $\boldsymbol{Q}^{-1} = \boldsymbol{Q}^\intercal$
- $\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n, \langle \boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}, \boldsymbol{Q}\boldsymbol{y} \rangle = \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle$
- $\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n, \|\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}\|_2 = \|\boldsymbol{x}\|_2$
- Cualquier matriz invertible $\boldsymbol{Q}$ con $\boldsymbol{Q}^{-1} = \boldsymbol{Q}^\intercal$ es ortogonal.

Definición : Matriz similar.

Dos matrices $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$ son **similares** si existe una matriz no singular $\boldsymbol{S}$ con $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{S}$.

Definición : Matriz ortogonal.

Se dice que una matriz $\boldsymbol{Q}$ es **ortogonal** si sus columnas $\{\boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{q}_2, \cdots, \boldsymbol{q}_n\}$ forman un conjunto ortonormal en $\mathbb{R}^n$.

Propiedades:

- $\boldsymbol{Q}$ es invertible con $\boldsymbol{Q}^{-1} = \boldsymbol{Q}^\intercal$
- $\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n, \langle \boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}, \boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}\rangle = \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\rangle$
- $\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n, \|\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}\|_2 = \|\boldsymbol{x}\|_2$
- Cualquier matriz invertible $\boldsymbol{Q}$ con $\boldsymbol{Q}^{-1} = \boldsymbol{Q}^\intercal$ es ortogonal.

Definición : Matriz similar.

Dos matrices $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$ son **similares** si existe una matriz no singular $\boldsymbol{S}$ con $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{S}$.

Teorema : .

Si $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$ son matrices similares con $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{S}$, y λ es un autovalor de $\boldsymbol{A}$ con el autovector $\boldsymbol{v}$ asociado, entonces λ es un autovalor de $\boldsymbol{B}$ con autovector asociado $\boldsymbol{S}\boldsymbol{v}$.

Definición : Matriz ortogonal.

Se dice que una matriz $\boldsymbol{Q}$ es **ortogonal** si sus columnas $\{\boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{q}_2, \cdots, \boldsymbol{q}_n\}$ forman un conjunto ortonormal en $\mathbb{R}^n$.

Propiedades:

- $\boldsymbol{Q}$ es invertible con $\boldsymbol{Q}^{-1} = \boldsymbol{Q}^\intercal$
- $\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n, \langle \boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}, \boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}\rangle = \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\rangle$
- $\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n, \|\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}\|_2 = \|\boldsymbol{x}\|_2$
- Cualquier matriz invertible $\boldsymbol{Q}$ con $\boldsymbol{Q}^{-1} = \boldsymbol{Q}^\intercal$ es ortogonal.

Definición : Matriz similar.

Dos matrices $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$ son **similares** si existe una matriz no singular $\boldsymbol{S}$ con $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{S}$.

Teorema : .

Si $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$ son matrices similares con $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{S}$, y λ es un autovalor de $\boldsymbol{A}$ con el autovector $\boldsymbol{v}$ asociado, entonces λ es un autovalor de $\boldsymbol{B}$ con autovector asociado $\boldsymbol{S}\boldsymbol{v}$.

Teorema : .

Una matriz $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es similar a una matriz diagonal $\boldsymbol{D}$ si y sólo si $\boldsymbol{A}$ tiene n autovectores linealmente independientes. En este caso $\boldsymbol{D} = \boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{S}$, donde las columnas de $\boldsymbol{S}$ son los autovectores y el i-ésimo elemento diagonal de $\boldsymbol{D}$ es el autovalor que corresponde a la i-ésima columna de $\boldsymbol{S}$.

Teorema : Teorema de Schur.

Sea $\boldsymbol{A}$ una matriz arbitraria. Existe una matriz no singular $\boldsymbol{U}$ con la propiedad de que

$$\boldsymbol{T} = \boldsymbol{U}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{U}$$

donde $\boldsymbol{T}$ es una matriz triangular superior, cuyas entradas diagonales consisten en autovalores de $\boldsymbol{A}$.

Se cumple $\|\boldsymbol{U}\boldsymbol{x}\|_2 = \|\boldsymbol{x}\|_2, \forall \boldsymbol{x} \mapsto$ **matrices unitarias**.

Teorema : Teorema de Schur.

Sea $\boldsymbol{A}$ una matriz arbitraria. Existe una matriz no singular $\boldsymbol{U}$ con la propiedad de que

$$\boldsymbol{T} = \boldsymbol{U}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{U}$$

donde $\boldsymbol{T}$ es una matriz triangular superior, cuyas entradas diagonales consisten en autovalores de $\boldsymbol{A}$.

Se cumple $\|\boldsymbol{U}\boldsymbol{x}\|_2 = \|\boldsymbol{x}\|_2, \forall \boldsymbol{x} \mapsto$ **matrices unitarias**.

Factorización QR: $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{R}$, donde:

- $\boldsymbol{Q}$ es una matriz ortogonal
- $\boldsymbol{R}$ es una matriz triangular superior

Teorema : Teorema de Schur.

Sea $\boldsymbol{A}$ una matriz arbitraria. Existe una matriz no singular $\boldsymbol{U}$ con la propiedad de que

$$\boldsymbol{T} = \boldsymbol{U}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{U}$$

donde $\boldsymbol{T}$ es una matriz triangular superior, cuyas entradas diagonales consisten en autovalores de $\boldsymbol{A}$.

Se cumple $\|\boldsymbol{U}\boldsymbol{x}\|_2 = \|\boldsymbol{x}\|_2, \forall \boldsymbol{x} \mapsto$ **matrices unitarias**.

Factorización QR: $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{R}$, donde:

- $\boldsymbol{Q}$ es una matriz ortogonal
- $\boldsymbol{R}$ es una matriz triangular superior

Cálculo de la factorización:

- Ortogonalización de Gram-Schmidt
- Reflexiones de Householder

Ortogonalización de Gram-Schmidt:

$\boldsymbol{A} = [\boldsymbol{a}_1 | \boldsymbol{a}_2 | \cdots | \boldsymbol{a}_n]$

$$\boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{a}_1, \quad \boldsymbol{e}_1 = \frac{\boldsymbol{u}_1}{\|\boldsymbol{u}_1\|}$$

$$\boldsymbol{u}_2 = \boldsymbol{a}_2 - \langle \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{a}_2 \rangle, \quad \boldsymbol{e}_2 = \frac{\boldsymbol{u}_2}{\|\boldsymbol{u}_2\|}$$

$$\boldsymbol{u}_3 = \boldsymbol{a}_3 - \langle \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{a}_3 \rangle - \langle \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{a}_3 \rangle, \quad \boldsymbol{e}_3 = \frac{\boldsymbol{u}_3}{\|\boldsymbol{u}_3\|}$$

$$\vdots$$

$$\boldsymbol{u}_k = \boldsymbol{a}_k - \sum_{j=1}^{k-1} \langle \boldsymbol{e}_j, \boldsymbol{a}_k \rangle, \quad \boldsymbol{e}_k = \frac{\boldsymbol{u}_k}{\|\boldsymbol{u}_k\|}$$

Teorema : Teorema de Schur.

Sea $\boldsymbol{A}$ una matriz arbitraria. Existe una matriz no singular $\boldsymbol{U}$ con la propiedad de que

$$\boldsymbol{T} = \boldsymbol{U}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{U}$$

donde $\boldsymbol{T}$ es una matriz triangular superior, cuyas entradas diagonales consisten en autovalores de $\boldsymbol{A}$.

Se cumple $\|\boldsymbol{U}\boldsymbol{x}\|_2 = \|\boldsymbol{x}\|_2, \forall \boldsymbol{x} \mapsto$ **matrices unitarias**.

Factorización QR: $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{R}$, donde:

- $\boldsymbol{Q}$ es una matriz ortogonal
- $\boldsymbol{R}$ es una matriz triangular superior

Cálculo de la factorización:

- Ortogonalización de Gram-Schmidt
- Reflexiones de Householder

Ortogonalización de Gram-Schmidt:

$\boldsymbol{A} = [\boldsymbol{a}_1|\boldsymbol{a}_2|\cdots|\boldsymbol{a}_n]$

$$\boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{a}_1, \quad \boldsymbol{e}_1 = \frac{\boldsymbol{u}_1}{\|\boldsymbol{u}_1\|}$$

$$\boldsymbol{u}_2 = \boldsymbol{a}_2 - \langle \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{a}_2 \rangle, \quad \boldsymbol{e}_2 = \frac{\boldsymbol{u}_2}{\|\boldsymbol{u}_2\|}$$

$$\boldsymbol{u}_3 = \boldsymbol{a}_3 - \langle \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{a}_3 \rangle - \langle \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{a}_3 \rangle, \quad \boldsymbol{e}_3 = \frac{\boldsymbol{u}_3}{\|\boldsymbol{u}_3\|}$$

$$\vdots$$

$$\boldsymbol{u}_k = \boldsymbol{a}_k - \sum_{j=1}^{k-1} \langle \boldsymbol{e}_j, \boldsymbol{a}_k \rangle, \quad \boldsymbol{e}_k = \frac{\boldsymbol{u}_k}{\|\boldsymbol{u}_k\|}$$

Ahora podemos expresar los $\boldsymbol{a}_i$ en la nueva base:

$$\boldsymbol{a}_1 = \langle \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{a}_1 \rangle \boldsymbol{e}_1$$

$$\boldsymbol{a}_1 = \langle \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{a}_2 \rangle \boldsymbol{e}_1 + \langle \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{a}_2 \rangle \boldsymbol{e}_2$$

$$\boldsymbol{a}_3 = \langle \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{a}_3 \rangle \boldsymbol{e}_1 + \langle \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{a}_3 \rangle \boldsymbol{e}_2 + \langle \boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{a}_3 \rangle \boldsymbol{e}_3$$

$$\cdots$$

$$\boldsymbol{a}_k = \sum_{j=1}^{k} \langle \boldsymbol{e}_j, \boldsymbol{a}_k \rangle \boldsymbol{e}_j$$

Resulta $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{R}$, con $\boldsymbol{Q} = [\boldsymbol{e}_1|\boldsymbol{e}_2|\cdots|\boldsymbol{e}_n]$, y

$$\boldsymbol{R} = \begin{bmatrix} \langle \boldsymbol{e}_1 \boldsymbol{a}_1 \rangle & \langle \boldsymbol{e}_1 \boldsymbol{a}_2 \rangle & \langle \boldsymbol{e}_1 \boldsymbol{a}_3 \rangle & \cdots & \langle \boldsymbol{e}_1 \boldsymbol{a}_n \rangle \\ 0 & \langle \boldsymbol{e}_2 \boldsymbol{a}_2 \rangle & \langle \boldsymbol{e}_2 \boldsymbol{a}_3 \rangle & \cdots & \langle \boldsymbol{e}_2 \boldsymbol{a}_n \rangle \\ 0 & 0 & \langle \boldsymbol{e}_3 \boldsymbol{a}_3 \rangle & \cdots & \langle \boldsymbol{e}_3 \boldsymbol{a}_n \rangle \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \langle \boldsymbol{e}_n , \boldsymbol{a}_n \rangle \end{bmatrix}$$

Resulta $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{R}$, con $\boldsymbol{Q} = [\boldsymbol{e}_1 | \boldsymbol{e}_2 | \cdots | \boldsymbol{e}_n]$, y

$$\boldsymbol{R} = \begin{bmatrix} \langle \boldsymbol{e}_1 \boldsymbol{a}_1 \rangle & \langle \boldsymbol{e}_1 \boldsymbol{a}_2 \rangle & \langle \boldsymbol{e}_1 \boldsymbol{a}_3 \rangle & \cdots & \langle \boldsymbol{e}_1 \boldsymbol{a}_n \rangle \\ 0 & \langle \boldsymbol{e}_2 \boldsymbol{a}_2 \rangle & \langle \boldsymbol{e}_2 \boldsymbol{a}_3 \rangle & \cdots & \langle \boldsymbol{e}_2 \boldsymbol{a}_n \rangle \\ 0 & 0 & \langle \boldsymbol{e}_3 \boldsymbol{a}_3 \rangle & \cdots & \langle \boldsymbol{e}_3 \boldsymbol{a}_n \rangle \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \langle \boldsymbol{e}_n, \boldsymbol{a}_n \rangle \end{bmatrix}$$

Código Python:

```python
#!/usr/bin/env python3

import numpy as np

def gram_schmidt_qr(A):
    m, n = A.shape
    Q = np.zeros((m, n))
    R = np.zeros((n, n))
    for j in range(n):
        v = A[:, j]
        for i in range(j):
            R[i, j] = np.dot(Q[:, i], A[:, j])
            v = v - R[i, j] * Q[:, i]
        R[j, j] = np.linalg.norm(v)
        Q[:, j] = v / R[j, j]

    return Q, R

# Ejemplo de uso
# Definir una matriz de ejemplo
A = np.array([[1, 4, 3],
              [2, 5, 1],
              [3, 6, 2]])

# Aplicar la factorización QR usando el método
# de Gram-Schmidt
Q, R = gram_schmidt_qr(A)

print("Matriz Q:")
print(Q)
print("Matriz R:")
print(R)
```

Método QR para el cálculo de autovalores:

Algoritmo recursivo que computa $\{\boldsymbol{A}_k\}_{k=0}^{\infty}$ con los siguientes pasos:

1. $\boldsymbol{A}_0 = \boldsymbol{A}$
2. Para $k = 0, 1, 2, \ldots,$ dado $\boldsymbol{A}_k$:
    2.1 Calcular $\boldsymbol{Q}_{k+1}\boldsymbol{R}_{k+1} = \boldsymbol{A}_k$
    2.2 Definir $\boldsymbol{A}_{k+1} = \boldsymbol{Q}_{k+1}\boldsymbol{R}_{k+1}$

Método QR para el cálculo de autovalores:

Algoritmo recursivo que computa $\{\boldsymbol{A}_k\}_{k=0}^{\infty}$ con los siguientes pasos:

1. $\boldsymbol{A}_0 = \boldsymbol{A}$
2. Para $k = 0, 1, 2, \ldots,$ dado $\boldsymbol{A}_k$:
   2.1 Calcular $\boldsymbol{Q}_{k+1}\boldsymbol{R}_{k+1} = \boldsymbol{A}_k$
   2.2 Definir $\boldsymbol{A}_{k+1} = \boldsymbol{Q}_{k+1}\boldsymbol{R}_{k+1}$

Teorema : Convergencia.

Si los autovalores de una matriz $\boldsymbol{A}$ *verifican que*

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| > \cdots > |\lambda_n| > 0$$

entonces la suceción de matrices equivalentes contruidas con el algoritmo QR converge a una matriz triangular superior.

Código Python:

```python
#!/usr/bin/env python3
import numpy as np

def algoritmo_qr(A, num_iter):
    n = A.shape[0]
    autovalores = np.zeros(n, dtype=np.complex128)
    for _ in range(num_iter):
        Q, R = np.linalg.qr(A)
        A = np.dot(R, Q)
    for i in range(n):
        autovalores[i] = A[i, i]
    return autovalores

A = np.array([[1, 2, 3],
              [4, 5, 6],
              [7, 8, 9]])

num_iter = 100
autovalores = algoritmo_qr(A, num_iter)
print("Autovalores:")
print(autovalores)
```

- R.L. Burden, D.J. Faires y A.M. Burden. ***Análisis numérico.*** 10.ª ed. Mexico: Cengage Learning, 2017. Capítulo 9.
- Carlos Moreno González. ***Introducción al cálculo numérico.*** Madrid, España: Universidad Nacional de Educación a Distancia, 2014. Capítulo 3.
- B. Bradie. ***A Friendly Introduction to Numerical Analysis.*** New Jersey, United States: Pearson Education Inc., 2006. Capítulo 4.
- A.J. Salgado y S.M. Wise. ***Classical Numerical Analysis.*** Cambridge, United Kingdom: Cambridge University Press, 2023. doi: 10.1017/9781108942607. Capítulo 8.
- A. Quarteroni, R. Sacco y F. Saleri. ***Numerical Mathematics.*** New York, United States: Springer-Verlag, 2000. Capítulo 5.