

INTRODUCCIÓN A LA VARIABLE COMPLEJA

INTEGRACIÓN EN EL CAMPO COMPLEJO. SUCESIONES Y SERIES.

Manuel Carlevaro

Departamento de Ingeniería Mecánica

Grupo de Materiales Granulares - UTN FRLP

manuel.carlevaro@gmail.com

Cálculo Avanzado • 2023

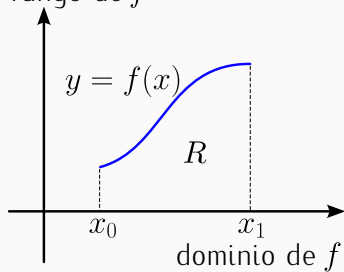
 · X_YLaTeX · 

Revisión:

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x) dx = \lim_{\substack{\max \\ \Delta x \rightarrow 0}} \sum_{k=1}^n f(c_k^*) \Delta x_k$$

$$= F(x_1) - F(x_0), \quad F' = f$$

rango de f

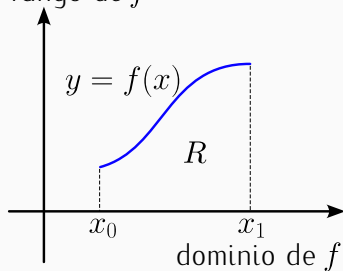


Revisión:

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x) dx = \lim_{\substack{\text{máx} \\ \Delta x \rightarrow 0}} \sum_{k=1}^n f(c_k^*) \Delta x_k$$

$$= F(x_1) - F(x_0), F' = f$$

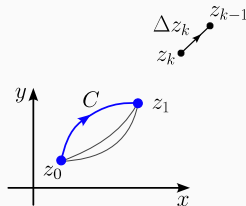
rango de f



$$\int_{z_0}^{z_1} f(z) dz \stackrel{?}{=} \lim_{\substack{\text{máx} \\ \Delta z \rightarrow 0}} \sum_{k=1}^n f(c_k^*) \Delta z_k \stackrel{?}{}$$

$$C : \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} = \begin{cases} \vec{R} = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j} \\ z = x(t) + iy(t) \end{cases}$$

$$t_0 \leq t \leq t_1$$



$$\int_{C: z_0}^{z_1} f(z) dz = \lim_{\substack{\text{máx} \\ \Delta z \rightarrow 0}} \sum_{k=1}^n f(c_k(t_k)) \frac{\Delta z_k}{\Delta t_k} \Delta t_k$$

$$\therefore \int_{C: z_0}^{z_1} f(z) dz = \int_{t_0}^{t_1} f(z(t)) z'(t) dt$$

En términos de u y v : $f(z) = u + iv$,

$$\Delta z = \Delta x + i\Delta y:$$

$$\begin{aligned} \int_C^{z_1} f(z) dz &= \int_C^{(x_1, y_1)}_{(x_0, y_0)} (u + iv)(dx + idy) = \\ &= \int_C^{(x_1, y_1)}_{(x_0, y_0)} (u dx - v dy) + i \int_C^{(x_1, y_1)}_{(x_0, y_0)} (v dx + u dy) \\ C: &\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \end{aligned}$$

Si $u + iv$ es **analítica**: $u_x = v_y$, $u_y = -v_x$.

$$\therefore \begin{cases} u dx - v dy \\ v dx + u dy \end{cases} \text{ es diferencial exacta.}$$

\therefore Si $f = u + iv$ en analítica:

$$\int_{z_0}^{z_1} f(z) dz$$

es **independiente** de C , y

$$\oint_C f(z) dz = 0, \quad \forall C$$

f analítica \rightarrow

$$\int_{z_0}^{z_1} f(z) dz = F(z_1) - F(z_0), \quad F' = f$$

Nota:

$$\oint_C f(z) dz$$

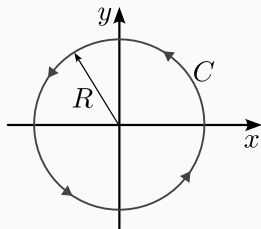
no necesariamente es 0 si f no es analítica.

EJEMPLO

Calcular:

$$\oint_C \frac{dz}{z}$$

donde



El integrando es analítico en \mathbb{C} excepto en $z = 0$.

Método #1:

$$\begin{aligned}\oint_C \frac{dz}{z} &= \oint_C \frac{dx + idy}{x + iy} \\ &= \oint_C \frac{(x - iy)(dx + idy)}{x^2 + y^2} = \\ &= \oint_C \frac{x dx + y dy}{x^2 + y^2} + i \oint_C \frac{-y dx + x dy}{x^2 + y^2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{En } C: x &= R \cos \theta, y = R \sin \theta, \\ dx &= -R \sin \theta d\theta, \\ dy &= R \cos \theta d\theta, \\ x^2 + y^2 &= R^2, 0 \leq \theta \leq 2\pi.\end{aligned}$$

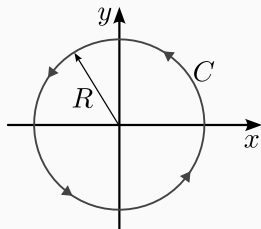
$$\begin{aligned}\therefore \oint_C \frac{dz}{z} &= 0 \\ &+ i \int_0^{2\pi} \frac{R^2(\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) d\theta}{R^2} \\ &= \boxed{2\pi i}\end{aligned}$$

EJEMPLO

Calcular:

$$\oint_C \frac{dz}{z}$$

donde



El integrando es analítico en \mathbb{C} excepto en $z = 0$.

Método #1:

$$\begin{aligned}\oint_C \frac{dz}{z} &= \oint_C \frac{dx + idy}{x + iy} \\ &= \oint_C \frac{(x - iy)(dx + idy)}{x^2 + y^2} = \\ &= \oint_C \frac{x dx + y dy}{x^2 + y^2} + i \oint_C \frac{-y dx + x dy}{x^2 + y^2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{En } C: x &= R \cos \theta, y = R \sin \theta, \\ dx &= -R \sin \theta d\theta, \\ dy &= R \cos \theta d\theta, \\ x^2 + y^2 &= R^2, 0 \leq \theta \leq 2\pi.\end{aligned}$$

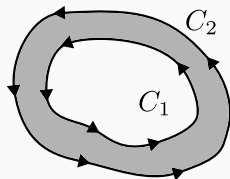
$$\begin{aligned}\therefore \oint_C \frac{dz}{z} &= 0 \\ &+ i \int_0^{2\pi} \frac{R^2(\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) d\theta}{R^2} \\ &= \boxed{2\pi i}\end{aligned}$$

Método #2:

$$C : z = Re^{i\theta}, 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

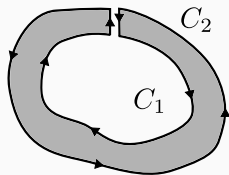
$$\begin{aligned}\frac{dz}{d\theta} &= iRe^{i\theta} \\ \oint_C \frac{dz}{z} &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{z(\theta)} \frac{dz}{d\theta} d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{iRe^{i\theta}}{Re^{i\theta}} d\theta \\ &= \boxed{2\pi i}\end{aligned}$$

$$\oint_{\phi} f(z) dz = \oint_{C_2} f(z) dz - \oint_{C_1} f(z) dz = 0$$

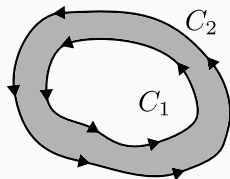


Si f es analítica en C_1 y C_2 , y en la región entre ellas, entonces:

$$\oint_{C_1} f(z) dz = \oint_{C_2} f(z) dz$$

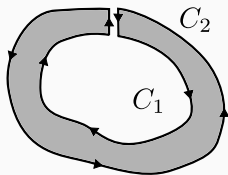


Geometría elástica (topología):



Si f es analítica en C_1 y C_2 , y en la región entre ellas, entonces:

$$\oint_{C_1} f(z) dz = \oint_{C_2} f(z) dz$$

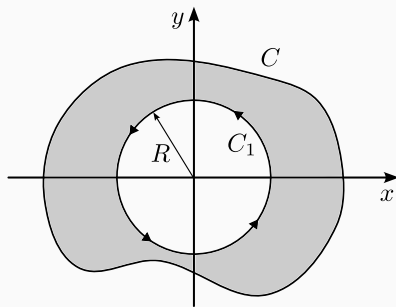


$$\oint_{\emptyset} f(z) dz = \oint_{C_2} f(z) dz - \oint_{C_1} f(z) dz = 0$$

Ejemplo: calcular

$$\oint_C \frac{dz}{z}$$

donde



$$\oint_C \frac{dz}{z} = \oint_{C_1} \frac{dz}{z} = 2\pi i$$

PAUSA PARA RESOLVER PROBLEMAS DE LA PRÁCTICA NRO. 2.

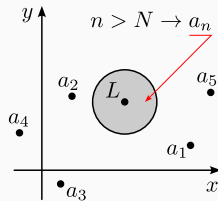
EJERCICIOS 1 – 4.

$$e^z = ?, \quad \text{sen } z = ?$$

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = ?$$

Gráficamente:



En forma similar podemos definir:

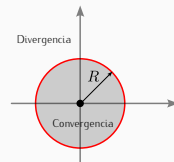
$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (c_1 + \dots + c_n)$$

Por su estructura, **son válidos** todos los teoremas usuales.

En particular, si

$S = \{z : \sum a_n z^n \text{ converge}\}$,
entonces pueden darse los
siguientes casos:

- i) $S = \{0\}$.
- ii) $S = \mathbb{C}$ (todos los números complejos).
- iii) Existe un $R > 0$ tal que $S = \{z : |z| < R\}$, y la convergencia es absoluta e uniforme para $|z| \leq r < R$.



Definición

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$ significa que

dado $\varepsilon > 0$, ($\varepsilon \in \mathbb{R}$), existe N ,
tal que

$$n > N \rightarrow |a_n - L| < \varepsilon$$

Entonces podemos **definir**:

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

$$\operatorname{sen} z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\operatorname{sen} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Se puede entonces probar que:

$$e^{iz} = \cos z + i \operatorname{sen} z$$

o

$$e^{ix} = \cos x + i \operatorname{sen} x$$

$$\begin{aligned} \therefore (r, \theta) &= r \cos \theta + i r \operatorname{sen} \theta \\ &= r e^{i\theta} \end{aligned}$$

Tres observaciones:

$$1. z = r e^{i\theta} = r e^{i(\theta+2\pi k)}$$

$$\begin{aligned} \therefore \log z &= \log r + \log e^{i(\theta+2\pi k)} \\ &= \ln r + i(\theta + 2\pi k) \end{aligned}$$

$\therefore \log z$ es multivaluada, el **valor principal** es
 $-\pi < \theta \leq \pi$.

2.

$$\begin{aligned} \cosh ix &= \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} = \\ &= \frac{(\cos x + i \operatorname{sen} x) + (\cos(-x) + i \operatorname{sen}(-x))}{2} = \cos x \end{aligned}$$

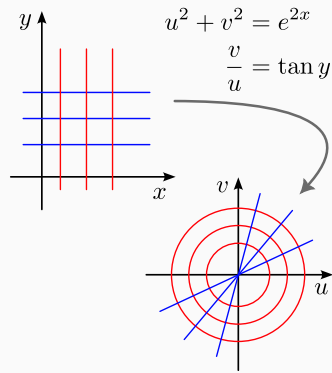
$$3. e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} =$$

$$e^x (\cos y + i \operatorname{sen} y) =$$

$$e^x \cos y + i e^x \operatorname{sen} y$$

$$u(x, y) + i v(x, y)$$

u y v representan un **mapeo conforme** real:



Entonces podemos **definir**:

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

$$\operatorname{sen} z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\operatorname{sen} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Se puede entonces probar que:

$$e^{iz} = \cos z + i \operatorname{sen} z$$

o

$$e^{ix} = \cos x + i \operatorname{sen} x$$

$$\begin{aligned} \therefore (r, \theta) &= r \cos \theta + i r \operatorname{sen} \theta \\ &= r e^{i\theta} \end{aligned}$$

Tres observaciones:

$$1. z = r e^{i\theta} = r e^{i(\theta+2\pi k)}$$

$$\begin{aligned} \therefore \log z &= \log r + \log e^{i(\theta+2\pi k)} \\ &= \ln r + i(\theta + 2\pi k) \end{aligned}$$

$\therefore \log z$ es multivaluada, el **valor principal** es
 $-\pi < \theta \leq \pi$.

2.

$$\begin{aligned} \cosh ix &= \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} = \\ &= \frac{(\cos x + i \operatorname{sen} x) + (\cos(-x) + i \operatorname{sen}(-x))}{2} = \cos x \end{aligned}$$

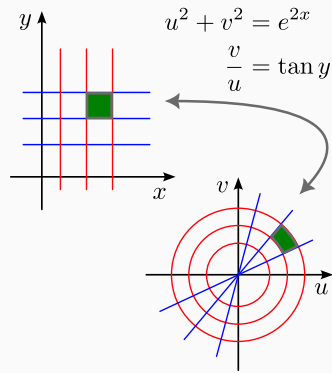
$$3. e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} =$$

$$e^x (\cos y + i \operatorname{sen} y) =$$

$$e^x \cos y + i e^x \operatorname{sen} y$$

$$u(x, y) + i v(x, y)$$

u y v representan un **mapeo conforme** real:



$$\frac{1}{1-u} = 1 + u + u^2 + \dots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} u^n$$

converge para $|u| < 1$.

$$\therefore \frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots$$

$$= \sum_n (-1)^n x^{2n}$$

converge para $|x| < 1$.

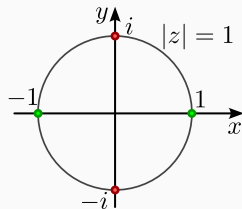
¿Qué pasa en $x = \pm 1$?

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{2n} = \frac{1}{1+z^2}, \quad (|z| < 1)$$

$$\frac{1}{1+z^2} = \frac{1}{(z+i)(z-i)}$$

$\therefore z = \pm i \leftarrow$ ¡problema!

Gráficamente:



Los puntos problemáticos están **sobre** $|z| = 1$, pero no en $z = 1$ o en $z = -1$.

PAUSA PARA RESOLVER PROBLEMAS DE LA PRÁCTICA NRO. 2

EJERCICIOS 5 – 6

- ▶ E. Kreyszig, H. Kreyszig y E.J. Norminton. *Advanced Engineering Mathematics*. Hoboken, USA: John Wiley & Sons, Inc, 2011. Capítulo 4 (integración). Capítulo 15 (sucesiones y series).
- ▶ M.R. Spiegel et al. *Variable compleja*. Mexico: McGraw-Hill, 1991. Capítulo 14 (integración). Capítulo 6 (sucesiones y series)