Serie y Transformada de Fourier

Integral de Fourier

Manuel Carlevaro

Departamento de Ingeniería Mecánica

Grupo de Materiales Granulares - UTN FRLP

manuel.carlevaro@gmail.com

Cálculo Avanzado • 2023

XƎLATEX ·

Del ejercicio 6 (Práctica 3):

$$f_L(x) = \begin{cases} 0, & -L < x < -1 \\ 1, & -1 < x < 1 \\ 0, & 1 < x < L \end{cases}$$

Del ejercicio 6 (Práctica 3):

$$f_L(x) = \begin{cases} 0, & -L < x < -1 \\ 1, & -1 < x < 1 \\ 0, & 1 < x < L \end{cases}$$

Función par:

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{L}, \quad a_0 = \frac{1}{2L}\int_{-1}^{1} dx = \frac{1}{L}$$

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-1}^{1} \cos\frac{n\pi x}{L}\, dx = \frac{2}{L}\int_{0}^{1} \cos\frac{n\pi x}{L}\, dx = \frac{2}{L}\frac{\operatorname{sen}(n\pi/L)}{n\pi/L}$$

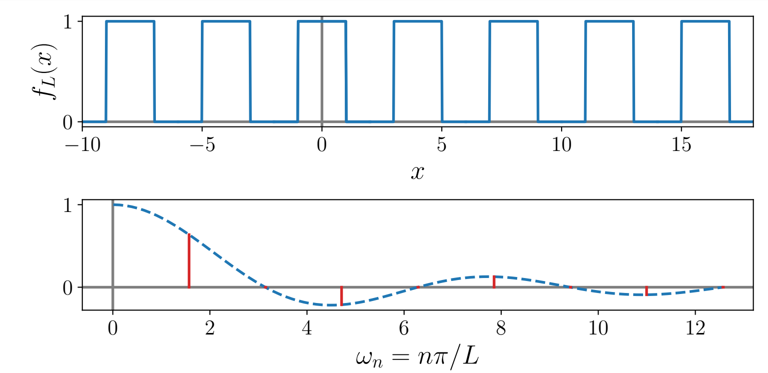
Del ejercicio 6 (Práctica 3):

$$f_L(x) = \begin{cases} 0, & -L < x < -1 \\ 1, & -1 < x < 1 \\ 0, & 1 < x < L \end{cases}$$

Función par:

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{L}, \quad a_0 = \frac{1}{2L}\int_{-1}^{1} dx = \frac{1}{L}$$

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-1}^{1} \cos\frac{n\pi x}{L}\,dx = \frac{2}{L}\int_{0}^{1} \cos\frac{n\pi x}{L}\,dx = \frac{2}{L}\frac{\operatorname{sen}(n\pi/L)}{n\pi/L}$$



$2L = 4$

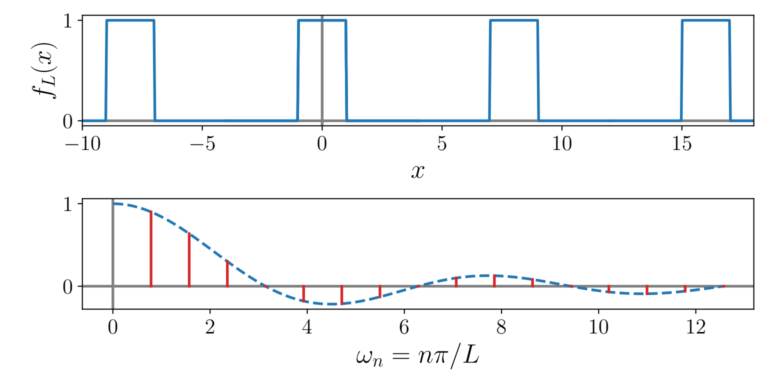
Del ejercicio 6 (Práctica 3):

$$f_L(x) = \begin{cases} 0, & -L < x < -1 \\ 1, & -1 < x < 1 \\ 0, & 1 < x < L \end{cases}$$

Función par:

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{L}, \quad a_0 = \frac{1}{2L}\int_{-1}^{1} dx = \frac{1}{L}$$

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-1}^{1} \cos\frac{n\pi x}{L}\, dx = \frac{2}{L}\int_{0}^{1} \cos\frac{n\pi x}{L}\, dx = \frac{2}{L}\,\frac{\operatorname{sen}(n\pi/L)}{n\pi/L}$$



$$2L = 8$$

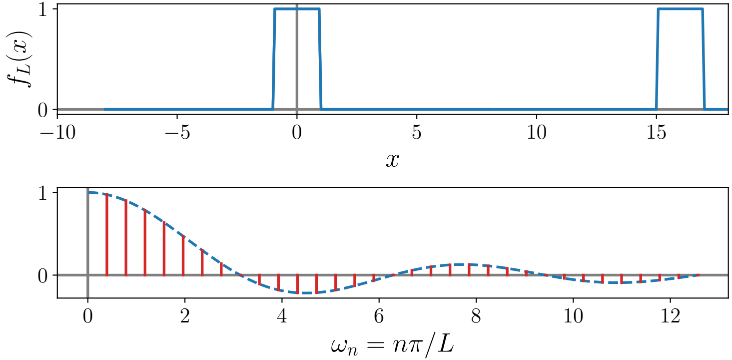
Del ejercicio 6 (Práctica 3):

$$f_L(x) = \begin{cases} 0, & -L < x < -1 \\ 1, & -1 < x < 1 \\ 0, & 1 < x < L \end{cases}$$

Función par:

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{L}, \quad a_0 = \frac{1}{2L}\int_{-1}^{1} dx = \frac{1}{L}$$

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-1}^{1} \cos\frac{n\pi x}{L}\, dx = \frac{2}{L}\int_{0}^{1} \cos\frac{n\pi x}{L}\, dx = \frac{2}{L}\frac{\operatorname{sen}(n\pi/L)}{n\pi/L}$$



$$2L = 16$$

Sea $f_L(x)$ una función de período $2L$:

$$f_L(x) = a_0 + \sum_{i=1}^{\infty} (a_n \cos \omega_n x + b_n \operatorname{sen} \omega_n x)$$

donde

$$\omega_n = \frac{n\pi}{L} \quad a_0 = \frac{1}{2L} \int_{-L}^{L} f_L(x)\, dx$$

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f_L(x) \cos \omega_n\, dx$$

$$b_0 = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f_L(x) \operatorname{sen} \omega_n\, dx$$

$$f_L(x) = \frac{1}{2L} \int_{-L}^{L} f_L(\xi)\, d\xi + \frac{1}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\cos \omega_n x \int_{-L}^{L} f_L(\xi) \cos \omega_n \xi\, d\xi + \operatorname{sen} \omega_n x \int_{-L}^{L} f_L(\xi) \operatorname{sen} \omega_n \xi\, d\xi \right]$$

Ahora hacemos:

$$\Delta\omega = \omega_{n+1} - \omega_n = \frac{(n+1)\pi}{L} - \frac{n\pi}{L} = \frac{\pi}{L}$$

$$f_L(x) = \frac{1}{2L} \int_{-L}^{L} f_L(\xi)\, d\xi + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left[(\cos \omega_n x)\Delta\omega \int_{-L}^{L} f_L(\xi) \cos \omega_n \xi\, d\xi + (\operatorname{sen} \omega_n x)\Delta\omega \int_{-L}^{L} f_L(\xi) \operatorname{sen} \omega_n \xi\, d\xi \right]$$

Ahora: $L \to \infty$, y asumimos que

$$f(x) = \lim_{L\to\infty} f_L(x)$$

es absolutamente integrable en el eje x:

$$\lim_{a\to-\infty} \int_a^0 |f(x)|\, dx + \lim_{b\to\infty} \int_0^b |f(x)|\, dx \mapsto \text{ existe}$$

La representación de $f(x)$ por una **integral de Fourier**:

$$f(x) = \int_0^\infty [A(\omega)\cos\omega x + B(\omega)\operatorname{sen}\omega x]\; d\omega \tag{1}$$

donde:

$$\begin{aligned} A(\omega) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\cos\omega\xi\, d\xi \\ B(\omega) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\operatorname{sen}\omega\xi\, d\xi \end{aligned} \tag{2}$$

Teorema : Integral de Fourier.

Si $f(x)$ es suave a tramos en cada intervalo finito y tiene derivadas por derecha y por izquierda en cada punto, y si es absolutamente integrable en $(-\infty, \infty)$, entonces $f(x)$ puede representarse como una integral de Fourier (1) con A y B dados por (2). En los puntos en que $f(x)$ es discontinua, el valor de la integral de Fourier es el promedio de los valores laterales de $f(x)$ en esos puntos.

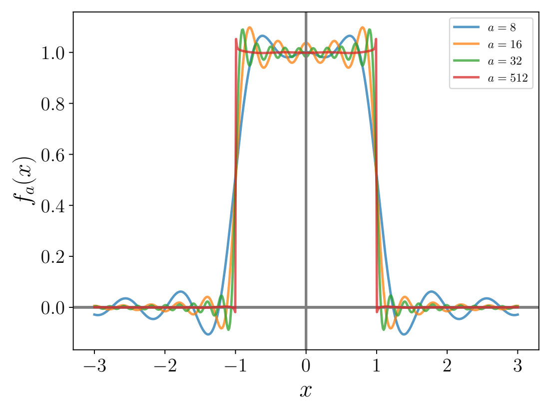
$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } |x| < 1 \\ 0, & \text{si } |x| > 1 \end{cases}$$

$$A(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\cos\omega\xi\, d\xi$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} f(\xi)\cos\omega\xi\, d\xi = \left.\frac{\operatorname{sen}\omega\xi}{\pi\omega}\right|_{-1}^{1} = \frac{2\operatorname{sen}\omega}{\pi\omega}$$

$$B(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\operatorname{sen}\omega\xi\, d\xi = 0$$

$$\boxed{f(x) = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty} \frac{\cos\omega x \operatorname{sen}\omega}{w}\, d\omega}$$



Transformada coseno: Si $f(x)$ es par, de (2):

$$f(x) = \int_0^\infty A(\omega)\cos\omega x\, d\omega$$

$$\text{con } A(\omega) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(\xi)\cos\omega\xi d\xi$$

Llamamos $A(\omega) = \sqrt{2/\pi}\hat{f}_c(\omega)$:

$$\hat{f}_c(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty f(x)\cos(\omega x\, dx) \qquad (3.\text{a})$$

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty \hat{f}_c(\omega)\cos(\omega x\, d\omega) \qquad (3.\text{b})$$

Transformada seno: Si $f(x)$ es impar, de (2):

$$f(x) = \int_0^\infty A(\omega)\,\text{sen}\,\omega x\, d\omega$$

$$\text{con } B(\omega) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(\xi)\,\text{sen}\,\omega\xi d\xi$$

Llamamos $B(\omega) = \sqrt{2/\pi}\hat{f}_s(\omega)$:

$$\hat{f}_s(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty f(x)\,\text{sen}(\omega x\, dx) \qquad (4.\text{a})$$

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty \hat{f}_c(\omega)\,\text{sen}(\omega x\, d\omega) \qquad (4.\text{b})$$

De las ecuaciones (1) y (2):

$$
\begin{aligned}
f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty f(\xi)\,[&\cos\omega\xi\cos\omega x \\
&+ \operatorname{sen}\omega\xi\operatorname{sen}\omega x]\; d\xi\, dx \\
= \frac{1}{\pi}\int_0^\infty &\left[\int_{-\infty}^\infty f(\xi)\cos(\omega x - \omega\xi)d\xi\right] d\omega
\end{aligned}
$$

$[\cdot]$ es una función par:

$$
f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty \left[\int_{-\infty}^\infty f(\xi)\cos(\omega x - \omega\xi)d\xi\right] d\omega \qquad (5)
$$

Si usamos sen en vez de cos, $[\cdot]$ es impar y

$$
f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty \left[\int_{-\infty}^\infty f(\xi)\operatorname{sen}(\omega x - \omega\xi)d\xi\right] d\omega = 0 \qquad (6)
$$

De las ecuaciones (1) y (2):

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty f(\xi)\left[\cos\omega\xi\cos\omega x + \operatorname{sen}\omega\xi\operatorname{sen}\omega x\right] d\xi\, dx$$
$$= \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \left[\int_{-\infty}^\infty f(\xi)\cos(\omega x - \omega\xi)d\xi\right] d\omega$$

$[\cdot]$ es una función par:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty \left[\int_{-\infty}^\infty f(\xi)\cos(\omega x - \omega\xi)d\xi\right] d\omega \quad (5)$$

Si usamos sen en vez de cos, $[\cdot]$ es impar y

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty \left[\int_{-\infty}^\infty f(\xi)\operatorname{sen}(\omega x - \omega\xi)d\xi\right] d\omega = 0 \quad (6)$$

Tomamos el integrando de (5) y le sumamos i por el integrando de (6), usando la fórmula de Euler

$$e^{ix} = \cos x + i\operatorname{sen}$$

obtenemos la **integral de Fourier compleja**:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty f(\xi)e^{i\omega(x-\xi)}d\xi\, d\omega$$

Escribiendo la exponencial de la suma como producto de exponenciales:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^\infty \left[\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}} f(\xi)e^{-i\omega\xi}d\xi\right] e^{i\omega x}\, d\omega \quad (7)$$

Transformada de Fourier de f:

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x}\, dx \qquad (8)$$

Transformada inversa de Fourier de $\hat{f}$:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega x}\, d\omega \qquad (9)$$

Otra nomenclatura:

$$\hat{f} = \mathscr{F}(f), \qquad f = \mathscr{F}^{-1}(\hat{f})$$

Teorema : Existencia de $\hat{f}$.

Si $f(x)$ es absolutamente convergente en $(-\infty, \infty)$ y continua a tramos en intervalos finitos, entonces existe la transformada de Fourier $\hat{f}(\omega)$ de $f(x)$ dada por la ecuación (8).

Encontrar $\hat{f}$ de $f(x) = 1$ si $|x| < 1$ y $f(x) = 0$ en otro caso.

$$\begin{aligned}\hat{f}(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1}^{1} e^{-i\omega x}\, dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, \frac{e^{-i\omega x}}{-i\omega}\bigg|_{-1}^{1} = \frac{1}{-i\omega\sqrt{2\pi}} \left(e^{-i\omega} - e^{i\omega}\right)\end{aligned}$$

Usando la fórmua de Euler:

$$e^{i\omega} - e^{-i\omega} = 2i \operatorname{sen} \omega$$

resulta

$$\hat{f}(\omega) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\, \frac{\operatorname{sen} \omega}{\omega} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\, \operatorname{senc} \omega$$

Ejemplos

Encontrar $\hat{f}$ de $f(x) = 1$ si $|x| < 1$ y $f(x) = 0$ en otro caso.

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1}^{1} e^{-i\omega x}\, dx$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left. \frac{e^{-i\omega x}}{-i\omega} \right|_{-1}^{1} = \frac{1}{-i\omega\sqrt{2\pi}} \left(e^{-i\omega} - e^{i\omega} \right)$$

Usando la fórmua de Euler:

$$e^{i\omega} - e^{-i\omega} = 2i \operatorname{sen} \omega$$

resulta

$$\hat{f}(\omega) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{sen} \omega}{\omega} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \operatorname{senc} \omega$$

Encontrar $\hat{f}$ de $f(x) = e^{-ax}$ si $x > 0$ y $f(x) = 0$ si $x < 0$.

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{\infty} e^{-ax} e^{-i\omega x}\, dx$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left. \frac{e^{-(a+i\omega x)}}{-(a+i\omega)} \right|_{0}^{\infty}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}(a+i\omega)}$$

Interpretación física: espectro de energía

Representación **espectral**:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega x}\, d\omega$$

Densidad espectral $\hat{f}(\omega) \mapsto$ intensidad de $f(x)$ en $(\omega, \omega + d\omega)$.

$$mx'' + kx = 0$$

$\times x' :\ mx'x'' + kx'x = 0$. Integrando:

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = E_0 = \text{constante}$$

Solución general:

$$x = a_1 \cos\omega_0 t + b_1 \operatorname{sen}\omega_0 t = \underbrace{c_1 e^{i\omega_0 t}}_{A} + \underbrace{c_{-1} e^{-i\omega_0 t}}_{B}$$

donde $\omega_0^2 = k/m$, $c_1 = (a_1 - ib_1)/2$, $c_{-1} = \bar{c}_1 = (a_1 + ib_1)/2$.

Representación **espectral**:

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(\omega)e^{i\omega x}\,d\omega$$

Densidad espectral $\hat{f}(\omega)\mapsto$ intensidad de $f(x)$ en $(\omega,\omega+d\omega)$.

$$mx''+kx=0$$

$\times x'$: $mx'x''+kx'x=0$. Integrando:

$$\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}kx^2=E_0=\text{constante}$$

Solución general:

$$x=a_1\cos\omega_0 t+b_1\operatorname{sen}\omega_0 t=\underbrace{c_1e^{i\omega_0 t}}_{A}+\underbrace{c_{-1}e^{-i\omega_0 t}}_{B}$$

donde $\omega_0^2=k/m$, $c_1=(a_1-ib_1)/2$, $c_{-1}=\bar{c}_1=(a_1+ib_1)/2$.

$x=A+B$, $x'=v=A'+B'=i\omega_0(A-B)$:

$$E_0=\frac{1}{2}m(i\omega_0)^2(A-B)^2+\frac{1}{2}k(A+B)^2$$

$$\begin{aligned}E_0&=\frac{1}{2}k\left[-(A-B)^2+(A+B)^2\right]\\&=2kAB=2kc_1e^{i\omega_0 t}c_{-1}e^{-i\omega_0 t}\\&=2kc_1c_{-1}=2k|c_1|^2\end{aligned}$$

Sistema más complejo: $x=f(t)\mapsto$ periódica:
Espectro discreto: $|c_1|^2\mapsto|c_n|^2$ (conjunto contable de frecuencias aisladas).
Sistema más complejo: $x=f(t)\mapsto$ no periódcia:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left|\hat{f}(\omega)\right|^2\,d\omega$$

es la **energía total** del sistema.

Teorema : Linealidad de F .

*La transformada de Fourier es una **operación lineal**, esto es, para cualquier par de funciones $f(x)$ y $g(x)$ cuyas transformadas existan, y para cualesquiera constantes a y b, la transformada de Fourier de $af + bg$ existe y*

$$\mathscr{F}(af + bg) = a\mathscr{F}(f) + b\mathscr{F}(g)$$

Teorema : Linealidad de F .

La transformada de Fourier es una ***operación lineal****, esto es, para cualquier par de funciones* $f(x)$ *y* $g(x)$ *cuyas transformadas existan, y para cualesquiera constantes* a *y* b*, la transformada de Fourier de* $af + bg$ *existe y*

$$\mathscr{F}(af + bg) = a\mathscr{F}(f) + b\mathscr{F}(g)$$

Teorema : Transformada de la derivada.

Sea $f(x)$ *continua en* $(-\infty, \infty)$ *y* $f(x) \to 0$ *cuando* $|x| \to \infty$*. Entonces, si* $f'(x)$ *es absolutamente integrable en el eje* x*:*

$$\mathscr{F}[f'(x)] = i\omega\mathscr{F}[f(x)]$$

Teorema : Linealidad de F .

*La transformada de Fourier es una **operación lineal**, esto es, para cualquier par de funciones $f(x)$ y $g(x)$ cuyas transformadas existan, y para cualesquiera constantes a y b, la transformada de Fourier de $af + bg$ existe y*

$$\mathscr{F}(af + bg) = a\mathscr{F}(f) + b\mathscr{F}(g)$$

Teorema : Transformada de la derivada.

Sea $f(x)$ continua en $(-\infty, \infty)$ y $f(x) \to 0$ cuando $|x| \to \infty$. Entonces, si $f'(x)$ es absolutamente integrable en el eje x:

$$\mathscr{F}[f'(x)] = i\omega\mathscr{F}[f(x)]$$

La **convolución** $f * g$ de las funciones f y g se define complejo:

$$\begin{aligned} h(x) = (f * g)(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(x-\tau)\,d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x-\tau)g(\tau)\,d\tau \end{aligned}$$

Teorema : Linealidad de F .

*La transformada de Fourier es una **operación lineal**, esto es, para cualquier par de funciones $f(x)$ y $g(x)$ cuyas transformadas existan, y para cualesquiera constantes a y b, la transformada de Fourier de $af + bg$ existe y*

$$\mathscr{F}(af + bg) = a\mathscr{F}(f) + b\mathscr{F}(g)$$

Teorema : Transformada de la derivada.

Sea $f(x)$ continua en $(-\infty, \infty)$ y $f(x) \to 0$ cuando $|x| \to \infty$. Entonces, si $f'(x)$ es absolutamente integrable en el eje x:

$$\mathscr{F}[f'(x)] = i\omega\mathscr{F}[f(x)]$$

La **convolución** $f * g$ de las funciones f y g se define complejo:

$$\begin{aligned} h(x) = (f * g)(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(x-\tau)\, d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x-\tau)g(\tau)\, d\tau \end{aligned}$$

Teorema : Convolución.

Sean $f(x)$ y $g(x)$ funciones acotadas, continuas por tramos, y absolutamente integrables en $(-\infty, \infty)$, entonces

$$\mathscr{F}(f * g) = \sqrt{2\pi}\mathscr{F}(f)\mathscr{F}(g)$$

- E. Kreyszig, H. Kreyszig y E.J. Norminton. *Advanced Engineering Mathematics*. Hoboken, USA: John Wiley & Sons, Inc, 2011. Capítulo 11 (11.7 – 11.9).
- Peter V O'Neil. *Matemáticas avanzadas para ingeniería*. 7.ª ed. México, DF: CENGAGE Learning Custom Publishing, 2012. Capítulo 3.
- K A Stroud y Dexter J Booth. *Advanced Engineering Mathematics*. 6.ª ed. London, England: Bloomsbury Academic, 2020. Capítulos 9.