Serie y Transformada de Fourier

Integral de Fourier. Transformada seno y coseno. Transformada de Fourier.

Manuel Carlevaro

Departamento de Ingeniería Mecánica

Grupo de Materiales Granulares - UTN FRLP

manuel.carlevaro@gmail.com

Cálculo Avanzado • 2023

Del ejercicio 6 (Práctica 3):

$$f_L(x) = \begin{cases} 0, & -L < x < -1 \\ 1, & -1 < x < 1 \\ 0, & 1 < x < L \end{cases}$$

Del ejercicio 6 (Práctica 3):

$$f_L(x) = \begin{cases} 0, & -L < x < -1 \\ 1, & -1 < x < 1 \\ 0, & 1 < x < L \end{cases}$$

Función par:

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{L}, \quad a_0 = \frac{1}{2L}\int_{-1}^{1} dx = \frac{1}{L}$$

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-1}^{1} \cos\frac{n\pi x}{L}\,dx = \frac{2}{L}\int_{0}^{1} \cos\frac{n\pi x}{L}\,dx = \frac{2}{L}\frac{\operatorname{sen}(n\pi/L)}{n\pi/L}$$

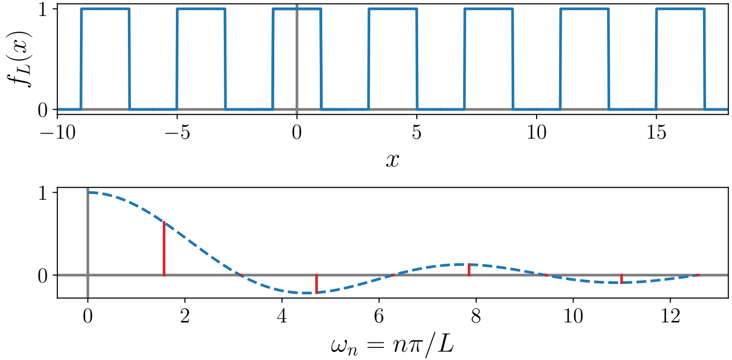
Del ejercicio 6 (Práctica 3):

$$f_L(x) = \begin{cases} 0, & -L < x < -1 \\ 1, & -1 < x < 1 \\ 0, & 1 < x < L \end{cases}$$

Función par:

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{L}, \quad a_0 = \frac{1}{2L}\int_{-1}^{1} dx = \frac{1}{L}$$

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-1}^{1} \cos \frac{n\pi x}{L}\, dx = \frac{2}{L}\int_{0}^{1} \cos \frac{n\pi x}{L}\, dx = \frac{2}{L}\frac{\operatorname{sen}(n\pi/L)}{n\pi/L}$$



$$2L = 4$$

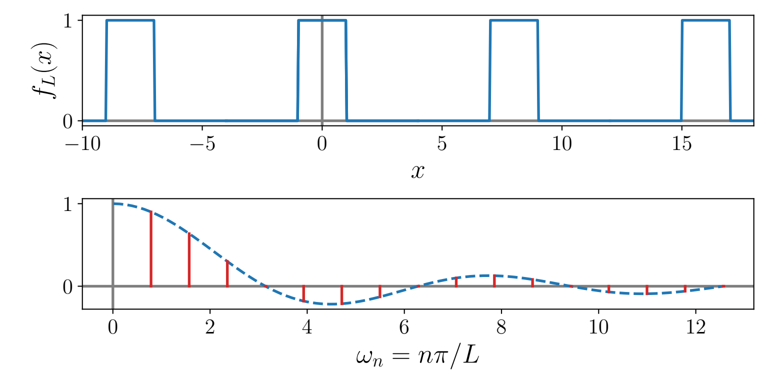
Del ejercicio 6 (Práctica 3):

$$f_L(x) = \begin{cases} 0, & -L < x < -1 \\ 1, & -1 < x < 1 \\ 0, & 1 < x < L \end{cases}$$

Función par:

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{L}, \quad a_0 = \frac{1}{2L}\int_{-1}^{1} dx = \frac{1}{L}$$

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-1}^{1} \cos\frac{n\pi x}{L}\,dx = \frac{2}{L}\int_{0}^{1} \cos\frac{n\pi x}{L}\,dx = \frac{2}{L}\frac{\operatorname{sen}(n\pi/L)}{n\pi/L}$$



$$2L = 8$$

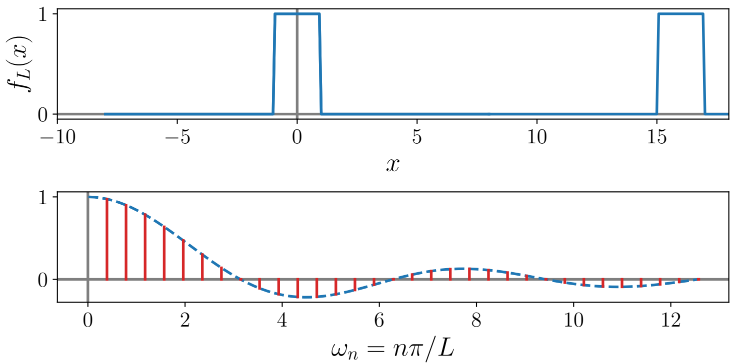
Del ejercicio 6 (Práctica 3):

$$f_L(x) = \begin{cases} 0, & -L < x < -1 \\ 1, & -1 < x < 1 \\ 0, & 1 < x < L \end{cases}$$

Función par:

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{L}, \quad a_0 = \frac{1}{2L}\int_{-1}^{1} dx = \frac{1}{L}$$

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-1}^{1} \cos\frac{n\pi x}{L}\, dx = \frac{2}{L}\int_{0}^{1} \cos\frac{n\pi x}{L}\, dx = \frac{2}{L}\frac{\operatorname{sen}(n\pi/L)}{n\pi/L}$$



$2L = 16$

Sea $f_L(x)$ una función de período $2L$:

$$f_L(x) = a_0 + \sum_{i=1}^{\infty} (a_n \cos \omega_n x + b_n \operatorname{sen} \omega_n x)$$

donde

$$\omega_n = \frac{n\pi}{L} \quad a_0 = \frac{1}{2L} \int_{-L}^{L} f_L(x)\, dx$$

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f_L(x) \cos \omega_n\, dx$$

$$b_0 = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f_L(x) \operatorname{sen} \omega_n\, dx$$

$$\begin{aligned} f_L(x) = \frac{1}{2L} \int_{-L}^{L} f_L(\xi)\, d\xi \\ + \frac{1}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \Big[\cos \omega_n x \int_{-L}^{L} f_L(\xi) \cos \omega_n \xi\, d\xi \\ + \operatorname{sen} \omega_n x \int_{-L}^{L} f_L(\xi) \operatorname{sen} \omega_n \xi\, d\xi \Big] \end{aligned}$$

Sea $f_L(x)$ una función de período $2L$:

$$f_L(x) = a_0 + \sum_{i=1}^{\infty} (a_n \cos \omega_n x + b_n \operatorname{sen} \omega_n x)$$

donde

$$\omega_n = \frac{n\pi}{L} \quad a_0 = \frac{1}{2L} \int_{-L}^{L} f_L(x)\, dx$$
$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f_L(x) \cos \omega_n \, dx$$
$$b_0 = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f_L(x) \operatorname{sen} \omega_n \, dx$$

$$\begin{aligned} f_L(x) = {} & \frac{1}{2L} \int_{-L}^{L} f_L(\xi)\, d\xi \\ & + \frac{1}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\cos \omega_n x \int_{-L}^{L} f_L(\xi) \cos \omega_n \xi \, d\xi \right. \\ & \left. + \operatorname{sen} \omega_n x \int_{-L}^{L} f_L(\xi) \operatorname{sen} \omega_n \xi \, d\xi \right] \end{aligned}$$

Ahora hacemos:

$$\Delta\omega = \omega_{n+1} - \omega_n = \frac{(n+1)\pi}{L} - \frac{n\pi}{L} = \frac{\pi}{L}$$

$$\begin{aligned} f_L(x) = {} & \frac{1}{2L} \int_{-L}^{L} f_L(\xi)\, d\xi \\ & + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left[(\cos \omega_n x) \Delta\omega \int_{-L}^{L} f_L(\xi) \cos \omega_n \xi \, d\xi \right. \\ & \left. + (\operatorname{sen} \omega_n x) \Delta\omega \int_{-L}^{L} f_L(\xi) \operatorname{sen} \omega_n \xi \, d\xi \right] \end{aligned}$$

Sea $f_L(x)$ una función de período $2L$:

$$f_L(x) = a_0 + \sum_{i=1}^{\infty} (a_n \cos \omega_n x + b_n \operatorname{sen} \omega_n x)$$

donde

$$\omega_n = \frac{n\pi}{L} \quad a_0 = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f_L(x)\, dx$$
$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f_L(x) \cos \omega_n \, dx$$
$$b_0 = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f_L(x) \operatorname{sen} \omega_n \, dx$$

$$\begin{aligned} f_L(x) = {} & \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f_L(\xi)\, d\xi \\ & + \frac{1}{L}\sum_{n=1}^{\infty}\Big[\cos \omega_n x \int_{-L}^{L} f_L(\xi) \cos \omega_n \xi \, d\xi \\ & \qquad + \operatorname{sen} \omega_n x \int_{-L}^{L} f_L(\xi) \operatorname{sen} \omega_n \xi \, d\xi\Big] \end{aligned}$$

Ahora hacemos:

$$\Delta\omega = \omega_{n+1} - \omega_n = \frac{(n+1)\pi}{L} - \frac{n\pi}{L} = \frac{\pi}{L}$$

$$\begin{aligned} f_L(x) = {} & \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f_L(\xi)\, d\xi \\ & + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\Big[(\cos \omega_n x)\Delta\omega \int_{-L}^{L} f_L(\xi) \cos \omega_n \xi \, d\xi \\ & \qquad + (\operatorname{sen} \omega_n x)\Delta\omega \int_{-L}^{L} f_L(\xi) \operatorname{sen} \omega_n \xi \, d\xi\Big] \end{aligned}$$

Tomamos $L \to \infty$, y asumimos que

$$f(x) = \lim_{L\to\infty} f_L(x)$$

es absolutamente integrable en el eje x:

$$\lim_{a\to-\infty}\int_a^0 |f(x)|\, dx + \lim_{b\to\infty}\int_0^b |f(x)|\, dx \mapsto \text{ existe}$$

La representación de $f(x)$ por una **integral de Fourier**:

$$f(x) = \int_0^\infty \left[A(\omega)\cos\omega x + B(\omega)\,\mathrm{sen}\,\omega x\right]\, d\omega \tag{1}$$

donde:

$$\begin{aligned} A(\omega) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\cos\omega\xi\, d\xi \\ B(\omega) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\,\mathrm{sen}\,\omega\xi\, d\xi \end{aligned} \tag{2}$$

Teorema : Integral de Fourier.

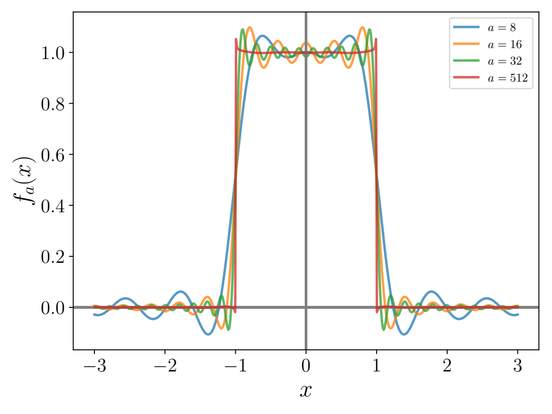
Si $f(x)$ es suave a tramos en cada intervalo finito y tiene derivadas por derecha y por izquierda en cada punto, y si es absolutamente integrable en $(-\infty, \infty)$, entonces $f(x)$ puede representarse como una integral de Fourier (1) con A y B dados por (2). En los puntos en que $f(x)$ es discontinua, el valor de la integral de Fourier es el promedio de los valores laterales de $f(x)$ en esos puntos.

Ejemplo

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } |x| < 1 \\ 0, & \text{si } |x| > 1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} A(\omega) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\cos\omega\xi\, d\xi \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} f(\xi)\cos\omega\xi\, d\xi = \left.\frac{\operatorname{sen}\omega\xi}{\pi\omega}\right|_{-1}^{1} = \frac{2\operatorname{sen}\omega}{\pi\omega} \\ B(\omega) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\operatorname{sen}\omega\xi\, d\xi = 0 \end{aligned}$$

$$\boxed{f(x) = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty} \frac{\cos\omega x \operatorname{sen}\omega}{w}\, d\omega}$$



Transformada coseno: Si $f(x)$ es par, de (2):

$$f(x) = \int_0^\infty A(\omega) \cos \omega x \, d\omega$$

$$\text{con } A(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty f(\xi) \cos \omega \xi d\xi$$

Llamamos $A(\omega) = \sqrt{2/\pi} \hat{f}_c(\omega)$:

$$\hat{f}_c(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f(x) \cos \omega x \, dx \qquad (3.a)$$

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \hat{f}_c(\omega) \cos \omega x \, d\omega \qquad (3.b)$$

Transformada seno: Si $f(x)$ es impar, de (2):

$$f(x) = \int_0^\infty A(\omega) \operatorname{sen} \omega x \, d\omega$$

$$\text{con } B(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty f(\xi) \operatorname{sen} \omega \xi d\xi$$

Llamamos $B(\omega) = \sqrt{2/\pi} \hat{f}_s(\omega)$:

$$\hat{f}_s(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f(x) \operatorname{sen} \omega x \, dx \qquad (4.a)$$

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \hat{f}_c(\omega) \operatorname{sen} \omega x \, d\omega \qquad (4.b)$$

De las ecuaciones (1) y (2):

$$\begin{aligned} f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty f(\xi)\,[&\cos\omega\xi\cos\omega x \\ &+ \operatorname{sen}\omega\xi\operatorname{sen}\omega x]\; d\xi\, d\omega \\ = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty &\left[\int_{-\infty}^\infty f(\xi)\cos(\omega x - \omega\xi) d\xi\right] d\omega \end{aligned}$$

$[\cdot]$ es una función par:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty \left[\int_{-\infty}^\infty f(\xi)\cos(\omega x - \omega\xi) d\xi\right] d\omega \quad (5)$$

Si usamos sen en vez de cos, $[\cdot]$ es impar y

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty \left[\int_{-\infty}^\infty f(\xi)\operatorname{sen}(\omega x - \omega\xi) d\xi\right] d\omega = 0 \qquad (6)$$

De las ecuaciones (1) y (2):

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty f(\xi)\,[\cos\omega\xi\cos\omega x + \operatorname{sen}\omega\xi\operatorname{sen}\omega x]\;d\xi\,d\omega$$
$$= \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \left[\int_{-\infty}^\infty f(\xi)\cos(\omega x-\omega\xi)d\xi\right]d\omega$$

$[\cdot]$ es una función par:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty \left[\int_{-\infty}^\infty f(\xi)\cos(\omega x-\omega\xi)d\xi\right]d\omega \quad (5)$$

Si usamos sen en vez de cos, $[\cdot]$ es impar y

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty \left[\int_{-\infty}^\infty f(\xi)\operatorname{sen}(\omega x-\omega\xi)d\xi\right]d\omega = 0 \qquad (6)$$

Tomamos el integrando de (5) y le sumamos i multiplicado por el integrando de (6), usando la fórmula de Euler

$$e^{ix} = \cos x + i\operatorname{sen} x$$

obtenemos la **integral de Fourier compleja**:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty f(\xi)e^{i\omega(x-\xi)}d\xi\,d\omega$$

Escribiendo la exponencial de la suma como producto de exponenciales:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^\infty \left[\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}}f(\xi)e^{-i\omega\xi}d\xi\right]e^{i\omega x}\,d\omega \qquad (7)$$

Transformada de Fourier de f:

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x}\, dx \qquad (8)$$

Transformada inversa de Fourier de $\hat{f}$:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega x}\, d\omega \qquad (9)$$

Otra nomenclatura:

$$\hat{f} = \mathscr{F}(f), \qquad f = \mathscr{F}^{-1}(\hat{f})$$

Teorema : Existencia de $\hat{f}$.

Si $f(x)$ es absolutamente convergente en $(-\infty, \infty)$ y continua a tramos en intervalos finitos, entonces existe la transformada de Fourier $\hat{f}(\omega)$ de $f(x)$ dada por la ecuación (8).

Encontrar $\hat{f}$ de $f(x) = 1$ si $|x| < 1$ y $f(x) = 0$ en otro caso.

$$\begin{aligned}\hat{f}(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1}^{1} e^{-i\omega x}\, dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left. \frac{e^{-i\omega x}}{-i\omega} \right|_{-1}^{1} = \frac{1}{-i\omega\sqrt{2\pi}} \left(e^{-i\omega} - e^{i\omega}\right)\end{aligned}$$

Usando la fórmula de Euler:

$$e^{i\omega} - e^{-i\omega} = 2i \operatorname{sen} \omega$$

resulta

$$\hat{f}(\omega) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{sen} \omega}{\omega} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \operatorname{senc} \omega$$

Encontrar $\hat{f}$ de $f(x) = 1$ si $|x| < 1$ y $f(x) = 0$ en otro caso.

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1}^{1} e^{-i\omega x}\, dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left. \frac{e^{-i\omega x}}{-i\omega} \right|_{-1}^{1} = \frac{1}{-i\omega\sqrt{2\pi}} \left(e^{-i\omega} - e^{i\omega} \right)$$

Usando la fórmula de Euler:

$$e^{i\omega} - e^{-i\omega} = 2i \operatorname{sen} \omega$$

resulta

$$\hat{f}(\omega) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{sen} \omega}{\omega} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \operatorname{senc} \omega$$

Encontrar $\hat{f}$ de $f(x) = e^{-ax}$ si $x > 0$ y $f(x) = 0$ si $x < 0$.

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{\infty} e^{-ax} e^{-i\omega x}\, dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left. \frac{e^{-(a+i\omega)x}}{-(a+i\omega)} \right|_{0}^{\infty}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}(a+i\omega)}$$

Representación **espectral**:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega x}\, d\omega$$

Densidad espectral $\hat{f}(\omega) \mapsto$ intensidad de $f(x)$ en $(\omega, \omega + d\omega)$.

$$mx'' + kx = 0$$

$\times x' : \; mx'x'' + kx'x = 0$. Integrando:

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = E_0 = \text{constante}$$

Solución general:

$$x = a_1 \cos \omega_0 t + b_1 \operatorname{sen} \omega_0 t = \underbrace{c_1 e^{i\omega_0 t}}_{A} + \underbrace{c_{-1} e^{-i\omega_0 t}}_{B}$$

donde $\omega_0^2 = k/m$, $c_1 = (a_1 - ib_1)/2$, $c_{-1} = \bar{c}_1 = (a_1 + ib_1)/2$.

Representación **espectral**:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega x}\, d\omega$$

Densidad espectral $\hat{f}(\omega) \mapsto$ intensidad de $f(x)$ en $(\omega, \omega + d\omega)$.

$$mx'' + kx = 0$$

$\times x' :\ mx'x'' + kx'x = 0$. Integrando:

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = E_0 = \text{constante}$$

Solución general:

$$x = a_1 \cos \omega_0 t + b_1 \operatorname{sen} \omega_0 t = \underbrace{c_1 e^{i\omega_0 t}}_{A} + \underbrace{c_{-1} e^{-i\omega_0 t}}_{B}$$

donde $\omega_0^2 = k/m$, $c_1 = (a_1 - ib_1)/2$, $c_{-1} = \bar{c}_1 = (a_1 + ib_1)/2$.

$x = A + B$, $x' = v = A' + B' = i\omega_0(A - B)$:

$$E_0 = \frac{1}{2}m(i\omega_0)^2(A - B)^2 + \frac{1}{2}k(A + B)^2$$

$$\begin{aligned} E_0 = \frac{1}{2}k\left[-(A - B)^2 + (A + B)^2\right] \\ = 2kAB = 2kc_1 e^{i\omega_0 t} c_{-1} e^{-i\omega_0 t} \\ = 2kc_1 c_{-1} = 2k|c_1|^2 \end{aligned}$$

Sistema más complejo: $x = f(t) \mapsto$ periódica:
Espectro discreto: $|c_1|^2 \mapsto |c_n|^2$ (conjunto contable de frecuencias aisladas).
Sistema más complejo: $x = f(t) \mapsto$ no periódica:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left|\hat{f}(\omega)\right|^2 d\omega$$

es la **energía total** del sistema.

Teorema : Linealidad de $\mathscr{F}$.

La transformada de Fourier es una ***operación lineal****, esto es, para cualquier par de funciones* $f(x)$ *y* $g(x)$ *cuyas transformadas existan, y para cualesquiera constantes* a *y* b*, la transformada de Fourier de* $af + bg$ *existe y*

$$\mathscr{F}(af + bg) = a\mathscr{F}(f) + b\mathscr{F}(g)$$

Teorema : Linealidad de $\mathscr{F}$.

La transformada de Fourier es una ***operación lineal****, esto es, para cualquier par de funciones $f(x)$ y $g(x)$ cuyas transformadas existan, y para cualesquiera constantes a y b, la transformada de Fourier de $af + bg$ existe y*

$$\mathscr{F}(af + bg) = a\mathscr{F}(f) + b\mathscr{F}(g)$$

Teorema : Transformada de la derivada.

Sea $f(x)$ continua en $(-\infty, \infty)$ y $f(x) \to 0$ cuando $|x| \to \infty$. Entonces, si $f'(x)$ es absolutamente integrable en el eje x:

$$\mathscr{F}[f'(x)] = i\omega\mathscr{F}[f(x)]$$

Teorema : Linealidad de $\mathscr{F}$.

*La transformada de Fourier es una **operación lineal**, esto es, para cualquier par de funciones $f(x)$ y $g(x)$ cuyas transformadas existan, y para cualesquiera constantes a y b, la transformada de Fourier de $af + bg$ existe y*

$$\mathscr{F}(af + bg) = a\mathscr{F}(f) + b\mathscr{F}(g)$$

Teorema : Transformada de la derivada.

Sea $f(x)$ continua en $(-\infty, \infty)$ y $f(x) \to 0$ cuando $|x| \to \infty$. Entonces, si $f'(x)$ es absolutamente integrable en el eje x:

$$\mathscr{F}[f'(x)] = i\omega\mathscr{F}[f(x)]$$

La **convolución** $f * g$ de las funciones f y g se define complejo:

$$\begin{aligned} h(x) = (f * g)(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(x-\tau)\, d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x-\tau)g(\tau)\, d\tau \end{aligned}$$

Teorema : Linealidad de $\mathscr{F}$.

La transformada de Fourier es una ***operación lineal****, esto es, para cualquier par de funciones $f(x)$ y $g(x)$ cuyas transformadas existan, y para cualesquiera constantes a y b, la transformada de Fourier de $af + bg$ existe y*

$$\mathscr{F}(af + bg) = a\mathscr{F}(f) + b\mathscr{F}(g)$$

Teorema : Transformada de la derivada.

Sea $f(x)$ continua en $(-\infty, \infty)$ y $f(x) \to 0$ cuando $|x| \to \infty$. Entonces, si $f'(x)$ es absolutamente integrable en el eje x:

$$\mathscr{F}[f'(x)] = i\omega\mathscr{F}[f(x)]$$

La **convolución** $f * g$ de las funciones f y g se define complejo:

$$\begin{aligned} h(x) = (f * g)(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(x-\tau)\,d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x-\tau)g(\tau)\,d\tau \end{aligned}$$

Teorema : Convolución.

Sean $f(x)$ y $g(x)$ funciones acotadas, continuas por tramos, y absolutamente integrables en $(-\infty, \infty)$, entonces

$$\mathscr{F}(f * g) = \sqrt{2\pi}\mathscr{F}(f)\mathscr{F}(g)$$

- E. Kreyszig, H. Kreyszig y E.J. Norminton. *Advanced Engineering Mathematics*. Hoboken, USA: John Wiley & Sons, Inc, 2011. Capítulo 11 (11.7 – 11.9).
- Peter V O'Neil. *Matemáticas avanzadas para ingeniería*. 7.ª ed. México, DF: CENGAGE Learning Custom Publishing, 2012. Capítulo 3.
- K A Stroud y Dexter J Booth. *Advanced Engineering Mathematics*. 6.ª ed. London, England: Bloomsbury Academic, 2020. Capítulos 9.