

# AUTOVALORES Y AUTOVECTORES

DEFINICIONES. INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA. CÍRCULOS DE GERSCHGORIN. MÉTODO DE LAS POTENCIAS.  
MÉTODO DE LA POTENCIA: CÓDIGO. FACTORIZACIÓN QR. CÓDIGO.

---

Manuel Carlevaro

Departamento de Ingeniería Mecánica

Grupo de Materiales Granulares - UTN FRLP

manuel.carlevaro@gmail.com

### Definición : Autovalor y autovector.

Sea  $A \in K^{n \times n}$  y  $v \in K^n$ .  $v$  es un **autovector** de  $A$  si

$$Av = \lambda v$$

donde  $\lambda$  es un escalar en  $K$ , denominado **autovalor** asociado con  $v$ .

### Definición : Autovalor y autovector.

Sea  $\mathbf{A} \in K^{n \times n}$  y  $\mathbf{v} \in K^n$ .  $\mathbf{v}$  es un **autovector** de  $\mathbf{A}$  si

$$\mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$$

donde  $\lambda$  es un escalar en  $K$ , denominado **autovalor** asociado con  $\mathbf{v}$ .

En forma equivalente:

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{v} = \mathbf{0} \quad (1)$$

Este sistema tiene solución  $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$  si y solo si:

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 0$$

denominado **polinomio característico**,  $p_A(\lambda)$ , y por el teorema fundamental del álgebra:  $\mapsto n$  raíces.

### Definición : Autovalor y autovector.

Sea  $A \in K^{n \times n}$  y  $v \in K^n$ .  $v$  es un **autovector** de  $A$  si

$$Av = \lambda v$$

donde  $\lambda$  es un escalar en  $K$ , denominado **autovalor** asociado con  $v$ .

En forma equivalente:

$$(A - \lambda I)v = 0 \quad (1)$$

Este sistema tiene solución  $v \neq 0$  si y solo si:

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

denominado **polinomio característico**,  $p_A(\lambda)$ , y por el teorema fundamental del álgebra:  $\mapsto n$  raíces.

Ejemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) &= \begin{vmatrix} 3 - \lambda & -1 & 0 \\ -1 & 2 - \lambda & -1 \\ 0 & -1 & 3 - \lambda \end{vmatrix} \\ &= -\lambda^3 + 8\lambda^2 - 19\lambda + 12 = 0 \end{aligned}$$

Solución:  $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 3, \lambda_3 = 4$ . Reemplazando cada autovalor en (1):

$$v_1 = a \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, v_2 = b \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, v_3 = c \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

### Definición : Autovalor y autovector.

Sea  $\mathbf{A} \in K^{n \times n}$  y  $\mathbf{v} \in K^n$ .  $\mathbf{v}$  es un **autovector** de  $\mathbf{A}$  si

$$\mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$$

donde  $\lambda$  es un escalar en  $K$ , denominado **autovalor** asociado con  $\mathbf{v}$ .

En forma equivalente:

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{v} = \mathbf{0} \quad (1)$$

Este sistema tiene solución  $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$  si y solo si:

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 0$$

denominado **polinomio característico**,  $p_A(\lambda)$ , y por el teorema fundamental del álgebra:  $\mapsto n$  raíces.

Ejemplo:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) &= \begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 & 0 \\ -1 & 2-\lambda & -1 \\ 0 & -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} \\ &= -\lambda^3 + 8\lambda^2 - 19\lambda + 12 = 0 \end{aligned}$$

Solución:  $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 3, \lambda_3 = 4$ . Reemplazando cada autovalor en (1):

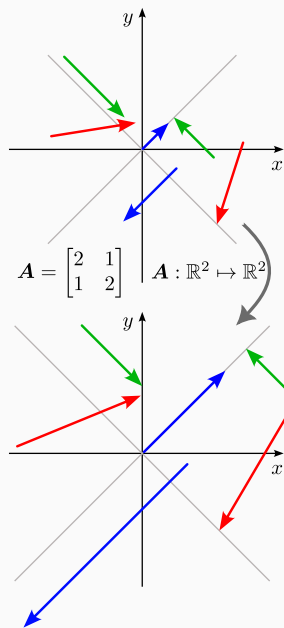
$$\mathbf{v}_1 = a \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = b \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_3 = c \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

**Definiciones:**

Espectro de  $\mathbf{A}$  :  $\sigma(\mathbf{A}) = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$

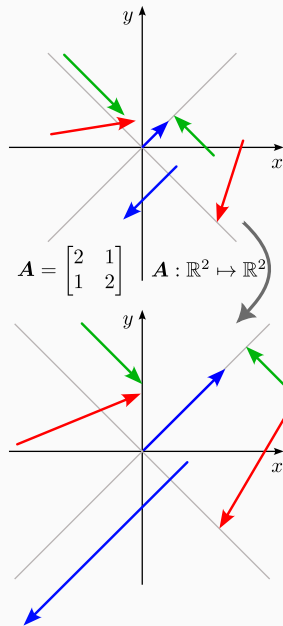
Radio espectral de  $\mathbf{A}$  :  $\rho(\mathbf{A}) = \max_{\lambda \in \sigma(\mathbf{A})} |\lambda|$

## Intepretación gráfica



$$\begin{aligned} p_A(\lambda) &= \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = \begin{vmatrix} 2 - \lambda & 1 \\ 1 & 2 - \lambda \end{vmatrix} \\ &= (2 - \lambda)^2 - 1 = \lambda^2 - 4\lambda + 3 = (\lambda - 3)(\lambda - 1) = 0 \end{aligned}$$

## Intepretación gráfica

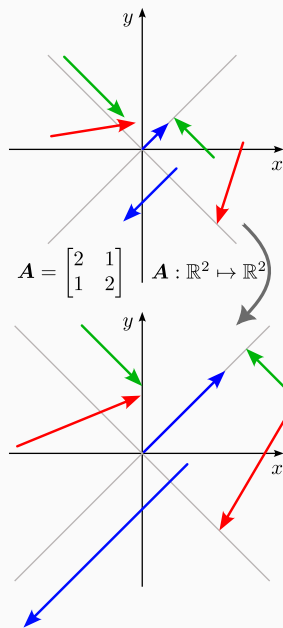


$$\begin{aligned} p_A(\lambda) &= \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = \begin{vmatrix} 2 - \lambda & 1 \\ 1 & 2 - \lambda \end{vmatrix} \\ &= (2 - \lambda)^2 - 1 = \lambda^2 - 4\lambda + 3 = (\lambda - 3)(\lambda - 1) = 0 \end{aligned}$$

Con  $\lambda_1 = 3$ :

$$\begin{cases} (2 - 3)x + y = 0 \\ x + (2 - 3)y = 0 \end{cases} \implies \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

## Interpretación gráfica



$$\begin{aligned} p_A(\lambda) &= \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = \begin{vmatrix} 2 - \lambda & 1 \\ 1 & 2 - \lambda \end{vmatrix} \\ &= (2 - \lambda)^2 - 1 = \lambda^2 - 4\lambda + 3 = (\lambda - 3)(\lambda - 1) = 0 \end{aligned}$$

Con  $\lambda_1 = 3$ :

$$\begin{cases} (2 - 3)x + y = 0 \\ x + (2 - 3)y = 0 \end{cases} \implies \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Con  $\lambda_2 = 1$ :

$$\begin{cases} (2 - 1)x + y = 0 \\ x + (2 - 1)y = 0 \end{cases} \implies \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

---

**Nota:** si consideramos la norma vectorial  $l_2 : \|\cdot\|$ :

$$\|\mathbf{A}\|_2 = \rho(\mathbf{A}^\dagger \mathbf{A})^{1/2}$$

Si  $\mathbf{A}$  es simétrica,  $\|\mathbf{A}\|_2 = \rho(\mathbf{A})$ .



## Métodos:

- ▶ Analítico:  $n < 5$ .
  - ▶ Parciales: computan solo autovalores **extremos** (módulo máximo o mínimo). Método de las potencias.
  - ▶ Globales: aproximan a todo el **espectro** de  $\mathbf{A}$ ,  $\sigma(\mathbf{A})$ . Método  $QR$ .
-

## Métodos:

- ▶ Analítico:  $n < 5$ .
- ▶ Parciales: computan solo autovalores **extremos** (módulo máximo o mínimo). Método de las potencias.
- ▶ Globales: aproximan a todo el **espectro** de  $A$ ,  $\sigma(A)$ . Método  $QR$ .

---

### Teorema : Círculo de Gerschgorin.

$A \in K^{n \times n}$ ,  $r_i = \sum_{j \neq i}^n |a_{ij}|$  para cada  $i = 1, 2, \dots, n$ . Sea

$$C_i = \{z \in \mathbb{C} : |z - a_{ii}| \leq r_i\}$$

1. Si  $\lambda$  es un autovalor, está en uno de los  $C_i$ .
2. Si  $k$  círculos  $C_i$  forman una región conectada  $R \in \mathbb{C}$ , disjunta de los restantes  $n - k$  círculos, entonces  $R$  contiene exactamente  $k$  autovalores.

## Métodos:

- ▶ Analítico:  $n < 5$ .
- ▶ Parciales: computan solo autovalores **extremos** (módulo máximo o mínimo). Método de las potencias.
- ▶ Globales: aproximan a todo el **espectro** de  $\mathbf{A}$ ,  $\sigma(\mathbf{A})$ . Método  $QR$ .

### Teorema : Círculo de Gerschgorin.

$\mathbf{A} \in K^{n \times n}$ ,  $r_i = \sum_{j \neq i}^n |a_{ij}|$  para cada  $i = 1, 2, \dots, n$ . Sea

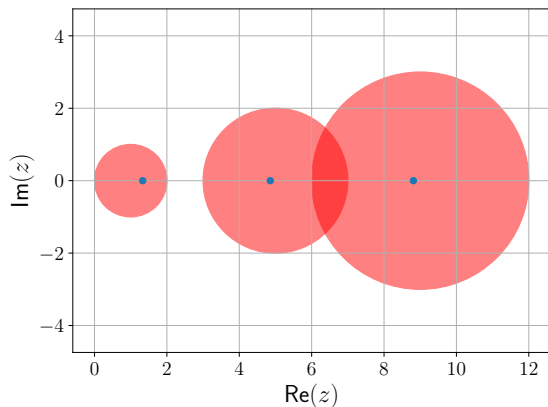
$$C_i = \{z \in \mathbb{C} : |z - a_{ii}| \leq r_i\}$$

1. Si  $\lambda$  es un autovalor, está en uno de los  $C_i$ .
2. Si  $k$  círculos  $C_i$  forman una región conectada  $R \in \mathbb{C}$ , disjunta de los restantes  $n - k$  círculos, entonces  $R$  contiene exactamente  $k$  autovalores.

## Ejemplo:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 5 & 1 \\ -2 & -1 & 9 \end{bmatrix}$$

$$r_1 = |-1| + |0| = 1, r_2 = |1| + |1| = 2, r_3 = |-2| + |-1| = 3.$$
$$\lambda_1 = 1.33192769, \lambda_2 = 8.81113862, \lambda_3 = 4.85693369.$$



### Método de las potencias:

$\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , con elementos de  $\sigma(\mathbf{A})$  que satisfacen:  $|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq |\lambda_3| \geq \dots \geq |\lambda_n|$ .  $\lambda_1$ : **autovalor dominante**.  $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$  forman una **base** en  $\mathbb{R}^n$  (linealmente independientes).

$$\mathbf{x} = \sum_{j=1}^n \beta_j \mathbf{v}_j$$

Multiplicando ambos miembros por  $\mathbf{A}, \mathbf{A}^2, \dots, \mathbf{A}^k, \dots$ :

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \sum_{j=1}^n \beta_j \mathbf{A}\mathbf{v}_j = \sum_{j=1}^n \beta_j \lambda_j \mathbf{v}_j$$

$$\mathbf{A}^2\mathbf{x} = \sum_{j=1}^n \beta_j \lambda_j \mathbf{A}\mathbf{v}_j = \sum_{j=1}^n \beta_j \lambda_j^2 \mathbf{v}_j$$

$\vdots$

$$\mathbf{A}^k\mathbf{x} = \sum_{j=1}^n \beta_j \lambda_j^k \mathbf{v}_j$$

Factorizando  $\lambda_1$  en la última ecuación:

$$\mathbf{A}^k\mathbf{x} = \lambda_1^k \sum_{j=1}^n \beta_j \left(\frac{\lambda_j}{\lambda_1}\right)^k \mathbf{v}_j$$

Dado que  $\forall j, |\lambda_1| > |\lambda_j|$ ;  $\lim_{k \rightarrow \infty} (\lambda_j/\lambda_1)^k = 0$ , y

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{A}^k\mathbf{x} = \lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_1^k \beta_1 \mathbf{v}_1 \quad (2)$$

Si  $|\lambda_1| < 1$ , (2)  $\mapsto \mathbf{0}$ , si  $|\lambda_1| > 1$ , (2) diverge ( $\beta_1 \neq 0$ ).

## Método de las potencias:

$\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , con elementos de  $\sigma(\mathbf{A})$  que satisfacen:  $|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq |\lambda_3| \geq \dots \geq |\lambda_n|$ .  $\lambda_1$ : **autovalor dominante**.  $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$  forman una **base** en  $\mathbb{R}^n$  (linealmente independientes).

$$\mathbf{x} = \sum_{j=1}^n \beta_j \mathbf{v}_j$$

Multiplicando ambos miembros por  $\mathbf{A}, \mathbf{A}^2, \dots, \mathbf{A}^k, \dots$ :

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \sum_{j=1}^n \beta_j \mathbf{A}\mathbf{v}_j = \sum_{j=1}^n \beta_j \lambda_j \mathbf{v}_j$$

$$\mathbf{A}^2\mathbf{x} = \sum_{j=1}^n \beta_j \lambda_j \mathbf{A}\mathbf{v}_j = \sum_{j=1}^n \beta_j \lambda_j^2 \mathbf{v}_j$$

$\vdots$

$$\mathbf{A}^k\mathbf{x} = \sum_{j=1}^n \beta_j \lambda_j^k \mathbf{v}_j$$

Factorizando  $\lambda_1$  en la última ecuación:

$$\mathbf{A}^k\mathbf{x} = \lambda_1^k \sum_{j=1}^n \beta_j \left(\frac{\lambda_j}{\lambda_1}\right)^k \mathbf{v}_j$$

Dado que  $\forall j, |\lambda_1| > |\lambda_j|$ ;  $\lim_{k \rightarrow \infty} (\lambda_j/\lambda_1)^k = 0$ , y

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{A}^k\mathbf{x} = \lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_1^k \beta_1 \mathbf{v}_1 \quad (2)$$

Si  $|\lambda_1| < 1$ , (2)  $\mapsto \mathbf{0}$ , si  $|\lambda_1| > 1$ , (2) diverge ( $\beta_1 \neq 0$ ).

### Procedimiento:

- ▶ Iniciamos con  $\mathbf{x} = [1, 1, \dots, 1]^T$
- ▶ Generamos la secuencia

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{A}\mathbf{x}_k, \quad \mathbf{x}_{k+1} = \frac{1}{c_{k+1}} \mathbf{y}_k$$

donde  $c_{k+1} = \|\mathbf{y}_k\|_\infty$

### Entonces:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{x}_k = \mathbf{v}_1, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} c_k = \lambda_1$$

**Ejemplo:**

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Con  $\sigma(\mathbf{A}) = \{4, 1\}$ . Tomemos  $\mathbf{x}_0 = [1, 1]^\top$ :

$$\mathbf{Ax}_0 = \begin{bmatrix} -5 \\ 13 \end{bmatrix} = 13[-0.38462, 1]^\top = c_1 \mathbf{x}_1$$

$$\mathbf{Ax}_1 = \begin{bmatrix} -2.23077 \\ 4.69231 \end{bmatrix} = 4.69231[-0.47541, 1]^\top = c_2 \mathbf{x}_2$$

$$\mathbf{Ax}_2 = \begin{bmatrix} -2.04918 \\ 4.14754 \end{bmatrix} = 4.14754[-0.49407, 1]^\top = c_3 \mathbf{x}_3$$

$$\mathbf{Ax}_3 = \begin{bmatrix} -2.01186 \\ 4.03557 \end{bmatrix} = 4.03557[-0.49853, 1]^\top = c_4 \mathbf{x}_4$$

$$\mathbf{Ax}_4 = \begin{bmatrix} -2.00294 \\ 4.00881 \end{bmatrix} = 4.00881[-0.49963, 1]^\top = c_5 \mathbf{x}_5$$

$$\mathbf{Ax}_5 = \begin{bmatrix} -2.00073 \\ 4.00220 \end{bmatrix} = 4.00220[-0.49991, 1]^\top = c_6 \mathbf{x}_6$$

**Resulta:**

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{x}_k = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} c_k = 4$$

---

### Ejemplo:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Con  $\sigma(\mathbf{A}) = \{4, 1\}$ . Tomemos  $\mathbf{x}_0 = [1, 1]^\top$ :

$$\mathbf{Ax}_0 = \begin{bmatrix} -5 \\ 13 \end{bmatrix} = 13[-0.38462, 1]^\top = c_1 \mathbf{x}_1$$

$$\mathbf{Ax}_1 = \begin{bmatrix} -2.23077 \\ 4.69231 \end{bmatrix} = 4.69231[-0.47541, 1]^\top = c_2 \mathbf{x}_2$$

$$\mathbf{Ax}_2 = \begin{bmatrix} -2.04918 \\ 4.14754 \end{bmatrix} = 4.14754[-0.49407, 1]^\top = c_3 \mathbf{x}_3$$

$$\mathbf{Ax}_3 = \begin{bmatrix} -2.01186 \\ 4.03557 \end{bmatrix} = 4.03557[-0.49853, 1]^\top = c_4 \mathbf{x}_4$$

$$\mathbf{Ax}_4 = \begin{bmatrix} -2.00294 \\ 4.00881 \end{bmatrix} = 4.00881[-0.49963, 1]^\top = c_5 \mathbf{x}_5$$

$$\mathbf{Ax}_5 = \begin{bmatrix} -2.00073 \\ 4.00220 \end{bmatrix} = 4.00220[-0.49991, 1]^\top = c_6 \mathbf{x}_6$$

**Resulta:**

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{x}_k = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} c_k = 4$$

---

### Desventajas:

- ▶ No se sabe al inicio si  $\mathbf{A}$  tiene un autovalor dominante.
- ▶ No se conoce cómo debe elegirse  $\mathbf{x}_0$  para que tenga una contribución no nula del autovector asociado al autovalor dominante, si existe.

## Método de las potencias: código

```
1 #!/usr/bin/env python3
2 import numpy as np
3
4 def iter_potencia(A, num_iteraciones):
5     n = A.shape[0]
6     # Inicializar un vector unitario de tamaño n
7     x = np.ones(n)
8
9     for _ in range(num_iteraciones):
10         # Multiplicar la matriz A por el vector x
11         y = np.dot(A, x)
12         # Obtener la norma máxima
13         y_abs = np.abs(y)
14         c = y_abs.max()
15         # Normalizar el vector resultante
16         x = y / c
17
18     # Devolver el autovalor dominante y el autovector
19     # correspondiente
20     return c, x
```

```
22 # Ejemplo de uso
23 # Definir una matriz de ejemplo
24 A = np.array([[0, 11, -5],
25               [-2, 17, -7],
26               [-4, 26, -10]])
27
28 # Especificar el número de iteraciones
29 num_iteraciones = 100
30
31 # Aplicar el algoritmo de las potencias
32 autovalor, autovector = iter_potencia(A, num_iteraciones)
33
34 print(f"Autovalor dominante: {autovalor}")
35 print("Autovector correspondiente:")
36 print(autovector)
```

```
$ ./potencias.py
Autovalor dominante: 3.9999999999999876
Autovector correspondiente:
[0.4 0.6 1. ]
```



### Teorema : .

Si  $\mathbf{A}$  es una matriz y  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$  son autovalores distintos de  $\mathbf{A}$  con autovectores asociados  $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k\}$ , entonces  $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k\}$  es un conjunto **linealmente independiente**.

## Teorema : .

Si  $\mathbf{A}$  es una matriz y  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$  son autovalores distintos de  $\mathbf{A}$  con autovectores asociados  $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k\}$ , entonces  $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k\}$  es un conjunto **linealmente independiente**.

## Definición : Conjunto ortogonal/ortonormal.

Un conjunto de vectores  $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k\}$  recibe el nombre de **ortogonal** si  $\langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j \rangle = 0$  para todo  $i \neq j$ . Si, además,  $\langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_i \rangle = 1$  para toda  $i = 1, 2, \dots, n$ , el conjunto recibe el nombre de **ortonormal**.

Dado que  $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = \|\mathbf{x}\|_2^2, \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ , el conjunto  $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k\}$  es ortonormal si y solo si:

$$\|\mathbf{v}_i\|_2 = 1 \text{ para todo } i = 1, 2, \dots, n$$

## Teorema : .

Si  $\mathbf{A}$  es una matriz y  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$  son autovalores distintos de  $\mathbf{A}$  con autovectores asociados  $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k\}$ , entonces  $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k\}$  es un conjunto **linealmente independiente**.

## Definición : Conjunto ortogonal/ortonormal.

Un conjunto de vectores  $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k\}$  recibe el nombre de **ortogonal** si  $\langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j \rangle = 0$  para todo  $i \neq j$ . Si, además,  $\langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_i \rangle = 1$  para toda  $i = 1, 2, \dots, n$ , el conjunto recibe el nombre de **ortonormal**.

Dado que  $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = \|\mathbf{x}\|_2^2, \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ , el conjunto  $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k\}$  es ortonormal si y solo si:

$$\|\mathbf{v}_i\|_2 = 1 \text{ para todo } i = 1, 2, \dots, n$$

## Teorema : Proceso de Gram-Schmidt.

Sea  $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_k\}$  un conjunto de  $k$  vectores linealmente independientes en  $\mathbb{R}^n$ . Entonces,  $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k\}$  definido mediante:

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{x}_1$$

$$\mathbf{v}_2 = \mathbf{x}_2 - \frac{\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{x}_2 \rangle}{\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1 \rangle} \mathbf{v}_1$$

$$\mathbf{v}_3 = \mathbf{x}_3 - \frac{\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{x}_3 \rangle}{\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1 \rangle} \mathbf{v}_1 - \frac{\langle \mathbf{v}_2, \mathbf{x}_3 \rangle}{\langle \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_2 \rangle} \mathbf{v}_2$$

$$\vdots$$

$$\mathbf{v}_k = \mathbf{x}_k - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\langle \mathbf{v}_i, \mathbf{x}_k \rangle}{\langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_i \rangle} \mathbf{v}_i$$

es un conjunto de  $k$  vectores ortogonales en  $\mathbb{R}^n$ .

**Definición : Matriz ortogonal.**

Se dice que una matriz  $Q$  es **ortogonal** si sus columnas  $\{q_1, q_2, \dots, q_n\}$  forman un conjunto ortonormal en  $\mathbb{R}^n$ .

### Definición : Matriz ortogonal.

Se dice que una matriz  $Q$  es **ortogonal** si sus columnas  $\{q_1, q_2, \dots, q_n\}$  forman un conjunto ortonormal en  $\mathbb{R}^n$ .

### Propiedades:

- ▶  $Q$  es invertible con  $Q^{-1} = Q^T$
- ▶  $\forall x, y \in \mathbb{R}^n, \langle Qx, Qy \rangle = \langle x, y \rangle$
- ▶  $\forall x \in \mathbb{R}^n, \|Qx\|_2 = \|x\|_2$
- ▶ Cualquier matriz invertible  $Q$  con  $Q^{-1} = Q^T$  es ortogonal.

### Definición : Matriz ortogonal.

Se dice que una matriz  $Q$  es **ortogonal** si sus columnas  $\{q_1, q_2, \dots, q_n\}$  forman un conjunto ortonormal en  $\mathbb{R}^n$ .

### Propiedades:

- ▶  $Q$  es invertible con  $Q^{-1} = Q^T$
- ▶  $\forall x, y \in \mathbb{R}^n, \langle Qx, Qy \rangle = \langle x, y \rangle$
- ▶  $\forall x \in \mathbb{R}^n, \|Qx\|_2 = \|x\|_2$
- ▶ Cualquier matriz invertible  $Q$  con  $Q^{-1} = Q^T$  es ortogonal.

### Definición : Matriz similar.

Dos matrices  $A$  y  $B$  son **similares** si existe una matriz no singular  $S$  con  $A = S^{-1}BS$ .

### Definición : Matriz ortogonal.

Se dice que una matriz  $Q$  es **ortogonal** si sus columnas  $\{q_1, q_2, \dots, q_n\}$  forman un conjunto ortonormal en  $\mathbb{R}^n$ .

### Propiedades:

- ▶  $Q$  es invertible con  $Q^{-1} = Q^T$
- ▶  $\forall x, y \in \mathbb{R}^n, \langle Qx, Qy \rangle = \langle x, y \rangle$
- ▶  $\forall x \in \mathbb{R}^n, \|Qx\|_2 = \|x\|_2$
- ▶ Cualquier matriz invertible  $Q$  con  $Q^{-1} = Q^T$  es ortogonal.

### Definición : Matriz similar.

Dos matrices  $A$  y  $B$  son **similares** si existe una matriz no singular  $S$  con  $A = S^{-1}BS$ .

### Teorema : .

*Si  $A$  y  $B$  son matrices similares con  $A = S^{-1}BS$ , y  $\lambda$  es un autovalor de  $A$  con el autovector  $v$  asociado, entonces  $\lambda$  es un autovalor de  $B$  con autovector asociado  $Sv$ .*

### Definición : Matriz ortogonal.

Se dice que una matriz  $Q$  es **ortogonal** si sus columnas  $\{q_1, q_2, \dots, q_n\}$  forman un conjunto ortonormal en  $\mathbb{R}^n$ .

### Propiedades:

- ▶  $Q$  es invertible con  $Q^{-1} = Q^T$
- ▶  $\forall x, y \in \mathbb{R}^n, \langle Qx, Qy \rangle = \langle x, y \rangle$
- ▶  $\forall x \in \mathbb{R}^n, \|Qx\|_2 = \|x\|_2$
- ▶ Cualquier matriz invertible  $Q$  con  $Q^{-1} = Q^T$  es ortogonal.

### Definición : Matriz similar.

Dos matrices  $A$  y  $B$  son **similares** si existe una matriz no singular  $S$  con  $A = S^{-1}BS$ .

### Teorema : .

*Si  $A$  y  $B$  son matrices similares con  $A = S^{-1}BS$ , y  $\lambda$  es un autovalor de  $A$  con el autovector  $v$  asociado, entonces  $\lambda$  es un autovalor de  $B$  con autovector asociado  $Sv$ .*

### Teorema : .

*Una matriz  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es similar a una matriz diagonal  $D$  si y sólo si  $A$  tiene  $n$  autovectores linealmente independientes. En este caso  $D = S^{-1}AS$ , donde las columnas de  $S$  son los autovectores y el  $i$ -ésimo elemento diagonal de  $D$  es el autovalor que corresponde a la  $i$ -ésima columna de  $S$ .*



### Teorema : Teorema de Schur.

Sea  $\mathbf{A}$  una matriz arbitraria. Existe una matriz no singular  $\mathbf{U}$  con la propiedad de que

$$\mathbf{T} = \mathbf{U}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{U}$$

donde  $\mathbf{T}$  es una matriz triangular superior, cuyas entradas diagonales consisten en autovalores de  $\mathbf{A}$ .

Se cumple  $\|\mathbf{U}\mathbf{x}\|_2 = \|\mathbf{x}\|_2, \forall \mathbf{x} \mapsto$  **matrices unitarias**.

### Teorema : Teorema de Schur.

Sea  $\mathbf{A}$  una matriz arbitraria. Existe una matriz no singular  $\mathbf{U}$  con la propiedad de que

$$\mathbf{T} = \mathbf{U}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{U}$$

donde  $\mathbf{T}$  es una matriz triangular superior, cuyas entradas diagonales consisten en autovalores de  $\mathbf{A}$ .

Se cumple  $\|\mathbf{U}\mathbf{x}\|_2 = \|\mathbf{x}\|_2, \forall \mathbf{x} \mapsto$  **matrices unitarias**.

**Factorización QR:**  $\mathbf{A} = \mathbf{Q}\mathbf{R}$ , donde:

- ▶  $\mathbf{Q}$  es una matriz ortogonal
- ▶  $\mathbf{R}$  es una matriz triangular superior

### Teorema : Teorema de Schur.

Sea  $\mathbf{A}$  una matriz arbitraria. Existe una matriz no singular  $\mathbf{U}$  con la propiedad de que

$$\mathbf{T} = \mathbf{U}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{U}$$

donde  $\mathbf{T}$  es una matriz triangular superior, cuyas entradas diagonales consisten en autovalores de  $\mathbf{A}$ .

Se cumple  $\|\mathbf{U}\mathbf{x}\|_2 = \|\mathbf{x}\|_2, \forall \mathbf{x} \mapsto$  **matrices unitarias**.

**Factorización QR:**  $\mathbf{A} = \mathbf{Q}\mathbf{R}$ , donde:

- ▶  $\mathbf{Q}$  es una matriz ortogonal
- ▶  $\mathbf{R}$  es una matriz triangular superior

**Cálculo de la factorización:**

- ▶ Ortogonalización de Gram-Schmidt
- ▶ Reflexiones de Householder

**Ortogonalización de Gram-Schmidt:**

$$\mathbf{A} = [\mathbf{a}_1 | \mathbf{a}_2 | \cdots | \mathbf{a}_n]$$

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{a}_1, \quad \mathbf{e}_1 = \frac{\mathbf{u}_1}{\|\mathbf{u}_1\|}$$

$$\mathbf{u}_2 = \mathbf{a}_2 - \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{a}_2 \rangle, \quad \mathbf{e}_2 = \frac{\mathbf{u}_2}{\|\mathbf{u}_2\|}$$

$$\mathbf{u}_3 = \mathbf{a}_3 - \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{a}_3 \rangle - \langle \mathbf{e}_2, \mathbf{a}_3 \rangle, \quad \mathbf{e}_3 = \frac{\mathbf{u}_3}{\|\mathbf{u}_3\|}$$

$\vdots$

$$\mathbf{u}_k = \mathbf{a}_k - \sum_{j=1}^{k-1} \langle \mathbf{e}_j, \mathbf{a}_k \rangle, \quad \mathbf{e}_k = \frac{\mathbf{u}_k}{\|\mathbf{u}_k\|}$$

### Teorema : Teorema de Schur.

Sea  $\mathbf{A}$  una matriz arbitraria. Existe una matriz no singular  $\mathbf{U}$  con la propiedad de que

$$\mathbf{T} = \mathbf{U}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{U}$$

donde  $\mathbf{T}$  es una matriz triangular superior, cuyas entradas diagonales consisten en autovalores de  $\mathbf{A}$ .

Se cumple  $\|\mathbf{U}\mathbf{x}\|_2 = \|\mathbf{x}\|_2, \forall \mathbf{x} \mapsto$  **matrices unitarias**.

**Factorización QR:**  $\mathbf{A} = \mathbf{Q}\mathbf{R}$ , donde:

- ▶  $\mathbf{Q}$  es una matriz ortogonal
- ▶  $\mathbf{R}$  es una matriz triangular superior

**Cálculo de la factorización:**

- ▶ Ortogonalización de Gram-Schmidt
- ▶ Reflexiones de Householder

**Ortogonalización de Gram-Schmidt:**

$$\mathbf{A} = [\mathbf{a}_1 | \mathbf{a}_2 | \cdots | \mathbf{a}_n]$$

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{a}_1, \quad \mathbf{e}_1 = \frac{\mathbf{u}_1}{\|\mathbf{u}_1\|}$$

$$\mathbf{u}_2 = \mathbf{a}_2 - \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{a}_2 \rangle \mathbf{e}_1, \quad \mathbf{e}_2 = \frac{\mathbf{u}_2}{\|\mathbf{u}_2\|}$$

$$\mathbf{u}_3 = \mathbf{a}_3 - \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{a}_3 \rangle \mathbf{e}_1 - \langle \mathbf{e}_2, \mathbf{a}_3 \rangle \mathbf{e}_2, \quad \mathbf{e}_3 = \frac{\mathbf{u}_3}{\|\mathbf{u}_3\|}$$

$\vdots$

$$\mathbf{u}_k = \mathbf{a}_k - \sum_{j=1}^{k-1} \langle \mathbf{e}_j, \mathbf{a}_k \rangle \mathbf{e}_j, \quad \mathbf{e}_k = \frac{\mathbf{u}_k}{\|\mathbf{u}_k\|}$$

Ahora podemos expresar los  $\mathbf{a}_i$  en la nueva base:

$$\mathbf{a}_1 = \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{a}_1 \rangle \mathbf{e}_1$$

$$\mathbf{a}_1 = \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{a}_2 \rangle \mathbf{e}_1 + \langle \mathbf{e}_2, \mathbf{a}_2 \rangle \mathbf{e}_2$$

$$\mathbf{a}_3 = \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{a}_3 \rangle \mathbf{e}_1 + \langle \mathbf{e}_2, \mathbf{a}_3 \rangle \mathbf{e}_2 + \langle \mathbf{e}_3, \mathbf{a}_3 \rangle \mathbf{e}_3$$

$\dots$

$$\mathbf{a}_k = \sum_{j=1}^k \langle \mathbf{e}_j, \mathbf{a}_k \rangle \mathbf{e}_j$$

Resulta  $\mathbf{A} = \mathbf{Q}\mathbf{R}$ , con  $\mathbf{Q} = [\mathbf{e}_1 | \mathbf{e}_2 | \cdots | \mathbf{e}_n]$ , y

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \langle \mathbf{e}_1 \mathbf{a}_1 \rangle & \langle \mathbf{e}_1 \mathbf{a}_2 \rangle & \langle \mathbf{e}_1 \mathbf{a}_3 \rangle & \cdots & \langle \mathbf{e}_1 \mathbf{a}_n \rangle \\ 0 & \langle \mathbf{e}_2 \mathbf{a}_2 \rangle & \langle \mathbf{e}_2 \mathbf{a}_3 \rangle & \cdots & \langle \mathbf{e}_2 \mathbf{a}_n \rangle \\ 0 & 0 & \langle \mathbf{e}_3 \mathbf{a}_3 \rangle & \cdots & \langle \mathbf{e}_3 \mathbf{a}_n \rangle \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \langle \mathbf{e}_n, \mathbf{a}_n \rangle \end{bmatrix}$$

Resulta  $A = QR$ , con  $Q = [e_1|e_2|\dots|e_n]$ , y

$$R = \begin{bmatrix} \langle e_1 a_1 \rangle & \langle e_1 a_2 \rangle & \langle e_1 a_3 \rangle & \cdots & \langle e_1 a_n \rangle \\ 0 & \langle e_2 a_2 \rangle & \langle e_2 a_3 \rangle & \cdots & \langle e_2 a_n \rangle \\ 0 & 0 & \langle e_3 a_3 \rangle & \cdots & \langle e_3 a_n \rangle \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \langle e_n a_n \rangle \end{bmatrix}$$

### Código Python:

```
1 #!/usr/bin/env python3
2
3 import numpy as np
4
5 def gram_schmidt_qr(A):
6     m, n = A.shape
7     Q = np.zeros((m, n))
8     R = np.zeros((n, n))
```

```
10     for j in range(n):
11         v = A[:, j]
12         for i in range(j):
13             R[i, j] = np.dot(Q[:, i], A[:, j])
14             v = v - R[i, j] * Q[:, i]
15         R[j, j] = np.linalg.norm(v)
16         Q[:, j] = v / R[j, j]
17
18     return Q, R
19
20 # Ejemplo de uso
21 # Definir una matriz de ejemplo
22 A = np.array([[1, 4, 3],
23               [2, 5, 1],
24               [3, 6, 2]])
25
26 # Aplicar la factorización QR usando el método
27 # de Gram-Schmidt
28 Q, R = gram_schmidt_qr(A)
29
30 print("Matriz Q:")
31 print(Q)
32 print("Matriz R:")
33 print(R)
```

## Método QR para el cálculo de autovalores:

Algoritmo recursivo que computa  $\{\mathbf{A}_k\}_{k=0}^{\infty}$  con los siguientes pasos:

1.  $\mathbf{A}_0 = \mathbf{A}$
2. Para  $k = 0, 1, 2, \dots$ , dado  $\mathbf{A}_k$ :
  - 2.1 Calcular  $\mathbf{Q}_{k+1}\mathbf{R}_{k+1} = \mathbf{A}_k$
  - 2.2 Definir  $\mathbf{A}_{k+1} = \mathbf{Q}_{k+1}\mathbf{R}_{k+1}$

## Método QR para el cálculo de autovalores:

Algoritmo recursivo que computa  $\{A_k\}_{k=0}^{\infty}$  con los siguientes pasos:

1.  $A_0 = A$
2. Para  $k = 0, 1, 2, \dots$ , dado  $A_k$ :
  - 2.1 Calcular  $Q_{k+1}R_{k+1} = A_k$
  - 2.2 Definir  $A_{k+1} = Q_{k+1}R_{k+1}$

### Teorema : Convergencia.

Si los autovalores de una matriz  $A$  verifican que

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| > \dots > |\lambda_n| > 0$$

entonces la sucesión de matrices equivalentes contruidas con el algoritmo QR converge a una matriz triangular superior.

## Código Python:

---

```
1 #!/usr/bin/env python3
2 import numpy as np
3
4 def algoritmo_qr(A, num_iter):
5     n = A.shape[0]
6     autovalores = np.zeros(n, dtype=np.complex128)
7     for _ in range(num_iter):
8         Q, R = np.linalg.qr(A)
9         A = np.dot(R, Q)
10    for i in range(n):
11        autovalores[i] = A[i, i]
12    return autovalores
13
14 A = np.array([[1, 2, 3],
15              [4, 5, 6],
16              [7, 8, 9]])
17
18 num_iter = 100
19 autovalores = algoritmo_qr(A, num_iter)
20 print("Autovalores:")
21 print(autovalores)
```

---



- ▶ R.L. Burden, D.J. Faires y A.M. Burden. **Análisis numérico**. 10.<sup>a</sup> ed. Mexico: Cengage Learning, 2017. Capítulo 9.
- ▶ Carlos Moreno González. **Introducción al cálculo numérico**. Madrid, España: Universidad Nacional de Educación a Distancia, 2014. Capítulo 3.
- ▶ B. Bradie. **A Friendly Introduction to Numerical Analysis**. New Jersey, United States: Pearson Education Inc., 2006. Capítulo 4.
- ▶ A.J. Salgado y S.M. Wise. **Classical Numerical Analysis**. Cambridge, United Kingdom: Cambridge University Press, 2023. doi: [10.1017/9781108942607](https://doi.org/10.1017/9781108942607). Capítulo 8.
- ▶ A. Quarteroni, R. Sacco y F. Saleri. **Numerical Mathematics**. New York, United States: Springer-Verlag, 2000. Capítulo 5.