Transformada de Laplace

Transformada de Laplace. Transformada inversa. Transformación de problemas con condiciones iniciales.

Manuel Carlevaro

Departamento de Ingeniería Mecánica

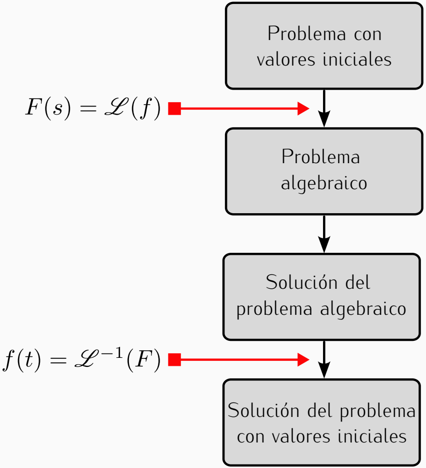
Grupo de Materiales Granulares - UTN FRLP

manuel.carlevaro@gmail.com

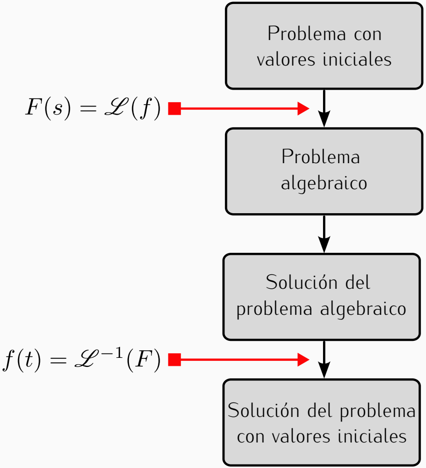
Cálculo Avanzado • 2023

Transformada de Laplace

Motivación:



Motivación:



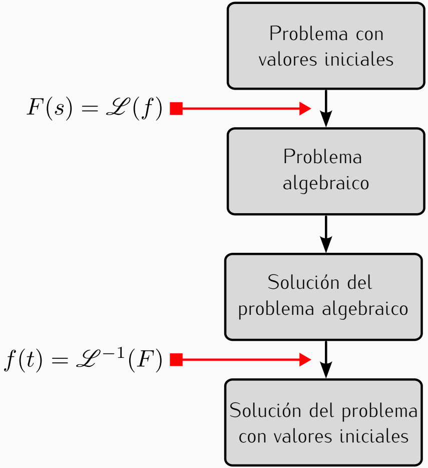
Definición : Transformada de Laplace.

Sea $f(t)$ definida para todo $t \geq 0$. Su transformada de Laplace se define:

$$F(s) = \mathscr{L}(f) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt$$

Transformada de Laplace

Motivación:



Definición : Transformada de Laplace.

Sea $f(t)$ definida para todo $t \geq 0$. Su transformada de Laplace se define:

$$F(s) = \mathscr{L}(f) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt$$

Teorema : Existencia.

Si $f(t)$ está definida y es continua a tramos en cada intervalo finito de $\mathbb{R}^+$, y satisface la condición

$$|f(t)| \leq Me^{kt}$$

para algunas constantes, M y k, entonces existe $\mathscr{L}(f)$, $\forall s > k$.

Ejemplos

$f(t) = 1,\ t \geq 0$

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}(f) = \mathscr{L}(1) &= \int_0^\infty e^{-st}\,dt \\
&= \lim_{T\to\infty} \int_0^\infty 1 \cdot e^{-st}\,dt \\
&= \lim_{T\to\infty} \left[-\frac{1}{s}e^{-st}\right]_0^T \\
&= \lim_{T\to\infty} \left[-\frac{1}{s}e^{-sT} + \frac{1}{s}e^{0}\right] \\
&= \frac{1}{s}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathscr{L}(1) = \frac{1}{s}}$$

$f(t) = 1,\ t \geq 0$

$$
\begin{aligned}
\mathscr{L}(f) = \mathscr{L}(1) &= \int_0^{\infty} e^{-st}\,dt \\
&= \lim_{T\to\infty} \int_0^{\infty} 1 \cdot e^{-st}\,dt \\
&= \lim_{T\to\infty} \left[-\frac{1}{s}e^{-st}\right]_0^T \\
&= \lim_{T\to\infty} \left[-\frac{1}{s}e^{-sT} + \frac{1}{s}e^{0}\right] \\
&= \frac{1}{s}
\end{aligned}
$$

$$
\boxed{\mathscr{L}(1) = \frac{1}{s}}
$$

- E. Kreyszig, H. Kreyszig y E.J. Norminton. *Advanced Engineering Mathematics*. Hoboken, USA: John Wiley & Sons, Inc, 2011. Capítulo 11 (11.7 – 11.9).
- Peter V O'Neil. *Matemáticas avanzadas para ingeniería*. 7.ª ed. México, DF: CENGAGE Learning Custom Publishing, 2012. Capítulo 3.
- K A Stroud y Dexter J Booth. *Advanced Engineering Mathematics*. 6.ª ed. London, England: Bloomsbury Academic, 2020. Capítulos 9.