

# APROXIMACIÓN POR MÍNIMOS CUADRADOS

## AJUSTE CONTINUO POLINÓMICO

---

Manuel Carlevaro

Departamento de Ingeniería Mecánica

Grupo de Materiales Granulares - UTN FRLP

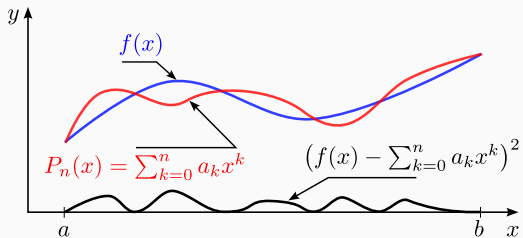
manuel.carlevaro@gmail.com

Cálculo Avanzado • 2023

 · X<sub>Y</sub>LaTeX · 

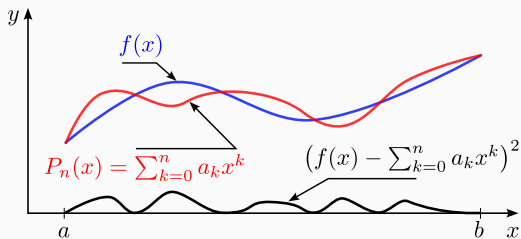
$f(x) \in \mathbf{C}[a, b]$ , hallar  $P_n(x)$  que minimize:

$$\int_a^b [f(x) - P_n(x)]^2 dx$$



$f(x) \in \mathbf{C}[a, b]$ , hallar  $P_n(x)$  que minimize:

$$\int_a^b [f(x) - P_n(x)]^2 dx$$

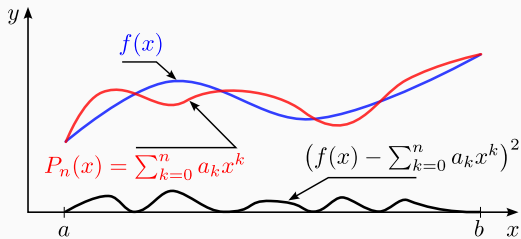


$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = \sum_{k=0}^n a_k x^k$$

$$E \equiv E_2(a_0, a_1, \cdots, a_n) = \int_a^b \left( f(x) - \sum_{k=0}^n a_k x^k \right)^2 dx$$

$f(x) \in \mathbf{C}[a, b]$ , hallar  $P_n(x)$  que minimize:

$$\int_a^b [f(x) - P_n(x)]^2 dx$$



$$\frac{\partial E}{\partial a_j} = 0 \quad \text{para cada } j = 0, 1, \dots, n$$

$$E = \int_a^b [f(x)]^2 dx - 2 \sum_{k=0}^n a_k \int_a^b x^k f(x) dx + \int_a^b \left( \sum_{k=0}^n a_k x^k \right)^2 dx$$

$$\frac{\partial E}{\partial a_j} = -2 \int_a^b x^j f(x) dx + 2 \sum_{k=0}^n a_k \int_a^b x^{j+k} dx$$

Ecuaciones normales lineales  $(n+1)$ :

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = \sum_{k=0}^n a_k x^k$$

$$\sum_{k=0}^n a_k \int_a^b x^{j+k} dx = \int_a^b x^j f(x) dx$$

$$E \equiv E_2(a_0, a_1, \dots, a_n) = \int_a^b \left( f(x) - \sum_{k=0}^n a_k x^k \right)^2 dx$$

para cada  $j = 0, 1, \dots, n$ .

**Ejemplo:** aproximar  $f(x) = \sin \pi x$  por un polinomio de grado 2 en  $[0, 1]$ .

Ecuaciones normales:

$$a_0 \int_0^1 1 dx + a_1 \int_0^1 x dx + a_2 \int_0^1 x^2 dx = \int_0^1 \sin \pi x dx$$

$$a_0 \int_0^1 x dx + a_1 \int_0^1 x^2 dx + a_2 \int_0^1 x^3 dx = \int_0^1 x \sin \pi x dx$$

$$a_0 \int_0^1 x^2 dx + a_1 \int_0^1 x^3 dx + a_2 \int_0^1 x^4 dx = \int_0^1 x^2 \sin \pi x dx$$

$$a_0 + \frac{1}{2}a_1 + \frac{1}{3}a_2 = \frac{2}{\pi}$$

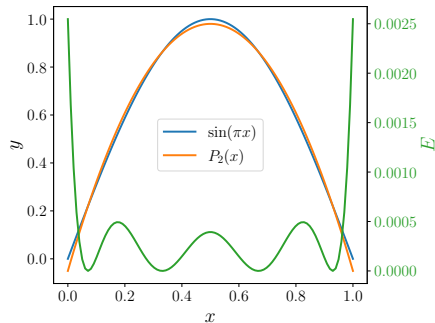
$$\frac{1}{2}a_0 + \frac{1}{3}a_1 + \frac{1}{4}a_2 = \frac{1}{\pi}$$

$$\frac{1}{3}a_0 + \frac{1}{4}a_1 + \frac{1}{5}a_2 = \frac{\pi^2 - 4}{\pi^3}$$

Solución

$$a_0 = \frac{12\pi^2 - 120}{\pi^3} \approx -0.050465$$

$$a_1 = -a_2 = \frac{720 - 60\pi^2}{\pi^3} \approx 4.12251$$



## Problemas:

- ▶ matriz de Hilbert

$$H_{ij} = \int_a^b x^{j+k+1} dx = \frac{b^{j+k+1} - a^{j+k+1}}{j+k+1}$$

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

$$\text{cond}(\mathbf{H}) \approx 524.05678$$

## Problemas:

- ▶ matriz de Hilbert

$$H_{ij} = \int_a^b x^{j+k+1} dx = \frac{b^{j+k+1} - a^{j+k+1}}{j+k+1}$$

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

$$\text{cond}(\mathbf{H}) \approx 524.05678$$

- ▶ No es fácil obtener  $P_{n+1}(x)$  si ya tenemos  $P_n(x)$

## Problemas:

- ▶ matriz de Hilbert

$$H_{ij} = \int_a^b x^{j+k+1} dx = \frac{b^{j+k+1} - a^{j+k+1}}{j+k+1}$$

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

$$\text{cond}(\mathbf{H}) \approx 524.05678$$

- ▶ No es fácil obtener  $P_{n+1}(x)$  si ya tenemos  $P_n(x)$

### Definición : Funciones linealmente independientes .

Se dice que el conjunto de funciones  $\{\phi_0, \dots, \phi_n\}$  es **linealmente independiente** (LI) en  $[a, b]$  si

$$P(x) = c_0\phi_0(x) + c_1\phi_1(x) + \dots + c_n\phi_n(x) = 0, \forall x \in [a, b]$$

entonces  $c_0 = c_1 = \dots = c_n = 0$ . De lo contrario, se dice que el conjunto de funciones es **linealmente dependiente**.



## Problemas:

- matriz de Hilbert

$$H_{ij} = \int_a^b x^{j+k+1} dx = \frac{b^{j+k+1} - a^{j+k+1}}{j+k+1}$$

$$H = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

$$\text{cond}(H) \approx 524.05678$$

- No es fácil obtener  $P_{n+1}(x)$  si ya tenemos  $P_n(x)$

### Definición : Funciones linealmente independientes .

Se dice que el conjunto de funciones  $\{\phi_0, \dots, \phi_n\}$  es **linealmente independiente** (LI) en  $[a, b]$  si

$$P(x) = c_0\phi_0(x) + c_1\phi_1(x) + \dots + c_n\phi_n(x) = 0, \forall x \in [a, b]$$

entonces  $c_0 = c_1 = \dots = c_n = 0$ . De lo contrario, se dice que el conjunto de funciones es **linealmente dependiente**.

### Teorema : Polinomios LI.

*Si para cada  $j = 0, 1, \dots, n$ ,  $\phi_j(x)$  es un polinomio de grado  $j$ , entonces el conjunto  $\{\phi_0, \dots, \phi_n\}$  es LI en cualquier intervalo  $[a, b]$ .*

**Ejemplo.** Si  $\phi_0(x) = 2$ ,  $\phi_1(x) = x - 3$ ,  $\phi_2(x) = x^2 + 2x + 7$  y  $Q(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$ , mostrar que existen constantes  $c_0, c_1, c_2$  tales que  $Q(x) = c_0\phi_0(x) + c_1\phi_1(x) + c_2\phi_2(x)$ .

**Ejemplo.** Si  $\phi_0(x) = 2$ ,  $\phi_1(x) = x - 3$ ,  $\phi_2(x) = x^2 + 2x + 7$  y  $Q(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$ , mostrar que existen constantes  $c_0, c_1, c_2$  tales que  $Q(x) = c_0\phi_0(x) + c_1\phi_1(x) + c_2\phi_2(x)$ .

Por el teorema anterior,  $\{\phi_0, \phi_1, \phi_2\}$  es LI en cualquier  $[a, b]$ . Además:

$$1 = \frac{1}{2}\phi_0(x)$$

$$x = \phi_1(x) + 3 = \phi_1(x) + \frac{3}{2}\phi_0(x)$$

$$x^2 = \phi_2(x) - 2x - 7$$

$$= \phi_2(x) - 2\left[\phi_1(x) + \frac{3}{2}\phi_0(x)\right] - 7\left[\frac{1}{2}\phi_0(x)\right]$$

$$= \phi_2(x) - 2\phi_1(x) - \frac{13}{2}\phi_0(x)$$

**Ejemplo.** Si  $\phi_0(x) = 2$ ,  $\phi_1(x) = x - 3$ ,  $\phi_2(x) = x^2 + 2x + 7$  y  $Q(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$ , mostrar que existen constantes  $c_0, c_1, c_2$  tales que  $Q(x) = c_0\phi_0(x) + c_1\phi_1(x) + c_2\phi_2(x)$ .

Por el teorema anterior,  $\{\phi_0, \phi_1, \phi_2\}$  es LI en cualquier

Entonces:

$[a, b]$ . Además:

$$1 = \frac{1}{2}\phi_0(x)$$

$$x = \phi_1(x) + 3 = \phi_1(x) + \frac{3}{2}\phi_0(x)$$

$$x^2 = \phi_2(x) - 2x - 7$$

$$= \phi_2(x) - 2\left[\phi_1(x) + \frac{3}{2}\phi_0(x)\right] - 7\left[\frac{1}{2}\phi_0(x)\right]$$

$$= \phi_2(x) - 2\phi_1(x) - \frac{13}{2}\phi_0(x)$$

$$\begin{aligned} Q(x) &= a_0\left[\frac{1}{2}\phi_0\right] + a_1\left[\phi_1(x) + \frac{3}{2}\phi_0(x)\right] \\ &\quad + a_2\left[\phi_2(x) - 2\phi_1(x) - \frac{13}{2}\phi_0(x)\right] \\ &= \left(\frac{1}{2}a_0 + \frac{3}{2}a_1 - \frac{13}{2}a_2\right)\phi_0(x) \\ &\quad + [a_1 - 2a_2]\phi_1(x) + a_2\phi_2(x) \end{aligned}$$

**Ejemplo.** Si  $\phi_0(x) = 2$ ,  $\phi_1(x) = x - 3$ ,  $\phi_2(x) = x^2 + 2x + 7$  y  $Q(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$ , mostrar que existen constantes  $c_0, c_1, c_2$  tales que  $Q(x) = c_0\phi_0(x) + c_1\phi_1(x) + c_2\phi_2(x)$ .

Por el teorema anterior,  $\{\phi_0, \phi_1, \phi_2\}$  es LI en cualquier

Entonces:

$[a, b]$ . Además:

$$1 = \frac{1}{2}\phi_0(x)$$

$$x = \phi_1(x) + 3 = \phi_1(x) + \frac{3}{2}\phi_0(x)$$

$$x^2 = \phi_2(x) - 2x - 7$$

$$= \phi_2(x) - 2\left[\phi_1(x) + \frac{3}{2}\phi_0(x)\right] - 7\left[\frac{1}{2}\phi_0(x)\right]$$

$$= \phi_2(x) - 2\phi_1(x) - \frac{13}{2}\phi_0(x)$$

$$\begin{aligned} Q(x) &= a_0\left[\frac{1}{2}\phi_0\right] + a_1\left[\phi_1(x) + \frac{3}{2}\phi_0(x)\right] \\ &\quad + a_2\left[\phi_2(x) - 2\phi_1(x) - \frac{13}{2}\phi_0(x)\right] \\ &= \left(\frac{1}{2}a_0 + \frac{3}{2}a_1 - \frac{13}{2}a_2\right)\phi_0(x) \\ &\quad + [a_1 - 2a_2]\phi_1(x) + a_2\phi_2(x) \end{aligned}$$

### Teorema : .

Si  $\Pi_n$  denota el conjunto de todos los polinomios de grado a lo sumo  $n$ , y  $\{\phi_0(x), \phi_1(x), \dots, \phi_n(x)\}$  es un conjunto de polinomios LI en  $\Pi_n$ , entonces **cualquier** polinomio en  $\Pi_n$  se puede escribir como combinación lineal de  $\phi_0(x), \phi_1(x), \dots, \phi_n(x)$ .

### Definición : Función de peso.

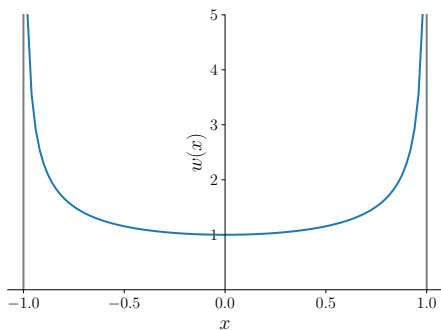
Una función integrable  $w$  se denomina **función de peso** en el intervalo  $I$  si  $w(x) \geq 0, \forall x \in I$ , pero  $w(x) \not\equiv 0$  en cualquier subintervalo de  $I$

### Definición : Función de peso.

Una función integrable  $w$  se denomina **función de peso** en el intervalo  $I$  si  $w(x) \geq 0, \forall x \in I$ , pero  $w(x) \not\equiv 0$  en cualquier subintervalo de  $I$

Ejemplo:

$$w(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$



### Definición : Funciones ortogonales.

Se dice que  $\{\phi_0, \phi_1, \dots, \phi_n\}$  es un **conjunto ortogonal de funciones** en el intervalo  $[a, b]$  respecto de la función de peso  $w(x)$  si

$$\langle \phi_k, \phi_j \rangle = \int_a^b w(x) \phi_k(x) \phi_j(x) dx = \begin{cases} 0, & j \neq k, \\ \alpha_j > 0, & j = k \end{cases}$$

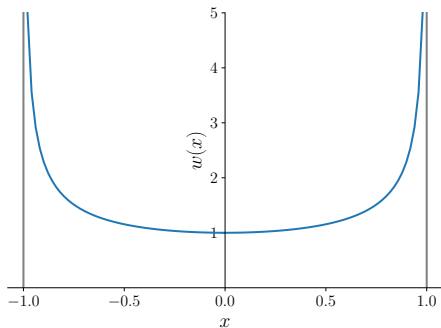
Si además  $\alpha_j = 1$  para cada  $j = 0, 1, 2, \dots, n$ , se dice que el conjunto es **ortonormal**.

### Definición : Función de peso.

Una función integrable  $w$  se denomina **función de peso** en el intervalo  $I$  si  $w(x) \geq 0, \forall x \in I$ , pero  $w(x) \not\equiv 0$  en cualquier subintervalo de  $I$

Ejemplo:

$$w(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$



### Definición : Funciones ortogonales.

Se dice que  $\{\phi_0, \phi_1, \dots, \phi_n\}$  es un **conjunto ortogonal de funciones** en el intervalo  $[a, b]$  respecto de la función de peso  $w(x)$  si

$$\langle \phi_k, \phi_j \rangle = \int_a^b w(x) \phi_k(x) \phi_j(x) dx = \begin{cases} 0, & j \neq k, \\ \alpha_j > 0, & j = k \end{cases}$$

Si además  $\alpha_j = 1$  para cada  $j = 0, 1, 2, \dots, n$ , se dice que el conjunto es **ortonormal**.

Ejemplo:  $\{\cos nx, \sin mx\}$ ,  $n, m = 0, 1, \dots$  es ortogonal en  $[-\pi, \pi]$  con  $w(x) = 1$ :

$$\begin{array}{l|l} \langle \cos nx, \cos mx \rangle = 0 & \langle \cos nx, \cos nx \rangle = \pi \\ \langle \sin nx, \sin mx \rangle = 0 & \langle \sin nx, \sin nx \rangle = \pi \\ \langle \cos nx, \sin mx \rangle = 0 & n \neq m \end{array}$$



### Teorema : .

Si  $\{\phi_0, \dots, \phi_n\}$  es un conjunto ortogonal de funciones en un intervalo  $[a, b]$  respecto de la función de peso  $w(x)$ , entonces la aproximación por mínimos cuadrados para  $f$  en  $[a, b]$  respecto de  $w$  es:

$$P(x) = \sum_{j=0}^n a_j \phi_j(x)$$

donde para cada  $j = 0, 1, \dots, n$ :

$$a_j = \frac{1}{\alpha_j} \langle f, \phi_j \rangle$$

### Teorema : .

Si  $\{\phi_0, \dots, \phi_n\}$  es un conjunto ortogonal de funciones en un intervalo  $[a, b]$  respecto de la función de peso  $w(x)$ , entonces la aproximación por mínimos cuadrados para  $f$  en  $[a, b]$  respecto de  $w$  es:

$$P(x) = \sum_{j=0}^n a_j \phi_j(x)$$

donde para cada  $j = 0, 1, \dots, n$ :

$$a_j = \frac{1}{\alpha_j} \langle f, \phi_j \rangle$$

### Teorema : .

El conjunto de polinomios  $\{\phi_0, \phi_1, \dots, \phi_n\}$  definido de la siguiente forma es ortogonal en  $[a, b]$  respecto de la función de peso  $w(x)$ :

$$\phi_0(x) \equiv 1, \quad \phi_1(x) = x - B_1, \quad \forall x \in [a, b]$$

donde

$$B_1 = \frac{\langle x\phi_0, \phi_0 \rangle}{\langle \phi_0, \phi_0 \rangle}$$

y cuando  $k \geq 2$ :

$$\phi_k(x) = (x - B_k)\phi_{k-1}(x) - C_k\phi_{k-2}(x), \quad \forall x \in [a, b]$$

donde

$$B_k = \frac{\langle x\phi_{k-1}, \phi_{k-1} \rangle}{\langle \phi_{k-1}, \phi_{k-1} \rangle} \quad \Bigg| \quad C_k = \frac{\langle x\phi_{k-1}, \phi_{k-2} \rangle}{\langle \phi_{k-2}, \phi_{k-2} \rangle}$$

(Proceso de Gram-Schmidt)

**Ejemplo:** polinomios de Legendre.

$\{P_n(x)\}$  es ortogonal en  $[-1, 1]$  con  $w(x) \equiv 1$ . Usando Gram-Schmidt con  $P_0(x) \equiv 1$ :

$$B_1 = \frac{\int_{-1}^1 x \, dx}{\int_{-1}^1 dx} = 0, \quad P_1(x) = (x - B_1)P_0(x) = x$$

**Ejemplo:** polinomios de Legendre.

$\{P_n(x)\}$  es ortogonal en  $[-1, 1]$  con  $w(x) \equiv 1$ . Usando Gram-Schmidt con  $P_0(x) \equiv 1$ :

$$B_1 = \frac{\int_{-1}^1 x \, dx}{\int_{-1}^1 dx} = 0, \quad P_1(x) = (x - B_1)P_0(x) = x$$

Luego:

$$B_2 = \frac{\int_{-1}^1 x^3 \, dx}{\int_{-1}^1 x^2 \, dx} = 0, \quad C_2(x) = \frac{\int_{-1}^1 x^2 \, dx}{\int_{-1}^1 1 \, dx} = \frac{1}{3}$$

$$\begin{aligned} P_2(x) &= (x - B_2)P_1(x) - C_2P_0(x) \\ &= (x - 0)x - \frac{1}{3}1 \\ &= x^2 - \frac{1}{3} \end{aligned}$$

**Ejemplo:** polinomios de Legendre.

$\{P_n(x)\}$  es ortogonal en  $[-1, 1]$  con  $w(x) \equiv 1$ . Usando Gram-Schmidt con  $P_0(x) \equiv 1$ :

$$B_1 = \frac{\int_{-1}^1 x \, dx}{\int_{-1}^1 dx} = 0, \quad P_1(x) = (x - B_1)P_0(x) = x$$

Luego:

$$B_2 = \frac{\int_{-1}^1 x^3 \, dx}{\int_{-1}^1 x^2 \, dx} = 0, \quad C_2(x) = \frac{\int_{-1}^1 x^2 \, dx}{\int_{-1}^1 1 \, dx} = \frac{1}{3}$$

$$\begin{aligned} P_2(x) &= (x - B_2)P_1(x) - C_2P_0(x) \\ &= (x - 0)x - \frac{1}{3}1 \\ &= x^2 - \frac{1}{3} \end{aligned}$$

$$P_3(x) = xP_2(x) - \frac{4}{15}P_1(x) = x^3 - \frac{3}{5}x$$

$$P_4(x) = x^4 - \frac{6}{7}x^2 + \frac{3}{35}, \quad P_5(x) = x^5 - \frac{10}{9}x^3 + \frac{5}{21}x$$

**Ejemplo:** polinomios de Legendre.

$\{P_n(x)\}$  es ortogonal en  $[-1, 1]$  con  $w(x) \equiv 1$ . Usando Gram-Schmidt con  $P_0(x) \equiv 1$ :

$$B_1 = \frac{\int_{-1}^1 x dx}{\int_{-1}^1 dx} = 0, P_1(x) = (x - B_1)P_0(x) = x$$

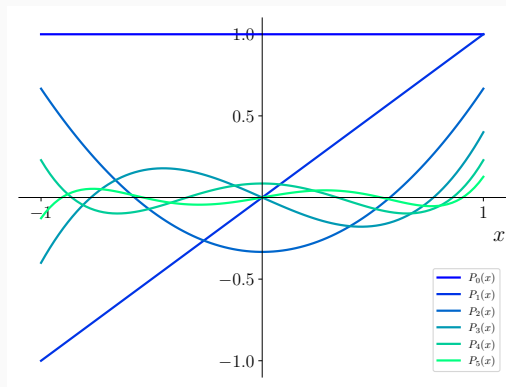
Luego:

$$B_2 = \frac{\int_{-1}^1 x^3 dx}{\int_{-1}^1 x^2 dx} = 0, C_2(x) = \frac{\int_{-1}^1 x^2 dx}{\int_{-1}^1 1 dx} = \frac{1}{3}$$

$$\begin{aligned} P_2(x) &= (x - B_2)P_1(x) - C_2P_0(x) \\ &= (x - 0)x - \frac{1}{3}1 \\ &= x^2 - \frac{1}{3} \end{aligned}$$

$$P_3(x) = xP_2(x) - \frac{4}{15}P_1(x) = x^3 - \frac{3}{5}x$$

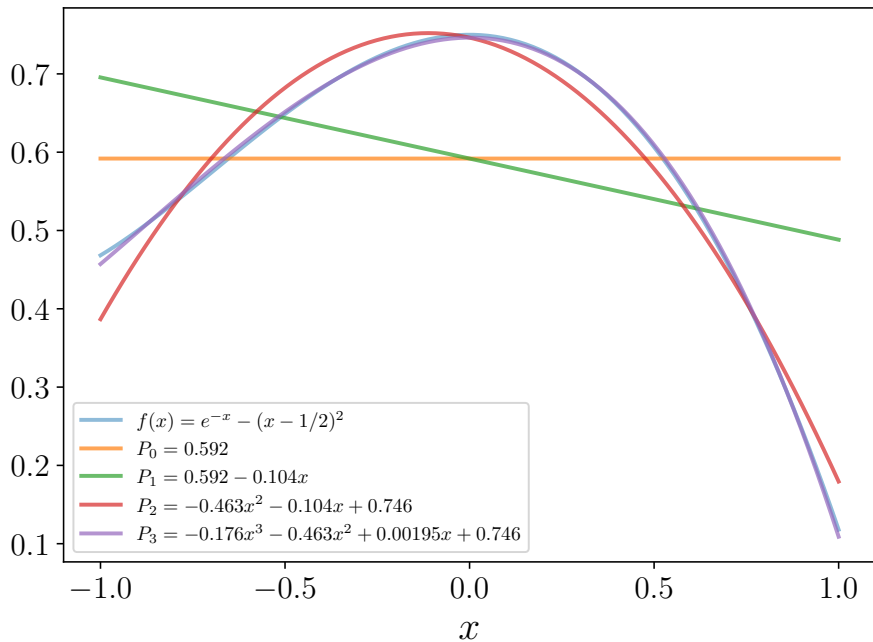
$$P_4(x) = x^4 - \frac{6}{7}x^2 + \frac{3}{35}, P_5(x) = x^5 - \frac{10}{9}x^3 + \frac{5}{21}x$$



## Ejemplo: Python

```
1 #!/usr/bin/env python3
2
3 import matplotlib.pyplot as plt
4 plt.style.use('.././../utils/clases.mplstyle')
5 import numpy as np
6 import sympy as sym
7 from sympy.abc import x, n
8 import sympy.printing as prt
9
10 def min_Legendre(f, L):
11     c = []
12     for l in L:
13         fl = sym.integrate(l * f, (x, -1, 1))
14         alfa = sym.integrate(l * l, (x, -1, 1))
15         c.append(fl / alfa)
16     return c
17
18 f = sym.exp(-x) - (x-1/2)**2
19 f_num = sym.lambdify([x], f, modules='numpy')
20 x_points = np.linspace(-1, 1, 100)
21 plt.plot(x_points, f_num(x_points),
22         label=r'$f(x)=e^{-x} - (x-1/2)^2$', alpha=0.5)
```

```
24 for n in range(1, 5):
25     print(f"n = {n}")
26     L = [sym.legendre(n, x) for n in range(n)]
27     c = min_Legendre(f, L)
28     P = sum(c[i] * L[i] for i in range(len(L)))
29     lbl = f"$P_{n-1} = {prt.latex(sym.N(sym.collect(P, x), 3))}$"
30     print(lbl)
31     if n == 1:
32         y_approx = P * np.ones(x_points.size)
33     else:
34         Pn = sym.lambdify([x], P, modules='numpy')
35         y_approx = Pn(x_points)
36     plt.plot(x_points, y_approx, label=lbl, alpha=0.7)
37
38 plt.legend(fontsize=10)
39 plt.xlabel('$x$')
40 plt.tight_layout()
41 plt.savefig("fig-05.pdf")
```





- ▶ R.L. Burden, D.J. Faires y A.M. Burden. *Análisis numérico*. 10.<sup>a</sup> ed. Mexico: Cengage Learning, 2017. Capítulo 8.
- ▶ E. Kreyszig, H. Kreyszig y E.J. Norminton. *Advanced Engineering Mathematics*. Hoboken, USA: John Wiley & Sons, Inc, 2011. Capítulo 25.9.