Resolución de problemas de valor inicial

Manuel Carlevaro

Departamento de Ingeniería Mecánica

Grupo de Materiales Granulares - UTN FRLP

manuel.carlevaro@gmail.com

Cálculo Avanzado • 2023

Problema de valor inicial:

$$\begin{cases} y'(t) = f[t, y(t)], \quad t_0 \leq t \leq T \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

Problema de valor inicial:

$$\begin{cases} y'(t) = f[t, y(t)], \quad t_0 \leq t \leq T \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

Definición : Condición de Lipschitz.

Una función $f(t, y)$ satisface una **condición de Lipschitz** en la variable y en un conjunto $D \in \mathbf{R}^2$ si existe una constante $L > 0$ tal que

$$|f(t, y_1) - f(t, y_2)| \leq L\,|y_1 - y_2|$$

siempre que (t, y_1) y (t, y_2) estén en D. La constante L se llama **constante de Lipschitz** para f.

Ejemplo: mostrar que $f(t, y) = t\,|y|$ satisface una condición de Lipschitz en el intevalo $D = \{(t, y)\,|\,1 \leq t \leq 2 \text{ y } -3 \leq y \leq 4\}$:
Para cada par de puntos (t, y_1) y (t, y_2) en D, tenemos:

$$\begin{aligned} |f(t, y_1) - f(t, y_2)| &= |t\,|y_1| - t\,|y_2|| \\ &= |t|\,||y_1| - |y_2|| \\ &\leq 2\,|y_1 - y_2| \end{aligned}$$

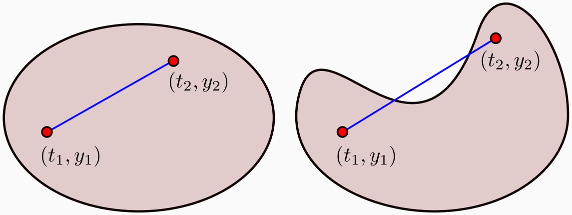
f satisface una condición de Lipschitz sobre D con $L = 2$ (menor valor posible). Por ejemplo:

$$|f(2, 1) - f(2, 0)| = |2 - 0| = 2\,|1 - 0|$$

Definición : Conjunto convexo.

Un conjunto $D \in \mathbf{R}^2$ se dice que es **convexo** si, dados (t_1, y_1) y (t_2, y_2) pertenecientes a D, entonces

$$[(1-\lambda)t_1 + \lambda t_2, (1-\lambda)y_1 + \lambda y_2] \in D \; \forall \lambda \in [0,1]$$



Teorema : .

Sea $f(t,y)$ definida en un conjunto convexo $D \in \mathbf{R}^2$. Si existe una constante $L > 0$ tal que

$$\left| \frac{\partial f(t,y)}{\partial y} \right| \leq L, \; \forall (t,y) \in D$$

entonce f satisface una condición de Lipschitz sobre D en la variable y con constante de Lipschitz L.

Teorema : .

Sea $D = \{(t,y) \,|\, t_0 \leq t \leq T \text{ y } -\infty < y < \infty\}$, y $f(t,y)$ continua en D. Si f satisface una condición de Lipschitz sobre D en la variable y, entonces el problema de valor inicial:

$$\begin{cases} y'(t) = f(t,y), \; t_0 \leq T \leq b \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

tiene una solución única $y(t)$ para $t_0 \leq t \leq T$.

Problema bien formulado:

- Existencia: el problema tiene al menos una solución.
- Unicidad: el problema tiene solución única.
- Estabilidad: pequeñas variaciones en los datos de entrada no generan grandes cambios en la solución.

Problema bien formulado:

- Existencia: el problema tiene al menos una solución.
- Unicidad: el problema tiene solución única.
- Estabilidad: pequeñas variaciones en los datos de entrada no generan grandes cambios en la solución.

El problema de valor inicial:

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y), \ t_0 \leq t \leq T \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

está bien formulado si:

- Existe una solución única $y(t)$, y
- Existen constantes $\varepsilon_0 > 0$ y $k > 0$ tal que para cada $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, siempre que $\delta(t)$ sea continua con $|\delta(t)| < \varepsilon, \ \forall t \in [t_0, T]$, y cuando $|\delta_0| < \varepsilon$, el problema de valor inicial:

$$\begin{cases} z'(t) = f(t, z) + \delta(t), \ t_0 \leq t \leq T \\ z(t_0) = y_0 + \delta_0 \end{cases}$$

tiene una solución única que satisface

$$|z(t) - y(t)| < k\varepsilon, \ \forall t \in [t_0, T]$$

Teorema : .

Sea $D = \{(t, y) \,|\, t_0 \leq t \leq T \text{ y } -\infty < y < \infty\}$. Si f es continua y satisface una condición de Lipschitz en la variable y sobre el conjunto D, el problema de valor inicial:

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y), \ t_0 \leq t \leq T \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

está bien formulado.

Lecturas recomendadas I

- R.L. Burden, D.J. Faires y A.M. Burden. ***Análisis numérico.*** 10.ª ed. Mexico: Cengage Learning, 2017. Capítulo 6.
- Gilbert Strang. ***Linear Algebra and Its Applications, 4th Edition.*** 4th. Brooks Cole, 2006. Capítulo 7.
- A.J. Salgado y S.M. Wise. ***Classical Numerical Analysis.*** Cambridge, United Kingdom: Cambridge University Press, 2023. DOI: 10.1017/9781108942607. Capítulo 3.
- A. Quarteroni, R. Sacco y F. Saleri. ***Numerical Mathematics.*** New York, United States: Springer-Verlag, 2000. Capítulo 3.