Cálculo Avanzado

Departamento de Ingeniería Mecánica
Facultad Regional La Plata
Universidad Tecnológica Nacional

Tema: Introducción a la variable compleja.
Profesor Titular: Manuel Carlevaro
Jefe de Trabajos Prácticos: Diego Amiconi
Ayudante de Primera: Lucas Basiuk

Ejercicio 1.

Mostrar que $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = 1$, $i^5 = i$, y $1/i = -i$, $1/i^2 = -1$, $1/i^3 = -i$.

Ejercicio 2.

Multiplicar por i equivale geométricamente a rotar en sentido antihorario por $\pi/2$ (90°). Verificar graficando z y zi, y el ángulo de rotación, para $z = 1 + i$, $z = -1 + 2i$, $z = 4 - 3i$.

Ejercicio 3.

Verificar las siguientes propiedades de los números complejos conjugados:

$$\overline{(z_1 + z_2)} = \overline{z_1} + \overline{z_2} \qquad \overline{(z_1 - z_2)} = \overline{z_1} - \overline{z_2}$$
$$\overline{(z_1 z_2)} = \overline{z_1}\,\overline{z_2} \qquad \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$$

para $z_1 = -11 + 10i$ y $z_2 = -1 + 4i$.

Ejercicio 4.

Expresar $\dfrac{3 + 5i}{7 + 9i}$ en la forma $a + bi$, donde a y b son reales.

Ejercicio 5.

En términos del diagrama de Argand, describir la región de puntos definida por:

$$\begin{cases} |z - (1 + i)| < 2 \\ |z - 2i| > \dfrac{3}{2} \end{cases}$$

Ejercicio 6.

a) En términos del diagrama de Argand, describir el conjunto:

$$S = \{z : z = \cos t + i \operatorname{sen} t, 0 \leq t \leq \pi\}$$

.

b) Describir $f(S)$ si f se define como $f(z) = z^2$.

Ejercicio 7.

Determinar el valor principal del argumento de $(1+i)^{20}$.

Ejercicio 8.

Encontrar y graficar en el plano complejo todas las raíces de $\sqrt[3]{i+i}$.

Ejercicio 9.

Determinar $\Re(f)$ e $\Im(f)$ para

$$f(z) = \frac{1}{1-z}$$

en $z = 1 - i$.

Ejercicio 10.

Del mismo modo que para las funciones de variable real, una función compleja de variable compleja es *continua* en $z = z_0$ si $f(z_0)$ está definida y

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$$

Determinar si $f(z)$ es continua en $z = 0$, si $f(0) = 0$ y para $z \neq 0$ la función se define como

$$f(z) = \begin{cases} \frac{\Re(z)}{1-|z|}, & z \neq 0 \\ 0, & z = 0 \end{cases}$$

Ejercicio 11.

Si $f(z) = z^3$, escribir f en la forma $u(x,y) + iv(x,y)$ y mostrar que u y v satisfacen las condiciones de Cauchy-Riemann.

Ejercicio 12.

Determinar si las funciones

a)

$$f(z) = e^{-2x}(\cos 2y - i \operatorname{sen} 2y)$$

b)

$$f(z) = \Re(z^2) - i\Im(z^2)$$

son analíticas.

Ejercicio 13.

Si $u(x,y) = 3x - 2y + 5$, ¿cómo debe estar definida $v(x,y)$ si $u(x,y) + iv(x,y)$ debe ser analítica?