Aproximación por mínimos cuadrados

Ajuste continuo polinómico, Funciones ortogonales. Polinomios de Legendre. Polinomios de Chebishev.

Manuel Carlevaro

Departamento de Ingeniería Mecánica

Grupo de Materiales Granulares - UTN FRLP

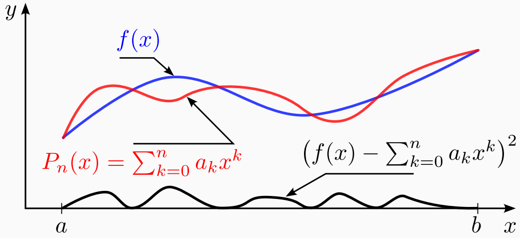
manuel.carlevaro@gmail.com

Cálculo Avanzado • 2023

· XeLaTeX ·

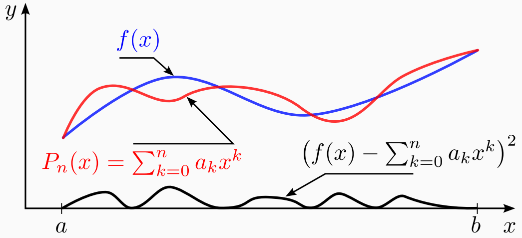
$f(x) \in \mathbf{C}[a,b]$, hallar $P_n(x)$ que minimize:

$$\int_a^b [f(x) - P_n(x)]^2 \, dx$$



$f(x) \in \mathbf{C}[a,b]$, hallar $P_n(x)$ que minimize:

$$\int_a^b [f(x) - P_n(x)]^2 \, dx$$

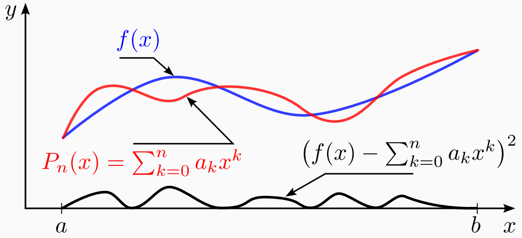


$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

$$E \equiv E_2(a_0, a_1, \cdots, a_n) = \int_a^b \left(f(x) - \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \right)^2 \, dx$$

$f(x) \in \mathbf{C}[a,b]$, hallar $P_n(x)$ que minimize:

$$\int_a^b [f(x) - P_n(x)]^2\, dx$$



$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

$$E \equiv E_2(a_0, a_1, \cdots, a_n) = \int_a^b \left(f(x) - \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \right)^2 dx$$

$$\frac{\partial E}{\partial a_j} = 0 \quad \text{para cada} \quad j = 0, 1, \cdots, n$$

$$E = \int_a^b [f(x)]^2 dx - 2 \sum_{k=0}^{n} a_k \int_a^b x^k f(x)\, dx + \int_a^b \left(\sum_{k=0}^{n} a_k x^k \right)^2 dx$$

$$\frac{\partial E}{\partial a_j} = -2 \int_a^b x^j f(x)\, dx + 2 \sum_{k=0}^{n} a_k \int_a^b x^{j+k}\, dx$$

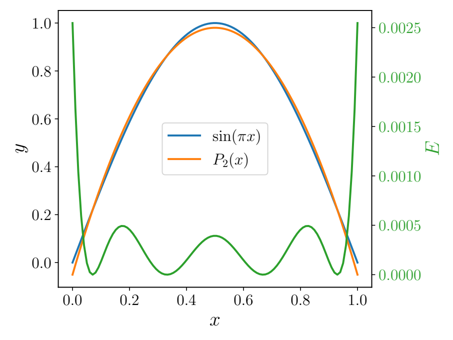
Ecuaciones normales lineales $(n+1)$:

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \int_a^b x^{j+k}\, dx = \int_a^b x^j f(x)\, dx$$

para cada $j = 0, 1, \cdots, n$.

Ejemplo: aproximar $f(x) = \operatorname{sen} \pi x$ por un polinomio de grado 2 en $[0, 1]$.
Ecuaciones normales:

$$a_0 \int_0^1 1\, dx + a_1 \int_0^1 x\, dx + a_2 \int_0^1 x^2\, dx = \int_0^1 \operatorname{sen} \pi x\, dx$$
$$a_0 \int_0^1 x\, dx + a_1 \int_0^1 x^2\, dx + a_2 \int_0^1 x^3\, dx = \int_0^1 x \operatorname{sen} \pi x\, dx$$
$$a_0 \int_0^1 x^2\, dx + a_1 \int_0^1 x^3\, dx + a_2 \int_0^1 x^4\, dx = \int_0^1 x^2 \operatorname{sen} \pi x\, dx$$



$$a_0 + \frac{1}{2}a_1 + \frac{1}{3}a_2 = \frac{2}{\pi}$$
$$\frac{1}{2}a_0 + \frac{1}{3}a_1 + \frac{1}{4}a_2 = \frac{1}{\pi}$$
$$\frac{1}{3}a_0 + \frac{1}{4}a_1 + \frac{1}{5}a_2 = \frac{\pi^2 - 4}{\pi^3}$$

Solución

$$a_0 = \frac{12\pi^2 - 120}{\pi^3} \approx -0.050465$$

$$a_1 = -a2 = \frac{720 - 60\pi^2}{\pi^3} \approx 4.12251$$

Problemas:

- matriz de Hilbert

$$H_{ij} = \int_a^b x^{j+k}\,dx = \frac{b^{j+k+1} - a^{j+k+1}}{j+k+1}$$

$$\boldsymbol{H} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{cond}(\boldsymbol{H}) \approx 524.05678$$

Problemas:

- matriz de Hilbert

$$H_{ij} = \int_a^b x^{j+k}\,dx = \frac{b^{j+k+1} - a^{j+k+1}}{j+k+1}$$

$$\boldsymbol{H} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

$\mathrm{cond}(\boldsymbol{H}) \approx 524.05678$

- No es fácil obtener $P_{n+1}(x)$ si ya tenemos $P_n(x)$

Problemas:

- matriz de Hilbert

$$H_{ij} = \int_a^b x^{j+k}\,dx = \frac{b^{j+k+1} - a^{j+k+1}}{j+k+1}$$

$$\boldsymbol{H} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

$\mathrm{cond}(\boldsymbol{H}) \approx 524.05678$

- No es fácil obtener $P_{n+1}(x)$ si ya tenemos $P_n(x)$

Definición : Funciones linealmente independientes .

Se dice que el conjunto de funciones $\{\phi_0, \cdots, \phi_n\}$ es **linealmente independiente** (LI) en $[a, b]$ si

$$P(x) = c_0\phi_0(x) + c_1\phi_1(x) + \cdots + c_n\phi_n(x) = 0, \forall x \in [a, b]$$

entonces $c_0 = c_1 = \cdots = c_n = 0$. De lo contrario, se dice que el conjunto de funciones es **linealmente dependiente**.

Problemas:

- matriz de Hilbert

$$H_{ij} = \int_a^b x^{j+k}\, dx = \frac{b^{j+k+1} - a^{j+k+1}}{j+k+1}$$

$$\boldsymbol{H} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

$\mathrm{cond}(\boldsymbol{H}) \approx 524.05678$

- No es fácil obtener $P_{n+1}(x)$ si ya tenemos $P_n(x)$

Definición : Funciones linealmente independientes .

Se dice que el conjunto de funciones $\{\phi_0, \cdots, \phi_n\}$ es **linealmente independiente** (LI) en $[a,b]$ si

$$P(x) = c_0\phi_0(x) + c_1\phi_1(x) + \cdots + c_n\phi_n(x) = 0, \forall x \in [a,b]$$

entonces $c_0 = c_1 = \cdots = c_n = 0$. De lo contrario, se dice que el conjunto de funciones es **linealmente dependiente**.

Teorema : Polinomios LI.

Si para cada $j = 0, 1, \cdots, n$, $\phi_j(x)$ es un polinomio de grado j, entonces el conjunto $\{\phi_0, \cdots, \phi_n\}$ es LI en cualquier intervalo $[a,b]$.

Ejemplo. Si $\phi_0(x) = 2, \phi_1(x) = x - 3, \phi_2(x) = x^2 + 2x + 7$ y $Q(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$, mostrar que existen constantes c_0, c_1, c_2 tales que $Q(x) = c_0\phi_0(x) + c_1\phi_1(x) + c_2\phi_2(x)$.

Ejemplo. Si $\phi_0(x) = 2, \phi_1(x) = x - 3, \phi_2(x) = x^2 + 2x + 7$ y $Q(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$, mostrar que existen constantes c_0, c_1, c_2 tales que $Q(x) = c_0\phi_0(x) + c_1\phi_1(x) + c_2\phi_2(x)$.

Por el teorema anterior, $\{\phi_0, \phi_1, \phi_2\}$ es LI en cualquier $[a, b]$. Además:

$$\begin{aligned}
1 &= \frac{1}{2}\phi_0(x) \\
x &= \phi_1(x) + 3 = \phi_1(x) + \frac{3}{2}\phi_0(x) \\
x^2 &= \phi_2(x) - 2x - 7 \\
&= \phi_2(x) - 2\left[\phi_1(x) + \frac{3}{2}\phi_0(x)\right] - 7\left[\frac{1}{2}\phi_0(x)\right] \\
&= \phi_2(x) - 2\phi_1(x) - \frac{13}{2}\phi_0(x)
\end{aligned}$$

Ejemplo. Si $\phi_0(x) = 2, \phi_1(x) = x - 3, \phi_2(x) = x^2 + 2x + 7$ y $Q(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$, mostrar que existen constantes c_0, c_1, c_2 tales que $Q(x) = c_0\phi_0(x) + c_1\phi_1(x) + c_2\phi_2(x)$.

Por el teorema anterior, $\{\phi_0, \phi_1, \phi_2\}$ es LI en cualquier $[a, b]$. Además:

$$
\begin{aligned}
1 &= \frac{1}{2}\phi_0(x) \\
x &= \phi_1(x) + 3 = \phi_1(x) + \frac{3}{2}\phi_0(x) \\
x^2 &= \phi_2(x) - 2x - 7 \\
&= \phi_2(x) - 2\left[\phi_1(x) + \frac{3}{2}\phi_0(x)\right] - 7\left[\frac{1}{2}\phi_0(x)\right] \\
&= \phi_2(x) - 2\phi_1(x) - \frac{13}{2}\phi_0(x)
\end{aligned}
$$

Entonces:

$$
\begin{aligned}
Q(x) &= a_0\left[\frac{1}{2}\phi_0\right] + a_1\left[\phi_1(x) + \frac{3}{2}\phi_0(x)\right] \\
&\quad + a_2\left[\phi_2(x) - 2\phi_1(x) - \frac{13}{2}\phi_0(x)\right] \\
&= \left(\frac{1}{2}a_0 + \frac{3}{2}a_1 - \frac{13}{2}a_2\right)\phi_0(x) \\
&\quad + [a_1 - 2a_2]\phi_1(x) + a_2\phi_2(x)
\end{aligned}
$$

Ejemplo. Si $\phi_0(x) = 2, \phi_1(x) = x - 3, \phi_2(x) = x^2 + 2x + 7$ y $Q(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$, mostrar que existen constantes c_0, c_1, c_2 tales que $Q(x) = c_0\phi_0(x) + c_1\phi_1(x) + c_2\phi_2(x)$.

Por el teorema anterior, $\{\phi_0, \phi_1, \phi_2\}$ es LI en cualquier $[a, b]$. Además:

$$\begin{aligned}
1 &= \frac{1}{2}\phi_0(x) \\
x &= \phi_1(x) + 3 = \phi_1(x) + \frac{3}{2}\phi_0(x) \\
x^2 &= \phi_2(x) - 2x - 7 \\
&= \phi_2(x) - 2\left[\phi_1(x) + \frac{3}{2}\phi_0(x)\right] - 7\left[\frac{1}{2}\phi_0(x)\right] \\
&= \phi_2(x) - 2\phi_1(x) - \frac{13}{2}\phi_0(x)
\end{aligned}$$

Entonces:

$$\begin{aligned}
Q(x) = a_0\left[\frac{1}{2}\phi_0\right] &+ a_1\left[\phi_1(x) + \frac{3}{2}\phi_0(x)\right] \\
&+ a_2\left[\phi_2(x) - 2\phi_1(x) - \frac{13}{2}\phi_0(x)\right] \\
&= \left(\frac{1}{2}a_0 + \frac{3}{2}a_1 - \frac{13}{2}a_2\right)\phi_0(x) \\
&+ [a_1 - 2a_2]\phi_1(x) + a_2\phi_2(x)
\end{aligned}$$

Teorema : .

*Si Π_n denota el conjunto de todos los polinomios de grado a lo sumo n, y $\{\phi_0(x), \phi_1(x), \cdots, \phi_n(x)\}$ es un conjunto de polinomios LI en Π_n, entonces **cualquier** polinomio en Π_n se puede escribir como combinación lineal de $\phi_0(x), \phi_1(x), \cdots, \phi_n(x)$.*

Definición : Función de peso.

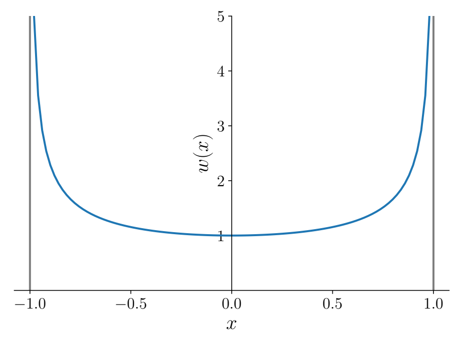
Una función integrable w se denomina **función de peso** en el intervalo I si $w(x) \geq 0, \forall x \in I$, pero $w(x) \not\equiv 0$ en cualquier subintervalo de I

Definición : Función de peso.

Una función integrable w se denomina **función de peso** en el intervalo I si $w(x) \geq 0, \forall x \in I$, pero $w(x) \not\equiv 0$ en cualquier subintervalo de I

Ejemplo:

$$w(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

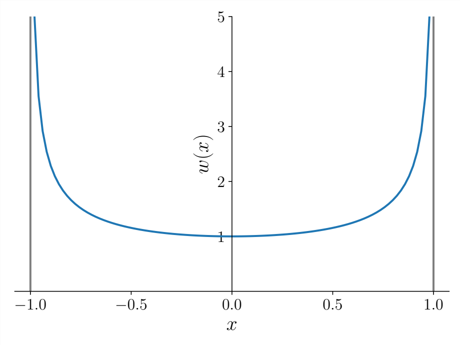


Definición : Función de peso.

Una función integrable w se denomina **función de peso** en el intervalo I si $w(x) \geq 0, \forall x \in I$, pero $w(x) \not\equiv 0$ en cualquier subintervalo de I

Ejemplo:

$$w(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$



Definición : Funciones ortogonales.

Se dice que $\{\phi_0, \phi_1, \cdots, \phi_n\}$ es un **conjunto ortogonal de funciones** en el intervalo $[a, b]$ respecto de la función de peso $w(x)$ si

$$\langle \phi_k, \phi_j \rangle_w = \int_a^b w(x)\phi_k(x)\phi_j(x)\,dx = \begin{cases} 0, & j \neq k, \\ \alpha_j > 0, & j = k \end{cases}$$

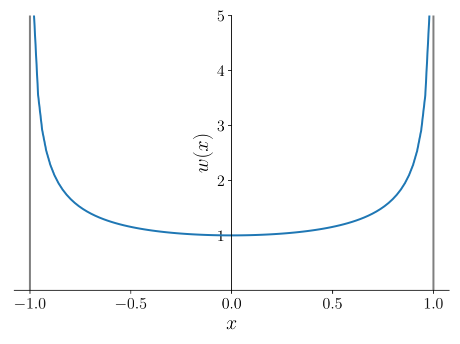
Si además $\alpha_j = 1$ para cada $j = 0, 1, 2, \cdots, n$, se dice que el conjunto es **ortonormal**.

Definición : Función de peso.

Una función integrable w se denomina **función de peso** en el intervalo I si $w(x) \geq 0, \forall x \in I$, pero $w(x) \not\equiv 0$ en cualquier subintervalo de I

Ejemplo:

$$w(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$



Definición : Funciones ortogonales.

Se dice que $\{\phi_0, \phi_1, \cdots, \phi_n\}$ es un **conjunto ortogonal de funciones** en el intervalo $[a, b]$ respecto de la función de peso $w(x)$ si

$$\langle \phi_k, \phi_j \rangle_w = \int_a^b w(x)\phi_k(x)\phi_j(x)\,dx = \begin{cases} 0, & j \neq k, \\ \alpha_j > 0, & j = k \end{cases}$$

Si además $\alpha_j = 1$ para cada $j = 0, 1, 2, \cdots, n$, se dice que el conjunto es **ortonormal**.

Ejemplo: $\{\cos nx, \operatorname{sen} mx\}, n, m = 0, 1, \cdots$ es ortogonal en $[-\pi, \pi]$ con $w(x) = 1$:

$$\langle \cos nx, \cos mx \rangle_w = 0 \qquad \langle \cos nx, \cos nx \rangle_w = \pi$$

$$\langle \operatorname{sen} nx, \operatorname{sen} mx \rangle_w = 0 \qquad \langle \operatorname{sen} nx, \operatorname{sen} nx \rangle_w = \pi$$

$$\langle \cos nx, \operatorname{sen} mx \rangle_w = 0 \qquad n \neq m$$

Teorema : .

Si $\{\phi_0, \cdots, \phi_n\}$ *es un conjunto ortogonal de funciones en un intervalo* $[a, b]$ *respecto de la función de peso* $w(x)$*, entonces la aproximación por mínimos cuadrados para* f *en* $[a, b]$ *respecto de* w *es:*

$$P(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j \phi_j(x)$$

donde para cada $j = 0, 1, \cdots, n$*:*

$$a_j = \frac{1}{\alpha_j} \langle f, \phi_j \rangle_w$$

Teorema : .

Si $\{\phi_0, \cdots, \phi_n\}$ *es un conjunto ortogonal de funciones en un intervalo* $[a, b]$ *respecto de la función de peso* $w(x)$*, entonces la aproximación por mínimos cuadrados para* f *en* $[a, b]$ *respecto de* w *es:*

$$P(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j \phi_j(x)$$

donde para cada $j = 0, 1, \cdots, n$*:*

$$a_j = \frac{1}{\alpha_j} \langle f, \phi_j \rangle_w$$

Teorema : .

El conjunto de polinomios $\{\phi_0, \phi_1, \cdots, \phi_n\}$ *definido de la siguiente forma es ortogonal en* $[a, b]$ *respecto de la función de peso* $w(x)$*:*

$$\phi_0(x) \equiv 1, \ \phi_1(x) = x - B_1, \forall x \in [a, b]$$

donde

$$B_1 = \frac{\langle x\phi_0, \phi_0 \rangle_w}{\langle \phi_0, \phi_0 \rangle_w}$$

y cuando $k \geq 2$*:*

$$\phi_k(x) = (x - B_k)\phi_{k-1}(x) - C_k \phi_{k-2}(x), \ \forall x \in [a, b]$$

donde

$$B_k = \frac{\langle x\phi_{k-1}, \phi_{k-1} \rangle_w}{\langle \phi_{k-1}, \phi_{k-1} \rangle_w} \qquad C_k = \frac{\langle x\phi_{k-1}, \phi_{k-2} \rangle_w}{\langle \phi_{k-2}, \phi_{k-2} \rangle_w}$$

(Proceso de Gram-Schmidt)

Polinomios de Legendre.

$\{P_n(x)\}$ es ortogonal en $[-1, 1]$ con $w(x) \equiv 1$. Usando Gram-Schmidt con $P_0(x) \equiv 1$:

$$B_1 = \frac{\int_{-1}^{1} x\,dx}{\int_{-1}^{1} dx} = 0,\ P_1(x) = (x - B_1)P_0(x) = x$$

Polinomios de Legendre.

$\{P_n(x)\}$ es ortogonal en $[-1,1]$ con $w(x) \equiv 1$. Usando Gram-Schmidt con $P_0(x) \equiv 1$:

$$B_1 = \frac{\int_{-1}^{1} x\,dx}{\int_{-1}^{1} dx} = 0,\ P_1(x) = (x - B_1)P_0(x) = x$$

Luego:

$$B_2 = \frac{\int_{-1}^{1} x^3\,dx}{\int_{-1}^{1} x^2\,dx} = 0,\ C_2(x) = \frac{\int_{-1}^{1} x^2\,dx}{\int_{-1}^{1} 1\,dx} = \frac{1}{3}$$

$$\begin{aligned} P_2(x) &= (x - B_2)P_1(x) - C_2 P_0(x) \\ &= (x-0)x - \frac{1}{3}1 \\ &= x^2 - \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Polinomios de Legendre.

$\{P_n(x)\}$ es ortogonal en $[-1,1]$ con $w(x)\equiv 1$. Usando Gram-Schmidt con $P_0(x)\equiv 1$:

$$B_1=\frac{\int_{-1}^{1} x\,dx}{\int_{-1}^{1} dx}=0,\ P_1(x)=(x-B_1)P_0(x)=x$$

Luego:

$$B_2=\frac{\int_{-1}^{1} x^3\,dx}{\int_{-1}^{1} x^2\,dx}=0,\ C_2(x)=\frac{\int_{-1}^{1} x^2\,dx}{\int_{-1}^{1} 1\,dx}=\frac{1}{3}$$

$$\begin{aligned} P_2(x)&=(x-B_2)P_1(x)-C_2P_0(x)\\ &=(x-0)x-\frac{1}{3}1\\ &=x^2-\frac{1}{3} \end{aligned}$$

$$P_3(x)=xP_2(x)-\frac{4}{15}P_1(x)=x^3-\frac{3}{5}x$$

$$P_4(x)=x^4-\frac{6}{7}x^2+\frac{3}{35},\ P_5(x)=x^5-\frac{10}{9}x^3+\frac{5}{21}x$$

Polinomios de Legendre.

$\{P_n(x)\}$ es ortogonal en $[-1,1]$ con $w(x) \equiv 1$. Usando Gram-Schmidt con $P_0(x) \equiv 1$:

$$B_1 = \frac{\int_{-1}^{1} x\,dx}{\int_{-1}^{1} dx} = 0,\ P_1(x) = (x - B_1)P_0(x) = x$$

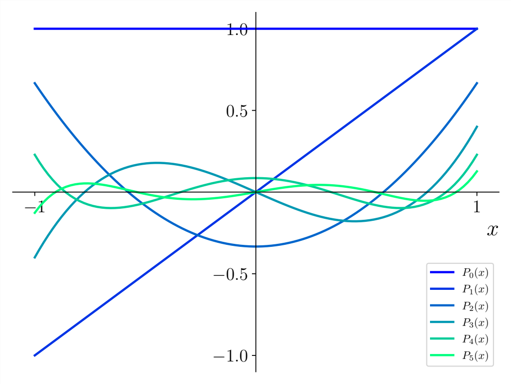
Luego:

$$B_2 = \frac{\int_{-1}^{1} x^3\,dx}{\int_{-1}^{1} x^2\,dx} = 0,\ C_2(x) = \frac{\int_{-1}^{1} x^2\,dx}{\int_{-1}^{1} 1\,dx} = \frac{1}{3}$$

$$\begin{aligned} P_2(x) &= (x - B_2)P_1(x) - C_2 P_0(x) \\ &= (x-0)x - \frac{1}{3}1 \\ &= x^2 - \frac{1}{3} \end{aligned}$$

$$P_3(x) = xP_2(x) - \frac{4}{15}P_1(x) = x^3 - \frac{3}{5}x$$

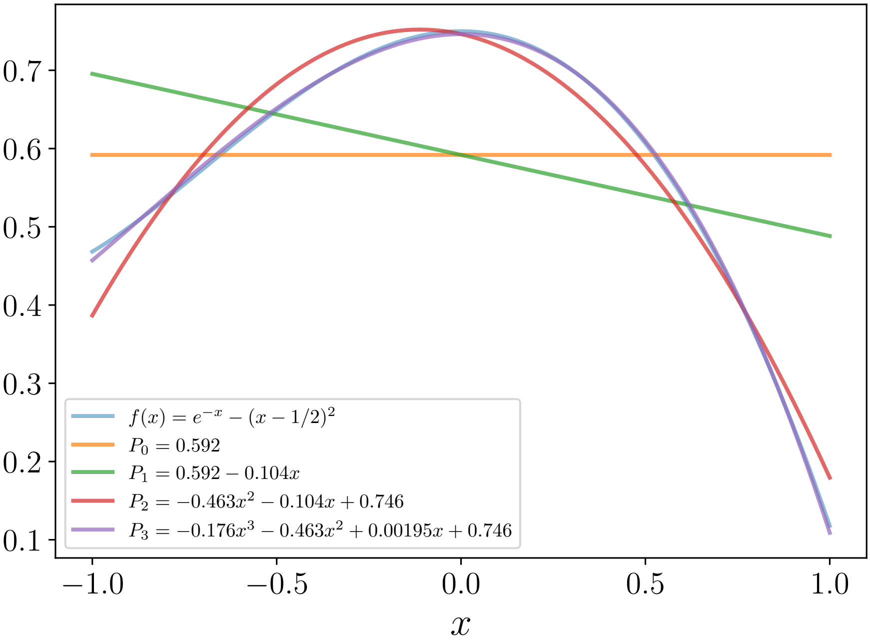
$$P_4(x) = x^4 - \frac{6}{7}x^2 + \frac{3}{35},\ P_5(x) = x^5 - \frac{10}{9}x^3 + \frac{5}{21}x$$



Ejemplo: Python

```python
#!/usr/bin/env python3

import matplotlib.pyplot as plt
plt.style.use('../../../utils/clases.mplstyle')
import numpy as np
import sympy as sym
from sympy.abc import x, n
import sympy.printing as prt

def min_Legendre(f, L):
    c = []
    for l in L:
        fl = sym.integrate(l * f, (x, -1, 1))
        alfa = sym.integrate(l * l, (x, -1, 1))
        c.append(fl / alfa)
    return c

f = sym.exp(-x) - (x-1/2)**2
f_num = sym.lambdify([x], f, modules='numpy')
x_points = np.linspace(-1, 1, 100)
plt.plot(x_points, f_num(x_points),
    label=r'$f(x)=e^{-x} - (x-1/2)^2$', alpha=0.5)
```

```python
for n in range(1, 5):
    print(f"n = {n}")
    L = [sym.legendre(n, x) for n in range(n)]
    c = min_Legendre(f, L)
    P = sum(c[i] * L[i] for i in range(len(L)))
    lbl = f"$P_{n-1} = {prt.latex(sym.N(sym.collect(P, x), 3))}$"
    print(lbl)
    if n == 1:
        y_approx = P * np.ones(x_points.size)
    else:
        Pn = sym.lambdify([x], P, modules='numpy')
        y_approx = Pn(x_points)
    plt.plot(x_points, y_approx, label=lbl, alpha=0.7)

plt.legend(fontsize=10)
plt.xlabel('$x$')
plt.tight_layout()
plt.savefig("fig-05.pdf")
```



0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
−1.0
−0.5
0.0
0.5
1.0
x
$f(x) = e^{-x} - (x - 1/2)^2$
$P_0 = 0.592$
$P_1 = 0.592 - 0.104x$
$P_2 = -0.463x^2 - 0.104x + 0.746$
$P_3 = -0.176x^3 - 0.463x^2 + 0.00195x + 0.746$

Polinomios de Chebyshev.

$\{T_n(x)\}$ es ortogonal en $(-1,1)$ con función de peso $w(x) = (1-x^2)^{-1/2}$. Para $x \in [-1,1]$:

$$T_n(x) = \cos[n \arccos x], \; n \geq 0$$

Polinomios de Chebyshev.

$\{T_n(x)\}$ es ortogonal en $(-1,1)$ con función de peso $w(x) = (1-x^2)^{-1/2}$. Para $x \in [-1,1]$:

$$T_n(x) = \cos[n \arccos x], \; n \geq 0$$

$$T_0(x) = \cos 0 = 1 \quad \text{y} \quad T_1(x) = \cos(\arccos x) = x$$

Polinomios de Chebyshev.

$\{T_n(x)\}$ es ortogonal en $(-1,1)$ con función de peso $w(x) = (1-x^2)^{-1/2}$. Para $x \in [-1,1]$:

$$T_n(x) = \cos[n \arccos x], \; n \geq 0$$

$$T_0(x) = \cos 0 = 1 \quad \text{y} \quad T_1(x) = \cos(\arccos x) = x$$

Para $n \geq 1$, $\theta = \arccos x$:

$$T_n(\theta(x)) \equiv T_n(\theta) = \cos(n\theta), \; \theta \in [0,\pi]$$

Relación de recurrencia:

$$T_{n+1}(\theta) = \cos(n+1)\theta = \cos\theta\cos(n\theta) - \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}(n\theta)$$

$$T_{n-1}(\theta) = \cos(n-1)\theta = \cos\theta\cos(n\theta) + \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}(n\theta)$$

Sumando:

$$T_{n+1}(\theta) = 2\cos\theta\cos(n\theta) - T_{n-1}(\theta)$$

Polinomios de Chebyshev.

$\{T_n(x)\}$ es ortogonal en $(-1,1)$ con función de peso $w(x) = (1-x^2)^{-1/2}$. Para $x \in [-1,1]$:

$$T_n(x) = \cos[n \arccos x], \; n \geq 0$$

$$T_0(x) = \cos 0 = 1 \quad \text{y} \quad T_1(x) = \cos(\arccos x) = x$$

Para $n \geq 1$, $\theta = \arccos x$:

$$T_n(\theta(x)) \equiv T_n(\theta) = \cos(n\theta), \; \theta \in [0,\pi]$$

Relación de recurrencia:

$$T_{n+1}(\theta) = \cos(n+1)\theta = \cos\theta\cos(n\theta) - \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}(n\theta)$$

$$T_{n-1}(\theta) = \cos(n-1)\theta = \cos\theta\cos(n\theta) + \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}(n\theta)$$

Sumando:

$$T_{n+1}(\theta) = 2\cos\theta\cos(n\theta) - T_{n-1}(\theta)$$

Regresando a $x = \cos\theta$, para $n \geq 1$:

$$T_{n+1} = 2x\cos(n\arccos x) - T_{n-1}(x)$$

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x)$$

Polinomios de Chebyshev.

$\{T_n(x)\}$ es ortogonal en $(-1,1)$ con función de peso $w(x) = (1-x^2)^{-1/2}$. Para $x \in [-1,1]$:

$$T_n(x) = \cos[n \arccos x],\ n \geq 0$$

$$T_0(x) = \cos 0 = 1 \quad \text{y} \quad T_1(x) = \cos(\arccos x) = x$$

Para $n \geq 1$, $\theta = \arccos x$:

$$T_n(\theta(x)) \equiv T_n(\theta) = \cos(n\theta),\ \theta \in [0,\pi]$$

Relación de recurrencia:

$$T_{n+1}(\theta) = \cos(n+1)\theta = \cos\theta\cos(n\theta) - \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}(n\theta)$$

$$T_{n-1}(\theta) = \cos(n-1)\theta = \cos\theta\cos(n\theta) + \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}(n\theta)$$

Sumando:

$$T_{n+1}(\theta) = 2\cos\theta\cos(n\theta) - T_{n-1}(\theta)$$

Regresando a $x = \cos\theta$, para $n \geq 1$:

$$T_{n+1} = 2x\cos(n \arccos x) - T_{n-1}(x)$$

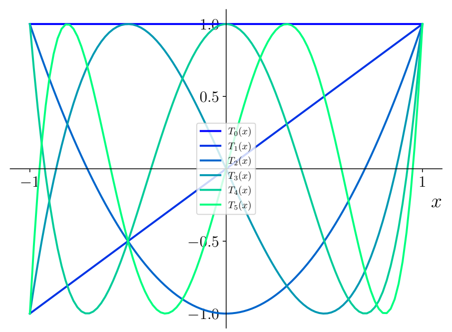
$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x)$$

Dado que $T_0(x) = 1$ y $T_1(x) = x$:

$$T_2(x) = 2xT_1(x) - T_0(x) = 2x^2 - 1$$

$$T_3(x) = 2xT_2(x) - T_1(x) = 4x^3 - 3x$$

$$T_4(x) = 2xT_3(x) - T_2(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1$$



Ortogonalidad de polinomios de Chebyshev

$$\int_{-1}^{1} \frac{T_n(x)T_m(x)}{\sqrt{1-x}}\, dx = \int_{-1}^{1} \frac{\cos(n \arccos x)\cos(m \arccos x)}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

Reintroducimos $\theta = \arccos x$:

$$d\theta = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} \frac{T_n(x)T_m(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx &= -\int_{\pi}^{0} \cos(n\theta)\cos(m\theta)\, d\theta \\ &= \int_{0}^{\pi} \cos(n\theta)\cos(m\theta)\, d\theta\end{aligned}$$

Para $n \neq m$:

$$\cos(n\theta)\cos(m\theta) = \frac{1}{2}[\cos(n+m)\theta + \cos(n-m)\theta]$$

Entonces:

$$\begin{aligned}\langle T_n, T_m \rangle_w &= \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \cos[(n+m)\theta]\, d\theta \\ &\quad + \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \cos[(n-m)\theta]\, d\theta \\ &= \left[\frac{\operatorname{sen}[(n+m)\theta]}{2(n+m)} + \frac{\operatorname{sen}[(n-m)\theta]}{2(n-m)}\right]_0^{\pi} \\ &= 0\end{aligned}$$

y

$$\langle T_n, T_n \rangle_w = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & n \geq 1 \\ \pi, & n = 0 \end{cases}$$

Reducción de grado de polinomio:

$$q(x) = x^5 - 4x^4 + x^3 - x - 3$$

Aproximación por:

$$P_4(x) = c_0 + c_1T_1(x) + c_2T_2(x) + c_3T_3(x) + c_4T_4(x)$$

donde

$$c_j = \frac{\langle q, T_j \rangle_w}{\langle T_j, T_j \rangle_w}$$

Reducción de grado de polinomio:

$$q(x) = x^5 - 4x^4 + x^3 - x - 3$$

Aproximación por:

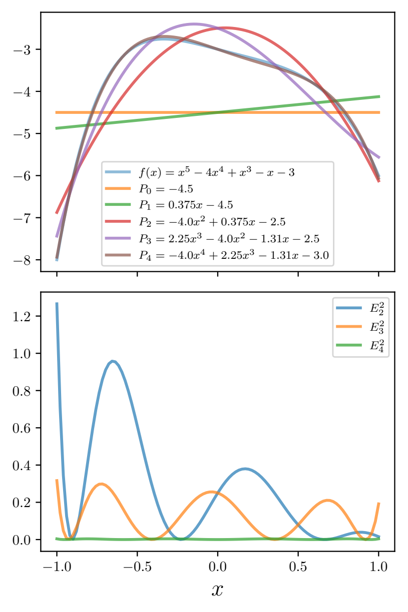
$$P_4(x) = c_0 + c_1 T_1(x) + c_2 T_2(x) + c_3 T_3(x) + c_4 T_4(x)$$

donde

$$c_j = \frac{\langle q, T_j \rangle_w}{\langle T_j, T_j \rangle_w}$$

Resultado: ver `code/plot-07.py`.

$$P(x) = -4.0x^4 + 2.25x^3 - 1.31x - 3.0$$



- R.L. Burden, D.J. Faires y A.M. Burden. ***Análisis numérico.*** 10.ª ed. Mexico: Cengage Learning, 2017. Capítulo 8.
- A.J. Salgado y S.M. Wise. ***Classical Numerical Analysis.*** Cambridge, United Kingdom: Cambridge University Press, 2023. doi: 10.1017/9781108942607. Capítulo 11.
- A. Quarteroni, R. Sacco y F. Saleri. ***Numerical Mathematics.*** New York, United States: Springer-Verlag, 2000. Capítulo 10.
- E. Kreyszig, H. Kreyszig y E.J. Norminton. ***Advanced Engineering Mathematics.*** Hoboken, USA: John Wiley & Sons, Inc, 2011. Capítulo 25.9.