# Autovalores y autovectores

## Definiciones. Interpretación geométrica. Círculos de Gerschgorin. Método de las potencias.


Manuel Carlevaro

Departamento de Ingeniería Mecánica

Grupo de Materiales Granulares - UTN FRLP

manuel.carlevaro@gmail.com


Cálculo Avanzado • 2023


· XƎLATEX ·

**Definición : Autovalor y autovector.**

Sea $\boldsymbol{A} \in K^{n\times n}$ y $\boldsymbol{v} \in K^{n}$. $\boldsymbol{v}$ es un **autovector** de $\boldsymbol{A}$ si

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{v} = \lambda\boldsymbol{v}$$

donde $\lambda$ es un escalar en $K$, denominado **autovalor** asociado con $\boldsymbol{v}$.

### Definición : Autovalor y autovector.

Sea $\boldsymbol{A} \in K^{n\times n}$ y $\boldsymbol{v} \in K^n$. $\boldsymbol{v}$ es un **autovector** de $\boldsymbol{A}$ si

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{v} = \lambda \boldsymbol{v}$$

donde $\lambda$ es un escalar en $K$, denominado **autovalor** asociado con $\boldsymbol{v}$.

En forma equivalente:

$$(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I})\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0} \tag{1}$$

Este sistema tiene solución $\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0}$ si y solo si:

$$\det(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I}) = 0$$

denominado **polinomio característico**, $p_A(\lambda)$, y por el teorema fundamental del álgebra: $\mapsto n$ raíces.

**Definición : Autovalor y autovector.**

Sea $\boldsymbol{A} \in K^{n\times n}$ y $\boldsymbol{v} \in K^n$. $\boldsymbol{v}$ es un **autovector** de $\boldsymbol{A}$ si

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{v} = \lambda \boldsymbol{v}$$

donde $\lambda$ es un escalar en $K$, denominado **autovalor** asociado con $\boldsymbol{v}$.

En forma equivalente:

$$(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I})\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0} \tag{1}$$

Este sistema tiene solución $\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0}$ si y solo si:

$$\det(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I}) = 0$$

denominado **polinomio característico**, $p_A(\lambda)$, y por el teorema fundamental del álgebra: $\mapsto n$ raíces.

**Ejemplo:**

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) = \det(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I}) &= \begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 & 0 \\ -1 & 2-\lambda & -1 \\ 0 & -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} \\ &= -\lambda^3 + 8\lambda^2 - 19\lambda + 12 = 0 \end{aligned}$$

Solución: $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 3, \lambda_3 = 4$. Reemplazando cada autovalor en (1):

$$\boldsymbol{v}_1 = a \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{v}_2 = b \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{v}_3 = c \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

**Definición : Autovalor y autovector.**

Sea $\boldsymbol{A} \in K^{n\times n}$ y $\boldsymbol{v} \in K^n$. $\boldsymbol{v}$ es un **autovector** de $\boldsymbol{A}$ si

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{v} = \lambda \boldsymbol{v}$$

donde $\lambda$ es un escalar en $K$, denominado **autovalor** asociado con $\boldsymbol{v}$.

En forma equivalente:

$$(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I})\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0} \tag{1}$$

Este sistema tiene solución $\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0}$ si y solo si:

$$\det(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I}) = 0$$

denominado **polinomio característico**, $p_A(\lambda)$, y por el teorema fundamental del álgebra: $\mapsto n$ raíces.

**Ejemplo:**

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) = \det(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I}) &= \begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 & 0 \\ -1 & 2-\lambda & -1 \\ 0 & -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} \\ &= -\lambda^3 + 8\lambda^2 - 19\lambda + 12 = 0 \end{aligned}$$

Solución: $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 3, \lambda_3 = 4$. Reemplazando cada autovalor en (1):

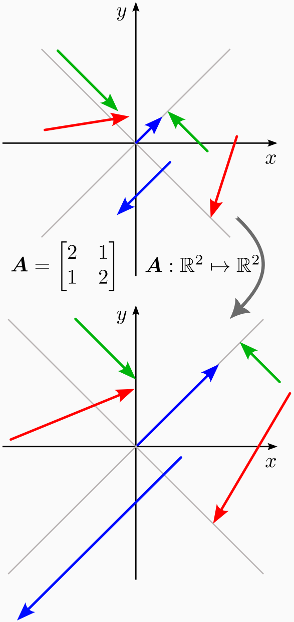
$$\boldsymbol{v}_1 = a\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{v}_2 = b\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{v}_3 = c\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

**Definiciones:**

$$\text{Espectro de } \boldsymbol{A} : \sigma(\boldsymbol{A}) = \{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n\}$$

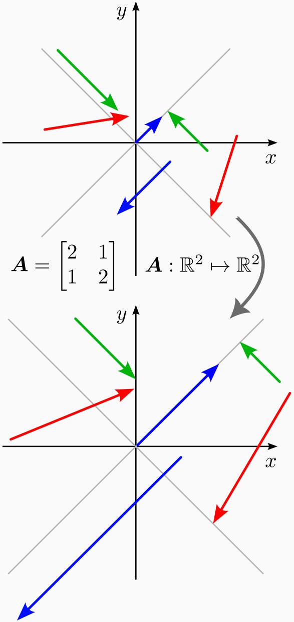
$$\text{Radio espectral de } \boldsymbol{A} : \rho(\boldsymbol{A}) = \max_{\lambda \in \sigma(\boldsymbol{A})} |\lambda|$$

## Intepretación gráfica




$$\begin{aligned} p_A(\lambda) = \det(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I}) &= \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (2-\lambda)^2 - 1 = \lambda^2 - 4\lambda + 3 = (\lambda - 3)(\lambda - 1) = 0 \end{aligned}$$

## Intepretación gráfica



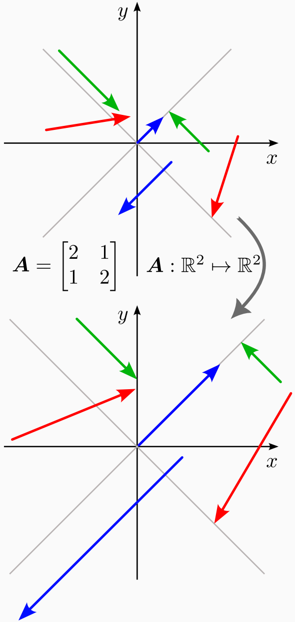

$$p_A(\lambda) = \det(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I}) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (2-\lambda)^2 - 1 = \lambda^2 - 4\lambda + 3 = (\lambda-3)(\lambda-1) = 0$$

Con $\lambda_1 = 3$:

$$\begin{cases} (2-3)x + y &= 0 \\ x + (2-3)y &= 0 \end{cases} \Longrightarrow \boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

## Intepretación gráfica




$$p_A(\lambda) = \det(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I}) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (2-\lambda)^2 - 1 = \lambda^2 - 4\lambda + 3 = (\lambda - 3)(\lambda - 1) = 0$$

Con $\lambda_1 = 3$:

$$\begin{cases} (2-3)x + y &= 0 \\ x + (2-3)y &= 0 \end{cases} \Longrightarrow \boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Con $\lambda_2 = 1$:

$$\begin{cases} (2-1)x + y &= 0 \\ x + (2-1)y &= 0 \end{cases} \Longrightarrow \boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

---

**Nota:** si consideramos la norma vectorial $l_2 : \|\cdot\|$:

$$\|\boldsymbol{A}\|_2 = \rho(\boldsymbol{A}^\dagger \boldsymbol{A})^{1/2}$$

Si $\boldsymbol{A}$ es simétrica, $\|\boldsymbol{A}\|_2 = \rho(\boldsymbol{A})$.

**Métodos:**

- Analítico: $n < 5$.
- Parciales: computan solo autovalores **extremos** (módulo máximo o mínimo). Método de las potencias.
- Globales: aproximan a todo el **espectro** de $\boldsymbol{A}$, $\sigma(\boldsymbol{A})$. Método $QR$.

---

**Métodos:**

- Analítico: $n < 5$.
- Parciales: computan solo autovalores **extremos** (módulo máximo o mínimo). Método de las potencias.
- Globales: aproximan a todo el **espectro** de $\boldsymbol{A}$, $\sigma(\boldsymbol{A})$. Método $QR$.

---

**Teorema : Círculo de Gerschgorin.**

*$\boldsymbol{A} \in K^{n\times n}$, $r_i = \sum_{j\neq i}^{n} |a_{ij}|$ para cada $i = 1, 2, \cdots, n$. Sea*

$$C_i = \{z \in \mathbb{C} : |z - a_{ii} \leq r_i\}$$

1. *Si $\lambda$ es un autovalor, está en uno de los $C_i$.*
2. *Si $k$ círculos $C_i$ forman una región conectada $R \in \mathbb{C}$, dijunta de los restantes $n-k$ círculos, entonces $R$ contiene exactamente $k$ autovalores.*

## Métodos:

- Analítico: $n < 5$.
- Parciales: computan solo autovalores **extremos** (módulo máximo o mínimo). Método de las potencias.
- Globales: aproximan a todo el **espectro** de $\boldsymbol{A}$, $\sigma(\boldsymbol{A})$. Método $QR$.

---

**Teorema : Círculo de Gerschgorin.**

*$\boldsymbol{A} \in K^{n\times n}$, $r_i = \sum_{j\neq i}^{n} |a_{ij}|$ para cada $i = 1, 2, \cdots, n$. Sea*

$$C_i = \{z \in \mathbb{C} : |z - a_{ii} \leq r_i\}$$

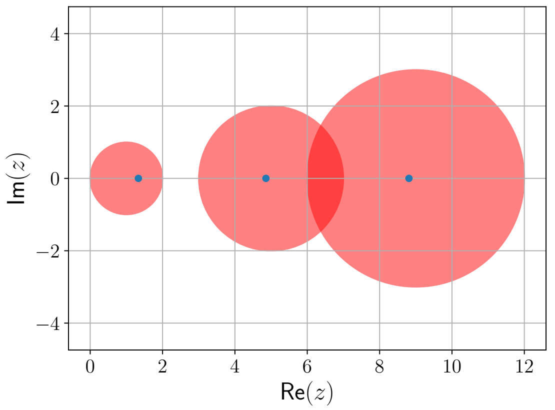
1. *Si $\lambda$ es un autovalor, está en uno de los $C_i$.*
2. *Si $k$ círculos $C_i$ forman una región conectada $R \in \mathbb{C}$, dijunta de los restantes $n-k$ círculos, entonces $R$ contiene exactamente $k$ autovalores.*

## Ejemplo:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 5 & 1 \\ -2 & -1 & 9 \end{bmatrix}$$

$r_1 = |-1|+|0| = 1, r_2 = |1|+|1| = 2, r_3 = |-2|+|-1| = 3.$

$\lambda_1 = 1.33192769, \lambda_2 = 8.81113862, \lambda_3 = 4.85693369$ .



**Método de las potencias:**

$\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, con elementos de $\sigma(\boldsymbol{A})$ que satisfacen:$|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq |\lambda_3| \geq \cdots \geq |\lambda_n|$. $\lambda_1$: **autovalor dominante**. $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_n\}$ forman una **base** en $\mathbb{R}^n$ (linealmente independientes).

$$\boldsymbol{x} = \sum_{j=1}^{n} \beta_j \boldsymbol{v}_j$$

Multiplicando ambos miembros por $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{A}^2, \cdots, \boldsymbol{A}^k, \cdots$:

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \sum_{j=1}^{n} \beta_j \boldsymbol{A}\boldsymbol{v}_j = \sum_{j=1}^{n} \beta_j \lambda_j \boldsymbol{v}_j$$

$$\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x} = \sum_{j=1}^{n} \beta_j \lambda_j \boldsymbol{A}\boldsymbol{v}_j = \sum_{j=1}^{n} \beta_j \lambda_j^2 \boldsymbol{v}_j$$

$$\vdots$$

$$\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{x} = \sum_{j=1}^{n} \beta_j \lambda_j^k \boldsymbol{v}_j$$

Factorizando $\lambda_1$ en la última ecuación:

$$\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{x} = \lambda_1^k \sum_{j=1}^{n} \beta_j \left(\frac{\lambda_j}{\lambda_1}\right)^k \boldsymbol{v}_j$$

Dado que $\forall j$, $|\lambda_1| > |\lambda_j|$; $\lim_{k\to\infty}(\lambda_j/\lambda_1)^k = 0$, y

$$\lim_{k\to\infty} \boldsymbol{A}^k\boldsymbol{x} = \lim_{k\to\infty} \lambda_1^k \beta_1 \boldsymbol{v}_1 \tag{2}$$

Si $|\lambda_1| < 1$, (2) $\mapsto \boldsymbol{0}$, si $|\lambda_1| > 1$, (2) diverge ($\beta_1 \neq 0$).
Elegimos $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^{(0)}$ con $\|\cdot\|_\infty$: $x_{p_0}^{(0)}$ con

$$x_{p_0}^{(0)} = 1 = \|\boldsymbol{x}^{(0)}\|_\infty$$

Hacemos $\boldsymbol{y}_{(1)} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^{(0)}$ y definimos $\mu^{(1)} = y_{p_0}^{(1)}$:

$$\mu^{(1)} = y_{p_0}^{(1)} = \frac{y_{p_1}^{(1)}}{x_{p_0}^{(0)}} = \frac{\beta_1\lambda_1 v_{p_0}^{(1)} + \sum_{j=2}^{n} \beta_j \lambda_j v_{p_0}^{(j)}}{\beta_1 v_{p_0}^{(1)} + \sum_{j=2}^{n} \beta_j v_{p_0}^{(j)}}$$

$$= \lambda_1 \left[\frac{\beta_1 v_{p_0}^{(1)} + \sum_{j=2}^{n} \beta_j (\lambda_j/\lambda_1) v_{p_0}^{(j)}}{\beta_1 v_{p_0}^{(1)} + \sum_{j=2}^{n} \beta_j v_{p_0}^{(j)}}\right]$$

Sea $p_1$ el menor entero tal que $|y^{(1)}_{p_1} = \|\boldsymbol{y}^{(1)}\|_\infty$:

$$\boldsymbol{x}^{(1)} = \frac{\boldsymbol{y}^{(1)}}{y^{(1)}_{p_1}} = \frac{1}{y^{(1)}_{p_1}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^{(0)}$$

Entonces: $x^{(1)}_{p_1} = 1 = \|\boldsymbol{x}^{(1)}\|_\infty$. Ahora

$$\boldsymbol{y}^{(2)} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^{(1)} = \frac{1}{y^{(1)}_{p_1}}\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x}^{(0)}$$

y

$$\mu^{(2)} = y^{(2)}_{p_1} = \frac{y^{(2)}_{p_1}}{x^{(1)}_{p_1}} = \frac{\left[\beta_1\lambda_1^2 v^{(1)}_{p_1} + \sum_{j=2}^n \beta_j\lambda_j^2 v^{(j)}_{p_1} \Big/ y^{(1)}_{p_1}\right]}{\left[\beta_1\lambda_1 v^{(1)}_{p_1} + \sum_{j=2}^n \beta_j\lambda_j v^{(j)}_{p_1} \Big/ y^{(1)}_{p_1}\right]}$$

$$= \lambda_1 \left[\frac{\beta_1 v^{(1)}_{p_1} + \sum_{j=2}^n \beta_j(\lambda_j/\lambda_1)^2 v^{(j)}_{p_1}}{\beta_1 v^{(1)}_{p_1} + \sum_{j=2}^n \beta_j(\lambda_j/\lambda_1) v^{(j)}_{p_1}}\right]$$

Sea $p_2$ el menor entero tal que $|y^{(2)}_{p_2} = \|\boldsymbol{y}^{(2)}\|_\infty$:

$$\boldsymbol{x}^{(2)} = \frac{\boldsymbol{y}^{(2)}}{y^{(2)}_{p_2}} = \frac{1}{y^{(2)}_{p_2}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^{(1)} = \frac{1}{y^{(2)}_{p_2} y^{(1)}_{p_1}}\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x}^{(0)}$$

$\mapsto$ secuencias $\{\boldsymbol{x}^{(m)}\}_{m=0}^\infty$, $\{\boldsymbol{y}^{(m)}\}_{m=0}^\infty$, $\{\mu^{(m)}\}_{m=0}^\infty$, inductivamente:

$$\boldsymbol{y}^{(m)} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^{(m-1)}$$

$$\begin{aligned}\mu^{(m)} &= y^{(m)}_{p_{m-1}} \\ &= \lambda_1 \left[\frac{\beta_1 v^{(1)}_{p_{m-1}} + \sum_{j=2}^n (\lambda_j/\lambda_1)^m \beta_j v^{(j)}_{p_{m-1}}}{\beta_1 v^{(1)}_{p_{m-1}} + \sum_{j=2}^n (\lambda_j/\lambda_1)^{m-1} \beta_j v^{(j)}_{p_{m-1}}}\right]\end{aligned}$$

y

$$\boldsymbol{x}^{(m)} = \frac{\boldsymbol{y}^{(m)}}{y_{p_m^{(m)}}} = \frac{\boldsymbol{A}^m\boldsymbol{x}^{(0)}}{\prod_{k=1}^m y^{(k)}_{p_k}}$$

donde para cada paso, $p_m$ es el menor entero para el cual $|y^{(m)}_{p_m}| = \|\boldsymbol{y}^{(m)}\|_\infty$.

Dado que $\lambda_j/\lambda_1| < 1, j = 2, \cdots, n$,

$\lim_{m\to\infty} \mu^{(m)} = \lambda_1$, eligiendo $\boldsymbol{x}^{(0)}$ tal que $\beta_1 \neq 0$.

Además, la secuencia $\{\boldsymbol{x}^{(m)}\}_{m=0}^\infty$ converge al autovalor asociado con $\lambda_1$ con norma $l_\infty$ igual a 1.

**Ejemplo:**

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}, \boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Con $\sigma(\boldsymbol{A}) = \{4, 1\}$. Tomemos $\boldsymbol{x}^{(0)} = [1, 1]^\intercal$:

$$\boldsymbol{x}^{(1)} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^{(0)} = \begin{bmatrix} -5 \\ 13 \end{bmatrix}, \boldsymbol{x}^{(2)} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^{(1)} = \begin{bmatrix} -29 \\ 61 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{x}^{(3)} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^{(2)} = \begin{bmatrix} -125 \\ 253 \end{bmatrix}, \boldsymbol{x}^{(4)} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^{(3)} = \begin{bmatrix} -509 \\ 1021 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{x}^{(5)} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^{(4)} = \begin{bmatrix} -2045 \\ 4093 \end{bmatrix}, \boldsymbol{x}^{(6)} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^{(5)} = \begin{bmatrix} -8189 \\ 16381 \end{bmatrix}$$

Aproximaciones al autovalor dominante $\lambda_1$:

$$\lambda_1^{(1)} = \frac{61}{13} = 4.6923, \qquad \lambda_1^{(2)} = \frac{253}{61} = 4.14654$$

$$\lambda_1^{(3)} = \frac{1021}{253} = 4.03557, \qquad \lambda_1^{(4)} = \frac{4093}{1021} = 4.00881$$

$$\lambda_1^{(5)} = \frac{16381}{4093} = 4.00200$$

Un autovector aproximado para $\lambda_1^{(5)} = 16381/4093 = 4.00200$ es

$$\boldsymbol{x}^{(6)} = \begin{bmatrix} -8189 \\ 16381 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} -0.49908 \\ 1 \end{bmatrix} \approx \boldsymbol{v}_1$$

**Ejemplo:**

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}, \boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Con $\sigma(\boldsymbol{A}) = \{4, 1\}$. Tomemos $\boldsymbol{x}^{(0)} = [1, 1]^\intercal$:

$$\boldsymbol{x}^{(1)} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^{(0)} = \begin{bmatrix} -5 \\ 13 \end{bmatrix}, \boldsymbol{x}^{(2)} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^{(1)} = \begin{bmatrix} -29 \\ 61 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{x}^{(3)} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^{(2)} = \begin{bmatrix} -125 \\ 253 \end{bmatrix}, \boldsymbol{x}^{(4)} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^{(3)} = \begin{bmatrix} -509 \\ 1021 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{x}^{(5)} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^{(4)} = \begin{bmatrix} -2045 \\ 4093 \end{bmatrix}, \boldsymbol{x}^{(6)} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^{(5)} = \begin{bmatrix} -8189 \\ 16381 \end{bmatrix}$$

Aproximaciones al autovalor dominante $\lambda_1$:

$$\lambda_1^{(1)} = \frac{61}{13} = 4.6923, \qquad \lambda_1^{(2)} = \frac{253}{61} = 4.14654$$

$$\lambda_1^{(3)} = \frac{1021}{253} = 4.03557, \qquad \lambda_1^{(4)} = \frac{4093}{1021} = 4.00881$$

$$\lambda_1^{(5)} = \frac{16381}{4093} = 4.00200$$

Un autovector aproximado para $\lambda_1^{(5)} = 16381/4093 = 4.00200$ es

$$\boldsymbol{x}^{(6)} = \begin{bmatrix} -8189 \\ 16381 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} -0.49908 \\ 1 \end{bmatrix} \approx \boldsymbol{v}_1$$

---

**Desventajas:**

- No se sabe al inicio si $\boldsymbol{A}$ tiene un autovalor dominante.
- No se conoce cómo debe elegirse $\boldsymbol{x}^{(9)}$ para que tenga una contribución no nula del autovector asociado al autovalor dominante, si existe.

- R.L. Burden, D.J. Faires y A.M. Burden. *Análisis numérico*. 10.ª ed. Mexico: Cengage Learning, 2017. Capítulo 9.
- Carlos Moreno González. *Introducción al cálculo numérico*. Madrid, España: Universidad Nacional de Educación a Distancia, 2014. Capítulo 3.
- B. Bradie. *A Friendly Introduction to Numerical Analysis*. New Jersey, United States: Pearson Education Inc., 2006. Capítulo 4.
- A.J. Salgado y S.M. Wise. *Classical Numerical Analysis*. Cambridge, United Kingdom: Cambridge University Press, 2023. DOI: 10.1017/9781108942607. Capítulo 8.
- A. Quarteroni, R. Sacco y F. Saleri. *Numerical Mathematics*. New York, United States: Springer-Verlag, 2000. Capítulo 5.