Autovalores y autovectores

Método de la potencia: código. Factorización QR. Código.

Manuel Carlevaro

Departamento de Ingeniería Mecánica

Grupo de Materiales Granulares - UTN FRLP

manuel.carlevaro@gmail.com

Cálculo Avanzado • 2023

Método de las potencias: código

```python
#!/usr/bin/env python3
import numpy as np

def iter_potencia(A, num_iteraciones):
    n = A.shape[0]
    # Inicializar un vector aleatorio de tamaño n
    b = np.random.rand(n)
    # Normalizar el vector
    b = b / np.linalg.norm(b)

    for _ in range(num_iteraciones):
        # Multiplicar la matriz A por el vector b
        Ab = np.dot(A, b)
        # Calcular el autovalor dominante
        autovalor = np.dot(b, Ab)
        # Normalizar el vector resultante
        b = Ab / np.linalg.norm(Ab)

    # Devolver el autovalor dominante y el autovector
    # correspondiente
    return autovalor, b
```

```python
# Ejemplo de uso
# Definir una matriz de ejemplo

A = np.array([[2, 0, 0],
              [1, 1, 2],
              [1, -1, 4]])

# Especificar el número de iteraciones
num_iteraciones = 100

# Aplicar el algoritmo de las potencias
autovalor, autovector = iter_potencia(A, num_iteraciones)

print(f"Autovalor dominante: {autovalor}")
print("Autovector correspondiente:")
```

```
$ ./potencias.py
Autovalor dominante: 3.000000000000001
Autovector correspondiente:
[ 2.62486865e-19 -7.07106781e-01 -7.07106781e-01]
```

Teorema : .

Si $\boldsymbol{A}$ *es una matriz y* $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k$ *son autovalores distintos de* $\boldsymbol{A}$ *con autovectores asociados* $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_k\}$, *entonces* $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_k\}$ *es un conjunto* ***linealmente independiente***.

Teorema : .

*Si $\boldsymbol{A}$ es una matriz y $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k$ son autovalores distintos de $\boldsymbol{A}$ con autovectores asociados $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_k\}$, entonces $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_k\}$ es un conjunto **linealmente independiente**.*

Definición : Conjunto ortogonal/ortonormal.

Un conjunto de vectores $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_k\}$ recibe el nombre de **ortogonal** si $\langle \boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{v}_j \rangle = 0$ para todo $i \neq j$. Si, además, $\langle \boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{v}_i \rangle = 1$ para toda $i = 1, 2, \cdots, n$, el conjunto recibe el nombre de **ortonormal**.

Dado que $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle = \|\boldsymbol{x}\|_2^2, \forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$, el conjunto $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_k\}$ es ortonormal si y solo si:

$$\|\boldsymbol{v}_i\|_2 = 1 \text{ para todo } i = 1, 2, \cdots, n$$

Teorema : .

Si $\boldsymbol{A}$ es una matriz y $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k$ son autovalores distintos de $\boldsymbol{A}$ con autovectores asociados $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_k\}$, entonces $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_k\}$ es un conjunto ***linealmente independiente****.*

Definición : Conjunto ortogonal/ortonormal.

Un conjunto de vectores $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_k\}$ recibe el nombre de **ortogonal** si $\langle \boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{v}_j \rangle = 0$ para todo $i \neq j$. Si, además, $\langle \boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{v}_i \rangle = 1$ para toda $i = 1, 2, \cdots, n$, el conjunto recibe el nombre de **ortonormal**.

Dado que $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle = \|\boldsymbol{x}\|_2^2, \forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$, el conjunto $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_k\}$ es ortonormal si y solo si:

$$\|\boldsymbol{v}_i\|_2 = 1 \text{ para todo } i = 1, 2, \cdots, n$$

Teorema : Proceso de Gram-Schmidt.

Sea $\{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_k\}$ un conjunto de k vectores linealmente independientes en $\mathbb{R}^n$. Entonces, $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_k\}$ definido mediante:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{v}_1 &= \boldsymbol{x}_1 \\
\boldsymbol{v}_2 &= \boldsymbol{x}_2 - \frac{\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{x}_2 \rangle}{\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_1 \rangle} \boldsymbol{v}_1 \\
\boldsymbol{v}_3 &= \boldsymbol{x}_3 - \frac{\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{x}_3 \rangle}{\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_1 \rangle} \boldsymbol{v}_1 - \frac{\langle \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{x}_3 \rangle}{\langle \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_2 \rangle} \boldsymbol{v}_2 \\
&\vdots \\
\boldsymbol{v}_k &= \boldsymbol{x}_k - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\langle \boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{x}_k \rangle}{\langle \boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{v}_i \rangle} \boldsymbol{v}_i
\end{aligned}$$

es un conjunto de k vectores ortogonales en $\mathbb{R}^n$.

Definición : Matriz ortogonal.

Se dice que una matriz $\boldsymbol{Q}$ es **ortogonal** si sus columnas $\{\boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{q}_2, \cdots, \boldsymbol{q}_n\}$ forman un conjunto ortonormal en $\mathbb{R}^n$.

Definición : Matriz ortogonal.

Se dice que una matriz $\boldsymbol{Q}$ es **ortogonal** si sus columnas $\{\boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{q}_2, \cdots, \boldsymbol{q}_n\}$ forman un conjunto ortonormal en $\mathbb{R}^n$.

Propiedades:

- $\boldsymbol{Q}$ es invertible con $\boldsymbol{Q}^{-1} = \boldsymbol{Q}^\intercal$
- $\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n, \langle \boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}, \boldsymbol{Q}\boldsymbol{y} \rangle = \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle$
- $\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n, \|\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}\|_2 = \|\boldsymbol{x}\|_2$
- Cualquier matriz invertible $\boldsymbol{Q}$ con $\boldsymbol{Q}^{-1} = \boldsymbol{Q}^\intercal$ es ortogonal.

Definición : Matriz ortogonal.

Se dice que una matriz $\boldsymbol{Q}$ es **ortogonal** si sus columnas $\{\boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{q}_2, \cdots, \boldsymbol{q}_n\}$ forman un conjunto ortonormal en $\mathbb{R}^n$.

Propiedades:

- $\boldsymbol{Q}$ es invertible con $\boldsymbol{Q}^{-1} = \boldsymbol{Q}^\intercal$
- $\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n, \langle \boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}, \boldsymbol{Q}\boldsymbol{y} \rangle = \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle$
- $\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n, \|\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}\|_2 = \|\boldsymbol{x}\|_2$
- Cualquier matriz invertible $\boldsymbol{Q}$ con $\boldsymbol{Q}^{-1} = \boldsymbol{Q}^\intercal$ es ortogonal.

Definición : Matriz similar.

Dos matrices $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$ son **similares** si existe una matriz no singular $\boldsymbol{S}$ con $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{S}$.

Definición : Matriz ortogonal.

Se dice que una matriz $\boldsymbol{Q}$ es **ortogonal** si sus columnas $\{\boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{q}_2, \cdots, \boldsymbol{q}_n\}$ forman un conjunto ortonormal en $\mathbb{R}^n$.

Propiedades:

- $\boldsymbol{Q}$ es invertible con $\boldsymbol{Q}^{-1} = \boldsymbol{Q}^\mathsf{T}$
- $\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n, \langle \boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}, \boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}\rangle = \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\rangle$
- $\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n, \|\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}\|_2 = \|\boldsymbol{x}\|_2$
- Cualquier matriz invertible $\boldsymbol{Q}$ con $\boldsymbol{Q}^{-1} = \boldsymbol{Q}^\mathsf{T}$ es ortogonal.

Definición : Matriz similar.

Dos matrices $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$ son **similares** si existe una matriz no singular $\boldsymbol{S}$ con $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{S}$.

Teorema : .

Si $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$ son matrices similares con $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{S}$, y λ es un autovalor de $\boldsymbol{A}$ con el autovector $\boldsymbol{v}$ asociado, entonces λ es un autovalor de $\boldsymbol{B}$ con autovector asociado $\boldsymbol{S}\boldsymbol{v}$.

Definición : Matriz ortogonal.

Se dice que una matriz $\boldsymbol{Q}$ es **ortogonal** si sus columnas $\{\boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{q}_2, \cdots, \boldsymbol{q}_n\}$ forman un conjunto ortonormal en $\mathbb{R}^n$.

Propiedades:

- $\boldsymbol{Q}$ es invertible con $\boldsymbol{Q}^{-1} = \boldsymbol{Q}^\intercal$
- $\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n, \langle \boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}, \boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}\rangle = \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\rangle$
- $\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n, \|\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}\|_2 = \|\boldsymbol{x}\|_2$
- Cualquier matriz invertible $\boldsymbol{Q}$ con $\boldsymbol{Q}^{-1} = \boldsymbol{Q}^\intercal$ es ortogonal.

Definición : Matriz similar.

Dos matrices $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$ son **similares** si existe una matriz no singular $\boldsymbol{S}$ con $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{S}$.

Teorema : .

Si $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$ son matrices similares con $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{S}$, y λ es un autovalor de $\boldsymbol{A}$ con el autovector $\boldsymbol{v}$ asociado, entonces λ es un autovalor de $\boldsymbol{B}$ con autovector asociado $\boldsymbol{S}\boldsymbol{v}$.

Teorema : .

Una matriz $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es similar a una matriz diagonal $\boldsymbol{D}$ si y sólo si $\boldsymbol{A}$ tiene n autovectores linealmente independientes. En este caso $\boldsymbol{D} = \boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{S}$, donde las columnas de $\boldsymbol{S}$ son los autovectores y el i-ésimo elemento diagonal de $\boldsymbol{D}$ es el autovalor que corresponde a la i-ésima columna de $\boldsymbol{S}$.

Teorema : Teorema de Schur.

Sea $\boldsymbol{A}$ una matriz arbitraria. Existe una matriz no singular $\boldsymbol{U}$ con la propiedad de que

$$\boldsymbol{T} = \boldsymbol{U}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{U}$$

donde $\boldsymbol{T}$ es una matriz triangular superior, cuyas entradas diagonales consisten en autovalores de $\boldsymbol{A}$.

Se cumple $\|\boldsymbol{U}\boldsymbol{x}\|_2 = \|\boldsymbol{x}\|_2, \forall \boldsymbol{x} \mapsto$ **matrices unitarias**.

Teorema : Teorema de Schur.

Sea $\boldsymbol{A}$ una matriz arbitraria. Existe una matriz no singular $\boldsymbol{U}$ con la propiedad de que

$$\boldsymbol{T} = \boldsymbol{U}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{U}$$

donde $\boldsymbol{T}$ es una matriz triangular superior, cuyas entradas diagonales consisten en autovalores de $\boldsymbol{A}$.

Se cumple $\|\boldsymbol{U}\boldsymbol{x}\|_2 = \|\boldsymbol{x}\|_2, \forall \boldsymbol{x} \mapsto$ **matrices unitarias**.

Factorización QR: $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{R}$, donde:

- $\boldsymbol{Q}$ es una matriz ortogonal
- $\boldsymbol{R}$ es una matriz triangular superior

Teorema : Teorema de Schur.

Sea $\boldsymbol{A}$ una matriz arbitraria. Existe una matriz no singular $\boldsymbol{U}$ con la propiedad de que

$$\boldsymbol{T} = \boldsymbol{U}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{U}$$

donde $\boldsymbol{T}$ es una matriz triangular superior, cuyas entradas diagonales consisten en autovalores de $\boldsymbol{A}$.

Se cumple $\|\boldsymbol{U}\boldsymbol{x}\|_2 = \|\boldsymbol{x}\|_2, \forall \boldsymbol{x} \mapsto$ **matrices unitarias**.

Factorización QR: $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{R}$, donde:

- $\boldsymbol{Q}$ es una matriz ortogonal
- $\boldsymbol{R}$ es una matriz triangular superior

Cálculo de la factorización:

- Ortogonalización de Gram-Schmidt
- Reflexiones de Householder

Ortogonalización de Gram-Schmidt:

$\boldsymbol{A} = [\boldsymbol{a}_1|\boldsymbol{a}_2|\cdots|\boldsymbol{a}_n]$

$$\boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{a}_1, \quad \boldsymbol{e}_1 = \frac{\boldsymbol{u}_1}{\|\boldsymbol{u}_1\|}$$

$$\boldsymbol{u}_2 = \boldsymbol{a}_2 - \langle \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{a}_2 \rangle, \quad \boldsymbol{e}_2 = \frac{\boldsymbol{u}_2}{\|\boldsymbol{u}_2\|}$$

$$\boldsymbol{u}_3 = \boldsymbol{a}_3 - \langle \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{a}_3 \rangle - \langle \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{a}_3 \rangle, \quad \boldsymbol{e}_3 = \frac{\boldsymbol{u}_3}{\|\boldsymbol{u}_3\|}$$

$$\vdots$$

$$\boldsymbol{u}_k = \boldsymbol{a}_k - \sum_{j=1}^{k-1} \langle \boldsymbol{e}_j, \boldsymbol{a}_k \rangle, \quad \boldsymbol{e}_k = \frac{\boldsymbol{u}_k}{\|\boldsymbol{u}_k\|}$$

Teorema : Teorema de Schur.

Sea $\boldsymbol{A}$ una matriz arbitraria. Existe una matriz no singular $\boldsymbol{U}$ con la propiedad de que

$$\boldsymbol{T} = \boldsymbol{U}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{U}$$

donde $\boldsymbol{T}$ es una matriz triangular superior, cuyas entradas diagonales consisten en autovalores de $\boldsymbol{A}$.

Se cumple $\|\boldsymbol{U}\boldsymbol{x}\|_2 = \|\boldsymbol{x}\|_2, \forall \boldsymbol{x} \mapsto$ **matrices unitarias**.

Factorización QR: $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{R}$, donde:

- $\boldsymbol{Q}$ es una matriz ortogonal
- $\boldsymbol{R}$ es una matriz triangular superior

Cálculo de la factorización:

- Ortogonalización de Gram-Schmidt
- Reflexiones de Householder

Ortogonalización de Gram-Schmidt:

$\boldsymbol{A} = [\boldsymbol{a}_1|\boldsymbol{a}_2|\cdots|\boldsymbol{a}_n]$

$$\boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{a}_1, \quad \boldsymbol{e}_1 = \frac{\boldsymbol{u}_1}{\|\boldsymbol{u}_1\|}$$

$$\boldsymbol{u}_2 = \boldsymbol{a}_2 - \langle \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{a}_2 \rangle, \quad \boldsymbol{e}_2 = \frac{\boldsymbol{u}_2}{\|\boldsymbol{u}_2\|}$$

$$\boldsymbol{u}_3 = \boldsymbol{a}_3 - \langle \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{a}_3 \rangle - \langle \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{a}_3 \rangle, \quad \boldsymbol{e}_3 = \frac{\boldsymbol{u}_3}{\|\boldsymbol{u}_3\|}$$

$$\vdots$$

$$\boldsymbol{u}_k = \boldsymbol{a}_k - \sum_{j=1}^{k-1} \langle \boldsymbol{e}_j, \boldsymbol{a}_k \rangle, \quad \boldsymbol{e}_k = \frac{\boldsymbol{u}_k}{\|\boldsymbol{u}_k\|}$$

Ahora podemos expresar los $\boldsymbol{a}_i$ en la nueva base:

$$\boldsymbol{a}_1 = \langle \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{a}_1 \rangle \boldsymbol{e}_1$$

$$\boldsymbol{a}_1 = \langle \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{a}_2 \rangle \boldsymbol{e}_1 + \langle \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{a}_2 \rangle \boldsymbol{e}_2$$

$$\boldsymbol{a}_3 = \langle \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{a}_3 \rangle \boldsymbol{e}_1 + \langle \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{a}_3 \rangle \boldsymbol{e}_2 + \langle \boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{a}_3 \rangle \boldsymbol{e}_3$$

$$\cdots$$

$$\boldsymbol{a}_k = \sum_{j=1}^{k} \langle \boldsymbol{e}_j, \boldsymbol{a}_k \rangle \boldsymbol{e}_j$$

Resulta $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{R}$, con $\boldsymbol{Q} = [\boldsymbol{e}_1|\boldsymbol{e}_2|\cdots|\boldsymbol{e}_n]$, y

$$\boldsymbol{R} = \begin{bmatrix} \langle \boldsymbol{e}_1 \boldsymbol{a}_1 \rangle & \langle \boldsymbol{e}_1 \boldsymbol{a}_2 \rangle & \langle \boldsymbol{e}_1 \boldsymbol{a}_3 \rangle & \cdots & \langle \boldsymbol{e}_1 \boldsymbol{a}_n \rangle \\ 0 & \langle \boldsymbol{e}_2 \boldsymbol{a}_2 \rangle & \langle \boldsymbol{e}_2 \boldsymbol{a}_3 \rangle & \cdots & \langle \boldsymbol{e}_2 \boldsymbol{a}_n \rangle \\ 0 & 0 & \langle \boldsymbol{e}_3 \boldsymbol{a}_3 \rangle & \cdots & \langle \boldsymbol{e}_3 \boldsymbol{a}_n \rangle \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \langle \boldsymbol{e}_n , \boldsymbol{a}_n \rangle \end{bmatrix}$$

Resulta $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{R}$, con $\boldsymbol{Q} = [\boldsymbol{e}_1|\boldsymbol{e}_2|\cdots|\boldsymbol{e}_n]$, y

$$\boldsymbol{R} = \begin{bmatrix} \langle \boldsymbol{e}_1 \boldsymbol{a}_1 \rangle & \langle \boldsymbol{e}_1 \boldsymbol{a}_2 \rangle & \langle \boldsymbol{e}_1 \boldsymbol{a}_3 \rangle & \cdots & \langle \boldsymbol{e}_1 \boldsymbol{a}_n \rangle \\ 0 & \langle \boldsymbol{e}_2 \boldsymbol{a}_2 \rangle & \langle \boldsymbol{e}_2 \boldsymbol{a}_3 \rangle & \cdots & \langle \boldsymbol{e}_2 \boldsymbol{a}_n \rangle \\ 0 & 0 & \langle \boldsymbol{e}_3 \boldsymbol{a}_3 \rangle & \cdots & \langle \boldsymbol{e}_3 \boldsymbol{a}_n \rangle \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \langle \boldsymbol{e}_n, \boldsymbol{a}_n \rangle \end{bmatrix}$$

Código Python:

```python
#!/usr/bin/env python3

import numpy as np

def gram_schmidt_qr(A):
    m, n = A.shape
    Q = np.zeros((m, n))
    R = np.zeros((n, n))
```

```python
    for j in range(n):
        v = A[:, j]
        for i in range(j):
            R[i, j] = np.dot(Q[:, i], A[:, j])
            v = v - R[i, j] * Q[:, i]
        R[j, j] = np.linalg.norm(v)
        Q[:, j] = v / R[j, j]

    return Q, R

# Ejemplo de uso
# Definir una matriz de ejemplo
A = np.array([[1, 4, 3],
              [2, 5, 1],
              [3, 6, 2]])

# Aplicar la factorización QR usando el método
# de Gram-Schmidt
Q, R = gram_schmidt_qr(A)

print("Matriz Q:")
print(Q)
print("Matriz R:")
print(R)
```

Método QR para el cálculo de autovalores:

Algoritmo recursivo que computa $\{\boldsymbol{A}_k\}_{k=0}^{\infty}$ con los siguientes pasos:

1. $\boldsymbol{A}_0 = \boldsymbol{A}$
2. Para $k = 0, 1, 2, \ldots,$ dado $\boldsymbol{A}_k$:
    2.1 Calcular $\boldsymbol{Q}_{k+1}\boldsymbol{R}_{k+1} = \boldsymbol{A}_k$
    2.2 Definir $\boldsymbol{A}_{k+1} = \boldsymbol{Q}_{k+1}\boldsymbol{R}_{k+1}$

Método QR para el cálculo de autovalores:

Algoritmo recursivo que computa $\{\boldsymbol{A}_k\}_{k=0}^{\infty}$ con los siguientes pasos:

1. $\boldsymbol{A}_0 = \boldsymbol{A}$
2. Para $k = 0, 1, 2, \ldots,$ dado $\boldsymbol{A}_k$:
   2.1 Calcular $\boldsymbol{Q}_{k+1}\boldsymbol{R}_{k+1} = \boldsymbol{A}_k$
   2.2 Definir $\boldsymbol{A}_{k+1} = \boldsymbol{Q}_{k+1}\boldsymbol{R}_{k+1}$

Teorema : Convergencia.

Si los autovalores de una matriz $\boldsymbol{A}$ verifican que

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| > \cdots > |\lambda_n| > 0$$

entonces la suceción de matrices equivalentes contruidas con el algoritmo QR converge a una matriz triangular superior.

Código Python:

```python
#!/usr/bin/env python3
import numpy as np

def algoritmo_qr(A, num_iter):
    n = A.shape[0]
    autovalores = np.zeros(n, dtype=np.complex128)
    for _ in range(num_iter):
        Q, R = np.linalg.qr(A)
        A = np.dot(R, Q)
    for i in range(n):
        autovalores[i] = A[i, i]
    return autovalores

A = np.array([[1, 2, 3],
              [4, 5, 6],
              [7, 8, 9]])

num_iter = 100
autovalores = algoritmo_qr(A, num_iter)
print("Autovalores:")
print(autovalores)
```

- R.L. Burden, D.J. Faires y A.M. Burden. *Análisis numérico*. 10.ª ed. Mexico: Cengage Learning, 2017. Capítulo 9.
- Carlos Moreno González. *Introducción al cálculo numérico*. Madrid, España: Universidad Nacional de Educación a Distancia, 2014. Capítulo 3.
- B. Bradie. *A Friendly Introduction to Numerical Analysis*. New Jersey, United States: Pearson Education Inc., 2006. Capítulo 4.
- A.J. Salgado y S.M. Wise. *Classical Numerical Analysis*. Cambridge, United Kingdom: Cambridge University Press, 2023. DOI: 10.1017/9781108942607. Capítulo 8.
- A. Quarteroni, R. Sacco y F. Saleri. *Numerical Mathematics*. New York, United States: Springer-Verlag, 2000. Capítulo 5.