Solución de sistemas de ecuaciones lineales

Condicionamiento. Métodos directos: eliimnación gaussiana, factorización LU. Pivoteo.

Manuel Carlevaro

Departamento de Ingeniería Mecánica

Grupo de Materiales Granulares - UTN FRLP

manuel.carlevaro@gmail.com

Resolver:

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_2 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
&\vdots \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n &= b_n
\end{aligned}
$$

Resolver:

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_2 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
&\vdots \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n &= b_n
\end{aligned}
$$

O, en forma matricial:

$$\mathbb{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

Resolver:

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_2 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
&\vdots \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n &= b_n
\end{aligned}
$$

O, en forma matricial:

$$\mathbb{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

Matriz de coeficientes aumentada:

$$
\left[\begin{array}{cccc|c}
a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\
a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
a_{N1} & a_{N2} & \ldots & a_{nn} & b_n
\end{array}\right]
$$

Resolver:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_2 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned}$$

O, en forma matricial:

$$\mathbb{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

Matriz de coeficientes aumentada:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{N1} & a_{N2} & \dots & a_{nn} & b_n \end{array}\right]$$

Si $\mathbb{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ y $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}$, la existencia y unicidad de la solución está asegurada si una de las siguientes condiciones se cumple:

- $\mathbb{A}$ es invertible (no singular)
- $\mathrm{rg}(A) = n$
- El sistema homogéneo $\mathbb{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ admite solo la solución nula.

Resolver:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_2 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned}$$

O, en forma matricial:

$$\mathbb{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

Matriz de coeficientes aumentada:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{N1} & a_{N2} & \dots & a_{nn} & b_n \end{array}\right]$$

Si $\mathbb{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ y $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}$, la existencia y unicidad de la solución está asegurada si una de las siguientes condiciones se cumple:

- $\mathbb{A}$ es invertible (no singular)
- $\mathrm{rg}(A) = n$
- El sistema homogéneo $\mathbb{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ admite solo la solución nula.

Solución: regla de Cramer

$$x_j = \frac{\Delta_j}{\det \mathbb{A}}$$

Esfuerzo computacional: $\mathcal{O}((n+1)!)$.
$n = 50$, Intel i7: 200 Gflops $\approx 5 \times 10^{45}$ años.

Métodos:

- Directos: alcanzan la solución en un número finito de pasos. $\mathcal{O}(2/3N^3)$.
  - Eliminación gaussiana
  - Factorización LU
  - LDM^T
  - Factorización de Cholesky
  - Factorización QR
- Iterativos: más eficientes en casos particulares. $\mathcal{O}(N^2)$.
  - Jacobi
  - Gauss-Seidel
  - Subespacios de Krylov
  - GMRES

Métodos:

- Directos: alcanzan la solución en un número finito de pasos. $\mathcal{O}(2/3N^3)$.
  - Eliminación gaussiana
  - Factorización LU
  - LDM^T
  - Factorización de Cholesky
  - Factorización QR
- Iterativos: más eficientes en casos particulares. $\mathcal{O}(N^2)$.
  - Jacobi
  - Gauss-Seidel
  - Subespacios de Krylov
  - GMRES

Estabilidad de la solución:

$$(\mathbb{A} + \delta\mathbb{A})(\boldsymbol{x} + \delta\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{b} + \delta\boldsymbol{b}$$

Unicidad de la solución: $\mathbb{A}$ es no singular: $|\mathbb{A}| \neq 0$.
Número de condición: $\mathrm{cond}(\mathbb{A}) = \|\mathbb{A}\|\|\mathbb{A}^{-1}\|$.

Se puede demostrar[1], que si

$$\mathrm{cond}(\mathbb{A})\frac{\|\delta\mathbb{A}\|}{\|\mathbb{A}\|} < 1$$

se cumple:

$$\frac{\|\delta\boldsymbol{x}\|}{\|\boldsymbol{x}\|} \leq \frac{\mathrm{cond}(\mathbb{A})}{1 - \mathrm{cond}(\mathbb{A})\frac{\|\delta\mathbb{A}\|}{\|\mathbb{A}\|}}\left(\frac{\|\delta\boldsymbol{b}\|}{\|\boldsymbol{b}\|} + \frac{\|\delta\mathbb{A}\|}{\|\mathbb{A}\|}\right)$$

En general es muy costoso evaluar $\|\mathbb{A}\|$. Usualmente se compara $|\mathbb{A}|$ con a_{ij}.

Ejemplo:

$$\begin{cases} 2x + y = 3 \\ 2x + 1.001y = 0 \end{cases}, \quad |\mathbb{A}| = 0.002$$

Solución: $x = 1501.5, y = -3000$.

[a] Ver González, *Introducción al cálculo numérico* (2014), sección 2.3., y Quarteroni, Sacco y Saleri, *Numerical Mathematics* (2000), sección 3.1.

En todos los casos: si $a_{ii} \neq 0 \mapsto$ no intercambiar filas.

- **Pivoteo trivial**:
  - $a_{ii} = 0 \mapsto$ buscar el primer $a_{ki} \neq 0 (k > i)$ e intercambiar filas $i \leftrightarrows k$.
- **Pivoteo parcial**:
  - $a_{ii} = 0 \mapsto$ buscar la fila k tal que $|a_{ki}| = \max\limits_{j>i} |a_{ji}| \wedge a_{ji} \neq 0$ e intercambiar filas $i \leftrightarrows k$.
- **Pivoteo parcial escalado**:
  - Calcular $s_i = \max\limits_{1 \leq j \leq N} |a_{ij}|, \; i = 1, \ldots, N$
  - $a_{ii} = 0 \mapsto$ buscar la fila k tal que $\dfrac{|a_{ki}|}{s_k} = \max\limits_{j>i} \dfrac{|a_{ji}|}{s_j} \wedge a_{ji} \neq 0$ e intercambiar filas $i \leftrightarrows k$ y $s_i \leftrightarrows s_k$.
- **Pivoteo completo o maximal**:
  - $a_{ii} = 0 \mapsto$ buscar la fila $j > i$ y columna $k > i$ tal que $|a_{jk}| = \max\limits_{\substack{l>i \\ m>i}} |a_{lm}| \wedge a_{jk} \neq 0$ e intercambiar filas $i \leftrightarrows j$ y columnas $i \leftrightarrows k$.

En todos los casos: si $a_{ii} \neq 0 \mapsto$ no intercambiar filas.

- **Pivoteo trivial**:
  - $a_{ii} = 0 \mapsto$ buscar el primer $a_{ki} \neq 0 (k > i)$ e intercambiar filas $i \leftrightarrows k$.
- **Pivoteo parcial**:
  - $a_{ii} = 0 \mapsto$ buscar la fila k tal que $|a_{ki}| = \max\limits_{j>i} |a_{ji}| \wedge a_{ji} \neq 0$ e intercambiar filas $i \leftrightarrows k$.
- **Pivoteo parcial escalado**:
  - Calcular $s_i = \max\limits_{1 \leq j \leq N} |a_{ij}|, \; i = 1, \ldots, N$
  - $a_{ii} = 0 \mapsto$ buscar la fila k tal que $\dfrac{|a_{ki}|}{s_k} = \max\limits_{j>i} \dfrac{|a_{ji}|}{s_j} \wedge a_{ji} \neq 0$ e intercambiar filas $i \leftrightarrows k$ y $s_i \leftrightarrows s_k$.
- **Pivoteo completo o maximal**:
  - $a_{ii} = 0 \mapsto$ buscar la fila $j > i$ y columna $k > i$ tal que $|a_{jk}| = \max\limits_{\substack{l>i \\ m>i}} |a_{lm}| \wedge a_{jk} \neq 0$ e intercambiar filas $i \leftrightarrows j$ y columnas $i \leftrightarrows k$.

Nota: en matemática "$x = 0$, $x \neq 0$", en *mundo real* "$|x| < \varepsilon$, $|x| > \varepsilon$".

Ejemplo con Python:

```
$ ./ejemplo.py
x =  [ 2. -2.  9.]
a @ x ? [ True  True  True]
a @ x ? True
a @ x = [ 2.  4. -1.]
[[1. 0. 0.]
 [0. 0. 1.]
 [0. 1. 0.]]
[[ 1.          0.          0.        ]
 [ 0.          1.          0.        ]
 [ 0.33333333 -0.33333333  1.        ]]
[[3.         2.         0.        ]
 [0.         5.         1.        ]
 [0.         0.         0.33333333]]
```

- R.L. Burden, D.J. Faires y A.M. Burden. *Análisis numérico*. 10.ª ed. Mexico: Cengage Learning, 2017. Capítulo 6.
- Gilbert Strang. *Linear Algebra and Its Applications, 4th Edition*. 4th. Brooks Cole, 2006. Capítulo 7.
- A.J. Salgado y S.M. Wise. *Classical Numerical Analysis*. Cambridge, United Kingdom: Cambridge University Press, 2023. DOI: 10.1017/9781108942607. Capítulo 3.
- A. Quarteroni, R. Sacco y F. Saleri. *Numerical Mathematics*. New York, United States: Springer-Verlag, 2000. Capítulo 3.