Transformada de Laplace

Transformada de Laplace. Transformada inversa. Transformación de problemas con condiciones iniciales.

Manuel Carlevaro

Departamento de Ingeniería Mecánica

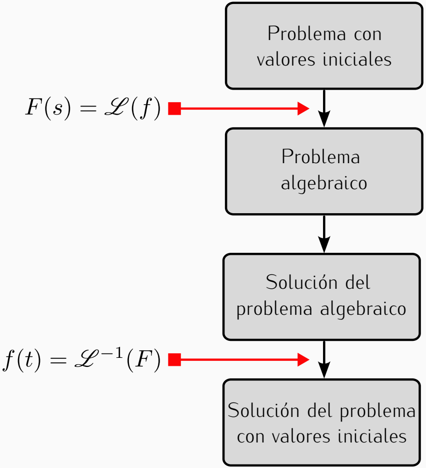
Grupo de Materiales Granulares - UTN FRLP

manuel.carlevaro@gmail.com

Cálculo Avanzado • 2023

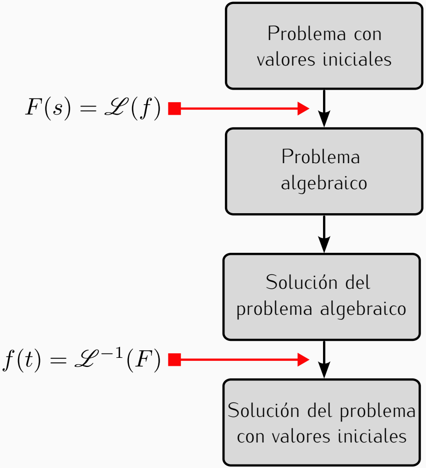
Transformada de Laplace

Motivación:



Transformada de Laplace

Motivación:



Definición : Transformada de Laplace.

Sea $f(t)$ definida para todo $t \geq 0$. Su transformada de Laplace se define:

$$F(s) = \mathscr{L}(f) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t)\, dt$$

Transformada de Laplace

Motivación:

Problema con valores iniciales

$\downarrow$ $F(s) = \mathscr{L}(f)$

Problema algebraico

$\downarrow$

Solución del problema algebraico

$\downarrow$ $f(t) = \mathscr{L}^{-1}(F)$

Solución del problema con valores iniciales

Definición : Transformada de Laplace.

Sea $f(t)$ definida para todo $t \geq 0$. Su transformada de Laplace se define:

$$F(s) = \mathscr{L}(f) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt$$

Teorema : Existencia.

Si $f(t)$ está definida y es continua a tramos en cada intervalo finito de $\mathbb{R}^+$, y satisface la condición

$$|f(t)| \leq Me^{kt}$$

para algunas constantes, M y k, entonces existe $\mathscr{L}(f)$, $\forall s > k$.

Caso general:

$$(Tf)(u) = \int_{t_1}^{t_2} f(t)\, K(t,u)\, dt = F(u)$$

donde $K(t,u)$ es la función **núcleo** o **kernel**.

Cuando K tiene asociado un *kernel inverso* $K^{-1}(u,t)$, se puede definir (más o menos) la transformación inversa:

$$f(t) = \int_{u_1}^{u_2} (Tf)(u)\, K^{-1}(u,t)\, dt$$

Si el kernel es **simétrico**: $K(t,u) = K(u,t) \mapsto$ operadores auto-adjuntos.

Caso general: ejemplos

Transformada	Símbolo	K	(t_1, t_2)	K^{-1}	(u_1, u_2)
Fourier	$\mathscr{F}$	$\frac{e^{-iut}}{\sqrt{2\pi}}$	$(-\infty, \infty)$	$\frac{e^{+iut}}{\sqrt{2\pi}}$	$(-\infty, \infty)$
Fourier seno	$\mathscr{F}_s$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\text{sen}(ut)$	$(0,\infty)$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\text{sen}(ut)$	$(0, \infty)$
Fourier coseno	$\mathscr{F}_c$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos(ut)$	$(0, \infty)$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos(ut)$	$(0, \infty)$
Laplace	$\mathscr{L}$	e^{-ut}	$(0, \infty)$	$\frac{e^{+ut}}{2\pi i}$	$(c - i\infty, c + i\infty)$
Laplace bilateral	$\mathscr{B}$	e^{-ut}	$(-\infty, \infty)$	$\frac{e^{+ut}}{2\pi i}$	$(c - i\infty, c + i\infty)$
Hilbert	$\mathcal{H}il$	$\frac{1}{\pi}\frac{1}{u-t}$	$(-\infty, \infty)$	$\frac{1}{\pi}\frac{1}{u-t}$	$(-\infty, \infty)$
Legendre	$\mathcal{J}$	$P_n(t)$	$(-1, 1)$	(*)	$(0, \infty)$

$$(^*)\ \mathcal{J}[f(x)] = \tilde{f}(n) = \int_{-1}^{1} P_n(x)\, f(x)\, dx$$

$$\mathcal{J}^{-1}[\tilde{f}(n)] = f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{2} \tilde{f}(n) P_n(x)$$

$f(t) = 1,\, t \geq 0$

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}(f) = \mathscr{L}(1) &= \int_0^\infty e^{-st}\, dt \\
&= \lim_{T\to\infty} \int_0^\infty 1 \cdot e^{-st}\, dt \\
&= \lim_{T\to\infty} \left[-\frac{1}{s} e^{-st} \right]_0^T \\
&= \lim_{T\to\infty} \left[-\frac{1}{s} e^{-sT} + \frac{1}{s} e^{0} \right] \\
&= \frac{1}{s}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathscr{L}(1) = \frac{1}{s}}$$

$f(t) = 1,\, t \geq 0$

$$
\begin{aligned}
\mathscr{L}(f) = \mathscr{L}(1) &= \int_0^{\infty} e^{-st}\, dt \\
&= \lim_{T\to\infty} \int_0^{\infty} 1 \cdot e^{-st}\, dt \\
&= \lim_{T\to\infty} \left[-\frac{1}{s} e^{-st} \right]_0^T \\
&= \lim_{T\to\infty} \left[-\frac{1}{s} e^{-sT} + \frac{1}{s} e^{0} \right] \\
&= \frac{1}{s}
\end{aligned}
$$

$$
\boxed{\mathscr{L}(1) = \frac{1}{s}}
$$

$f(t) = e^{at},\, t \geq 0$

$$
\begin{aligned}
\mathscr{L}(e^{at}) &= \int_0^{\infty} e^{-st}\, e^{at}\, dt \\
&= \frac{1}{a-s} e^{-(s-a)t)} \Big|_0^{\infty} \\
&= \frac{1}{s-a}
\end{aligned}
$$

$$
\boxed{\mathscr{L}(e^{at}) = \frac{1}{s-a}}
$$

cuando $s - a > 0$.

- E. Kreyszig, H. Kreyszig y E.J. Norminton. *Advanced Engineering Mathematics*. Hoboken, USA: John Wiley & Sons, Inc, 2011. Capítulo 11 (11.7 – 11.9).
- Peter V O'Neil. *Matemáticas avanzadas para ingeniería*. 7.ª ed. México, DF: CENGAGE Learning Custom Publishing, 2012. Capítulo 3.
- K A Stroud y Dexter J Booth. *Advanced Engineering Mathematics*. 6.ª ed. London, England: Bloomsbury Academic, 2020. Capítulos 9.