UNIVERSIDAD TECNICA FEDERICO SANTA MARIA

DEPARTAMENTO DE INFORMÁTICA

Estructuras Discretas - Lógica

Versión 220223

Capítulos

Lógica de Proposiciones

Proposiciones

Definición: proposición

Es una frase declarativa que es verdadera o falsa, pero no ambas cosas a la vez

¿Cuáles son proposiciones?

1. "El 10/03/2014 estuvo nublado"
2. "Cierra la puerta"
3. "$1 + 1 = 3$"
4. "$z + 2 = 5$"

Proposiciones

Definición: proposición

Es una frase declarativa que es verdadera o falsa, pero no ambas cosas a la vez

¿Cuáles son proposiciones?

1.	"El 10/03/2014 estuvo nublado"	si, y su valor es **V**
2.	"Cierra la puerta"	no, es una declaración
3.	"1 + 1 = 3"	si, y su valor es **F**
4.	"$z + 2 = 5$"	no, porque no conocemos el valor de z

Proposiciones

Definición: proposición

Es una frase declarativa que es verdadera o falsa, pero no ambas cosas a la vez

¿Cuáles son proposiciones?

1.	"El 10/03/2014 estuvo nublado"	si, y su valor es **V**
2.	"Cierra la puerta"	no, es una declaración
3.	"1 + 1 = 3"	si, y su valor es **F**
4.	"$z + 2 = 5$"	no, porque no conocemos el valor de z

Definición: proposición simple

Una proposición es **simple** si no se puede descomponer en más proposiciones

Operadores Lógicos

Los operadores lógicos se usan para crear proposiciones **compuestas** a partir de proposiciones simples:

negación	$\neg$
conjunción	$\wedge$
disyunción	$\vee$
o exclusivo	$\oplus$
implicación	$\Rightarrow$
doble implicación	$\Leftrightarrow$

Usaremos **tablas de verdad** para darle semántica a los operadores lógicos

Tablas de Verdad

- Operadores unarios

p	$\neg p$
V	F
F	V

- Operadores binarios

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \oplus q$	$p \Rightarrow q$
V	V	V	V	F	V
V	F	F	V	V	F
F	V	F	V	V	V
F	F	F	F	F	V

Implicación

- $p \Rightarrow q$ (equivalente a $\neg p \vee q$)
  - p se conoce como hipótesis, antecedente o premisa
  - q se conoce como tesis, conclusión o consecuencia
- Otras formas de escribir $p \Rightarrow q$:
  - p implica q
  - si p, entonces q
  - p es suficiente para q
  - q siempre que p
  - q si p

Implicación

- El valor de q solo importa en el caso de en que p es verdadero:
  - si la hipótesis es verdadera y la tesis es falsa, entonces la implicación es falsa

Implicación

- El valor de q solo importa en el caso de en que p es verdadero:
  - si la hipótesis es verdadera y la tesis es falsa, entonces la implicación es falsa
- Implicación es como un contrato: "Si van al 70 % de las ayudantías, entonces ustedes esperan obtener al menos un 55 en su nota de trabajo en clase"
  - si van al 70 % de las ayudantías y obtienen un 55 o más, estarán contentos (se cumple el contrato).

Implicación

- El valor de q solo importa en el caso de en que p es verdadero:
  - si la hipótesis es verdadera y la tesis es falsa, entonces la implicación es falsa
- Implicación es como un contrato: "Si van al 70 % de las ayudantías, entonces ustedes esperan obtener al menos un 55 en su nota de trabajo en clase"
  - si van al 70 % de las ayudantías y obtienen un 55 o más, estarán contentos (se cumple el contrato).
  - si van a menos del 70 %, no esperan obtener más de un 55, pero tampoco van a reclamar si obtienen más de un 55.

Implicación

- El valor de q solo importa en el caso de en que p es verdadero:
  - si la hipótesis es verdadera y la tesis es falsa, entonces la implicación es falsa
- Implicación es como un contrato: “Si van al 70 % de las ayudantías, entonces ustedes esperan obtener al menos un 55 en su nota de trabajo en clase”
  - si van al 70 % de las ayudantías y obtienen un 55 o más, estarán contentos (se cumple el contrato).
  - si van a menos del 70 %, no esperan obtener más de un 55, pero tampoco van a reclamar si obtienen más de un 55.
  - solo reclamarán si van al 70 % de las ayudantías y obtienen menos de un 55 (se rompió el contrato)

Ejemplos

1. "hoy es el 11/03/2013 y estamos en Valparaiso"
2. "le eche azúcar o leche a mi café"
3. "Juan aprobó o réprobo el certamen 1"
4. "si hoy nieva, entonces $2 + 3 = 5$"
5. "si hoy nieva, entonces $2 + 3 = 6$"

Ejemplos

1. “hoy es el 11/03/2013 y estamos en Valparaiso”
2. “le eche azúcar o leche a mi café”
3. “Juan aprobó o réprobo el certamen 1”
4. “si hoy nieva, entonces 2 + 3 = 5”
5. “si hoy nieva, entonces 2 + 3 = 6”

Ojo: #4 es siempre verdadera, porque q es siempre verdadera, pero #5 es verdadera solo en días en que no nieva.

Implicaciones Relacionadas a $p \Rightarrow q$

- recíproca: $q \Rightarrow p$
- contrarecíproca: $\neg q \Rightarrow \neg p$
- inversa: $\neg p \Rightarrow \neg q$

Implicaciones Relacionadas a $p \Rightarrow q$

- recíproca: $q \Rightarrow p$
- contrarecíproca: $\neg q \Rightarrow \neg p$
- inversa: $\neg p \Rightarrow \neg q$

La implicación y su contrarecíproca tienen la misma tabla de verdad

p	q	$p \Rightarrow q$	$\neg p$	$\neg q$	$\neg q \Rightarrow \neg p$
V	V	V	F	F	V
V	F	F	F	V	F
F	V	V	V	F	V
F	F	V	V	V	V

Cuando dos proposiciones tienen la misma tabla de verdad, decimos que son equivalentes

Implicaciones Relacionadas a $p \Rightarrow q$

Si p es **V** y q es **F**, entonces $p \Rightarrow q$ es **F**. ¿Qué pasa con la recíproca y la inversa?

- recíproca: Si p es **V** y q es **F**, $q \Rightarrow p$ es

Implicaciones Relacionadas a $p \Rightarrow q$

Si p es **V** y q es **F**, entonces $p \Rightarrow q$ es **F**. ¿Qué pasa con la recíproca y la inversa?

- recíproca: Si p es **V** y q es **F**, $q \Rightarrow p$ es **V**
- inversa: Si p es **V** y q es **F**. $\neg p \Rightarrow \neg q$ es

Implicaciones Relacionadas a $p \Rightarrow q$

Si p es **V** y q es **F**, entonces $p \Rightarrow q$ es **F**. ¿Qué pasa con la recíproca y la inversa?

- recíproca: Si p es **V** y q es **F**, $q \Rightarrow p$ es **V**
- inversa: Si p es **V** y q es **F**. $\neg p \Rightarrow \neg q$ es **V**

Implicaciones Relacionadas a $p \Rightarrow q$

Si p es **V** y q es **F**, entonces $p \Rightarrow q$ es **F**. ¿Qué pasa con la recíproca y la inversa?

- recíproca: Si p es **V** y q es **F**, $q \Rightarrow p$ es **V**
- inversa: Si p es **V** y q es **F**. $\neg p \Rightarrow \neg q$ es **V**

Así que $p \Rightarrow q$ no es equivalente a $q \Rightarrow p$, $\neg p \Rightarrow \neg q$

Implicaciones Relacionadas a $p \Rightarrow q$

Si p es **V** y q es **F**, entonces $p \Rightarrow q$ es **F**. ¿Qué pasa con la recíproca y la inversa?

- recíproca: Si p es **V** y q es **F**, $q \Rightarrow p$ es **V**
- inversa: Si p es **V** y q es **F**. $\neg p \Rightarrow \neg q$ es **V**

Así que $p \Rightarrow q$ no es equivalente a $q \Rightarrow p$, $\neg p \Rightarrow \neg q$

Propuesto: usando una tabla de verdad, mostrar que la recíproca y la inversa de una implicación son equivalentes

Doble Implicación

$p \Leftrightarrow q$ es verdadera cuando $p \Rightarrow q$ y $q \Rightarrow p$ son verdaderas

p	q	$p \Leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

En lenguaje natural

- p si, y solo si, q (que abreviamos a p sii q)
- p es necesario y suficiente para q
- si p, entonces q, y recíprocamente

Ejemplo

r: "puedes tomar el ramo si, y solo si, cumples los requisitos"

p: "poder tomar el ramo"

q: "cumplir los requisitos"

- r es verdadera si p y q tienen el mismo valor
    - caso 1: puedes tomar el ramo, cumples con los requisitos (p, q son **V**)
    - caso 2: no puedes tomar el ramo, no cumples con los requisitos (p, q son **F**)

Ejemplo

r: “puedes tomar el ramo si, y solo si, cumples los requisitos”
p: “poder tomar el ramo”
q: “cumplir los requisitos”

- r es verdadera si p y q tienen el mismo valor
  - caso 1: puedes tomar el ramo, cumples con los requisitos (p, q son **V**)
  - caso 2: no puedes tomar el ramo, no cumples con los requisitos (p, q son **F**)
- r es falsa si p y q tienen valores distintos
  - caso 3: puedes tomar el ramo, pero no cumples con los requisitos (necesitas una autorización)
  - caso 2: cumples los requisitos, pero no puedes tomar el ramo (problemas de cupo, horario, etc.)

Fórmulas

Ahora podemos construir fórmulas

Definición: fórmula bien formada (FBF)

1. una prop. simple es una FBF
2. si p es una FBF, $\neg p$ también lo es
3. si p, q son FBFs, entonces también lo son $p \wedge q, p \vee q, p \oplus q, p \Rightarrow q, p \Leftrightarrow q$

Ejemplo: $(\neg a \wedge (b \vee c))$ es FBF, pero $((a \Rightarrow b) \vee \quad)$ no lo es

Podemos determinar el valor de una FBF evaluando sus subexpresiones:

- ¿que valor tiene $(\neg a \wedge (b \vee c))$ si a es **F**, b es **V** y c es **F**?

Precedencia de Operadores Lógicos

$$\begin{array}{ll} 1. & \neg \\ 2. & \wedge \\ 3. & \vee \\ 4. & \Rightarrow \\ 5. & \Leftrightarrow \end{array}$$

Ejemplos:

- $\neg p \vee q$: es equivalente a $((\neg p) \vee q)$, y no $\neg(p \vee q)$
- $p \vee q \Rightarrow s$ es equivalente $(p \vee q) \Rightarrow s$, y no $p \vee (q \Rightarrow s)$

Los lenguajes naturales a menudo son ambiguos

- El objetivo de traducir frases del lenguaje natural al lenguaje lógico es tratar de evitar estas ambigüedades
- Además, una vez traducida una frase a proposiciones y conectores lógicos, podemos determinar los valores de verdad de la expresión, como también razonar acerca de la expresión
- El paso del lenguaje natural al lenguaje lógico se conoce como formalización

"Tendrás un 100 en este ramo si, y solo si tienes un 100 en el examen final o haces todos los problemas de la guía"

- Podemos representar la expresión completa con una sola proposición, pero esto no sería útil para analizar el significado de la frase, o razonar con ella

"Tendrás un 100 en este ramo si, y solo si tienes un 100 en el examen final o haces todos los problemas de la guía"

- Podemos representar la expresión completa con una sola proposición, pero esto no sería útil para analizar el significado de la frase, o razonar con ella
- Entonces, definiremos proposiciones simples para representar cada parte de la frase, y después determinaremos cuales operadores lógicos son apropiados:
  - a: tener un 100 en el examen final
  - b: hacer todos los problemas de la guía
  - c: tener un 100 en el ramo

"Tendrás un 100 en este ramo si, y solo si tienes un 100 en el examen final o haces todos los problemas de la guía"

- Podemos representar la expresión completa con una sola proposición, pero esto no sería útil para analizar el significado de la frase, o razonar con ella
- Entonces, definiremos proposiciones simples para representar cada parte de la frase, y después determinaremos cuales operadores lógicos son apropiados:
  - a: tener un 100 en el examen final
  - b: hacer todos los problemas de la guía
  - c: tener un 100 en el ramo
- Considerando que el "si, y solo si" es una forma de expresar una doble implicación, la frase se puede representar como $c \Leftrightarrow a \vee b$.

Consistencia

- Podemos usar proposiciones para analizar los requisitos de un sistema:
  - R_1: el sistema está en modo multiusuario si, y solo si, está operando normalmente
  - R_2: si el sistema está operando normalmente, el kernel está funcionando
  - R_3: el kernel no está funcionando o el sistema está en modo de interrupción
  - R_4: si el sistema no está en modo multiusuario, entonces está en modo de interrupción
  - R_5: el sistema no está en modo de interrupción
- Proposiciones?

Consistencia

- Podemos usar proposiciones para analizar los requisitos de un sistema:
  - R_1: el sistema está en modo multiusuario si, y solo si, está operando normalmente
  - R_2: si el sistema está operando normalmente, el kernel está funcionando
  - R_3: el kernel no está funcionando o el sistema está en modo de interrupción
  - R_4: si el sistema no está en modo multiusuario, entonces está en modo de interrupción
  - R_5: el sistema no está en modo de interrupción
- Proposiciones?
  - p: el sistema está en modo multiusuario
  - q: el sistema está operando normalmente
  - r: el kernel está funcionando
  - s: el sistema está funcionando en modo de interrupción

Consistencia

- Podemos usar proposiciones para analizar los requisitos de un sistema:
  - R_1: el sistema está en modo multiusuario si, y solo si, está operando normalmente $p \Leftrightarrow q$
  - R_2: si el sistema está operando normalmente, el kernel está funcionando $q \Rightarrow r$
  - R_3: el kernel no está funcionando o el sistema está en modo de interrupción $\neg r \vee s$
  - R_4: si el sistema no está en modo multiusuario, entonces está en modo de interrupción $\neg p \Rightarrow s$
  - R_5: el sistema no está en modo de interrupción $\neg s$
- Proposiciones?
  - p: el sistema está en modo multiusuario
  - q: el sistema está operando normalmente
  - r: el kernel está funcionando
  - s: el sistema está funcionando en modo de interrupción

Consistencia

Definición: consistencia

Un conjunto de FBF es consistente si existe al menos una asignación de valores de verdad que haga que todas las fórmulas del conjunto sean verdaderas

Veamos si $R_1 - R_5$ son consistentes:

- R_5: $\neg s$ solo puede ser **V** si $s = \mathbf{F}$

Consistencia

Definición: consistencia

Un conjunto de FBF es consistente si existe al menos una asignación de valores de verdad que haga que todas las fórmulas del conjunto sean verdaderas

Veamos si $R_1 - R_5$ son consistentes:

- R_5: $\neg s$ solo puede ser **V** si $s = \mathbf{F}$
- R_3: reemplazando el valor de s en $\neg r \vee s$, tenemos que $r = \mathbf{F}$ para que R_3 sea **V**

Consistencia

Definición: consistencia

Un conjunto de FBF es consistente si existe al menos una asignación de valores de verdad que haga que todas las fórmulas del conjunto sean verdaderas

Veamos si $R_1 - R_5$ son consistentes:

- R_5: $\neg s$ solo puede ser **V** si $s = \mathbf{F}$
- R_3: reemplazando el valor de s en $\neg r \vee s$, tenemos que $r = \mathbf{F}$ para que R_3 sea **V**
- R_4: $\neg p \Rightarrow s \equiv p \vee s$, entonces $p = \mathbf{V}$ para que R_4 sea **V**

Consistencia

Definición: consistencia

Un conjunto de FBF es consistente si existe al menos una asignación de valores de verdad que haga que todas las fórmulas del conjunto sean verdaderas

Veamos si $R_1 - R_5$ son consistentes:

- R_5: $\neg s$ solo puede ser **V** si $s = \mathbf{F}$
- R_3: reemplazando el valor de s en $\neg r \vee s$, tenemos que $r = \mathbf{F}$ para que R_3 sea **V**
- R_4: $\neg p \Rightarrow s \equiv p \vee s$, entonces $p = \mathbf{V}$ para que R_4 sea **V**
- R_2: $q \Rightarrow r$, entonces $q = \mathbf{F}$ para que R_2 sea **V**

Consistencia

Definición: consistencia

Un conjunto de FBF es consistente si existe al menos una asignación de valores de verdad que haga que todas las fórmulas del conjunto sean verdaderas

Veamos si $R_1 - R_5$ son consistentes:

- R_5: $\neg s$ solo puede ser **V** si $s = \mathbf{F}$
- R_3: reemplazando el valor de s en $\neg r \vee s$, tenemos que $r = \mathbf{F}$ para que R_3 sea **V**
- R_4: $\neg p \Rightarrow s \equiv p \vee s$, entonces $p = \mathbf{V}$ para que R_4 sea **V**
- R_2: $q \Rightarrow r$, entonces $q = \mathbf{F}$ para que R_2 sea **V**
- R_1: $p \Leftrightarrow q$

Consistencia

Definición: consistencia

Un conjunto de FBF es consistente si existe al menos una asignación de valores de verdad que haga que todas las fórmulas del conjunto sean verdaderas

Veamos si $R_1 - R_5$ son consistentes:

- R_5: $\neg s$ solo puede ser **V** si $s = \mathbf{F}$
- R_3: reemplazando el valor de s en $\neg r \vee s$, tenemos que $r = \mathbf{F}$ para que R_3 sea **V**
- R_4: $\neg p \Rightarrow s \equiv p \vee s$, entonces $p = \mathbf{V}$ para que R_4 sea **V**
- R_2: $q \Rightarrow r$, entonces $q = \mathbf{F}$ para que R_2 sea **V**
- R_1: $p \Leftrightarrow q$
  - del análisis que hicimos de $R_2 - R_5$, sabemos que $p = \mathbf{V}$ y $q = \mathbf{F}$ para que $R_2 - R_5$ sean consistentes

Consistencia

Definición: consistencia

Un conjunto de FBF es consistente si existe al menos una asignación de valores de verdad que haga que todas las fórmulas del conjunto sean verdaderas

Veamos si $R_1 - R_5$ son consistentes:

- R_5: $\neg s$ solo puede ser **V** si $s = \mathbf{F}$
- R_3: reemplazando el valor de s en $\neg r \vee s$, tenemos que $r = \mathbf{F}$ para que R_3 sea **V**
- R_4: $\neg p \Rightarrow s \equiv p \vee s$, entonces $p = \mathbf{V}$ para que R_4 sea **V**
- R_2: $q \Rightarrow r$, entonces $q = \mathbf{F}$ para que R_2 sea **V**
- R_1: $p \Leftrightarrow q$
  - del análisis que hicimos de $R_2 - R_5$, sabemos que $p = \mathbf{V}$ y $q = \mathbf{F}$ para que $R_2 - R_5$ sean consistentes
  - sin embargo, con estos valores, R_1 es **F**

Consistencia

Definición: consistencia

Un conjunto de FBF es consistente si existe al menos una asignación de valores de verdad que haga que todas las fórmulas del conjunto sean verdaderas

Veamos si $R_1 - R_5$ son consistentes:

- R_5: $\neg s$ solo puede ser **V** si $s = \mathbf{F}$
- R_3: reemplazando el valor de s en $\neg r \vee s$, tenemos que $r = \mathbf{F}$ para que R_3 sea **V**
- R_4: $\neg p \Rightarrow s \equiv p \vee s$, entonces $p = \mathbf{V}$ para que R_4 sea **V**
- R_2: $q \Rightarrow r$, entonces $q = \mathbf{F}$ para que R_2 sea **V**
- R_1: $p \Leftrightarrow q$
  - del análisis que hicimos de $R_2 - R_5$, sabemos que $p = \mathbf{V}$ y $q = \mathbf{F}$ para que $R_2 - R_5$ sean consistentes
  - sin embargo, con estos valores, R_1 es **F**
  - entonces, $R_1 - R_5$ son inconsistentes $\Rightarrow$ no se puede construir este sistema

Clasificación FBF

Podemos clasificar las FBF de acuerdo a sus valores de verdad

Definición: tautología

Una fórmula que siempre es verdadera, sin importar los valores de verdad de sus proposiciones simples

Definición: contradicción

Una fórmula que siempre es falsa, sin importar los valores de verdad de sus proposiciones simples

Definición: contingencia

Si una fórmula no es ni una tautología ni una contradicción, se denomina contingencia

Tautología más simple: $p \vee \neg p$
Contradicción más simple: $p \wedge \neg p$

Equivalencia

Si dos fórmulas tienen los mismos valores de verdad para todos los casos posibles, entonces se dice que son fórmulas equivalentes.

Definición: equivalencia ($\equiv$)

Sean p y q proposiciones. Se dice que p y q son lógicamente equivalentes si $p \Leftrightarrow q$ es una tautología

OJO: el símbolo $\equiv$ no es un operador lógico!

- Podemos construir una tabla de verdad para comprobar si dos fórmulas son equivalentes ...

Equivalencia

Si dos fórmulas tienen los mismos valores de verdad para todos los casos posibles, entonces se dice que son fórmulas equivalentes.

Definición: equivalencia ($\equiv$)

Sean p y q proposiciones. Se dice que p y q son lógicamente equivalentes si $p \Leftrightarrow q$ es una tautología

OJO: el símbolo $\equiv$ no es un operador lógico!

- Podemos construir una tabla de verdad para comprobar si dos fórmulas son equivalentes ...
- ...pero en la práctica, este método no escala, porque si las fórmulas tienen n proposiciones, entonces la tabla de verdad tendrá 2^n filas
- En este curso, usaremos leyes y reglas fundamentales de la lógica para demostrar equivalencias

Equivalencias Lógicas Fundamentales

Ley	Variante	Nombre
$p \vee \neg p \equiv V$		Ley de Medio Excluido
$p \wedge \neg p \equiv F$		Ley de Contradicción
$p \vee F \equiv p$	$p \wedge V \equiv p$	Ley de Identidad
$p \wedge F \equiv F$	$p \vee V \equiv V$	Ley de Dominación
$p \wedge p \equiv p$	$p \vee p \equiv p$	Ley de Idempotencia
$\neg\neg p \equiv p$		Ley de Doble Negación
$\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$	$\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$	Ley de Morgan
$p \wedge q \equiv q \wedge p$	$p \vee q \equiv q \vee p$	Leyes Conmutativas
$p \wedge (q \wedge r) \equiv (p \wedge q) \wedge r$	$p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee r$	Leyes Asociativas
$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$	$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	Leyes Distributivas
$p \wedge (p \vee q) \equiv p$	$p \vee (p \wedge q) \equiv p$	Leyes de Absorción
$p \Rightarrow q \equiv \neg p \vee q$		Eliminación de implicación
$p \Rightarrow q \equiv \neg q \Rightarrow \neg p$		Contrarrecíproca

Uso de Equivalencias Lógicas Fundamentales
Simplificar Fórmulas

Simplificar una fórmula: usar las equivalencias lógicas fundamentales para encontrar una fórmula equivalente a la original, pero más simple

Ejemplo: simplifique la expresión $(p \vee q) \wedge \neg(\neg p \wedge q)$

Uso de Equivalencias Lógicas Fundamentales

Simplificar Fórmulas

Simplificar una fórmula: usar las equivalencias lógicas fundamentales para encontrar una fórmula equivalente a la original, pero más simple

Ejemplo: simplifique la expresión $(p \vee q) \wedge \neg(\neg p \wedge q)$

$$
\begin{array}{ll}
(p \vee q) \wedge \neg(\neg p \wedge q) & \\
\quad \equiv (p \vee q) \wedge (\neg(\neg p) \vee \neg q) & \text{Ley de Morgan} \\
\quad \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee \neg q) & \text{Ley de doble negación} \\
\quad \equiv p \vee (q \wedge \neg q) & \text{Ley distributiva de } \vee \text{ sobre } \wedge \\
\quad \equiv p \vee F & \text{Ley de contradicción} \\
\quad \equiv p & \text{Ley de identidad}
\end{array}
$$

En consecuencia, tenemos que $(p \vee q) \wedge \neg(\neg p \wedge q) \equiv p$

Determinar si dos fórmulas son equivalentes: aplicar las equivalencias lógicas fundamentales a una de las fórmulas, tratando de derivar la otra fórmula

Ejemplo: Demostrar que $(p \Rightarrow r) \vee (q \Rightarrow r) \equiv (p \wedge q) \Rightarrow r$

Determinar si dos fórmulas son equivalentes: aplicar las equivalencias lógicas fundamentales a una de las fórmulas, tratando de derivar la otra fórmula

Ejemplo: Demostrar que $(p \Rightarrow r) \vee (q \Rightarrow r) \equiv (p \wedge q) \Rightarrow r$

$$
\begin{aligned}
&(p \Rightarrow r) \vee (q \Rightarrow r) && \\
&\quad \equiv (\neg p \vee r) \vee (q \Rightarrow r) && \text{Eliminación de implicación} \\
&\quad \equiv (\neg p \vee r) \vee (\neg q \vee r) && \text{Eliminación de implicación} \\
&\quad \equiv \neg p \vee \neg q \vee r \vee r && \text{Leyes asociativas y conmutativas de } \vee \\
&\quad \equiv \neg p \vee \neg q \vee r && \text{Ley de idempotencia} \\
&\quad \equiv \neg (p \wedge q) \vee r && \text{Ley de Morgan} \\
&\quad \equiv (p \wedge q) \Rightarrow r && \text{Eliminación de implicación}
\end{aligned}
$$

En consecuencia, $(p \Rightarrow r) \vee (q \Rightarrow r)$ y $(p \wedge q) \Rightarrow r$ son lógicamente equivalentes

Determinar si una fórmula es una tautología: mostrar que la fórmula es equivalente a **V**

Ejemplo: Muestre que $(p \wedge q) \Rightarrow (p \vee q)$ es una tautología

Determinar si una fórmula es una tautología: mostrar que la fórmula es equivalente a **V**

Ejemplo: Muestre que $(p \wedge q) \Rightarrow (p \vee q)$ es una tautología

$$
\begin{aligned}
&(p \wedge q) \Rightarrow (p \vee q) & \\
&\quad \equiv \neg(p \wedge q) \vee (p \vee q) & \text{Eliminación de implicación} \\
&\quad \equiv (\neg p \vee \neg q) \vee (p \vee q) & \text{Ley de Morgan} \\
&\quad \equiv (\neg p \vee p) \vee (\neg q \vee q) & \text{Leyes asociativas y conmutativas de } \vee \\
&\quad \equiv V \vee V & \text{Ley de Medio Excluido} \times 2 \\
&\quad \equiv V & \text{Ley de dominación}
\end{aligned}
$$

En consecuencia, $(p \wedge q) \Rightarrow (p \vee q)$ es una tautología

Lógica de Predicados

- Programas incluyen expresiones como $x = 0$, $x + y > 5$, etc.
- Ya habíamos dicho que estas expresiones no eran proposiciones, porque no se le puede asignar un valor de verdad al no conocer los valores de x, y
- Pero es engorroso describir el estado de un sistema usando solo proposiciones:
  - “Si Pedro se tituló como ICI, entonces Pedro aprobó IWI-131”
  - “Si Juan se tituló como ICI, entonces Juan aprobó IWI-131”
  - ...
  - “Si Pedro se tituló como ICI, entonces Pedro aprobó INF-152”
  - “Si Juan se tituló como ICI, entonces Juan aprobó INF-152”
  - ...
- Debemos especificar una proposición por cada hecho que conocemos

- Las proposiciones de la diapositiva anterior:
  - "Si Pedro se tituló como ICI, entonces Pedro aprobó IWI-131"
  - "Si Juan se tituló como ICI, entonces Juan aprobó IWI-131"
  - ...
  - "Si Pedro se tituló como ICI, entonces Pedro aprobó INF-152"
  - "Si Juan se tituló como ICI, entonces Juan aprobó INF-152"
  - ...
- se pueden especificar usando un **predicado**:
  - "Si x se tituló como ICI, entonces x aprobó y"
  - donde $x \in \{\text{Pedro}, \text{Juan}, \ldots\}$ y $y \in \{\text{IWI-131}, \text{INF-152}, \ldots\}$

Definición: predicado

Una frase declarativa es un predicado si:

1. contiene una o mas variables libres ...
2. ... y se convierte en una proposición cuando se le asigna valores a las variables libres

- Predicado $\equiv$ Proposición abierta $\equiv$ Función proposicional
  - Esto es porque un predicado es una función entre el universo de las variables libres y los dos posibles valores de verdad
  - Si $P(x)$ denota la expresión $x > 3$, entonces $P(2) = \mathbf{F}$, $P(4) = \mathbf{V}$
- Las variables libres representan objetos de un tipo especifico, como personas, números enteros, números reales, etc.
  - Un predicado de n variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ se denota $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$
  - Ejemplo: Sea $Q(x, y, z) : x + y > z$. Entonces $Q(2, 0, 5) = \mathbf{F}$, mientras que $Q(3, 3, 2) = \mathbf{V}$.

Podemos usar **cuantificadores** para especificar propiedades de conjuntos de objetos:

- Universal ($\forall$): la propiedad es verdadera para todos los elementos del conjunto
- Existencial ($\exists$): la propiedad es verdadera para al menos un elemento del conjunto

Definición: cuantificador universal

La cuantificación universal de $P(x)$ es la proposición "$P(x)$ es verdadera para todos los valores x del dominio especificado", y se denota $\forall x P(x)$

Ejemplos:

1. $\forall x P(x)$, donde $P(x) : x+1 > x$ (x es número entero)
2. $\forall x Q(x)$, donde $Q(x) : x > 3$ (x es número natural)

Definición: cuantificador universal

La cuantificación universal de $P(x)$ es la proposición "$P(x)$ es verdadera para todos los valores x del dominio especificado", y se denota $\forall x P(x)$

Ejemplos:

1. $\forall x P(x)$, donde $P(x) : x+1 > x$ (x es número entero)
   - Es fácil ver que $P(x)$ es **V** para todos los números enteros, así que $\forall x P(x)$ es **V**
2. $\forall x Q(x)$, donde $Q(x) : x > 3$ (x es número natural)
   - Como $Q(2)$ es **F**, tenemos que $\forall x Q(x)$ es **F**
   - $Q(2)$ se conoce como "contraejemplo" de $\forall x Q(x)$

Definición: cuantificador existencial

La cuantificación existencial de $P(x)$ es la proposición “existe al menos un elemento x en el dominio especificado tal que $P(x)$ es verdadera”, y se denota $\exists x\, P(x)$

Ejemplos:

1. $\exists x\, Q(x)$, donde $Q(x) : x > 3$ (x es número natural)
2. $\exists x\, R(x)$, donde $R(x) : x = x + 1$ (x es número entero)

Definición: cuantificador existencial

La cuantificación existencial de $P(x)$ es la proposición "existe al menos un elemento x en el dominio especificado tal que $P(x)$ es verdadera", y se denota $\exists x P(x)$

Ejemplos:

1. $\exists x Q(x)$, donde $Q(x) : x > 3$ (x es número natural)
   - Como $Q(7)$ es **V**, tenemos que $\exists x Q(x)$ es **V**
2. $\exists x R(x)$, donde $R(x) : x = x + 1$ (x es número entero)
   - Como $R(x)$ es **F** para todos los números enteros, tenemos que $\exists x R(x)$ es **F**

Si podemos enumerar los elementos del dominio $x_1, x_2, x_3, \ldots x_n$, vemos que:

$$\forall x\, P(x) \equiv P(x_1) \wedge P(x_2) \wedge P(x_3) \wedge \cdots \wedge P(x_n)$$

$$\exists x\, P(x) \equiv P(x_1) \vee P(x_2) \vee P(x_3) \vee \cdots \vee P(x_n)$$

- $\forall x\, P(x)$
  - **V** si $P(x)$ es verdadero para cada x
  - **F** si $P(x)$ es falso para algún x
- $\exists x\, P(x)$
  - **V** si $P(x)$ es verdadero para algún x
  - **F** si $P(x)$ es falso para todo x

Variables Ligadas

- Una variable queda **ligada** cuando le asignamos un valor o queda asociada a un cuantificador. Una variable no ligada se denomina **libre**.
- Toda variable en un predicado debe ser ligada para convertirla en proposición
- La parte de la expresión a la cual se aplica el cuantificador se llama el **ámbito** de este cuantificador

Ejemplos:

1. $\exists x\, Q(x,y)$: x está ligada al $\exists$, pero la variable y es libre
2. $\exists x\, (P(x) \wedge Q(x)) \vee \forall x R(x)$: todas las variables están ligadas. El ámbito del $\exists x$ es la expresión $P(x) \wedge Q(x)$ y el ámbito del segundo cuantificador es la expresión $R(x)$
3. $\exists x (P(x) \wedge Q(x)) \vee \forall y R(y)$: es la misma expresión que # 2. Los ámbitos de los dos cuantificadores no solapan, así que podemos cambiar el nombre de la variable sin afectar el valor de verdad de la expresión

Negación

- $\neg \forall x P(x) \equiv \exists x \neg P(x)$
  - Si $\neg \forall x P(x)$ es **V**, entonces $\forall x P(x)$ es **F**
  - Esto significa que existe al menos un elemento x tal que $P(x)$ es **F**
  - Es decir, $\exists x \neg P(x)$ es **V**
- $\neg \exists x P(x) \equiv \forall x \neg P(x)$
  - Si $\neg \exists x P(x)$ es **V**, entonces $\exists x P(x)$ es **F**
  - Esto significa que no existe elemento x tal que $P(x)$ sea **V**
  - Es decir, $\forall x \neg P(x)$ es **V**

Negación
Ejemplos

1. $\neg \forall x \, (x^2 > x) \equiv \; ?$
2. $\neg \exists x \, (P(x) \vee Q(x)) \equiv \; ?$
3. $\neg \forall x \, (P(x) \wedge \neg Q(x)) \equiv \; ?$

Negación
Ejemplos

1. $\neg\forall x\,(x^2 > x) \equiv\ ?$

$$\begin{aligned} \neg\forall x\,(x^2 > x) &\equiv \exists x\,\neg(x^2 > x) \\ &\equiv \exists x\,(x^2 \leq x) \end{aligned}$$

2. $\neg\exists x\,(P(x) \vee Q(x)) \equiv\ ?$

$$\begin{aligned} \neg\exists x\,(P(x) \vee Q(x)) &\equiv \forall x\,\neg(P(x) \vee Q(x)) \\ &\equiv \forall x\,(\neg P(x) \wedge \neg Q(x)) \end{aligned}$$

3. $\neg\forall x\,(P(x) \wedge \neg Q(x)) \equiv\ ?$

$$\begin{aligned} \neg\forall x\,(P(x) \wedge \neg Q(x)) &\equiv \exists x\,\neg(P(x) \wedge \neg Q(x)) \\ &\equiv \exists x\,(\neg P(x) \vee Q(x)) \\ &\equiv \exists x\,(P(x) \Rightarrow Q(x)) \end{aligned}$$

Anidación de Cuantificadores

Existen 4 casos:

1. $\forall x \forall y\, P(x,y)$: es **V** si $P(x,y)$ es **V** para todas las combinaciones posibles de x, y
   - Sean x,y enteros. La proposición $\forall x \forall y\,(x+y=y+x)$ es **V** (conmutatividad de $+$)
2. $\forall x \exists y\, P(x,y)$: es **V** si para cada elemento x, existe un valor de y tal que $P(x,y)$ es **V**
   - Sean x,y enteros. La proposición $\forall x \exists y\,(x+y=0)$ es **V** (existencia de inverso aditivo)
3. $\exists x \forall y\, P(x,y)$: es **V** si existe un x tal que para cuaquier y, $P(x,y)$ es **V**
   - Sean x,y enteros. La proposición $\exists x \forall y\,(x.y=0)$ es **V** si $x=0$
4. $\exists x \exists y\, P(x,y)$: es **V** si existen valores x e y tal que $P(x,y)$ es **V**
   - Sean x,y enteros. La proposición $\exists x \exists y\,(x.y=6)$ es **V**, tomando por ejemplo $x=2$ e $y=3$

Relaciones entre Cuantificadores

Algunas relaciones útiles:

$$\forall x \forall y\, P(x,y) \equiv \forall y \forall x\, P(x,y)$$

$$\exists x \exists y\, P(x,y) \equiv \exists y \exists x\, P(x,y)$$

$$\forall x \exists y\, P(x,y) \Rightarrow \exists x \exists y\, P(x,y)$$

Importante!

$$\forall x \exists y\, P(x,y) \not\equiv \exists x \forall y\, P(x,y)$$

Traducción del Lenguaje Natural
Ejemplo

"Todo alumno de este curso ha usado un computador"

1. Identificar las variables: x, alumno del curso

Traducción del Lenguaje Natural
Ejemplo

"Todo alumno de este curso ha usado un computador"

1. Identificar las variables: x, alumno del curso
2. Identificar los predicados:
   - "Para todo alumno x de este curso, x ha usado un computador" ...

“Todo alumno de este curso ha usado un computador”

1. Identificar las variables: x, alumno del curso
2. Identificar los predicados:
   - “Para todo alumno x de este curso, x ha usado un computador” ...
   - $C(x)$: x ha usado computador

"Todo alumno de este curso ha usado un computador"

1. Identificar las variables: x, alumno del curso
2. Identificar los predicados:
   - "Para todo alumno x de este curso, x ha usado un computador" ...
   - $C(x)$: x ha usado computador
3. Cuantificar: $\forall x\, C(x)$

"Todo alumno de este curso ha usado un computador"

1. Identificar las variables: x, alumno del curso
2. Identificar los predicados:
   - "Para todo alumno x de este curso, x ha usado un computador" ...
   - $C(x)$: x ha usado computador
3. Cuantificar: $\forall x\, C(x)$

Pero esta no es la única formalización posible. Por ejemplo, ¿qué pasa si el dominio de x es el conjunto de todas las personas?

Traducción del Lenguaje Natural
Ejemplo

"Todo alumno de este curso ha usado un computador"

1. Identificar las variables: x, alumno del curso
2. Identificar los predicados:
   - "Para todo alumno x de este curso, x ha usado un computador" ...
   - $C(x)$: x ha usado computador
3. Cuantificar: $\forall x\, C(x)$

Pero esta no es la única formalización posible. Por ejemplo, ¿qué pasa si el dominio de x es el conjunto de todas las personas?

- "Para toda persona x, si x es alumno de este curso, entonces x ha usado un computador"
- Nuevo predicado: $A(x)$: x es alumno de este curso
- Nueva formalización: $\forall x\, (A(x) \Rightarrow C(x))$

"Todo alumno de este curso ha usado un computador"

1. Identificar las variables: x, alumno del curso
2. Identificar los predicados:
   - "Para todo alumno x de este curso, x ha usado un computador" ...
   - $C(x)$: x ha usado computador
3. Cuantificar: $\forall x\, C(x)$

Pero esta no es la única formalización posible. Por ejemplo, ¿qué pasa si el dominio de x es el conjunto de todas las personas?

- "Para toda persona x, si x es alumno de este curso, entonces x ha usado un computador"
- Nuevo predicado: $A(x)$: x es alumno de este curso
- Nueva formalización: $\forall x\,(A(x) \Rightarrow C(x))$ ... y ¿por qué no $\forall x\,(A(x) \wedge C(x))$?

"Todo alumno de este curso ha usado un computador"

1. Identificar las variables: x, alumno del curso
2. Identificar los predicados:
   - "Para todo alumno x de este curso, x ha usado un computador" ...
   - $C(x)$: x ha usado computador
3. Cuantificar: $\forall x\, C(x)$

Pero esta no es la única formalización posible. Por ejemplo, ¿qué pasa si el dominio de x es el conjunto de todas las personas?

- "Para toda persona x, si x es alumno de este curso, entonces x ha usado un computador"
- Nuevo predicado: $A(x)$: x es alumno de este curso
- Nueva formalización: $\forall x\,(A(x) \Rightarrow C(x))$ ... y ¿por qué no $\forall x\,(A(x) \wedge C(x))$?
- Cuidado! $\forall x\,(A(x) \wedge C(x))$ dice que "todas las personas son alumnos de este curso y han usado un computador"

"Algún alumno de este curso ha comido pizza"

- Nuevo predicado: $P(x)$: x ha comido pizza
- Formalización:
  - si x está en el conjunto de alumnos del curso, entonces $\exists x\, P(x)$
  - si x está en el conjunto de personas, entonces $\exists x\, (A(x) \land P(x))$

Traducción del Lenguaje Natural
Ejemplo

"Algún alumno de este curso ha comido pizza"

- Nuevo predicado: $P(x)$: x ha comido pizza
- Formalización:
  - si x está en el conjunto de alumnos del curso, entonces $\exists x\, P(x)$
  - si x está en el conjunto de personas, entonces $\exists x\, (A(x) \wedge P(x))$
  - ...y ¿por qué no $\exists x\, (A(x) \Rightarrow P(x))$? Cuidado, esta proposición es verdadera para personas que han comido pizza pero que no están inscritos en este curso

Traducción del Lenguaje Natural
Ejemplo

"Algún alumno de este curso ha comido pizza"

- Nuevo predicado: $P(x)$: x ha comido pizza
- Formalización:
  - si x está en el conjunto de alumnos del curso, entonces $\exists x\, P(x)$
  - si x está en el conjunto de personas, entonces $\exists x\, (A(x) \wedge P(x))$
  - ... y ¿por qué no $\exists x\, (A(x) \Rightarrow P(x))$? Cuidado, esta proposición es verdadera para personas que han comido pizza pero que no están inscritos en este curso

"Todo alumno de este curso ha comido pizza o hamburguesas"

- Nuevo predicado: $H(x)$: x ha comido hamburguesa

"Algún alumno de este curso ha comido pizza"

- Nuevo predicado: $P(x)$: x ha comido pizza
- Formalización:
  - si x está en el conjunto de alumnos del curso, entonces $\exists x\, P(x)$
  - si x está en el conjunto de personas, entonces $\exists x\, (A(x) \wedge P(x))$
  - ... y ¿por qué no $\exists x\, (A(x) \Rightarrow P(x))$? Cuidado, esta proposición es verdadera para personas que han comido pizza pero que no están inscritos en este curso

"Todo alumno de este curso ha comido pizza o hamburguesas"

- Nuevo predicado: $H(x)$: x ha comido hamburguesa
  - $\forall x\, (A(x) \Rightarrow (P(x) \vee H(x))$

"Algún alumno de este curso ha comido pizza"

- Nuevo predicado: $P(x)$: x ha comido pizza
- Formalización:
  - si x está en el conjunto de alumnos del curso, entonces $\exists x\, P(x)$
  - si x está en el conjunto de personas, entonces $\exists x\, (A(x) \wedge P(x))$
  - ... y ¿por qué no $\exists x\, (A(x) \Rightarrow P(x))$? Cuidado, esta proposición es verdadera para personas que han comido pizza pero que no están inscritos en este curso

"Todo alumno de este curso ha comido pizza o hamburguesas"

- Nuevo predicado: $H(x)$: x ha comido hamburguesa
  - $\forall x\, (A(x) \Rightarrow (P(x) \vee H(x)))$
- Alternativa - $F(x,y)$: x ha comido y
  - $\forall x\, (A(x) \Rightarrow (F(x, \text{pizza}) \vee F(x, \text{hamburguesa}))$