Cap.4. Variables Aleatorias - Continuas

Estadística Computacional ILI 280 - San Joaquín

Prof. Ricardo Ñanculef Alegría
jnancu@inf.utfsm.cl

Departamento de Informática UTFSM
Campus San Joaquín - II 2018

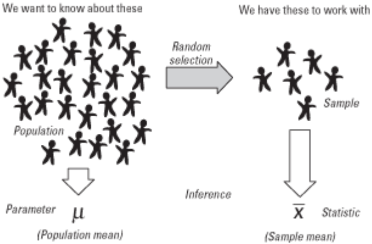
Departamento de Informática
Universidad Técnica Federico Santa María

Outline

Variables Aleatorias

Definición de Variable Aleatoria (v.a.)

Sea Ω un espacio muestral. Una v.a. es una función $X : \Omega \to \mathbb{R}^d$ que asigna a cada elemento $\omega \in \Omega$ un número real $X(\omega)$.



Variables Aleatorias Continuas

Definición de Variable Aleatoria (v.a.)

Sea Ω un espacio muestral. Una v.a. es una función $X : \Omega \to \mathbb{R}^d$ que asigna a cada elemento $\omega \in \Omega$ un número real $X(\omega)$.

Variables Aleatorias Continuas

Si X toma valores en un subconjunto continuo de $\mathbb{R}^d$, es decir su recorrido no es finito ni numerable, X se dice *continua*. En este caso, NO podemos enumerar su posibles valores como hacíamos en el caso discreto.

Ejemplos

- Si estudiamos el peso de un recién nacido, los valores posibles son infinitos no numerables en un rango como $[2, 5]$ Kg.
- Si estudiamos el tiempo que esperamos en la fila del almuerzo, los valores posibles son infinitos no numerables en un rango como $[0, \infty]$ secs.

Variables Aleatorias Continuas

Variables Aleatorias Continuas

Una v.a. es una función $X : \Omega \to \mathbb{R}^d$

- El valor d se denomina *la dimensión* de la v.a.
- Decimos que X es *univariada* si $d = 1$ y *multivariada* si $d > 1$.
- Supondremos por simplicidad que $d = 1$.

Ejemplos

- Si estudiamos simultáneamente peso y altura de un recién nacido, tenemos como resultado un vector aleatorio de dimensión $d = 2$.

Variables Aleatorias Continuas

Caso Discreto

Dada una v.a. discreta $X : \Omega \to \mathbb{R}$, usábamos *la función de probabilidad de* X para describir la probabilidad de que X tome su k-ésimo posible valor:

$$f(x) = P(X = x_k)\ ,$$

En particular, usábamos esta función para calcular la probabilidad de que la variable tome valores en cualquier conjunto A,

$$P(X \in A) = \sum_{x_i \in A} f(x_i),$$

Idea

Utilizaremos una F.D.P como MODELO del fenómeno aleatorio que estamos estudiando.

Variables Aleatorias Continuas

Caso Discreto

Dada una v.a. discreta $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, usábamos *la función de probabilidad de* X para describir la probabilidad de que X tome su k-ésimo posible valor:

$$f(x) = P(X = x_k) \ ,$$

En particular, usábamos esta función para calcular la probabilidad de que la variable tome valores en cualquier conjunto A,

$$P(X \in A) = \sum_{x_i \in A} f(x_i),$$

Problema

¿Cómo describir una v.a. continua si no podemos enumerar los valores que ésta puede tomar?. Las sumas que usábamos para calcular probabilidades ya no tienen sentido ...

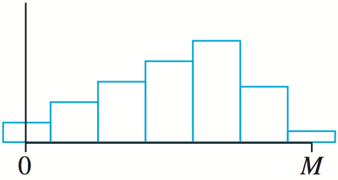
Variables Aleatorias Continuas

Solución 1: Discretizar

- Supongamos que estamos estudiando el tiempo que esperamos en la fila del almuerzo. Podemos considerar clases de valores:

$$[0, 1], (1, 2], (2, 3] \ldots$$

y registrar la probabilidad de que variable tome valores en cada clase.



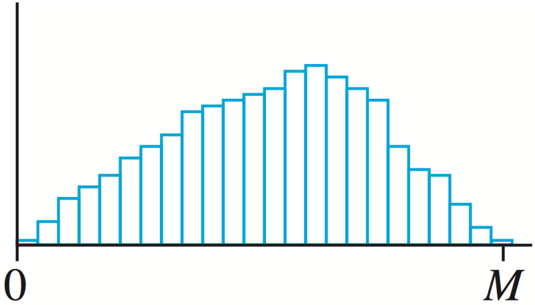
Problema: ¿Qué ocurre si el evento A no se puede escribir como uniones e intersecciones de estos las clases que elegimos?

Variables Aleatorias Continuas

Solución 1: Discretizar

- Si discretizamos más finamente:

$$[0, .5], (0.5, 1], (1, 1.5], (2, 2.5] \dots$$

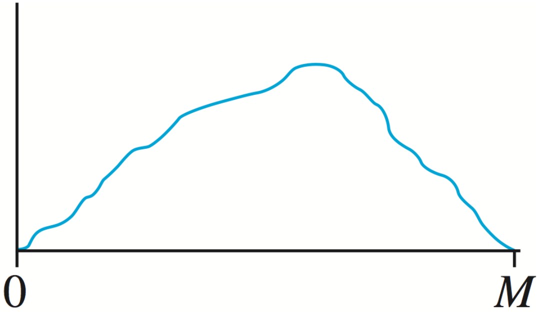


Variables Aleatorias Continuas

Solución 1: Discretizar

- En el límite obtenemos una función continua!

$$[0, .5], (0.5, 1], (1, 1.5], (2, 2.5] \dots$$

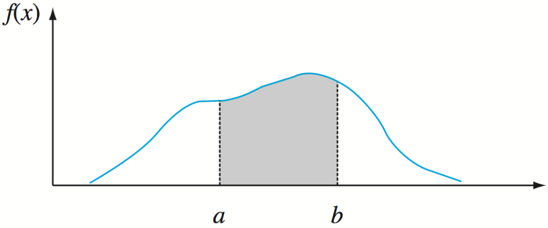


Función de Densidad de Probabilidad

Definición F.D.P.

Sea $X : \Omega \to \mathbb{R}$ una v.a. continua. Una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_0^+$ se dice la *función de densidad de probabilidad de* X si $\forall a, b \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(t)\, dt \ .$$



Función de Densidad de Probabilidad

Observación

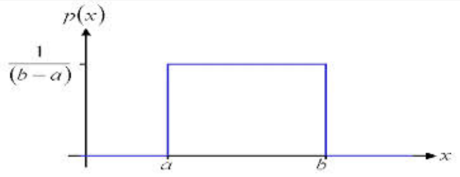
- $P(\mathbb{R}) = 1$, entonces,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\ dt = 1\ .$$

Función de Densidad de Probabilidad

Ejemplo - Modelo 1

Usted ha quedado de reunirse con un amigo a las 3 de la tarde en el patio de la universidad. Usted sabe que su amigo suele retrasarse entre 0 y 10 minutos y quiere construir un modelo que describa la incerteza con respecto a cuánto se atrasará esta vez (por ejemplo, le interesa hacer predicciones). Si llamamos X al retardo del amigo, podríamos modelar la f.d.p. de X como



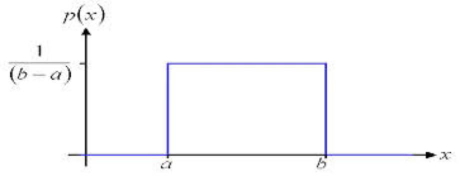
$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, x > 10 \\ 1/10 & \text{si } 0 \leq x \leq 10 \end{cases} .$$

¿Es una f.d.p válida? ¿Cuál es la probabilidad de que $X > 5$? ¿$X < 2.5$? ¿$X > 8$?

Función de Densidad de Probabilidad

Ejemplo - Modelo 1

Si usted sabe que el 50 % de las veces su amigo se retrasa menos de 2.5 minutos, el 30 % de las veces se retrasa más de 5 minutos, pero sólo el 10 % de las veces se retrasa más de 8 minutos. ¿Es el anterior un modelo razonable?

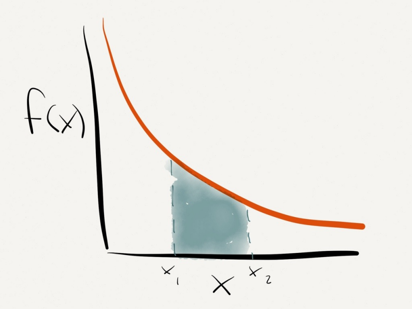


$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, x > 10 \\ 1/10 & \text{si } 0 \leq x \leq 10 \end{cases} .$$

Función de Densidad de Probabilidad

Ejemplo - Modelo 2

Modelo alternativo:



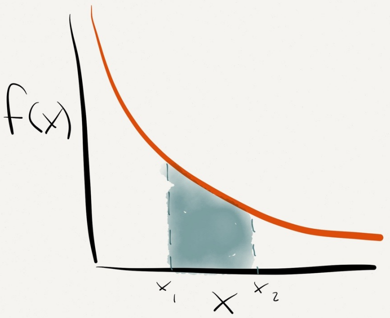
$$f(x) = \begin{cases} .3e^{-.3x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases} .$$

¿Es una f.d.p válida? ¿Cuál es la probabilidad de que $X > 5$? ¿$X < 2.5$? ¿$X > 8$?

Función de Densidad de Probabilidad

Ejemplo - Modelo 1

Si usted sabe que el 50 % de las veces su amigo se retrasa menos de 2.5 minutos, el 30 % de las veces se retrasa más de 5 minutos, pero sólo el 10 % de las veces se retrasa más de 8 minutos. ¿Es el anterior un modelo razonable?



$$f(x) = \begin{cases} .15e^{-.15x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases} .$$

¿Es una f.d.p válida? ¿Cuál es la probabilidad de que $X > 5$? ¿$X < 2.5$? ¿$X > 7.5$?

Función de Densidad de Probabilidad

Distribución Uniforme $U(a, b)$

Una variable aleatoria como la del primer modelo en el ejemplo anterior se denomina *Variable Aleatoria Uniforme*. Formalmente: Diremos que una v.a. es *Uniforme* con parámetros a,b con $b > a$ si su f.d.p. está dada por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{si } a \leq x \leq b \\ 0 & \text{etoc} \end{cases} .$$

¿Es una fdp válida para cualquier $a, b \in \mathbb{R}$?

Función de Densidad de Probabilidad

Distribución Exponencial *Exp*(λ)

Una variable aleatoria como la del segundo modelo en el ejemplo anterior se denomina *Variable Aleatoria Exponencial*. Formalmente: Diremos que una v.a. es *Exponencial* a "tasa" λ (parámetro), con $\lambda > 0$ si su f.d.p está dada por

$$f(x) = \begin{cases} \lambda \exp(-\lambda x) & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{etoc} \end{cases} .$$

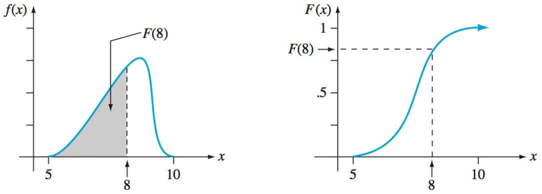
¿Es una f.d.p. válida para cualquier $\lambda \in \mathbb{R}^+$?

Función de Distribución

Definición

Sea $X : \Omega \to \mathbb{R}$ una v.a. continua. La *función de distribución de X* se define como

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt \ .$$



Función de Distribución

Definición

Sea $X : \Omega \to \mathbb{R}$ una v.a. continua. La *función de distribución de X* se define como

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt \ .$$

Ejemplo

Demuestre que la función de distribución de una v.a. $X \sim U(a, b)$ está dada por

$$F(x) = \frac{x-a}{b-a} \ .$$

y la de una v.a. *Exponencial* a "tasa" λ está dada por

$$F(x) = 1 - \exp\left(-\lambda x\right) \ .$$

Función de Distribución

Función de Distribución y Probabilidades

Sea $X : \Omega \to \mathbb{R}$ una v.a. continua con fdp $f(x)$ y con función de distribución $F(x)$. Entonces $\forall a, b$

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(t)\ dt = \int_{-\infty}^b f(t)\ dt - \int_{-\infty}^a f(t)\ dt = F(b) - F(a)\ .$$

Ejemplo

Suponga que la fdp de una v.a. continua X está dada por:

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{8} + \frac{3x}{8} & \text{si } \ 0 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{etoc} \end{cases} \quad .$$

Determine la función de distribución de X y $P(1 \leq X \leq 1.5)$.

Función de Distribución

Función de Distribución y Función de Densidad

Sea $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ una v.a. continua con función de distribución $F(x)$. Entonces para cualquier punto x donde $F'(x)$ exista, se verifica,

$$f(x) = F'(x) = \frac{dF(x)}{dx} .$$

Ejemplo

En ejemplos anteriores vimos que la función de distribución de una v.a. exponencial está dada por

$$F(x) = 1 - \exp\left(-\frac{x}{\theta}\right) .$$

Compruebe el teorema.

Outline

II. Valores Esperados y Otras Estadísticas

Valor Esperado

Definición

Sea $X : \Omega \to \mathbb{R}$ una v.a. continua con fdp $f(x)$. Su valor esperado se define como:

$$\mu_X = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) \, dx \; .$$

Valor Esperado

Ejemplo

Sea X el tiempo que pasa entre el instante en que un automóvil pasa por un determinado punto de una carretera y el instante en que el siguiente automóvil pasa por ese punto (tiempo de adelanto en jerga del análisis de tráfico). Supongamos que X se puede modelar como una v.a. continua con función de densidad dada por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{k}{x^4} & \text{si} \quad x > 1 \\ 0 & \text{etoc} \end{cases} .$$

Determine el valor de k y el valor esperado de X.

Valor Esperado de una Función de X

Definición

Sea $X : \Omega \to \mathbb{R}$ una v.a. continua con fdp $f(x)$ y $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función. El valor esperado de $h(X)$ se define como

$$\mu_{h(X)} = E(h(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} h(x) \cdot f(x)\, dx \ .$$

Valor Esperado de una Función de X

Ejemplo

Supongamos que la demanda semanal por bencina en cierto pueblo del sur se puede modelar como una v.a. continua con función de densidad

$$f(x) = \begin{cases} 2\left(1 - \frac{1}{x^2}\right) & \text{si } \ 1 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{etoc} \end{cases} \quad .$$

Suponga que al comienzo de cierta semana hay un stock de 1.5 mil litros de bencina y que al pueblo no llegan nuevos suministros durante la semana. Determine el valor esperado de la cantidad de bencina que quedará en stock al final de la semana.

Propiedades de la Esperanza

Proposición

Sean $g_1, g_2, \ldots, g_m$ varias funciones de X. Al igual que en el caso discreto,

$$E\left(g_1(X) + g_1(X) + \ldots g_m(X)\right) = E(g_1(X)) + E(g_2(X)) + \ldots E(g_m(X)) \ .$$

Proposición

Sea $g(X) = aX + b$ (una función lineal de X) con $a, b \in \mathbb{R}$. Al igual que en el caso discreto,

$$E\left(g(X)\right) = a \cdot E(X) + b \ .$$

Varianza de una Variable Aleatoria

Definición

Sea $X : \Omega \to \mathbb{R}$ una v.a. continua con fdp $f(x)$. Su varianza se define como:

$$Var(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - E(X))^2 \cdot f(x)\, dx \ .$$

Proposición

Al igual que en el caso discreto, $\forall a \in \mathbb{R}$,

$$Var(a \cdot X) = a^2 \cdot V(X)$$

Además,

$$Var(X) = E(X^2) - E(X)^2 \ .$$

Ejercicio

Determine la varianza de una v.a. $X \sim U(a,b)$ y una v.a. $X \sim Exp(\theta)$.

Momentos de una Variable Aleatoria

Definición

Sea $X : \Omega \to \mathbb{R}$ una v.a. continua con fdp $f(x)$. Su k-ésimo momento se define como el valor esperado de su k-ésimo monomio:

$$\mu_X^k = E(X^k) \ .$$

Además, su k-ésimo momento central se define como

$$\bar{\mu}_X^k = E\left[(X - E(X))^k\right] \ .$$

Asimetría de una Distribución de Probabilidad

Definición (Skewness)

La asimetría (skewness) de una distribución de probabilidad asociada a una v.a. X se define como

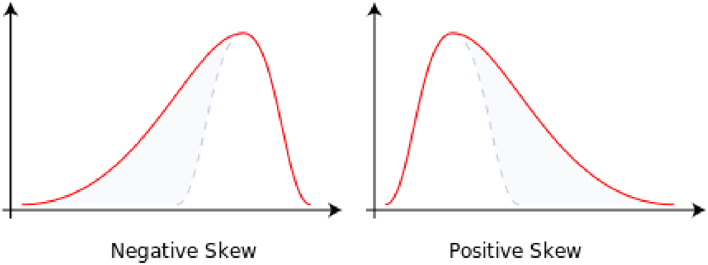
$$\gamma_1 = \frac{\bar{\mu}_X^3}{(\bar{\mu}_X^2)^{3/2}} \ ,$$

es decir,

$$\gamma_1 = \frac{E\left[(X - E(X))^3\right]}{E\left[(X - E(X))^2\right]^{3/2}} \ .$$

Asimetría de una Distribución de Probabilidad

Asimetría positiva versus negativa

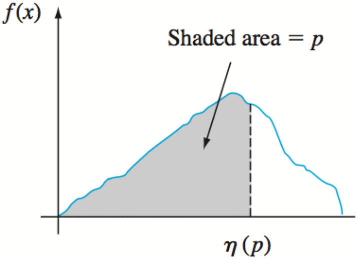


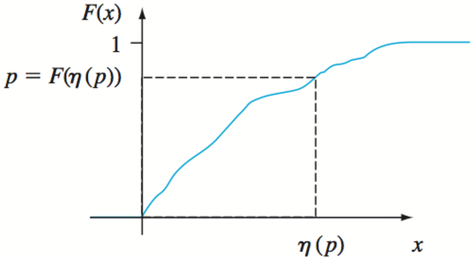
Percentiles de una Variable Aleatoria

Definición

Sea $X : \Omega \to \mathbb{R}$ una v.a. continua con función de distribución $F(x)$. Si $F^{-1}(p)$ existe para un cierto $p \in [0, 1]$, éste valor se denomina el *100p-ésimo percentil de* de X,

$$\eta(p) = F^{-1}(p) \ .$$



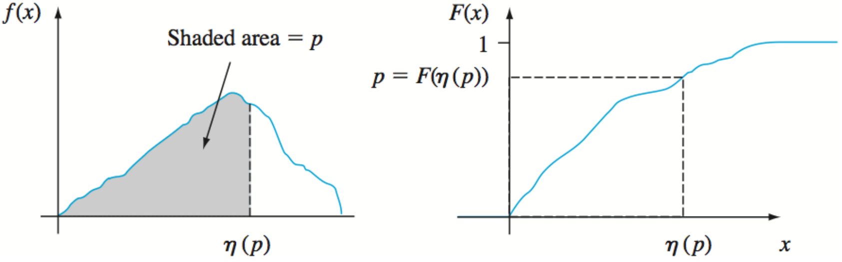


Mediana de una Variable Aleatoria

Definición

Sea $X : \Omega \to \mathbb{R}$ una v.a. continua con función de distribución $F(x)$. Si $F^{-1}(0.5)$ existe, éste valor corresponde a la *mediana* de X,

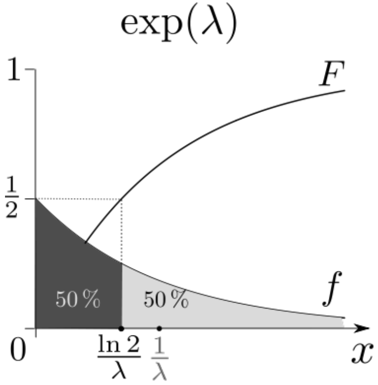
$$\tilde{\mu}_X = F^{-1}(0.5) \ .$$



Mediana de una Variable Aleatoria

Ejemplo

Determine la mediana de una v.a. una v.a. $X \sim U(a, b)$ y una v.a. $X \sim Exp(\theta)$



Outline

III. Distribuciones Continuas Notables.

La Distribución Uniforme

Definición

Una v.a. continua $X : \Omega \to \mathbb{R}$ se dice *Uniforme* con parámetros a y b si su fdp (función de densidad de probabilidad) $f(x)$ viene dada por

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin [a, b] \\ \frac{1}{b-a} & \text{si } x \in [a, b] \end{cases} .$$

Se anota $X \sim U(a, b)$

Momentos y otras Estadísticas

$$\mu_X = E[X] = \frac{(b+a)}{2} .$$

$$\tilde{\mu}_X = F^{-1}(0.5) = \frac{(b+a)}{2} .$$

$$\bar{\mu}_X^2 = V[X] = \frac{(b-a)^2}{12}$$

$$\text{skewness: } \gamma_1 = 0 .$$

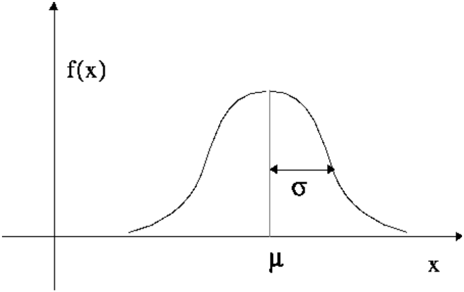
La Distribución Normal

Definición

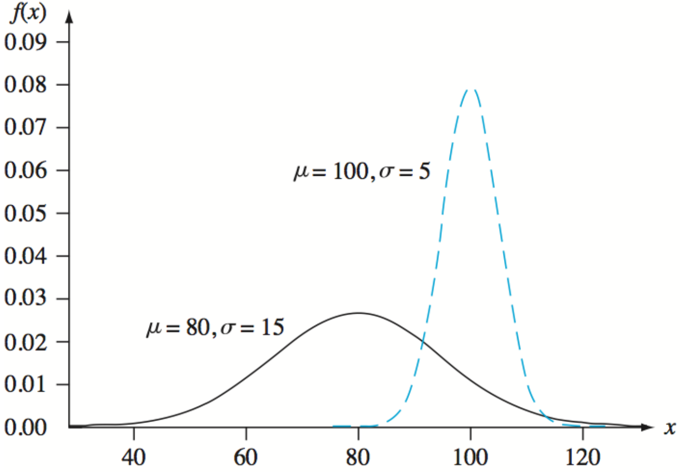
Se dice que una v.a. continua $X : \Omega \to \mathbb{R}$ sigue una distribución *Normal* con parámetros μ y σ si su fdp (función de densidad de probabilidad) $f(x)$ viene dada por

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) .$$

Se anota $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$



La Distribución Normal



La Distribución Normal

Definición

Se dice que una v.a. continua $X : \Omega \to \mathbb{R}$ sigue una distribución *Normal* con parámetros μ y σ si su fdp (función de densidad de probabilidad) $f(x)$ viene dada por

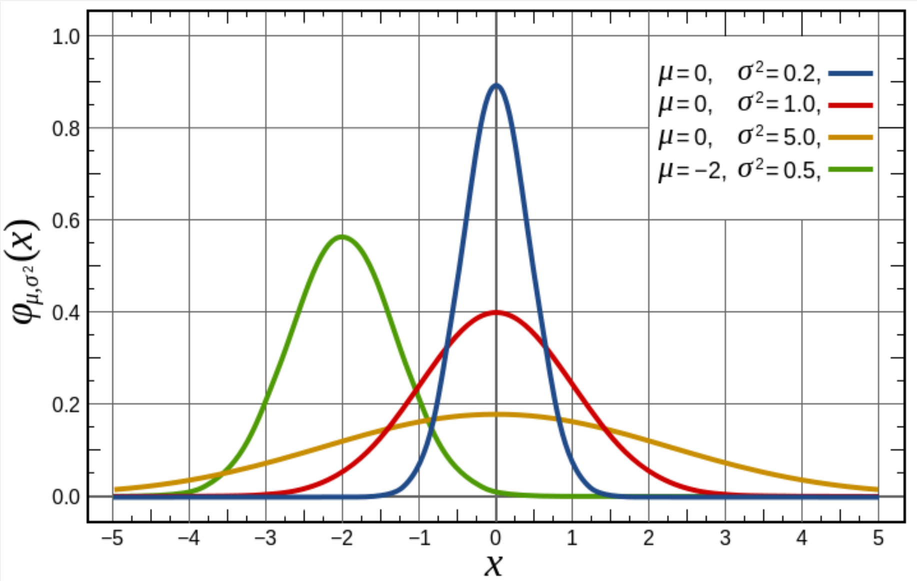
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) \ .$$

Se anota $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

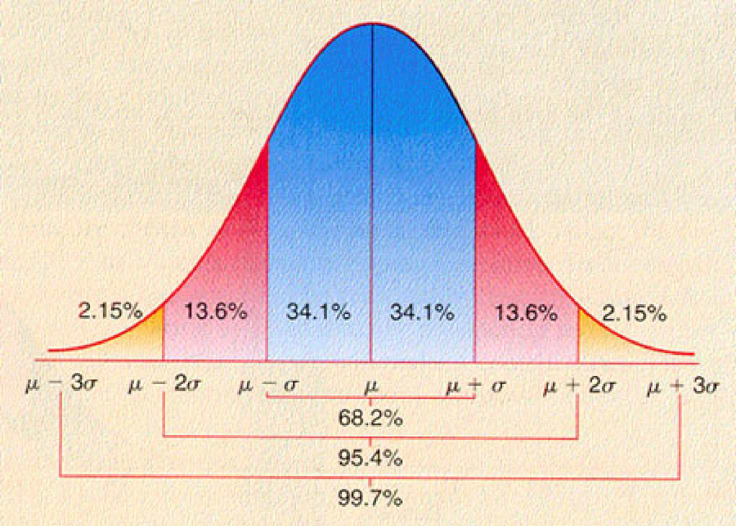
Momentos y otras Estadísticas

$$\mu_X = E[X] = \mu \ .$$
$$\tilde{\mu}_X = F^{-1}(0.5) = \mu \ .$$
$$\bar{\mu}_X^2 = V[X] = \sigma^2$$
$$\text{skewness: } \gamma_1 = 0 \ .$$

La Distribución Normal



La Distribución Normal



La Distribución Normal Estándar

Definición

Decimos que una v.a. $Z : \Omega \to \mathbb{R}$ sigue una distribución **Normal Estándar** si Z sigue una distribución normal con parámetros $\mu = 0$ y $\sigma = 1$, es decir, si su fdp $f(z)$ viene dada por

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) .$$

Anotamos $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$. **Esta distribución no tiene parámetros.**

Momentos y otras Estadísticas

$$\mu_Z = E[Z] = 0 .$$
$$\tilde{\mu}_Z = F^{-1}(0.5) = 0 .$$
$$\bar{\mu}_Z^2 = V[Z] = 1$$
$$\text{skewness: } \gamma_1 = 0 .$$

La Distribución Normal Estándar

Problema

Sea $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. El cálculo de una probabilidad del tipo $P(a \leq X \leq b)$, requiere calcular

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(x-\mu^2)}{2\sigma^2} \right)\, dx\ .$$

Sin embargo, **ninguna técnica de integración conocida permite resolver esta integral analíticamente para** $a, b \in \mathbb{R}$. Sólo es posible aproximar su valor usando métodos computacionales.

- La distribución normal aparece con demasiada frecuencia como para repetir esta integración cada vez que cambia a y b.

La Distribución Normal Estándar

Buscando una Solución ...

Como hemos visto, una posibilidad es calcular la **función de distribución**,

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\ dt = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(t-\mu^2)}{2\sigma^2}\right)\ dt\ .$$

y usar la identidad

$$P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a)\ .$$

- Como no existe una solución analítica para $F(x)$, esto nos obligaría a construir una tabla con los valores aproximados de muchos valores de $F(x)$.
- Ok, pero hay un problema: tendríamos que tener una tabla diferente para cada μ y σ.

La Distribución Normal Estándar

Solución

Una solución más conveniente/realista consiste en **estandarizar la variable aleatoria**.

Teorema

Sea $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Defina

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \, .$$

Entonces, $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$, es decir, Z sigue una distribución normal estándar.

La Distribución Normal Estándar

Solución en Acción

Sea $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ y supongamos que tenemos que calcular $P(a \leq X \leq b)$. Notemos que

$$\begin{aligned} P(a \leq X \leq b) &= P\left(\boxed{\frac{a-\mu}{\sigma}} \leq \frac{X-\mu}{\sigma} \leq \boxed{\frac{b-\mu}{\sigma}}\right) \\ &= P\left(\boxed{\frac{a-\mu}{\sigma}} \leq Z \leq \boxed{\frac{b-\mu}{\sigma}}\right) \ . \end{aligned}$$

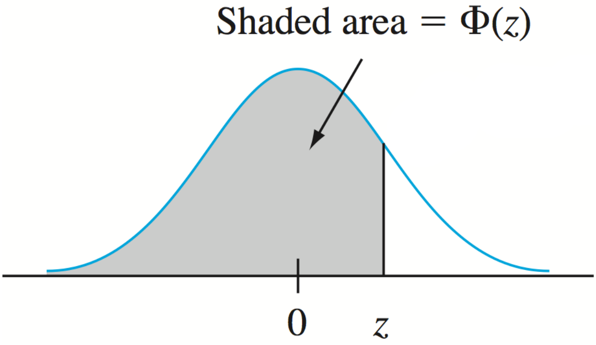
Ahora, según el teorema anterior $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$. ¿En qué ayuda esto a resolver el problema?

La Distribución Normal Estándar

Solución en Acción

Supongamos que hemos calculado la función de distribución (probabilidad acumulada) para una normal estándar para varios valores de z,

$$\Phi(z) = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)\ dt\ .$$



La Distribución Normal Estándar

Solución en Acción

Teníamos

$$P(a \leq X \leq b) = P\left(\boxed{\frac{a-\mu}{\sigma}} \leq \frac{X-\mu}{\sigma} \leq \boxed{\frac{b-\mu}{\sigma}}\right)$$
$$= P\left(\boxed{\frac{a-\mu}{\sigma}} \leq Y \leq \boxed{\frac{b-\mu}{\sigma}}\right) \quad ,$$

pero según el teorema anterior $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$. Entonces,

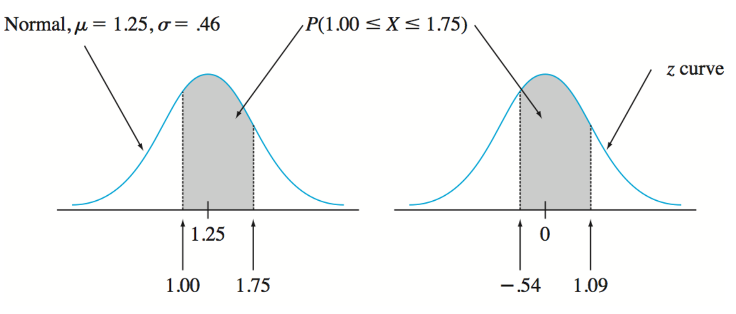
$$P(a \leq X \leq b) = \Phi\left(\boxed{\frac{b-\mu}{\sigma}}\right) - \Phi\left(\boxed{\frac{a-\mu}{\sigma}}\right) \quad .$$

La Distribución Normal

Ejemplo

- Ciertos estudios sugieren que el tiempo de respuesta de un conductor aleatorio a una luz de freno sigue una distribución normal con parámetros valor esperado $\mu = 1.25$ y desviación estándar $\sigma = 0.46$. ¿Cuál es la probabilidad de que el tiempo de respuesta de un conductor elegido al azar esté entre 1 y 1.75 segundos?

$$P(1 \leq X \leq 1.75) = ?\ .$$



La Distribución Normal

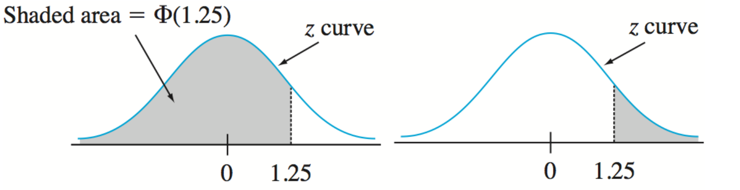
Ejercicios

- Sea $X \sim \mathcal{N}(0,1)$. Calcule $P(-2.38 \leq X \leq 1.25)$.
- Sea $X \sim \mathcal{N}(0,1)$. Calcule $P(-1.25 \leq X \leq 1.25)$.
- Sea $X \sim \mathcal{N}(4,6)$. Calcule $P(-2 \leq X \leq 4)$.
- Sea $X \sim \mathcal{N}(10,2)$. Calcule $P(X \leq 15)$.
- Sea $X \sim \mathcal{N}(2,4)$. Calcule $P(X \geq 1)$.
- Sea $X \sim \mathcal{N}(30,15)$. Calcule $P(15 \leq X \leq 45)$.

La Distribución Normal

Observación

- La distribución normal estándar es simétrica en torno a su media!
- Por lo tanto $\Phi(-z) = 1 - \Phi(z)$.

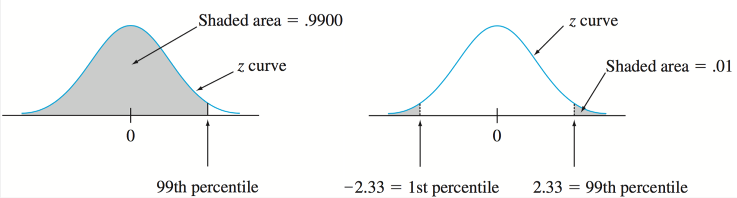


La Distribución Normal

Observación

- En general, la distribución normal es simétrica en torno a su media!, por lo tanto para cualquier $a \in \mathbb{R}$

$$P(X < \mu - a) = 1 - P(X < \mu + a) \ .$$



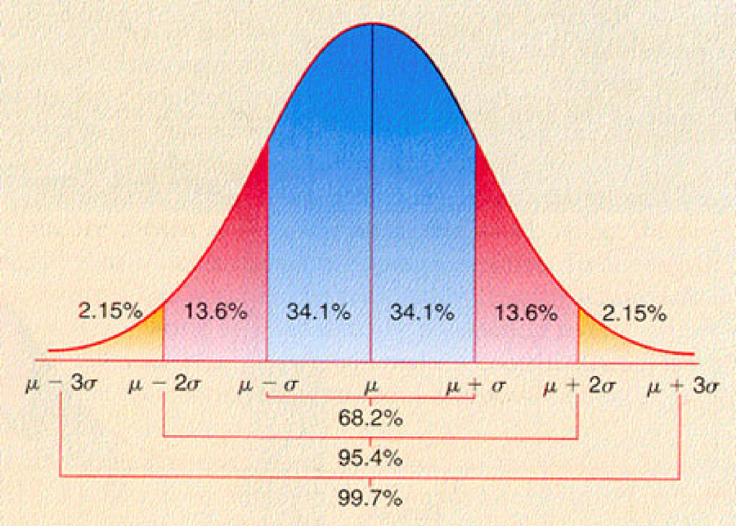
La Distribución Normal

Observación

Usando la idea de estandarización de una distribución normal, compruebe la siguiere regla empírica: Si una variable aleatoria se distribuye normalmente:

- Un 68 % de las veces sus valores estarán alrededor de la media más/menos una desviación estándar.
- Un 95 % de las veces sus valores estarán alrededor de la media más/menos 2 desviaciones estándar.
- Un 99.7 % de las veces sus valores estarán alrededor de la media más/menos 3 desviaciones estándar.

La Distribución Normal

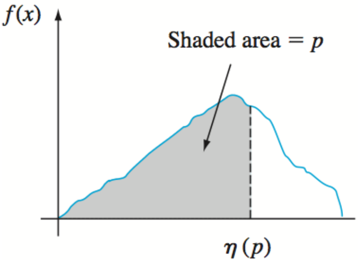


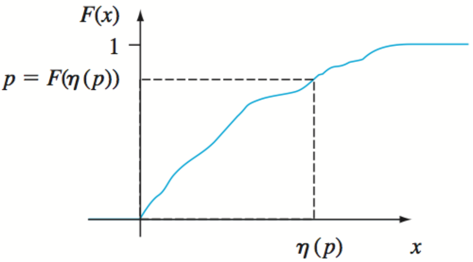
Percentiles de la Distribución Normal

Recordatorio - Definición de Percentil

Recordemos que dada una v.a continua $X : \Omega \to \mathbb{R}$ con función de distribución $F(x)$, el valor $F^{-1}(p)$ se denomina el *100p-ésimo percentil de* de X,

$$\eta(p) = F^{-1}(p) \ .$$

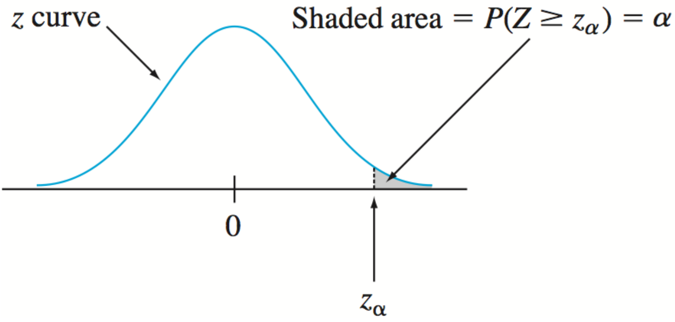




Percentiles de la Distribución Normal

Notación

Denotaremos z_α al $100(1-\alpha)$-*ésimo percentil de* la distribución normal estándar.

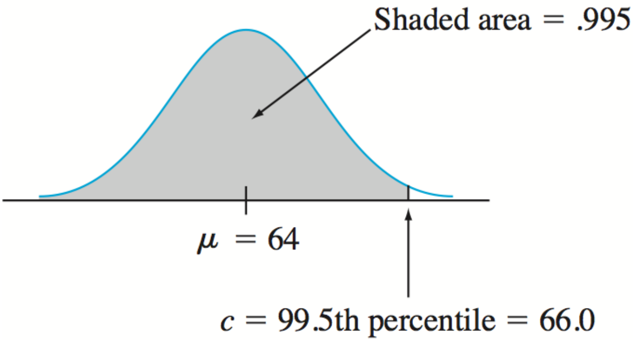


Percentiles de la Distribución Normal

Teorema

El $100(1-\alpha)$-*ésimo percentil de* una distribución normal con valor esperado μ y desviación estándar σ está dado por

$$\eta(1-\alpha) = \mu + z_{\alpha}\sigma \ .$$



La Distribución Exponencial

Definición *Exp*(θ)

Se dice que una v.a. continua $X : \Omega \to \mathbb{R}$ sigue una distribución *Exponencial* con parámetro θ si su fdp (función de densidad de probabilidad) $f(x)$ viene dada por

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{1}{\theta}\exp(-\frac{x}{\theta}) & \text{si } x \geq 0 \end{cases} .$$

Se anota $X \sim Exp(\theta)$

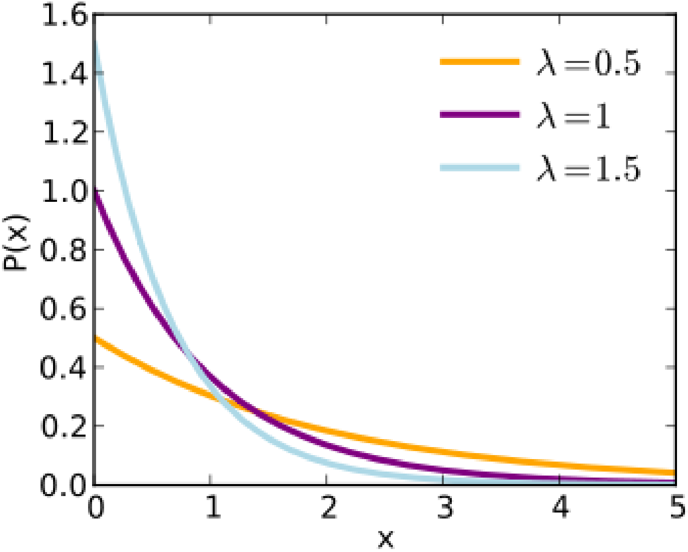
Definición Alternativa, *Exp*(λ)

Se dice que una v.a. continua $X : \Omega \to \mathbb{R}$ sigue una distribución *Exponencial* con parámetro λ si su fdp (función de densidad de probabilidad) $f(x)$ viene dada por

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \lambda\exp(-\lambda x) & \text{si } x \geq 0 \end{cases} .$$

Se anota $X \sim Exp(\lambda)$

La Distribución Exponencial



La Distribución Exponencial

Definición *Exp*(θ)

Se dice que una v.a. continua $X : \Omega \to \mathbb{R}$ sigue una distribución *Exponencial* con parámetro θ si su fdp (función de densidad de probabilidad) $f(x)$ viene dada por

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{1}{\theta}\exp(-\frac{x}{\theta}) & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \quad .$$

Se anota $X \sim Exp(\theta)$

Momentos y otras Estadísticas

$$\mu_X = E[X] = \theta \ .$$

$$\tilde{\mu}_X = F^{-1}(0.5) = \theta \ln(2) \ .$$

$$\bar{\mu}_X^2 = V[X] = \theta^2$$

$$\text{skewness: } \gamma_1 = 2 \ .$$

La Distribución Exponencial

Definición Alternativa, *Exp*(λ)

Se dice que una v.a. continua $X : \Omega \to \mathbb{R}$ sigue una distribución *Exponencial* con parámetro λ si su fdp (función de densidad de probabilidad) $f(x)$ viene dada por

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \lambda \exp(-\lambda x) & \text{si } x \geq 0 \end{cases} .$$

Se anota $X \sim Exp(\lambda)$

Momentos y otras Estadísticas

$$\mu_X = E[X] = \lambda^{-1} .$$
$$\tilde{\mu}_X = F^{-1}(0.5) = \lambda^{-1} \ln(2) .$$
$$\bar{\mu}_X^2 = V[X] = \lambda^{-2}$$
$$\text{skewness: } \gamma_1 = 2 . .$$

La Distribución Exponencial

Función de Distribución

Sea $X \sim Exp(\theta)$. Entonces, $\forall x \geq 0$

$$\boxed{F(x)} = P(X \leq x) = \int_0^x \frac{1}{\theta} \exp\left(-\frac{t}{\theta}\right) \, dt = \boxed{1 - \exp\left(-\frac{x}{\theta}\right)}.$$

Distribución Exponencial y Distribución de Poisson

Teorema

Consideremos un fenómeno donde el número de ocurrencias (X) de un cierto evento por unidad de tiempo sigue una distribución de Poisson, es decir

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} \ .$$

Sea *T el tiempo que pasa entre ocurrencias sucesivas del evento*. Entonces T sigue una *distribución exponencial con valor esperado $1/\lambda$*, i.e. su función de densidad de probabilidad viene dada por:

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ \lambda \exp(-\lambda t) & \text{si } t \geq 0 \end{cases} \ .$$

Distribución Exponencial y Distribución de Poisson

Ejemplo

Supongamos que el número de clientes que entran a determinado negocio sigue una distribución de Poisson con media de 10 clientes por hora. Si acaba de llegar un cliente, ¿Cuál es la probabilidad de que el próximo cliente llegue en 15 minutos? ¿antes de 15 minutos? ¿en más 5 minutos?

Memoria de la Distribución Exponencial

Teorema

La distribución exponencial no tiene memoria, es decir, si $X \sim Exp(\theta)$, entonces

$$P(X > t + t_0 | X > t_0) = P(X > t) = \exp(-t/\theta) \ .$$

- En efecto,

$$\begin{aligned} P(X > t + t_0 | X > t_0) &= \frac{P\left((X > t + t_0) \cap (X > t_0)\right)}{P\left(X > t_0\right)} \\ &= \frac{P\left(X > t + t_0\right)}{P\left(X > t_0\right)} = \frac{1 - F(t + t_0)}{1 - F(t_0)} \\ &= \frac{\exp\left(-(t + t_0)/\theta\right)}{\exp\left(-t_0/\theta\right)} = \exp(-t/\theta) \ . \end{aligned}$$

Memoria de la Distribución Exponencial

Ejemplo

El tiempo de vida de un cierto aparato electrónico sigue una distribución Exponencial con valor esperado de 2 años. Si usted acaba de comprar una unidad, ¿Cuál es la probabilidad de que dure más de 1 año?. Suponga ahora que usted compra el aparato usado y sabe que este ha funcionado perfectamente durante 1 año. ¿Cuál es la probabilidad de que el aparato le dure más de 1 año?.

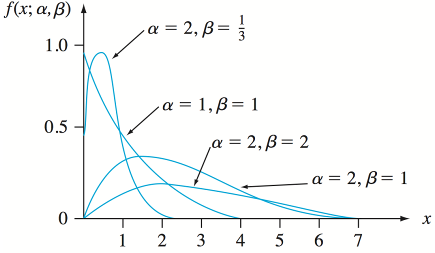
La Distribución Gamma

Definición Gamma(α, β)

Se dice que una v.a. continua $X : \Omega \to \mathbb{R}$ sigue una distribución *Gamma* con parámetros α y β si su fdp (función de densidad de probabilidad) $f(x)$ viene dada por

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{1}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} x^{\alpha - 1} \exp(-\frac{x}{\beta}) & \text{si } x \geq 0 \end{cases} .$$

Se anota $X \sim \text{Gamma}(\alpha, \beta)$.



La Distribución Gamma

Definición: Función Gamma (Completa)

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} x^{\alpha-1} \exp(-x) \, dx \; .$$

Propiedades

1. Si $\alpha > 1$

$$\Gamma(\alpha) = (\alpha - 1)\Gamma(\alpha - 1) \; .$$

2. Si α es entero, $\Gamma(\alpha) = (\alpha - 1)!$
3. $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$.

La Distribución Gamma

Función de Distribución

Sea $X \sim \text{Gamma}(\alpha, \beta)$. Entonces, $\forall x \geq 0$

$$\boxed{F(x)} = P(X \leq x) = \int_0^x \frac{1}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} t^{\alpha-1} \exp\left(-\frac{t}{\beta}\right)\, dt = \boxed{\Gamma^{\text{inc}}(x/\beta, \alpha)}\ .$$

Definición: Función Gamma Incompleta

$$\Gamma^{\text{inc}}(x, \alpha) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x t^{\alpha-1} \exp(-t)\, dt\ .$$

Momentos y otras Estadísticas

Sea $X \sim \text{Gamma}(\alpha, \beta)$. Entonces,

$$\mu_X = E[X] = \alpha\beta\ .$$

$$\bar{\mu}_X^2 = V[X] = \alpha\beta^2$$

$$\text{skewness: } \gamma_1 = 2/\sqrt{\alpha}\ .$$

La Distribución Gamma

Teorema

Sean $T_1, T_2, \ldots, T_n$ n variables aleatorias independientes, distribuidas exponencialmente con el valor esperado θ, es decir $T_i \sim Exp(\theta)$, $\forall i$. Entonces

$$T = \sum_{i=1}^{n} T_i \sim \text{Gamma}(n, \beta) \ .$$

Warning

En la distribución Gamma(α, β), ambos parámetros (α, β) pueden tomar valores reales (no necesariamente enteros).

Observación

Cuando $\alpha \in \mathbb{Z}$, la distribución Gamma(α, β) se denomina *Erlang* y se anota Erg(α, β)

La Distribución Gamma

Ejemplo

Supongamos que el número de clientes que entran a determinado negocio sigue una distribución de Poisson con media de 15 clientes por hora. Si acaba de llegar un cliente y los clientes llegan de modo complemente independiente uno de otro ¿Cuál es la probabilidad de que el décimo cliente sucesivo llegue en menos de 1 hora? **Hint:** *Si cada cliente se demora T_i minutos en llegar, el tiempo total transcurrido hasta la llegada del décimo cliente es $T = \sum_{i=1}^{10} T_i$.*

La Distribución de Weibull

Definición Weibull(α, β)

Se dice que una v.a. continua $X : \Omega \to \mathbb{R}$ sigue una distribución *Weibull* con parámetros $\alpha > 0$ y $\beta > 0$ si su fdp (función de densidad de probabilidad) $f(x)$ viene dada por

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{\alpha}{\beta^\alpha} x^{\alpha-1} \exp\left(-(\frac{x}{\beta})^\alpha\right) & \text{si } x \geq 0 \end{cases} .$$

Se anota $X \sim \text{Weibull}(\alpha, \beta)$

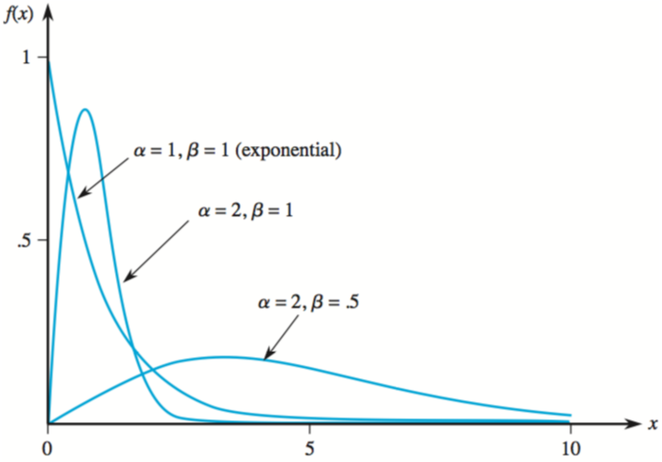
Momentos y otras Estadísticas

$$\mu_X = E[X] = \beta\Gamma\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right) .$$

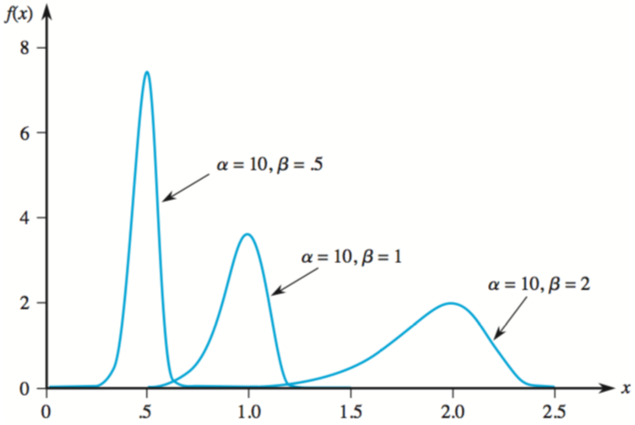
$$\bar{\mu}_X^2 = V[X] = \beta^2 \left\{\Gamma\left(1 + \frac{2}{\alpha}\right) - \left(\Gamma\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right)\right)^2\right\}$$

$$\text{skewness: } \gamma_1 = \beta^2 \left(\Gamma(1 + \frac{2}{\alpha}) - \Gamma(1 + \frac{1}{\alpha})\right) .$$

La Distribución de Weibull



La Distribución de Weibull



La Distribución de Weibull

Función de Distribución

Sea $X \sim \text{Weibull}(\alpha, \beta)$. Entonces, $\forall x \geq 0$

$$\boxed{F(x)} = P(X \leq x) = \int_0^x \frac{\alpha}{\beta^\alpha} t^{\alpha-1} \exp\left(-\left(\frac{t}{\beta}\right)^\alpha\right) \, dt = \boxed{1 - \exp\left(-\left(\frac{x}{\beta}\right)^\alpha\right)}.$$

Memoria de la Distribución de Weibull

Teorema

En general, la distribución de Weibull SI tiene memoria, es decir, si $X \sim \text{Weibull}(\alpha, \beta)$, entonces

$$P(X > t + t_0 | X > t_0) > P(X > t) \text{ si } \alpha < 1 \ .$$
$$P(X > t + t_0 | X > t_0) < P(X > t) \text{ si } \alpha > 1 \ .$$

Es decir, la probabilidad de observar valores grandes de X aumenta con el tiempo si $\alpha < 1$ y disminuye con el tiempo si $\alpha > 1$.

Memoria de la Distribución de Weibull

- En efecto,

$$P(X > t + t_0 | X > t_0) = \frac{P\left((X > t + t_0) \cap (X > t_0)\right)}{P\left(X > t_0\right)}$$
$$= \frac{\exp\left(-\left(\frac{t+t_0}{\beta}\right)^{\alpha}\right)}{\exp\left(-\left(\frac{t_0}{\beta}\right)^{\alpha}\right)} = \exp\left(\left(\frac{t_0}{\beta}\right)^{\alpha} - \left(\frac{t+t_0}{\beta}\right)^{\alpha}\right) .$$

- En cambio,

$$P(X > t) = \exp\left(-\left(\frac{t}{\beta}\right)^{\alpha}\right) .$$

Memoria de la Distribución de Weibull

- $P(X > t + t_0 | X > t_0) < P(X > t)$ implica

$$
\begin{aligned}
& & \frac{P(X > t + t_0 | X > t_0)}{P(X > t)} < 1 \\
\Rightarrow & & \ln P(X > t + t_0 | X > t_0) - \ln P(X > t) < 0 \\
\Rightarrow & & -\left(\frac{t + t_0}{\beta}\right)^{\alpha} + \left(\frac{t_0}{\beta}\right)^{\alpha} + \left(\frac{t}{\beta}\right)^{\alpha} < 0 \\
\Rightarrow & & t^{\alpha} + t_0^{\alpha} < (t + t_0)^{\alpha} \\
\Rightarrow & & \alpha < 1
\end{aligned}
$$

- Análogamente con $P(X > t + t_0 | X > t_0) > P(X > t)$

Memoria de la Distribución de Weibull

Ejemplo

Suponga que usted un cierto aparato electrónico usado y sabe que este ha funcionado perfectamente durante 1 año. ¿Proponga un modelo basado en la distribución de Weibull para el tiempo de duración del aparato? Es más razonable usar ¿$\alpha = 1$, $\alpha < 1$ o $\alpha > 1$?. Calcule la probabilidad de que el aparato dure más de 1 año dado que ha funcionado perfectamente durante 1 año. Compare con el ejercicio equivalente hecho cuando estudiábamos la distribución exponencial.

La Distribución Chi-Cuadrado

Definición $\chi^2(\nu)$

Se dice que una v.a. continua $X : \Omega \to \mathbb{R}$ sigue una distribución *Chi*-cuadrado con parámetro ν si su fdp (función de densidad de probabilidad) $f(x)$ viene dada por

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{1}{2^{\nu/2}\Gamma(\nu/2)} x^{\nu/2-1} \exp\left(-\frac{x}{2}\right) & \text{si } x \geq 0 \end{cases} .$$

Se anota $X \sim \chi^2(\nu)$

Momentos y otras Estadísticas

$$\mu_X = E[X] = \nu \ .$$

$$\tilde{\mu}_X = F^{-1}(0.5) = \text{no es simple} \ .$$

$$\bar{\mu}_X^2 = V[X] = 2\nu \ .$$

La Distribución Chi-Cuadrado

Observación

Claramente, una distribución *Chi*-cuadrado con parámetro ν es equivalente a una distribución Gamma$(\nu/2, 2)$.

Teorema

Sean $Z_1, Z_2, \ldots, Z_n$ n variables aleatorias independientes, distribuidas de acuerdo a una distribución normal estándar, es decir $Z_i \sim \mathcal{N}(0,1)$, $\forall i$. Entonces

$$S^2 = \sum_{i=1}^{n} Z_i^2 \sim \chi^2(n) \ .$$

La Distribución Beta

Definición Beta(α, β, a, b)

Se dice que una v.a. continua $X : \Omega \to \mathbb{R}$ sigue una distribución *Beta* con parámetros $\alpha > 0, \beta > 0$ y $a, b \in \mathbb{R}$ si su fdp (función de densidad de probabilidad) $f(x)$ viene dada por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{(b-a)} \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \left(\frac{x-a}{(b-a)}\right)^{\alpha-1} \left(\frac{b-x}{(b-a)}\right)^{\beta-1} & \text{si } a \leq x \leq b \\ 0 & \text{etoc} \end{cases} .$$

Se anota $X \sim \text{Beta}(\alpha, \beta, a, b)$

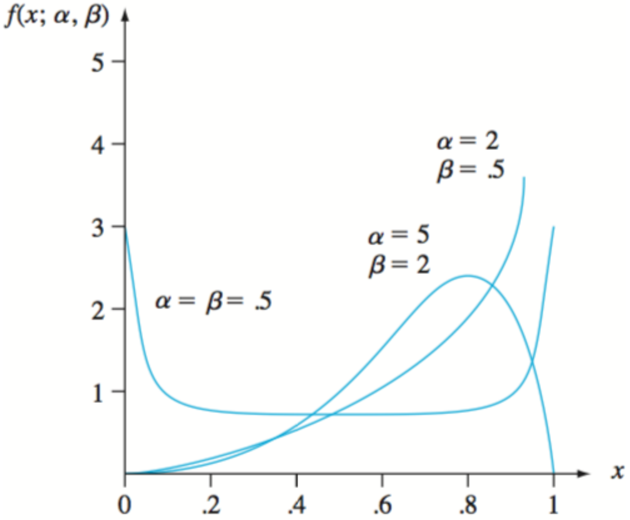
La Distribución Beta Estándar: Beta$(\alpha, \beta) \equiv$ Beta$(\alpha, \beta, 0, 1)$

La distribución Beta con $a = 0$ y $b = 1$ se denomina Distribución Beta Estándar,

$$\text{Beta}(\alpha, \beta) \equiv \text{Beta}(\alpha, \beta, 0, 1)$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1} & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{etoc} \end{cases} .$$

La Distribución Beta



La Distribución Beta

Momentos y otras Estadísticas (caso general)

$$\mu_X = E[X] = a + (b-a)\frac{\alpha}{\alpha+\beta} \ .$$

$$\bar{\mu}_X^2 = V[X] = (b-a)^2 \frac{\alpha\beta}{((\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)}$$

$$\text{skewness: } \gamma_1 = \frac{(\beta-\alpha)\sqrt{\alpha+\beta+1}}{\sqrt{\alpha\beta}(\alpha+\beta+2)} \ .$$

Remark

La distribución beta se usa con frecuencia para modelar la proporción de una muestra que satisface cierto criterio. En ese caso, $\alpha - 1$ se puede interpretar como el número de casos en que se satisface el criterio y $\beta - 1$ el número de casos en que no se satisface. Preguntar pq no es α y β.

La Distribución Beta

Ejemplo

Suponga que una encuesta efectuada sobre una muestra de $n = 200$ personas da a un cierto candidato A un total de 80 preferencias y a un cierto candidato B el resto. Use un modelo basado en la distribución Beta para determinar la probabilidad de que el candidato B pierda las elecciones.