Algoritmos y estructuras de datos

P/A: Camino Mínimo.

CEIS

Escuela Colombiana de Ingeniería

2023-1

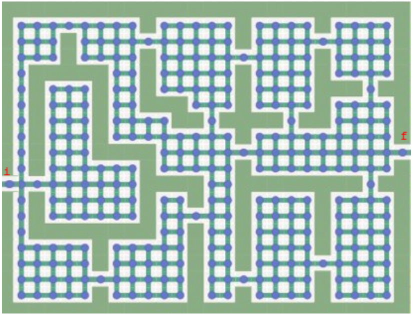
Agenda

Camino Mínimo

Camino

Dado un grafo dirigido, $G = (V, E)$
Un **camino** p entre dos vértices, i y f, es una secuencia de vértices $p =< v_0, v_1, .., v_k >$, con

- $i = v_0$ y $f = v_k$
- $\forall i : 0..k, v_i \in V$
- $\forall i : 0...k - 1, (v_i, v_{i+1}) \in E$

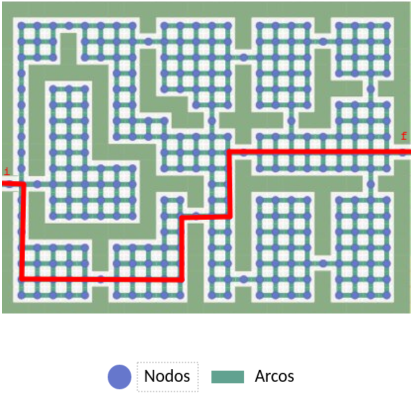


Camino Mínimo

Camino

Dado un grafo dirigido, $G = (V, E)$
Un **camino** p entre dos vértices, i y f, es una secuencia de vértices $p =< v_0, v_1, .., v_k >$, con

- $i = v_0$ y $f = v_k$
- $\forall i : 0..k, v_i \in V$
- $\forall i : 0...k - 1, (v_i, v_{i+1}) \in E$

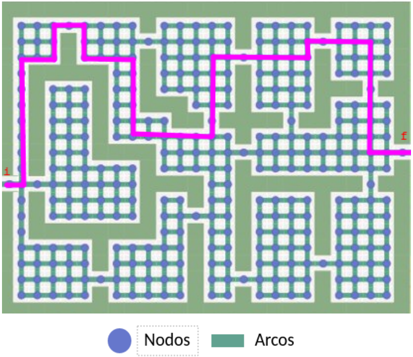


Camino Mínimo

Camino

Dado un grafo dirigido, $G = (V, E)$
Un **camino** p entre dos vértices, i y f, es una secuencia de vértices $p =< v_0, v_1, .., v_k >$, con

- $i = v_0$ y $f = v_k$
- $\forall i : 0..k, v_i \in V$
- $\forall i : 0...k - 1, (v_i, v_{i+1}) \in E$



Camino Mínimo

Peso de un camino

Dado un grafo dirigido, $G = (V, E)$, con una función de peso $w : E \to R$
El **peso de un camino** $w(p)$
$p =< v_0, v_1, .., v_k >$, es la suma de los pesos de los arcos correspondientes.

$$w(p) = \sum_{i=1}^{k} w(v_{i-1}, v_i)$$

Camino Mínimo

Peso de un camino

Dado un grafo dirigido, $G = (V, E)$, con una función de peso $w : E \to R$
El **peso de un camino** $w(p)$
$p =< v_0, v_1, .., v_k >$, es la suma de los pesos de los arcos correspondientes.

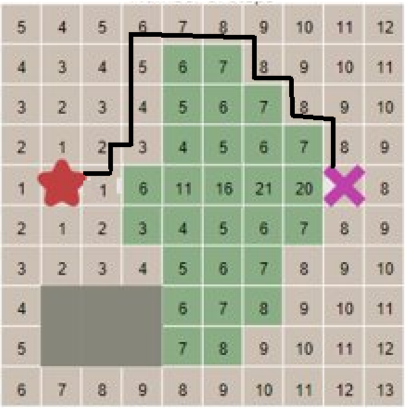
$$w(p) = \sum_{i=1}^{k} w(v_{i-1}, v_i)$$

Camino Mínimo

Peso de un camino

Dado un grafo dirigido, $G = (V, E)$, con una función de peso $w : E \to R$
El **peso de un camino** $w(p)$
$p =< v_0, v_1, .., v_k >$, es la suma de los pesos de los arcos correspondientes.

$$w(p) = \sum_{i=1}^{k} w(v_{i-1}, v_i)$$



Camino Mínimo

Ruta más corta

Dado un grafo dirigido, $G = (V, E)$,
con una función de peso $w : E \to R$
La ruta de peso más corta de u a v

$$\delta(u, v) = \begin{cases} \min\{w(p) : u \overset{p}{\rightsquigarrow} v\} & \text{if there is a path from } u \text{ to } v\ , \\ \infty & \text{otherwise}\ . \end{cases}$$

Problema - Solución

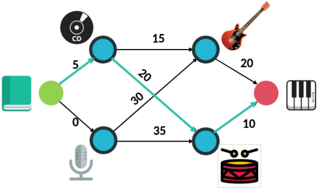
Rutas más cortas desde una fuente

$s \longrightarrow v_*$

Dado un vértice fuente $s \in V$, encontrar la ruta mas corta a cada uno de los diferentes vértices $v \in V$.

Otros problemas

- *Single-destination shortest-path problem*
- *Single-pair shortest-path problem*
- *All-pairs shortest-paths problem*



Problema - Solución

Rutas más cortas desde una fuente

$s \longrightarrow v_*$

Dado un vértice fuente $s \in V$, encontrar la ruta mas corta a cada uno de los diferentes vértices $v \in V$.

Otros problemas

- *Single-destination shortest-path problem*

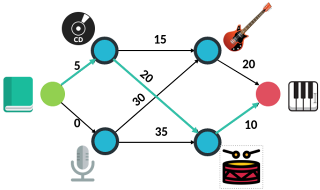
  Reversar la dirección de cada arco ($s \longleftarrow v_*$)

- *Single-pair shortest-path problem*

  Calcular las rutas más cortas desde u ($u \longrightarrow v_*$)

- *All-pairs shortest-paths problem*

  Calcular las rutas más cortas desde cada vértice u ($u \longrightarrow v_*$)



Camino Mínimo

Relajación

Los algoritmos de solución usan la técnica de **relajación**.

- $\forall v \in V$, $v.d$ es el peso de la ruta más corta estimada hacia v.
- $\forall v \in V$, $v.\pi$ es predecesor de v.

INITIALIZE-SINGLE-SOURCE(G, s)

for each vertex $v \in G.V$
    $v.d = \infty$
    $v.\pi = \text{NIL}$
$s.d = 0$

Camino Mínimo

Relajación

El proceso de relajación del arco (u, v) consiste en:

- Verificar si se puede mejorar la ruta más corta a v, hallada hasta el momento, pasando por u
- Si se puede, actualizar $v.d$ y $v.\pi$

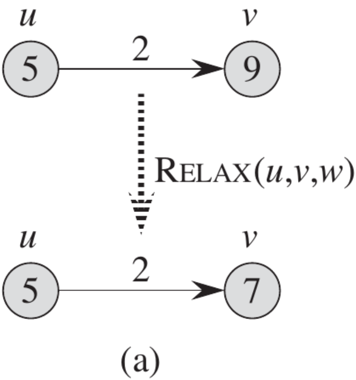
```
RELAX(u, v, w)
if v.d > u.d + w(u, v)
    v.d = u.d + w(u, v)
    v.π = u
```

Camino Mínimo

Relajación

El proceso de relajación del arco (u, v) consiste en:

- Verificar si se puede mejorar la ruta más corta a v, hallada hasta el momento, pasando por u
- Si se puede, actualizar $v.d$ y $v.\pi$

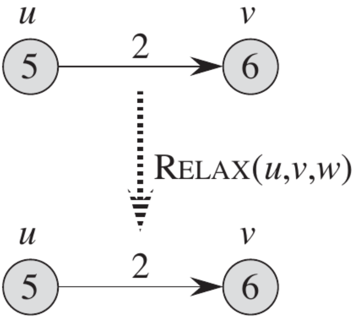


Camino Mínimo

Relajación

El proceso de relajación del arco (u, v) consiste en:

- Verificar si se puede mejorar la ruta más corta a v, hallada hasta el momento, pasando por u
- Si se puede, actualizar $v.d$ y $v.\pi$



(b)

Camino mínimo

Bellman Ford

1. Relajar los arcos, haciendo que disminuya progresivamente un estimado $v.d$ hasta lograr el camino mínimo de s a v.
2. Retorna si desde la fuente se llega a hay un ciclo de peso negativo

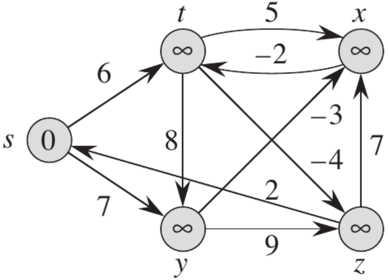
$$\Theta(VE)$$

```
BELLMAN-FORD(G, w, s)
INITIALIZE-SINGLE-SOURCE(G, s)
for i = 1 to |G.V| - 1
    for each edge (u, v) ∈ G.E
        RELAX(u, v, w)
for each edge (u, v) ∈ G.E
    if v.d > u.d + w(u, v)
        return FALSE
return TRUE
```

Camino Mínimo

Bellman Ford

```
BELLMAN-FORD(G, w, s)
INITIALIZE-SINGLE-SOURCE(G, s)
for i = 1 to |G.V| - 1
    for each edge (u, v) ∈ G.E
        RELAX(u, v, w)
for each edge (u, v) ∈ G.E
    if v.d > u.d + w(u, v)
        return FALSE
return TRUE
```



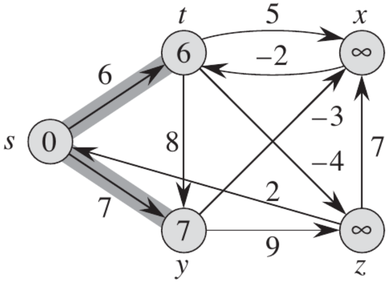
(a)

Camino Mínimo

Bellman Ford

```
BELLMAN-FORD(G, w, s)

INITIALIZE-SINGLE-SOURCE(G, s)
for i = 1 to |G.V| − 1
    for each edge (u, v) ∈ G.E
        RELAX(u, v, w)
for each edge (u, v) ∈ G.E
    if v.d > u.d + w(u, v)
        return FALSE
return TRUE
```

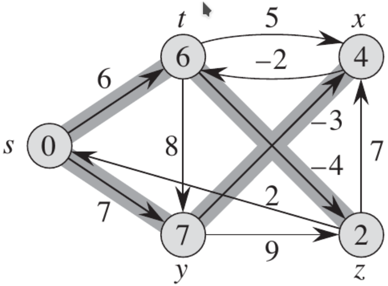


(b)

Camino Mínimo

Bellman Ford

```
BELLMAN-FORD(G, w, s)
INITIALIZE-SINGLE-SOURCE(G, s)
for i = 1 to |G.V| − 1
    for each edge (u, v) ∈ G.E
        RELAX(u, v, w)
for each edge (u, v) ∈ G.E
    if v.d > u.d + w(u, v)
        return FALSE
return TRUE
```

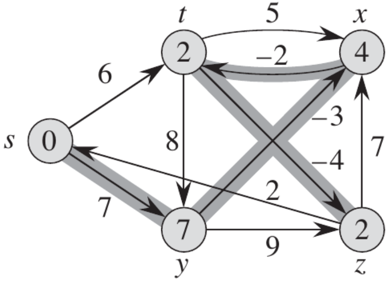


(c)

Camino Mínimo

Bellman Ford

```
BELLMAN-FORD(G, w, s)
INITIALIZE-SINGLE-SOURCE(G, s)
for i = 1 to |G.V| − 1
    for each edge (u, v) ∈ G.E
        RELAX(u, v, w)
for each edge (u, v) ∈ G.E
    if v.d > u.d + w(u, v)
        return FALSE
return TRUE
```

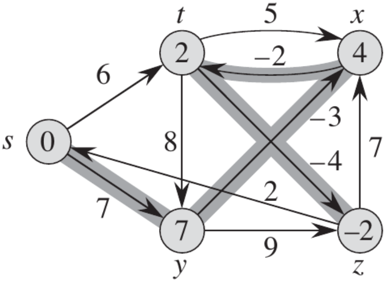


(d)

Camino Mínimo

Bellman Ford

```
BELLMAN-FORD(G, w, s)
INITIALIZE-SINGLE-SOURCE(G, s)
for i = 1 to |G.V| − 1
    for each edge (u, v) ∈ G.E
        RELAX(u, v, w)
for each edge (u, v) ∈ G.E
    if v.d > u.d + w(u, v)
        return FALSE
return TRUE
```



(e)

Camino mínimo

Dijkstra

INV: S tiene los vértices de los que se conoce la ruta mínima a la fuente s

1. Seleccionar u de $V - S$ con ruta mínima estimada
2. Adicionar u a S
3. Relajar todos los arcos que parten de u
4. Repetir el paso 1 hasta cubrir todos los vértices

Los pesos no pueden ser negativos

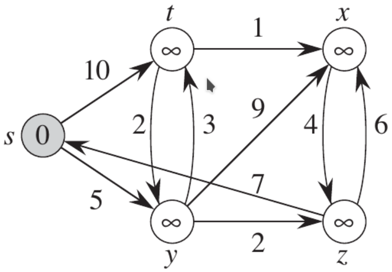
$\Theta(V^2)$

```
DIJKSTRA(G, w, s)
INITIALIZE-SINGLE-SOURCE(G, s)
S = ∅
Q = G.V
while Q ≠ ∅
    u = EXTRACT-MIN(Q)
    S = S ∪ {u}
    for each vertex v ∈ G.Adj[u]
        RELAX(u, v, w)
```

Camino Mínimo

Dijkstra

```
DIJKSTRA(G, w, s)
    INITIALIZE-SINGLE-SOURCE(G, s)
    S = ∅
    Q = G.V
    while Q ≠ ∅
        u = EXTRACT-MIN(Q)
        S = S ∪ {u}
        for each vertex v ∈ G.Adj[u]
            RELAX(u, v, w)
```

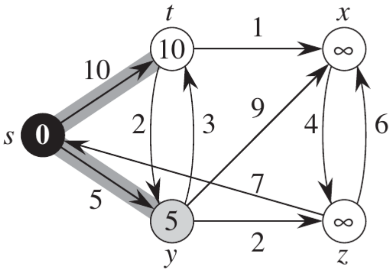


(a)

Camino Mínimo

Dijkstra

```
DIJKSTRA(G, w, s)
INITIALIZE-SINGLE-SOURCE(G, s)
S = ∅
Q = G.V
while Q ≠ ∅
    u = EXTRACT-MIN(Q)
    S = S ∪ {u}
    for each vertex v ∈ G.Adj[u]
        RELAX(u, v, w)
```

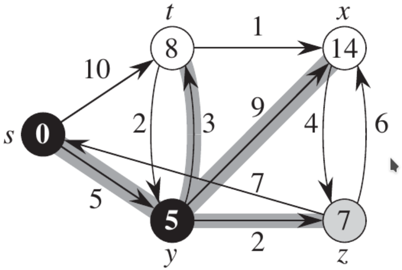


(b)

Camino Mínimo

Dijkstra

```
DIJKSTRA(G, w, s)
INITIALIZE-SINGLE-SOURCE(G, s)
S = Ø
Q = G.V
while Q ≠ Ø
    u = EXTRACT-MIN(Q)
    S = S ∪ {u}
    for each vertex v ∈ G.Adj[u]
        RELAX(u, v, w)
```

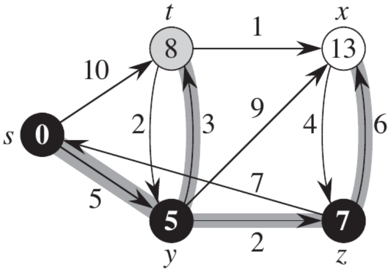


(c)

Camino Mínimo

Dijkstra

```
DIJKSTRA(G, w, s)
INITIALIZE-SINGLE-SOURCE(G, s)
S = Ø
Q = G.V
while Q ≠ Ø
    u = EXTRACT-MIN(Q)
    S = S ∪ {u}
    for each vertex v ∈ G.Adj[u]
        RELAX(u, v, w)
```

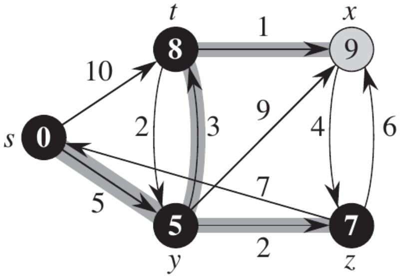


(d)

Camino Mínimo

Dijkstra

```
DIJKSTRA(G, w, s)
INITIALIZE-SINGLE-SOURCE(G, s)
S = ∅
Q = G.V
while Q ≠ ∅
    u = EXTRACT-MIN(Q)
    S = S ∪ {u}
    for each vertex v ∈ G.Adj[u]
        RELAX(u, v, w)
```

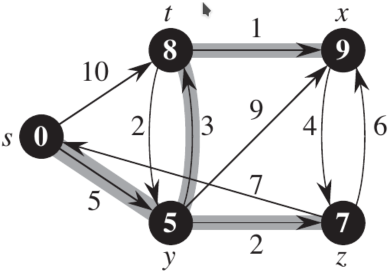


(e)

Camino Mínimo

Dijkstra

```
DIJKSTRA(G, w, s)
INITIALIZE-SINGLE-SOURCE(G, s)
S = ∅
Q = G.V
while Q ≠ ∅
    u = EXTRACT-MIN(Q)
    S = S ∪ {u}
    for each vertex v ∈ G.Adj[u]
        RELAX(u, v, w)
```



(f)

3. Para cada uno de los siguientes grafos, ¿cuál es el peso de la ruta más corta de principio a fin?