Introducción a Espacios Vectoriales Complejos

Luis Daniel Benavides N, Ph.D.

10-08-2020

Agenda

- Abstracciones, Pensamiento y Realidad
- Teorías
- Espacios Vectoriales

Abstracciones

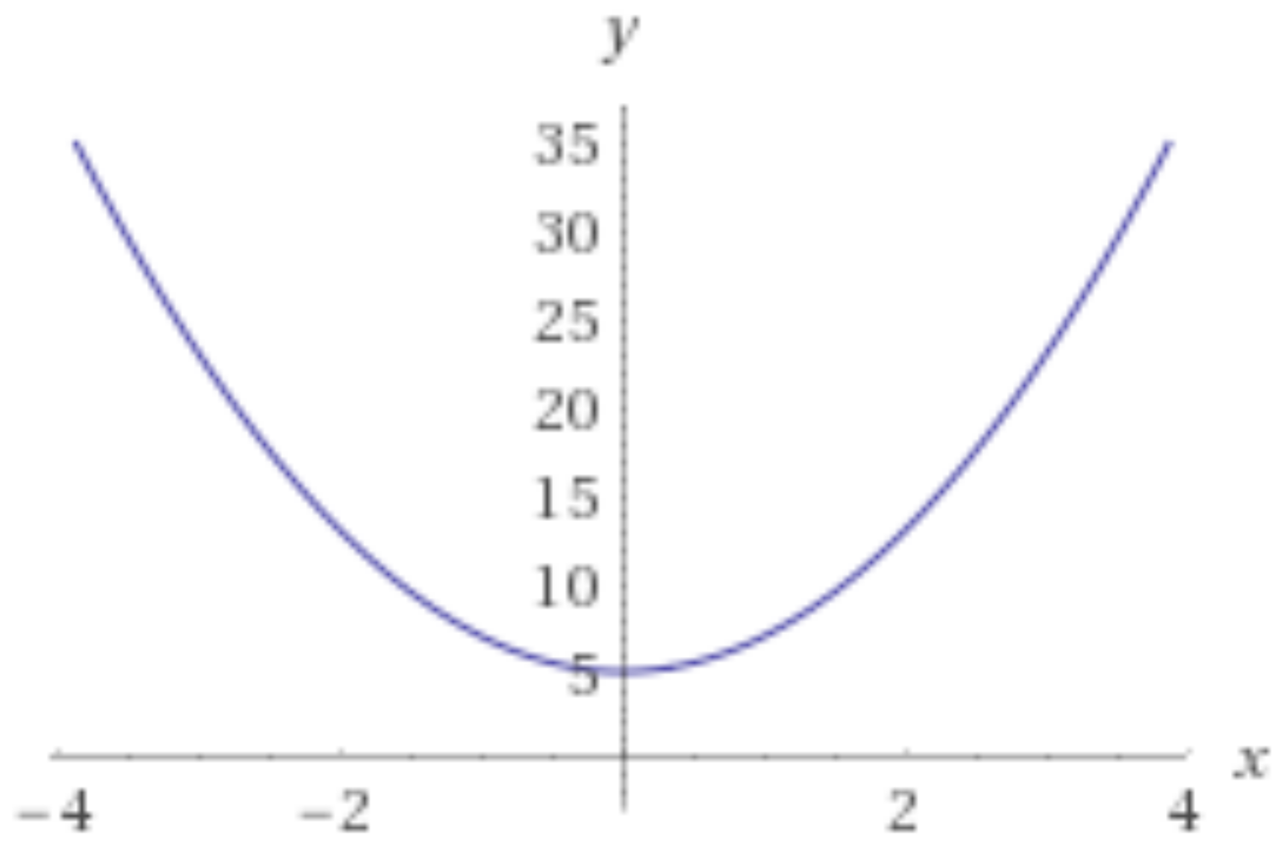
- Ideas
- Conceptos
- Pensamiento
- Inteligencia
- Conocimiento
- Matemáticas

Números

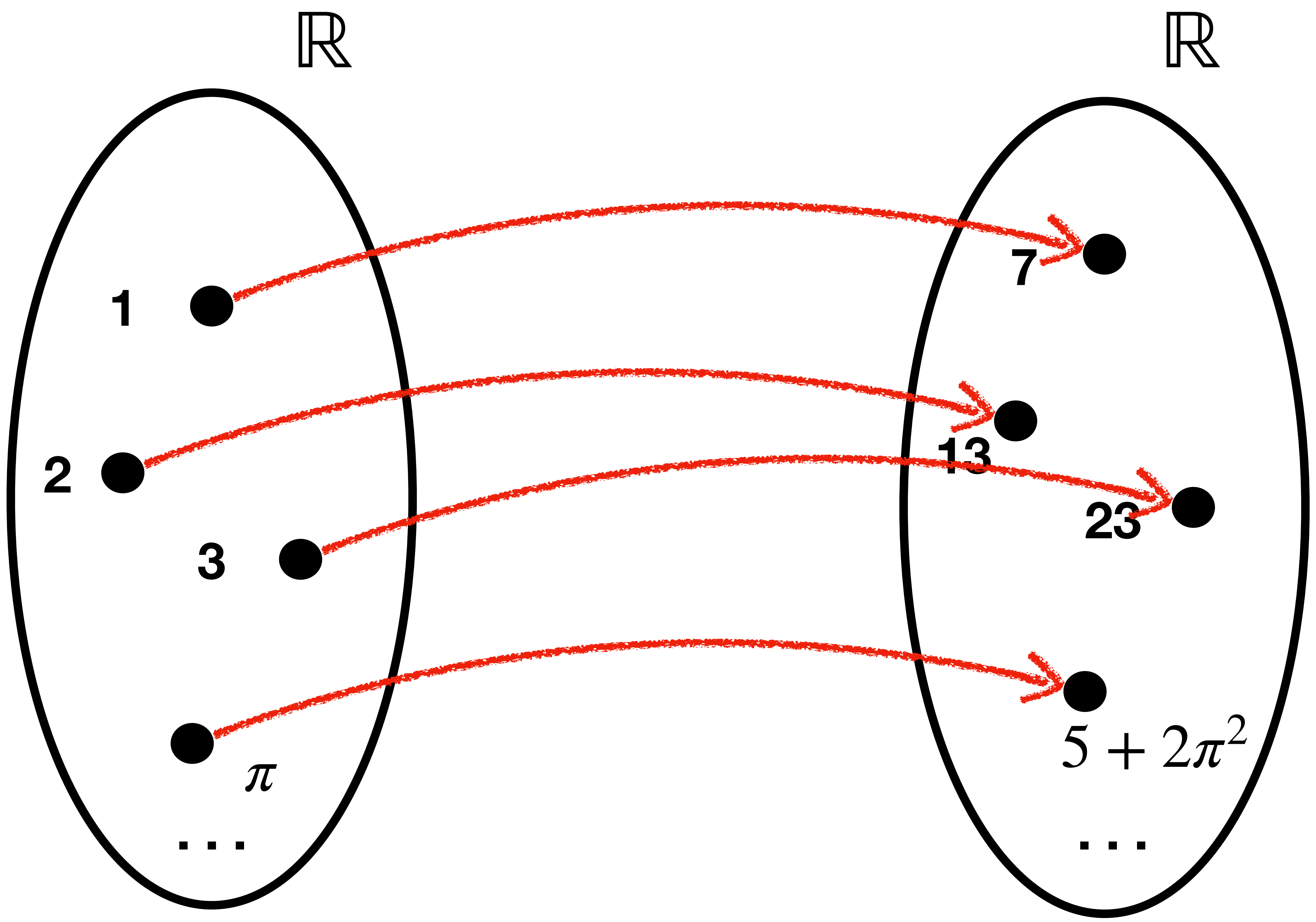
- Naturales
    - 0, 1, 2, 3, 4, 5 ,6 . . .
- Enteros
    - . . ., -3, -2 , -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5 ,6 . . .
- Racionales
    - 1/2, 1/7, 8/9, 0, 1/45, -4/7 ….
- Irracionales
    - $\pi, \sqrt{2}$, e
- Reales
    - -2.6789, 5.789, 10.67894, . . .
- Imaginarios
    - $-3i, 1/4i, 89i, 78.9i$ . . .
- Complejos
    - $7-3i,\ 89.4-5.67i,\ 0+89i$

Funciones

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f(x) = 5 + 2x^2$$



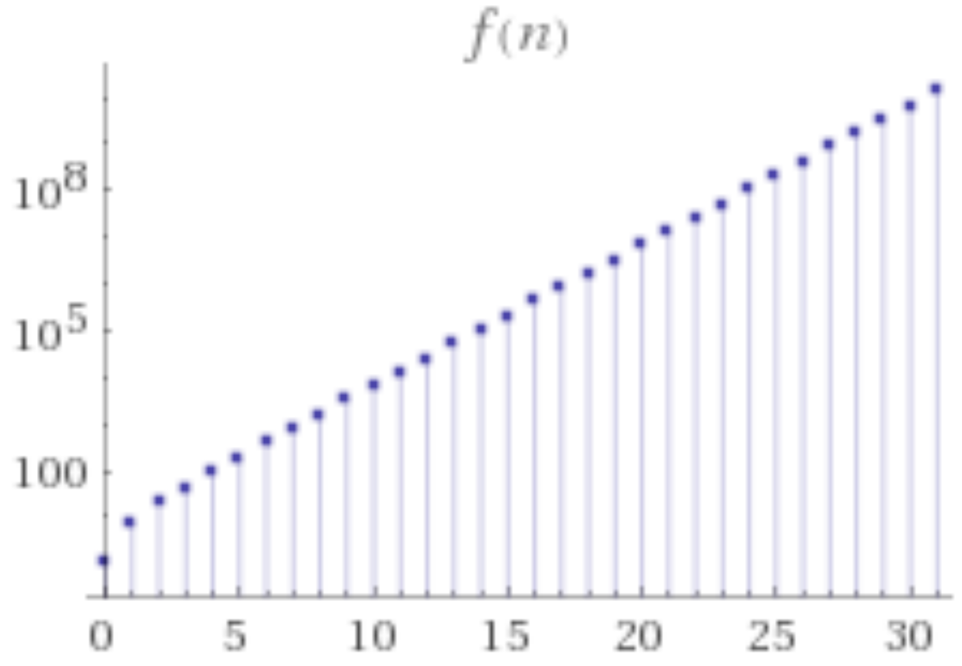
(x from −3.9 to 3.9)



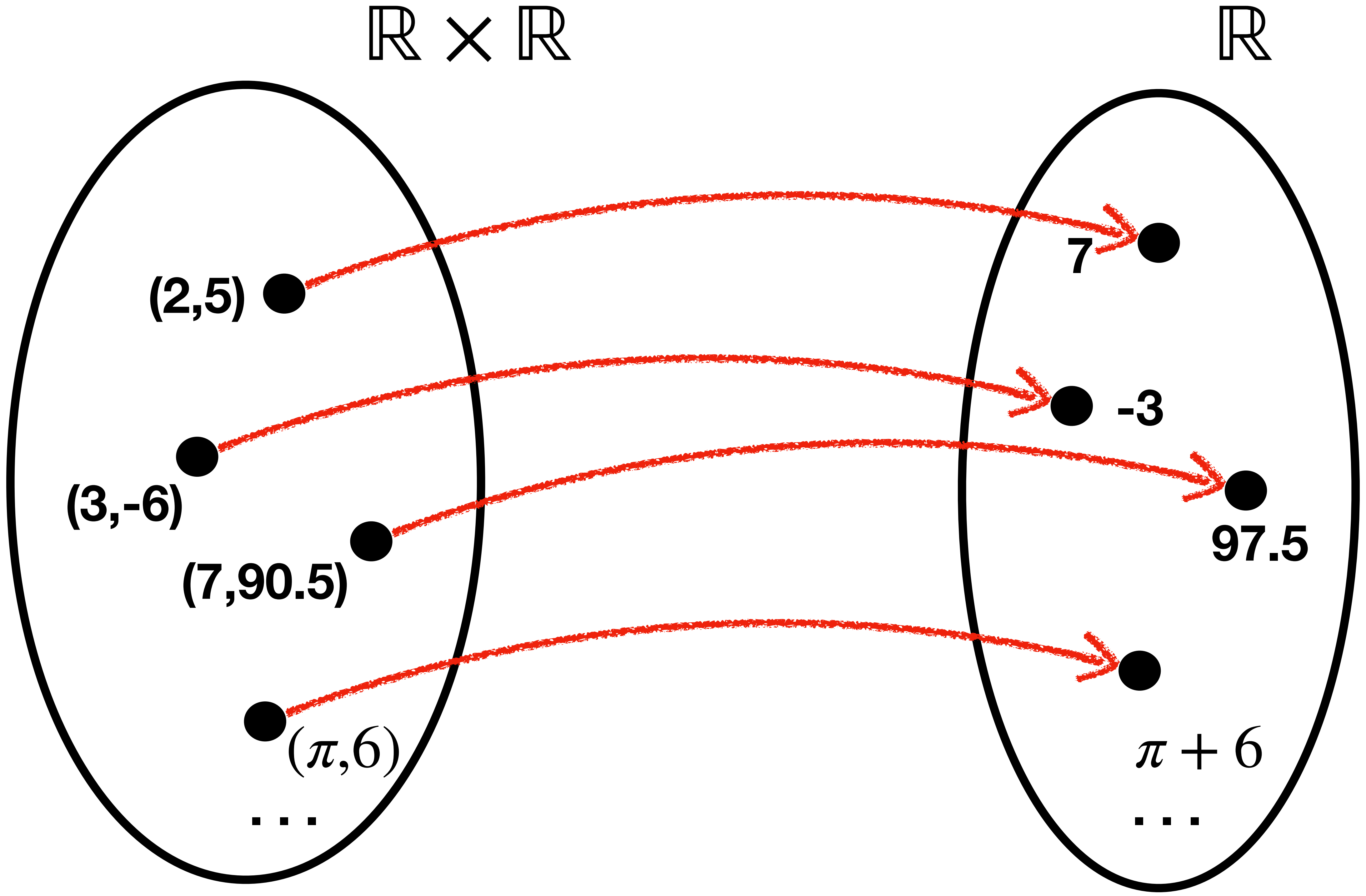
Funciones

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} : f(n) = 5 + 2f(n-1), f(0) = 1$$

f(0)= 1
f(1)=7
f(2)= 19
$\dots$

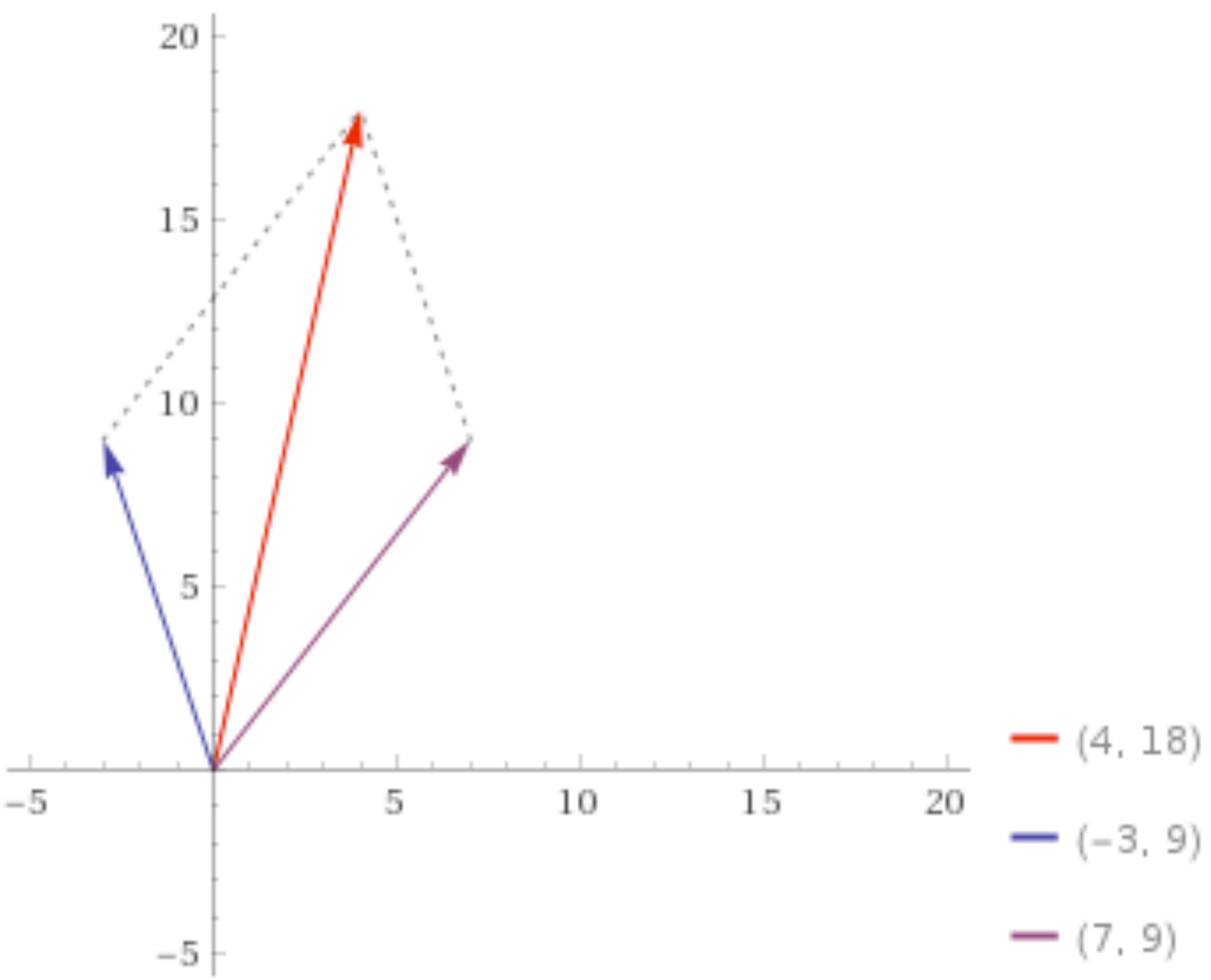


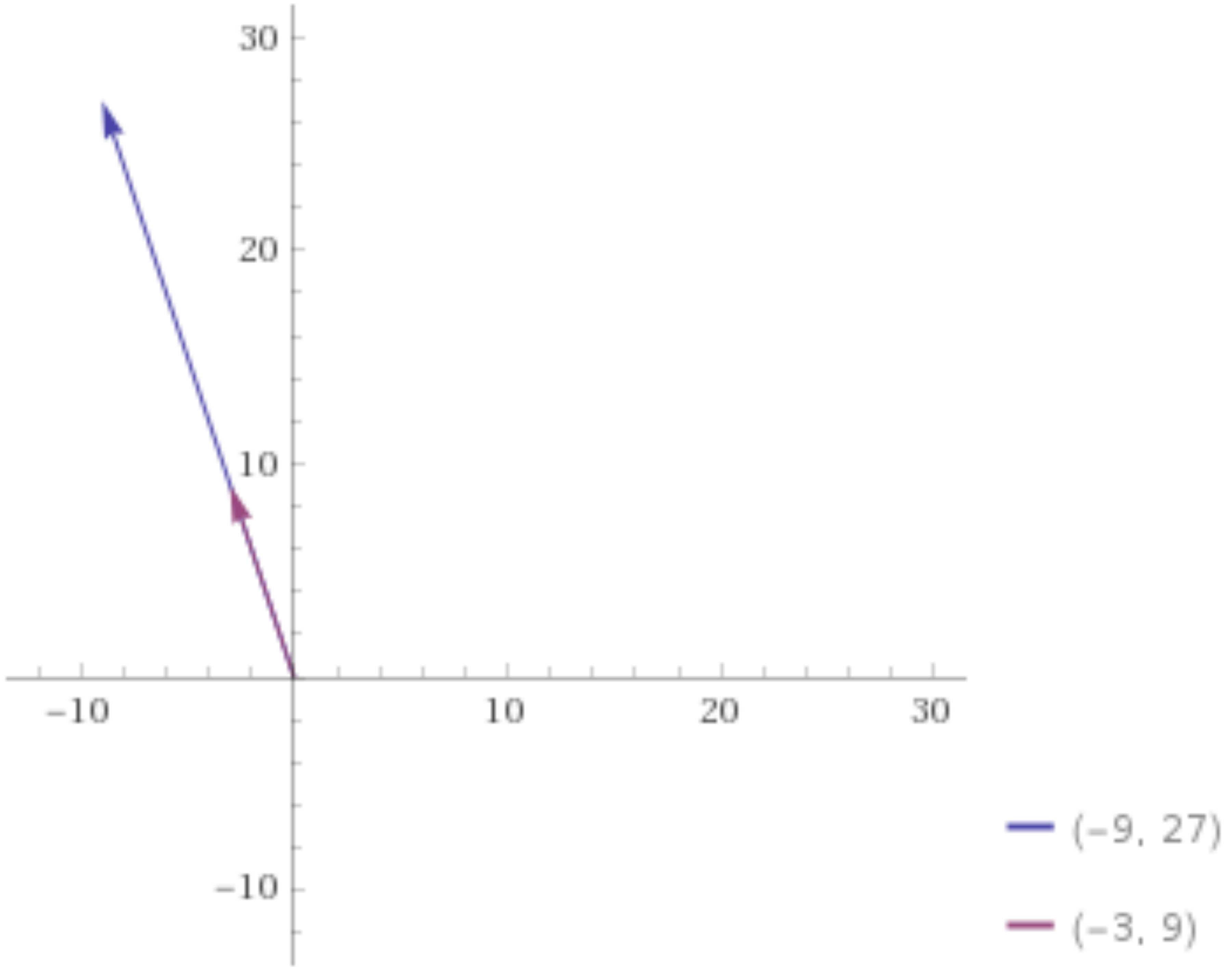
$$suma : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} : suma(x, y) = x + y$$



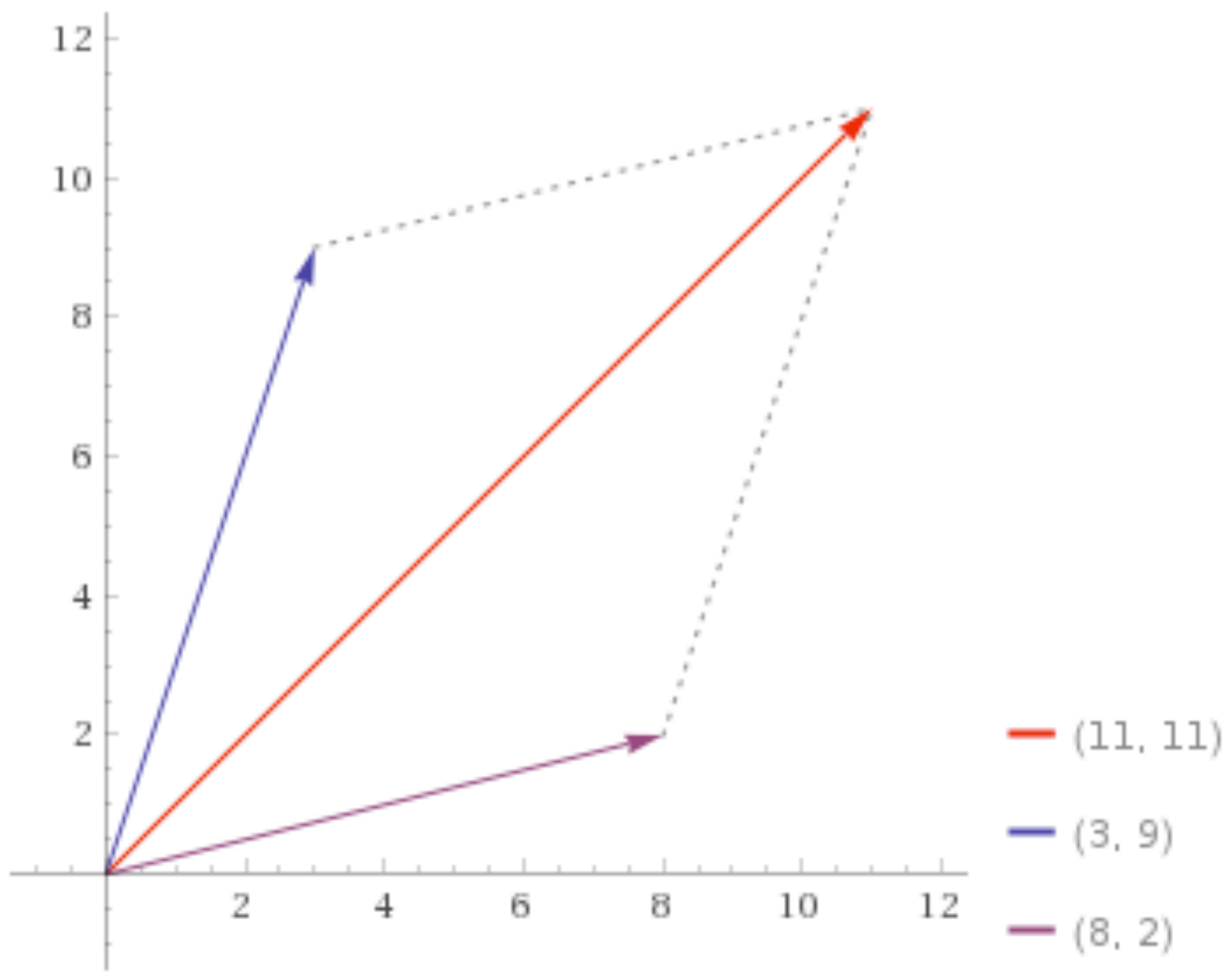
Vectores

- **Vectores:** objetos con magnitud y dirección

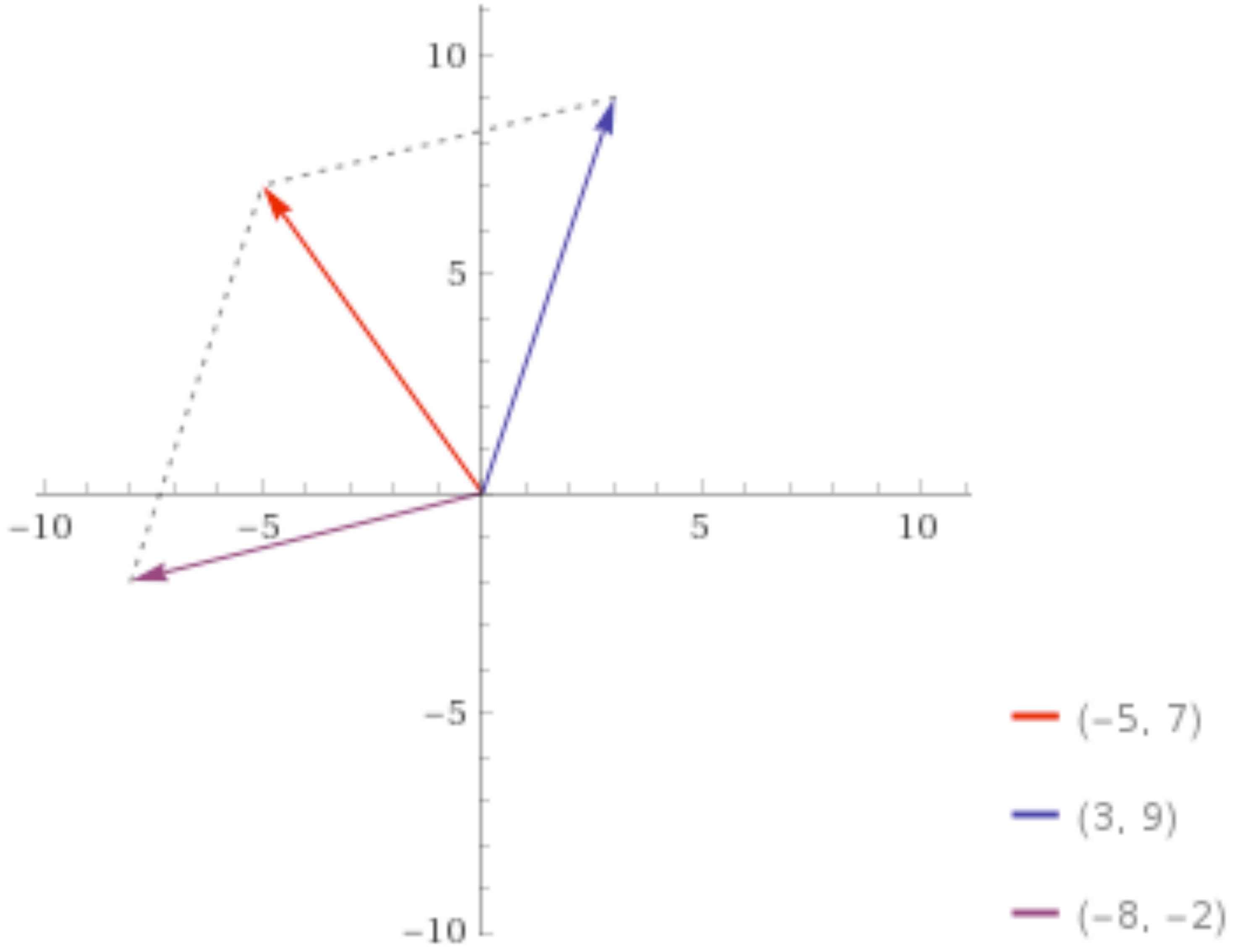




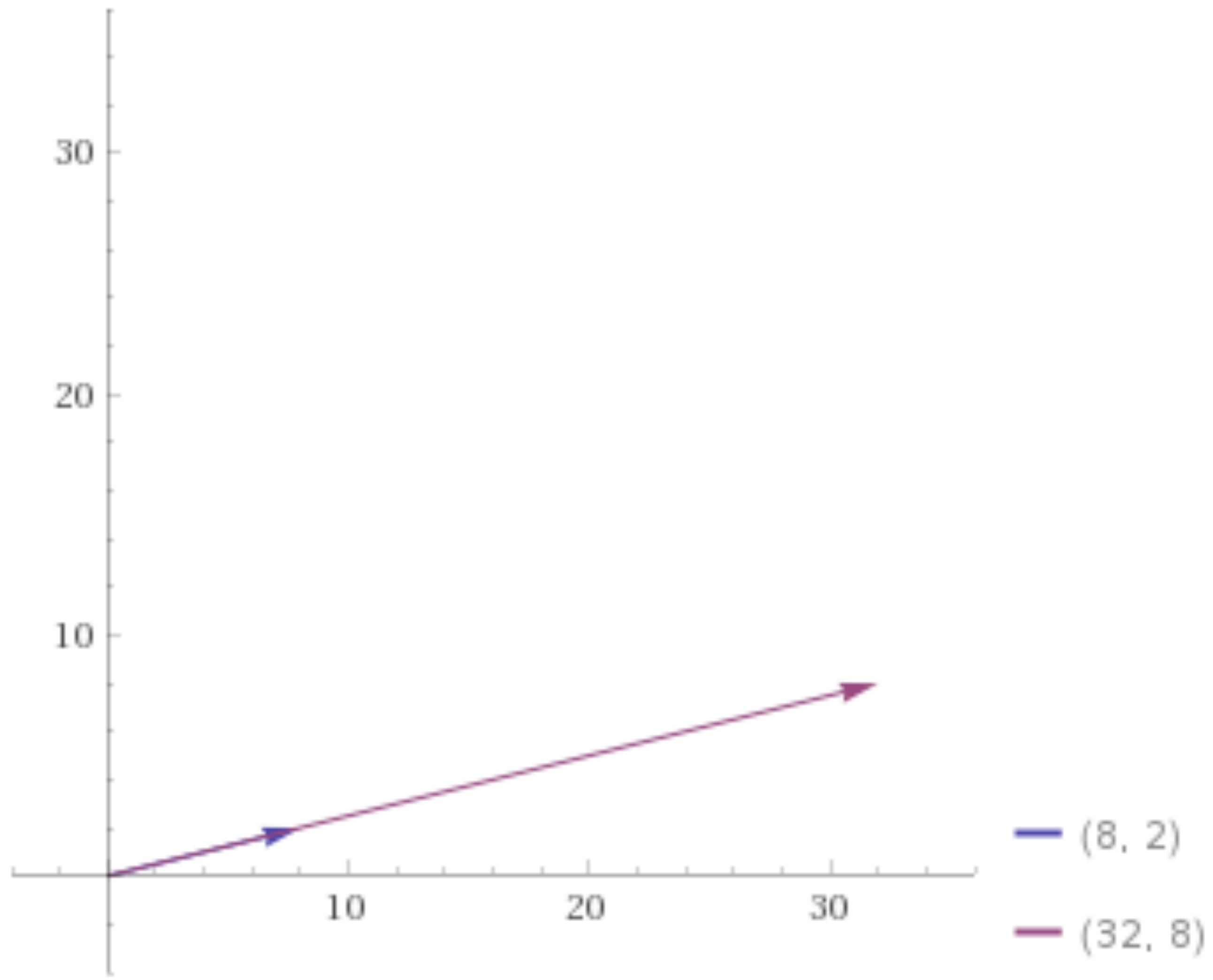
Operaciones



Suma

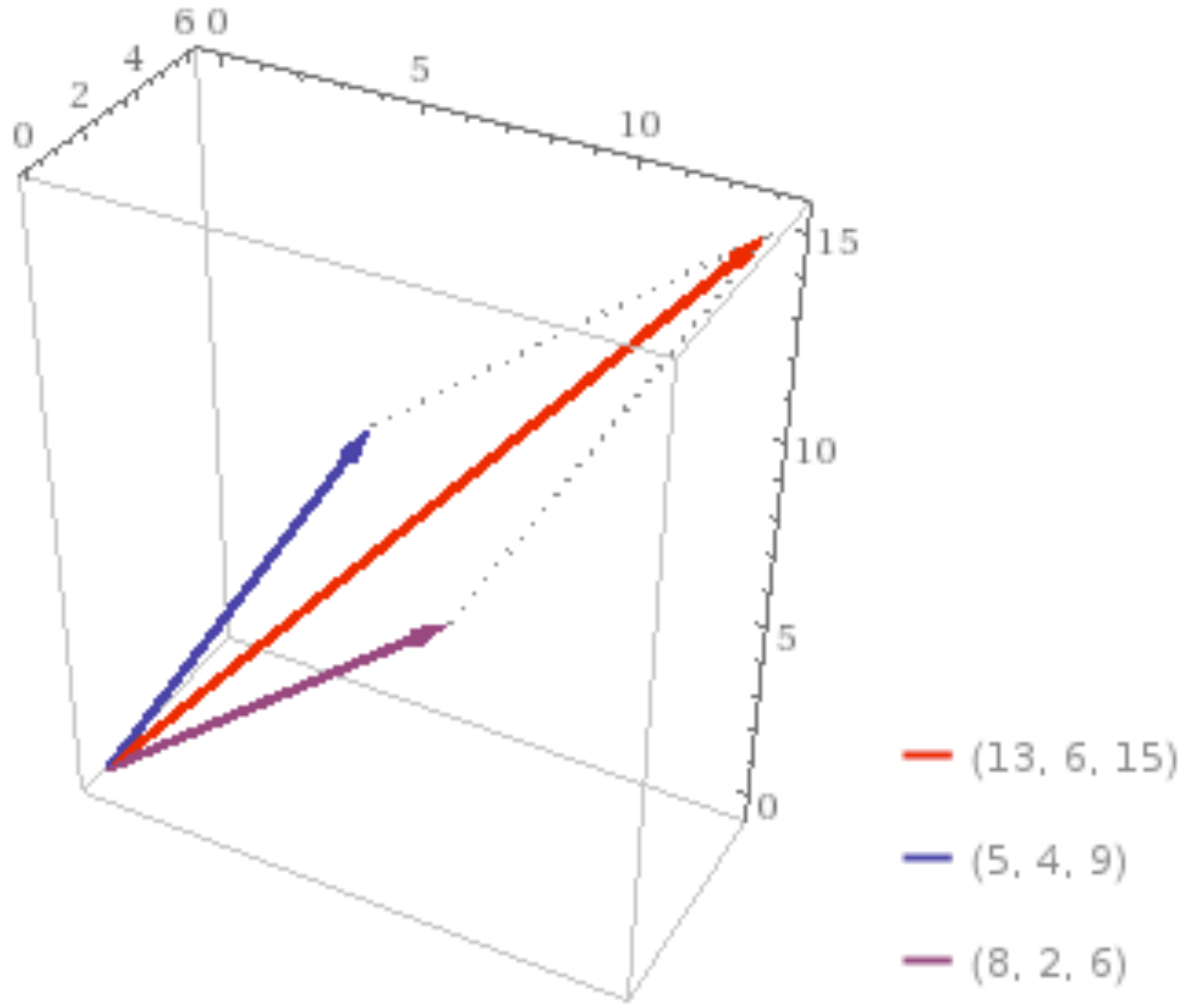


Resta

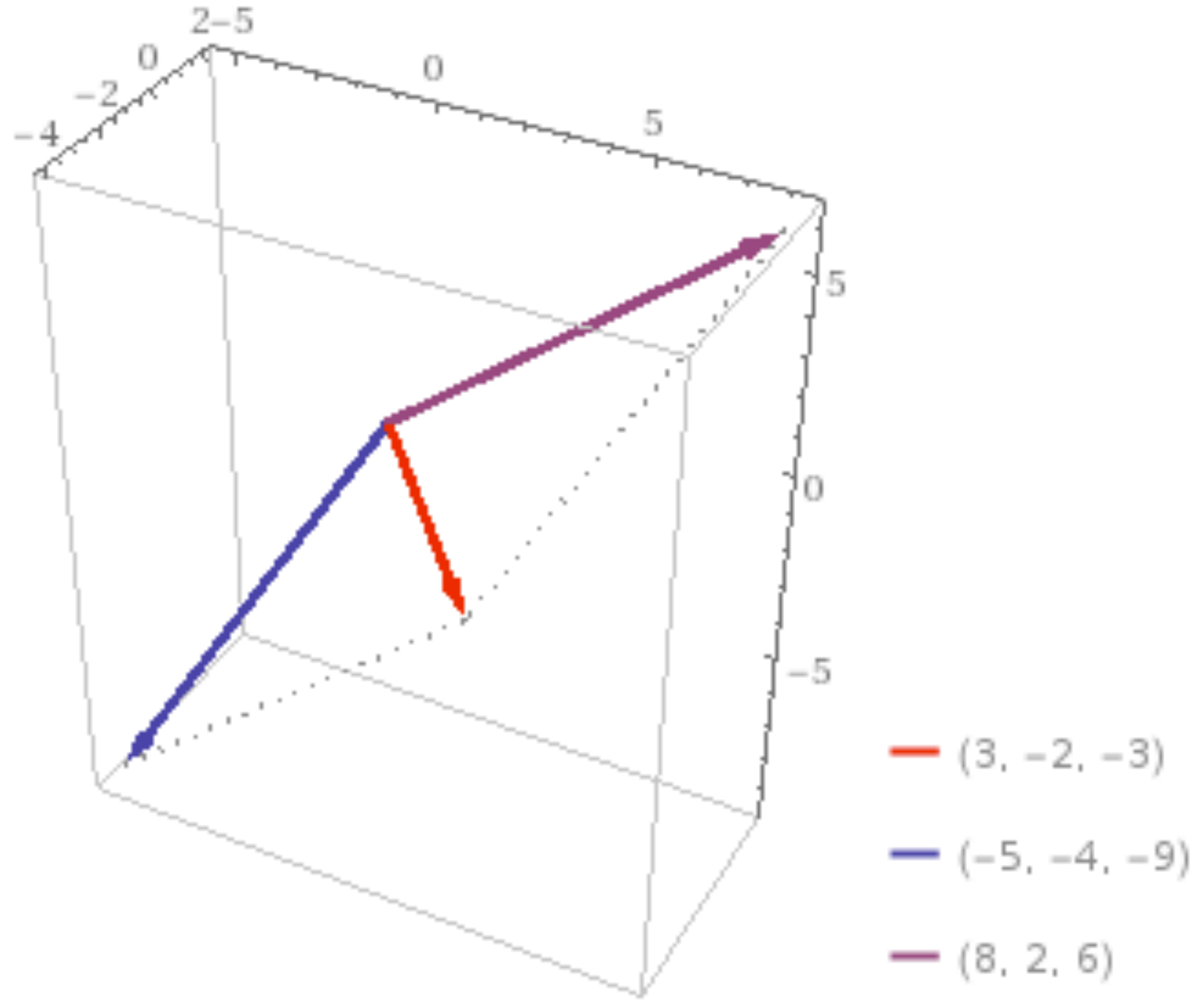


Mult. por escalar (*4)

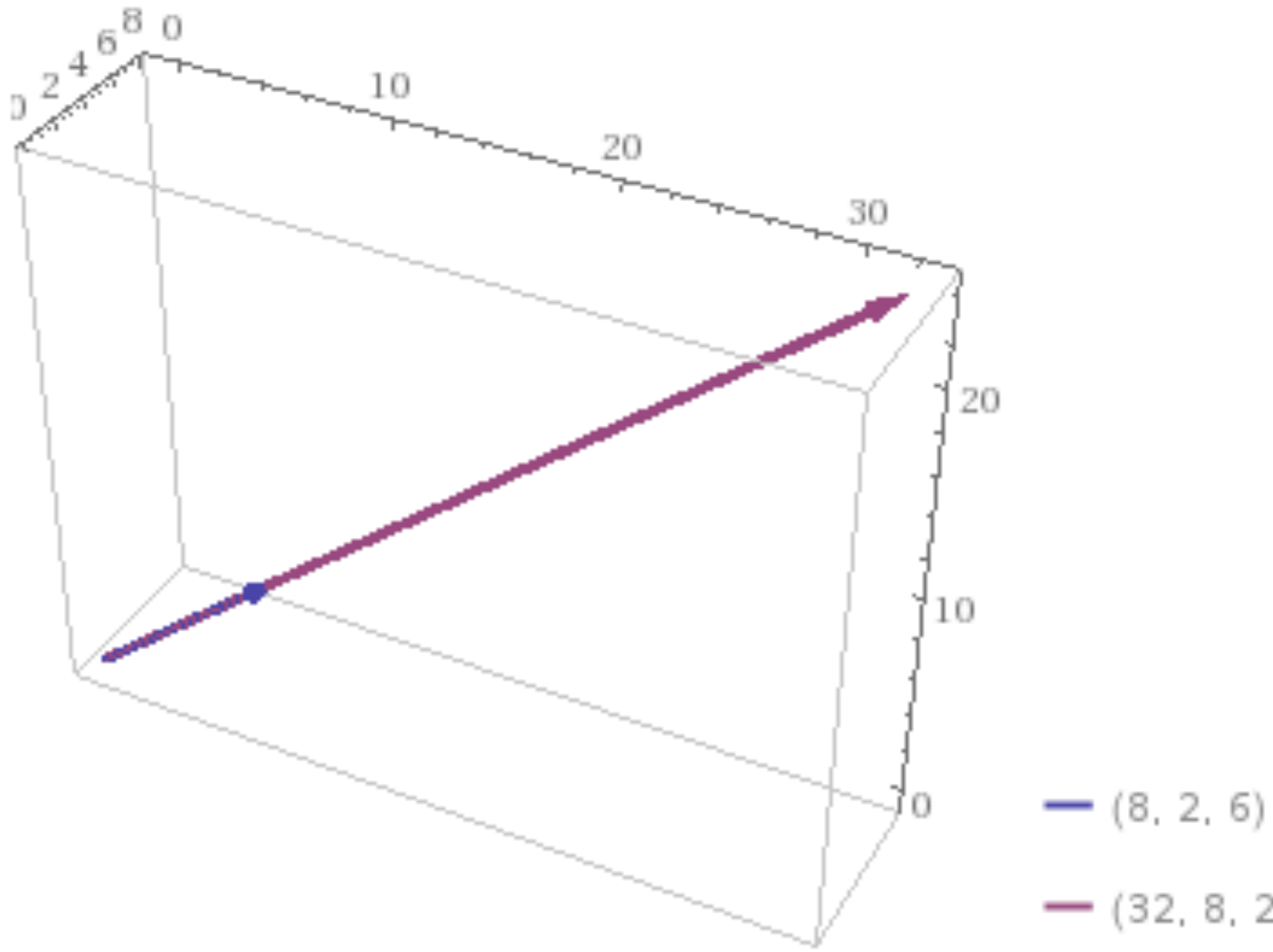
Operaciones en $\mathbb{R}^3$



Suma



Resta



Mult. por escalar (*4)

Abstracciones II

Vectores en $\mathbb{R}^4$

Vectores en $\mathbb{C}^2$

Vectores en $\mathbb{R}^5$

Vectores en $\mathbb{C}^{256}$

Vectores en $\mathbb{R}^{256}$

Vectores en $\mathbb{C}^{256\times 256}$

Teorías

- Axiomas y definiciones (Objetos)
  - Reglas (Comportamiento)
- Teoremas (Propiedades y verdades de esos objetos con esas reglas)
  - Pruebas (Computaciones siguiendo estas reglas)
- Lenguajes que usamos para expresar nuestras teorías
  - Español, Lógica formal (Reglas de inferencia), Diagramas

Un primer ejemplo $\mathbb{C}^n$

$$V = \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_{n-1} \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^n$$

Para referirnos a uno de los valores de V escribimos: $V[k]$
Por ejemplo,

$$V[2] = c_2$$

Suma

$$A + B = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{n-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_0 + b_0 \\ a_1 + b_1 \\ \vdots \\ a_{n-1} + a_{n-1} \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^n$$

Multiplicación por escalar

$$c \times \begin{bmatrix} a_0 + \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c \times a_0 + \\ c \times a_1 \\ \vdots \\ c \times a_{n-1} \end{bmatrix} = c \times V[k]$$

Sigamos aprendiendo con sus ejercicios

Ejercicio 2.1.2 Probar formalmente la asociatividad de la suma para el espacio $\mathbb{C}^n$

$$(V+W)+Z = V+(W+Z)$$

1. $(V[k]+W[k])+Z[k] = V[k]+(W[k]+Z[k])$ Es verdadero por asociatividad de la suma de números complejos
2. $(V+W)+Z = V+(W+Z)$ Es verdadero por la definición de suma en $\mathbb{C}^n$

$\blacksquare$

Ejercicio 2.1.4 Probar formalmente que $(c_1 + c_2)\cdot V = c_1\cdot V + c_2\cdot V$

$$(c_1 + c_2)\cdot V = c_1\cdot V + c_2\cdot V$$

1. $(c_1 + c_2)\cdot V[k] = c_1\cdot V[k] + c_2\cdot V[k]$ Es verdadero porque la multiplicación distribuye sobre la suma de números complejos
2. $(c_1 + c_2)\cdot V = c_1\cdot V + c_2\cdot V$ Es verdadero por la definición producto escalar en $\mathbb{C}^n$

$\blacksquare$

Ejercicio 2.1.4 Probar formalmente que $(c_1 + c_2)\cdot V = c_1\cdot V + c_2\cdot V$

1. $W = (c_1 + c_2)\cdot V$
2. $W[j] = (c_1 + c_2) \times V[j]$
3. $W[j] = c_1 \times V[j] + c_2 \times V[j]$
4. $W = c_1\cdot V + c_2\cdot V$
5. $(c_1 + c_2)\cdot V = c_1\cdot V + c_2\cdot V$

$\blacksquare$

Espacios Vectoriales

- **Def.:** Un espacio vectorial complejo es un objeto que está compuesto de un conjunto no vacío $\mathbb{V}$ de elementos que llamemos vectores y que tiene tres operaciones

  - Adición: $+ : \mathbb{V} \times \mathbb{V} \to \mathbb{V}$

  - Negación: $- : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$

  - multiplicación escalar: $\cdot : \mathbb{C} \times \mathbb{V} \to \mathbb{V}$

- cont.

Espacios Vectoriales

- Y con un elemento distinguido denominado el vector $0 \in \mathbb{V}$. Estas operaciones deben satisfacer para **0** y para todos los vectores: $V, W, X \in \mathbb{V}$ y para todo $c, c_1, c_2 \in \mathbb{C}$:

(i) *Commutativity of addition:* $V + W = W + V$,

(ii) *Associativity of addition:* $(V + W) + X = V + (W + X)$,

(iii) *Zero is an additive identity:* $V + \mathbf{0} = V = \mathbf{0} + V$,

(iv) *Every vector has an inverse:* $V + (-V) = \mathbf{0} = (-V) + V$,

(v) *Scalar multiplication has a unit:* $1 \cdot V = V$,

(vi) *Scalar multiplication respects complex multiplication:*

$$c_1 \cdot (c_2 \cdot V) = (c_1 \times c_2) \cdot V,$$

(vii) *Scalar multiplication distributes over addition:*

$$c \cdot (V + W) = c \cdot V + c \cdot W,$$

(viii) *Scalar multiplication distributes over complex addition:*

$$(c_1 + c_2) \cdot V = c_1 \cdot V + c_2 \cdot V.$$

-

Más ejemplos de espacios vectoriales complejos

$$\mathbb{C}^{m \times n}$$

Suma

$$A = \begin{bmatrix} c_{0,0} & c_{0,1} & \cdots & c_{0,n-1} \\ c_{1,0} & c_{1,1} & \cdots & c_{1,n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{m-1,0} & c_{m-1,1} & \cdots & c_{m-1,n-1} \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{m\times n} \qquad B = \begin{bmatrix} b_{0,0} & b_{0,1} & \cdots & b_{0,n-1} \\ b_{1,0} & b_{1,1} & \cdots & b_{1,n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{m-1,0} & b_{m-1,1} & \cdots & b_{m-1,n-1} \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{m\times n}$$

$$A + B = \begin{bmatrix} c_{0,0} + b_{0,0} & c_{0,1} + b_{0,1} & \cdots & c_{0,n-1} + b_{0,n-1} \\ c_{1,0} + b_{1,0} & c_{1,1} + b_{1,1} & \cdots & c_{1,n-1} + b_{1,n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{m-1,0} + b_{m-1,0} & c_{m-1,1} + b_{m-1,1} & \cdots & c_{m-1,n-1} + b_{m-1,n-1} \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{m\times n}$$

$$(A + B)[j, k] = A[j, k] + B[j, k]$$

Negación

$$A = \begin{bmatrix} c_{0,0} & c_{0,1} & \cdots & c_{0,n-1} \\ c_{1,0} & c_{1,1} & \cdots & c_{1,n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{m-1,0} & c_{m-1,1} & \cdots & c_{m-1,n-1} \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{m\times n}$$

$$-A = \begin{bmatrix} -c_{0,0} & -c_{0,1} & \cdots & -c_{0,n-1} \\ -c_{1,0} & -c_{1,1} & \cdots & -c_{1,n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -c_{m-1,0} & -c_{m-1,1} & \cdots & -c_{m-1,n-1} \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{m\times n}$$

$$(-A)[j,k] = -A[j,k]$$

Multiplicación escalar

$$A = \begin{bmatrix} c_{0,0} & c_{0,1} & \cdots & c_{0,n-1} \\ c_{1,0} & c_{1,1} & \cdots & c_{1,n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{m-1,0} & c_{m-1,1} & \cdots & c_{m-1,n-1} \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{m\times n}$$

$$p{\cdot}A = \begin{bmatrix} p \times c_{0,0} & p \times c_{0,1} & \cdots & p \times c_{0,n-1} \\ p \times c_{1,0} & p \times c_{1,1} & \cdots & p \times c_{1,n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p \times c_{m-1,0} & p \times c_{m-1,1} & \cdots & p \times c_{m-1,n-1} \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{m\times n}$$

$$(p{\cdot}A)[j,k] = p \times A[j,k]$$

$$\mathbb{C}^{n \times n}$$

Si m = n hay más estructura y operaciones

$$(A^T)[j,k] = A[k,j]$$

$$(\overline{A})[j,k] = \overline{A[j,k]}$$

$$(A^\dagger)[j,k] = (\overline{A^T})[j,k] = ((\overline{A})^T)[j,k] = \overline{A[k,j]}$$

Acción de matriz sobre vector

A es una matriz . **A** representa la dinámica de un sistema.

V es un vector. **V** representa el estado de un sistema

La acción de A sobre V es igual a A*V

El resultado es un vector.

Preguntas

Base y Dimensión

Combinación lineal

Sea $\mathbb{V}$ un espacio vectorial complejo. Se dice que $V \in \mathbb{V}$ es una combinación lineal de vectores $V_0, V_1, \ldots, V_n - 1$ en $\mathbb{V}$ si V puede ser escrito así:

$$V = c_0V_0 + c_1V_1 + \ldots + c_{n-1}V_{n-1}$$

Para algunos $c_0, c_1, \ldots, c_{n-1} \in \mathbb{C}$

Independencia Lineal

Un conjunto $\{V_0, V_1, \ldots, V_n - 1\}$ de vectores en $\mathbb{V}$ es linealmente independiente si:

$$0 = c_0 V_0 + c_1 V_1 + \ldots + c_{n-1} V_{n-1}$$

Implica que $c_0 = c_1 = \ldots = c_{n-1} = 0$. Es decir que la única forma de obtener el vector **0** es que todos los coeficientes complejos sean 0.

Base de un espacio vectorial complejo

Un conjunto $\mathscr{B} = \{V_0, V_1, \ldots, V_{n-1}\} \subseteq \mathbb{V}$ es llamado una base de un espacio vectorial $\mathbb{V}$ si:

i) Cada, $V \in \mathbb{V}$ puede ser escrito como una combinación lineal de vectores en $\mathscr{B}$

ii) $\mathscr{B}$ es linealmente independiente

Base canónica de $\mathbb{C}^n$

$\mathscr{B} = \{E_0, E_1, \ldots, E_{n-1}\}$ es la base canónica de $\mathbb{C}^n$ si:

$$E_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, E_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \ldots, E_{n-1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

Es decir, todo vector $V = [c_0, c_1, \ldots, c_{n-1}]^T \in \mathbb{C}^n$ se puede escribir así:

$$V = \sum_{j=0}^{n-1} (c_j \cdot E_j) = c_0 \cdot E_0 + c_1 \cdot E_1 + \ldots + c_{n-1} \cdot E_{n-1}$$

Base canónica de $\mathbb{C}^{m\times n}$

$\mathscr{B} = \{E_{0,0}, E_{0,1}, \ldots, E_{m-1,n-1}\}$ es la base canónica de $\mathbb{C}^{m\times n}$ si:

$$E_{j,k} = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cccccc} 0 & 1 & \ldots & k & \ldots & n\text{-}1 \end{array} \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ j \\ \vdots \\ m-1 \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \ldots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \ldots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Es decir, toda matriz $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ se puede escribir así:

$$A = \sum_{j=0}^{m-1} \sum_{k=0}^{n-1} A[j,k] \cdot E_{j,k}$$

Ejemplo $\mathbb{C}^{2\times 2}$

$$E_{0,0} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad E_{0,1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad E_{1,0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad E_{1,1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -\sqrt{2} & 7+4i \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = -\sqrt{2} \cdot E_{0,0} + (7+4i) \cdot E_{0,1} + 1 \cdot E_{1,0} + 3 \cdot E_{1,1}$$

Dimensión

Prop. Para cada espacio vectorial, todas las bases tienen el mismo número de vectores.

Def. La **dimension** de un espacio vectorial complejo es el número de elemento en la base.

Prop. Dos espacios vectoriales que tienen la misma dimensión son isomorfos

Producto interno

$$\langle - , - \rangle : \mathbb{V} \times \mathbb{V} \to \mathbb{C}$$

(i) *Nondegenerate*:

$$\langle V, V \rangle \geq 0, \tag{2.99}$$

$$\langle V, V \rangle = 0 \text{ if and only if } V = \mathbf{0} \tag{2.100}$$

(*i.e., the only time it "degenerates" is when it is* 0).

(ii) *Respects addition:*

$$\langle V_1 + V_2, V_3 \rangle = \langle V_1, V_3 \rangle + \langle V_2, V_3 \rangle, \tag{2.101}$$

$$\langle V_1, V_2 + V_3 \rangle = \langle V_1, V_2 \rangle + \langle V_1, V_3 \rangle. \tag{2.102}$$

(iii) *Respects scalar multiplication:*

$$\langle c \cdot V_1, V_2 \rangle = c \times \langle V_1, V_2 \rangle, \tag{2.103}$$

$$\langle V_1, c \cdot V_2 \rangle = \overline{c} \times \langle V_1, V_2 \rangle. \tag{2.104}$$

(iv) *Skew symmetric:*

$$\langle V_1, V_2 \rangle = \overline{\langle V_2, V_1 \rangle}. \tag{2.105}$$

Productos internos para diferentes espacios

$\mathbb{R}^n$: The inner product is given as

$$\langle V_1, V_2 \rangle = V_1^T \star V_2. \tag{2.106}$$

$\mathbb{C}^n$: The inner product is given as

$$\langle V_1, V_2 \rangle = V_1^\dagger \star V_2. \tag{2.107}$$

$\mathbb{R}^{n \times n}$ has an inner product given for matrices $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ as

$$\langle A, B \rangle = Trace(A^T \star B), \tag{2.108}$$

where the **trace** of a square matrix C is given as the sum of the diagonal elements. That is,

$$Trace(C) = \sum_{i=0}^{n-1} C[i, i]. \tag{2.109}$$

$\mathbb{C}^{n \times n}$ has an inner product given for matrices $A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}$ as

$$\langle A, B \rangle = Trace(A^\dagger \star B). \tag{2.110}$$

Valores y Vectores propios

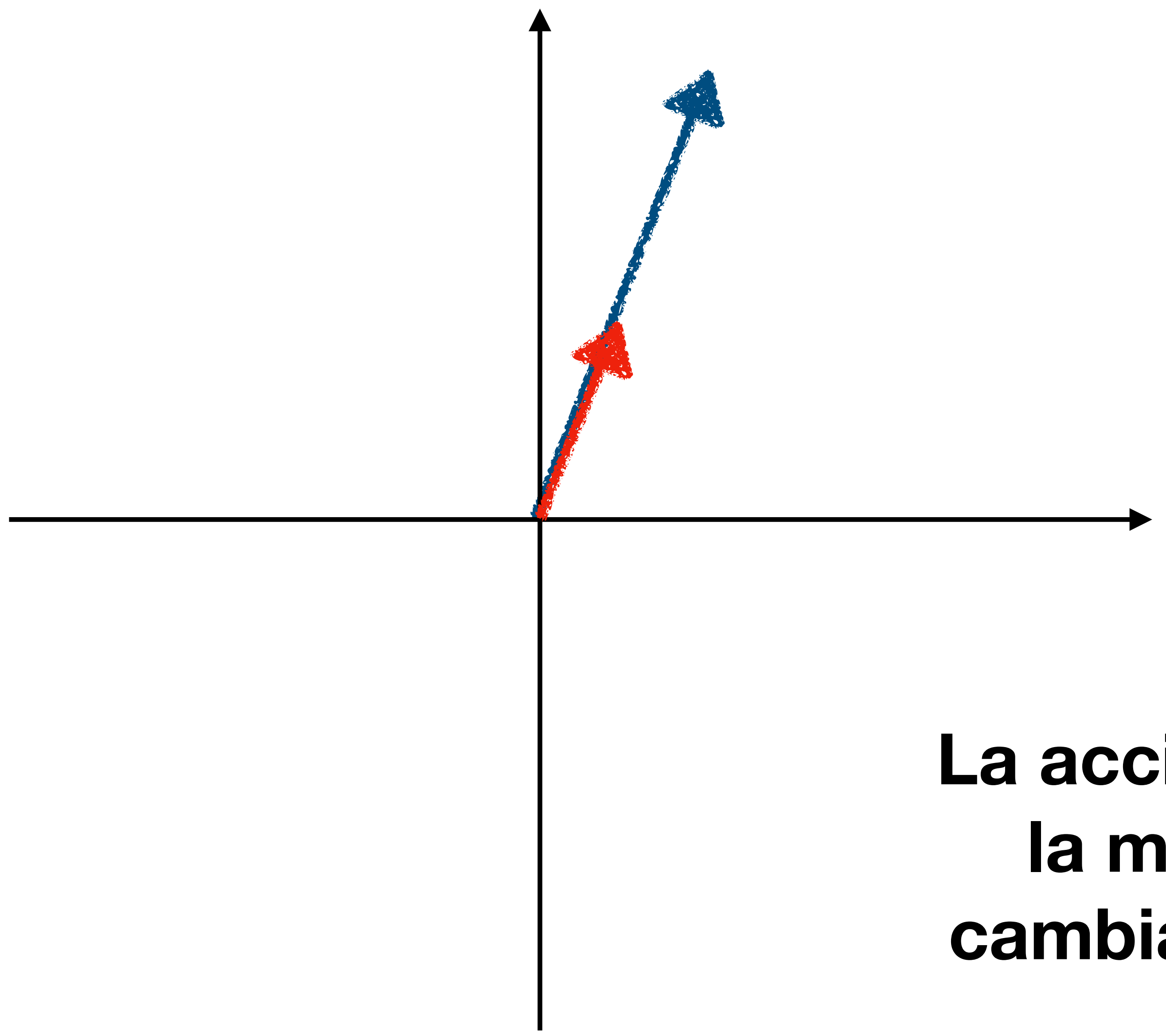
Definición. Para una matriz A en $\mathbb{C}^n$, si hay un número $c \in \mathbb{C}$ y un vector $V \neq 0 \in \mathbb{C}^n$ tal que:

$$AV = c \cdot V,$$

entonces c es un valor propios de A y V es un vector propios de A asociado a c.

Ejemplo:

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} = 2 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$



La acción solo altera la magnitud, no cambia la dirección.

Ejercicios

2.3.1

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ -4 \end{bmatrix} \right\}$$

$$0 = (-2) \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + 1 \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} + (-1) \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ -4 \end{bmatrix}$$

Exercise 2.4.1 Let $V_1 = [2, 1, 3]^T$, $V_2 = [6, 2, 4]^T$, and $V_3 = [0, -1, 2]^T$. Show that the inner product in $\mathbb{R}^3$ respects the addition, i.e., Equations (2.101) and (2.102).

(i.e., the only time it "degenerates" is when it is 0).

(ii) *Respects addition:*

$$\langle V_1 + V_2, V_3 \rangle = \langle V_1, V_3 \rangle + \langle V_2, V_3 \rangle, \qquad (2.101)$$

$$\langle V_1, V_2 + V_3 \rangle = \langle V_1, V_2 \rangle + \langle V_1, V_3 \rangle. \qquad (2.102)$$

$$\langle V_1 + V_2, V_3 \rangle = \langle V_1, V_3 \rangle + \langle V_2, V_3 \rangle$$

$$\langle V_1 + V_2, V_3 \rangle = \left\langle \begin{bmatrix} 8 \\ 3 \\ 7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\rangle = [8,3,7] \star \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} = 0 + (-3) + 14 = 11$$

$$\langle V_1, V_3 \rangle + \langle V_2, V_3 \rangle = \left([2,1,3] \star \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}\right) + \left([6,2,4] \star \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}\right)$$

$$= (0 - 1 + 6) + (0 - 2 + 8) = 11$$

Exercise 2.4.3 Let $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, and $C = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$. Show that the inner product in $\mathbb{R}^{2\times 2}$ respects addition (Equations (2.101) and (2.102)) with these matrices.

$$\langle A + B, C \rangle = \langle A, C \rangle + \langle B, C \rangle$$

$$\langle A + B, C \rangle = \langle \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \rangle$$

$$= Trace(\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \star \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}) = Trace(\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}) = 5$$

Exercise 2.4.5 Calculate the norm of $[4 + 3i, 6 - 4i, 12 - 7i, 13i]^T$.

$$\langle V_1, V_2 \rangle = V1^{\dagger} \star V_2$$

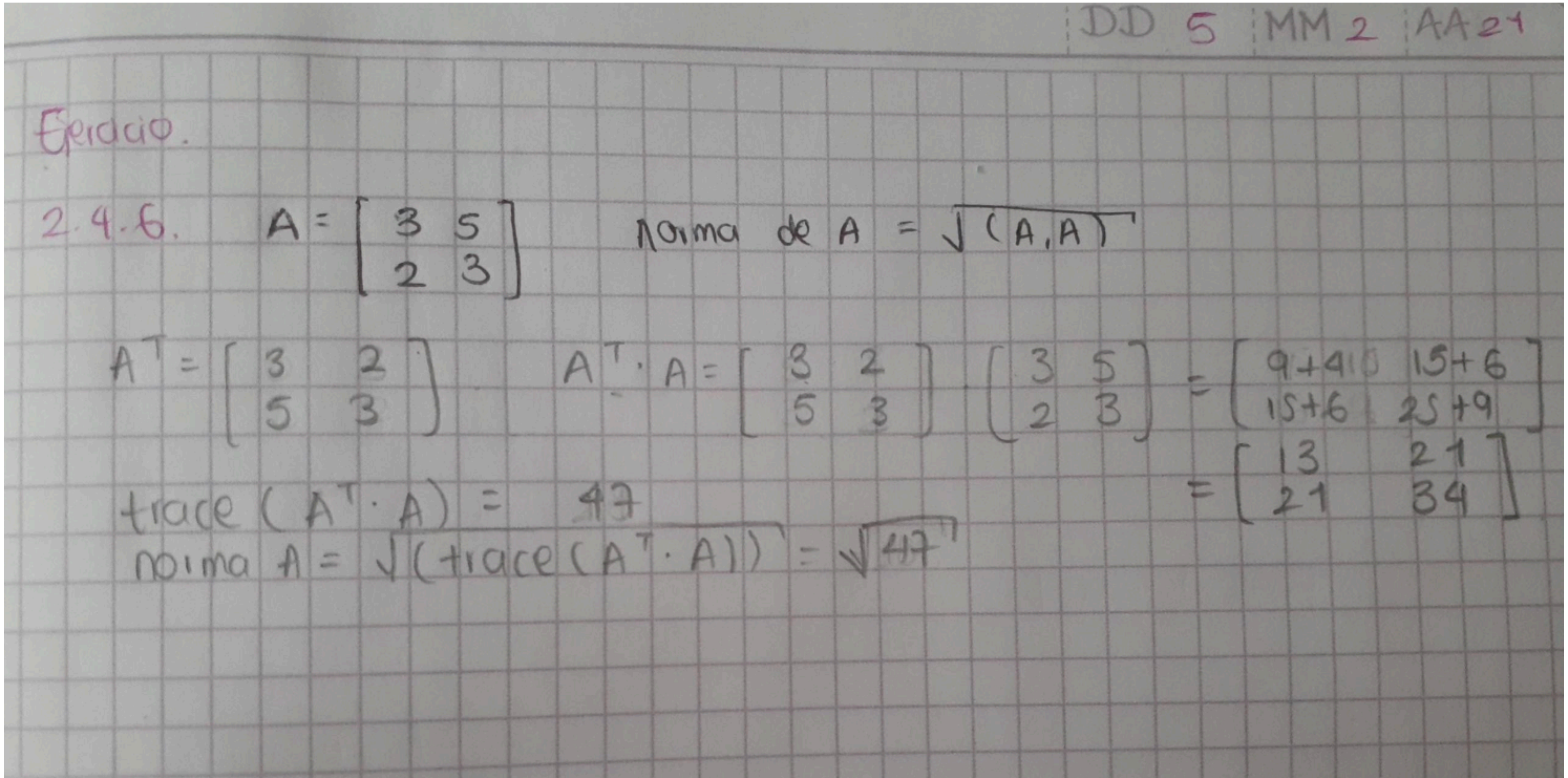
$$|V| = \sqrt{\langle V, V \rangle} = \sqrt{V^{\dagger} \star V}$$

$$V^{\dagger} \star V = [4 - 3i, 6 + 4i, 12 + 7i, -13i] \star \begin{bmatrix} 4 + 3i \\ 6 - 4i \\ 12 - 7i \\ 13i \end{bmatrix}$$

$$= ((4 - 3i) \times (4 + 4i)) + ((6 + 4i) \times (6 - 4i)) + ((12 + 7i) \times (12 - 7i)) + ((-13i) \times (13i))$$

Exercise 2.4.6 Let $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. Calculate the norm $|A| = \sqrt{\langle A, A\rangle}$.

$$\langle A, B\rangle = Trace(A^T \star B)$$



DD 5 MM 2 AA 24

Ejercicio.

2.4.6. $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ norma de $A = \sqrt{(A, A)}$

$A^T = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$ $A^T \cdot A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9+4 & 15+6 \\ 15+6 & 25+9 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 13 & 21 \\ 21 & 34 \end{bmatrix}$

$\text{trace}(A^T \cdot A) = 47$

norma $A = \sqrt{(\text{trace}(A^T \cdot A))} = \sqrt{47}$

Exercise 2.4.7 Let $V_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ and $V_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$. Calculate the distance between these two vectors.

$$d(\,-\,,-\,) : \mathbb{V} \times \mathbb{V} \to \mathbb{R}$$

$$d(V_1, V_2) = |V_1 - V_2| = \sqrt{\langle V_1 - V_2, V_1 - V_2 \rangle}$$