Compuertas reversibles y cuánticas

Luis Daniel Benavides N.,26-10-2020

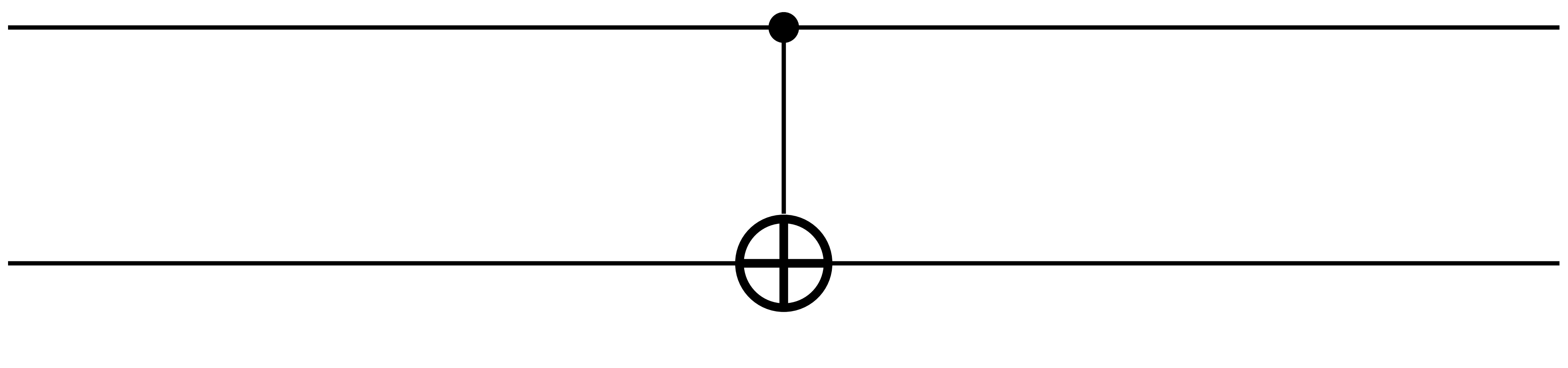
Compuertas reversibles

Compuertas reversibles

- En el mundo cuántico todas las compuertas que no son medidas son reversibles.
- La mayoría de compuertas clásicas no son reversibles
- Not y la identidad son reversibles (Puedo restablecer la entrada a partir de la salida)
- Not y la identidad son sus propias inversas.

Controlled Not

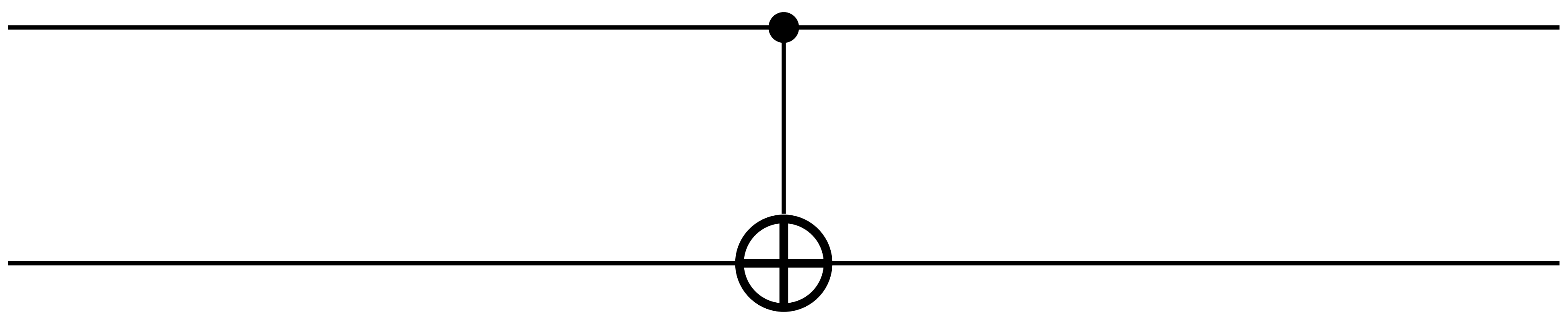
Ejemplo de compuerta reversible



	00	01	10	11
00				
01				
10				
11				

Controlled Not

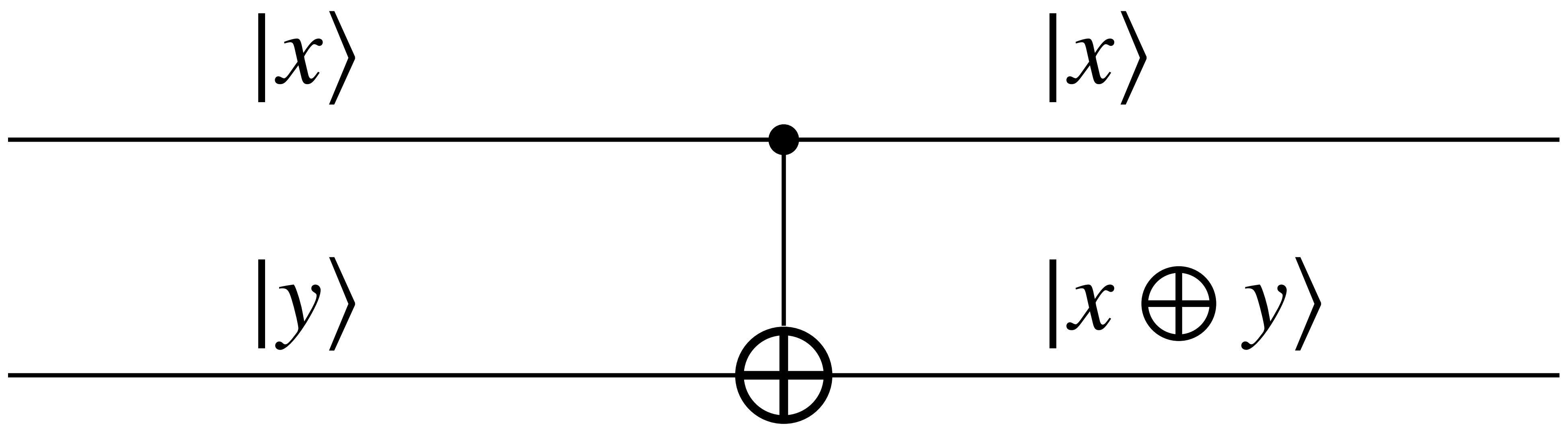
Ejemplo de compuerta reversible



	00	01	10	11
00	1	0	0	0
01	0	1	0	0
10	0	0	0	1
11	0	0	1	0

Controlled Not

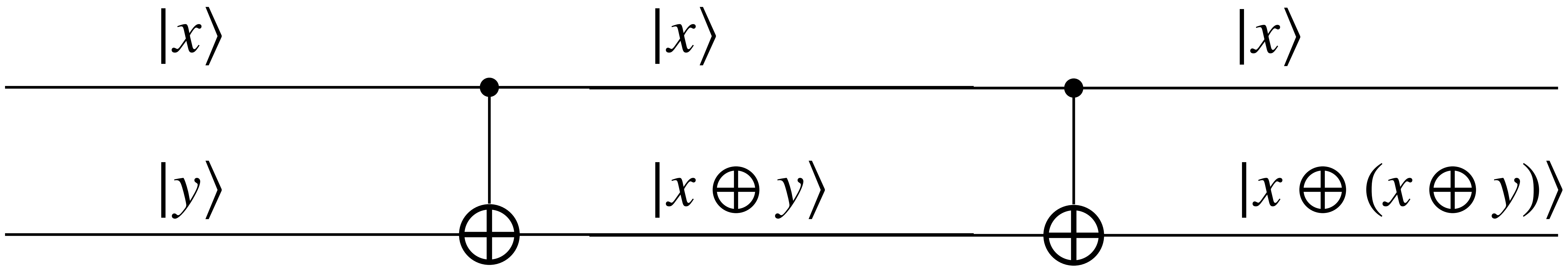
Ejemplo de compuerta reversible



	00	01	10	11
00	1	0	0	0
01	0	1	0	0
10	0	0	0	1
11	0	0	1	0

Controlled Not es su propia inversa

Ejemplo de compuerta reversible

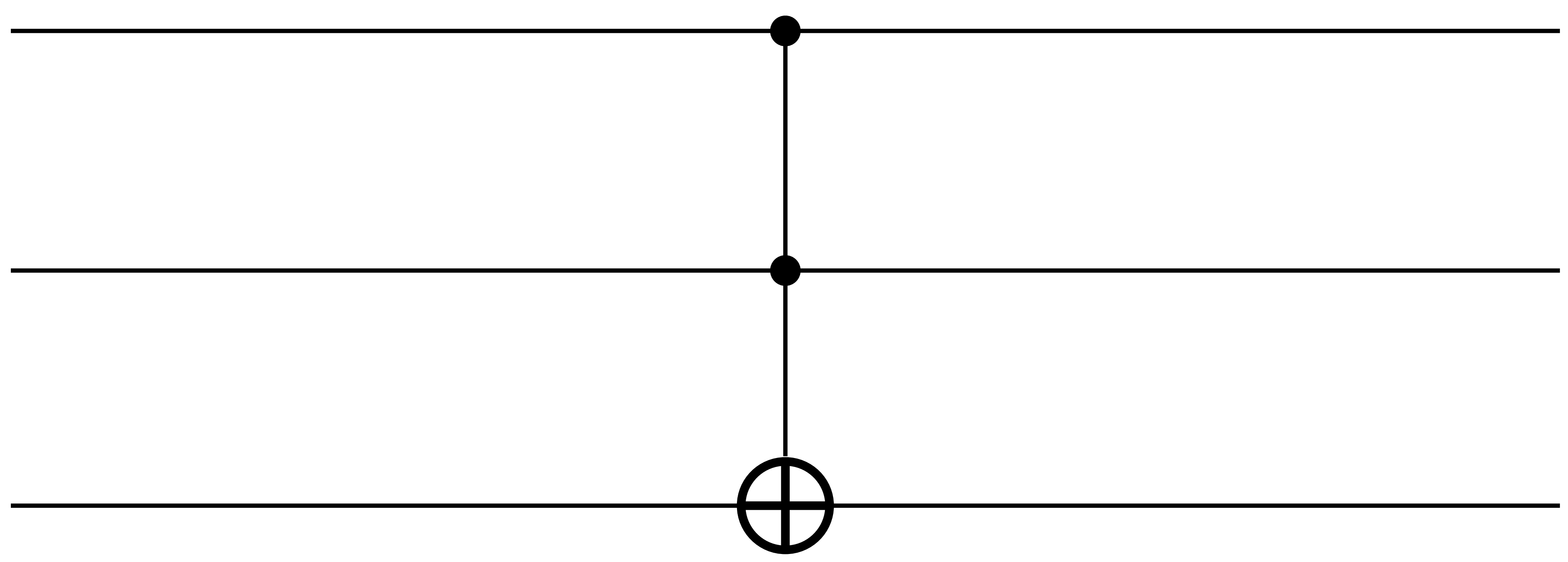


$$|0 \oplus (0 \oplus y)\rangle = |0 \oplus y\rangle = |y\rangle$$

$$|1 \oplus (1 \oplus y)\rangle = |1 \oplus \neg y\rangle = |\neg(\neg y)\rangle = |y\rangle$$

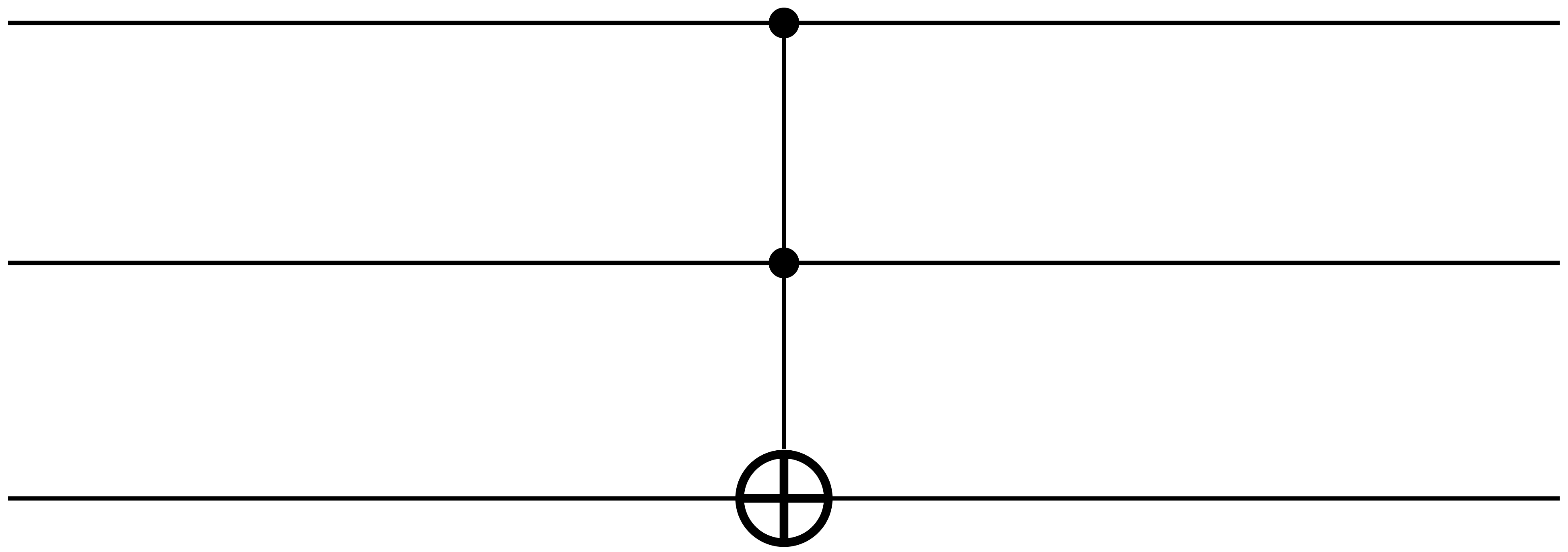
x, y	$x \oplus y$
00	0
01	1
10	1
11	0

Toffoli Gate



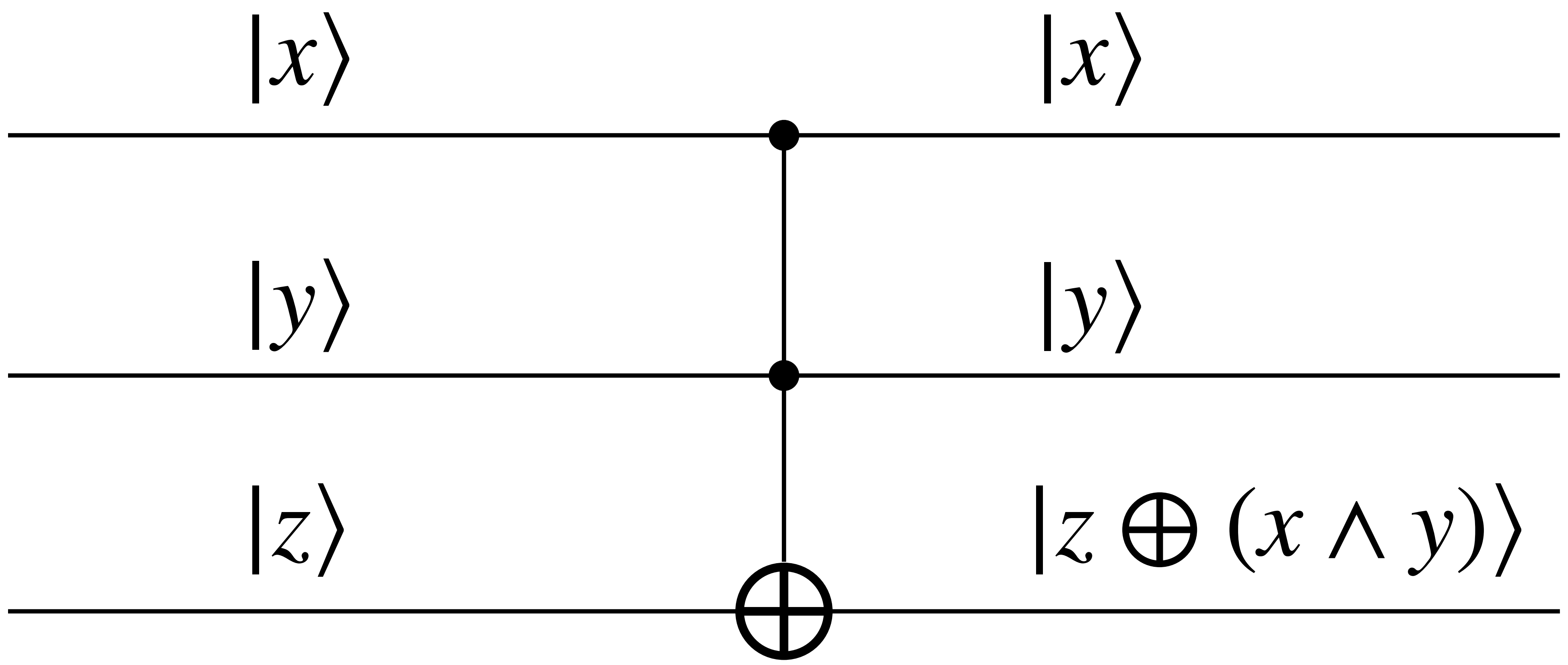
	000	001	010	011	100	101	110	111
000								
001								
010								
011								
100								
101								
110								
111								

Toffoli Gate



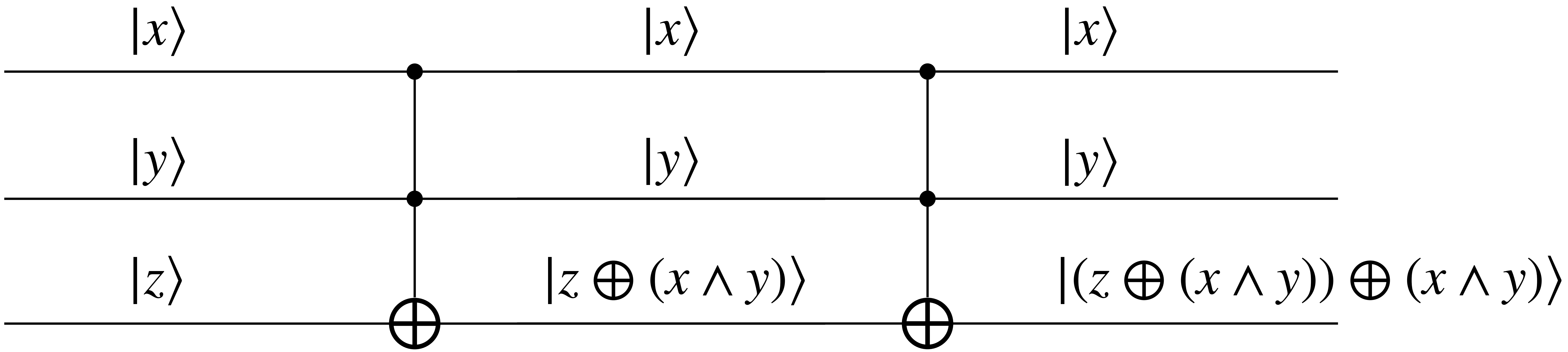
	000	001	010	011	100	101	110	111
000	1	0	0	0	0	0	0	0
001	0	1	0	0	0	0	0	0
010	0	0	1	0	0	0	0	0
011	0	0	0	1	0	0	0	0
100	0	0	0	0	1	0	0	0
101	0	0	0	0	0	1	0	0
110	0	0	0	0	0	0	0	1
111	0	0	0	0	0	0	1	0

Toffoli Gate



	000	**001**	**010**	**011**	**100**	**101**	**110**	**111**
000	1	0	0	0	0	0	0	0
001	0	1	0	0	0	0	0	0
010	0	0	1	0	0	0	0	0
011	0	0	0	1	0	0	0	0
100	0	0	0	0	1	0	0	0
101	0	0	0	0	0	1	0	0
110	0	0	0	0	0	0	0	1
111	0	0	0	0	0	0	1	0

Toffoli su propia inversa



$$|(z \oplus (x \wedge y)) \oplus (x \wedge y)\rangle$$

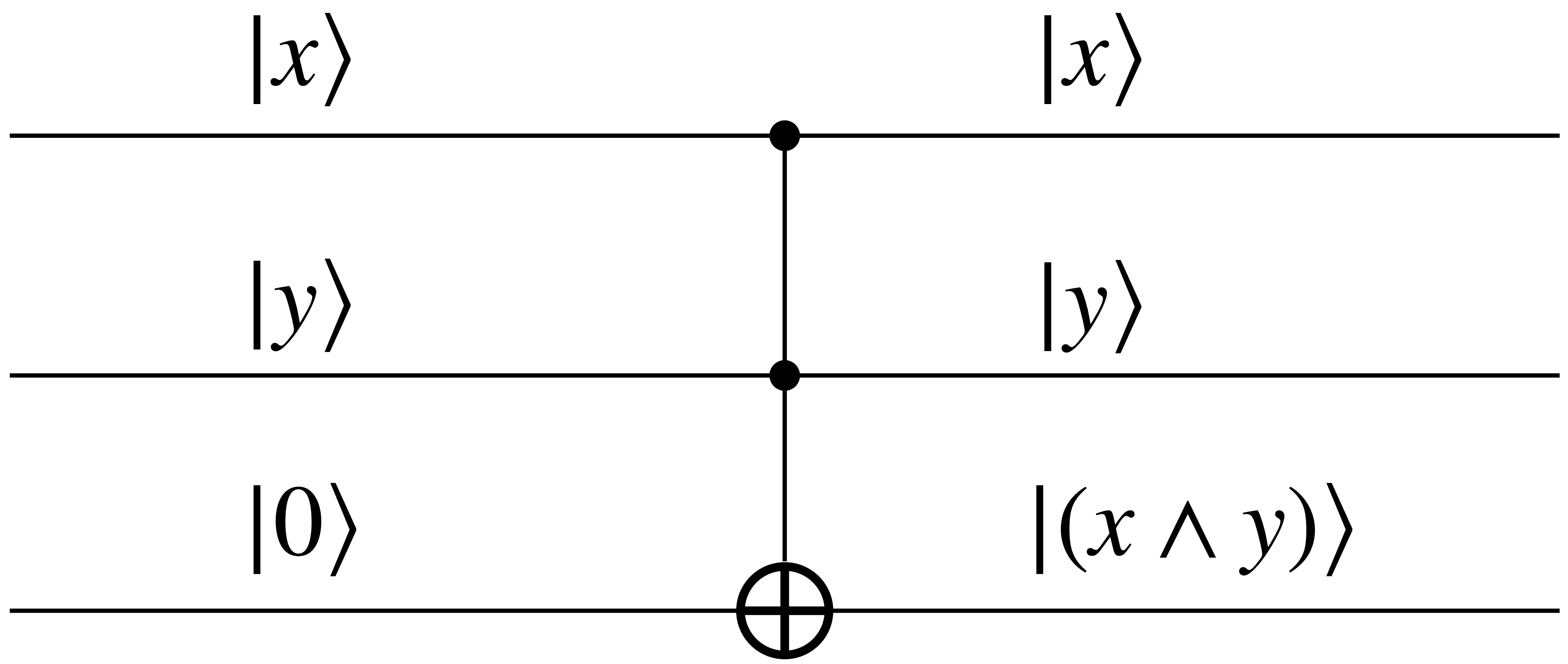
$$|(z \oplus 0) \oplus 0\rangle = |(z \oplus 0)\rangle = |z\rangle$$

$$|(z \oplus 1) \oplus 1\rangle = |\neg(z \oplus 1)\rangle = |\neg(\neg z)\rangle = |z\rangle$$

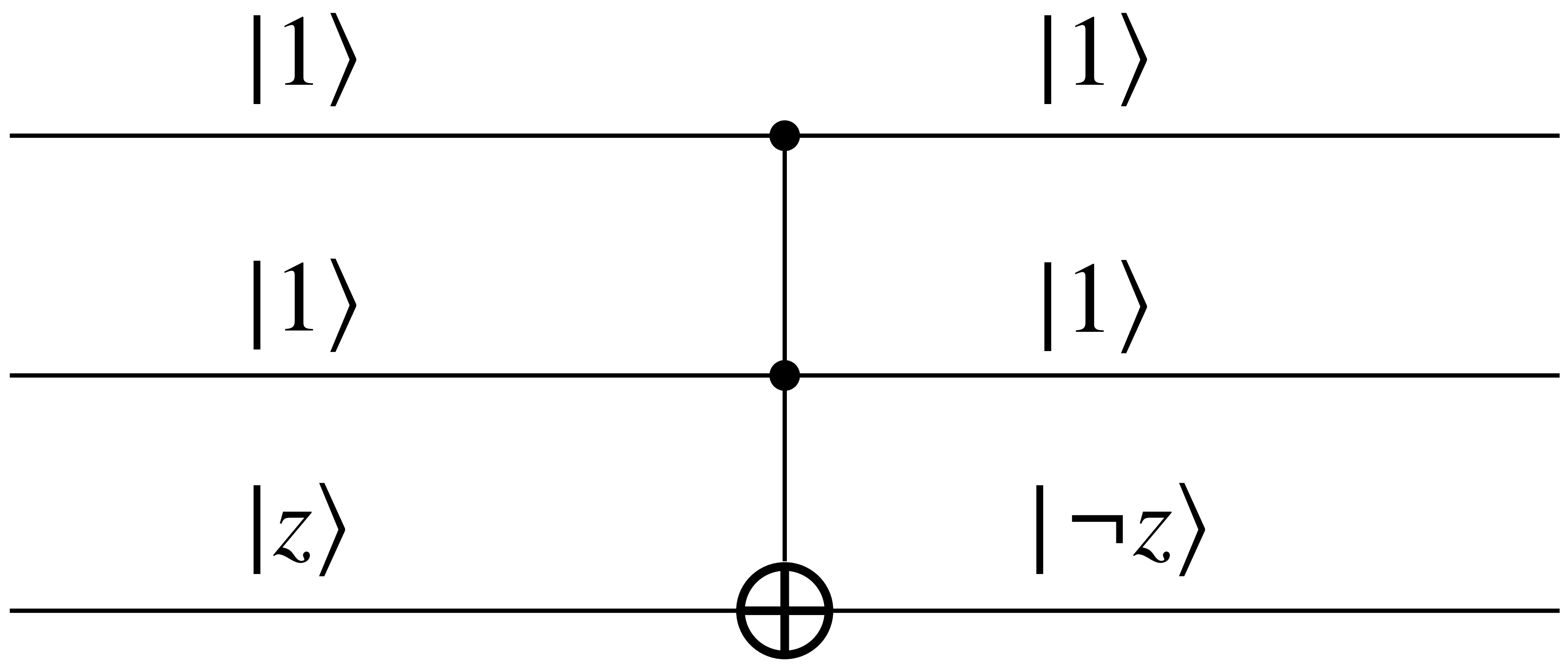
	x and y
00	0
01	0
10	0
11	1

Toffoli es una compuerta universal

And con Toffoli

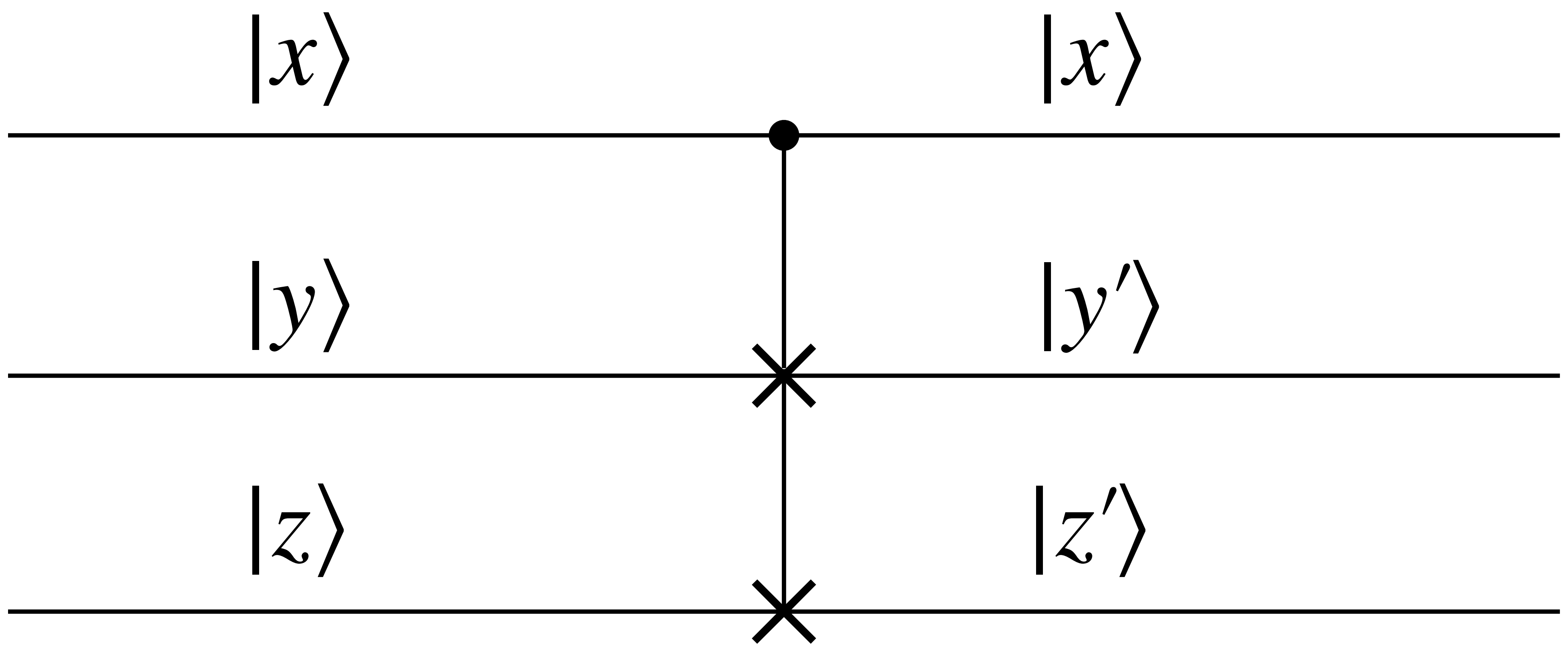


Not con Toffoli



$$|z \oplus (1 \wedge 1)\rangle = |z \oplus 1\rangle = |\neg z\rangle$$

Fredkin Gate

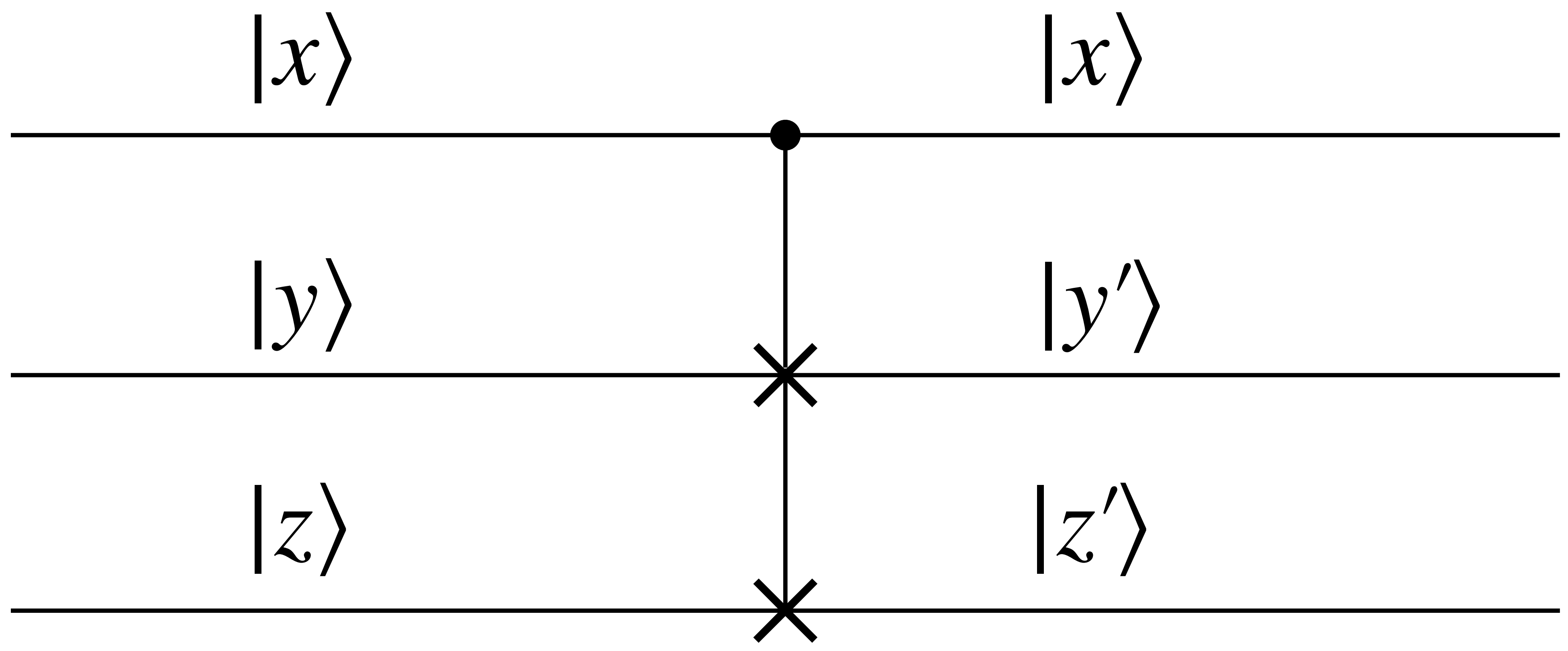


Si x=0 , entonces y’=y , z’=z

Si x=1 , entonces y’=z , z’=y

La compuerta es universal y es su propia inversa

Fredkin Gate



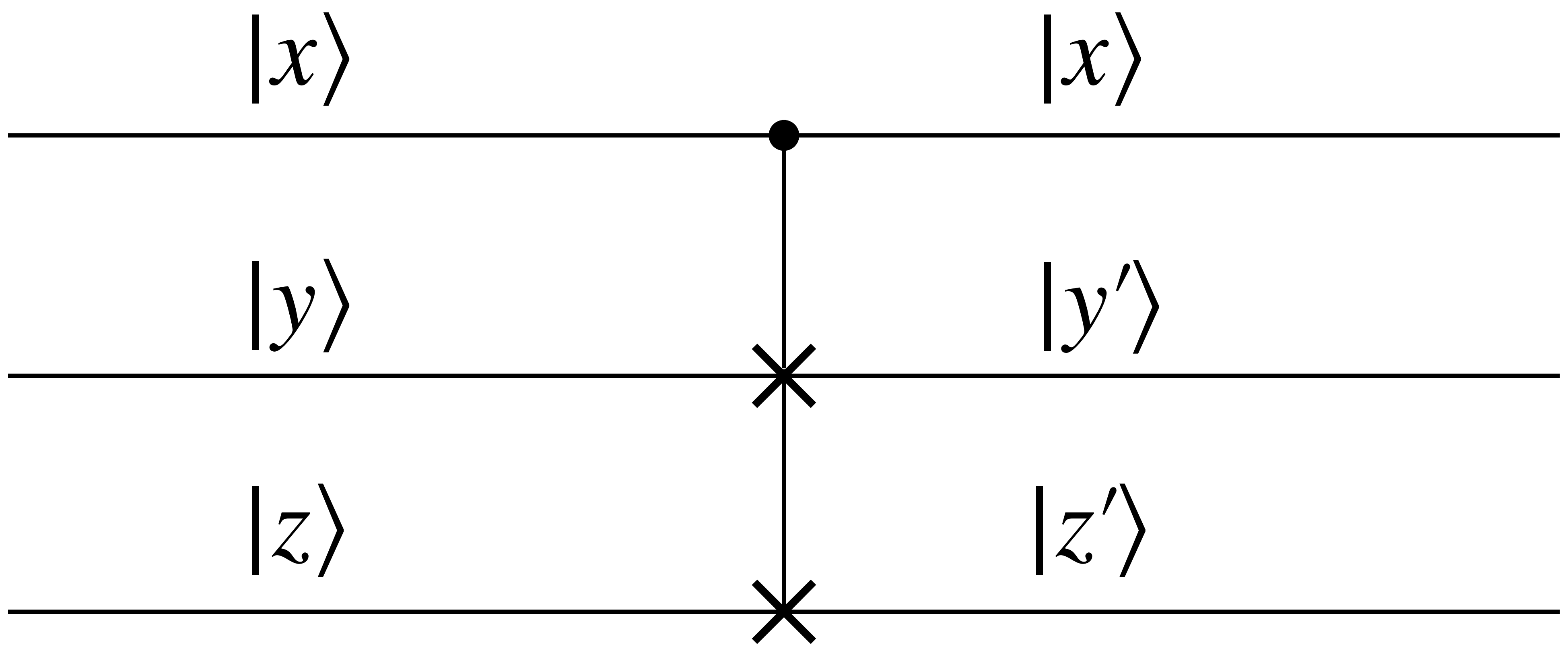
Si x=0 , entonces y'=y , z'=z

Si x=1 , entonces y'=z , z'=y

La compuerta es universal y es su propia inversa

	000	**001**	**010**	**011**	**100**	**101**	**110**	**111**
000								
001								
010								
011								
100								
101								
110								
111								

Fredkin Gate



Si x=0 , entonces y'=y , z'=z

Si x=1 , entonces y'=y , z'=z

La compuerta es universal y es su propia inversa

	000	001	010	011	100	101	110	111
000	1							
001		1						
010			1					
011				1				
100					1			
101							1	
110						1		
111								1

Actividad: Ejercicios de Estudiantes

Compuertas cuánticas

Compuerta cuántica

- **Definición**
  - Una compuerta cuántica es un mecanismo físico que actúa sobre qubits alterando su estado multiversal de manera determinística. Las compuertas cuánticas se representan por medio de **matrices unitarias**.

- **Definición Matriz Unitaria.** Una matriz $n \times n$ se denomina unitaria si

$$U \star U^{\dagger} = U^{\dagger} \star U = I_n$$

Lista de compuertas cuánticas

- Identidad
- Not
- Toffoli
- Fredkin
- Hadamard
- Not controlado

Compuertas de Pauli y otras compuertas

Compuertas de Pauli

$$X = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad Y = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} \qquad Z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Otras compuertas

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix} \qquad T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\pi/4} \end{bmatrix}$$

Identidades entre compuertas

$$
\begin{aligned}
&i) && X^2 = Y^2 = Z^2 = I, \\
&ii) && H = \frac{1}{\sqrt{2}}(X + Z), \\
&iii) && X = HZH, \\
&iv) && Z = HXH, \\
&v) && -1Y = HYH, \\
&vi) && S = T^2, \\
&vii) && -1Y = XYX\,.
\end{aligned}
$$

Compuerta $\sqrt{NOT}$

$$\sqrt{NOT} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

No es su propia inversa, es decir

$$\sqrt{NOT} \neq \sqrt{NOT}^{\dagger}$$

Al aplicarla dos veces obtenemos un matriz parecida al NOT

$$\sqrt{NOT}^{2} = \sqrt{NOT} * \sqrt{NOT} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\sqrt{NOT}^{2}|0\rangle = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = |1\rangle$$

$$\sqrt{NOT}^{2}|1\rangle = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} = -|0\rangle$$

Recuerde que $-|0\rangle$ y $|0\rangle$ representan el mismos estado.

La esfera de bloch

- En principio no se puede representar un Qubit con un dibujo tridimensional.

- Sin embargo en una análisis más detallado se puede usar un artefacto denominado la esfera de Bloch.

¿Cómo podemos representarlo?

$|\psi\rangle = c_0|0\rangle + c_1|1\rangle$ **dónde,** $|c_0|^2 + |c_1|^2 = 1$

Si lo transformamos a su representación polar

$c_0 = r_0 e^{i\phi_0}$ $c_1 = r_1 e^{i\phi_1}$

$$|\psi\rangle = r_0 e^{i\phi_0}|0\rangle + r_1 e^{i\phi_1}|1\rangle$$

El estado no cambia si lo multiplicamos por un escalar complejo de norma 1

$$\begin{aligned} e^{-i\phi_o} \times |\psi\rangle &= e^{-i\phi_o} \times (r_0 e^{i\phi_0}|0\rangle + r_1 e^{i\phi_1}|1\rangle) \\ &= r_0|0\rangle + r_1 e^{i(\phi_1-\phi_0)}|1\rangle \end{aligned}$$

Quedan solo tres parámetros $r_0, r_1, \phi = (\phi_1 - \phi_2)$

$$\begin{aligned} 1 = |c_0|^2 + |c_1|^2 &= |r_0 e^{i\phi_0}|^2 + |r_1 e^{i\phi_1}|^2 \\ &= |r_0|^2 |e^{i\phi_0}|^2 + |r_1|^2 |e^{i\phi_1}|^2 \end{aligned}$$

Entonces,

$|r_0|^2 + |r_1|^2 = 1$

Podemos renombrarlos ,

$cos^2(\theta) + sin^2(\theta) = 1$

Ahora podemos usar un solo parámetro θ **para representar** r_0 **y** r_1**.**

Y Podemos escribe $|\psi\rangle$ **así:**

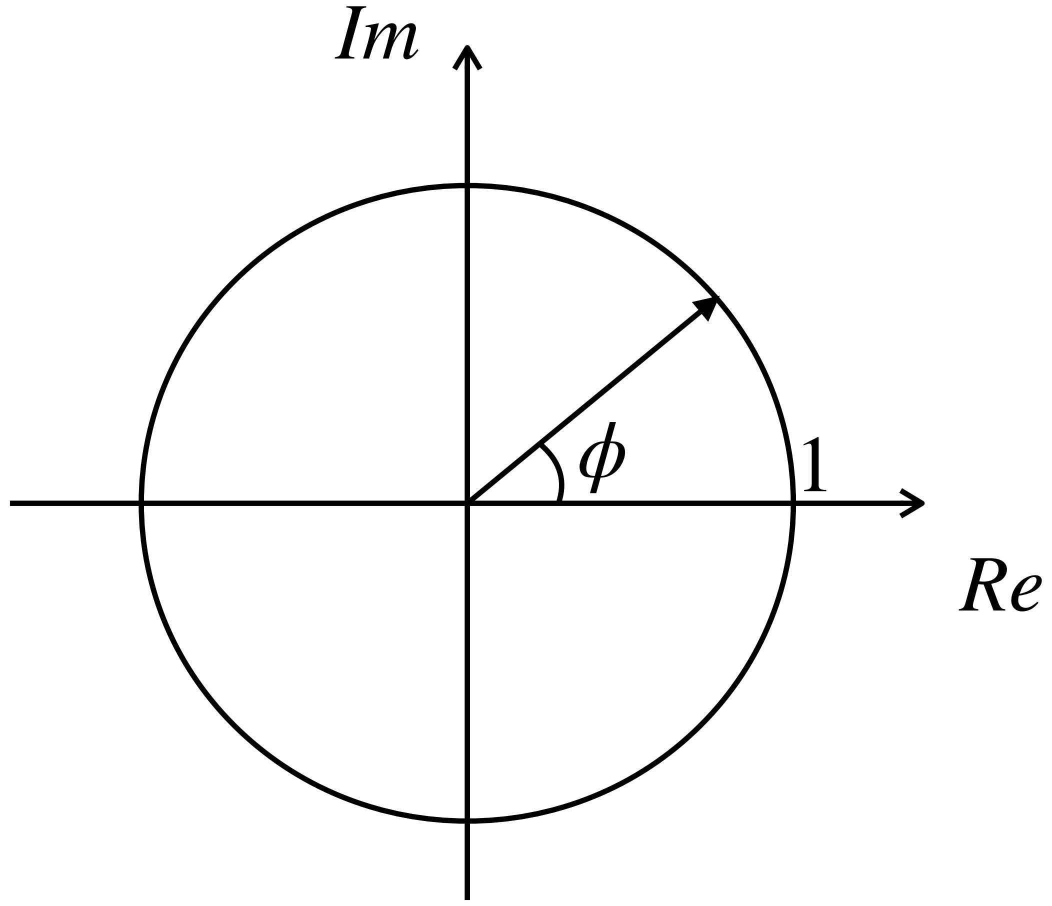
$$|\psi\rangle = cos(\theta)|0\rangle + e^{i\phi} sin(\theta)|1\rangle$$

Esta ecuación solo tiene 2 parámetros θ **y** ϕ

¿Qué nos dice la ecuación?

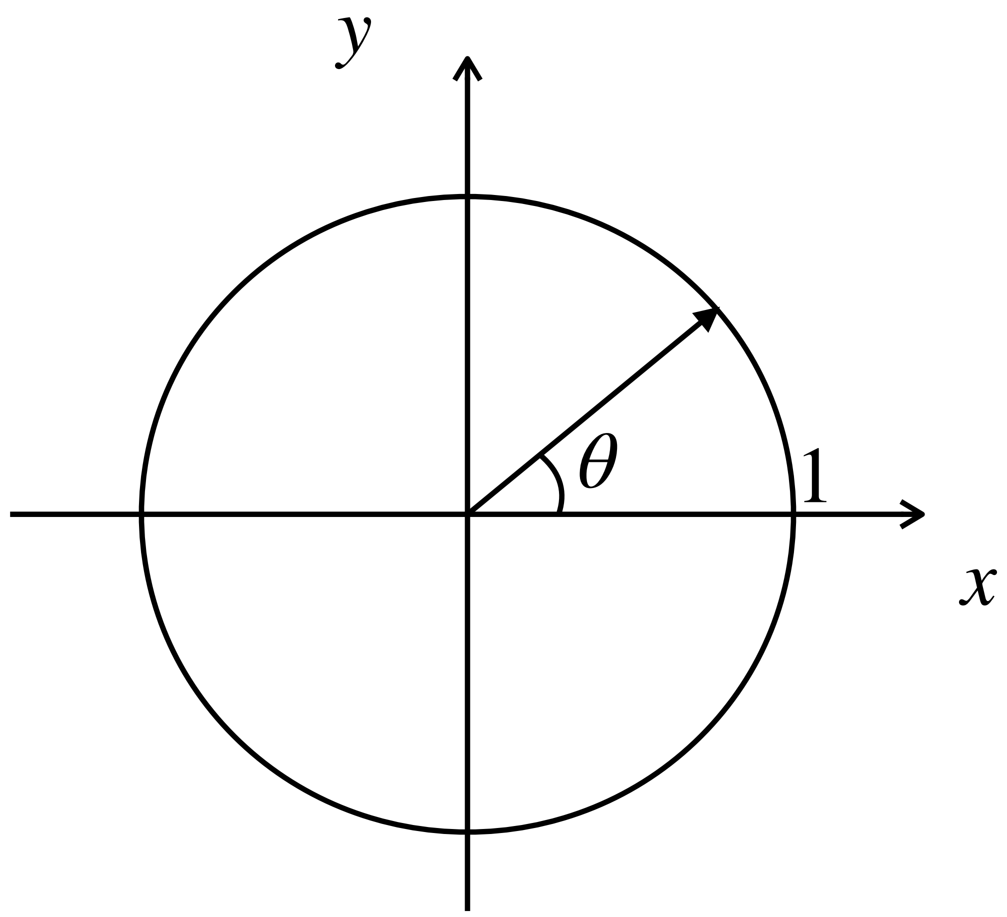
$$|\psi\rangle = cos(\theta)|0\rangle + e^{i\phi}sin(\theta)|1\rangle$$

$$e^{i\phi} = cos(\phi) + i\ sin(\phi)$$



con $0 \leq \phi \leq 2\pi$ **para cubrir todos los números complejos posibles**

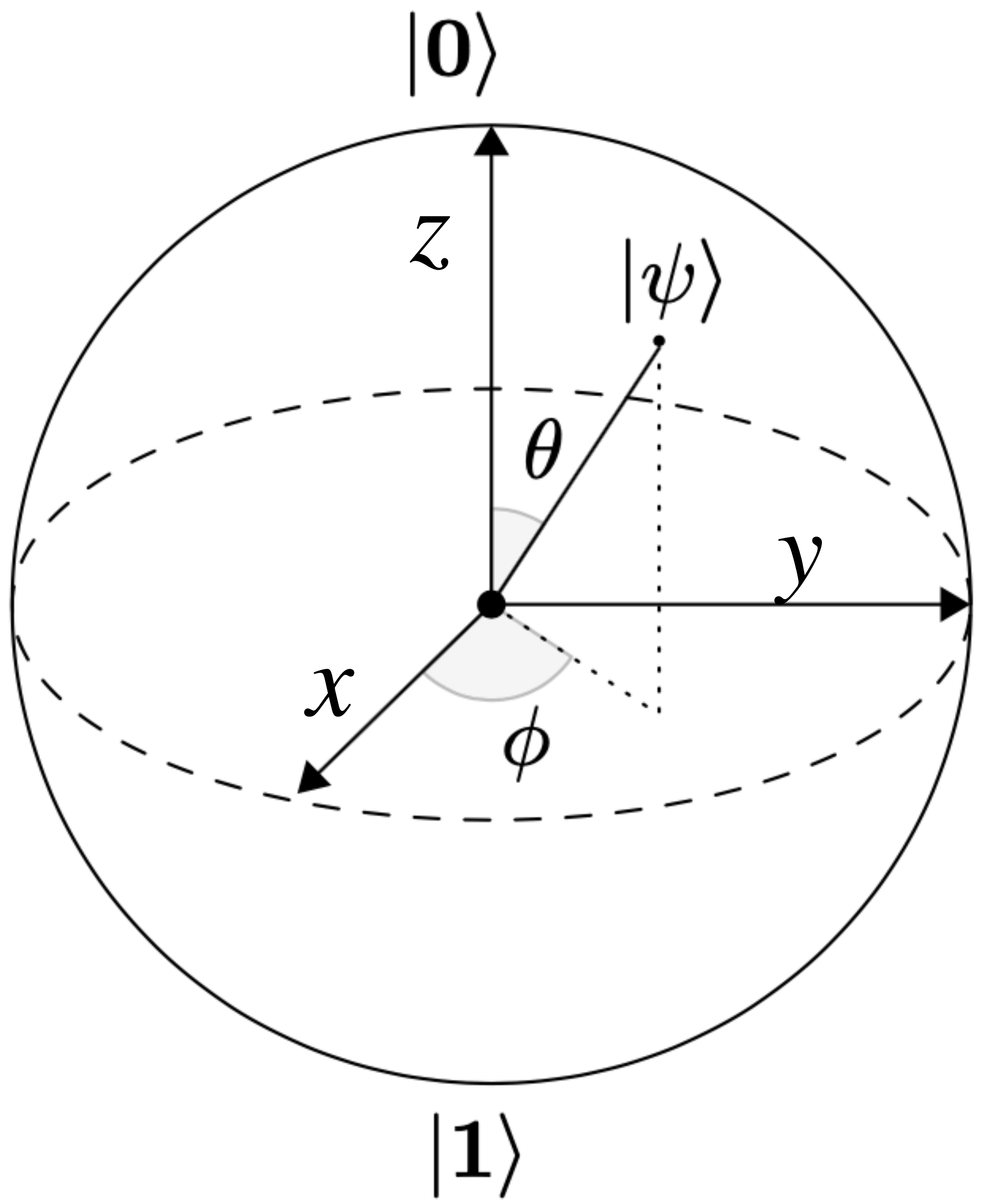
con $-1 \leq cos(\theta) \leq 1$ **y** $-1 \leq sin(\theta) \leq 1$ **solo necesito** $0 \leq \theta \leq \pi/2$ **para cubrir todos los estados de bit posibles.**



¿Puede ver porqué? Revise el ejercicio 5.4.4 del libro

La esfera de Bloch

$$|\psi\rangle = cos(\theta)|0\rangle + e^{i\phi}sin(\theta)|1\rangle$$



La parametrización estándar sería

$x = sin(\theta)cos(\phi)$

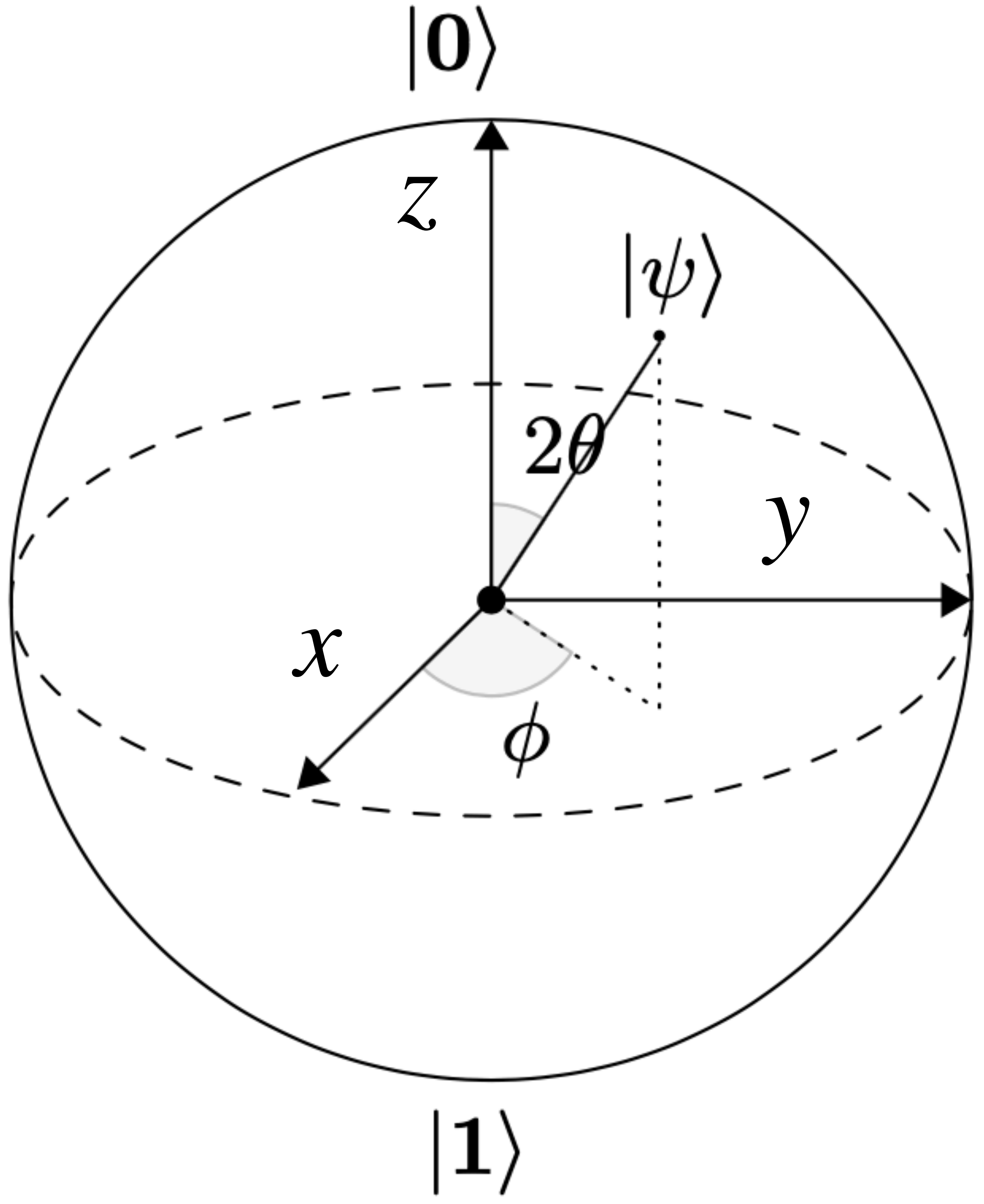
$y = sin(\theta)sin(\phi)$

$z = cos(\theta)$

con $0 \leq \theta \leq \pi$

La esfera de Bloch

$$|\psi\rangle = cos(\theta)|0\rangle + e^{i\phi} sin(\theta)|1\rangle$$



La parametrización estándar sería

$x = sin(\theta)cos(\phi)$

$y = sin(\theta)sin(\phi)$ **con** $0 \leq \theta \leq \pi$

$z = cos(\theta)$

Pero esto implica que en la esfera dos puntos representarían el mismo qubit

Ya que con $0 \leq \phi \leq 2\pi$ **y** $0 \leq \theta \leq \pi/2$ **se pueden cubrir todos los qubits posibles**

Entonces vamos a solucionar esto recorriendo la esfera a la mitad de la velocidad

$x = sin(2\theta)cos(\phi)$

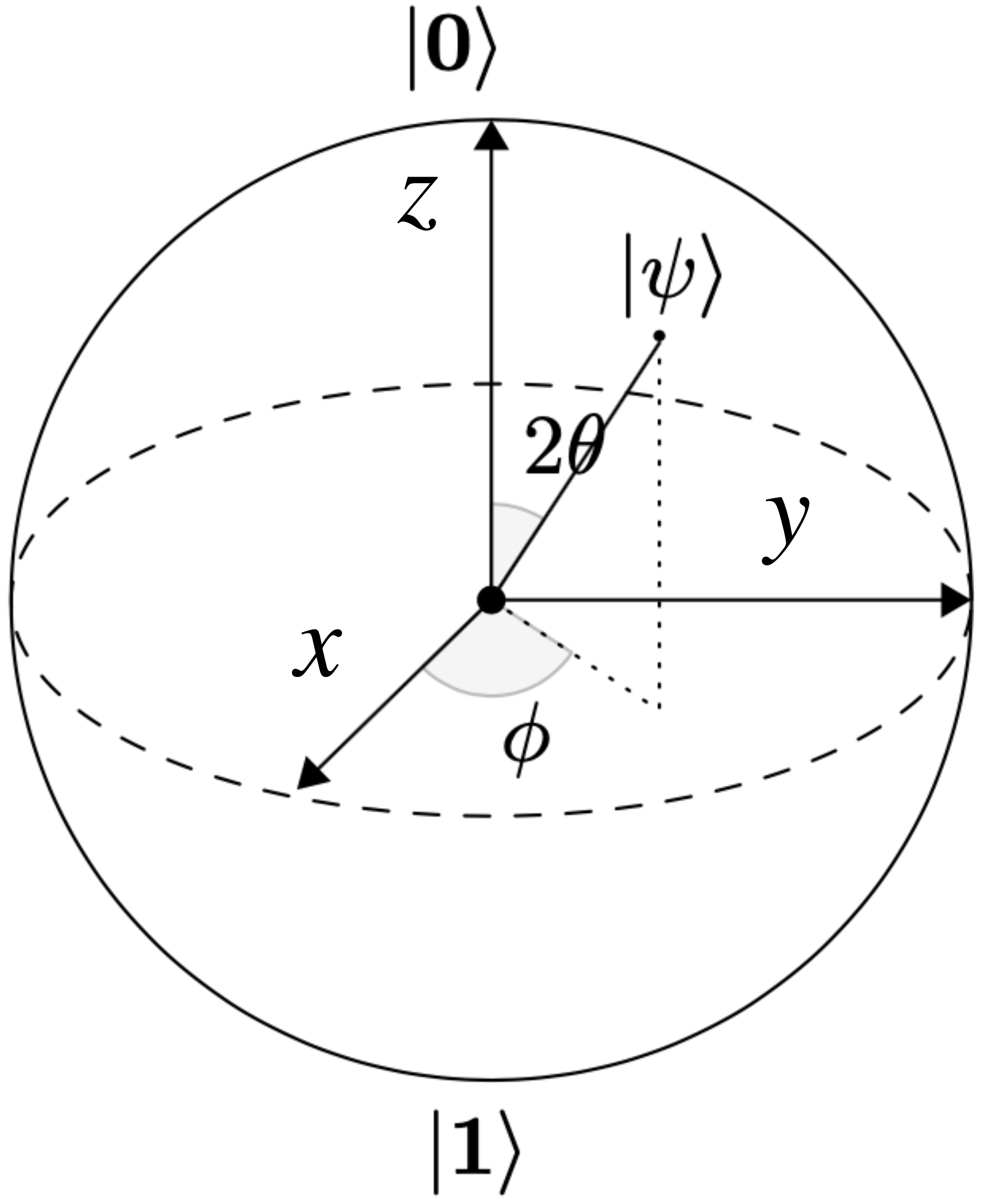
$y = sin(2\theta)sin(\phi)$

$z = cos(2\theta)$

ϕ **es el ángulo desde x sobre le ecuador.** θ **es la mitad del ángulo desde z hasta el estado del qubit**

Interpretando la esfera de Bloch

$$|\psi\rangle = cos(\theta)|0\rangle + e^{i\phi}sin(\theta)|1\rangle$$



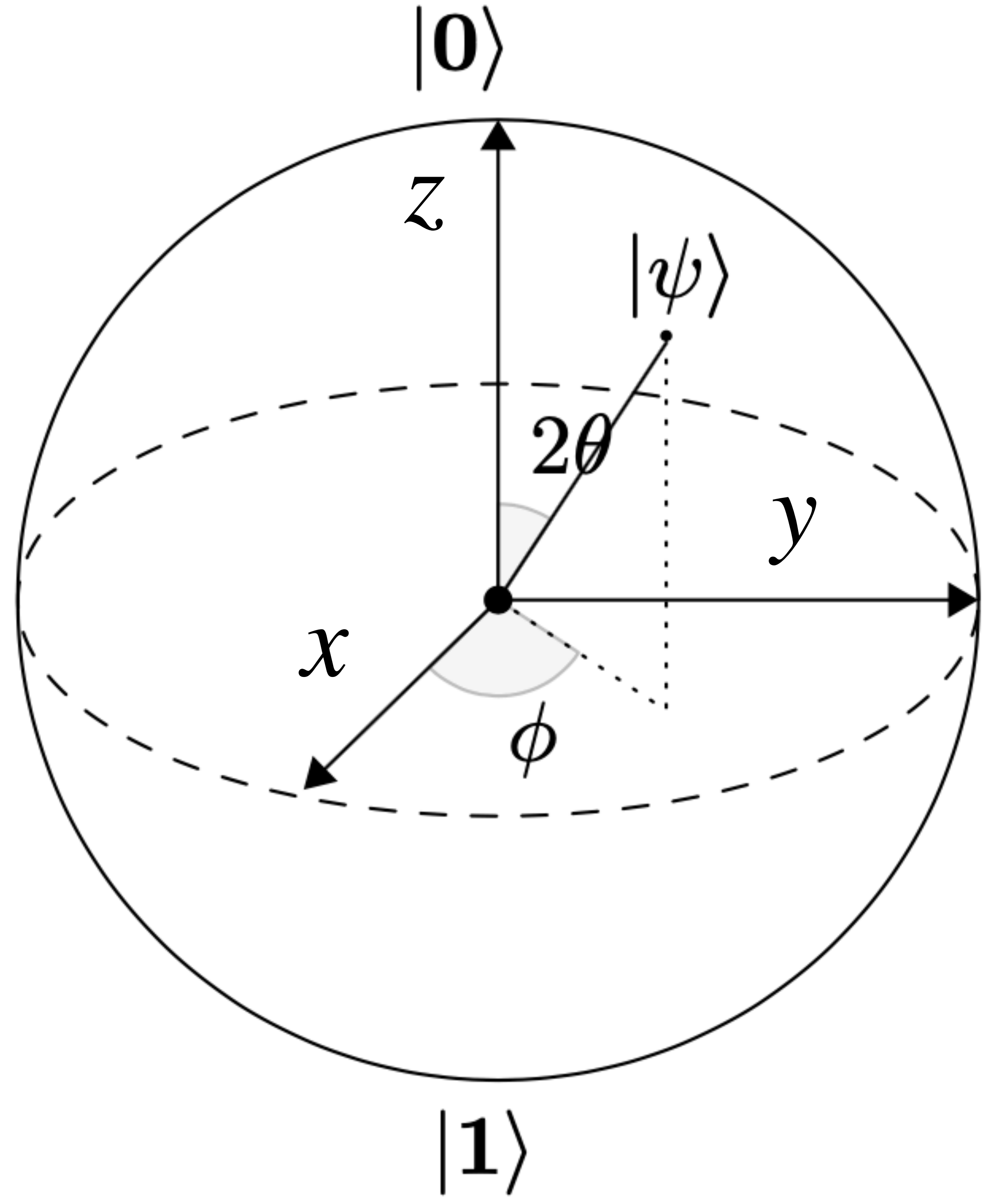
Si $2\theta = \pi/2$**,** $\theta = \pi/4$ **y entonces**

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + e^{i\phi}\frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle$$

La probabilidad de colapsar a $|0\rangle$ **o a** $|1\rangle$ **es de 0.5 (50%)**

Observe que la probabilidad no se ve alterada por le valor de ϕ **ya que la norma al cuadrado de** $e^{i\phi}$ **es siempre 1**

Acciones de las matrices sobre los estados



Las matrices de Pauli rotan 180^o los estados con respecto a los ejes

X (la negación) lo gira sobre el eje x, Y sobre el y, y Z sobre el Z

Esta matriz rota el vector alrededor de z un ángulo arbitrario (es decir deja la latitud y cambia la longitud).

$$R(\alpha) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{\alpha} \end{bmatrix}$$

Teorema de no clonación

Límites de las compuertas

- El teorema nos dice que no se puede clonar un estado cuántico.
- Se puede cut and paste pero no copy-paste.

- Esto tiene implicaciones en la criptografía y teletransportación cuántica.

Actividad: Ejercicios de Estudiantes

Ejercicio 5.4.3 identidad vi

Exercise 5.4.3 These operations are intimately related to each other. Prove the following relationships between the operations:

(vi) $S = T^2$,

$$T^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\pi/4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\pi/4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\pi/4} e^{i\pi/4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\pi/4 + i\pi/4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\pi/2} \end{bmatrix}$$

$$e^{i\phi} = cos(\phi) + i\ sin(\phi)$$

$$e^{i\pi/2} = cos(\pi/2) + i\ sin(\pi/2) = i$$

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix}$$

Fin