

Exercise 54.1

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad S^\dagger = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}$$

$$f = -i = \begin{pmatrix} -i^2 \\ -i \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$S \times S^\dagger = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\pi/4} \end{bmatrix} \quad T^\dagger = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-i\pi/4} \end{bmatrix}$$

$$T \times T^\dagger = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\pi/4} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-i\pi/4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad X^\dagger = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$X \times X^\dagger = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$Y = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} \quad Y^\dagger = \begin{bmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{bmatrix}$$

$$Y \times Y^\dagger = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$Z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad Z^\dagger = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$Z \times Z^\dagger = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

5.4.2

$(C_0, C_1)^T$

$$x = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_0 \\ C_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_0 \end{bmatrix}$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_0 \\ C_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -i \cdot C_1 \\ i \cdot C_0 \end{bmatrix}$$

$$z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_0 \\ C_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_0 \\ -C_1 \end{bmatrix}$$

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_0 \\ C_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_0 \\ i \cdot C_1 \end{bmatrix}$$

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\pi/4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_0 \\ C_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_0 \\ e^{i\pi/4} \cdot C_1 \end{bmatrix}$$

5.4.3

1)

$$x = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad y = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} \quad z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$x^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad y^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad z^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

i) $H = \frac{1}{\sqrt{2}} (x + z)$

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \right)$$

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$iii) X = HZH$$

$$X = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$X = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \right)$$

$$X = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$iv) Z = HXH$$

$$Z = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$Z = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$Z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$v) -1Y = HYH$$

$$-1 \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} \right) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{bmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{bmatrix} i & -i \\ -i & -i \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{bmatrix}$$