Números complejos

Luis Daniel Benavides N. 22-01-2021

Una ecuación sin solución

$$x^2 + 1 = 0$$

Ejercicio 1.1.1

Verifique que la ecuación $x^4 + 2x^2 + 1 = 0$ no tiene solución en los reales.

$$x^4 + 2x^2 + 1 = 0$$

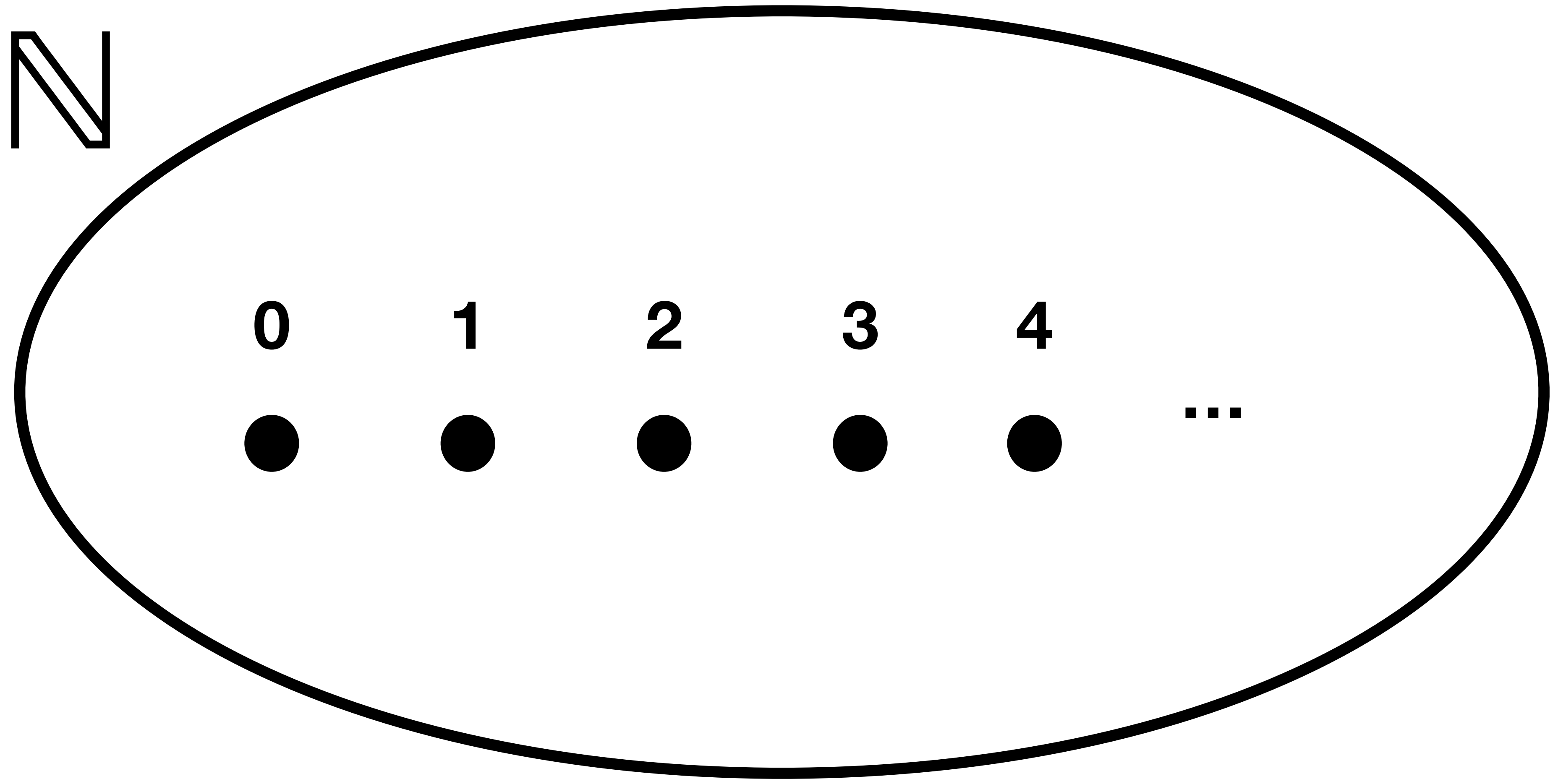
$$(x^2 + a) \times (x^2 + b) = 0$$

$$x^4 + bx^2 + ax^2 + ab = 0$$

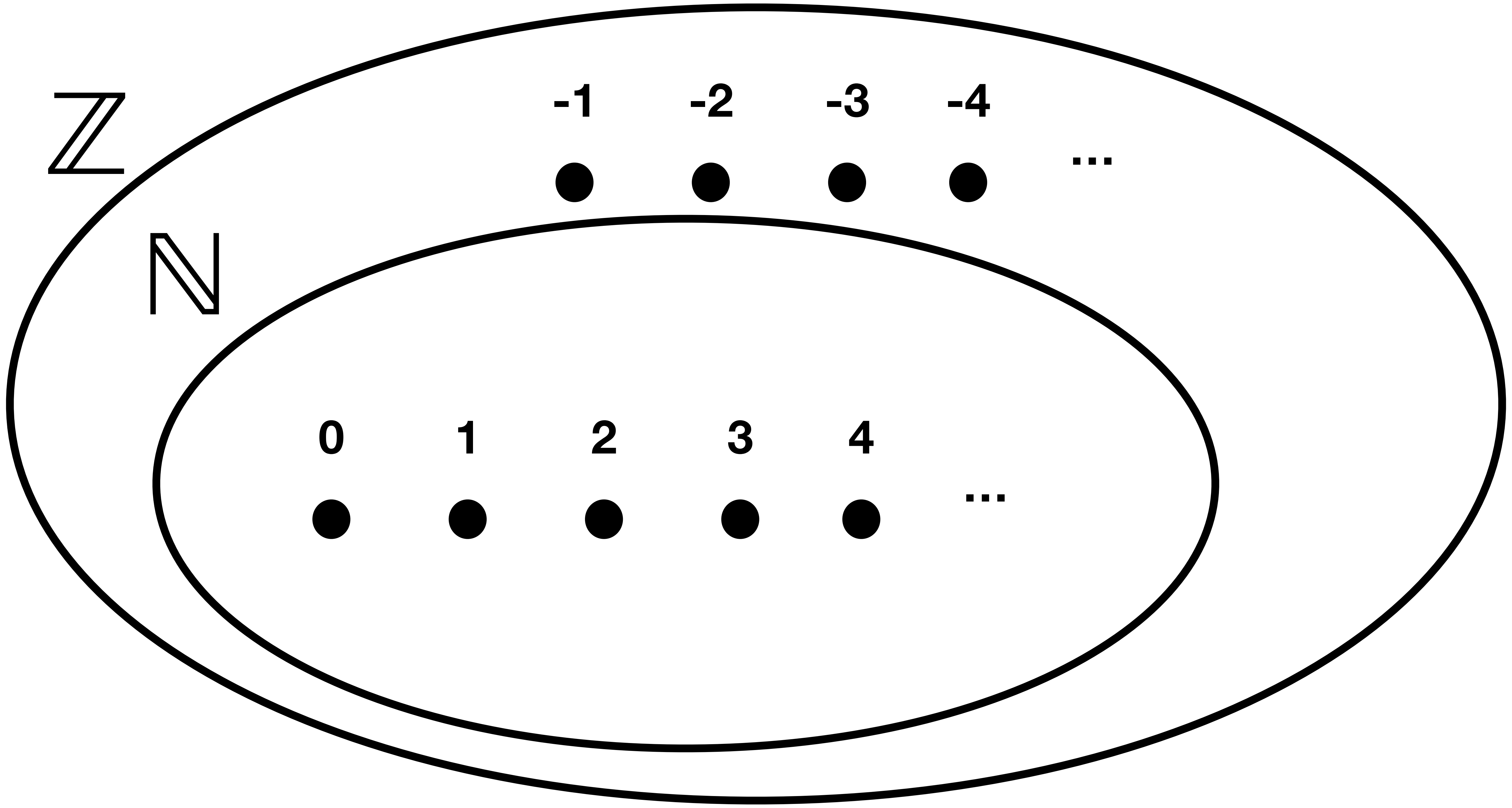
$$x^2 + x^2(a + b) + ab = 0$$

$$(x^2 + 1) \times (x^2 + 1) = 0$$

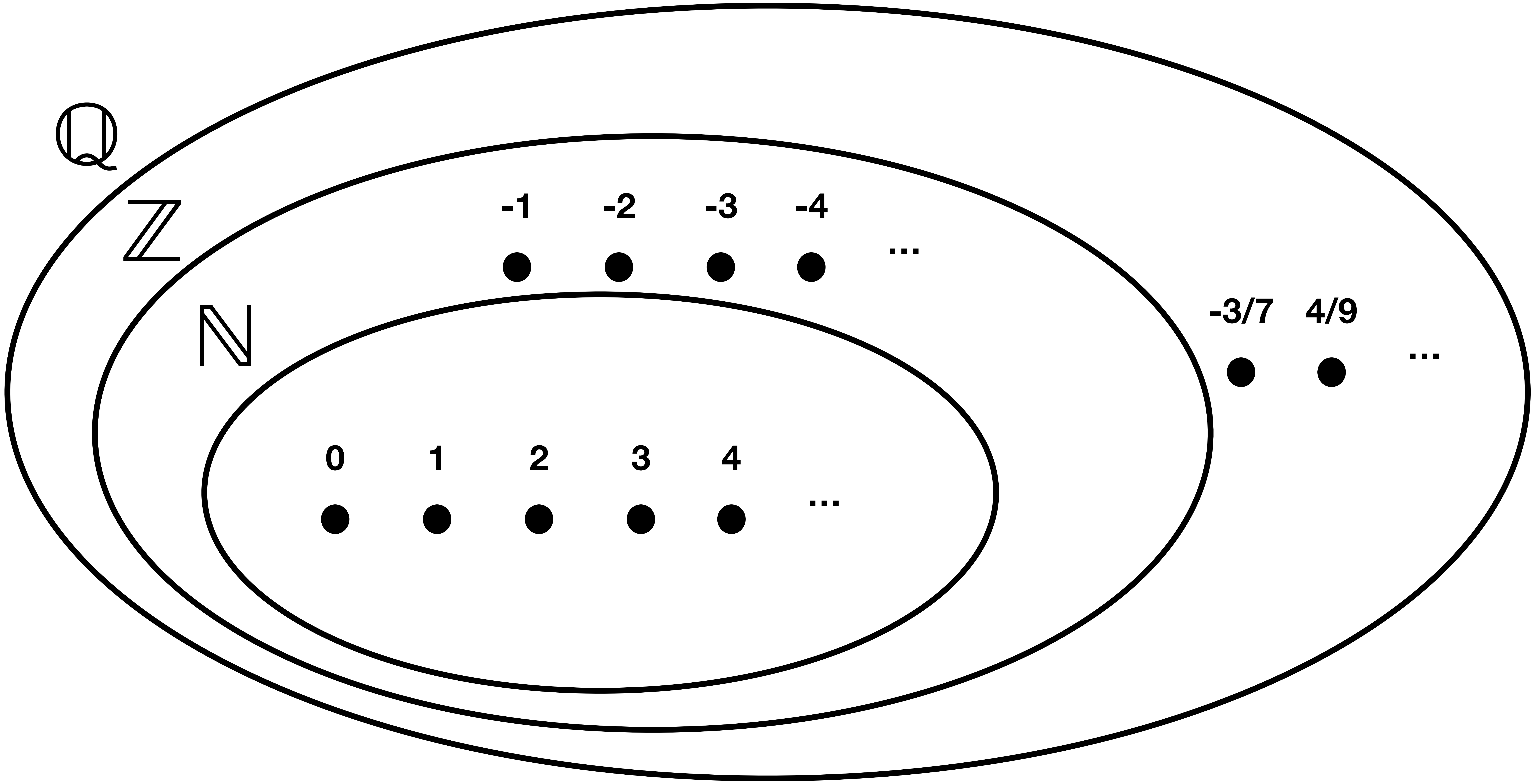
Naturales



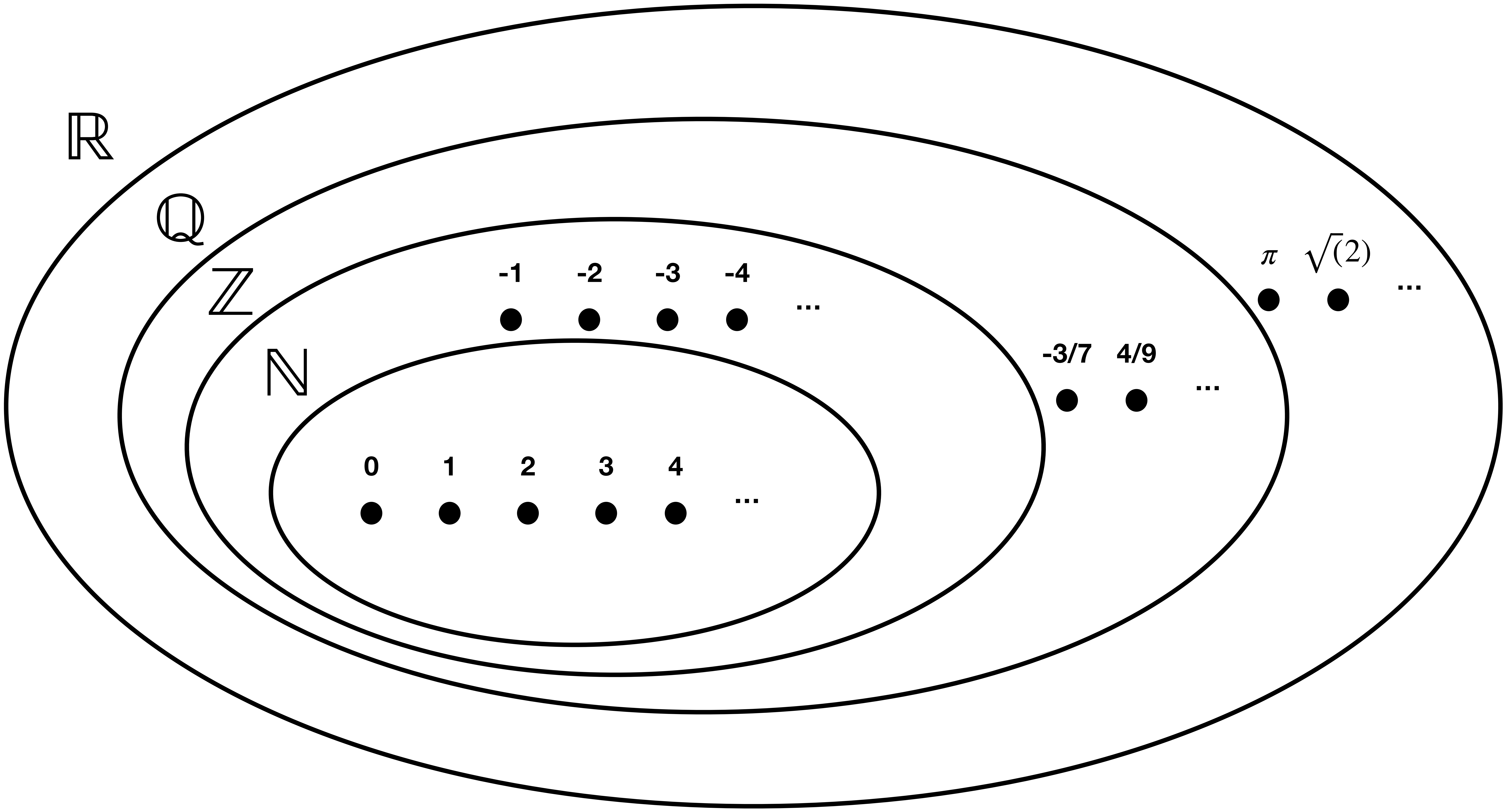
Enteros



Racionales



Reales



Creemos un nuevo número

Un número imaginario

$$x^2 + 1 = 0$$

$$i^2 = -1$$

Sin contar su comportamiento raro al sacar el cuadrado, de resto lo trataremos como un número normal.

Números complejos

Definición 1.1.1

Un número completo es una expresión

$$c = (a + bi) \in \mathbb{C}$$

Dónde

$$a, b \in \mathbb{R}$$

$$i^2 = -1$$


Complejos
$\mathbb{C}$
$\mathbb{R}$
$\mathbb{Q}$
$\mathbb{Z}$
$\mathbb{N}$
0 1 2 3 4 ...
-1 -2 -3 -4 ...
-3/7 4/9 ...
π $\sqrt(2)$ ...
i
$5+3i$
...

Teorema fundamental del algebra

Proposición 1.1.1

Toda ecuación polinomial de una variable con coeficientes complejos tiene una solución compleja.

Algebra de los complejos

Representación de complejos

$$a + bi \to (a, b) \qquad i \to (0,1)$$

$$a + 0i \to (a,0) \qquad 1 \to (1,0)$$

$$(a_1, b_1) + (a_2, b_2) = ((a_1 + a_2), (b_1 + b_2))$$

$$(a_1, b_1) \times (a_2, b_2) = ((a_1a_2) - (b_1b_2), (a_1b_2) + (a_2b_1))$$

Verifique que $i^2 = -1$

Suma de complejos

$$+ : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C} :$$

$$(a_1 + b_1 i) + (a_2 + b_2 i) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i$$

Multiplicación de complejos

$\times : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} :$

$$(a_1 + b_1 i) \times (a_2 + b_2 i) = ((a_1 a_2) - (b_1 b_2)) + ((a_1 b_2) + (a_2 b_1))i$$

División

$/ : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C} :$

$$\frac{(a_1 + b_1 i)}{(a_2 + b_2 i)} = \frac{(a_1 a_2) + (b_1 b_2)}{a_2^2 + b_2^2} + \frac{(a_2 b_1) - (a_1 b_2)}{a_2^2 + b_2^2} i$$

Ejercicios

Resumen

- (I) Adición es asociativa y conmutativa
- (II) Multiplicación es asociativa y conmutativa
- (III) Adición tiene una identidad: (0,0)
- (IV) Multiplicación tiene una identidad: (1,0)
- (V) Multiplicación distribuye con respecto a la adición.
- (VI) La resta (la inversa de la adición) esta definida en todo lado
- (VII) La división (la inversa de la multiplicación) esta definida en todo lado excepto cuando el divisor es cero.

- Un conjunto con operaciones que satisfacen estas propiedades se denomina un **campo**.

Módulo y conjugado

$$|\ \ | : \mathbb{C} \to \mathbb{R} : |c| = |a + bi| = +\sqrt{a^2 + b^2}$$

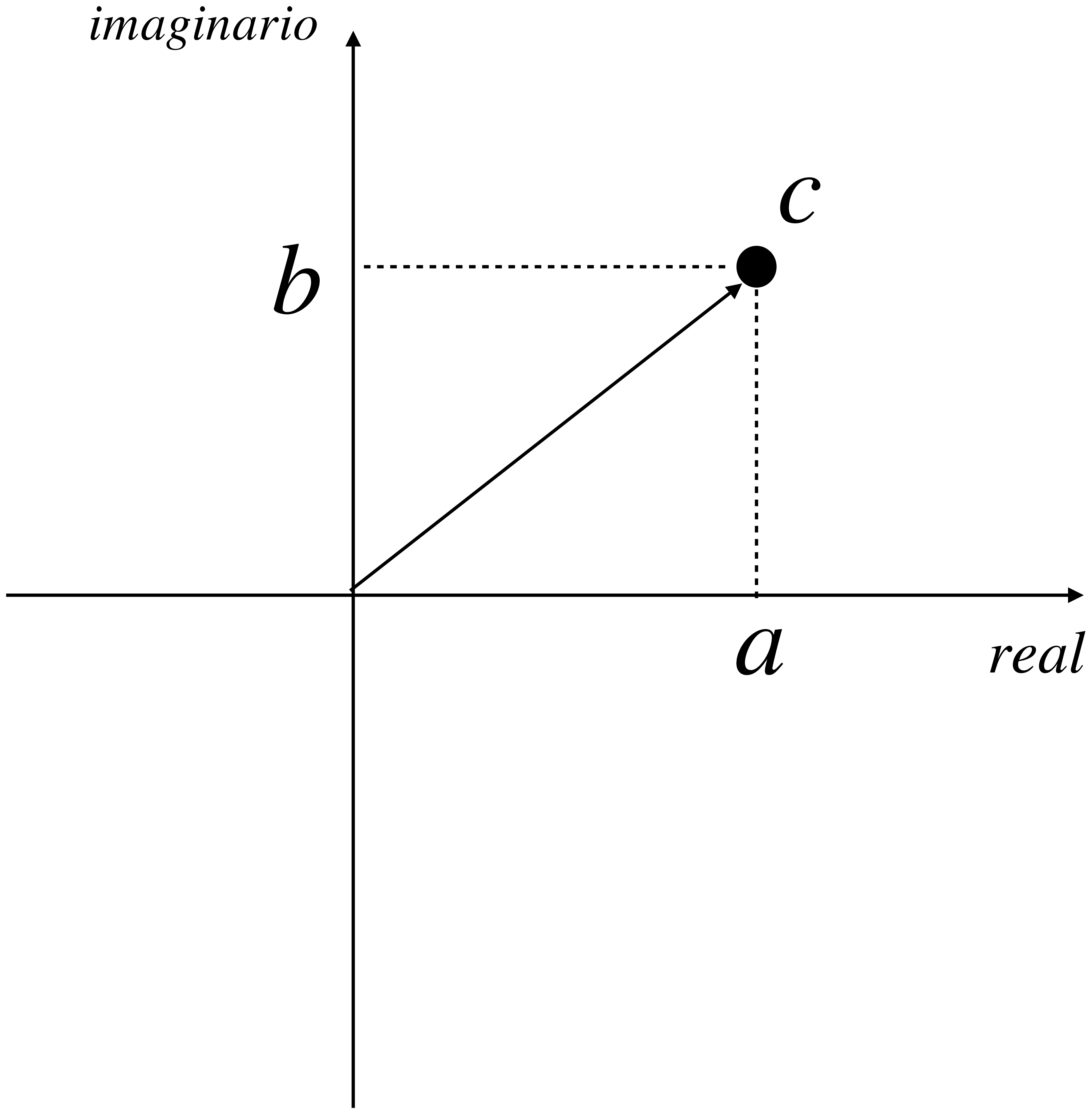
$$\bar{\ } : \mathbb{C} \to \mathbb{C} : \bar{c} = \overline{a + bi} = a - bi$$

$$c \times \bar{c} = |c|$$

Ejercicios

Representación geométrica de números complejos

Plano complejo

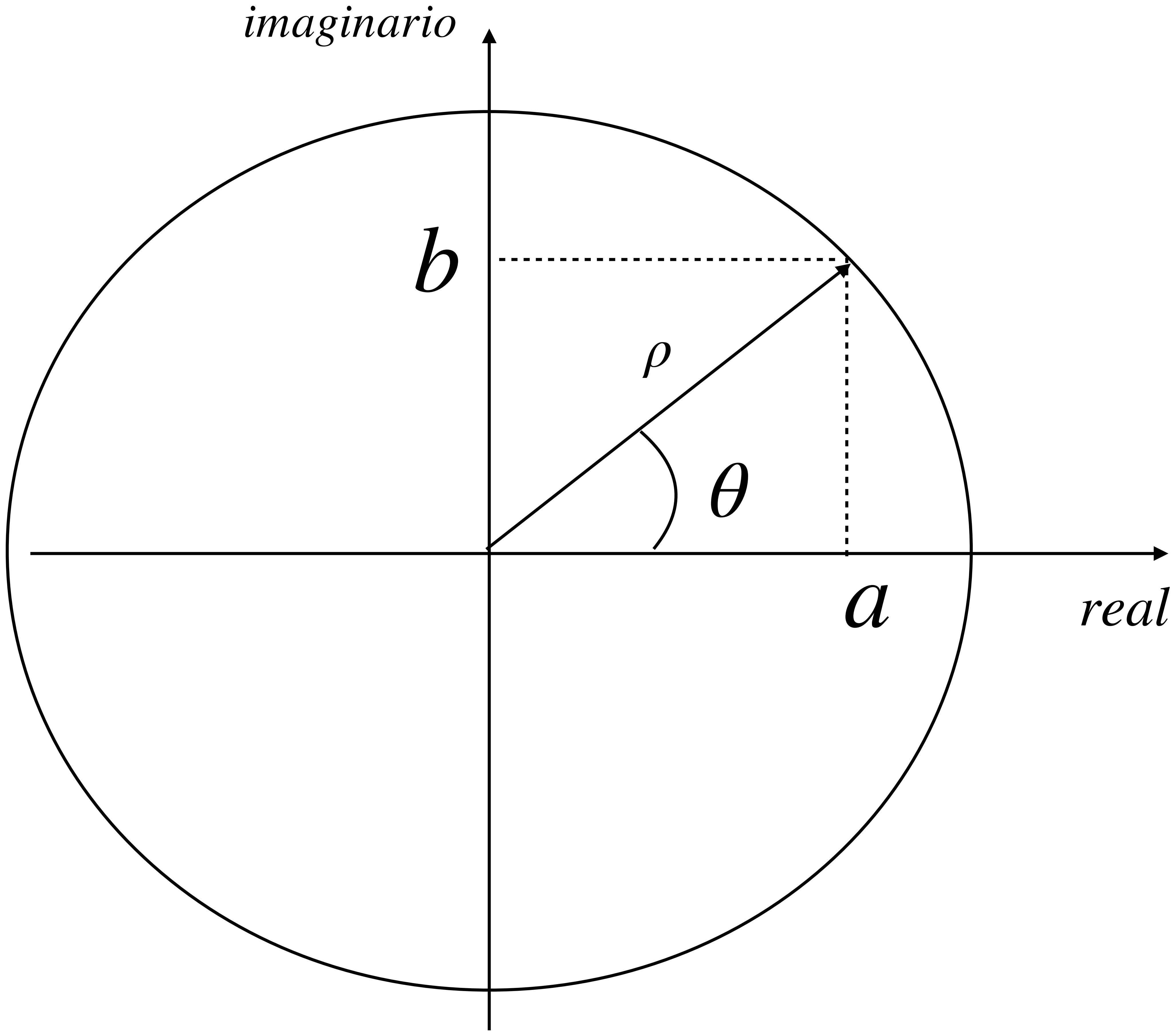


Plano complejo

$$c = a + bi \in \mathbb{C}$$

$$a, b \in \mathbb{R}$$

Geometría de complejos



Plano complejo

Representación cartesiana

$$c = a + bi \in \mathbb{C}$$

$$a, b \in \mathbb{R}$$

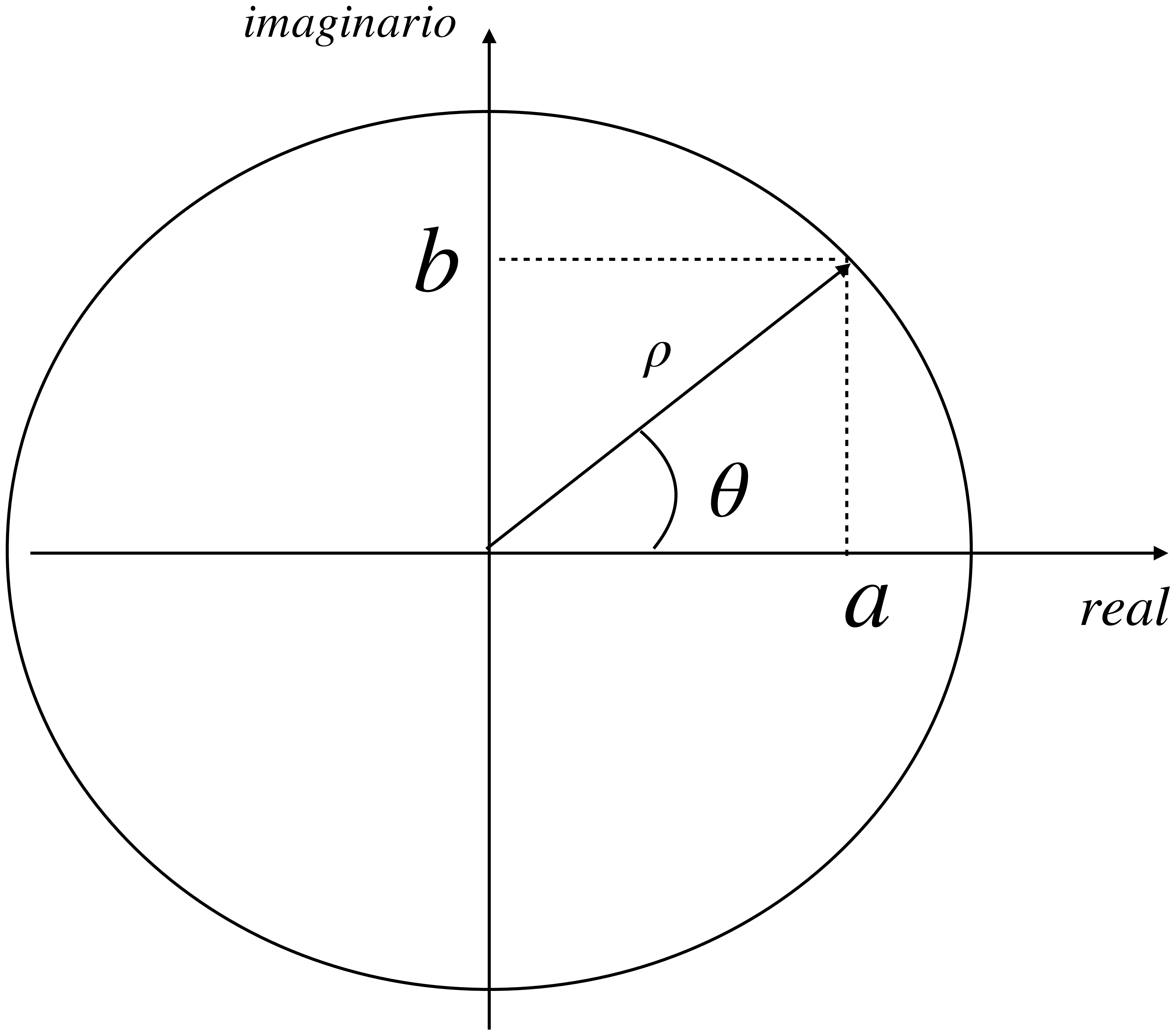
Representación polar

$$modulo(c) = \rho = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$fase(c) = \theta = tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$$

$$c = \rho \times cos(\theta) + \rho \times sin(\theta)i$$

Geometría de multiplicación de complejos



Plano complejo

Representación polar

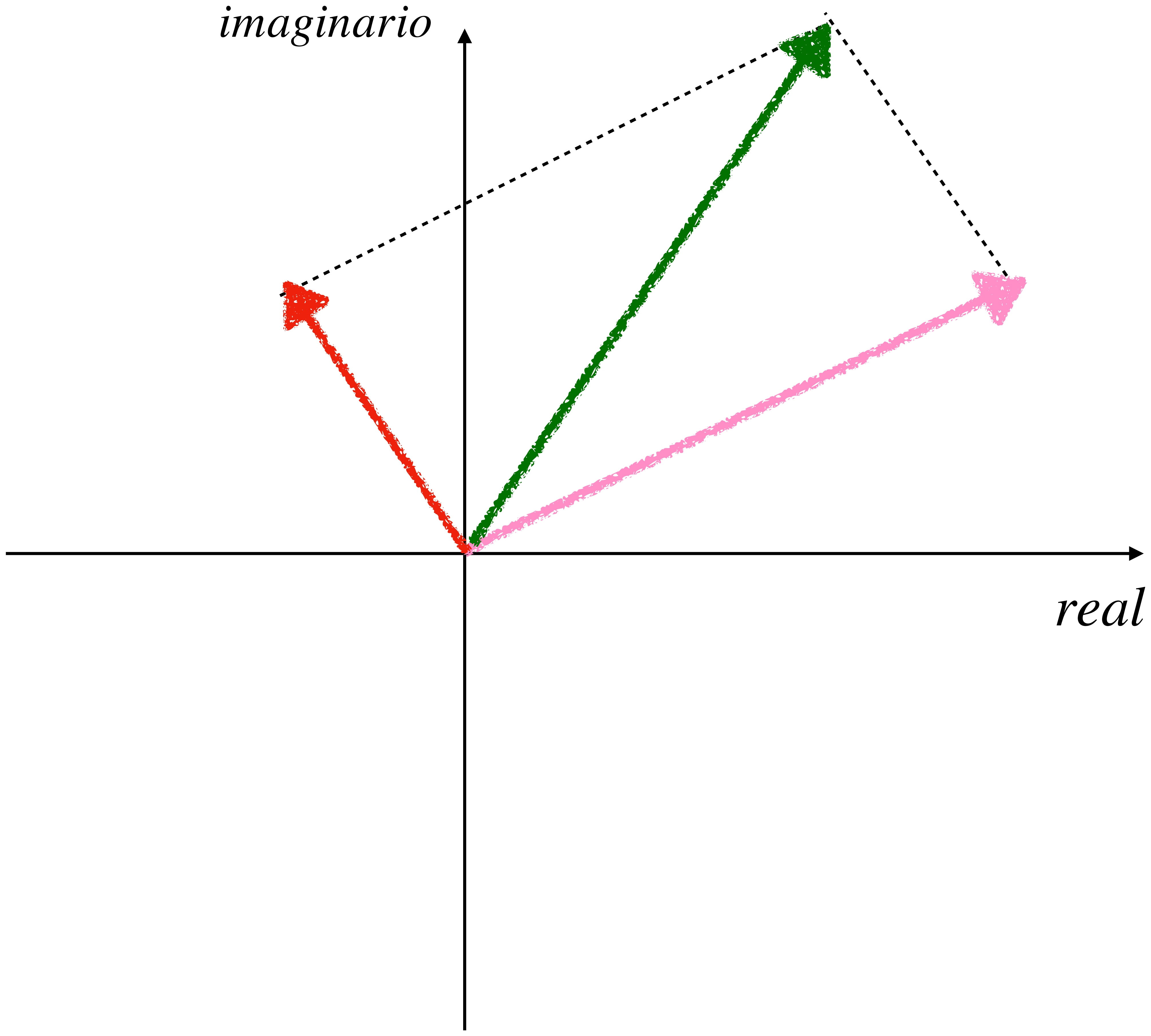
$$modulo(c) = \rho = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$fase(c) = \theta = tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$$

$$c = \rho \times cos(\theta) + \rho \times sin(\theta)i$$

La multiplicación es la suma de los ángulos y la multiplicación de las magnitudes

Geometría de la suma



Preguntas y ejercicios