Método de Romberg

Diego Hernández Landeros
Ana Karen Murillo
Fernanda Ibarra
Daniel Escalante

UNAM-FES Acatlán, Matemáticas Aplicadas y Computación

1 de mayo de 2017

Contenido

¿Qué es?

La integración de Romberg es una técnica de diseño para obtener integrales numéricas (aproximaciones) de funciones de manera eficiente, que se basa en aplicaciones sucesivas de la regla del trapecio. Sin embargo a través de las manipulaciones matemáticas, se alcanzan mejores resultados con menos trabajo.

Contenido

¿Cuándo se utiliza?

El problema en la práctica se presenta cuando nos vemos imposibilitados a encontrar la función primitiva requerida, aún para integrales aparentemente sencillas como

$$I = \int_0^1 e^{x^2}$$

la cual simplemente es imposible de resolver con el Teorema Fundamental del Cálculo y resolveremos más adelante.

El algoritmo de Romberg forma parte de una técnica conocida como método de extrapolación de Richardson.

Contenido

Fórmula

Para realizar el método de Romberg se usa la fórmula del trapecio.

Fórmula del trapecio

$$A \approx \frac{\triangle x}{2}\left(f_{x_0} + f_{x_n}\right) + 2\sum \textit{resto de las ordenadas}$$

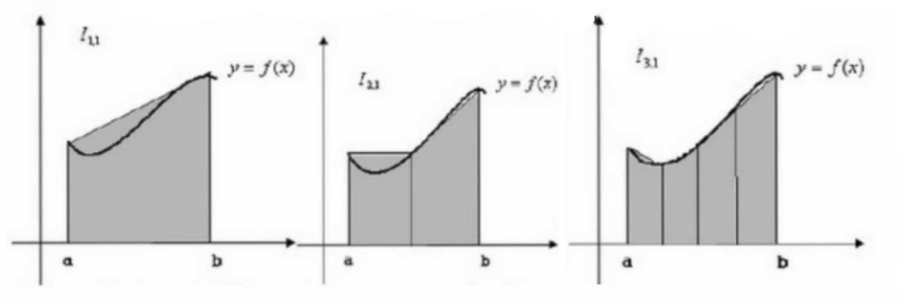
$h = \frac{b-a}{2}$
a=límite inferior
b=límite superior
n=subintervalos(número de trapecios en el método)
f_{x_0}=primer valor
f_{x_n}=último valor
$\sum$=suma de los valores que están dentro del intervalo

Contenido

¿Qué se hace?

Consiste en ir haciendo segmentos y entre más pequeños sean nuestros segmentos, más iremos aproximando al área de una función.

Lo que se va obteniendo de cada aproximación con Romberg



[a]

[a] Burden

¿Qué se hace?

Finalizado el ejercicio se hará un ejemplo más gráfico usando Geogebra

Contenido

Ejemplo

Función a integrar numéricamente

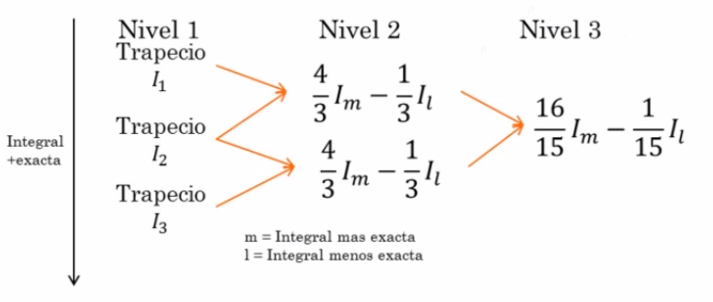
Se nos da la siguiente función para resolver por el método de Romberg.

$$\int_0^1 e^{x^2} dx$$

$$n = 1, 2, 4$$

Ejemplo

El método se va haciendo por niveles y para sacar el primer nivel necesitamos aplicar directamente la fórmula del trapecio.



Ejemplo

Coeficientes del nivel requerido

Para un nivel **2, 3, ..., n** ya se tienen ciertas fórmulas. Los coeficientes irán variando dependiendo del nivel y la fórmula para calcular los coeficientes es:

$$\frac{4^{k-1}}{4^{k-1}-1} I_m - \frac{1}{4^{k-1}-1} I_l$$

$$I_m = \textit{integral más exacta}$$

$$I_l = \textit{integral menos exacta}$$

Calculando Nivel 1 I_1

Para n=1 se calcula con la fórmula del trapecio de un segmento

$$A \approx \frac{h}{2}\left[f(b) + f(a)]\right]$$

Teniendo lo valores

$a = 0;\, b = 1;\, h = \frac{b-a}{n}$

x	$f(x)$
0	1
1	2,718282

... sustituyendo

$A \approx \frac{1}{2}\left[1 + 2{,}718282\right]$

$$I_1 = 1{,}859141$$

Calculando Nivel 2 I_2

Ahora n=2 se calcula de nuevo con la fórmula del trapecio

$$A \approx \frac{h}{2}\left[f(b) + f(a) + 2\left[\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)\right]\right]$$

Teniendo lo valores

$a = 0; b = 1; h = \frac{b-a}{n}$

... sustituyendo

$$A \approx \frac{1}{4}\left[1 + 2{,}718282 + 2e^{(\frac{1}{2})^2}\right]$$

x	$f(x)$
0	1
0,5	1,284025
1	2,718282

$$I_2 = 1{,}57583$$

Calculando Nivel 3 I_3

Ahora con n=4

Tabulando los valores tenemos:

x	$f(x)$
0	1
$\frac{1}{4}$	1,064494
$\frac{1}{2}$	1,284025
$\frac{3}{4}$	1,755055
1	2,718282

Haciendo la suma
$\sum = 1{,}064494 + 1{,}284025 + 1{,}755055$
$= 4{,}103574$

... sustituyendo

$$A \approx \frac{1}{8}\left[1 + 2{,}718282 + 2(4{,}103574)\right)$$

$$I_3 = 1{,}490679$$

Sustituyendo resultados en la tabla

Una vez que tenemos nuestros valores de I_1, I_2, I_3, los sustituimos en la tabla del método de Romberg, como nos indica.

De la integral más exacta a la menos exacta

Nivel 1	Nivel 2	Nivel 3
1.8591		
	$\frac{4}{3}(1.5715) - \frac{1}{3}(1.8591)$	
1.5715		$\frac{16}{15}I_m - \frac{1}{15}I_l$
	$\frac{4}{3}(1.4906) - \frac{1}{3}(1.5715)$	
1.4906		

Los valores del nivel 1 son los valores de I_1, I_2, I_3 usando las n que son los números de trapecios usados para aproximar.

Evaluando todos los valores

Evaluamos el último punto siguiendo los pasos anteriores de la integral más y menos exacta para llegar a 1.4609

En ese punto, con 3 segmentos nos aproximamos al área total de la función en el intervalo de 0 a 1.

Contenido

Evaluando la función

Metiendo la función en Wolfram da el siguiente valor...

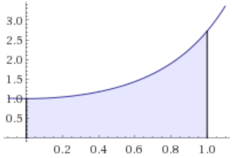
Definite integral:

More digits

$$\int_0^1 e^{x^2}\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}\,\mathrm{erfi}(1) \approx 1.46265$$

$\mathrm{erfi}(x)$ is the imaginary error function

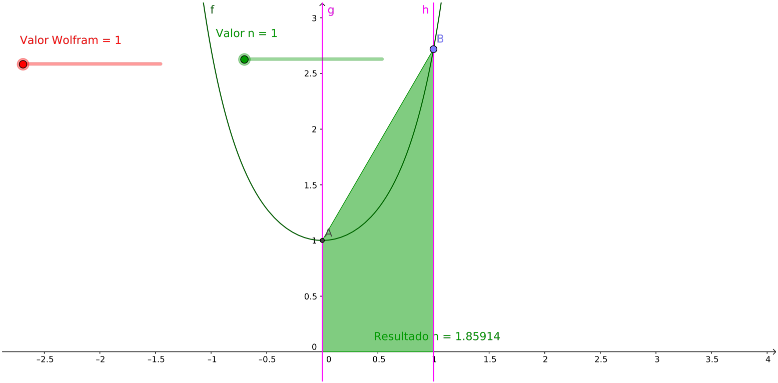
Visual representation of the integral:



Contenido

Trapecios con Geogebra

Usando Geogebra, se puede observar cómo es que los trapecios se van acomodando en la función conforme el valor de n se va moviendo.



Fuentes

W. Allen Smith.
Análisis Numérico.

Richard L. Burden
Análisis Numérico, Séptima Edición.

Aproximación de áreas por el método del trapecio
https://www.geogebra.org/material/show/id/81732

¡Gracias!

(Creado con Beamer de LaTeX)