Método de Romberg

Diego Hernández Landeros
Ana Karen Murillo Aceves
Maria Fernanda Ibarra Navarro
Daniel Martínez Escalante

Matemáticas Aplicadas y Computación

UNAM-FES Acatlán, Matemáticas Aplicadas y Computación

4 de mayo de 2017

Contenido

¿Qué es?

La integración de Romberg es una técnica de diseño para obtener integrales numéricas (aproximaciones) de funciones de manera eficiente, que se basa en aplicaciones sucesivas de la regla del trapecio. Sin embargo a través de las manipulaciones matemáticas, se alcanzan mejores resultados con menos trabajo.

Contenido

¿Cuándo se utiliza?

El problema en la práctica se presenta cuando nos vemos imposibilitados a encontrar la función primitiva requerida, aún para integrales aparentemente sencillas

$$I = \int_0^1 e^{x^2}$$

El algoritmo de Romberg forma parte de una técnica conocida como método de extrapolación de Richardson.

Contenido

Fórmula

Para realizar el método de Romberg se usa la fórmula del trapecio.

Fórmula del trapecio

$$A \approx \frac{\triangle x}{2}\left(f_{x_0} + f_{x_n}\right) + 2\sum \textit{resto de las ordenadas}$$

$h = \frac{b-a}{2}$
a=límite inferior
b=límite superior
n=subintervalos(número de trapecios en el método)
f_{x_0}=primer valor
f_{x_n}=último valor
$\sum$=suma de los valores que están dentro del intervalo

Contenido

¿Qué se hace?

Consiste en ir haciendo segmentos y entre más pequeños sean nuestros segmentos, más iremos aproximando al área de una función. Las aproximaciones mejoran su precisión conforme aumenta el número de subintervalos.

Lo que se va obteniendo de cada aproximación con Romberg

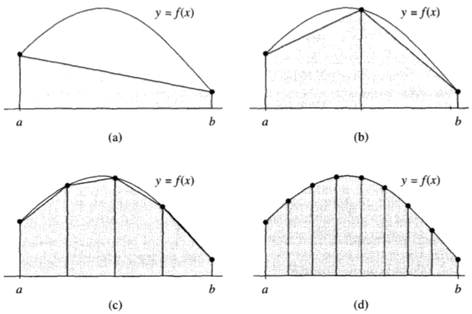


Figura 7.8 (a) $T(0)$ es el área de $2^0 = 1$ trapecio. (b) $T(1)$ es el área de $2^1 = 2$ trapecios. (c) $T(2)$ es el área de $2^2 = 4$ trapecios. (d) $T(3)$ es el área de $2^3 = 8$ trapecios.

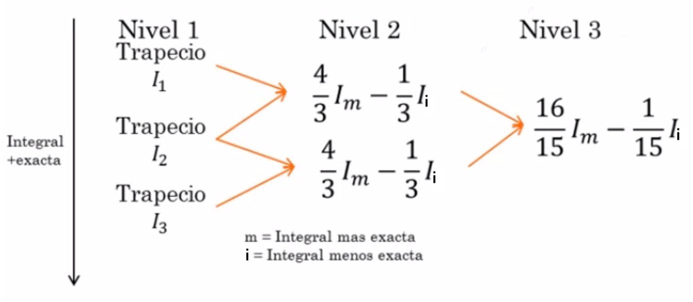
¿Qué se hace?

Finalizado el ejercicio se mostrará el ejemplo usando Geogebra

Contenido

Esquema de integración de Romberg

El método se va haciendo por niveles y para sacar el primer nivel necesitamos aplicar directamente la fórmula del trapecio.



Coeficientes del nivel requerido

Para un nivel **2, 3, ..., n** ya se tienen ciertas fórmulas. Los coeficientes irán variando dependiendo del nivel y la fórmula para calcular los coeficientes es:

$$\frac{4^{k-1}}{4^{k-1}-1} I_m - \frac{1}{4^{k-1}-1} I_i$$

$$I_m = \textit{integral más exacta}$$

$$I_i = \textit{integral menos exacta}$$

Contenido

Ejemplo

Función a integrar numéricamente

Se nos da la siguiente función para resolver por el método de Romberg.

$$\int_0^1 e^{x^2} dx$$

$$n = 1, 2, 4, 8, 16$$

Calculando I_1 con n=1

Para n=1 se calcula con la fórmula del trapecio de un segmento

$$A \approx \frac{h}{2}\left[f(b) + f(a)\right]]$$

Teniendo lo valores

$a = 0;\ b = 1;\ h = \frac{b-a}{n}$

x	$f(x)$
0	1
1	2,71828

... sustituyendo

$A \approx \frac{1}{2}\left[1 + 2{,}71828\right]$

$$I_1 = 1{,}85914$$

Calculando I_2 con n=2

Ahora n=2 se calcula de nuevo con la fórmula del trapecio

$$A \approx \frac{h}{2}\left[f(b)+f(a)+2\left[\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)\right]\right]$$

Teniendo lo valores

$a = 0; b = 1; h = \frac{b-a}{n}$

... sustituyendo

$$A \approx \frac{1}{4}\left[1 + 2{,}71828 + 2e^{\left(\frac{1}{2}\right)^2}\right]$$

x	$f(x)$
0	1
0,5	1,28403
1	2,71828

$$I_2 = 1{,}57158$$

Ahora con n=4

Tabulando los valores tenemos:

x	$f(x)$
0	1
$\frac{1}{4}$	1,06449
$\frac{1}{2}$	1,28403
$\frac{3}{4}$	1,75505
1	2,71828

Haciendo la suma
$\sum = 1{,}06449 + 1{,}28403 + 1{,}75505$
$= 4{,}103574$

... sustituyendo

$$A \approx \frac{1}{8}\left[1 + 2{,}71828 + 2(4{,}10357)\right)$$

$$I_3 = 1{,}49068$$

Calculando I_4 con n=8

Ahora con n=8

Tabulando los valores tenemos:

x	$f(x)$
0	1
$\frac{1}{8}$	1,01575
$\frac{1}{4}$	1,06449
$\frac{3}{8}$	1,15099
$\frac{1}{2}$	1,28403
$\frac{5}{8}$	1,47790
$\frac{3}{8}$	1,75505
$\frac{7}{8}$	2,15034
1	2,71828

Haciendo la suma $\sum = 9{,}89855$

... sustituyendo

$$A \approx \frac{1}{16}\,[1 + 2{,}71828 + 2(9{,}89855)\,)$$

$$I_4 = 1{,}46971$$

Calculando I_5 con n=16

Ahora con n=16 Tabulando los valores tenemos:

x	$f(x)$
0	1
$\frac{1}{16}$	1,00391
$\frac{1}{8}$	1,01575
$\frac{3}{16}$	1,03578
$\frac{1}{4}$	1,06449
$\frac{5}{16}$	1,10258
$\frac{3}{8}$	1,15099
$\frac{7}{16}$	1,21095
$\frac{1}{2}$	1,28403
$\frac{9}{16}$	1,37219
$\frac{5}{8}$	1,47790
$\frac{11}{16}$	1,60425
$\frac{3}{4}$	1,75505
$\frac{13}{16}$	1,93509
$\frac{7}{8}$	2,15034
$\frac{15}{16}$	2,40826
1	2,71828

Haciendo la suma $\sum = 21{,}57158$

... sustituyendo

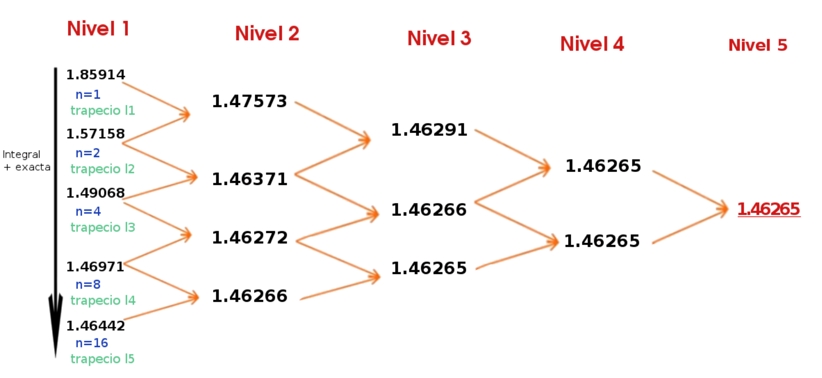
$$A \approx \frac{1}{32}\left[1 + 2{,}71828 + 2(21{,}57158)\right)$$

$$I_5 = 1{,}46442$$

Tabla final de 5 niveles y valor aproximado

Evaluando todos nuestros valores de I_n y sustiyéndolos en la tabla del método de Romberg, llegamos a que con 5 segmentos, nos aproximamos al área total de la función en el intervalo de 0 a 1, de la integral más exacta a la menos exacta.

Coeficientes del nivel requerido



Contenido

Evaluando la función

Metiendo la función en Wolfram da el siguiente valor...

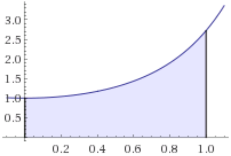
Definite integral:

More digits

$$\int_0^1 e^{x^2}\, dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}\ \mathrm{erfi}(1) \approx 1.46265$$

$\mathrm{erfi}(x)$ is the imaginary error function

Visual representation of the integral:



Contenido

Trapecios con Geogebra

Usando Geogebra, se observará la forma en que los trapecios se van acomodando en la función conforme el valor de n se va moviendo.

Bibliografía

- W. Allen Smith.
  Análisis Numérico.
- Richard L. Burden
  Análisis Numérico, Séptima Edición.
- John H. Mathews - Kurtis D. Fink
  Métodos Numéricos con MatLab.
- Aproximación de áreas por el método del trapecio
  https://www.geogebra.org/material/show/id/81732

¡Gracias!

(Creado con Beamer de LaTeX)