UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

Instituto de Física

Laboratorio Integrado de Física

2023-II

MEDIDAS, ERRORES E INCERTIDUMBRES

Una medida está asociada a la acción de comparar una determinada magnitud contra un "patrón" preestablecido que reúne determinadas características. Sin embargo, en los procesos de medida o comparación existen diversos factores que conducen a que en principio ninguna medida sea exactamente igual a la anterior. En este documento se resumen algunos procedimientos a tener en cuenta al momento de realizar medidas experimentales de una cantidad, indicando que tipos de errores puede presentar la medida, como propagar dichos errores y reportar adecuadamente los resultados.

1 ERRORES EN LA MEDIDA

Se distinguen tres tipos de imprecisiones al momento de tomar medidas:

- **Errores de escala.** Asociados a la precisión del instrumento de medida, en este caso, el valor mínimo del error es equivalente a la mínima escala (resolución) del instrumento de medida utilizado.

- **Errores sistemáticos.** Dependen del sistema o montaje experimental, generalmente están relacionados a instrumentos de medida descalibrados o modelos teóricos idealizados del sistema experimental.

- **Errores aleatorios.** Debidos a variaciones impredecibles y/o desconocidas dentro de un montaje experimental, por lo cual, al realizar medidas consecutivas (o repetitivas) de cierta magnitud (aunque se utilicen instrumentos de alta precisión), los valores obtenidos pueden llegar a ser diferentes.

Debido a los errores, los datos obtenidos en procesos experimentales de medida poseen una incertidumbre que hace que el resultado no este dado por un valor exacto; ahora el resultado se debe expresar dentro de un intervalo en el cual se puede afirmar con relativa seguridad que se encuentra el valor real de la medida.

Si se obtiene el mismo valor al repetir varias veces (y bajo las mismas condiciones) la medida de cierta magnitud física, el error en dicha medida sería de escala y la incertidumbre correspondiente es la mínima división del instrumento de medida; pero si se obtienen valores diferentes, significa que predominan los errores aleatorios y en este caso se tomaría como incertidumbre la desviación típica estándar. Para un conjunto de valores x_i, con $i = 1, 2, 3..., n$ arrojados por las medidas repetitivas de una misma cantidad, se define la desviación típica estándar de x (Δx) como:

$$\Delta x = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2} \tag{1}$$

Siendo $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$ el valor promedio de las medidas.

2 REGISTRO DE UNA MEDIDA

La forma correcta de escribir el resultado de una medida, es indicar el valor estimado de la cantidad y el rango dentro del cual se puede asegurar que se encuentra su valor real. Así que, al medir una cantidad con error el resultado se expresa de la forma $A' = A + \Delta A$, lo cual indica que la medida real se encuentra con alta probabilidad en el intervalo $(A - \Delta A, A + \Delta A)$, siendo A el valor medido con el instrumento (o valor promedio de la medida) y ΔA el error o incertidumbre asociado al instrumento de medida utilizado (o la desviación típica estándar). A la razón $\Delta A/A$ se le conoce como incertidumbre relativa.

Ejemplo, si al medir con una regla la longitud de un objeto nos da 12,3 cm, como la precisión de la regla (mínima división) es de 0,1 cm el resultado final se escribe como: $(12,3 \pm 0,1)$ cm y el valor real de la longitud del objeto se encuentra en el intervalo $(12,2 - 12,4)$ cm.

2.1 Error relativo

Si conocemos el valor aceptado o el valor teórico de una cantidad, se puede determinar la exactidud de dicha medida a partir del error relativo. Nuestra medida se considera exacta si el error relativo es menor a su incertidumbre relativa, donde el error relativo (E_m) esta dado por:

$$E_m = \frac{|M - \bar{m}|}{M} \tag{2}$$

Siendo M el valor aceptado de la medida y $\bar{m}$ el valor obtenido experimentalmente. Es decir, si $E_m < \Delta m/\bar{m}$ la medida se considera exacta. El error relativo también suele expresarse de manera porcentual.

2.2 Operaciones de cantidades con error

Es frecuente tener que operar con dos o más valores experimentales al momento de obtener una variable física. Por ejemplo, determinar el perímetro de un réctangulo implicaría sumar las longitudes de cada lado; para determinar su área debemos multiplicar las longitudes de cada lado. Como cada medida tiene un error experimental, el resultado de la suma o el producto también debe tener asociada una incertidumbre experimental. Dependiendo del tipo de operación matemática y el tipo de error en la medida, se deben seguir reglas para obtener el resultado final de incertidumbre en la medida. Para el caso de errores de escala, a continuación se muestra como obtener la incertidumbre en la medida cuando se realizan algunos tipos de operaciones matemáticas básicas como suma, resta, producto y división de cantidades con error:

$$\begin{aligned}
\Delta x^n &= |n|\, x^{n-1}\Delta x &\quad (3a)\\
\Delta\left(x\pm y\right) &= \Delta x+\Delta y &\quad (3b)\\
\Delta\left(xy\right) &= xy\left(\frac{\Delta x}{x}+\frac{\Delta y}{y}\right) &\quad (3c)\\
\Delta\left(\frac{x}{y}\right) &= \frac{x}{y}\left(\frac{\Delta x}{x}+\frac{\Delta y}{y}\right) &\quad (3d)\\
\Delta\left(x^n y^m\right) &= x^n y^m\left(|n|\,\frac{\Delta x}{x}+|m|\,\frac{\Delta y}{y}\right) &\quad (3e)
\end{aligned}$$

Donde x y y representan las magnitudes físicas medidas directamente con el instrumento.

Ahora, si los errores son de carácter aleatorio la forma correcta de estimar el error de la medida es la siguiente:

$$\begin{aligned}
\Delta x^n &= |n|\, x^{n-1}\Delta x &\quad (4a)\\
\Delta\left(x\pm y\right) &= \sqrt{\left(\Delta x\right)^2+\left(\Delta y\right)^2} &\quad (4b)\\
\Delta\left(xy\right) &= xy\sqrt{\left(\frac{\Delta x}{x}\right)^2+\left(\frac{\Delta y}{y}\right)^2} &\quad (4c)\\
\Delta\left(\frac{x}{y}\right) &= \frac{x}{y}\sqrt{\left(\frac{\Delta x}{x}\right)^2+\left(\frac{\Delta y}{y}\right)^2} &\quad (4d)\\
\Delta\left(x^n y^m\right) &= x^n y^m\sqrt{\left(n\frac{\Delta x}{x}\right)^2+\left(m\frac{\Delta y}{y}\right)^2} &\quad (4e)
\end{aligned}$$

De forma general, se puede obtener la incertidumbre en cualquier operación matemática a partir de la definición de derivada parcial. Si una magnitud f depende de dos variables observables x y y con $x=\bar{x}\pm\Delta x$ y $y=\bar{y}\pm\Delta y$, tendremos $f=\bar{f}\pm\Delta f$ siendo $\bar{f}=f\left(\bar{x},\bar{y}\right)$. La incertidumbre Δf para error de escala se obtiene a partir de la siguiente derivación parcial:

$$\Delta f=\left|\frac{\partial f}{\partial\bar{x}}\right|\Delta x+\left|\frac{\partial f}{\partial\bar{y}}\right|\Delta y \tag{5}$$

Si es un error aleatorio, se determina de la siguiente forma:

$$\Delta f=\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial\bar{x}}\Delta x\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial\bar{y}}\Delta y\right)^2} \tag{6}$$

2.3 Incertidumbre en algunos objetos geométricos

A modo de ejemplo, en la Tabla 1 y Tabla 2 se muestra la expresión resultante al momento de calcular la incertidumbre asociada a errores de escala en áreas (ΔA) y volúmenes (ΔV) de algunos objetos simétricos, utilizando la fórmula correspondiente a cada operación matememática.

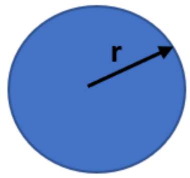
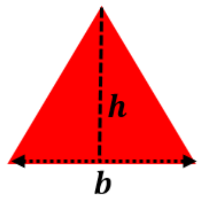
Objeto	Área (A)	ΔA
	ab	$ab\left(\frac{\Delta a}{a}+\frac{\Delta b}{b}\right)$
	πr^2	$2\pi r \Delta r$
	$\frac{bh}{2}$	$\frac{bh}{2}\left(\frac{\Delta h}{h}+\frac{\Delta b}{b}\right)$

Table 1: Incertidumbre en áreas de algunos objetos simétricos

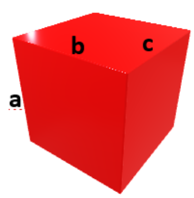
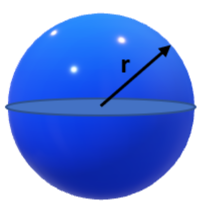
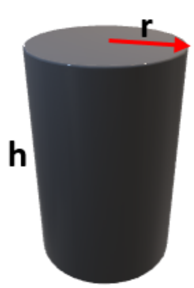
Objeto	Volumen (V)	ΔV
	abc	$abc\left(\frac{\Delta a}{a}+\frac{\Delta b}{b}+\frac{\Delta c}{c}\right)$
	$\frac{4}{3}\pi r^3$	$4\pi r^2 \Delta r$
	$\pi r^2 h$	$\pi r^2 h\left(\frac{\Delta h}{h}+\frac{2\Delta r}{r}\right)$

Table 2: Incertidumbre en volumen de algunos objetos simétricos

- **Ejemplo:** Si al medir con un flexómetro las longitudes de un rectángulo se obtienen los valores: $a = 15,3$ cm y $b = 21,5$ cm, el valor del área de éste rectángulo con su respectiva incertidumbre es de la forma $A' = A \pm \Delta A$ y está dada por:

$A' = (15,3)\,(21,5) \pm (15,3)\,(21,5)\left(\frac{0,1}{15,3} + \frac{0,1}{21,5}\right)$,
siendo en este caso $\Delta a = \Delta b$ =0,1 cm dado que ambos se miden con el mismo instrumento de medida. Por tanto, el valor del área del rectángulo a reportar es:

$A' = (328,95 \pm 3,68)\, cm^2$.

Ésta podría se una forma de escribir el resultado, pero dada la precisión del instrumento de medida hay ciertos criterios a tener en cuenta para escribir el resultado final con la cantidad adecuada de cifras significativas. Mas adelante retomaremos este resultado analizando la forma correcta de escribirlo según las reglas de redondeo de cifras significativas.

Debido a la presencia de incertidumbre en las medidas, no es práctico expresar los resultados con muchas cifras numéricas o digitos, pues no todas tendrán significado. Al momento de realizar y reportar una medida se debe tener en cuenta la precisión.

3 CIFRAS SIGNIFICATIVAS

El número de cifras significativas de una cantidad experimental lo determina la primera cifra que contiene alguna incertidumbre, es decir, las cifras significativas son los dígitos correctos y el primer dígito dudoso. Por ejemplo, el número $12,3$ tiene 3 cifras significativas de las cuales el último valor (que es el 3) es el valor dudoso, es decir, puede haber cambios en el valor de la medida en su último dígito. Algunas reglas para determinar la cantidad de cifras significativas de un número son las siguientes:

- **Si el número es menor a 1** se cuenta el número de cifras que lo forman incluyendo los cero situados al lado derecho o en el medio, pero no los ceros a izquierda. Por ejemplo el valor $0,00324$ tiene 5 decimales pero solo tres cifras significativas (los ceros a izquierda no se cuentan).

- **Si el número es mayor a 1** se cuenta el número de cifras que lo forman incluyendo los ceros situados en el medio, pero no los ceros situados en el lado derecho. Por ejemplo, el valor de la velocidad de la luz c = 2997926600000 m/s posee 8 cifras significativas (no se contabilizan los ceros a derecha).

Note que, desde el punto de vista experimental las cantidades 5 m, $5,0$ m y $5,00$ m son diferentes. La primera tiene una cifra significativa, la segunda dos y la tercera tres. También hay que tener en cuenta que los ceros finales de un dato entero no son significativos. El valor 500 tiene una sola cifra significativa, si se desea expresar con mas cifras significativas se debe usar notación científica: $5,00 \times 10^2$ si tiene tres cifras significativas (la potencia no se tiene en cuenta para la cantidad de cifras significativas), si lo escribimos como 500.00 ahora tenemos 5 cifras significativas. Así que ser cuidados al monento de escribir sus resultados, recuerde que el número de cifras significativas de una cantidad establece el orden de magnitud de la incertidumbre del resultado. Por ejemplo, un dato de masa expresado como $15,4$ g nos indica que la cifra dudosa es el 4 y que la incertidumbre en la medida puede ser de 0.1 g. En consecuencia, al tomar datos en un experimento debido a la incertidumbre en la medida aparecen cifras dudosas pero solo se deben conservar las cifras seguras y la primer cifra dudosa.

Si al medir varias veces el tiempo de caída de un objeto (desde la misma altura y bajo las mismas condiciones) obtenemos los valores: 8,3 s, 8,2 s, 7,9 s, 8,0 s, 8,2 s, 8,1 s; note que todos los valores de tiempo están dados por 2 cifras significativas, pero si calculamos el tiempo promedio se obtiene un valor de 8,116666...En este caso, la forma correcta de escribir el tiempo promedio es conservar la cifra segura que es el 8 y solo una cifra dudosa (un solo decimal), las demás se consideran inseguras porque no están dentro de la precisión del instrumento de medida. Cuando se descartan todas las cifras inseguras se dice que el resultado ha sido redondeado o truncado. Así que conozcamos las reglas de redondeo que permiten escribir adecuadamente el resultado.

3.1 Reglas de redondeo de números

1. Si la primera de las cifras que se descarta es inferior a 5, las cifras que se conservan se dejan inalteradas: $15,84 \approx 15,8$.

2. Si la primera cifra que se descarta es mayor que 5, entonces la última cifra que se conserva se aumenta en 1: $15,86 \approx 15,9$.

3. Si la primera cifra que se descarta es exactamente igual a 5 y las cifras que le siguen no son todas cero, entonces la última cifra que se conserva se aumenta en 1: $15,857 \approx 15,9$.

4. Si la primera de las cifras que se descartan es exactamente 5 y las cifras que le siguen son todas cero, entonces la última cifra que se conserva se aumenta en 1 si es impar y se deja inalterada si es par:$15,850 \approx 15,8$ y $15,750 \approx 15,8$.

3.2 Reglas para operar con cifras significativas

1. Los resultados de una única medida se expresan incluyendo tan solo una cifra dudosa.

2. El número de cifras significativas se cuenta de izquierda a derecha, empezando por el primer dígito y finalizando con el dígito dudoso. Los ceros que den lugar a un factor igual a una potencia de 10 no se cuentan en las cifras significativas.

3. **Si se suman o restan** dos números decimales, el número de cifras decimales que aparece en la respuesta es igual al número de cifras decimales de la cantidad que tenga el menor número de ellas. Ejemplo: $2,5 + 4,26 + 5,874 = 12,634$ se redondea a $12,6$ (un decimal).

4. **Para la multiplicación (y la división)**, el número de cifras significativas es igual al del factor con menos cifras. Ejemplos: $4,26 \times 3,40 = 14,484$ se redondea a $14,5$ (3 cifras significativas); $8,5 \times 0,0029 = 0,02465$ se redondea a $0,025$ (dos cifras sifnificativas).

Nota: si la multiplicación involucra un entero, este adopta el número de cifras significativas del factor que tenga menos. Ejemplo: $3 \times 4,3 \times 2,34 = 30,186$ se redondea a $3,0 \times 10^1$ (dos cifras significativas).

Volviendo al área del rectángulo que calculamos antes, si aplicamos estas reglas note que tanto los valores de $a = 15,3$ cm como $b = 21,5$ cm tienen 3 cifras significativas, así que el área que se obtiene como el producto de estas dos cantidades debería quedar expresada con 3 cifras significativas, es decir, no es correcto expresar el área como $A' = (328,95 \pm 3,68)\,cm^2$ ni como $A' = (329,0 \pm 3,7)\,cm^2$ sino lo correcto es $A' = (329 \pm 4)\,cm^2$ que tiene 3 cifras significativas.

4 EJEMPLOS

1. Al medir con un pie de rey un cilindro, se obtiene que su radio es $r = (3,450 \pm 0,005)$ cm y la altura $h = (12,235 \pm 0,005)$ cm. Determine el volumen de dicho cilindro.

   Solución: De la fila 3 de la Tabla 2 tenemos que:

   $$V' = \pi r^2 h \pm \pi r^2 h \left(\frac{\Delta h}{h} + \frac{2\Delta r}{r}\right) = \pi(3,450)^2(12,235) \pm \pi(3,450)^2(12,235)\left(\frac{0{,}005}{12{,}235} + \frac{2(0{,}005)}{3{,}450}\right),$$

   $V' = (457,5 \pm 1,5)\, cm^3$ (cuatro cifras significativas).

   El volumen del cilindro se encuentra con alta probabilidad en el intervalo: $V' = (456,0 - 459,0) cm^3$.

2. Determine la densidad superficial de un disco de radio $r = (23,7 \pm 0,1)$cm y masa $m = (632,5 \pm 0,1)$ g.

   Solución: La densidad superficial (σ) se define como la razón entre la masa y el área del objeto. Así que primero determinemos el área del disco (A_D) con su respectivo error: $A_D = \pi r^2 \pm 2\pi r \Delta r = \pi(23,7)^2 \pm 2\pi(23,7)(0,1)$, por tanto, luego de redondear acorde a las cifras significativas de r:

   $A_D = (1,76 \pm 0,15) \times 10^3 cm^2$ (tres cifras significativas)

   $$\sigma = \frac{m}{A} \pm \frac{m}{A}\left(\frac{\Delta m}{m} + \frac{\Delta A}{A}\right) = \frac{632{,}5}{1{,}76\times 10^3} \pm \frac{632{,}5}{1{,}76\times 10^3}\left(\frac{0{,}1}{632{,}5} + \frac{0{,}15\times 10^3}{1{,}76\times 10^3}\right)$$

   $\sigma = (0,359 \pm 0,031)\frac{g}{cm^2}$ (tres cifras significativas)

   La densidad superficial del disco se encuentra con alta probabilidad en el intervalo: $\sigma = (0,328 - 0,390)\frac{g}{cm^2}$.