



**Universidad de Antioquia**  
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales.  
Instituto de Física.

# **Laboratorio de Física I e Integrado**

**Elaborado por:  
Jorge Mahecha G.  
Daniel Jaramillo A.**

(Recopilado y adaptado por  
Nelson Vanegas A.)

Medellín, 2013



# Normas de Trabajo en el Laboratorio

1. La asistencia y puntualidad a las sesiones del laboratorio, son obligatorias.
2. Las prácticas son realizadas por los estudiantes en grupos conformados en la primera sesión, los cuales no deben cambiarse sin la autorización del profesor.
3. Cada estudiante tiene la obligación de leer cuidadosamente la guía de la correspondiente práctica en forma individual antes del inicio de la sesión de laboratorio, y debe saber qué va a hacer.
4. Ningún estudiante podrá retirarse del laboratorio antes de que el grupo haya terminado completamente la toma de datos y los ejercicios asignados por el profesor.
5. Cada grupo de trabajo debe tomar de la mesa central los elementos necesarios que le hacen falta para ejecución de la práctica, de igual manera allí debe regresarlos al finalizar la práctica.
6. Cada estudiante debe ser muy cuidadoso en la manipulación de los aparatos y elementos de laboratorio. En caso de dudas debe consultar al profesor. Los daños y pérdidas en materiales y equipos de laboratorio serán asumidos por el estudiante o por los miembros del grupo que los recibió.
7. Está prohibido fumar y/o comer en las aulas de laboratorio o realizar otras acciones que dificulten el desarrollo de las sesiones.
8. La evaluación se realiza con base en los informes semanales elaborados por cada grupo y en los exámenes individuales. Todos los miembros del grupo deben participar en la elaboración de cada uno de los informes.
9. En cada experiencia el profesor determinará el contenido del informe, por defecto se supone el señalado en la guía. **No olvide que las medidas y resultados deben llevar su respectiva incertidumbre como se explica en este manual.**



# Errores e Incertidumbre

La física, al igual que todas las ciencias, es un conocimiento lógicamente estructurado sobre un conjunto amplio de fenómenos íntimamente relacionados. Como tal requiere de definiciones, postulados y leyes, los cuales enmarcados en una teoría procuran describir la estructura de una parte de la naturaleza. Por tanto su objetividad debe estar regulada por la verificación experimental y la predicción de nuevos fenómenos.

## Magnitudes, Unidades y Medidas

La descripción ingenua del mundo observado a nuestro alrededor hace uso de calificativos opuestos: grande-pequeño, muchos-pocos, ancho-estrecho, duro-suave, grave-agudo, liviano-pesado, claro-oscuro, rápido-lento, efímero-durable, etc., para denotar diferentes propiedades y comportamientos de los objetos. Sin embargo, estas descripciones cualitativas son relativas e imprecisas pues un objeto puede ser grande comparado con uno mas pequeño y al mismo tiempo será pequeño comparado con uno de mayor tamaño. Por tanto, es conveniente tomar un objeto o sistema que, con respecto a esa propiedad, nos sirva de referencia. La propiedad comparable de este objeto constituye un patrón. La elaboración de una escala comparativa basada en un patrón determinado nos permite establecer cuantitativamente la propiedad correspondiente en otros objetos.

El proceso de comparación con algún patrón es la esencia de la medida. El uso de escalas basadas en los patrones facilita el proceso de medida. Los objetos que portan escalas comparativas son denominados instrumentos de medida. Cualquier propiedad susceptible de ser medida es llamada magnitud física.

*Ejemplos de patrones de tiempo pueden ser el intervalo que existe entre dos amaneceres (día), o entre dos lunas llenas (mes), entre dos primaveras (año), etc; patrones de longitud pueden ser el tamaño de la última falange del pulgar (pulgada), la máxima extensión entre los dedos de una mano (cuarta), la máxima extensión entre las manos (brazada), etc.*

Los patrones en sí mismos y sus múltiplos y submúltiplos constituyen unidades de medida. Por ejemplo: la semana que son siete días, el siglo que corresponde a cien años y la hora que es la veinticuatroava parte del día, son unidades de tiempo.

En el sistema métrico decimal los múltiplos y submúltiplos usuales corresponden a potencias enteras de 10. Los nombres correspondientes a estos múltiplos y submúltiplos están relacionados con prefijos que se le añaden a la unidad. Estos prefijos están dados a continuación:

$10^1 \rightarrow$	Deca	$10^{-1} \rightarrow$	deci
$10^2 \rightarrow$	Hecto	$10^{-2} \rightarrow$	centi
$10^3 \rightarrow$	Kilo	$10^{-3} \rightarrow$	milí
$10^6 \rightarrow$	Mega	$10^{-6} \rightarrow$	micro
$10^9 \rightarrow$	Giga	$10^{-9} \rightarrow$	nano
$10^{12} \rightarrow$	Tera	$10^{-12} \rightarrow$	pico

Es usual asociar a cada magnitud física una dimensión. Por ejemplo, la altura de una persona tiene dimensión de longitud y su peso dimensión de fuerza. El producto o división de dimensiones constituyen nuevas dimensiones, sin embargo, de ninguna manera está definida la suma de cantidades con dimensiones diferentes. Es un buen hábito, por tanto, probar la consistencia dimensional de las expresiones matemáticas, esto es, que todos los sumandos de una expresión tengan la misma dimensión.

En dinámica existen básicamente tres dimensiones fundamentales: longitud ( $L$ ), tiempo ( $T$ ) y masa ( $M$ ), todas las otras dimensiones se pueden reducir a productos de las potencias de estas. En el sistema internacional de medidas (SI) las unidades asociadas a esas magnitudes fundamentales son respectivamente el metro (m), el segundo (s) y el kilogramo (Kg).

## Errores en la Medida

Para el examen de un fenómeno o proceso es conveniente provocarlo de manera controlada, esto es realizar un experimento, y observarlo utilizando instrumentos de medición, quienes nos permiten traducir a números reales las distintas magnitudes físicas involucradas en la experiencia. Estos números satisfarán ciertas relaciones matemáticas que pueden estar contenidas en las leyes físicas. Sin embargo, como en todo procedimiento humano el montaje experimental y el proceso de medición no son perfectos lo que conduce a errores e incertidumbres en los valores de las magnitudes medidas, por tanto las leyes podrán parecer satisfechas solo de forma aproximada. La estimación de estas deficiencias puede llevarnos a valorar adecuadamente nuestras experiencias y a determinar la validez de las leyes físicas subyacentes en lo observado. El error en la medida está determinado por la discrepancia que existe entre los valores real y observado de la magnitud considerada. Basicamente los errores son de tres tipos: de escala, aleatorios y sistemáticos.

## **Errores de Escala**

Este tipo de error está determinado por la precisión del aparato de medida. Es entendible que con una simple regla cuya división mínima es un milímetro no es posible medir fracciones de esta cantidad con total certeza, sin embargo, casi siempre podemos asegurar con toda confianza que el valor de la longitud de un objeto medido con este instrumento estará entre dos múltiplos consecutivos de esta unidad. En ese caso el error en la medida no excederá la mínima división de la escala utilizada.

## **Errores Aleatorios**

En muchos experimentos cuando se tienen instrumentos de alta precisión, al realizar medidas consecutivas de una cierta magnitud se pueden obtener valores diferentes de la medida debido a ciertos factores que, de manera sutil pero perceptible por nuestro instrumento, pueden afectar la medida en forma aleatoria. Por eso estos errores se denominan aleatorios. Un ejemplo de ello es cuando manualmente debemos accionar un cronómetro para determinar un intervalo de tiempo, siendo nuestro tiempo de reacción mayor que la incertidumbre de este instrumento. Para obtener una buena estimación de la medida, debemos realizar la medición varias veces con lo que obtenemos una región donde, con cierta confianza, podemos afirmar que allí se halla el valor real.

## **Errores Sistemáticos**

Contrariamente a los aleatorios existen otros factores que sistemáticamente producen error en la medida, puesto que dependen del sistema o montaje experimental, por esto ellos son llamados sistemáticos. Este es el caso de cuando se tienen instrumentos de medida descalibrados. También dentro de ese tipo de errores están incluidos los inducidos por los modelos teóricos cuando son usados para medidas indirectas. Por ejemplo, cuando queremos hallar la profundidad de un pozo midiendo el intervalo de tiempo que existe entre el momento en que se deja caer una piedra en su interior y, el instante en que se escucha el chasquido de la piedra al golpear el fondo, utilizando las ecuaciones de caída libre para el descenso de la piedra; en este caso no considerar la fricción del aire ni el retardo del sonido produce errores sistemáticos, que pueden despreciarse en caso de no requerirse mucha exactitud.

## **Incertidumbre**

Debido a los errores los valores obtenidos, como resultado de los procesos de medida, poseen incertidumbre. La utilización de instrumentos en buen estado, el manejo adecuado de los aparatos y la consideración de correcciones a los modelos ideales nos permite reducir los errores sistemáticos; sin embargo, no es posible deshacernos totalmente de los errores

aleatorios y de escala. Mientras más preciso es nuestro instrumento de medida mas significativos se vuelven los errores aleatorios. Debido a esta incertidumbre el resultado de una medida, en ciertas unidades, no puede ser un número exacto, sino que debe ser un intervalo numérico; esto es, un rango de valores donde podemos afirmar con mucha confianza que allí se halla el valor de la medida. La incertidumbre puede ser definida como el semiancho del mínimo intervalo donde podemos afirmar con relativa seguridad (mas o menos con un 70 % de confianza) que allí se alla el valor real de la medida real.

Al hacer varias medidas de una misma magnitud, bajo las mismas condiciones en general, distinguimos dos casos: o las medidas repetidas dan valores iguales o valores diferentes. En el primer caso dominan los errores de escala, entonces la incertidumbre corresponderá a una fracción (1, 2/3 ó 1/2 ) de la división mínima del instrumento de medida. En el segundo caso dominan los errores aleatorios y la incertidumbre corresponderá a la desviación cuadrática media (desviación estándar) de las medidas.

Para un conjunto de valores  $x_1, x_2, \dots, x_n$  arrojados por medidas repetidas de una misma magnitud la desviación estándar está definida como

$$\Delta x = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2},$$

donde  $\bar{x}$  es el promedio de las medidas,

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i.$$

## Reporte de Medidas

Las incertidumbres deben ser expresadas en forma explícita en nuestro reporte de la medición. Expresaremos el resultado de una medida ( $m$ ) por el valor medio ( $\bar{m}$ ) más o menos la incertidumbre ( $\Delta m$ ):  $m = \bar{m} \pm \Delta m$ . Esto quiere decir que la medida real se halla con alta probabilidad en el intervalo  $(\bar{m} - \Delta m, \bar{m} + \Delta m)$ . A la razón  $\Delta m/\bar{m}$  la llamaremos incertidumbre relativa, esta se puede escribir en forma porcentual como  $\Delta m/\bar{m} \times 100\%$

*Ejemplo: queremos estimar la velocidad de caída de una esfera en un medio viscoso, midiendo el tiempo que tarda en caer una distancia determinada. El experimento se repite varias veces bajo las misma condiciones y los tiempos medidos en cinco lanzamientos son: 10.01s, 10.03s, 10.07s, 10.04s y 10.05s; vemos que la imprecisión del cronómetro, 0.01s, es inferior a los errores aleatorios, por tanto la incertidumbre viene dada por estos errores y nuestro reporte del tiempo debe ser  $(10.04 \pm 0.02)$ s, donde 10.04s es el valor medio y 0.02s la desviación estándar de las medidas. Ahora supongamos que contamos con una fotopuerta que nos permite accionar el cronómetro sin errores perceptibles, en este caso las cinco medidas del tiempo podrían ser 10.06s en todos los casos, por tanto ahora la incertidumbre de la medida está dada por la resolución del aparato: 0.01s y nuestro reporte del tiempo debe ser  $(10.06 \pm 0.01)$ s*

## Valor aceptado

Es imposible conocer el valor exacto de una medida con total presición debido tanto a los errores sistemáticos como a los aleatorios y de escala. Sin embargo podemos suponer que el valor de una cierta magnitud tiene un valor real muy aproximado a lo que llamaremos valor aceptado, que puede ser el resultado de consideraciones teóricas (por ejemplo el valor del número  $\pi$ ) o de múltiples mediciones (como por ejemplo, el valor de la gravedad, la masa del electrón, etc.).

Los valores aceptados de constantes físicas se obtienen realizando muchos experimentos con montajes diferentes, con el fin de eliminar los errores sistemáticos, porque, aunque los errores sistemáticos en un mismo montaje afectan el valor de la medida de forma invariable, para diferentes montajes actúan de manera aleatoria. En ese caso el valor aceptado se obtiene a través de lo que se conoce como promedio ponderado. Si  $\{\bar{m}_1 \pm \Delta m_1, \dots, \bar{m}_n \pm \Delta m_n, \dots\}$  son los valores, digamos de la gravedad, obtenidos en  $n$  diferentes experimentos entonces el valor aceptado se obtiene como

$$\bar{M} = \frac{\sum_{i=1}^n \bar{m}_i / (\Delta m_i)^2}{\sum_{i=1}^n 1 / (\Delta m_i)^2}$$

y la incertidumbre correspondiente es

$$\Delta M = \sqrt{\frac{1}{\sum_{i=1}^n 1 / (\Delta m_i)^2}}$$

Con estas definiciones se consigue darle mayor peso a las medidas más precisas y menor peso a las más imprecisas por eso  $\bar{M}$  es llamado el promedio ponderado.

## Error relativo

Si conocemos el valor aceptado de una medida, o el valor teórico predicho por un modelo, podemos evaluar la exactitud de nuestra medida, la medida será exacta si el valor aceptado o teórico está dentro del intervalo de la medida. En otras palabras diremos que nuestra medida es exacta si el error relativo con respecto al valor aceptado es menor que la incertidumbre relativa de la medida, donde el error relativo esta definido a traves de

$$E_m = \frac{|M - \bar{m}|}{M},$$

Siendo  $M$  es el valor aceptado. También hablaremos de diferencia porcentual que simplemente corresponde al error relativo expresado de forma porcentual.

## Exactitud y Precisión

La exactitud de una medición está determinada por el hecho que el valor real aceptado esté contenido en el intervalo arrojado por la medida. La medida se considerará inexacta si el valor real aceptado está por fuera de este intervalo. La precisión de la medida está relacionada con la incertidumbre relativa, y será tanto más precisa cuanto más pequeña sea esta. Por ejemplo, siendo mi altura 1.75m, yo puedo afirmar que mi estatura esta entre uno y dos metros (si me comparo con un bastón que tiene un metro de longitud) con lo cual estoy haciendo una descripción exacta pero imprecisa (en este caso mi altura puede ser escrita como  $(1.5 \pm 0.5)$ m, donde la incertidumbre relativa es  $0.5/1.5=0.33$ ); pero si yo digo que mi estatura es  $(1.77 \pm 0.01)$ m (si al medirme no me quite los zapatos) estoy dando un valor más preciso pero inexacto (la incertidumbre relativa es  $0.01/1.77=5.6 \times 10^{-3}$ ).

Los errores sistemáticos son los responsables de la inexactitud en la medida y los aleatorios y de escala de la imprecisión.

En un experimento bien realizado cada una de las cantidades a medidas, directa o indirectamente, debe presentar un error relativo menor que su incertidumbre relativa. Este será nuestro criterio de exactitud.

## Propagación de Incertidumbres

Las leyes físicas, se expresan a través de ecuaciones que relacionan magnitudes, es por esto importante saber como se expresa la incertidumbre de una función de magnitudes físicas debido a las incertidumbres de estas. Si suponemos que las incertidumbres relativas son pequeñas podemos hacer uso de la siguiente aproximación:

$$f(\bar{x} \pm \Delta x) \simeq f(\bar{x}) \pm \frac{df}{d\bar{x}} \Delta x \equiv \bar{f} \pm \Delta f,$$

así el valor medio de  $f$  y su incertidumbre son

$$\bar{f} = f(\bar{x}) \text{ y } \Delta f = \left| \frac{df}{d\bar{x}} \right| \Delta x.$$

Por simple extrapolación cuando se tenga una función  $f$  de dos magnitudes observadas  $(x, y)$  con  $x = \bar{x} \pm \Delta x$  y  $y = \bar{y} \pm \Delta y$  tendremos que  $f = \bar{f} \pm \Delta f$  con

$$\bar{f} = f(\bar{x}, \bar{y})$$

y

$$\Delta f = \left| \frac{\partial f}{\partial \bar{x}} \right| \Delta x + \left| \frac{\partial f}{\partial \bar{y}} \right| \Delta y,$$

donde  $\partial f / \partial x$  es la derivada parcial de  $f$  con respecto a  $x$  evaluada en  $x = \bar{x}$  que corresponde a una derivada manteniendo a  $y$  constante.

Con las propiedades arriba enunciadas no es difícil comprobar las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned}\Delta x^n &= |n| x^{n-1} \Delta x \\ \Delta(x \pm y) &= \Delta x + \Delta y \\ \Delta(xy) &= xy \left( \frac{\Delta x}{x} + \frac{\Delta y}{y} \right) \\ \Delta\left(\frac{x}{y}\right) &= \frac{x}{y} \left( \frac{\Delta x}{x} + \frac{\Delta y}{y} \right) \\ \Delta(x^n y^m) &= x^n y^m \left( |n| \frac{\Delta x}{x} + |m| \frac{\Delta y}{y} \right).\end{aligned}$$

La propagación de incertidumbres expresada en las fórmulas anteriores es la que usualmente se utiliza con las incertidumbres asociadas a los errores de escala. Las incertidumbres provenientes de los errores aleatorios (cuando se dan valores diferentes para medidas repetidas) se deben tratar de forma diferente. En este caso la incertidumbre, para una función de dos variables  $f(x, y)$ , viene dada por

$$\Delta f = \sqrt{\left( \frac{\partial f}{\partial \bar{x}} \Delta x \right)^2 + \left( \frac{\partial f}{\partial \bar{y}} \Delta y \right)^2},$$

que en los casos particulares de sumas o productos toma las siguientes formas

$$\Delta x^n = |n| x^{n-1} \Delta x$$

$$\begin{aligned}\Delta(x \pm y) &= \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \\ \Delta(xy) &= xy \sqrt{\left(\frac{\Delta x}{x}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{y}\right)^2} \\ \Delta\left(\frac{x}{y}\right) &= \frac{x}{y} \sqrt{\left(\frac{\Delta x}{x}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{y}\right)^2} \\ \Delta(x^n y^m) &= x^n y^m \sqrt{\left(n \frac{\Delta x}{x}\right)^2 + \left(m \frac{\Delta y}{y}\right)^2}.\end{aligned}$$

## Cifras Significativas

Debido a la presencia de incertidumbre en las medidas, no es práctico expresarlas con muchas cifras numéricas o dígitos, pues no todas tendrán significado, esto es, si una medida tiene una incertidumbre del uno por ciento, la cuarta cifra numérica que está relacionada con precisiones mayores que el uno por mil, no tiene ningún significado.

Los ceros a la izquierda no corresponden a cifras significativas, en tanto que los que están a la derecha pueden tenerlo.

*Ejemplo: desde el punto de vista experimental las cantidades 5m, 5.0m y 5.00m son diferentes; mientras la primera tiene una cifra significativa, la segunda tiene dos y la tercera tres. Las mismas cantidades escritas en kilómetros serían 0.005km, 0.0050km y 0.00500km. Supongamos que queremos expresar la última cantidad en milímetros, si decimos que es equivalente a 5000mm le estaríamos aumentando una cifra significativa, por tanto para evitar confusiones es conveniente la notación científica, así escribiremos  $5.00 \times 10^3$  mm o equivalentemente  $5.00 \times 10^{-3}$  km.*

Las constantes teóricas que aparecen en las fórmulas físicas o geométricas poseen un número infinito de cifras significativas, p.ej. en la expresión de la energía cinética se tiene un factor de un medio que multiplica a la masa por la velocidad al cuadrado, este factor de un medio no es 0.5 sino 0.5000000000000000000000000000000... etc. (aunque no lo escribiremos así). Esto debe ser tenido en cuenta para el buen manejo de las cifras significativas.

Para simplificar el manejo de datos asumiremos que **las incertidumbres asociadas a todas las medidas realizadas en este laboratorio no tendrán más de dos cifras significativas, utilizaremos dos cifras significativas solo cuando la primera cifra significativa sea menor que tres**, de acuerdo a esto, solo la última cifra significativa de los resultados experimentales será incierta. Considerando que en las prácticas que siguen tendremos exactitudes del 1-5% la totalidad de los datos obtenidos se presentarán con no más de cuatro cifras significativas.

Las dos principales reglas para el uso adecuado de cifras significativas son las siguientes:

- Cuando se **multiplican** o dividen varias cantidades, el número de cifras significativas en el resultado es igual al número de cifras significativas del número de menos cifras significativas que participa en la operación.
- Cuando se **suman** o **restan** números, el número de decimales significativos del resultado debe ser igual al número de decimales significativos del sumando que tiene menos decimales.

Al hacer la reducción de cifras se ha de tener en cuenta las propiedades del redondeo.

*Ejemplo: supongamos que se quiere estimar el área de una placa rectangular que mide  $(51.3 \pm 0.1)cm$  de ancho y  $(0.7 \pm 0.1)cm$  de largo, no es correcto entonces expresar el área como  $(35.91 \pm 5.13)cm^2$  ni como  $(35.9 \pm 5.1)cm^2$  sino que lo correcto es  $(36 \pm 5)cm^2$ .*

Fíjese que en este ejemplo se rompió la regla de las cifras significativas para el producto de los valores medios, sin embargo no se la violó para las incertidumbres. De ahora en adelante el criterio para el número de cifras significativas de los valores medios es que estos tengan el mismo número de decimales significativos que las incertidumbres, donde estás tendrán, a lo sumo, dos cifras significativas y satisfarán las reglas arriba enunciadas.



# Práctica 1

## Medidas, Errores, Gráficas y Modelamiento.

### Objetivo

Hacer mediciones de algunas magnitudes en varios objetos utilizando diferentes instrumentos de medida, usar esas medidas para estudiar un modelo sencillo de un sistema físico analíticamente y gráficamente y reportar los resultados especificando las incertidumbres.

### Equipo

- Calibrador
- Flexómetro o Regla
- Arandelas metálicas
- Balanzas de diferente tipo
- Tabla rectangular de madera

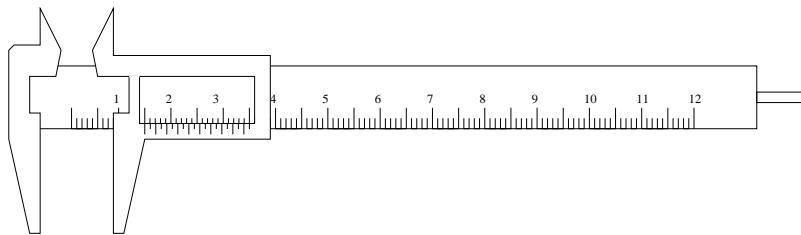
### Medida de longitudes y áreas.

Se medirán los diámetros y longitudes necesarias para determinar el área de la tabla de madera y de las arandelas.

**El calibrador** o pie de rey es un instrumento que consta de dos piezas que pueden desplazarse y permite medir longitudes de hasta 12cm con una precisión de 1/20mm. Una de las piezas consta de una escala con divisiones de milímetros y la otra posee un "nonio",

esto es, una escala con diecinueve divisiones, de cero a nueve y medio, que permite aumentar la precisión de la medida.

Al medir una longitud ajustamos la separación de las piezas del calibrador a dicha longitud. La raya que indica el cero en la segunda pieza marca el número de milímetros de la separación; y el orden de la raya del nonio que más coincide con una de las de la primera pieza, corresponde al número de "veintésimas" de milímetro que restan para la medida precisa.



**Figura 1.1: Calibrador**

## Procedimiento Sugerido

1. Mida los diámetros de cada una de las arandelas utilizando el calibrador y la regla. Se sugiere que tome tres medidas por arandela en diferentes partes. Cada persona debe tomar medidas independientes y consignarlas por escrito ordenadamente. Idealmente deben haber unas 100 medidas independientes para las arandelas.
2. Mida igualmente las distancias necesarias para determinar el área del rectángulo de madera. Al final debe contar con unas 15 medidas de cada una de las distancias en la tabla tomadas de forma independiente.
3. Tome la medida de la masa de las arandelas de tal forma que al final cuente con unas 30 medidas.

### 1.0.1. Medidas de áreas y errores en la medida.

Determine las área media de las arandelas y la tabla y el error en la misma usando lo explicado en los documentos anexos (media, desviación estándard y error estándard). Si las medidas son menos de 30 use el factor de Student adecuado y exprese todas las medidas como  $X \pm \Delta X$ . Tenga igualmente en cuenta la discusión sobre cifras significativas presentada. Proceda similarmente para la masa de las arandelas. Al final pregúntese, cuál es la masa, cuál el área de las arandelas y de la tabla?

### 1.0.2. Modelo sencillo de un sistema físico.

Un modelo sencillo de la desintegración de una muestra radioactiva se puede construir usando una tabla de madera, con dos líneas marcadas en él y con al menos 100 arandelas circulares que se agitan. Consideraremos que una arandela "se desintegra" cuando, luego de agitarse, queda sobre una de las líneas. Este evento es aleatorio y cada vez que el sistema se agita produce resultados distintos. Sin embargo, cuando hay  $N$  arandelas en el marco y se repite muchas veces el experimento el número de desintegraciones tiende a converger a un cierto valor. Entre más arandelas haya, más arandelas quedan tocando una línea.

Ahora dado que el área de las arandelas es pequeña comparada con la de la tabla, la probabilidad de que al tirarla al azar caiga en una línea es igualmente pequeña. En general se define la probabilidad de un evento como

$$p = \frac{\text{NÚMERO DE VECES QUE SUCEDE O ÉXITOS}}{\text{NÚMERO DE VECES QUE SE HACE EL EXPERIMENTO}}$$

Es claro que  $p$  está entre 0 y 1 y no tiene unidades. En este caso  $p$  es próximo a cero para cada arandela.

Supongamos que de  $N$  arandelas en un momento dado (es decir, para un tiempo  $t$ ), se desintegra un número  $\Delta N'$  (quedan tocando una línea al agitarse la tabla) y que al desintegrarse, se retiran del cuadro ese número  $\Delta N'$ . Despues de agitarse varias veces e irse retirando en cada caso un número de arandelas igual al de las que se desintegran, van quedando cada vez menos arandelas en el cuadro. La cantidad  $N$  varía con el tiempo, es una función  $N(t)$ . Tomamos como tiempo el número de veces que se ha repetido el ensayo de agitar y retirar ( $t = 0$  significa el número original de arandelas,  $t = 1$  será cuando se ha agitado una vez, etc.). Ahora, como hay menos arandelas en cada ensayo, la cantidad de arandelas que se desintegran disminuye también con el tiempo.

Si la probabilidad de que de  $N$  arandelas se desintegren  $\Delta N'$  es  $\Delta P$ , entonces  $\Delta P = \Delta N'/N$  en un momento dado. (Experimentalmente  $\Delta N'$  debe medirse muchas veces pues en cada ensayo el número es aleatorio.) De lo cual tendremos que

$$\frac{\Delta P}{\Delta t} = \frac{\Delta N'}{N \Delta t}.$$

Ahora,  $p$  no depende del tiempo (cada arandela se desintegra de forma independiente). Por lo que

$$\frac{\Delta P}{\Delta t} = \frac{\Delta N'}{N \Delta t} = \kappa = \frac{1}{\tau}; \quad (1.1)$$

y por unidades decimos que  $\kappa$  debe tener unidades  $t^{-1}$  y por ende definimos  $\tau$  como en la ecuación.

Si empezamos el experimento con  $N(0)$  arandelas este número es constante. La suma de las arandelas desintegradas más las arandelas que aun no se desintegran deben ser justamente  $N(0)$ , es decir  $N(0) = N(t) + N'(t)$ . Y si vamos a repetir muchas veces el experimento

podemos tomar a  $t$  como una variable continua, de tal forma que  $\Delta$  puede aproximar la derivada. Así entonces  $dN(0) = 0$  (es una constante) y  $dN = -dN'$  por lo que

$$\frac{dN}{dt} = -\kappa N \quad N(t) = N(0)e^{-\kappa t}. \quad (1.2)$$

Los átomos en una muestra radioactiva se comportan de manera similar. La probabilidad de que cada uno se desintegre es constante y pequeña. Igualmente, en una muestra, una vez un átomo se desintegra, el número de átomos no desintegrados va disminuyendo como en nuestro modelo. El número de átomos no desintegrados varía como el  $N(t)$  de nuestro modelo.

### Experimento sugerido y análisis.

Debemos tomar la tabla de madera, ponga al rededor de 100 arandelas y agite. Cuentamos el número de arandelas que se desintegran y anotamos estos datos. Repetimos luego cada ensayo varias veces de tal forma nos dé confianza de que la media de desintegraciones para cada  $t$  esté muy cercana a la media si el experimento se repitiera miles de veces. Hay que usar los anexos dados para saber cómo poder tener esa confianza. Luego retiramos el número de arandelas que en promedio se desintegró para este  $N$  y  $t$ ; vamos entonces a tener un dato  $N(t = 1)$ , de aquellas arandelas no desintegradas todavía para  $t = 1$  ensayos. Se puede repetir hasta que haya muy pocas arandelas en la tabla y  $t$  (número de ensayos) sea grande.

Puede hacer gráficos en papel de milimetrado, log-log y semilog. En el primer caso de papel milimetrado, por ejemplo, es posible tomar (trazar) la pendiente de la gráfica obtenida en varios puntos, evaluarla usando  $m = \Delta y / \Delta x$  y graficarla contra  $t$ , nuevamente en papel milimetrado. Si usamos la ecuación (1.2) esta gráfica da información importante del experimento. De las gráficas en papel log-log y semilog podemos igualmente extraer información del modelo. Use barras para marcar el error en los datos obtenidos para  $N$  en cada caso.

Encuentre  $N(t)$  en general y explique el error en  $N$  para un momento dado usando los datos y sus desviaciones estándard. Es importante encontrar  $\tau$  y  $\kappa$  e interpretarlos. A tener en cuenta, sería importante para el modelo correlacionar las áreas de las arandelas y la tabla (o sus relaciones) con  $\kappa$  dentro de los márgenes de error del modelo.

Todo estos datos y análisis, así como los datos y cálculos son parte del informe así como las gráficas y conclusiones. Excel tiene funciones de media y desviación estándard que facilitan todos los cálculos, las puede usar pero no debe dejar de reportar lo que hace aún si usa un *software* que facilita las cosas.

Este tipo de guía se provee solo para esta primera práctica, en las sucesivas Ud. deberá determinar sus procedimientos y análisis con base en las propuestas de proyecto presentadas por los docentes.

# **ANEXOS**

ples, usando la fórmula (1.12):

$$\Delta(x \pm y) = \Delta x + \Delta y \quad (1.16a)$$

$$\Delta(x \cdot y) = x \cdot \Delta y + y \cdot \Delta x \quad (1.16b)$$

$$\Delta\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{x \cdot \Delta y + y \cdot \Delta x}{y^2} \quad (1.16c)$$

$$\Delta \sqrt{x} = \frac{\Delta x}{2 \sqrt{x}} \quad (1.16d)$$

$$\Delta \ln(x) = \frac{\Delta x}{x} \quad (1.16e)$$

$$\Delta x^a = a x^{a-1} \Delta x \quad (1.16f)$$

$$\Delta\left(\frac{x \cdot y}{z}\right) = \frac{y}{z} \Delta x + \frac{x}{z} \Delta y + \frac{x \cdot y}{z^2} \Delta z. \quad (1.16g)$$

Se sobreentiende que los lados derechos en estas fórmulas serán evaluados tomando a  $x$ ,  $y$  y  $z$  en valor absoluto. Estas fórmulas son válidas para el cálculo del error cuando se realiza una única medida, y son aplicables, según veremos, también en el caso de medidas repetidas cuando no exista correlación entre las variables  $x$  y  $y$ .

## 1.4. CÁLCULO DEL ERROR EN UNA CANTIDAD MEDIDA VARIAS VECES

Cuando una medida se realiza varias veces, utilizando un instrumento de gran sensibilidad, precisión y exactitud, el error se disminuye a medida que se aumenta el número de repeticiones de la medida. El resultado en este caso depende no sólo del instrumento sino de consideraciones de naturaleza estadística.

En particular se halla que el error en una función **no** se puede en principio calcular mediante la fórmula (1.12), la cual sin embargo sigue siendo útil en muchos casos.

### 1.4.1. La distribución normal

En la introducción se señaló que el resultado de una medida es un fenómeno de naturaleza aleatoria que consiste en la obtención de un número al azar dentro de un intervalo dado por la ecuación (1.2). Cuando en un experimento se toma varias veces la medida de una cantidad, realmente se está extrayendo una **muestra** con la pretensión de que sea representativa del conjunto infinito de resultados posibles.

Supongamos que al medir  $n$  veces una cierta cantidad física  $X$ , en idénticas condiciones, se obtiene una serie de  $n$  valores  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . Como la aparición de un número particular  $x$  dentro de los  $x_i$  es algo puramente fortuito, tiene sentido preguntarse acerca de la *probabilidad* de hallar un resultado  $x$  al medir  $n$  veces la cantidad física  $X$ . Lo que primero

enseña la estadística es a realizar histogramas, o sea a representar el número  $f_x$  de veces (frecuencia) que se obtiene el valor particular  $x$  dentro del conjunto de las  $n$  cantidades  $x_i$ . El histograma o representación gráfica de las parejas  $(x, f_x)$ , no tiene la misma apariencia azarosa que presenta el conjunto de números medidos  $x_i$ , sino que trata de adaptarse a una función definida. La “envolvente” del conjunto de barras del histograma tiende a una curva suave cuando el número de datos aumenta, o sea tiende a una función de la variable continua  $x$ . La dependencia funcional entre  $x$  y la probabilidad  $f_x/n$  de encontrar ese  $x$  se denomina *función de distribución de probabilidades*.

Se habla de variables aleatorias *discretas* o *continuas* de acuerdo a si los valores que puede tomar  $X$  son contables (por ejemplo: 1, 2, 3, 4, ...) o continuos (por ejemplo:  $x \in [-1, 1]$ ). Así, el número de individuos de una especie biológica es una variable discreta y el peso de uno de ellos es una variable continua. Se ha encontrado que las medidas de variables discretas y continuas se acomodan a funciones de distribución diferentes, y que la mayoría de las variables aleatorias continuas satisfacen la *función de distribución normal*. Muchas mediciones en física corresponden a variables continuas, o a variables discretas que se comportan de manera aproximadamente continua, y pueden describirse estadísticamente usando la distribución normal.

Una variable aleatoria continua  $X$  que toma valores dentro del intervalo  $[-\infty, +\infty]$  se dice que obedece la distribución normal si su ley de probabilidades tiene la siguiente forma:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-(x-\bar{x})^2/2\sigma^2}, \quad (1.17)$$

donde las cantidades  $\sigma$  y  $\bar{x}$  son los parámetros de la distribución (ver figura 1.2).

#### 1.4.2. Valor medio y medidas de dispersión

Uno de los problemas de la estadística consiste en encontrar un conjunto pequeño de números que sirvan para caracterizar como un todo a un conjunto muestral de  $n$  cantidades,  $x_1, x_2, \dots, x_n$ .

El valor medio es el más simple e importante de dichos indicadores. La mayoría de los  $x_i$  tienen un valor que es cercano al valor medio. Otro indicador es el error absoluto. Hay muchas definiciones posibles de estos indicadores.

La definición del valor medio que más frecuentemente se usa es la *media aritmética* o *valor medio aritmético*. La media aritmética del conjunto de medidas repetidas mencionado en 1.4.1 se define mediante la relación

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i. \quad (1.18)$$

Puede ocurrir que entre los  $x_i$  haya varios que se repiten. Entonces podemos formar un conjunto con todos los valores diferentes que hay entre los  $x_i$ . Este conjunto tendrá  $k$  elementos

2

$x_i$ , y cada uno de estos  $x_i$  estará repetido  $n_i$  veces ( $\sum_{i=1}^k n_i = n$ ). En este caso la media aritmética se puede escribir como

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k n_i x_i. \quad (1.19)$$

La media aritmética tiene las siguientes tres propiedades importantes:

1. La suma de las desviaciones de los datos respecto a la media aritmética vale cero,

$$\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) = 0. \quad (1.20)$$

2. Si  $x_o$  es un valor arbitrario diferente de  $\bar{x}$ , se cumple

$$\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \leq \sum_{i=1}^n (x_i - x_o)^2, \quad (1.21)$$

es decir, la suma de los cuadrados de las desviaciones respecto a la media es menor que la suma de los cuadrados de las desviaciones respecto a cualquier otro valor.

3. Si  $Z$  es una variable aleatoria que depende *linealmente* de otras dos variables aleatorias  $X$  y  $Y$ , es decir  $Z = a \cdot X + b \cdot Y$ , entonces los valores medios de  $X$ ,  $Y$  y  $Z$  están relacionados de la misma manera  $\bar{Z} = a \cdot \bar{X} + b \cdot \bar{Y}$ .

Igual que en el caso de medidas individuales se desea expresar el resultado del conjunto de medidas repetidas en la forma

$$x = \bar{x} \pm \Delta x. \quad (1.22)$$

La cantidad  $\Delta x$  se puede relacionar con el “ancho” de la distribución. Hay ambigüedad en la definición del ancho, que simplemente es un indicativo del rango en el cual es más probable obtener el resultado de la medida. Por ejemplo, si el  $n$  no es muy grande, el ancho podría definirse como el valor absoluto de la mayor distancia entre un dato y la media. Es decir, puede tomarse como el mayor valor entre  $|\bar{x} - x_{\min}|$  y  $|\bar{x} - x_{\max}|$ . Este procedimiento sobre-estima el error absoluto cuando el número de datos es grande, pues dado su carácter aleatorio es posible encontrar valores muy alejados de la media. Por esta razón se emplea el indicador llamado *desviación estándar*.

La *dispersión* de los datos respecto al valor medio es un indicador que depende de las separaciones entre los datos y el valor medio,  $x_i - \bar{x}$ . Por ejemplo en el conjunto de números  $\{1, 3, 6, 9, 11\}$  el valor medio es 6 y las desviaciones respecto a la media son  $\{-5, -3, 0, 3, 5\} = \{1 - 6, 3 - 6, 6 - 6, 9 - 6, 11 - 6\}$ . El valor medio de estas desviaciones es cero. El valor medio de los valores absolutos de estas desviaciones es 3,2. Las desviaciones cuadráticas son

$\{25, 9, 0, 9, 25\}$  y el valor medio de las desviaciones cuadráticas es 13,6. La raíz cuadrada de la media aritmética de las desviaciones al cuadrado es  $\sqrt{13,6} = 3,7$ , valor que se aproxima al de la media de los valores absolutos de las desviaciones.

La *desviación estándar* es otra función de las desviaciones que sirve de indicador de la dispersión. Se define como

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}. \quad (1.23)$$

En la definición de  $\sigma$  aparece la suma de las desviaciones al cuadrado dividida por  $n - 1$ , o sea que la desviación estándar **no** es lo mismo que la raíz cuadrada del promedio de los cuadrados de las desviaciones. Se la denomina también *error cuadrático medio de los resultados de las medidas individuales*. En esta definición se asume que una muestra de tamaño  $n$  ha sido tomada de una población de tamaño mucho mayor y que por tanto la varianza  $\sigma^2$  de la muestra, calculada mediante (1.23), dá una aproximación a la varianza de la población total; como el valor medio de los cuadrados de las desviaciones respecto a la media de la muestra tiende a subestimar el valor de la varianza de la población total, se divide por  $n - 1$  en vez de  $n$  para compensar este efecto. Algunos autores denotan con  $\sigma^2$  a la varianza de la población y con  $s^2$  a la varianza de la muestra.

Debido a que  $(x_i - \bar{x})^2 = x_i^2 - 2x_i \cdot \bar{x} + \bar{x}^2$ ,  $\sigma$  también se puede escribir como

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n-1} \left( \sum_{i=1}^n x_i^2 - n\bar{x}^2 \right)}. \quad (1.24)$$

Frecuentemente se toma como *intervalo de incertidumbre* el valor de  $3\sigma$  a cada lado de la media. Esto, igual que la definición de  $\sigma$ , se motiva en argumentos de estadística matemática. Se usa solamente en los casos en los cuales el número de medidas realizadas es  $n \geq 30$ .

De acuerdo con las propiedades de la distribución normal, dentro de un conjunto cualquiera de datos distribuidos normalmente, el 68,3% de ellos, unos dos tercios, se encontrará entre  $\bar{x} - \sigma$  y  $\bar{x} + \sigma$ , en tanto que el 95,5% de los datos se encontrarán entre  $\bar{x} - 2\sigma$  y  $\bar{x} + 2\sigma$  y el 99,7% de los datos se encontrará entre  $\bar{x} - 3\sigma$  y  $\bar{x} + 3\sigma$ . Por ejemplo, entre 370 valores de una medida repetida, sólo uno caerá fuera del intervalo  $[\bar{x} - 3\sigma, \bar{x} + 3\sigma]$ . Por esto en la práctica se toma

$$\Delta x = 3\sigma, \quad \text{o sea} \quad x = \bar{x} \pm 3\sigma. \quad (1.25)$$

Supongamos ahora que el experimento de tomar  $n$  medidas de la cantidad  $X$  se repite  $n$  veces. Se tendrán entonces  $n^2$  datos:  $n$  para cada uno de los experimentos,  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  para el primer experimento,  $\{x'_1, x'_2, \dots, x'_n\}$  para el segundo,  $\{x''_1, x''_2, \dots, x''_n\}$  para el tercero y así sucesivamente. A cada conjunto de datos se le puede calcular su media aritmética y su desviación estándar, obteniéndose  $(\bar{x}, \sigma)$  para el primero,  $(\bar{x}', \sigma')$  para el segundo,  $(\bar{x}'', \sigma'')$

para el tercero y así sucesivamente para los demás. Podemos pensar luego en calcular la media aritmética de las medias obtenidas en cada uno de estos experimentos de física para obtener  $\bar{x}$ , y la desviación estándar de  $\bar{x}, \bar{x}', \bar{x}''$ , ... respecto a su media  $\bar{\bar{x}}$  que llamaremos error medio cuadrático de las medias aritméticas o simplemente *error estándar* y denotaremos por  $s$  (Algunos autores llaman  $\mu$  lo que aquí estamos llamando  $\sigma$  y llaman  $\sigma$  al error estándar  $s$ ). Se encuentra que  $s$  está dada por una expresión que sólo depende de los datos de una cualquiera de las series de medidas, por ejemplo la primera:

$$s = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \left( \sum_{i=1}^n x_i^2 - n \bar{x}^2 \right)}. \quad (1.26)$$

Esto resulta del hecho de que todas las distribuciones gaussianas (normales), en las que  $n \rightarrow \infty$ , tienen la misma desviación estándar. Es lógico pensar que la media aritmética de las medias aritméticas es un valor más cercano a la cantidad física que estamos midiendo,  $X$ , o sea que con buena aproximación se cumple que  $X \approx \bar{x}$ . La operación podría repetirse una tercera vez, una cuarta vez, etc con nuevos promedios que cada vez más tienden al valor “verdadero”. Este procedimiento, debe quedar claro, tiene valor teórico pero no práctico.

Por todas las condiciones anteriores se deduce que el error absoluto en la medida de una variable  $X$  es menor que la desviación estándar, o sea que

$$X = \bar{x} \pm 3s. \quad (1.27)$$

Según esto, el valor “verdadero” de  $X$  se sitúa con una probabilidad del 99,7% dentro del intervalo  $[\bar{x} - 3s, \bar{x} + 3s]$ . Este es el resultado para la determinación de una cantidad física mediante una serie de muchas medidas.

### 1.4.3. La corrección de Student

La fórmula (1.26) definió el error estándar. Sin embargo, esta fórmula se basa en la suposición de que las medidas poseen una distribución normal. En estadística matemática se muestra que esta distribución es una buena aproximación a la distribución verdadera de un conjunto de medidas sólo si se cumple que

$$n \geq 30. \quad (1.28)$$

En la práctica, sobre todo en experimentos con datos tomados “a mano” como en el laboratorio de física elemental, no es posible satisfacer esta condición. El matemático inglés W. S. Gosset (con seudónimo Student) estudió este tipo de experimentos y halló que no se adaptan a la distribución de Gauss sino a una distribución diferente. Sólo citaremos uno de los principales resultados de Student: cuando el número de datos es inferior a 30 la fórmula que define el error estándar debe ser modificada:

$$s = t_p \frac{\sigma}{\sqrt{n}}. \quad (1.29)$$

La nueva cantidad  $t_p$  se denomina *factor de corrección de Student* o simplemente *factor t*. El subíndice en  $t_p$  tiene que ver con una discusión anterior acerca del significado de la desviación estándar:  $p$  depende de la probabilidad de que la medida caiga entre  $\bar{x} - s$  y  $\bar{x} + s$ . Así, si el intervalo de confianza es del 95 %, entonces  $p = 1 - 0,95 = 0,05$ . Es decir,  $p$  es el grado de *incertezza* de que el valor “real” de  $x$  esté en el intervalo mencionado y  $1 - p$  es el grado de *certeza*. Se define la cantidad  $\nu = n - 1$ , llamada el “número de grados de libertad” de la muestra.

Cuando el número de medidas es pequeño  $t_p$  es grande, y decrece cuando crece el número de datos. También, para un número dado de datos,  $t_p$  crece cuando decrece  $p$ .

En la sección 1.4.4 se describe una aplicación de la tabla de factores  $t_p$  para analizar la dependencia o independencia estadística de dos cantidades determinadas experimentalmente.

Consideremos un ejemplo. Supongamos que se mide la longitud de un objeto con ayuda de la escala incorporada a un microscopio. La escala tiene divisiones de 0,01 mm. Cada medida individual se puede realizar con un error absoluto igual a 0,001 mm. Al medir la longitud  $L$  cinco veces ( $n = 5$ ,  $\nu = 4$ ) se obtienen los resultados:

$$6,191; \quad 6,215; \quad 6,228; \quad 6,200; \quad 6,217 \text{ mm.}$$

Se busca determinar el valor de  $L$  y su error estándar. Los valores de  $\bar{L}$  y  $\sigma_L^2$  se calculan con ayuda de los datos de la tabla 1.2. Los resultados son:

$$\bar{L} = \frac{1}{5} \sum_{i=1}^5 L_i = 6,2102 \text{ mm},$$

$$\sigma_L^2 = \frac{1}{5-1} \sum_{i=1}^5 (L_i - \bar{L})^2 = 2,146 \cdot 10^{-4} \text{ mm}^2.$$

Se sigue que

$$\sigma_L = 1,465 \cdot 10^{-2} \text{ mm.}$$

Sea que  $p = 0,05$ . De la tabla 1.1 se obtiene que  $t_{0,05}(4) = 2,7764$ . Según (25) el error aleatorio vale

$$s = \Delta L_{est} = \frac{2,7764 \cdot 0,01465}{\sqrt{5}} = 1,82 \cdot 10^{-2} \text{ mm.}$$

Por lo tanto el resultado para la longitud (ver sección 1.5.4) es

$$L = (6,21 \pm 0,03) \text{ mm.}$$

El ejemplo es instructivo en otro sentido. Se observa que el error aleatorio total,  $s = 0,03 \text{ mm}$  en este caso, puede ser bastante mayor que el sólo error aleatorio debido a las escalas del instrumento. La contribución del microscopio al error en este caso vale solamente 0,001 mm.

$\nu = n - 1$	$t_{0,05}$	$t_{0,01}$
1	12.706	63.657
2	4.2027	9.9248
3	3.1825	5.8409
4	2.7764	4.6041
5	2.5706	4.0321
6	2.4469	3.7074
7	2.3646	3.4995
8	2.3060	3.3554
9	2.2622	3.2498
10	2.2281	3.1693
11	2.2010	3.1058
12	2.1788	3.0545
13	2.1604	3.0123
14	2.1448	2.9768
15	2.1315	2.9467
16	2.1199	2.9208
17	2.1098	2.8982
18	2.1009	2.8784
19	2.0860	2.8453
20	2.0860	2.8453
21	2.0796	2.8314

Tabla 1.1: Factores de corrección de Student.  $n$  es el número de medidas.

No.	$L_i$ (mm)	$(L_i - \bar{L})$ (mm)	$(L_i - \bar{L})^2$
1	6.191	-0.0192	0.0003686
2	6.215	0.0048	0.0000230
3	6.228	0.0178	0.0003168
4	6.200	-0.0102	0.0001040
5	6.217	0.0068	0.0000462
$\Sigma:$	31.051	0.0000	0.0008586
$\bar{L} = 6,2102$		$\sigma^2(L) = 2,146 \cdot 10^{-4}$	

Tabla 1.2: Medidas de una longitud y sus desviaciones respecto a la media.

#### 1.4.4. Error en la suma o diferencia de dos valores

Si se realizan medidas repetidas de una magnitud física  $X$  de las cuales se obtiene que

$$x = \bar{x} \pm \Delta x_{est}, \quad (29)$$

y similarmente de otra cantidad  $Y$ ,

$$y = \bar{y} \pm \Delta y_{est}, \quad (30)$$

entonces se puede mostrar que para su diferencia  $Z = X - Y$  la expresión es

$$Z = X - Y = \bar{z} \pm \Delta z_{est} = \bar{x} - \bar{y} \pm \sqrt{(\Delta x_{est})^2 + (\Delta y_{est})^2}. \quad (31)$$

En otras palabras, el error estándar de la diferencia es igual a la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de los errores estándar individuales (“suma cuadrática”). Lo mismo vale para la suma.

Nótese la diferencia con el error de la suma en el caso de medidas individuales, ecuación (1.16a).

Es de interés el cálculo de la relación entre  $\bar{z}$  y  $\Delta z_{est}$ :

$$t = \frac{|\bar{x} - \bar{y}|}{\sqrt{(\Delta x_{est})^2 + (\Delta y_{est})^2}}. \quad (1.30)$$

El dato sobre cuantas veces es mayor  $|\bar{x} - \bar{y}|$  que  $\sqrt{(\Delta x_{est})^2 + (\Delta y_{est})^2}$  tiene significado estadístico y por lo tanto importancia práctica. Se aplica en la prueba de la “hipótesis nula”  $H_0 : \bar{x} - \bar{y} = 0$ . Se distinguen dos casos: primero, cuando el número de medidas es grande,  $n \geq 30$  y segundo cuando el número de medidas es menor que 30. En el primer caso, si se cumple que  $|\bar{x} - \bar{y}| > 3 \Delta z_{est}$ , o sea  $t > 3$ , puede concluirse que los dos conjuntos de medidas  $X$  y  $Y$  no pertenecen a la misma población, o sea que las dos series de

datos  $x_i$  ( $i = 1, 2, \dots n_x$ ) y  $y_j$  ( $j = 1, 2, \dots n_y$ ) son *estadísticamente independientes*. También se puede concluir que el valor de la diferencia entre las dos medias aritméticas es *significativa*.

La cantidad  $t$ , en los casos en los cuales el número total de medidas es pequeño y no se cumple la distribución normal, sirve para definir la independencia de las poblaciones. Sin embargo, el procedimiento para concluir si el valor de la diferencia de las medias es significativo es un poco más complicado. En este caso se calculan  $t$  y  $\nu = n_x + n_y - 2$  y se busca en la tabla 1.1 el valor más próximo a  $t$  en la línea correspondiente al valor de  $\nu$  (el “número de grados de libertad”). Luego se lee en la parte superior de la tabla el valor de  $p$ , por ejemplo en la forma  $t_{0,05}$ . Si el valor de  $t$  es menor que  $t_{0,05}$  para  $\nu$  dado, entonces el valor de la diferencia entre  $X$  y  $Y$  no es significativo, puesto que la probabilidad de error es mayor del 5 %. Si el valor encontrado para  $t$  es mayor que el valor  $t_p$  que para un  $\nu$  dado está en la columna de  $p = 0,01$ , entonces se concluye que el valor de la diferencia es estadísticamente significativa<sup>3</sup>, ya que la probabilidad de error en la hipótesis  $H_0$  es menor que el 1 %. Si está comprendido entre los valores  $p = 0,01$  y  $p = 0,05$ , entonces la diferencia posiblemente es estadísticamente significativa, pero es necesario aumentar los números  $n_x$  y  $n_y$  de medidas.

La fórmula (1.30) para  $t$  vale en los casos en los cuales  $n_x = n_y$  ( $\nu = 2n_x - 2$ ). Si  $n_x \neq n_y$  es necesario usar una expresión diferente.

Una aplicación inmediata de estos conceptos está dada en los experimentos sobre conservación de energía (o de momento lineal). Se determinan por medio de medidas repetidas las energías de un sistema antes ( $X$ ) y después ( $Y$ ) de algún proceso y se hallan las correspondientes medias aritméticas. Se trata de decidir si la diferencia entre esos valores medios es estadísticamente significativa o no. En ese caso es necesario aplicar la prueba al conjunto formado con la diferencia de los datos  $Z = X - Y$ ; es decir analizando la cantidad  $t = |\bar{z}|/\sqrt{\Delta z_{est}}$ , siendo esta vez  $\Delta z_{est} = \sigma_z/\sqrt{n}$ . La razón de lo anterior es que se desea comparar no sólo los conjuntos de datos  $X$  y  $Y$  como un todo sino la igualdad dato a dato en el conjunto de parejas  $(x_i, y_i)$ .

Los resultados referentes a la propagación de los errores en una suma o diferencia pueden generalizarse. Si  $U$  es una función de  $r$  variables aleatorias  $V_1, V_2, \dots, V_r$ , con medias y errores estándar dados por  $\bar{v}_i, s_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, r$ , entonces la media y el error estándar de  $U$  están dados por

$$\bar{u} = f(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_r), \quad (1.31)$$

y por

$$s_u = \sqrt{\sum_{i=1}^r \left( \frac{\partial f}{\partial v_i} \right)^2 s_i^2}. \quad (1.32)$$

Las derivadas parciales están evaluadas en los valores medios. La fórmula para  $s_u$  se denom-

---

<sup>3</sup> $p = 0,01$  se denomina *nivel de alta significación*.

ina “ley de propagación de los errores estadísticos”.

El resultado final para  $U$  se escribe entonces

$$U = \bar{u} \pm 3 s_u. \quad (1.33)$$

En este tratamiento es básica la suposición que las cantidades  $v_i$  son estadísticamente independientes. Si ocurre lo contrario, entonces el error sobre  $u$  no se obtiene con ésta fórmula sino con la misma fórmula del caso de medidas individuales, (1.12)

$$s_u = \sum_{i=1}^r \left| \frac{\partial f}{\partial v_i} \right| s_i. \quad (1.34)$$

Nótese que en el caso de una única medida el error está determinado por las escalas de los instrumentos. En ese caso hay una correlación completa entre los errores y por lo tanto se aplica esta fórmula. También nótese que el error dado por (1.34) es mayor que el error dado por (1.32), siendo por tanto un estimado del error máximo que se puede cometer y como tal es aplicable también en el caso de medidas repetidas.

Para finalizar este numeral damos enseguida las expresiones para los errores estándar en algunas funciones simples, usando la fórmula (1.32):

$$s_{x \pm y} = \sqrt{s_x^2 + s_y^2}. \quad (1.35a)$$

$$s_{x \cdot y} = \sqrt{x^2 s_y^2 + y^2 s_x^2} \quad (1.35b)$$

$$s_{x/y} = \frac{1}{y^2} \sqrt{s_x^2 y^2 + s_y^2 x^2} \quad (1.35c)$$

$$s_{\sqrt{x \cdot y}} = \frac{1}{2\sqrt{x \cdot y}} \sqrt{s_x^2 y^2 + s_y^2 x^2} \quad (1.35d)$$

$$s_{\ln(x \cdot y)} = \frac{1}{x \cdot y} \sqrt{x^2 s_y^2 + y^2 s_x^2} \quad (1.35e)$$

En la notación  $s_{x+y}$ ,  $x+y$  es un “subíndice” de  $s$  para indicar el error estándar de la cantidad “ $x+y$ ”.

## 1.5. NÚMEROS APROXIMADOS

Es este numeral describiremos la estructura de los números aproximados y describiremos algunas reglas prácticas para su manipulación.

### 1.5.1. Cifras significativas, seguras e inseguras

Todo número real  $A$  puede escribirse de la siguiente manera en la base decimal:

$$A = \pm(q_m \cdot 10^m + q_{m-1} \cdot 10^{m-1} + \dots q_{m-n+1} \cdot 10^{m-n+1} + \dots), \quad (1.36)$$

donde  $q_m$ ,  $q_{m-1}$ , etc son las cifras del número  $A$  colocadas en el respectivo puesto (lugar decimal),  $m$  es el mayor orden decimal que aparece en  $A$  y si  $q_{m-n+1}$  es la última cifra del número entonces  $n$  es su número de cifras significativas. En el caso general  $A$  puede tener un número infinito de cifras.

Por ejemplo, en el número 1886,12,  $m$  vale 3 y  $n$  vale 6, así que se puede expresar como

$$\begin{aligned} 1886,12 &= 1 \cdot 1000 + 8 \cdot 100 + 8 \cdot 10 + 6 \cdot 1 + 1 \cdot 0,1 + 2 \cdot 0,01 \\ &= 1 \cdot 10^3 + 8 \cdot 10^{3-1} + 8 \cdot 10^{3-2} + 6 \cdot 10^{3-3} + 1 \cdot 10^{3-4} + 2 \cdot 10^{3-6+1}. \end{aligned}$$

Si un número con muchas cifras significativas se aproxima<sup>4</sup> por uno de menor cantidad de cifras significativas diremos que se ha truncado o “redondeado”. Si el número  $A$  se trunca a partir de la cifra decimal correspondiente a  $m - n - 1$  se obtendrá un número aproximado compuesto de  $n$  cifras significativas. Por ejemplo 1886,12 escrito con una cifra significativa será igual a 1000, con dos cifras a 1800, con tres cifras a 1880, con cuatro cifras a 1886, y con cinco cifras a 1886,1, todo esto sin aplicar reglas de redondeo. El número de cifras significativas de una cantidad experimental lo determina la primera cifra que contiene alguna incertidumbre.

Para determinar el número de cifras significativas de un número menor que 1 se cuenta el número de cifras que lo forman incluyendo los ceros situados al lado derecho o en el medio, pero no los ceros de la izquierda. Por ejemplo, la representación de la constante de gravitación universal por  $0,0000000006670 N \text{ m}^2/\text{kg}^2 = 6,670 \cdot 10^{-11} N \text{ m}^2/\text{kg}^2$  contiene  $10 + 4 = 14$  cifras decimales y 4 cifras significativas. En este número  $m = 0$  y  $n = 15$ , pero los 11 primeros valores de  $q_i$  que son iguales a cero no se cuentan dentro de las cifras significativas.

Para determinar el número de cifras significativas de un número mayor que 1 se cuenta el número de cifras que lo forman incluyendo los ceros situados en el medio, pero no los ceros situados al lado derecho; por esto el valor de la velocidad de la luz  $c = 2\ 997\ 926\ 600\ 000 \text{ m s}^{-1} = 2,9979266 \cdot 10^8 \text{ m s}^{-1}$ , posee 8 cifras significativas. Con esta representación se está indicado que el último 6 posee un error; proviene de una medida experimental que arrojó el valor  $299792,66 \pm 0,09 \text{ km s}^{-1}$ .

Sean  $A$  un número cualquiera y  $a$  la representación truncada del mismo con sólo  $n$  cifras significativas. Las primeras  $n$  cifras de  $a$  se llaman *seguras* si el error absoluto en  $A = a + \Delta a$

---

<sup>4</sup>El redondeo tiene implicaciones filosóficas: toda teoría tiene un ámbito de validez definido por un conjunto de hechos empíricos; por lo tanto instrumentos de mayor exactitud, que aumentan el número de cifras significativas, pueden echar por tierra teorías enteras.

no es superior a 0,5 veces el orden decimal más bajo retenido en  $a$ , es decir

$$|A - a| < 0,5 \cdot 10^{m-n+1}. \quad (1.37)$$

En caso contrario se llaman *inseguras* o *dudosas*.

Por ejemplo, consideremos los resultados de cinco medidas de la masa de un cuerpo:  $m_1 = 5,24\text{ g}$ ,  $m_2 = 5,27\text{ g}$ ,  $m_3 = 5,23\text{ g}$ ,  $m_4 = 5,25\text{ g}$ ,  $m_5 = 5,27\text{ g}$ . En todos estos resultados las primeras dos cifras se repiten, pero la tercera cifra varía de medida en medida. Las cifras que cambian se llaman inseguras y las que no cambian, seguras. Los resultados de una medida siempre se expresan por medio de las cifras seguras y a lo sumo con una cifra dudosa (la primera). En consecuencia **al tomar muchos datos en un experimento en el cual aparecen cifras dudosas, sólo se conserva la primera y las demás se desechan**. Cuando se descartan todas las cifras inseguras se dice que el resultado se redondea.

### 1.5.2. Reglas para el redondeo de los números

1. Si la primera de las cifras que se descarta es inferior a 5, las cifras que se conservan se dejan inalteradas:  $28,4(4) \approx 28,4$ .
2. Si la primera cifra que se descarta es mayor que 5, entonces la última cifra que se conserva se aumenta en 1:  $28,4(6) \approx 28,5$ .
3. Si la primera de las cifras que se descartan es exactamente 5 y las cifras que le siguen no son todas cero, entonces la última cifra que se conserva se aumenta en 1:  $28,4(56) \approx 28,5$ .
4. Si la primera de las cifras que se descartan es exactamente 5 y las cifras que le siguen son todas cero, entonces la última cifra que se conserva se aumenta en 1 si es impar y se deja inalterada si es par:  $28,4(50) \approx 28,4$  y  $28,5(50) \approx 28,6$ .

### 1.5.3. Determinación del número de cifras significativas en el valor de una función

La determinación experimental de una cantidad por medios indirectos se realiza midiendo las cantidades de las cuales dicha cantidad depende funcionalmente. A menudo tales cantidades obtenidas experimentalmente poseen diferente número de cifras significativas. Por esto es necesario redondear todos estos números en una cifra más que el número de menor cantidad de cifras seguras. Esta cifra se denomina *de seguridad*. A veces cuando los datos poseen gran diferencia en el número de cifras seguras se redondea una cifra más.

El siguiente ejemplo ilustra el cálculo con datos experimentales, y al mismo tiempo un uso incorrecto de la calculadora de bolsillo que es muy común. Sabemos que el número de cifras significativas en el resultado de una medida depende de la exactitud del instrumento de medida (no del número de cifras que coloquemos en la pantalla de la calculadora ni de la

cantidad de trabajo que tengamos que invertir para realizar el cálculo).

Consideremos un experimento para determinar el valor de la tensión superficial de un líquido en el cual se obtuvieron los siguientes resultados. Radio del tubo capilar  $r = 2,5 \cdot 10^{-4} m$ , densidad del líquido  $d = 680 kg/m^3$  y longitud de la columna del líquido dentro del capilar  $l = 2,1 \cdot 10^{-2} m$ . El coeficiente de tensión superficial del líquido se determina con la fórmula  $T = r l g d / 2$ , donde  $g$  es la aceleración de la gravedad, que para la latitud de este lugar y de su altura sobre el nivel del mar es  $g = 9,776 m/s^2$ .

El número de cifras seguras de  $r$ ,  $d$ ,  $l$  y  $g$  es respectivamente: 2, 3, 2 y 4.  $r$  y  $l$  son las cantidades con el menor número de cifras seguras, 2. Si se trabaja sin calculadora, antes de iniciar el cálculo de  $T$  es conveniente redondear las restantes cantidades,  $d$  y  $g$ , a tres cifras (2 + 1) seguras,  $r = 2,5 \cdot 10^{-4} m$ ,  $d = 680 kg/m^3$ ,  $l = 2,1 \cdot 10^{-2} m$  y  $g = 9,78 m/s^2$ . Si se trabaja con calculadora, se puede efectuar el cálculo sin redondeos previos. En el primer caso obtenemos  $17,4573 \cdot 10^{-3} N/m$  y en el segundo  $17,450160 \cdot 10^{-3} N/m$ . Como se trabaja con tres cifras seguras, de los dos cálculos se concluye que  $T = 17,5 \cdot 10^{-3} N/m$ .

Podemos calcular el error sobre  $T$  usando la fórmula (1.32). Para esto suponemos que de acuerdo a sus respectivos números de cifras seguras los errores en  $r = 0,00025$ ,  $d = 680$ ,  $l = 0,021$  y  $g = 9,776$  son

$$\Delta r = 0,00001 m, \quad \Delta d = 1 \frac{kg}{m^3}, \quad \Delta l = 0,001 m, \quad \Delta g = 0,001 m/s^2.$$

El error en  $T$  se saca de la fórmula

$$\Delta T = \frac{r d l g}{2} \sqrt{\left(\frac{\Delta r}{r}\right)^2 + \left(\frac{\Delta d}{d}\right)^2 + \left(\frac{\Delta l}{l}\right)^2 + \left(\frac{\Delta g}{g}\right)^2}.$$

Efectuado el cálculo se obtiene  $\Delta T = 1,0 \cdot 10^{-3} N/m$ . Pudimos haber efectuado un experimento de mejor calidad determinando experimentalmente los errores en  $r$ ,  $d$ , y  $l$ , y haber consultado el valor del error en  $g$ . Con ello lograríamos obviamente un menor error sobre  $T$ , digamos que  $\Delta T = 0,833 \cdot 10^{-3} N/m$ . Entonces podemos escribir (ver sección 1.5.4)

$$T = (17,5 \pm 0,9) \cdot 10^{-3} N/m,$$

con una cifra dudosa.

Por favor, no escriba nunca un resultado como este en la forma:

$$T = (17,45016 \pm 0,83385108) \cdot 10^{-3} N/m.$$

Un ejemplo más. Se desea efectuar el producto entre 7,35 (n=3) y 27,1153 (n=6). El resultado, aplicando la **regla IV** de la sección 1.6, debe ser un número con tres cifras significativas. No se sabe cual es el dígito que sigue al último para cada uno de los números, razón por la cual lo representaremos por “?”.

$$\begin{array}{r}
 & 2 & 7 & . & 1 & 1 & 5 & 3 & ? \\
 & & & & 7 & . & 3 & 5 & ? \\
 \hline
 & (?) & (?) & ? & ? & ? & ? & ? & ? \\
 1 & 3 & 5 & 5 & 7 & 6 & 5 & ? \\
 8 & 1 & 3 & 4 & 5 & 9 & ? \\
 1 & 8 & 9 & 8 & 0 & 7 & 1 & ? \\
 \hline
 1 & 9 & 9 & .? & ? & ? & ? & ? & ?
 \end{array}$$

Aparentemente el resultado es 199,2 con 4 cifras seguras. Pero es importante notar que no sabemos si el producto  $? \times 2$  es una cantidad incierta de una o de dos cifras, que se ha indicado con  $(?)$ , o sea que no sabemos cuánto vale la suma  $3 + 1 + 8$ , aunque si estamos absolutamente seguros que es necesario “llevar” 1. En consecuencia el producto final es un número con tres cifras seguras, (199), y una cifra incierta que fluctúa entre 3 y 5 (debido a que  $7,35(9) \times 27,1153(9) = 199,54215 \approx 199,5$  y  $7,35(0) \times 27,1153(0) = 199,29745 \approx 199,3$ ). El resultado de la operación deberá escribirse en la forma

$$27,1153 \times 7,35 = 199,4 \pm 0,1.$$

Lo anterior proviene del hecho de tratarse con el producto de dos cantidades experimentales,  $(27,1153 \pm 0,0001) \times (7,35 \pm 0,01) = 199,4 \pm 0,1$ , y no de dos números ordinarios  $27,1153 \times 7,35 = 199,297455$ . Realizando la operación con calculadora, es necesario al 27,1153 colocarle 15 como cifras dudosas; entonces tendríamos el producto de las cantidades redondeadas,  $27,12 \times 7,35 = 199,33$ , y como el resultado tiene sólo tres cifras seguras escribimos 199 y no es válido redondear el resultado a 200.

#### 1.5.4. Ensanchamiento del margen de error

En esta sección describiremos un procedimiento alternativo para determinar el número de cifras significativas de una función dependiente de resultados experimentales, y a la vez un procedimiento para agrandar el margen de error, o sea de mejorar el grado de confianza en el resultado. Es un procedimiento que consiste en disminuir en una unidad el número de cifras seguras del margen de error. Por ejemplo, sea una medida delicada en la cual se obtuvieron los siguientes valores para una cantidad y su error, 1,327500 y 0,0025000 unidades. En el resultado de la medida las cifras “1”, “3” y “2” son seguras, ya que el error no afecta la posición decimal que ocupan. Con tal criterio la cifra siguiente, “7” es dudosa, con lo cual el resultado debe redondearse para dar 1,328 unidades. El ensanchamiento del margen de error en una cifra se hace en dos pasos: primero, se redondea el error en una cifra significativa, con lo cual se tendrá 0,002, y segundo se aumenta en una unidad la última cifra dando finalmente 0,003 unidades. El resultado final se escribe como:

$$u = (1,328 \pm 0,003) \text{ unidades.}$$

# **Capítulo 2**

## **TRATAMIENTO GRÁFICO DE DATOS EXPERIMENTALES**

### **2.1. OBJETIVOS**

Aprender a tabular los datos de un experimento y a realizar gráficas en papel milimetrado, logarítmico y semilogarítmico. Aprender a analizar la gráfica de una línea recta y el uso de las barras de error en la representación gráfica de los resultados experimentales. Entender el método de los mínimos cuadrados para el ajuste de un conjunto de datos a una gráfica lineal.

### **2.2. REPRESENTACIÓN DE LOS RESULTADOS EXPERIMENTALES**

Los resultados de las medidas, en general, pueden ser representados *analíticamente* y *gráficamente*. El experimento, parte esencial del trabajo investigativo, puede conducir al hallazgo de relaciones funcionales entre cantidades que describen una clase amplia de fenómenos. Los resultados de tales experimentos son ecuaciones empíricas que representan la forma general en la cual están relacionadas las cantidades estudiadas.

A menudo los resultados de las medidas no expresan la relación entre las variables en forma simple (o sea aproximable por fórmulas matemáticas simples). En este caso la información representada en forma gráfica o en forma tabular constituye el mejor resultado obtenido del experimento.

En el trabajo de laboratorio, los resultados de las medidas, independientemente de si expresan o no una relación matemáticamente definida, se representan de las dos formas, *gráfica* y *tabular*.

La representación tabular proporciona sólo una síntesis muy limitada del resultado del trabajo experimental. Sin embargo la tabulación de los datos es una herramienta indispensable tanto para la realización misma del experimento como para su ulterior análisis.

La representación gráfica, ante todo proporciona una imagen visual del comportamiento del fenómeno estudiado, y también constituye un medio eficaz para obtener importante información cuantitativa. Por esta razón existen muchos métodos para la elaboración y el análisis de gráficas.

Es común la necesidad de explorar relaciones de la forma

$$y = f(x; p_1, p_2, p_3, \dots),$$

donde  $x$ ,  $y$  son las variables y  $p_1, p_2, p_3, \dots$  son parámetros constantes que determinan una familia de gráficas. En principio se busca hallar una relación funcional a partir de los datos experimentales y deducir los valores de los parámetros. Frecuentemente los parámetros contienen valiosa información, como valores de constantes físicas, etc. Muchos fenómenos pueden describirse por expresiones matemáticas simples, de uno de los siguientes cuatro tipos:

- (1) Función lineal:  $y = a \cdot x + b$ .
- (2) Función potencia:  $y = b \cdot x^a$ .
- (3) Función exponencial:  $y = b \cdot a^x$ .
- (4) Ecuación polar:  $r = af(\theta)$ .

Para graficar funciones del tipo (1), o que mediante cambios de variables se pueden llevar a la forma lineal, se emplean las gráficas en papel “milimetrado”. Para las del tipo (2) en papel “log-log”. Para las del tipo (3) en papel “semi-log”. Y para las del tipo (4) en papel “polar”. En estas funciones los parámetros son  $a$  y  $b$ .

## 2.2.1. Representación gráfica de los resultados.

### 2.2.1.1. Gráfica de una línea recta en papel milimetrado

Para elaborar una gráfica en papel milimetrado es necesario dibujar los ejes de acuerdo con los datos y colocar las parejas  $(x, y)$  en el plano cartesiano determinado por dichos ejes.

Describiremos el proceso de elaboración de una gráfica cartesiana con un ejemplo. La figura ?? representa un circuito eléctrico que contiene una batería  $E$ , un reóstato  $R$ , un interruptor y un amperímetro  $A$ . El reóstato (resistencia variable) permite variar la resistencia del circuito por medio de un botón cuyo movimiento se puede registrar en una escala calibrada en *ohm*. La batería proporciona una fuerza electromotriz constante de un número conocido

de *voltios*. El amperímetro permite medir la corriente a través del circuito en *amperios*. Se trata de obtener una relación funcional empírica entre la corriente y el valor de la resistencia.

La tabla 2.1 presenta los resultados del experimento, en las primeras dos columnas, junto con algunos cálculos en las columnas tercera, cuarta y quinta. Con base en la ley de Ohm,  $E = I R$ , esperamos que la gráfica de  $I$  contra  $R$  nos dé una hipérbola. Sin embargo en la práctica experimental se busca que la representación gráfica de los datos tenga la forma más simple, o sea la forma lineal, porque permite con más facilidad y exactitud dibujar y analizar la gráfica.

En situaciones como la presente, donde la representación directa de los datos no proporciona una gráfica lineal, se recomienda realizar un *cambio de variables* tal que permita obtener una gráfica lineal. Es la llamada *linealización de la gráfica*. Para ello no existen reglas generales. Dependiendo de la gráfica obtenida al representar directamente los datos, luego se tantean diversos cambios de variable. En el presente caso debe representarse a  $1/I$  en función de  $R$ .

Las medidas tienen algún error. Por ejemplo, si la división más pequeña del amperímetro (cuya *precisión* conocemos) es de  $0,1\text{ A}$ , el error de lectura de cada medida de corriente es  $\Delta' I = 0,05\text{ A}$ . El error total, que depende también del error instrumental, también se puede representar en la gráfica. En la tabla 2.1 se han representado los errores estándar obtenidos mediante mediciones repetidas. Como no estamos graficando a  $I$  sino a  $1/I$ , debemos representar no a  $\pm \Delta I$  sino  $\pm \Delta(1/I)$ , que de acuerdo con la guía sobre errores es

$$\Delta\left(\frac{1}{I}\right) = \left| \frac{-1}{I^2} \right| \Delta I.$$

Nótese que el cambio de escala introduce una dependencia del error respecto a  $I$ . Si el error en las medidas de la corriente fuera uniforme, el error en  $1/I$  sería grande cuando  $I$  es pequeño y pequeño cuando  $I$  es grande. Es el precio que a menudo se debe pagar por querer que la gráfica sea una línea recta.

Los errores se representan dibujando sus partes positivas (con las correspondientes unidades de medida) en la forma de una raya vertical por encima del punto correspondiente, y las partes negativas de igual forma se representan por una raya vertical debajo del punto correspondiente. Suponemos que no hay error en la escala de la resistencia  $R$ .

En los casos en que se tienen en cuenta los errores en las dos variables, se usa para representar el error una cruz o un rectángulo alrededor de cada punto experimental. La *elección de la escala* se basa en dos criterios: (1) que la gráfica ocupe toda la superficie disponible, ordinariamente de forma cuadrada, y (2) que si la gráfica representa una recta, tenga una pendiente de  $\pm 45^\circ$ . Se puede renunciar a estas reglas cuando es necesario representar sólo alguna parte de la gráfica o cuando la exactitud de una medida de una cantidad es mucho menor que la de la otra. Algunas veces el origen de coordenadas no debe estar en el punto

$R (\Omega)$	$I (A)$	$\Delta I (A)$	$1/I (A^{-1})$	$(1/I^2) \Delta I (A^{-1})$
2	0.9	0.06	1.11	0.07
3	0.6	0.03	1.67	0.09
4	0.5	0.08	2.0	0.3
5	0.4	0.06	2.5	0.4
6	0.3	0.06	3.3	0.7
7	0.3	0.06	3.3	0.7
8	0.2	0.08	5	2
9	0.2	0.08	5	2

Tabla 2.1: Datos de las medidas de corriente y resistencia en un circuito eléctrico.

$(0, 0)$ .

Si la gráfica representa una recta, los puntos experimentales deben estar equidistantemente distribuidos. Sin embargo, si hay un interés en examinar alguna relación funcional entre las variables que sea complicada y si se quiere que los puntos experimentales describan en forma precisa alguna variación fuerte de la curva, entonces en la región en consideración debe aumentarse el número de medidas, o sea la densidad de puntos experimentales.

### 2.2.1.2. Análisis e interpretación de la gráfica de una línea recta

A la línea recta de la figura 2.2 le corresponde una ecuación de la forma:

$$y = a \cdot x + b, \quad (2.1)$$

en donde “ $y$ ” es la variable dependiente,  $1/I$  en este caso, “ $x$ ” es la variable independiente,  $R$  en este caso, “ $a$ ” es la pendiente y “ $b$ ” es el intercepto de la recta con el eje  $y$ .

**Procedimiento para el cálculo de la pendiente** La pendiente  $a$  es una medida de la inclinación de la recta con respecto al eje horizontal. Describe la tasa de cambio de la variable  $y$  respecto a la variable  $x$ . Por tratarse de una recta la pendiente es constante. Se escogen dos puntos **sobre la recta**, lo más alejados posible para reducir el error y se trazan líneas paralelas a los ejes como se indica en la figura 2.2.

$$a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}. \quad (2.2)$$

De acuerdo con la ley de Ohm,  $1/I = (1/V) \cdot R$ , el significado físico de  $a$  constante, es la constancia del voltaje de la batería o sea que estamos describiendo un circuito “DC”. Según la gráfica, escogemos dos puntos por donde pase la recta por ejemplo  $(0, 0.2)$ ,  $(5, 2.7)$ . La fórmula anterior nos dá  $m = 0.5$ .

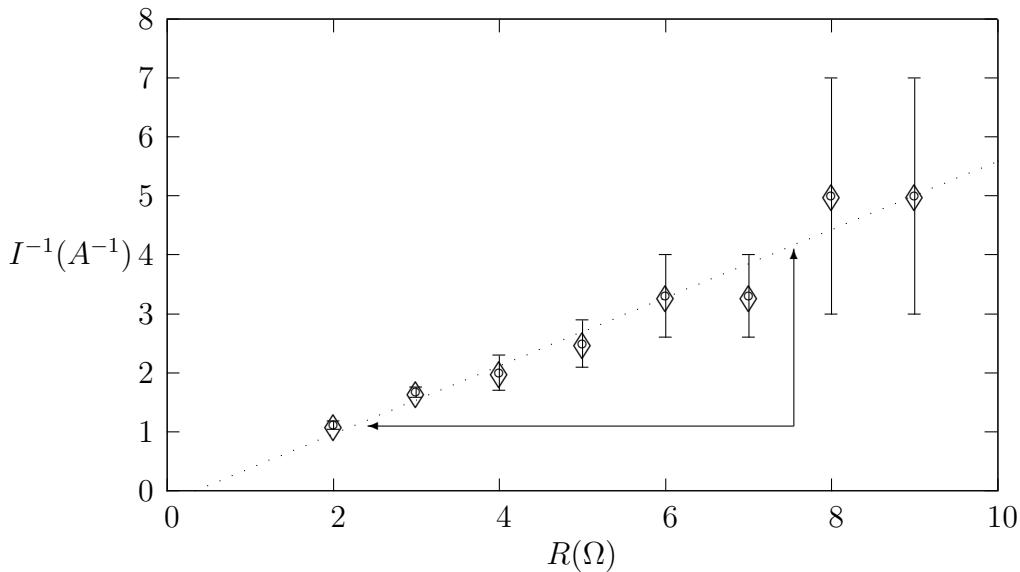


Figura 2.2: Gráfica de  $1/I$  contra  $R$  elaborada con los datos de la tabla 2.1. Las líneas verticales alrededor de cada punto representan el error en  $1/I$ . El cambio de variable,  $1/I$  en vez de  $I$ , llevó a la no uniformidad del margen de error.

**Cálculo del intercepto** Una vez se ha trazado la recta, el intercepto  $b$  se obtiene leyendo la distancia del origen al corte de la recta con el eje vertical  $y$ , que pasa por  $x = 0$ . El intercepto en el gráfico de la figura ?? corresponde al valor de  $1/I$  cuando  $R = 0$ ; para la gráfica que se ha trazado es  $b = 0,2$ .

### 2.2.2. Gráfica de líneas curvas

**Cálculo de la pendiente** En el caso de curvas la pendiente varía punto a punto. La pendiente en un punto está definida como la pendiente de la recta tangente a la curva en ese punto. La tangente a una curva en un punto  $P$ , es:

$$m = \text{pendiente en } P = \frac{\Delta y}{\Delta x}. \quad (2.3)$$

### 2.2.3. Interpolación y extrapolación

El problema general de la interpolación consiste en encontrar una curva suave, o sea sin ninguna irregularidad (como fractura, discontinuidad, etc), que se aproxime a la mayoría de los puntos experimentales. El problema de interpolación en el trabajo de laboratorio se resuelve de una manera relativamente simple.

La más sencilla es la *interpolación gráfica*. Consiste en trazar una curva que pase a través de todos los rectángulos de error dibujados alrededor de los puntos experimentales, de tal

modo que aproximadamente el mismo número de puntos quede a cada lado de la curva, con alejamiento similar. Es claro que tal curva no necesita pasar a través de los puntos experimentales, sino simplemente a través de una región definida por los rectángulos (o las barras) en los cuales se sitúan con alta probabilidad los “valores verdaderos” de las cantidades medidas. Es el método usado para trazar la figura 2.2.

Este método, sin embargo, no es suficientemente simple y claro para resolver el problema de la interpolación. En otras palabras, el requisito exigido puede ser satisfecho por muchas curvas diferentes. Esto es evidente en la gráfica de la figura 2.3. Por esto es necesario definir un método analítico de interpolación que resuelva la ambigüedad.

El procedimiento matemático de interpolación más usado es el llamado *método de los mínimos cuadrados*. Explicaremos el método cuando hay una dependencia lineal entre las variables, usando los valores numéricos del ejemplo de la tabla 2.1.

Las variables de ese ejemplo están relacionadas por la ecuación de la línea recta,  $y = a \cdot x + b$ . Si se conocen los parámetros  $a$  y  $b$  (pendiente e intercepto con el eje de las ordenadas), podemos trazar fácilmente la recta. Como se espera una única recta experimental, los datos experimentales han de dar lugar a valores únicos de  $a$  y  $b$ . Para hallar por el método de los mínimos cuadrados tales parámetros es necesario calcular la suma de los cuadrados de las desviaciones verticales de los puntos experimentales respecto a la recta buscada y luego minimizar tal suma respecto a los parámetros  $a$  y  $b$ .

Consideremos que  $(x_i, y_i)$ ,  $i = 1, 2, 3, \dots, n$ , son las  $n$  parejas de valores obtenidos experimentalmente. Sobre la base de las propiedades (2) y (3) de la media aritmética dadas en el numeral 1.4.2 de la guía sobre estadística de errores (capítulo 1) se obtiene:

$$a = \frac{n \cdot \sum_{i=1}^n (x_i y_i) - \sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n y_i}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - (\sum_{i=1}^n x_i)^2} = \frac{\bar{x} \cdot \bar{y} - \bar{x} \cdot \bar{y}}{\bar{x}^2 - \bar{x}}, \quad (2.4)$$

$$b = \bar{y} - a \bar{x}. \quad (2.5)$$

$n$  es el número de puntos de la gráfica,  $(\bar{x}, \bar{y})$  es la coordenada del “centro de gravedad” del conjunto de datos y  $\bar{\text{---}}$  es una media aritmética. Los errores de estas cantidades se calculan mediante la fórmula siguiente:

$$s_a^2 = \left| \frac{\bar{y}^2 + a^2 \bar{x}^2 + b^2 - 2a \bar{x} \bar{y} - 2b \bar{y} + 2ab \bar{x}}{(n-2)(\bar{x}^2 - \bar{x}^2)} \right|, \quad (2.6)$$

$$s_b^2 = s_a^2 \cdot \bar{x}^2. \quad (2.7)$$

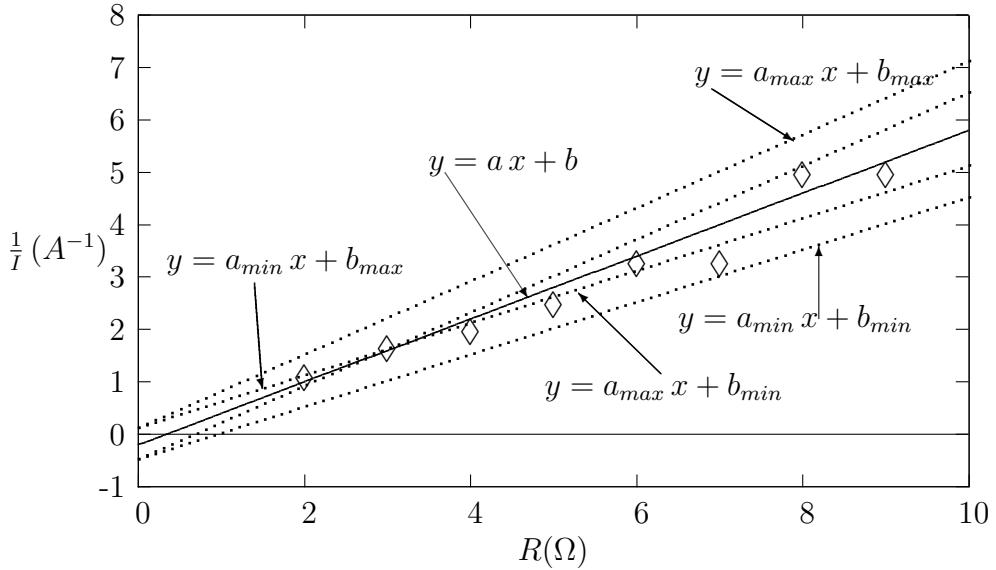


Figura 2.3: Gráfica de  $1/I$  contra  $R$  elaborada con las datos de la tabla 2.1, de acuerdo a la teoría de mínimos cuadrados. Nótense las dos líneas límite entre las cuales deben estar todos los datos.

En este cálculo se supone que los  $x_i$  se miden sin error y que todos los  $y_i$  tienen igual error. Resultados más exactos se logran introduciendo las incertidumbres de las medidas  $\Delta x_i$  y  $\Delta y_i$  a través de ciertos “factores de peso”  $p_i$ . Los resultados son:

$$a = \frac{\sum_{i=1}^n p_i \cdot \sum_{i=1}^n (p_i x_i y_i) - \sum_{i=1}^n p_i x_i \sum_{i=1}^n p_i y_i}{\sum_{i=1}^n p_i \sum_{i=1}^n p_i x_i^2 - (\sum_{i=1}^n p_i x_i)^2}, \quad (2.8)$$

$$b = \frac{\sum_{i=1}^n p_i x_i^2 \sum_{i=1}^n (p_i y_i) - \sum_{i=1}^n p_i x_i \sum_{i=1}^n p_i x_i y_i}{\sum_{i=1}^n p_i \sum_{i=1}^n p_i x_i^2 - (\sum_{i=1}^n p_i x_i)^2}. \quad (2.9)$$

$$p_i = \frac{1}{\Delta x_i + \Delta y_i}. \quad (2.10)$$

Estas fórmulas, y la generalización de (2.6) y (2.7), se obtienen fácilmente de las anteriores realizando los promedios con ayuda de los factores de peso y reemplazando a  $n$  por  $\sum p_i$ .

En la tabla 2.2 están transcritos los datos del experimento, llamando  $x_i$  a los valores de la resistencia y  $y_i$  a los inversos de las corrientes.

$x_i$	$y_i$	$x_i^2$	$y_i^2$	$x_i \cdot y_i$	$n = 8$
2	1.1	4	1.2	2.2	
3	1.7	9	2.9	5.1	
4	2.0	16	4	8.0	
5	2.5	25	6.2	12.5	
6	3.3	36	10.9	19.8	
7	3.3	49	10.9	23.1	
8	5.0	64	25	40.0	
9	5.0	81	25	45.0	
SUMA	44	23.9	284	86.1	155.7

$\bar{x} = 5,5 \quad \bar{y} = 3,0$   
 $\overline{xy} = 19,5$   
 $\overline{y^2} = 10,8$   
 $\overline{x^2} = 35,5$

Tabla 2.2: Datos para el cálculo de la pendiente y el intercepto usando las fórmulas del método de mínimos cuadrados.

Cuando se reemplazan los valores apropiados de la tabla 2.1 en las fórmulas (2.5) y (??), se obtiene

$$a = 0,6 (A^{-1} \cdot \Omega^{-1}) \quad y \quad b = -0,2 (A^{-1}).$$

En la figura 2.3 se ha trazado la recta óptima ( $y = 0,6 \cdot x - 0,2$ ).

Físicamente se espera que el valor del parámetro  $b$  sea cero (corriente infinita cuando la resistencia es cero), pero el cálculo dà  $b = -0,2$ . No podemos imponer que la recta trazada pase por el punto  $(0, 0)$ , el cual tampoco puede considerarse como punto experimental porque no es posible medir una corriente infinita. Respecto al hecho de no pasar la curva por el origen sólo nos quedaría evaluar el error en el cálculo de  $b$  y verificar si se cumple o no que

$$b - s_b \leq 0 \leq b + s_b.$$

Reemplazando en las fórmulas 2.6 y 2.7 los valores requeridos, que se obtienen de la tabla 2.2, obtenemos que  $s_a = 0,1$  y  $s_b = 0,3$ , y por lo tanto  $-0,2 - 0,3 \leq 0 \leq -0,2 + 0,3$ , con lo cual concluimos que el valor  $b = -0,2$  efectivamente es atribuible a los errores experimentales, y no a una discrepancia respecto a la ley de Ohm.

A partir de  $s_a$  y  $s_b$  podemos calcular los intervalos en los cuales estarán la pendiente y el intercepto,

$$a_{\max} = a + s_a; \quad a_{\min} = a - s_a; \quad b_{\max} = b + s_b; \quad b_{\min} = b - s_b.$$

Estas cantidades permiten definir el conjunto posible de líneas rectas predicho por los datos, entre los cuales la recta de mínimos cuadrados es la más probable. (Ver figura 2.3). Las rectas extremas son ( $y = a_{\max} x + b_{\max}$ ,  $y = a_{\min} x + b_{\min}$ ).

Este par de rectas es muy útil para decidir cuales datos experimentales deben descartarse: aquellos que caigan fuera de la región limitada por ellas. Además se espera que la mayoría de los datos experimentales estén alojados en la región comprendida entre las rectas ( $y = a_{\max} x + b_{\min}$ ,  $y = a_{\min} x + b_{\max}$ ), que aproximadamente se cortan entre sí y con la recta de mínimos cuadrados en el centro de gravedad del conjunto de datos,  $(\bar{x}, \bar{y})$ .<sup>1</sup>

Una vez se eliminan de la tabla de datos aquellos que caen por fuera de la zona permitida, delimitada por las dos líneas externas, se volverán a calcular los parámetros  $a$  y  $b$  junto con sus respectivos errores estándar.

En el tratamiento gráfico de los datos experimentales a menudo se incluye el procedimiento de *extrapolación gráfica*. La extrapolación es una ampliación del rango de validez de cierta dependencia funcional desde una región en la cual fué obtenida hasta una región externa al rango inicial de la variable independiente. De tal manera se pueden hallar teóricamente datos que, en principio, no se pueden obtener con medidas inmediatas.

En algunos de los experimentos de este curso de laboratorio es necesario realizar extrapolación de la dependencia lineal hasta el punto de intersección con alguno de los ejes de coordenadas. Se acostumbra representar la parte extrapolada de la gráfica por medio de líneas a trazos.

Desde el punto de vista físico la extrapolación no es una operación completamente justificada, pues se está suponiendo que cierta dependencia funcional es válida aún fuera del intervalo en el cual se han obtenido los datos. Casi siempre el único argumento para efectuar la extrapolación es la creencia en que el fenómeno físico tendrá la misma apariencia cualitativa en la región a donde se extrae. En el ejemplo que estamos considerando, al extraer la recta hasta alcanzar el intercepto suponemos que la ley de Ohm se cumple cuando la corriente es infinita.

#### 2.2.4. Gráficas en papeles log-log y semi-log

Para analizar fácilmente algunas curvas es conveniente hacer cambios de variable. Una de las formas más fáciles de hacer esto es mediante el papel semilogarítmico o logarítmico. El objetivo es obtener una línea recta que, como se vió, es fácil de analizar. En el apéndice al final del manual encontrar copias de los diferentes tipos de papeles.

---

<sup>1</sup>Exactamente se cortan en el punto  $(x_c = \sqrt{\bar{x}^2}, y_c = (\bar{x} \cdot \bar{y} + \bar{y}x_c) / (x_c + \bar{x}))$ . En el ejemplo  $(\bar{x}, \bar{y}) = (5,5, 3,0)$  y  $(x_c, y_c) = (6,0, 3,3)$  están sobre la recta de mínimos cuadrados y coinciden dentro del margen de error de los puntos de dicha recta.

$x$	2	4	6	8	10	12
$y$	7.5	19.0	47.0	119.0	300.0	753.5
$\log y$	0.87	1.28	1.67	2.07	2.47	2.87

Tabla 2.3: Datos para realizar una gráfica logarítmica.

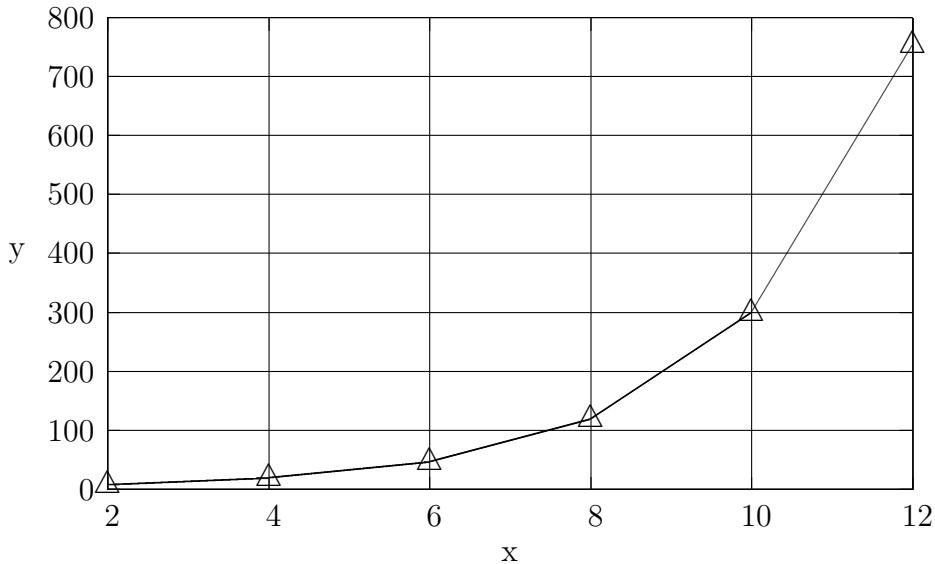


Figura 2.4: Gráfica de los datos de la tabla 2.3 en escala lineal.

#### 2.2.4.1. Papel semilogarítmico

Consideremos los datos que se muestran en la tabla 2.3, donde además de las filas con los datos experimentales aparece una tercera con el logaritmo decimal de la variable  $y$ .

En las figuras 2.4 y 2.5 aparecen las gráficas en papel milimetrado de  $y$  en función de  $x$  y de  $\log y$  en función de  $x$  respectivamente. Es claro que la línea que mejor se adapta a los puntos de la figura 2.5 es una recta. Esto significa que la ecuación buscada es de la forma  $y = b \cdot a^{mx}$ . En efecto, tomando el logaritmo decimal a los dos miembros de esta ecuación obtenemos

$$\log y = \log(b a^{mx}) = \log b + m x \log a.$$

Si ahora hacemos las sustituciones  $y' = \log y$ ,  $a' = m \log a$ , y  $b' = \log b$ , obtenemos

$$y' = b' + a' x,$$

que es la ecuación de una recta. En vez de calcular los valores de  $\log y$  y graficarlos como en la figura 2.5 existe una alternativa más conveniente: graficar  $x$  y  $y$  sobre un papel en el cual las escalas del eje  $y$  corresponde al logaritmo de las escalas del eje  $y$  de un papel

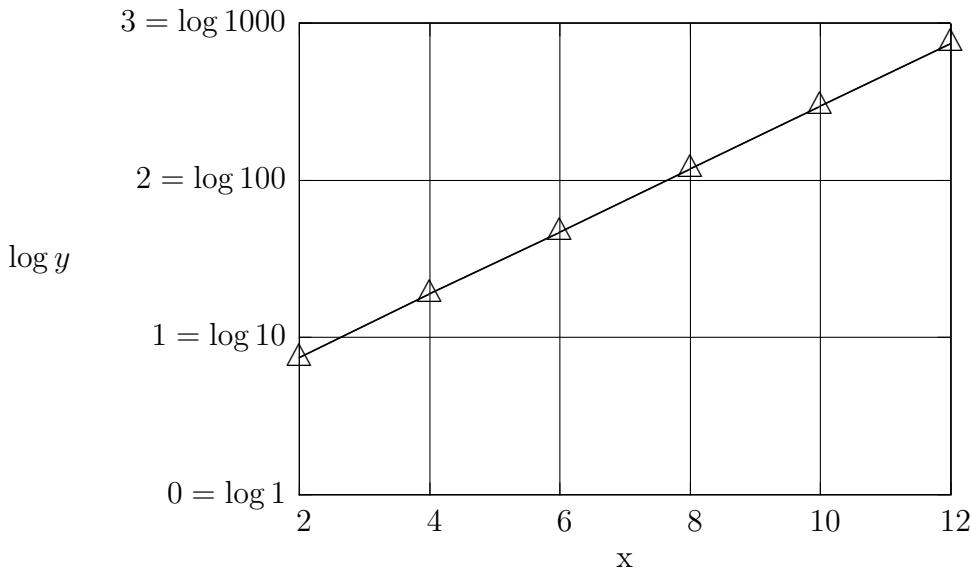


Figura 2.5: Gráfica con los datos de la tabla 2.3. Se grafica  $\log y$  en función de  $x$ .

milimetrado. Esto dá el tipo de papel “semilog” de la figura 2.6. Así cuando una tabla de datos de parejas  $(x, y)$  se gráficá en papel semilog, se localizan los puntos sobre el papel, sin previamente calcular el logaritmo de  $y$  pues el papel semilog lo hace de modo gráfico. Sin embargo, por comodidad, los números que se escriben en el eje vertical son los “ $y$ ” y no “ $\log y$ ”, a pesar de que lo que aparece graficado es  $(x, \log y)$ .

En este papel el eje horizontal tiene una escala milimetrada y el eje vertical una escala logarítmica. Si la escala logarítmica se repite dos veces el papel se llama de dos ciclos. Los valores en esta escala se numeran de tal manera que cada ciclo debe terminar en un número 10 veces mayor que el anterior, es decir, el primer ciclo empieza en 1 y termina en 10; el segundo empieza en 10 y termina en 100. El número de ciclos necesario estará dado por el número de potencias de 10 que abarquen los valores de  $y$ . En cada ciclo de las escalas del papel están escritos los mismos números,  $(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10)$ . Nótese que no puede aparecer el cero.

Ahora el valor de la pendiente  $a'$  en el papel semilog se calcula escogiendo 2 puntos  $(x_1, y_1)$ ,  $(x_2, y_2)$  por donde pase la recta, y evaluando:

$$a' = \frac{y'_2 - y'_1}{x_2 - x_1} = \frac{\log y_2 - \log y_1}{x_2 - x_1}.$$

Como  $a' = m \log a$  se sigue:

$$m = \frac{a'}{\log a} = \frac{\log \left( \frac{y_2}{y_1} \right)}{(x_2 - x_1) \log a}.$$

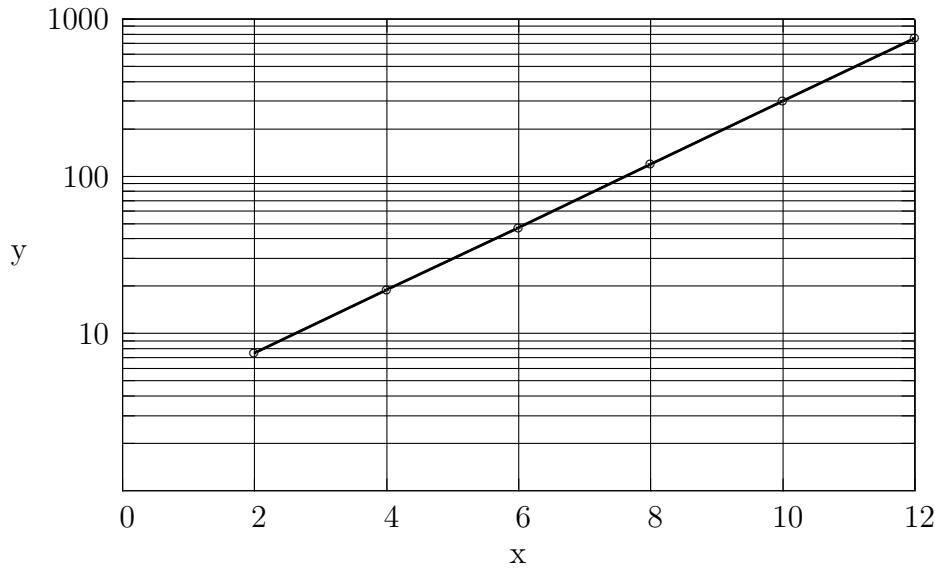


Figura 2.6: Gráfica con los datos de la tabla 2.3 en escala semilogarítmica.

El intercepto de la recta es  $b'$  y se lee de la gráfica 2.5. Debe sin embargo tenerse en cuenta si el eje  $y'$  cae sobre  $x = 0$ , y si el eje  $x$  cae sobre  $y' = 0$ .

**En síntesis:** Rectas en papel semilog corresponden a ecuaciones del tipo  $y = b a^{mx}$ , donde  $m$  está dada por la fórmula citada y  $b = 10^{b'}$  es el número que se lee directamente en el papel semilog.

**NOTA:** El papel semilog está definido con una base decimal. Por esto  $a' = m \log a$ . En muchos casos  $a$  es la base natural  $e$ , ( $e = 2,718281$ ) y  $a' = m \times 0,434$ . En el caso en el cual  $a = 10$  obviamente  $a' = m$ . Algunas relaciones importantes que tienen que ver con estos cambios de base son:

- 1) Relación entre logaritmo natural ( $\ln$ ) y logaritmo decimal ( $\log$ ):

$$\log x = 0,4343 \ln x; \quad \ln x = 2,3026 \log x.$$

- 2) Cambio de base en exponentiación:

$$e^x = 10^{0,4343x}; \quad 10^x = e^{2,3026x}.$$

Nótese que  $\log e \cdot \ln 10 = 1$ .

#### 2.2.4.2. Forma logarítmica o “papel log-log”

En este papel las dos escalas son logarítmicas. Puede ser de dos o tres ciclos. Si los datos se ajustan a una función de la forma  $y = b x^a$ , en papel logarítmico se obtiene una línea recta.

En efecto, tomando logaritmo decimal a ambos lados,

$$\log y = \log(b x^a) = a \log x + \log b.$$

Si se hacen los cambios de variable  $y' = \log y$ ,  $x' = \log x$ ,  $b' = \log b$  se sigue que  $y' = a x' + b'$ , donde  $a$  es la pendiente de la recta en papel logarítmico y  $b'$  es el intercepto.

Para calcular a  $a$  se escogen dos puntos  $P_1$  y  $P_2$  sobre la recta y se evalúa:

$$a = \frac{\log y_2 - \log y_1}{\log x_2 - \log x_1} = \frac{\log\left(\frac{y_2}{y_1}\right)}{\log\left(\frac{x_2}{x_1}\right)}.$$

Con  $(x_1, y_1)$ ,  $(x_2, y_2)$  leídos sobre el papel log-log. Una forma aún más simple de calcular a  $a$  consiste en **medir directamente con una regla** a  $\Delta y$  y  $\Delta x$  en centímetros o pulgadas y efectuar la operación  $(L_x/L_y)(\Delta y/\Delta x)$ . Note que es necesario medir con la misma regla la longitud de un ciclo de la respectiva escala logarítmica y luego dividir a  $\Delta y$  y  $\Delta x$  por la correspondiente longitud.

Por ejemplo, aplicando la fórmula anterior a la gráfica de la figura 2.7 obtenemos, tomando medidas en milímetros:

$$\frac{L_x}{L_y} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{63}{36} \frac{72}{59} = 2,1$$

Explique por qué es correcto el procedimiento anterior.

El intercepto de la recta es  $\log b$ , pero  $b$  se lee directamente con los números marcados en el papel log-log. Corresponde al valor de la coordenada vertical cuando la coordenada horizontal es 1 ( $\log 1 = 0$ ). Debe tenerse la precaución de extrapolar la línea si es necesario para tomar a  $b$  sobre un eje vertical que cae sobre el punto  $(0, 0) = (\log 1, \log 1)$ , ya que no siempre se tienen unos datos cuyo mínimo valor esté comprendido entre 1 y 10 y por esto el primer ciclo usado no necesariamente corresponde al intervalo 1 – 10, esto es al 0 – 1 del papel log-log.

**En síntesis:** Rectas en papel logarítmico corresponden en papel milimetrado (plano cartesiano normal) a  $y = b x^a$ .

**NOTA:** Se puede utilizar la fórmula para la pendiente  $a = \tan \alpha$ , siendo  $\alpha$  el ángulo de inclinación de la recta. Para ello bastaría medirlo con un transportador. Sin embargo este procedimiento es válido únicamente cuando los ciclos de las escalas sean iguales. Explique en su informe este comentario.

En cuanto al manejo de los errores, notemos que si  $\Delta u$  es el error del dato  $u$ , entonces el error del logaritmo de  $u$  será  $\Delta \ln(u) = \Delta u/u$ . Por lo tanto el error en el logaritmo se “amplifica”

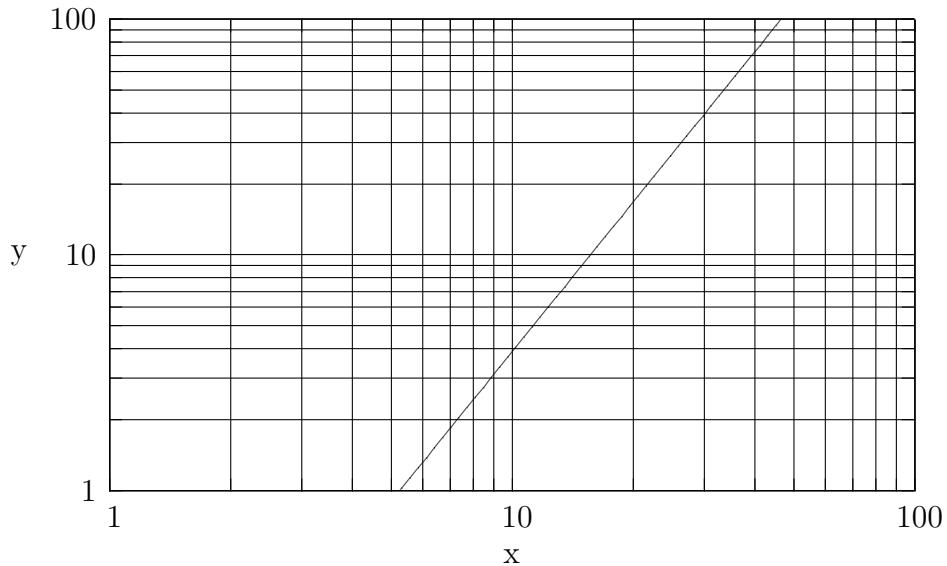


Figura 2.7: Gráfica en escala “log-log” de la función  $y = 0,03 x^2$ <sup>11</sup>.

si  $u$  es pequeño y es despreciable cuando  $u$  es grande. Para dibujar los rectángulos de errores basta colocar los valores de  $u \pm \Delta u$ , donde  $u$  puede ser  $x$  o  $y$ .

Note que en los papeles logarítmicos aparecen divisiones “gruesas” y “finas”. ¿Cuanto valen los errores de apreciación en las diferentes escalas logarítmicas? ¿Con cuantas cifras significativas se podrán obtener los valores de la pendiente y el intercepto?

### 2.2.5. Representación de resultados con diagramas de frecuencia

Los diagramas de frecuencia se utilizan en situaciones en las cuales se llega a detectar la estructura estadística de la serie de medidas considerada, o sea cuando se tiene una serie de medidas repetidas con muchos datos ( $n > 30$ ).

La representación diagramática se efectúa en una de estas tres formas equivalentes: histograma, polígono y curva de frecuencias.

La construcción del histograma de frecuencias se hace mediante el siguiente procedimiento. El dominio de validez de las cantidades medidas se divide en intervalos convenientes, y luego se determina cuantos resultados de las medidas caen dentro de cada intervalo, o sea la frecuencia. En el eje de las abscisas se colocan los intervalos examinados, y en el eje de las ordenadas las correspondientes frecuencias. Finalmente, encima de cada intervalo se construye un rectángulo cuya base es igual al intervalo considerado, y cuya altura es la correspondiente frecuencia.

El polígono de frecuencias se construye similarmente. De la mitad de cada intervalo de la cantidad medida se coloca un punto a una altura que corresponde a la frecuencia, y los puntos así obtenidos se unen formando una línea poligonal.

La curva de frecuencias es una construcción teórica. Se obtiene aproximando el polígono de frecuencias por una curva suave (ver la curva de la distribución normal, figura 1.2), en el caso en el cual se toman intervalos de clase infinitesimales, cada uno abarcando un infinito número de casos.

Ejemplos de experimentos en los cuales los resultados se representan con estos diagramas son un experimento sobre determinación de la energía de las partículas  $\alpha$  detectadas con ayuda de una emulsión nuclear, o un experimento sobre modelo de decaimiento radiactivo.

## 2.3. ALGUNAS NORMAS PARA GRAFICAR

1. Elaborar una tabla con los datos obtenidos experimentalmente. Estos datos pueden tabularse en columnas o filas. En la parte superior de las columnas, o la izquierda de las filas, se anota el símbolo o nombre de las cantidades medidas y sus unidades correspondientes. Toda tabla debe llevar un título explicativo que indique el significado de los datos y la forma como fueron obtenidos. Los datos deberán anotarse exactamente como son observados. Es correcto, y en muchos casos conveniente, incluir en la tabla de datos los resultados que han sido calculados, adicionando nuevas columnas o filas sin olvidar el encabezamiento de las mismas para mostrar claramente los números correspondientes a los datos y los números obtenidos mediante cálculos realizados con los datos.
2. Trazar dos líneas perpendiculares entre sí, llamadas el eje de abscisas (horizontal) y el eje de ordenadas (vertical), cuya intersección es el origen de coordenadas.
3. En cada eje debe indicarse explícitamente con un símbolo la cantidad que va a representarse y sus unidades. Por ejemplo: el eje vertical puede representar la velocidad de un móvil ( $m/s$ ) y el eje horizontal el tiempo ( $s$ ).
4. La escala de los ejes, cuando se usa papel milimetrado, debe escogerse de acuerdo a los valores máximos y mínimos de cada conjunto de datos de tal manera que la gráfica ocupe la mayor parte del papel disponible.
5. Se deben elegir, sin embargo, escalas que puedan subdividirse fácilmente. Valores recomendables de la longitud de las divisiones son: 1, 2, 5 y 10 unidades de los datos. No se recomiendan valores tales como 3, 7, 6 y 9 debido a que hacen difícil la localización y lectura de los valores en el gráfico. No es necesario que la escala sea la misma en ambos ejes, ni que el origen sea el punto (0,0).

6. Localice cada punto en su lugar aproximado y dibújelo en el papel. Si varias curvas se van a dibujar en el mismo papel y los puntos pueden interferir, use círculos, cuadrados y triángulos para encerrar los puntos correspondientes a cada curva. Es conveniente redondear los datos de acuerdo a la sensibilidad del papel.
7. Trace una línea suave a través de los puntos; no es necesario que pase por cada uno de ellos, pero deberán dejarse en lo posible igual número de puntos por encima y por debajo de la gráfica a trazar e igualmente espaciados de la misma. Un procedimiento riguroso, en el caso de líneas rectas, consiste en calcular la pendiente y el intercepto mediante las fórmulas de la teoría de mínimos cuadrados.
8. Toda gráfica debe llevar un título explicativo que se coloca una vez elaborada para darle significado a los resultados que muestra. Por ejemplo: “Velocidad de un deslizador en un riel de aire como una función del tiempo” en lugar de colocar “Velocidad vs. tiempo” .
9. **Es imperativo aprender a usar programas de computador para la elaboración de gráficas, que ya tienen definidas estas y otras normas y proporcionan gráficas impresas de excelente calidad: EUREKA, GNUPLOT, etc.**
10. Una tabla de datos primero se debe graficar en papel milimetrado. Si los puntos no se acomodan a una recta, graficar en papel semilog o en papel log-log. En alguno de estos dos se obtendrá una recta si la situación física se puede describir aproximadamente por una función potencia o por una exponencial. En situaciones más complicadas usualmente algún modelo teórico sugiere un cambio preliminar de variables que permiten obtener una línea recta en alguno de los tipos de papel estudiados. En otros casos las gráficas logarítmicas no se emplean para obtener “líneas rectas” sino simplemente para poder graficar datos que cubren un rango de muchos órdenes de magnitud.

## 2.4. PROCEDIMIENTO E INFORME

Los ejercicios 1 y 2 se refieren a los conjuntos de datos de las tablas 2.4 y 2.5, o los que el instructor sugiera. De acuerdo a las gráficas obtenidas en papel milimetrado realice luego gráficas logarítmicas o semilogarítmicas con el fin de obtener líneas rectas. Exprese las ecuaciones pertinentes en base decimal y natural.

### 2.4.1. Ejercicios

#### 2.4.1.1. Ejercicio 1

- a) Grafique los datos de velocidad contra tiempo de la tabla 2.4 en papel milimetrado y en papel log-log. Coloque la velocidad ( $v$ ) en el eje vertical y el tiempo ( $t$ ) en el eje horizontal.
- b) Dibuje las barras de error. Encuentre la ecuación de la gráfica logarítmica y a partir de ella encuentre la dependencia funcional entre  $v$  y  $t$ .