

# **MANUAL DE LABORATORIO.**

**Jorge Mahecha Gómez**

**Universidad de Antioquia  
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales  
Instituto de Física  
Medellín  
2009**



# Tabla de contenido

<b>1. Tratamiento estadístico de datos experimentales</b>	<b>1</b>
1.1. Objetivos . . . . .	1
1.2. Introducción . . . . .	1
1.2.1. Errores sistemáticos y aleatorios . . . . .	2
1.3. Cálculo del error de una medida individual . . . . .	3
1.3.1. Error en la medida directa de una cantidad . . . . .	4
1.3.2. Algunos elementos de la teoría de errores . . . . .	6
1.3.3. Teoría elemental de errores . . . . .	9
1.4. Cálculo del error en una cantidad medida varias veces . . . . .	12
1.4.1. La distribución normal . . . . .	12
1.4.2. Valor medio y medidas de dispersión . . . . .	13
1.4.3. La corrección de Student . . . . .	16
1.4.4. Error en la suma o diferencia de dos valores . . . . .	19
1.5. Números aproximados . . . . .	21
1.5.1. Cifras significativas, seguras e inseguras . . . . .	22
1.5.2. Reglas para el redondeo de los números . . . . .	23
1.5.3. Determinación del número de cifras significativas en el valor de una función . . . . .	23
1.5.4. Ensanchamiento del margen de error . . . . .	25
1.6. Procedimiento e informe . . . . .	26
1.6.1. Ejercicios . . . . .	28
1.7. Referencias . . . . .	31
<b>2. Tratamiento gráfico de datos experimentales</b>	<b>33</b>
2.1. Objetivos . . . . .	33
2.2. Representación de los resultados experimentales . . . . .	33
2.2.1. Representación gráfica de los resultados. . . . .	34
2.2.2. Gráfica de líneas curvas . . . . .	38
2.2.3. Interpolación y extrapolación . . . . .	38
2.2.4. Gráficas en papeles log-log y semi-log . . . . .	42
2.2.5. Representación de resultados con diagramas de frecuencia . . . . .	46
2.3. ALGUNAS NORMAS PARA GRAFICAR . . . . .	48

2.4. Procedimiento e informe . . . . .	49
2.4.1. Ejercicios . . . . .	49
2.5. REFERENCIAS . . . . .	51
<b>A. Unidades de medida</b>	<b>53</b>
A.1. Introducción . . . . .	53
A.2. Unidades fundamentales y complementarias en el “SI” . . . . .	53
A.3. Patrones de las unidades fundamentales y complementarias . . . . .	54
A.4. Unidades derivadas . . . . .	55
A.5. Algunas constantes físicas fundamentales . . . . .	56
A.6. Formulas dimensionales . . . . .	69
A.7. Multiplos y submultiplos decimales en el SI . . . . .	69
A.8. Algunas constantes numéricas . . . . .	70
A.9. Referencias . . . . .	72

# Índice de figuras

1.1.	Si la separación entre las divisiones del medidor de longitudes (constante de instrumento) es 1 cm entonces el error en la medida, sin redondeo es 1,0 cm.	7
1.2.	Distribución normal. En el eje $y$ está la densidad de probabilidad $f(x)$ . $\bar{x}$ es la media y $\sigma$ es la desviación estandar. . . . .	13
1.3.	Determinación del margen de error de una medida teniendo en cuenta el número de cifras significativas. . . . .	26
1.4.	Errores de apreciación en la determinación de una imagen producida con una lente convergente. . . . .	30
2.1.	Esquema del montaje experimental para determinar la dependencia entre la corriente y el voltaje en un circuito eléctrico. . . . .	35
2.2.	Gráfica de $1/I$ contra $R$ elaborada con los datos de la tabla 2.1. Las líneas verticales alrededor de cada punto representan el error en $1/I$ . El cambio de variable, $1/I$ en vez de $I$ , llevó a la no uniformidad del margen de error. . . .	37
2.3.	Gráfica de $1/I$ contra $R$ elaborada con los datos de la tabla 2.1, de acuerdo a la teoría de mínimos cuadrados. Nótense las dos líneas límites entre las cuales deben estar todos los datos. . . . .	39
2.4.	Gráfica de los datos de la tabla 2.3 en escala lineal. . . . .	43
2.5.	Gráfica con los datos de la tabla 2.3. Se grafica $\log y$ en función de $x$ . . . .	43
2.6.	Gráfica con los datos de la tabla 2.3 en escala semilogarítmica. . . . .	44
2.7.	Gráfica en escala “log-log” de la función $y = 0,03 x^{2,11}$ . . . . .	47



# Índice de tablas

1.1. Factores de corrección de Student. $n$ es el número de medidas. . . . .	18
1.2. Medidas de una longitud y sus desviaciones respecto a la media. . . . .	19
1.3. Propagación de errores en determinación indirecta de cantidades. . . . .	29
1.4. Medidas de la longitud de una cuerda. . . . .	30
1.5. Medidas de la longitud de una cuerda. . . . .	31
2.1. Datos de las medidas de corriente y resistencia en un circuito eléctrico. . . . .	36
2.2. Datos para el cálculo de la pendiente y el intercepto usando las fórmulas del método de mínimos cuadrados. . . . .	40
2.3. Datos para realizar una gráfica logarítmica. . . . .	42
2.4. (Ejercicio 1.) Velocidad contra tiempo. . . . .	50
2.5. (Ejercicio 2.) Número de núcleos $N(t)$ contra tiempo. . . . .	50
2.6. (Ejercicio 3.) Distribución de frecuencias del tiempo de vida de un producto. Los 41 datos se clasificaron en 7 intervalos de clase de longitud 0,5 años. . . . .	51
A.1. Unidades fundamentales en el SI . . . . .	56
A.2. Unidades derivadas en el SI . . . . .	57
A.2. Unidades derivadas en el SI . . . . .	58
A.2. Unidades derivadas en el SI . . . . .	59
A.2. Unidades derivadas en el SI . . . . .	60
A.2. Unidades derivadas en el SI . . . . .	61
A.3. Algunas unidades no pertenecientes al SI cuyo uso es permitido . . . . .	62
A.4. Algunas unidades del sistema CGS que tienen nombres especiales . . . . .	62
A.5. Factores para convertir al SI algunas unidades no pertenecientes al SI . . . . .	63
A.5. Factores para convertir al SI algunas unidades no pertenecientes al SI . . . . .	64
A.5. Factores para convertir al SI algunas unidades no pertenecientes al SI . . . . .	65
A.5. Factores para convertir al SI algunas unidades no pertenecientes al SI . . . . .	66
A.5. Factores para convertir al SI algunas unidades no pertenecientes al SI . . . . .	67
A.6. Valores de algunas constantes físicas fundamentales . . . . .	67
A.6. Valores de algunas constantes físicas fundamentales . . . . .	68
A.6. Valores de algunas constantes físicas fundamentales . . . . .	69
A.7. Prefijos para la formación de unidades decimales . . . . .	71



# **Capítulo 1**

## **TRATAMIENTO ESTADÍSTICO DE DATOS EXPERIMENTALES (Cifras significativas y errores)**

### **1.1. OBJETIVOS**

Aprender a representar correctamente los números obtenidos en un experimento y a efectuar operaciones aritméticas con ellos teniendo en cuenta el número de cifras significativas en el resultado. Aprender a tratar los errores en diferentes tipos de medidas: medidas individuales ( $n = 1$ ), número pequeño de medidas ( $n < 30$ ) y número estadístico de medidas ( $n > 30$ ).

### **1.2. INTRODUCCIÓN**

En el laboratorio de física se da gran importancia a la manipulación de los datos obtenidos en un experimento. Como en la materia teórica sobre ESTADÍSTICA se dan los fundamentos teóricos de muchas de las definiciones y técnicas acerca del tratamiento de los datos experimentales, nos limitaremos a presentar los resultados sin demostración, entendiendo que lo más importante para el estudiante es la comprensión de estos conceptos y la capacidad de usarlos.

Las ciencias exactas y técnicas dependen fundamentalmente de la obtención y análisis de datos numéricos. Es por lo tanto indispensable un entrenamiento de la capacidad de analizar la validez de un conjunto de datos y de representarlos en forma gráfica o tabulada. La presente sesión de laboratorio está dedicada al análisis estadístico de los resultados experimentales y la siguiente a la representación gráfica de los mismos.

### 1.2.1. Errores sistemáticos y aleatorios

El trabajo numérico en física, y en la ciencia en general, tiene como elemento imprescindible el uso de valores aproximados. Desde la aproximación sobre valores previamente exactos, hasta la aproximación inherente a todo proceso de experimentación. Los números obtenidos experimentalmente siempre poseen determinado grado de incerteza.

Algunas veces en fórmulas teóricas aparecen números racionales de muchas cifras o números irracionales que en principio poseen un infinito número de cifras (como  $\pi$ ,  $1/3$ ,  $e$  y similares), pero que por razones de conveniencia práctica es necesario manipularlos con un número relativamente pequeño de cifras significativas.

A veces en la práctica se trabaja con números obtenidos experimentalmente que aparentemente no encierran error, tales como los provenientes de conteos, pero aún en estos casos existe determinado grado inherente de aproximación. Un caso muy conocido por los estudiantes es el manejo de las calificaciones, con las cuales se elabora la nota final, redondeada a dos cifras significativas.

Toda clasificación de los tipos de errores requiere diferentes condiciones matemáticas; pero aquí nos limitaremos a presentar una clasificación cualitativa. En cuanto a su origen los errores se clasifican en *sistemáticos y aleatorios*.

*Errores sistemáticos.* Son aquellos que permanecen constantes en el curso de un experimento, afectando de manera predecible los resultados. Entre las fuentes de tales errores están:

- a. La descalibración de los aparatos de medida o el uso de escalas inadecuadas.
- b. Los cambios permanentes en el estado del medio en el cual se efectua la medida.
- c. Las características individuales del experimentador que introducen los llamados errores sujetivos o fisiológicos.
- d. La limitada sensibilidad de los aparatos de medida (uso de una balanza de laboratorio en vez de una balanza analítica, por ejemplo).
- e. La exactitud limitada del valor de constantes universales usadas en los cálculos.
- f. Las aproximaciones realizadas en el modelo teórico usado para comparar los resultados de determinado experimento (modelos teóricos con cuerdas que no tienen masa, cuerdas inextensibles, masas puntuales, fricción despreciable, recipientes impermeables al calor, etc.).

La principal característica de los errores sistemáticos es que el grado de error que introducen es siempre el mismo. Gran parte del esfuerzo por mejorar los aparatos de medida o los experimentos consiste en la reducción de este tipo de errores.

*Errores aleatorios.* Son consecuencia del comportamiento combinado de los aparatos de medida, del sistema observado y de nuestros sentidos.

Es una verdad del trabajo experimental (para muchos un dolor de cabeza) que cuando una misma persona realiza la misma medida varias veces, con el mismo instrumento y en las mismas condiciones, obtiene diferentes resultados. Por esto se introduce como postulado fundamental de la teoría de errores que en todo proceso de medición se genera un conjunto de números aleatorios. Por esta razón es que el trabajo experimental requiere del uso extensivo de la teoría matemática de las probabilidades y de la estadística.

Entre estos errores se destacan los errores de apreciación y los provenientes de pequeñas variaciones aleatorias de las condiciones del experimento. Los de apreciación resultan en medidas donde el experimentador debe usar sus sentidos para tomar una decisión antes de concluir cual es el valor de la medida (por ejemplo al definir cuando una balanza está equilibrada, o cuando un microscopio está enfocado, o al estimar una fracción dentro de la división más pequeña de la escala de lectura). Ejemplos de variaciones aleatorias son los cambios de temperatura, las vibraciones en el piso o en el aire, el efecto de la fricción sobre el equilibrio de una balanza, etc.

El error aleatorio en una medida ( $e_a$ ), independiente de como esté definido, depende del número de veces que se repita la medida ( $n$ ) a través de la relación:

$$e_a \propto \frac{1}{\sqrt{n}}. \quad (1.1)$$

De aquí se deduce una consecuencia práctica: toda medida, dentro de las posibilidades, debe repetirse varias veces.

A pesar de que algunas veces los errores sistemáticos son mayores que los aleatorios, estos últimos tienen un lugar preponderante en la teoría del tratamiento de los datos experimentales. En primer lugar porque los instrumentos modernos usados en la ciencia y la técnica colocan los errores sistemáticos muy por debajo de las variaciones de la mayoría de las mediciones de procesos naturales. Segundo, porque muchos de los errores sistemáticos introducidos por el experimentador pueden ser tratados matemáticamente de la misma manera que los aleatorios. Por esto es que muchas veces se habla en general de “errores” sin mirar su origen.

### 1.3. CÁLCULO DEL ERROR DE UNA MEDIDA INDIVIDUAL

Cuando se usan aparatos poco sensibles, la repetición de las medidas dar lugar todas las veces al mismo resultado; en este caso es inútil tomar muchas medidas. Así, si se mide la

longitud de un alfiler usando una regla milimétrica (precisión de  $mm$ ) o un “pié de rey” (precisión de  $0,1mm$ ), casi todas las medidas, si están bien tomadas, darán el mismo resultado. Como error de la medida en este caso se tomará el valor de la apreciación o constante del instrumento. Pero si efectuamos las medidas con un tornillo micrométrico (precisión de  $0,01mm$ ), entonces se encontrará resultados diferentes al repetir las medidas.

No siempre es posible repetir varias veces una medida. Por ejemplo, cuando se realiza el seguimiento experimental de la variación de la temperatura de algún sistema con el curso del tiempo solo es posible obtener un valor en cada instante. Por estas razones es indispensable formular una teoría de los errores de medidas individuales.

### 1.3.1. Error en la medida directa de una cantidad

Sea  $X$  el “*valor verdadero*” de la cantidad medida, y sea “ $x$ ” el valor obtenido en una medida. El *error* en la medida será  $X - x$ . Esta diferencia puede ser mayor o menor que cero debido al carácter aleatorio de la medida; por esto se define el *error absoluto*  $E = |X - x|$ . Surge la siguiente pregunta: ¿cómo es posible calcular el error absoluto cuando no sabemos cuál es el “*valor verdadero*”? Por esto, en la práctica, el error absoluto se define no en relación a una medida particular con resultado  $x$  sino en relación a una medida arbitraria. Se define como cota o límite superior para todos los posibles  $|X - x|$  a cierto  $\Delta x$  tal que para cualquier  $x$  se cumple  $E = |X - x| \leq \Delta x$ . A  $\Delta x$  se le denomina *límite superior del error absoluto* o simplemente *límite del error absoluto*.

La cantidad  $\Delta x$  no está determinada de manera única porque si  $\Delta x$  satisface la desigualdad  $|X - x| \leq \Delta x$ , cualquier otro  $(\Delta x)'$  tal que  $(\Delta x)' \geq \Delta x$  también la satisface. Por tanto más que de hallar una cota superior se trata es de hallar la cota superior mínima. La cota superior mínima sólo depende del instrumento de medida usado y de la definición del redondeo de los resultados experimentales (aunque es diferente según se realice una sola medida, un número pequeño de medidas o un número muy grande de medidas).

Por tanto, si por algún método se ha determinado a  $\Delta x$ , entonces para cualquier resultado experimental  $x$  se cumple que el “*valor verdadero*”  $X$  de la cantidad satisface la desigualdad:

$$x - \Delta x \leq X \leq x + \Delta x, \quad (1.2)$$

o en forma más concisa,

$$X = x \pm \Delta x. \quad (1.3)$$

El instrumental moderno es así diseñado para depender muy poco de las condiciones individuales del experimentador, por lo cual el efecto de éste último puede asumirse ínfimo. Los sistemas de la naturaleza pueden clasificarse en cuanto a la predictabilidad de su comportamiento como “*regulares*” (deterministas) e “*irregulares*” (indeterministas). Así es que si un experimento opera sobre un sistema en un estado regular es de esperarse que el sistema mismo no aporte efectos aleatorios apreciables al resultado de la medida. Por tanto es de

utilidad práctica considerar que la cantidad  $\Delta x$  en una medida individual depende solamente del instrumento.

Las inexactitudes inherentes a un instrumento de medida no necesariamente están reflejadas en sus escalas. Por ejemplo, ¿cómo podemos estar seguros de que los valores marcados en la escala de un aparato son exactos? Por ésto el fabricante debe dar un par metro para certificar la exactitud de la escala. Este par metro,  $k$ , se denomina *clase de exactitud* del instrumento y expresa el error relativo porcentual de la escala considerada, respecto a un instrumento más preciso (etalón). Si  $x_m$  es el rango de la escala del instrumento, el error debido a la exactitud del instrumento (error instrumental) es

$$\Delta'' x = \frac{k x_m}{100}. \quad (1.4)$$

Por otra parte, con un instrumento de clase dada, existe un error atribuible a nuestros sentidos (error de lectura)

$$\Delta' x = \frac{C}{\delta}. \quad (1.5)$$

$C$  se denomina *apreciación* o *constante del instrumento*.  $\delta$  es el número de subdivisiones entre dos rayas consecutivas, no marcadas pero determinadas por ejemplo con la ayuda de un nonio; cuando no hay tales subdivisiones se toma  $\delta = 2$ ; usualmente con un nonio decimal  $\delta = 10$ .

Las divisiones pequeñas en una escala de un instrumento se denominan “finas” si están separadas menos de  $1 mm$  y “gruesas” si están separadas más de  $1 mm$ . En escalas finas se toma  $\delta = 2$ , pero en escalas gruesas se puede tomar  $\delta = 10$ . La razón de esto es que el ojo humano tiene capacidad de distinguir dos puntos próximos separados unos  $0,1 mm$ ; además experimentos sicofísicos han demostrado que es posible “adivinar” un valor en una escala gruesa con un error del 10 %. O sea que en escalas gruesas es posible tener a “ojos” una lectura exitosa de las décimas de división aunque no estén marcadas con una raya, si la aguja del instrumento es lo suficientemente delgada; una lectura de este tipo se denomina “sin redondeo”, y una en la cual se toma  $\delta = 2$  se denomina “con redondeo”. El error de una lectura sin redondeo es, pues,  $\Delta' x = C/10$ .

Examinemos un ejemplo en el cual se ilustran las definiciones de  $X$ ,  $x$  y  $\Delta x$ . Consideraremos un segmento de una cinta del medidor de distancias usado por un agrimensor, figura 1.1. La apreciación de la cinta es de  $1 cm$  y todas las divisiones están marcadas con un número. Como cota superior mínima del error absoluto de este instrumento puede tomarse, con redondeo<sup>1</sup>,  $C/2 = 0,5 cm$ .

Independientemente de si el objeto cuya longitud estamos determinando tiene o no, en apariencia, uno de sus extremos frente al número 353 cuando tomamos la medida, podemos decir

---

<sup>1</sup>En agrimensura no tiene sentido considerar escalas “finas”.

que hay una incertidumbre en el resultado  $353\text{ cm}$  dada por la cota superior mínima del error absoluto. O sea que la longitud buscada será igual a

$$X = x \pm \Delta x = (353,0 \pm 0,5) \text{ cm}.$$

Más indicativos que el *error absoluto*  $E = |X - x|$  son el llamado *error relativo* definido por

$$R = \frac{E}{|x|} = \frac{|X - x|}{|x|}, \quad (1.6)$$

y el *error relativo porcentual* definido por

$$R_{\%} = \frac{E}{|x|} \cdot 100 = \frac{|X - x|}{|x|} \cdot 100. \quad (1.7)$$

Se definen también la *cota superior del error relativo*

$$R_x = \frac{\Delta x}{|x|}, \quad (1.8)$$

y la *cota superior del error relativo porcentual*

$$R_{x\%} = \frac{\Delta x}{|x|} \cdot 100. \quad (1.9)$$

Por ejemplo si dos medidas de longitud con el instrumento señalado son

$$L_1 = (203,5 \pm 0,5) \text{ cm} \text{ y } L_2 = (7,2 \pm 0,5) \text{ cm},$$

se obtendrá para la cota superior relativa porcentual del error, respectivamente

$$R_{1\%} = 0,25\% \text{ y } R_{2\%} = 6,9\%.$$

Para simplificar en vez de *cota superior del error absoluto*  $\Delta x$ , *cota superior del error relativo*  $R_x$  y *cota superior del error relativo porcentual*  $R_{x\%}$  en lo sucesivo emplearemos respectivamente las expresiones *error absoluto*, *error relativo* y *error relativoporcentual*.

Es importante señalar que  $\Delta x$  se expresa en las unidades de la cantidad medida,  $R_x$  es adimensional y  $R_{x\%}$  se expresa en porcentaje.

### 1.3.2. Algunos elementos de la teoría de errores

#### 1.3.2.1. Cálculo del error de una cantidad que depende funcionalmente de cantidades que se determinan experimentalmente

Sea una cantidad  $U$  que est. definida en términos de un conjunto de otras  $r$  cantidades  $V_1, V_2, \dots, V_r$  a través de la fórmula

$$U = f(V_1, V_2, \dots, V_r). \quad (1.10)$$

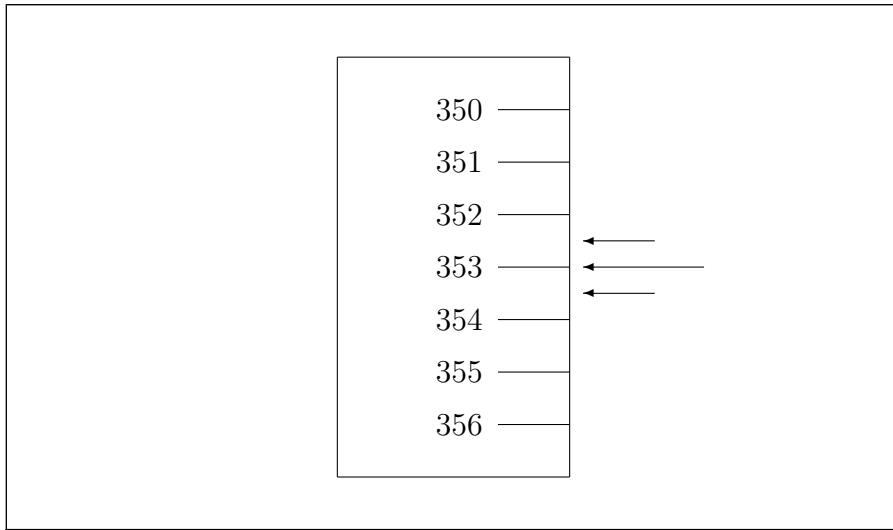


Figura 1.1: Si la separación entre las divisiones del medidor de longitudes (constante de instrumento) es 1 cm entonces el error en la medida, sin redondeo es 1,0 cm.

Es decir, se evalúa  $U$  por medio de una medida indirecta. Un ejemplo de dependencia de este tipo es la definición de densidad,  $\rho = M/V$ , donde  $M$  es la masa y  $V$  es el volumen que ocupa. En este caso  $D$  hace las veces de  $U$ ,  $M$  las veces de  $V_1$ ,  $V$  las veces de  $V_2$  y el número de cantidades de que depende la densidad, 2, hace las veces de  $r$ . La  $f$ , que es la relación funcional entre las variables, en este ejemplo es el cociente, /.

Si se realizan medidas de cada una de las cantidades  $V_1, V_2, \dots, V_r$  se obtendrán ciertos resultados  $v_1, v_2, \dots, v_r$ , cada uno con un error absoluto,  $\Delta v_1, \Delta v_2, \dots, \Delta v_r$ . Debe quedar claro que  $v_i$  es el resultado de una única medida de la cantidad  $V_i$  y que medir dos cantidades  $V_k$  y  $V_l$  puede requerir el uso de dos aparatos de medida de diferente naturaleza. El problema consiste en saber cuál es el valor correspondiente de la cantidad  $U$ , o sea hallar a  $u \pm \Delta u$ . La cantidad  $u$  dependerá sólo de  $v_1, v_2, \dots, v_r$  y  $\Delta u$  dependerá sólo de  $\Delta v_1, \Delta v_2, \dots, \Delta v_r$  y de las derivadas de  $f$ ,  $\partial f / \partial v_i$ , evaluadas en  $V_i = v_i$ :

$$u = f(v_1, v_2, \dots, v_r), \quad (1.11)$$

y

$$\Delta u = \sum_{i=1}^r \left| \frac{\partial f}{\partial v_i} \right| \Delta v_i, \quad (1.12)$$

donde  $\partial f / \partial v_i$  es la derivada parcial<sup>2</sup> de la función  $f$  respecto a la variable  $v_i$ . A pesar de

<sup>2</sup>No es motivo de pánico el no haber visto antes el símbolo  $\partial$ : muy pronto Usted lo aprenderá en su curso de cálculo, pero por ahora Usted puede fácilmente consultar las reglas para efectuar derivadas parciales. Y si no sabe qué es una derivada “no parcial”, ...

que las derivadas parciales pueden ser positivas, negativas, o nulas, la búsqueda de una cota superior para el error absoluto implica tomar valores absolutos.

Siguiendo con el ejemplo del cálculo de la densidad, supongamos que se miden la masa  $M$  y el volumen  $V$  de un objeto con los resultados  $M = (10 \pm 0,001) \text{ kg}$  y  $V = (1 \pm 0,05) \text{ m}^3$ . Entonces  $v_1 = m = 10 \text{ kg}$ ,  $v_2 = v = 1 \text{ m}^3$ ,  $\Delta v_1 = \Delta m = 0,001 \text{ kg}$  y  $\Delta v_2 = \Delta v = 0,05 \text{ m}^3$ . En este caso  $d = m/v$ ,  $\partial d/\partial v = -m/v^2$  y  $\partial d/\partial m = 1/v$ .

En consecuencia se obtendrá para el valor de  $d$ ,

$$d = \frac{m}{v} = \frac{10 \text{ kg}}{1 \text{ m}^3} = 10 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3},$$

y para los valores de las derivadas parciales

$$\begin{aligned}\frac{\partial d}{\partial v} &= -\frac{10 \text{ kg}}{(1 \text{ m}^3)^2} = -10 \frac{\text{kg}}{\text{m}^6}, \\ \frac{\partial d}{\partial m} &= \frac{1}{1 \text{ m}^3}.\end{aligned}$$

De aquí se obtiene para el error absoluto de  $d$ ,

$$\begin{aligned}\Delta d &= \left| \frac{\partial d}{\partial v} \right| \Delta v + \left| \frac{\partial d}{\partial m} \right| \Delta m \\ &= (10 \times 0,05 + 1 \times 0,001) \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} = 0,5 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}.\end{aligned}$$

Por tanto la densidad calculada vale  $D = (10 \pm 0,5) \text{ kg/m}^3$ .

Hay una manera más clara de obtener un estimado de  $D$ . Como el valor del volumen oscila entre  $0,95$  y  $1,05 \text{ m}^3$ , y el de la masa entre  $9,999$  y  $10,001 \text{ kg}$ , el menor valor del cociente  $m/v$  será igual a  $9,999/1,05 = 9,52 \text{ kg/m}^3$  y el mayor será  $10,001/0,95 = 10,5 \text{ kg/m}^3$ . La semisuma (valor promedio) de estas cantidades será  $10,0$  y la semidiferencia (error absoluto) será  $0,5$ .

Los errores relativo y porcentual en este ejemplo son

$$R_d = \frac{\Delta d}{|d|} = 0,05,$$

y

$$R_{d\%} = \frac{\Delta d}{|d|} \cdot 100 = 5 \text{ \%}.$$

### 1.3.3. Teoría elemental de errores

Debido a que el uso de las derivadas parciales a menudo da lugar a expresiones de difícil manejo usando simplemente calculadoras de bolsillo, es conveniente recurrir a la llamada “teoría elemental de errores”, con métodos similares a los del último cálculo mostrado en la sección 1.3.1.

En el cálculo de una densidad, por ejemplo, se requiere evaluar

$$D = \frac{M}{V}.$$

Si los valores experimentales de la masa y del volumen son:

$$M = m \pm \Delta m \quad \text{y} \quad V = v \pm \Delta v,$$

entonces los valores máximo y mínimo de la densidad son

$$d_{máx} = \frac{m_{máx}}{v_{mín}} \quad \text{y} \quad d_{mín} = \frac{m_{mín}}{v_{máx}}.$$

Como  $D = d \pm \Delta d$  se sigue que  $d_{máx} = d + \Delta d$ , por tanto

$$\Delta d = |d_{máx} - d|.$$

Como el valor medio  $d$  es igual a

$$d = \frac{d_{máx} + d_{mín}}{2},$$

se sigue que

$$\Delta d = \frac{d_{máx} - d_{mín}}{2}.$$

En el mencionado cálculo de una densidad,  $d_{máx} = 10,53 \text{ kg/m}^3$ ,  $d_{mín} = 9,52 \text{ kg/m}^3$ ; entonces  $d = 10,0 \text{ kg/m}^3$  y  $\Delta d = 0,5 \text{ kg/m}^3$ .

Un ejemplo un poco más complicado consiste en el cálculo de la densidad de un líquido cuando se miden las masas del recipiente sólo y del recipiente lleno con el líquido. Para ello se usa la siguiente expresión:

$$d_l = \frac{m_l - m_o}{m_a - m_o} \cdot d_a, \tag{1.13}$$

donde  $d_l$  es la densidad del líquido,  $m_l$  es la masa del recipiente lleno del líquido,  $m_a$  es la masa del recipiente lleno de agua,  $m_o$  es la masa del recipiente vacío y  $d_a$  es la densidad del agua. Esta fórmula se obtuvo igualando los volúmenes del agua y del líquido. El problema consiste en calcular la densidad del líquido  $D_l = d_l \pm \Delta d_l$  asumiendo que la densidad del agua es un número exacto,  $D_a = d_a$  y que se conocen  $m_o$ ,  $m_l$  y  $m_a$  junto con sus errores

absolutos. Como las tres masas se determinan con la misma balanza sus errores absolutos son iguales (bajo la hipótesis fundamental de que los errores absolutos sólo dependen del instrumento). Por lo tanto  $\Delta m_o = \Delta m_l = \Delta m_a = \Delta m$ . Los valores máximo y mínimo de  $d_l$  serán en consecuencia

$$d_{l \text{ máx}} = \frac{(m_l - m_o)_{\text{máx}}}{(m_a - m_o)_{\text{mín}}} \cdot d_a = \frac{m_l - m_o + 2 \Delta m}{m_a - m_o - 2 \Delta m} \cdot d_a, \quad (1.14a)$$

$$d_{l \text{ mín}} = \frac{(m_l - m_o)_{\text{mín}}}{(m_a - m_o)_{\text{máx}}} \cdot d_a = \frac{m_l - m_o - 2 \Delta m}{m_a - m_o + 2 \Delta m} \cdot d_a. \quad (1.14b)$$

En consecuencia, el valor medio es

$$d_l = \frac{d_{l \text{ máx}} + d_{l \text{ mín}}}{2}, \quad (1.14c)$$

y el error es

$$\Delta d_l = \frac{d_{l \text{ máx}} - d_{l \text{ mín}}}{2}. \quad (1.14d)$$

Comparemos las expresiones explícitas para el error en un cociente calculado mediante la teoría elemental de errores y la teoría de errores con medidas individuales basada en el cálculo diferencial.

El cálculo del error absoluto de  $u$  en

$$u = \frac{x}{y}, \quad (1.15a)$$

mediante la fórmula (1.12) dá el resultado

$$\Delta u = \frac{x \cdot \Delta y + y \cdot \Delta x}{y^2}, \quad (1.15b)$$

y mediante la teoría elemental

$$\begin{aligned}
 \Delta u &= \frac{1}{2}(u_{\max} - u_{\min}) \\
 &= \frac{1}{2}\left(\frac{x + \Delta x}{y - \Delta y} - \frac{x - \Delta x}{y + \Delta y}\right) \\
 &= \frac{x \Delta y + y \Delta x}{y^2 - (\Delta y)^2} \\
 &\approx \frac{x \Delta y + y \Delta x}{y^2}
 \end{aligned} \tag{1.15c}$$

Se observa que los dos resultados coinciden si se desprecian los términos de orden superior al primero (es decir, proporcionales a  $(\Delta x)^2$ ,  $(\Delta y)^2$  y  $\Delta y \cdot \Delta x$ ).

Como se ve, a pesar de su simplicidad y eficacia en el trabajo de laboratorio, la “teoría elemental de errores” tiene sus limitaciones. No funciona cuando los errores absolutos son grandes. Tampoco cuando la variable dependiente  $u$  considerada como función de la variable independiente  $x$  tiene valores extremos, máximos o mínimos, cuando  $x$  cae dentro del intervalo  $x \in [x, x + \Delta x]$ .

Como referencia damos enseguida las expresiones para los errores en algunas funciones simples, usando la fórmula (1.12):

$$\Delta(x \pm y) = \Delta x + \Delta y \tag{1.16a}$$

$$\Delta(x \cdot y) = x \cdot \Delta y + y \cdot \Delta x \tag{1.16b}$$

$$\Delta\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{x \cdot \Delta y + y \cdot \Delta x}{y^2} \tag{1.16c}$$

$$\Delta \sqrt{x} = \frac{\Delta x}{2\sqrt{x}} \tag{1.16d}$$

$$\Delta \ln(x) = \frac{\Delta x}{x} \tag{1.16e}$$

$$\Delta x^a = a x^{a-1} \Delta x \tag{1.16f}$$

$$\Delta\left(\frac{x \cdot y}{z}\right) = \frac{y}{z} \Delta x + \frac{x}{z} \Delta y + \frac{x \cdot y}{z^2} \Delta z. \tag{1.16g}$$

Se sobreentiende que los lados derechos en estas fórmulas serán evaluados tomando a  $x$ ,  $y$  y  $z$  en valor absoluto. Estas fórmulas son válidas para el cálculo del error cuando se realiza una única medida, y son aplicables, según veremos, también en el caso de medidas repetidas cuando no exista correlación entre las variables  $x$  y  $y$ .

## 1.4. CÁLCULO DEL ERROR EN UNA CANTIDAD MEDIDA VARIAS VECES

Cuando una medida se realiza varias veces, utilizando un instrumento de gran sensibilidad, precisión y exactitud, el error se disminuye a medida que se aumenta el número de repeticiones de la medida. El resultado en este caso depende no sólo del instrumento sino de consideraciones de naturaleza estadística.

En particular se halla que el error en una función **no** se puede en principio calcular mediante la fórmula (1.12), la cual sin embargo sigue siendo útil en muchos casos.

### 1.4.1. La distribución normal

En la introducción se señaló que el resultado de una medida es un fenómeno de naturaleza aleatoria que consiste en la obtención de un número al azar dentro de un intervalo dado por la ecuación (1.2). Cuando en un experimento se toma varias veces la medida de una cantidad, realmente se está extrayendo una **muestra** con la pretención de que sea representativa del conjunto infinito de resultados posibles.

Supongamos que al medir  $n$  veces una cierta cantidad física  $X$ , en idénticas condiciones, se obtiene una serie de  $n$  valores  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . Como la aparición de un número particular  $x$  dentro de los  $x_i$  es algo puramente fortuito, tiene sentido preguntarse acerca de la *probabilidad* de hallar un resultado  $x$  al medir  $n$  veces la cantidad física  $X$ . Lo que primero enseña la estadística es a realizar histogramas, o sea a representar el número  $f_x$  de veces (frecuencia) que se obtiene el valor particular  $x$  dentro del conjunto de las  $n$  cantidades  $x_i$ . El histograma o representación gráfica de las parejas  $(x, f_x)$ , no tiene la misma apariencia azarosa que presenta el conjunto de números medidos  $x_i$ , sino que trata de adaptarse a una función definida. La “envolvente” del conjunto de barras del histograma tiende a una curva suave cuando el número de datos aumenta, o sea tiende a una función de la variable continua  $x$ . La dependencia funcional entre  $x$  y la probabilidad  $f_x/n$  de encontrar ese  $x$  se denomina *función de distribución de probabilidades*.

Se habla de variables aleatorias *discretas* o *continuas* de acuerdo a si los valores que puede tomar  $X$  son contables (por ejemplo: 1, 2, 3, 4, ...) o continuos (por ejemplo:  $x \in [-1, 1]$ ). Así, el número de individuos de una especie biológica es una variable discreta y el peso de uno de ellos es una variable continua. Se ha encontrado que las medidas de variables discretas y continuas se acomodan a funciones de distribución diferentes, y que la mayoría de las variables aleatorias continuas satisfacen la *función de distribución normal*. Muchas mediciones en física corresponden a variables continuas, o a variables discretas que se comportan de manera aproximadamente continua, y pueden describirse estadísticamente usando la distribución normal.

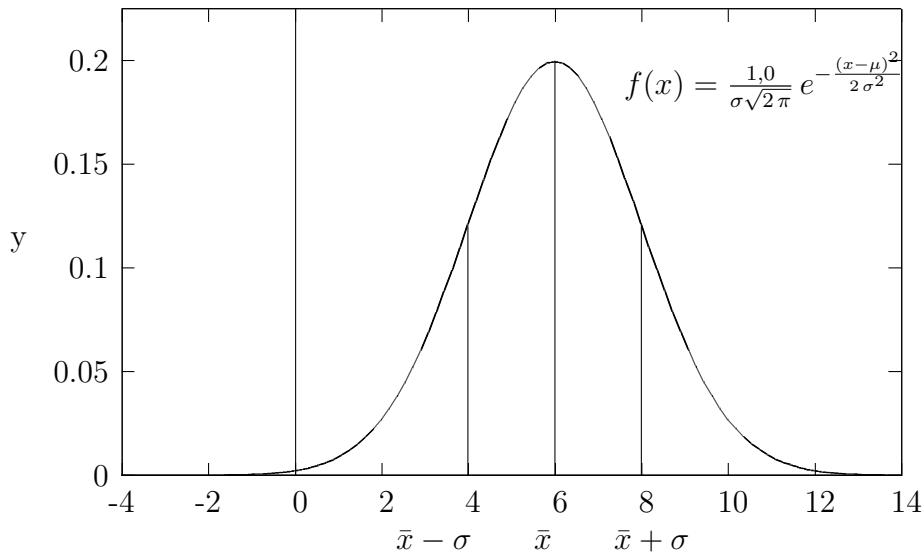


Figura 1.2: Distribución normal. En el eje  $y$  está la densidad de probabilidad  $f(x)$ .  $\bar{x}$  es la media y  $\sigma$  es la desviación estándar.

Una variable aleatoria continua  $X$  que toma valores dentro del intervalo  $[-\infty, +\infty]$  se dice que obedece la distribución normal si su ley de probabilidades tiene la siguiente forma:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-(x-\bar{x})^2/2\sigma^2}, \quad (1.17)$$

donde las cantidades  $\sigma$  y  $\bar{x}$  son los parámetros de la distribución (ver figura 1.2).

### 1.4.2. Valor medio y medidas de dispersión

Uno de los problemas de la estadística consiste en encontrar un conjunto pequeño de números que sirvan para caracterizar como un todo a un conjunto muestral de  $n$  cantidades,  $x_1, x_2, \dots, x_n$ .

El valor medio es el más simple e importante de dichos indicadores. La mayoría de los  $x_i$  tienen un valor que es cercano al valor medio. Otro indicador es el error absoluto. Hay muchas definiciones posibles de estos indicadores.

La definición del valor medio que más frecuentemente se usa es la *media aritmética* o *valor medio aritmético*. La media aritmética del conjunto de medidas repetidas mencionado en 1.4.1 se define mediante la relación

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i. \quad (1.18)$$

Puede ocurrir que entre los  $x_i$  haya varios que se repiten. Entonces podemos formar un conjunto con todos los valores diferentes que hay entre los  $x_i$ . Este conjunto tendrá  $k$  elementos  $x_i$ , y cada uno de estos  $x_i$  estará repetido  $n_i$  veces ( $\sum_{i=1}^k n_i = n$ ). En este caso la media aritmética se puede escribir como

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k n_i x_i. \quad (1.19)$$

La media aritmética tiene las siguientes tres propiedades importantes:

1. La suma de las desviaciones de los datos respecto a la media aritmética vale cero,

$$\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) = 0. \quad (1.20)$$

2. Si  $x_o$  es un valor arbitrario diferente de  $\bar{x}$ , se cumple

$$\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \leq \sum_{i=1}^n (x_i - x_o)^2, \quad (1.21)$$

es decir, la suma de los cuadrados de las desviaciones respecto a la media es menor que la suma de los cuadrados de las desviaciones respecto a cualquier otro valor.

3. Si  $Z$  es una variable aleatoria que depende *linealmente* de otras dos variables aleatorias  $X$  y  $Y$ , es decir  $Z = a \cdot X + b \cdot Y$ , entonces los valores medios de  $X$ ,  $Y$  y  $Z$  están relacionados de la misma manera  $\bar{Z} = a \cdot \bar{X} + b \cdot \bar{Y}$ .

Igual que en el caso de medidas individuales se desea expresar el resultado del conjunto de medidas repetidas en la forma

$$x = \bar{x} \pm \Delta x. \quad (1.22)$$

La cantidad  $\Delta x$  se puede relacionar con el “ancho” de la distribución. Hay ambigüedad en la definición del ancho, que simplemente es un indicativo del rango en el cual es más probable obtener el resultado de la medida. Por ejemplo, si el  $n$  no es muy grande, el ancho podría definirse como el valor absoluto de la mayor distancia entre un dato y la media. Es decir, puede tomarse como el mayor valor entre  $|\bar{x} - x_{\min}|$  y  $|\bar{x} - x_{\max}|$ . Este procedimiento sobre-estima el error absoluto cuando el número de datos es grande, pues dado su carácter aleatorio es posible encontrar valores muy alejados de la media. Por esta razón se emplea el indicador llamado *desviación estándar*.

La *dispersión* de los datos respecto al valor medio es un indicador que depende de las separaciones entre los datos y el valor medio,  $x_i - \bar{x}$ . Por ejemplo en el conjunto de números  $\{1, 3, 6, 9, 11\}$  el valor medio es 6 y las desviaciones respecto a la media son  $\{-5, -3, 0, 3, 5\} =$

$\{1 - 6, 3 - 6, 6 - 6, 9 - 6, 11 - 6\}$ . El valor medio de estas desviaciones es cero. El valor medio de los valores absolutos de estas desviaciones es 3,2. Las desviaciones cuadráticas son  $\{25, 9, 0, 9, 25\}$  y el valor medio de las desviaciones cuadráticas es 13,6. La raíz cuadrada de la media aritmética de las desviaciones al cuadrado es  $\sqrt{13,6} = 3,7$ , valor que se aproxima al de la media de los valores absolutos de las desviaciones.

La *desviación estándar* es otra función de las desviaciones que sirve de indicador de la dispersión. Se define como

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}. \quad (1.23)$$

En la definición de  $\sigma$  aparece la suma de las desviaciones al cuadrado dividida por  $n - 1$ , o sea que la desviación estándar **no** es lo mismo que la raíz cuadrada del promedio de los cuadrados de las desviaciones. Se la denomina también *error cuadrático medio de los resultados de las medidas individuales*. En esta definición se asume que una muestra de tamaño  $n$  ha sido tomada de una población de tamaño mucho mayor y que por tanto la varianza  $\sigma^2$  de la muestra, calculada mediante (1.23), dá una aproximación a la varianza de la población total; como el valor medio de los cuadrados de las desviaciones respecto a la media de la muestra tiende a subestimar el valor de la varianza de la población total, se divide por  $n - 1$  en vez de  $n$  para compensar este efecto. Algunos autores denotan con  $\sigma^2$  a la varianza de la población y con  $s^2$  a la varianza de la muestra.

Debido a que  $(x_i - \bar{x})^2 = x_i^2 - 2x_i \cdot \bar{x} + \bar{x}^2$ ,  $\sigma$  también se puede escribir como

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n-1} \left( \sum_{i=1}^n x_i^2 - n\bar{x}^2 \right)}. \quad (1.24)$$

Frecuentemente se toma como *intervalo de incertidumbre* el valor de  $3\sigma$  a cada lado de la media. Esto, igual que la definición de  $\sigma$ , se motiva en argumentos de estadística matemática. Se usa solamente en los casos en los cuales el número de medidas realizadas es  $n \geq 30$ .

De acuerdo con las propiedades de la distribución normal, dentro de un conjunto cualquiera de datos distribuidos normalmente, el 68,3% de ellos, unos dos tercios, se encontrará entre  $\bar{x} - \sigma$  y  $\bar{x} + \sigma$ , en tanto que el 95,5% de los datos se encontrarán entre  $\bar{x} - 2\sigma$  y  $\bar{x} + 2\sigma$  y el 99,7% de los datos se encontrará entre  $\bar{x} - 3\sigma$  y  $\bar{x} + 3\sigma$ . Por ejemplo, entre 370 valores de una medida repetida, sólo uno caerá fuera del intervalo  $[\bar{x} - 3\sigma, \bar{x} + 3\sigma]$ . Por esto en la práctica se toma

$$\Delta x = 3\sigma, \quad \text{o sea} \quad x = \bar{x} \pm 3\sigma. \quad (1.25)$$

Supongamos ahora que el experimento de tomar  $n$  medidas de la cantidad  $X$  se repite  $n$  veces. Se tendrán entonces  $n^2$  datos:  $n$  para cada uno de los experimentos,  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  para el primer experimento,  $\{x'_1, x'_2, \dots, x'_n\}$  para el segundo,  $\{x''_1, x''_2, \dots, x''_n\}$  para el tercero y

así sucesivamente. A cada conjunto de datos se le puede calcular su media aritmética y su desviación estándar, obteniéndose  $(\bar{x}, \sigma)$  para el primero,  $(\bar{x}', \sigma')$  para el segundo,  $(\bar{x}'', \sigma'')$  para el tercero y así sucesivamente para los demás. Podemos pensar luego en calcular la media aritmética de las medias obtenidas en cada uno de estos experimentos de física para obtener  $\bar{\bar{x}}$ , y la desviación estándar de  $\bar{x}, \bar{x}', \bar{x}''$ , ... respecto a su media  $\bar{\bar{x}}$  que llamaremos error medio cuadrático de las medias aritméticas o simplemente *error estándar* y denotaremos por  $s$  (Algunos autores llaman  $\mu$  lo que aquí estamos llamando  $\sigma$  y llaman  $\sigma$  al error estándar  $s$ ). Se encuentra que  $s$  está dada por una expresión que sólo depende de los datos de una cualquiera de las series de medidas, por ejemplo la primera:

$$s = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \left( \sum_{i=1}^n x_i^2 - n\bar{x}^2 \right)}. \quad (1.26)$$

Esto resulta del hecho de que todas las distribuciones gaussianas (normales), en las que  $n \rightarrow \infty$ , tienen la misma desviación estándar. Es lógico pensar que la media aritmética de las medias aritméticas es un valor más cercano a la cantidad física que estamos midiendo,  $X$ , o sea que con buena aproximación se cumple que  $X \approx \bar{\bar{x}}$ . La operación podría repetirse una tercera vez, una cuarta vez, etc con nuevos promedios que cada vez más tienden al valor “verdadero”. Este procedimiento, debe quedar claro, tiene valor teórico pero no práctico.

Por todas las condiciones anteriores se deduce que el error absoluto en la medida de una variable  $X$  es menor que la desviación estándar, o sea que

$$X = \bar{x} \pm 3s. \quad (1.27)$$

Según esto, el valor “verdadero” de  $X$  se sitúa con una probabilidad del 99,7% dentro del intervalo  $[\bar{x} - 3s, \bar{x} + 3s]$ . Este es el resultado para la determinación de una cantidad física mediante una serie de muchas medidas.

### 1.4.3. La corrección de Student

La fórmula (1.26) definió el error estándar. Sin embargo, esta fórmula se basa en la suposición de que las medidas poseen una distribución normal. En estadística matemática se muestra que esta distribución es una buena aproximación a la distribución verdadera de un conjunto de medidas sólo si se cumple que

$$n \geq 30. \quad (1.28)$$

En la práctica, sobre todo en experimentos con datos tomados “a mano” como en el laboratorio de física elemental, no es posible satisfacer esta condición. El matemático inglés W. S. Gosset (con seudónimo Student) estudió este tipo de experimentos y halló que no se adaptan a la distribución de Gauss sino a una distribución diferente. Sólo citaremos uno de los principales resultados de Student: cuando el número de datos es inferior a 30 la fórmula

que define el error estándar debe ser modificada:

$$s = t_p \frac{\sigma}{\sqrt{n}}. \quad (1.29)$$

La nueva cantidad  $t_p$  se denomina *factor de corrección de Student* o simplemente *factor t*. El subíndice en  $t_p$  tiene que ver con una discusión anterior acerca del significado de la desviación estándar:  $p$  depende de la probabilidad de que la medida caiga entre  $\bar{x} - s$  y  $\bar{x} + s$ . Así, si el intervalo de confianza es del 95 %, entonces  $p = 1 - 0,95 = 0,05$ . Es decir,  $p$  es el grado de *incerteza* de que el valor “real” de  $x$  esté en el intervalo mencionado y  $1 - p$  es el grado de *certeza*. Se define la cantidad  $\nu = n - 1$ , llamada el “número de grados de libertad” de la muestra.

Cuando el número de medidas es pequeño  $t_p$  es grande, y decrece cuando crece el número de datos. También, para un número dado de datos,  $t_p$  crece cuando decrece  $p$ .

En la sección 1.4.4 se describe una aplicación de la tabla de factores  $t_p$  para analizar la dependencia o independencia estadística de dos cantidades determinadas experimentalmente.

Consideremos un ejemplo. Supongamos que se mide la longitud de un objeto con ayuda de la escala incorporada a un microscopio. La escala tiene divisiones de 0,01 mm. Cada medida individual se puede realizar con un error absoluto igual a 0,001 mm. Al medir la longitud  $L$  cinco veces ( $n = 5$ ,  $\nu = 4$ ) se obtienen los resultados:

$$6,191; \quad 6,215; \quad 6,228; \quad 6,200; \quad 6,217 \text{ mm.}$$

Se busca determinar el valor de  $L$  y su error estándar. Los valores de  $\bar{L}$  y  $\sigma_L^2$  se calculan con ayuda de los datos de la tabla 1.2. Los resultados son:

$$\bar{L} = \frac{1}{5} \sum_{i=1}^5 L_i = 6,2102 \text{ mm},$$

$$\sigma_L^2 = \frac{1}{5-1} \sum_{i=1}^5 (L_i - \bar{L})^2 = 2,146 \cdot 10^{-4} \text{ mm}^2.$$

Se sigue que

$$\sigma_L = 1,465 \cdot 10^{-2} \text{ mm.}$$

Sea que  $p = 0,05$ . De la tabla 1.1 se obtiene que  $t_{0,05}(4) = 2,7764$ . Según (25) el error aleatorio vale

$$s = \Delta L_{est} = \frac{2,7764 \cdot 0,01465}{\sqrt{5}} = 1,82 \cdot 10^{-2} \text{ mm.}$$

Por lo tanto el resultado para la longitud (ver sección 1.5.4) es

$$L = (6,21 \pm 0,03) \text{ mm.}$$

$\nu = n - 1$	$t_{0,05}$	$t_{0,01}$
1	12.706	63.657
2	4.2027	9.9248
3	3.1825	5.8409
4	2.7764	4.6041
5	2.5706	4.0321
6	2.4469	3.7074
7	2.3646	3.4995
8	2.3060	3.3554
9	2.2622	3.2498
10	2.2281	3.1693
11	2.2010	3.1058
12	2.1788	3.0545
13	2.1604	3.0123
14	2.1448	2.9768
15	2.1315	2.9467
16	2.1199	2.9208
17	2.1098	2.8982
18	2.1009	2.8784
19	2.0860	2.8453
20	2.0860	2.8453
21	2.0796	2.8314

Tabla 1.1: Factores de corrección de Student. **n** es el número de medidas.

No.	$L_i$ (mm)	$(L_i - \bar{L})$ (mm)	$(L_i - \bar{L})^2$
1	6.191	-0.0192	0.0003686
2	6.215	0.0048	0.0000230
3	6.228	0.0178	0.0003168
4	6.200	-0.0102	0.0001040
5	6.217	0.0068	0.0000462
$\Sigma:$	31.051	0.0000	0.0008586
$\bar{L} = 6,2102$		$\sigma^2(L) = 2,146 \cdot 10^{-4}$	

Tabla 1.2: Medidas de una longitud y sus desviaciones respecto a la media.

El ejemplo es instructivo en otro sentido. Se observa que el error aleatorio total,  $s = 0,03\text{ mm}$  en este caso, puede ser bastante mayor que el sólo error aleatorio debido a las escalas del instrumento. La contribución del microscopio al error en este caso vale solamente  $0,001\text{ mm}$ .

#### 1.4.4. Error en la suma o diferencia de dos valores

Si se realizan medidas repetidas de una magnitud física  $X$  de las cuales se obtiene que

$$x = \bar{x} \pm \Delta x_{est}, \quad (29)$$

y similarmente de otra cantidad  $Y$ ,

$$y = \bar{y} \pm \Delta y_{est}, \quad (30)$$

entonces se puede mostrar que para su diferencia  $Z = X - Y$  la expresión es

$$Z = X - Y = \bar{z} \pm \Delta z_{est} = \bar{x} - \bar{y} \pm \sqrt{(\Delta x_{est})^2 + (\Delta y_{est})^2}. \quad (31)$$

En otras palabras, el error estándar de la diferencia es igual a la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de los errores estándar individuales (“suma cuadrática”). Lo mismo vale para la suma.

Nótese la diferencia con el error de la suma en el caso de medidas individuales, ecuación (1.16a).

Es de interés el cálculo de la relación entre  $\bar{z}$  y  $\Delta z_{est}$ :

$$t = \frac{|\bar{x} - \bar{y}|}{\sqrt{(\Delta x_{est})^2 + (\Delta y_{est})^2}}. \quad (1.30)$$

El dato sobre cuantas veces es mayor  $|\bar{x} - \bar{y}|$  que  $\sqrt{(\Delta x_{est})^2 + (\Delta y_{est})^2}$  tiene significado estadístico y por lo tanto importancia práctica. Se aplica en la prueba de la “hipótesis nula”  $H_0 : \bar{x} - \bar{y} = 0$ . Se distinguen dos casos: primero, cuando el número de medidas es

grande,  $n \geq 30$  y segundo cuando el número de medidas es menor que 30. En el primer caso, si se cumple que  $|\bar{x} - \bar{y}| > 3\Delta z_{est}$ , o sea  $t > 3$ , puede concluirse que los dos conjuntos de medidas  $X$  y  $Y$  no pertenecen a la misma población, o sea que las dos series de datos  $x_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n_x$ ) y  $y_j$  ( $j = 1, 2, \dots, n_y$ ) son *estadísticamente independientes*. También se puede concluir que el valor de la diferencia entre las dos medias aritméticas es *significativa*.

La cantidad  $t$ , en los casos en los cuales el número total de medidas es pequeño y no se cumple la distribución normal, sirve para definir la independencia de las poblaciones. Sin embargo, el procedimiento para concluir si el valor de la diferencia de las medias es significativo es un poco más complicado. En este caso se calculan  $t$  y  $\nu = n_x + n_y - 2$  y se busca en la tabla 1.1 el valor más próximo a  $t$  en la línea correspondiente al valor de  $\nu$  (el “número de grados de libertad”). Luego se lee en la parte superior de la tabla el valor de  $p$ , por ejemplo en la forma  $t_{0,05}$ . Si el valor de  $t$  es menor que  $t_{0,05}$  para  $\nu$  dado, entonces el valor de la diferencia entre  $X$  y  $Y$  no es significativo, puesto que la probabilidad de error es mayor del 5 %. Si el valor encontrado para  $t$  es mayor que el valor  $t_p$  que para un  $\nu$  dado está en la columna de  $p = 0,01$ , entonces se concluye que el valor de la diferencia es estadísticamente significativa<sup>3</sup>, ya que la probabilidad de error en la hipótesis  $H_0$  es menor que el 1 %. Si está comprendido entre los valores  $p = 0,01$  y  $p = 0,05$ , entonces la diferencia posiblemente es estadísticamente significativa, pero es necesario aumentar los números  $n_x$  y  $n_y$  de medidas.

La fórmula (1.30) para  $t$  vale en los casos en los cuales  $n_x = n_y$  ( $\nu = 2n_x - 2$ ). Si  $n_x \neq n_y$  es necesario usar una expresión diferente.

Una aplicación inmediata de estos conceptos está dada en los experimentos sobre conservación de energía (o de momento lineal). Se determinan por medio de medidas repetidas las energías de un sistema antes ( $X$ ) y después ( $Y$ ) de algún proceso y se hallan las correspondientes medias aritméticas. Se trata de decidir si la diferencia entre esos valores medios es estadísticamente significativa o no. En ese caso es necesario aplicar la prueba al conjunto formado con la diferencia de los datos  $Z = X - Y$ ; es decir analizando la cantidad  $t = |\bar{z}|/\sqrt{\Delta z_{est}}$ , siendo esta vez  $\Delta z_{est} = \sigma_z/\sqrt{n}$ . La razón de lo anterior es que se desea comparar no sólo los conjuntos de datos  $X$  y  $Y$  como un todo sino la igualdad dato a dato en el conjunto de parejas  $(x_i, y_i)$ .

Los resultados referentes a la propagación de los errores en una suma o diferencia pueden generalizarse. Si  $U$  es una función de  $r$  variables aleatorias  $V_1, V_2, \dots, V_r$ , con medias y errores estándar dados por  $\bar{v}_i, s_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, r$ , entonces la media y el error estándar de  $U$  están dados por

$$\bar{u} = f(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_r), \quad (1.31)$$

---

<sup>3</sup> $p = 0,01$  se denomina *nivel de alta significación*.

y por

$$s_u = \sqrt{\sum_{i=1}^r \left(\frac{\partial f}{\partial v_i}\right)^2 s_i^2}. \quad (1.32)$$

Las derivadas parciales están evaluadas en los valores medios. La fórmula para  $s_u$  se denomina “ley de propagación de los errores estadísticos”.

El resultado final para  $U$  se escribe entonces

$$U = \bar{u} \pm 3 s_u. \quad (1.33)$$

En este tratamiento es básica la suposición que las cantidades  $v_i$  son estadísticamente independientes. Si ocurre lo contrario, entonces el error sobre  $u$  no se obtiene con ésta fórmula sino con la misma fórmula del caso de medidas individuales, (1.12)

$$s_u = \sum_{i=1}^r \left| \frac{\partial f}{\partial v_i} \right| s_i. \quad (1.34)$$

Nótese que en el caso de una única medida el error está determinado por las escalas de los instrumentos. En ese caso hay una correlación completa entre los errores y por lo tanto se aplica esta fórmula. También nótese que el error dado por (1.34) es mayor que el error dado por (1.32), siendo por tanto un estimado del error máximo que se puede cometer y como tal es aplicable también en el caso de medidas repetidas.

Para finalizar este numeral damos enseguida las expresiones para los errores estándar en algunas funciones simples, usando la fórmula (1.32):

$$s_{x \pm y} = \sqrt{s_x^2 + s_y^2}. \quad (1.35a)$$

$$s_{x \cdot y} = \sqrt{x^2 s_y^2 + y^2 s_x^2} \quad (1.35b)$$

$$s_{x/y} = \frac{1}{y^2} \sqrt{s_x^2 y^2 + s_y^2 x^2} \quad (1.35c)$$

$$s_{\sqrt{x \cdot y}} = \frac{1}{2\sqrt{x \cdot y}} \sqrt{s_x^2 y^2 + s_y^2 x^2} \quad (1.35d)$$

$$s_{\ln(x \cdot y)} = \frac{1}{x \cdot y} \sqrt{x^2 s_y^2 + y^2 s_x^2} \quad (1.35e)$$

En la notación  $s_{x+y}$ ,  $x+y$  es un “subíndice” de  $s$  para indicar el error estándar de la cantidad “ $x+y$ ”.

## 1.5. NÚMEROS APROXIMADOS

Es este numeral describiremos la estructura de los números aproximados y describiremos algunas reglas prácticas para su manipulación.

### 1.5.1. Cifras significativas, seguras e inseguras

Todo número real  $A$  puede escribirse de la siguiente manera en la base decimal:

$$A = \pm(q_m \cdot 10^m + q_{m-1} \cdot 10^{m-1} + \dots + q_{m-n+1} \cdot 10^{m-n+1} + \dots), \quad (1.36)$$

donde  $q_m$ ,  $q_{m-1}$ , etc son las cifras del número  $A$  colocadas en el respectivo puesto (lugar decimal),  $m$  es el mayor orden decimal que aparece en  $A$  y si  $q_{m-n+1}$  es la última cifra del número entonces  $n$  es su número de cifras significativas. En el caso general  $A$  puede tener un número infinito de cifras.

Por ejemplo, en el número 1886,12,  $m$  vale 3 y  $n$  vale 6, así que se puede expresar como

$$\begin{aligned} 1886,12 &= 1 \cdot 1000 + 8 \cdot 100 + 8 \cdot 10 + 6 \cdot 1 + 1 \cdot 0,1 + 2 \cdot 0,01 \\ &= 1 \cdot 10^3 + 8 \cdot 10^{3-1} + 8 \cdot 10^{3-2} + 6 \cdot 10^{3-3} + 1 \cdot 10^{3-4} + 2 \cdot 10^{3-6+1}. \end{aligned}$$

Si un número con muchas cifras significativas se aproxima<sup>4</sup> por uno de menor cantidad de cifras significativas diremos que se ha truncado o “redondeado”. Si el número  $A$  se trunca a partir de la cifra decimal correspondiente a  $m - n - 1$  se obtendrá un número aproximado compuesto de  $n$  cifras significativas. Por ejemplo 1886,12 escrito con una cifra significativa será igual a 1000, con dos cifras a 1800, con tres cifras a 1880, con cuatro cifras a 1886, y con cinco cifras a 1886,1, todo esto sin aplicar reglas de redondeo. El número de cifras significativas de una cantidad experimental lo determina la primera cifra que contiene alguna incertidumbre.

Para determinar el número de cifras significativas de un número menor que 1 se cuenta el número de cifras que lo forman incluyendo los ceros situados al lado derecho o en el medio, pero no los ceros de la izquierda. Por ejemplo, la representación de la constante de gravitación universal por  $0,0000000006670 N \text{ m}^2/\text{kg}^2 = 6,670 \cdot 10^{-11} N \text{ m}^2/\text{kg}^2$  contiene  $10 + 4 = 14$  cifras decimales y 4 cifras significativas. En este número  $m = 0$  y  $n = 15$ , pero los 11 primeros valores de  $q_i$  que son iguales a cero no se cuentan dentro de las cifras significativas.

Para determinar el número de cifras significativas de un número mayor que 1 se cuenta el número de cifras que lo forman incluyendo los ceros situados en el medio, pero no los ceros situados al lado derecho; por esto el valor de la velocidad de la luz  $c = 2997926600000 m s^{-1} = 2,9979266 \cdot 10^8 m s^{-1}$ , posee 8 cifras significativas. Con esta representación se está indicado que el último 6 posee un error; proviene de una medida experimental que arrojó el valor  $299792,66 \pm 0,09 km s^{-1}$ .

Sean  $A$  un número cualquiera y  $a$  la representación truncada del mismo con sólo  $n$  cifras significativas. Las primeras  $n$  cifras de  $a$  se llaman *seguras* si el error absoluto en  $A = a + \Delta a$

---

<sup>4</sup>El redondeo tiene implicaciones filosóficas: toda teoría tiene un ámbito de validez definido por un conjunto de hechos empíricos; por lo tanto instrumentos de mayor exactitud, que aumentan el número de cifras significativas, pueden echar por tierra teorías enteras.

no es superior a 0,5 veces el orden decimal más bajo retenido en  $a$ , es decir

$$|A - a| < 0,5 \cdot 10^{m-n+1}. \quad (1.37)$$

En caso contrario se llaman *inseguras* o *dudosas*.

Por ejemplo, consideremos los resultados de cinco medidas de la masa de un cuerpo:  $m_1 = 5,24\text{ g}$ ,  $m_2 = 5,27\text{ g}$ ,  $m_3 = 5,23\text{ g}$ ,  $m_4 = 5,25\text{ g}$ ,  $m_5 = 5,27\text{ g}$ . En todos estos resultados las primeras dos cifras se repiten, pero la tercera cifra varía de medida en medida. Las cifras que cambian se llaman inseguras y las que no cambian, seguras. Los resultados de una medida siempre se expresan por medio de las cifras seguras y a lo sumo con una cifra dudosa (la primera). En consecuencia **al tomar muchos datos en un experimento en el cual aparecen cifras dudosas, sólo se conserva la primera y las demás se desechan**. Cuando se descartan todas las cifras inseguras se dice que el resultado se redondea.

### 1.5.2. Reglas para el redondeo de los números

1. Si la primera de las cifras que se descarta es inferior a 5, las cifras que se conservan se dejan inalteradas:  $28,4(4) \approx 28,4$ .
2. Si la primera cifra que se descarta es mayor que 5, entonces la última cifra que se conserva se aumenta en 1:  $28,4(6) \approx 28,5$ .
3. Si la primera de las cifras que se descartan es exactamente 5 y las cifras que le siguen no son todas cero, entonces la última cifra que se conserva se aumenta en 1:  $28,4(56) \approx 28,5$ .
4. Si la primera de las cifras que se descartan es exactamente 5 y las cifras que le siguen son todas cero, entonces la última cifra que se conserva se aumenta en 1 si es impar y se deja inalterada si es par:  $28,4(50) \approx 28,4$  y  $28,5(50) \approx 28,6$ .

### 1.5.3. Determinación del número de cifras significativas en el valor de una función

La determinación experimental de una cantidad por medios indirectos se realiza midiendo las cantidades de las cuales dicha cantidad depende funcionalmente. A menudo tales cantidades obtenidas experimentalmente poseen diferente número de cifras significativas. Por esto es necesario redondear todos estos números en una cifra más que el número de menor cantidad de cifras seguras. Esta cifra se denomina *de seguridad*. A veces cuando los datos poseen gran diferencia en el número de cifras seguras se redondea una cifra más.

El siguiente ejemplo ilustra el cálculo con datos experimentales, y al mismo tiempo un uso incorrecto de la calculadora de bolsillo que es muy común. Sabemos que el número de cifras significativas en el resultado de una medida depende de la exactitud del instrumento de medida (no del número de cifras que coloquemos en la pantalla de la calculadora ni de la

cantidad de trabajo que tengamos que invertir para realizar el cálculo).

Consideremos un experimento para determinar el valor de la tensión superficial de un líquido en el cual se obtuvieron los siguientes resultados. Radio del tubo capilar  $r = 2,5 \cdot 10^{-4} m$ , densidad del líquido  $d = 680 \text{ kg/m}^3$  y longitud de la columna del líquido dentro del capilar  $l = 2,1 \cdot 10^{-2} m$ . El coeficiente de tensión superficial del líquido se determina con la fórmula  $T = r l g d / 2$ , donde  $g$  es la aceleración de la gravedad, que para la latitud de este lugar y de su altura sobre el nivel del mar es  $g = 9,776 \text{ m/s}^2$ .

El número de cifras seguras de  $r$ ,  $d$ ,  $l$  y  $g$  es respectivamente: 2, 3, 2 y 4.  $r$  y  $l$  son las cantidades con el menor número de cifras seguras, 2. Si se trabaja sin calculadora, antes de iniciar el cálculo de  $T$  es conveniente redondear las restantes cantidades,  $d$  y  $g$ , a tres cifras ( $2 + 1$ ) seguras,  $r = 2,5 \cdot 10^{-4} m$ ,  $d = 680 \text{ kg/m}^3$ ,  $l = 2,1 \cdot 10^{-2} m$  y  $g = 9,78 \text{ m/s}^2$ . Si se trabaja con calculadora, se puede efectuar el cálculo sin redondeos previos. En el primer caso obtenemos  $17,4573 \cdot 10^{-3} N/m$  y en el segundo  $17,450160 \cdot 10^{-3} N/m$ . Como se trabaja con tres cifras seguras, de los dos cálculos se concluye que  $T = 17,5 \cdot 10^{-3} N/m$ .

Podemos calcular el error sobre  $T$  usando la fórmula (1.32). Para esto suponemos que de acuerdo a sus respectivos números de cifras seguras los errores en  $r = 0,00025$ ,  $d = 680$ ,  $l = 0,021$  y  $g = 9,776$  son

$$\Delta r = 0,00001 m, \quad \Delta d = 1 \frac{kg}{m^3}, \quad \Delta l = 0,001 m, \quad \Delta g = 0,001 m/s^2.$$

El error en  $T$  se saca de la fórmula

$$\Delta T = \frac{r d l g}{2} \sqrt{\left(\frac{\Delta r}{r}\right)^2 + \left(\frac{\Delta d}{d}\right)^2 + \left(\frac{\Delta l}{l}\right)^2 + \left(\frac{\Delta g}{g}\right)^2}.$$

Efectuado el cálculo se obtiene  $\Delta T = 1,0 \cdot 10^{-3} N/m$ . Pudimos haber efectuado un experimento de mejor calidad determinando experimentalmente los errores en  $r$ ,  $d$ , y  $l$ , y haber consultado el valor del error en  $g$ . Con ello lograríamos obviamente un menor error sobre  $T$ , digamos que  $\Delta T = 0,833 \cdot 10^{-3} N/m$ . Entonces podemos escribir (ver sección 1.5.4)

$$T = (17,5 \pm 0,9) \cdot 10^{-3} N/m,$$

con una cifra dudosa.

Por favor, no escriba nunca un resultado como este en la forma:

$$T = (17,45016 \pm 0,83385108) \cdot 10^{-3} N/m.$$

Un ejemplo más. Se desea efectuar el producto entre 7,35 (n=3) y 27,1153 (n=6). El resultado, aplicando la **regla IV** de la sección 1.6, debe ser un número con tres cifras significativas. No se sabe cual es el dígito que sigue al último para cada uno de los números, razón por la cual lo representaremos por “?”.

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & 2 & 7 & . & 1 & 1 & 5 & 3 & ? \\
 & & & & 7 & . & 3 & 5 & ? \\
 \hline
 & (? & ?) & ? & ? & ? & ? & ? & ? \\
 1 & 3 & 5 & 5 & 7 & 6 & 5 & ? \\
 8 & 1 & 3 & 4 & 5 & 9 & ? \\
 \hline
 1 & 8 & 9 & 8 & 0 & 7 & 1 & ? \\
 \hline
 1 & 9 & 9 & .? & ? & ? & ? & ? & ?
 \end{array}$$

Aparentemente el resultado es 199,2 con 4 cifras seguras. Pero es importante notar que no sabemos si el producto  $? \times 2$  es una cantidad incierta de una o de dos cifras, que se ha indicado con  $(? ?)$ , o sea que no sabemos cuánto vale la suma  $3 + 1 + 8$ , aunque si estamos absolutamente seguros que es necesario “llevar” 1. En consecuencia el producto final es un número con tres cifras seguras, (199), y una cifra incierta que fluctúa entre 3 y 5 (debido a que  $7,35(9) \times 27,1153(9) = 199,54215 \approx 199,5$  y  $7,35(0) \times 27,1153(0) = 199,29745 \approx 199,3$ ). El resultado de la operación deberá escribirse en la forma

$$27,1153 \times 7,35 = 199,4 \pm 0,1.$$

Lo anterior proviene del hecho de tratarse con el producto de dos cantidades experimentales,  $(27,1153 \pm 0,0001) \times (7,35 \pm 0,01) = 199,4 \pm 0,1$ , y no de dos números ordinarios  $27,1153 \times 7,35 = 199,297455$ . Realizando la operación con calculadora, es necesario al 27,1153 colocarle 15 como cifras dudosas; entonces tendríamos el producto de las cantidades redondeadas,  $27,12 \times 7,35 = 199,33$ , y como el resultado tiene sólo tres cifras seguras escribimos 199 y no es válido redondear el resultado a 200.

#### 1.5.4. Ensanchamiento del margen de error

En esta sección describiremos un procedimiento alternativo para determinar el número de cifras significativas de una función dependiente de resultados experimentales, y a la vez un procedimiento para agrandar el margen de error, o sea de mejorar el grado de confianza en el resultado. Es un procedimiento que consiste en disminuir en una unidad el número de cifras seguras del margen de error. Por ejemplo, sea una medida delicada en la cual se obtuvieron los siguientes valores para una cantidad y su error, 1,327500 y 0,0025000 unidades. En el resultado de la medida las cifras “1”, “3” y “2” son seguras, ya que el error no afecta la posición decimal que ocupan. Con tal criterio la cifra siguiente, “7” es dudosa, con lo cual el resultado debe redondearse para dar 1,328 unidades. El ensanchamiento del margen de error en una cifra se hace en dos pasos: primero, se redondea el error en una cifra significativa, con lo cual se tendrá 0,002, y segundo se aumenta en una unidad la última cifra dando finalmente 0,003 unidades. El resultado final se escribe como:

$$u = (1,328 \pm 0,003) \text{ unidades.}$$

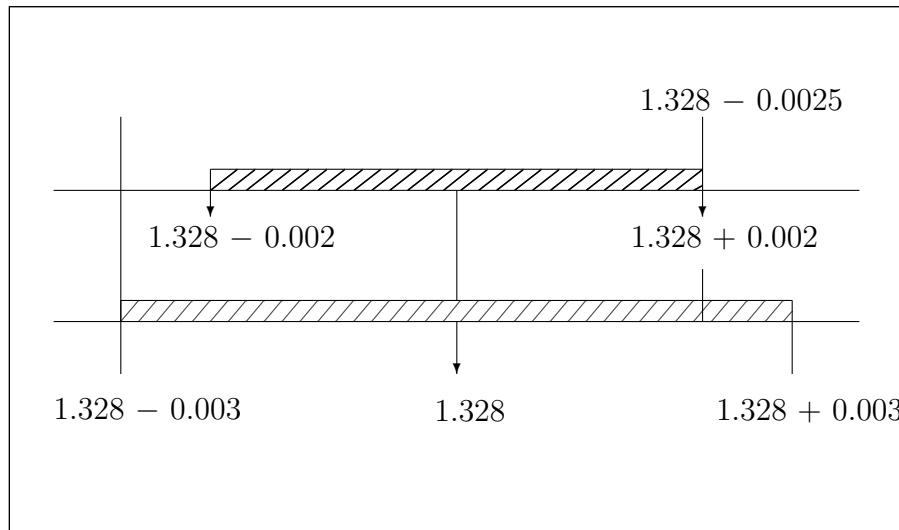


Figura 1.3: Determinación del margen de error de una medida teniendo en cuenta el número de cifras significativas.

La figura 1.3 muestra la necesidad de efectuar el segundo paso en el proceso de ensanchamiento del margen de error.

El siguiente ejemplo ilustra el ensanchamiento del margen de error, el redondeo en los resultados de medidas, y el hecho de que en el redondeo de los errores puede estar involucrado más de un lugar decimal. Sea un experimento para medir cierta frecuencia en el cual se obtuvo  $1036 \text{ Hz}$  con un margen de error de  $48 \text{ Hz}$ . Se concluye que la frecuencia tiene como cifras dudosas el 3 y el 6. De acuerdo al procedimiento descrito, y a las reglas de redondeo, redondeamos el resultado en la tercera cifra significativa para obtener  $1040$ .

Igualmente redondeamos el error en la misma posición decimal (las decenas) para obtener  $50$ , y agregando una unidad a la cifra redondeada para ensanchar el margen de error obtenemos  $60$ . El resultado final en consecuencia no es  $(1036 \pm 48) \text{ Hz}$  sino

$$f = (1040 \pm 60) \text{ Hz}.$$

## 1.6. PROCEDIMIENTO E INFORME

**NOTA:** Cada estudiante debe leer esta guía antes de llegar al laboratorio. El profesor dará tan solo una breve explicación de los puntos más importantes y estará disponible el resto de las tres horas para atender las consultas de los estudiantes.

**IMPORTANTE: CADA ESTUDIANTE DEBE TRAER UNA CALCULADORA A TODAS LAS SESIONES DEL LABORATORIO.**

Tenga en cuenta las siguientes reglas prácticas (que, como toda regla, tienen excepciones):

**Regla I** Los resultados de una única medida se expresan incluyendo tan sólo una cifra dudosa. El error es igual a la mitad de la división mas pequeña del aparato de medida.

**Regla II** El número de cifras significativas se cuenta de izquierda a derecha, empezando por el primer dígito y finalizando con el dígito dudoso. Los ceros que den lugar a un factor igual a una potencia de 10 no se cuentan en las cifras significativas

**Regla III** Si se suman o restan dos números decimales, el número de cifras **decimales** que aparece en la respuesta es igual al número de cifras decimales de la cantidad que tenga el menor número de ellas.

**Regla IV** Para la multiplicación (y la división), el número de cifras **significativas** es igual al del factor con menos cifras.

**Nota** Cuando se tienen números que no provienen de medidas experimentales como  $\pi$ , o el 2 en  $C = 2\pi r$ , se toman las cifras que se requieran (limitadas por el número de cifras de las cantidades experimentales que van a ser multiplicadas) y se efectua la multiplicación.

**Regla V** El error para la suma o la diferencia de dos cantidades es la raíz cuadrada de la suma cuadrática de sus errores en el caso de medidas repetidas, y a la suma aritmética en el caso de medidas individuales.

**Regla VI** El error relativo del producto o el cociente de dos cantidades es igual a la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de los errores relativos en el caso de medidas repetidas, y a la suma de los errores relativos en el caso de medidas individuales.

**Regla VII** El error relativo de  $D = A^n$  es  $\Delta D/D = n(\Delta A/A)$ .

**Regla VIII** El error en la operación de multiplicar un número por una cantidad experimental,  $C \cdot A$ , es  $C \cdot \Delta A$ .

**Regla IX** El error en  $S = \sin A$  es  $\Delta S = \Delta A \cdot |\cos A|$ . Para  $C = \cos A$  el error es  $\Delta C = \Delta A \cdot |\sin A|$ , con  $\Delta A$ , en radianes.

**Regla X** El error en  $E = \exp A$  es  $\Delta E = \Delta A \cdot \exp A$ .

### 1.6.1. Ejercicios

#### 1.6.1.1. Ejercicio sobre cifras significativas

1. ¿Cuántas cifras significativas tiene cada una de las siguientes cantidades?

- |                               |                                |
|-------------------------------|--------------------------------|
| a)      3.8 : _____           | f)      0.1534 : _____         |
| b)      349.85 : _____        | g)      10.911110 : _____      |
| c)      0.0015 : _____        | h)      12.00 : _____          |
| d) $1.25 \times 10^2$ : _____ | i)      12.000 : _____         |
| e)      983 : _____           | j) $33.33 \times 10^4$ : _____ |

2. Realice las operaciones que se indican, teniendo en cuenta el número de cifras significativas en sus resultados. Puede tambien efectuarlo con calculadora y luego hacer los redondeos y análisis de cifras dudosas.

- |  |
|--|
| a) $5,15 + 10,000 + 12,6 + 128,1281$ = _____ |
| b) $342,171 - 28,17$ = _____                 |
| c) $825,3 \times 12,2$ = _____               |
| d) $22,2 \times \pi$ = _____                 |
| e) $980,152 \div 980,143$ = _____            |
| f) $210,7 \times 14,27 \div 3,1$ = _____     |
| g) $27,4 \times \sin(15,9^\circ)$ = _____    |
| h) $14,71 \times \exp(2,2)$ = _____          |

#### 1.6.1.2. Ejercicio sobre propagación de errores

A continuación aparecen cuatro cantidades con sus errores y con las unidades correspondientes.

$$A = a \pm \Delta a = 1,5 \pm 0,1$$

$$B = b \pm \Delta b = 14,21 \pm 0,07 \text{ cm}$$

$$C = c \pm \Delta c = 421,37 \pm 0,09 \text{ g}$$

$$D = d \pm \Delta d = 92,3 \pm 0,2 \text{ cm}$$

Efectúe los cálculos que se indican en la tabla 1.3 teniendo en cuenta las cifras significativas,

OPERACION: $f(A, B, C, D)$	$f(a, b, c, d)$	ERROR FORM. (1.32)	ERROR FORM. (1.12)
$B + D$			
$B \div A$			
$B \cdot C \div D$			
$\pi \cdot C \div B$			
$2 \cdot B + D$			
$B^3 \div C^2$			
$C^{1/3} \div A^{1/2}$			

Tabla 1.3: Propagación de errores en determinación indirecta de cantidades.

el error y las unidades. No olvide realizar el proceso de ensanchamiento del margen de error (ver sección 1.5.4).

#### 1.6.1.3. Ejercicio sobre tratamiento estadístico de más de 30 datos experimentales

Imaginemos que se ha medido varias veces la longitud de una cuerda. Los resultados están representados en la tabla 1.4.  $i$  numera los valores diferentes encontrados (siete en este caso).  $L_i$  son los resultados de las medidas,  $N_i$  el número de veces que se repite  $L_i$ , y  $N$  es el tamaño de la muestra. Elabore la tabla 1.4. Los cálculos se simplifican elaborando un sencillo programa de computador. Ahora realice una gráfica de  $N_i$  contra  $L_i$ , en forma de histograma. Luego dibuje una curva continua que se ajuste a los datos. Represente en su gráfica a  $\bar{L}$ ,  $\sigma(L)$ ,  $s_L$  y  $3s_L$ .

#### 1.6.1.4. Ejercicio sobre tratamiento estadístico de 15 datos experimentales

El ejercicio es similar al anterior, pero ahora se consideran sólo 15 medidas de la longitud. Para calcular a  $s_L$  es necesario introducir un factor de corrección de Student. Elabore la tabla 1.5. Debe usar la fórmula (1.29) y consultar la tabla 1.1.

#### 1.6.1.5. Ejercicio sobre estimación directa del error

Se trata con errores apreciativos. En la figura 1.4 se ilustra un experimento de óptica. Aparecen representados un fósforo, una lente convergente y una pantalla.

A lo largo del segmento  $\overline{AB}$  se nota una imagen nítida del objeto; el error en la posición de la imagen es mucho mayor que la apreciación de la regla con la que se miden las distancias. Respecto a estas medidas la regla se comporta como un instrumento de precisión.

$L_i$ (mm)	$N_i$	$N_i \cdot L_i$ (mm)	$N_i \cdot L_i^2$ (mm <sup>2</sup> )
997	1		
998	3		
999	7		
1000	9		
1001	4		
1002	5		
1004	2		
$\Sigma:$			
$\bar{L} =$		$\sigma(L) =$	$s_L =$

Tabla 1.4: Medidas de la longitud de una cuerda.

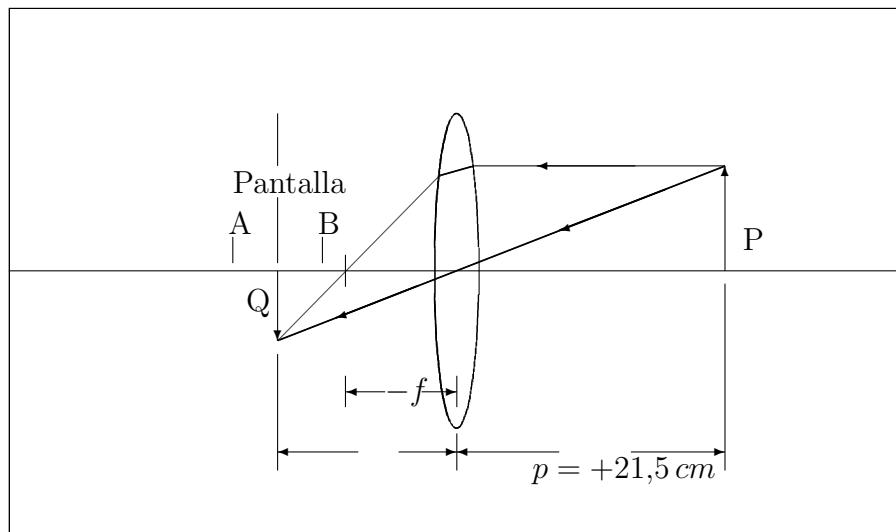


Figura 1.4: Errores de apreciación en la determinación de una imagen producida con una lente convergente.

$L_i$ (mm)	$N_i$	$N_i \cdot L_i$ (mm)	$N_i \cdot L_i^2$ (mm <sup>2</sup> )
997	0		
998	2		
999	3		
1000	5		
1001	2		
1002	2		
1004	1		
$\Sigma:$			
$\bar{L} =$	$\sigma(L) =$	$s_L =$	

Tabla 1.5: Medidas de la longitud de una cuerda.

El fósforo se encuentra a  $p = 21,5\text{ cm}$  de la lente y se observa su imagen nítida en la pantalla aproximadamente cuando  $q = -13,5\text{ cm}$ . Si movemos la pantalla hacia la derecha y la izquierda, encontramos un rango de posiciones  $\overline{AB}$  en el cual se sigue observando nítida la imagen, siendo difícil determinar exactamente la posición en la cual comienza a estar borrosa.

A pesar de que las divisiones de la regla están en milímetros, hay un error en la medida de la posición de la imagen que es mayor que  $1\text{ mm}$ , pues  $B$  está localizado a  $13,3\text{ cm}$  y  $A$  a  $13,9\text{ cm}$  de la lente.

Determine el valor de  $\bar{q}$  y su error de apreciación  $\Delta q$ .

## 1.7. REFERENCIAS

- Obrada rezultata merenja. D. Koledin. En praktikum iz biofizike. Medicinska knjiga, Beograd-Zagreb, 1989.
- Cifras significativas y errores. M. P ez M. En guía de laboratorio de física I. Universidad de Antioquia, Medellín, 1987.
- Física general y experimental. J. Goldemberg. Interamericana, México, 1972.
- Teoría de los errores. V. Giamberardino. Reverté, Caracas, 1981.
- Experiments in modern physics. A. C. Melissinos. Academic Press, London, 1972.
- Our knowledge of the fundamental constants of physics and chemistry in 1965. E. R. Cohen y J. W. M. DuMond. Reviews of Modern Physics. Vol. 37, No. 4, 1965.



## **Capítulo 2**

# **TRATAMIENTO GRÁFICO DE DATOS EXPERIMENTALES**

### **2.1. OBJETIVOS**

Aprender a tabular los datos de un experimento y a realizar gráficas en papel milimetrado, logarítmico y semilogarítmico. Aprender a analizar la gráfica de una línea recta y el uso de las barras de error en la representación gráfica de los resultados experimentales. Entender el método de los mínimos cuadrados para el ajuste de un conjunto de datos a una gráfica lineal.

### **2.2. REPRESENTACIÓN DE LOS RESULTADOS EXPERIMENTALES**

Los resultados de las medidas, en general, pueden ser representados *analíticamente* y *gráficamente*. El experimento, parte esencial del trabajo investigativo, puede conducir al hallazgo de relaciones funcionales entre cantidades que describen una clase amplia de fenómenos. Los resultados de tales experimentos son ecuaciones empíricas que representan la forma general en la cual están relacionadas las cantidades estudiadas.

A menudo los resultados de las medidas no expresan la relación entre las variables en forma simple (o sea aproximable por fórmulas matemáticas simples). En este caso la información representada en forma gráfica o en forma tabular constituye el mejor resultado obtenido del experimento.

En el trabajo de laboratorio, los resultados de las medidas, independientemente de si expresan o no una relación matemáticamente definida, se representan de las dos formas, *gráfica* y *tabular*.

La representación tabular proporciona sólo una síntesis muy limitada del resultado del trabajo experimental. Sin embargo la tabulación de los datos es una herramienta indispensable tanto para la realización misma del experimento como para su ulterior análisis.

La representación gráfica, ante todo proporciona una imagen visual del comportamiento del fenómeno estudiado, y también constituye un medio eficaz para obtener importante información cuantitativa. Por esta razón existen muchos métodos para la elaboración y el análisis de gráficas.

Es común la necesidad de explorar relaciones de la forma

$$y = f(x; p_1, p_2, p_3, \dots),$$

donde  $x$ ,  $y$  son las variables y  $p_1, p_2, p_3, \dots$  son parámetros constantes que determinan una familia de gráficas. En principio se busca hallar una relación funcional a partir de los datos experimentales y deducir los valores de los parámetros. Frecuentemente los parámetros contienen valiosa información, como valores de constantes físicas, etc. Muchos fenómenos pueden describirse por expresiones matemáticas simples, de uno de los siguientes cuatro tipos:

- (1) Función lineal:  $y = a \cdot x + b$ .
- (2) Función potencia:  $y = b \cdot x^a$ .
- (3) Función exponencial:  $y = b \cdot a^x$ .
- (4) Ecuación polar:  $r = af(\theta)$ .

Para graficar funciones del tipo (1), o que mediante cambios de variables se pueden llevar a la forma lineal, se emplean las gráficas en papel “milimetrado”. Para las del tipo (2) en papel “log-log”. Para las del tipo (3) en papel “semi-log”. Y para las del tipo (4) en papel “polar”. En estas funciones los parámetros son  $a$  y  $b$ .

## 2.2.1. Representación gráfica de los resultados.

### 2.2.1.1. Gráfica de una línea recta en papel milimetrado

Para elaborar una gráfica en papel milimetrado es necesario dibujar los ejes de acuerdo con los datos y colocar las parejas  $(x, y)$  en el plano cartesiano determinado por dichos ejes.

Describiremos el proceso de elaboración de una gráfica cartesiana con un ejemplo. La figura 2.1 representa un circuito eléctrico que contiene una batería  $E$ , un reóstato  $R$ , un interruptor y un amperímetro  $A$ . El reóstato (resistencia variable) permite variar la resistencia del circuito por medio de un botón cuyo movimiento se puede registrar en una escala calibrada en *ohm*. La batería proporciona una fuerza electromotriz constante de un número conocido

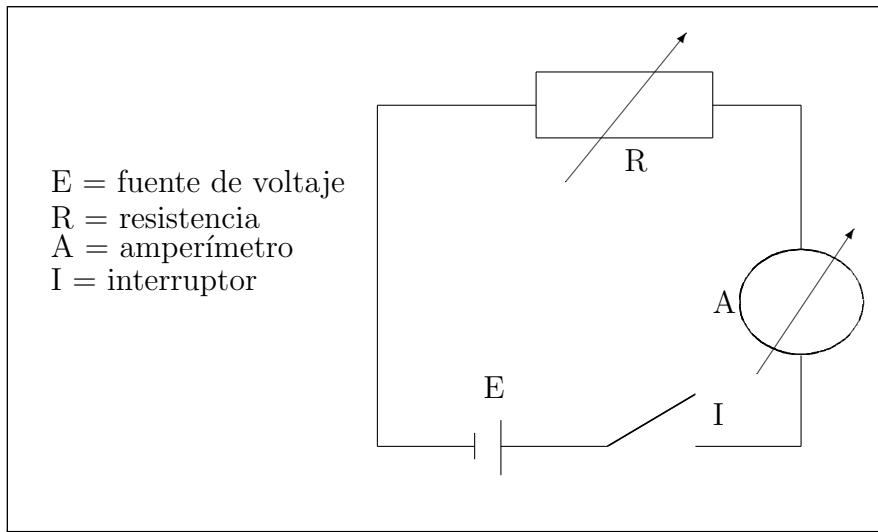


Figura 2.1: Esquema del montaje experimental para determinar la dependencia entre la corriente y el voltaje en un circuito eléctrico.

de *voltios*. El amperímetro permite medir la corriente a través del circuito en *amperios*. Se trata de obtener una relación funcional empírica entre la corriente y el valor de la resistencia.

La tabla 2.1 presenta los resultados del experimento, en las primeras dos columnas, junto con algunos cálculos en las columnas tercera, cuarta y quinta. Con base en la ley de Ohm,  $E = IR$ , esperamos que la gráfica de  $I$  contra  $R$  nos dé una hipérbola. Sin embargo en la práctica experimental se busca que la representación gráfica de los datos tenga la forma más simple, o sea la forma lineal, porque permite con más facilidad y exactitud dibujar y analizar la gráfica.

En situaciones como la presente, donde la representación directa de los datos no proporciona una gráfica lineal, se recomienda realizar un *cambio de variables* tal que permita obtener una gráfica lineal. Es la llamada *linealización de la gráfica*. Para ello no existen reglas generales. Dependiendo de la gráfica obtenida al representar directamente los datos, luego se tantean diversos cambios de variable. En el presente caso debe representarse a  $1/I$  en función de  $R$ .

Las medidas tienen algún error. Por ejemplo, si la división más pequeña del amperímetro (cuya *precisión* conocemos) es de  $0,1\text{ A}$ , el error de lectura de cada medida de corriente es  $\Delta' I = 0,05\text{ A}$ . El error total, que depende también del error instrumental, también se puede representar en la gráfica. En la tabla 2.1 se han representado los errores estándar obtenidos mediante mediciones repetidas. Como no estamos graficando a  $I$  sino a  $1/I$ , debemos repre-

$R (\Omega)$	$I (A)$	$\Delta I (A)$	$1/I (A^{-1})$	$(1/I^2) \Delta I (A^{-1})$
2	0.9	0.06	1.11	0.07
3	0.6	0.03	1.67	0.09
4	0.5	0.08	2.0	0.3
5	0.4	0.06	2.5	0.4
6	0.3	0.06	3.3	0.7
7	0.3	0.06	3.3	0.7
8	0.2	0.08	5	2
9	0.2	0.08	5	2

Tabla 2.1: Datos de las medidas de corriente y resistencia en un circuito eléctrico.

sentar no a  $\pm \Delta I$  sino  $\pm \Delta (1/I)$ , que de acuerdo con la guía sobre errores es

$$\Delta \left( \frac{1}{I} \right) = \left| \frac{-1}{I^2} \right| \Delta I.$$

Nótese que el cambio de escala introduce una dependencia del error respecto a  $I$ . Si el error en las medidas de la corriente fuera uniforme, el error en  $1/I$  sería grande cuando  $I$  es pequeño y pequeño cuando  $I$  es grande. Es el precio que a menudo se debe pagar por querer que la gráfica sea una línea recta.

Los errores se representan dibujando sus partes positivas (con las correspondientes unidades de medida) en la forma de una raya vertical por encima del punto correspondiente, y las partes negativas de igual forma se representan por una raya vertical debajo del punto correspondiente. Suponemos que no hay error en la escala de la resistencia  $R$ .

En los casos en que se tienen en cuenta los errores en las dos variables, se usa para representar el error una cruz o un rectángulo alrededor de cada punto experimental. La *elección de la escala* se basa en dos criterios: (1) que la gráfica ocupe toda la superficie disponible, ordinariamente de forma cuadrada, y (2) que si la gráfica representa una recta, tenga una pendiente de  $\pm 45^\circ$ . Se puede renunciar a estas reglas cuando es necesario representar sólo alguna parte de la gráfica o cuando la exactitud de una medida de una cantidad es mucho menor que la de la otra. Algunas veces el origen de coordenadas no debe estar en el punto  $(0, 0)$ .

Si la gráfica representa una recta, los puntos experimentales deben estar equidistantemente distribuidos. Sin embargo, si hay un interés en examinar alguna relación funcional entre las variables que sea complicada y si se quiere que los puntos experimentales describan en forma precisa alguna variación fuerte de la curva, entonces en la región en consideración

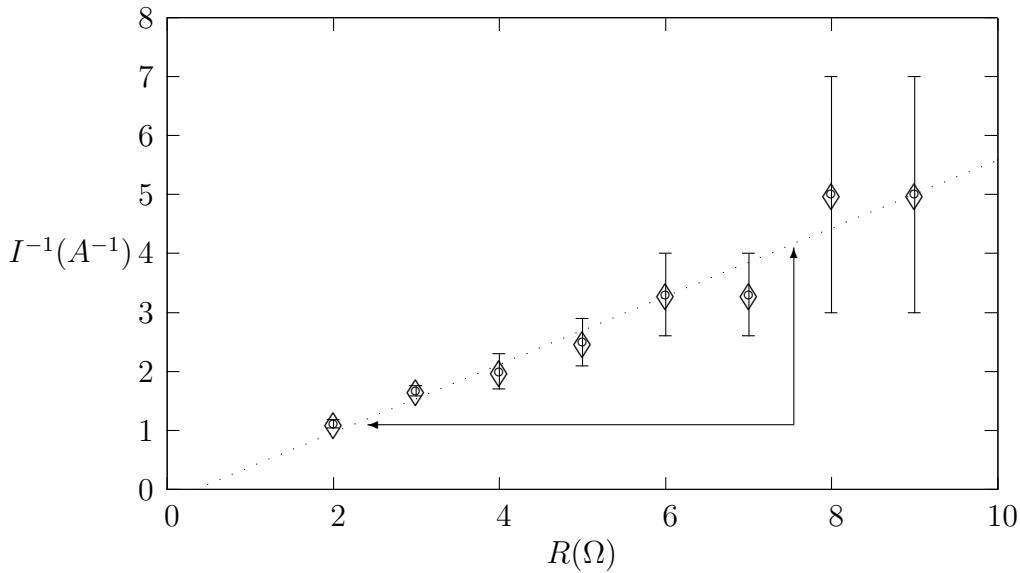


Figura 2.2: Gráfica de  $1/I$  contra  $R$  elaborada con los datos de la tabla 2.1. Las líneas verticales alrededor de cada punto representan el error en  $1/I$ . El cambio de variable,  $1/I$  en vez de  $I$ , llevó a la no uniformidad del margen de error.

debe aumentarse el número de medidas, o sea la densidad de puntos experimentales.

### 2.2.1.2. Análisis e interpretación de la gráfica de una línea recta

A la línea recta de la figura 2.2 le corresponde una ecuación de la forma:

$$y = a \cdot x + b, \quad (2.1)$$

en donde “ $y$ ” es la variable dependiente,  $1/I$  en este caso, “ $x$ ” es la variable independiente,  $R$  en este caso, “ $a$ ” es la pendiente y “ $b$ ” es el intercepto de la recta con el eje  $y$ .

**Procedimiento para el cálculo de la pendiente** La pendiente  $a$  es una medida de la inclinación de la recta con respecto al eje horizontal. Describe la tasa de cambio de la variable  $y$  respecto a la variable  $x$ . Por tratarse de una recta la pendiente es constante. Se escogen dos puntos **sobre la recta**, lo más alejados posible para reducir el error y se trazan líneas paralelas a los ejes como se indica en la figura 2.2.

$$a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}. \quad (2.2)$$

De acuerdo con la ley de Ohm,  $1/I = (1/V) \cdot R$ , el significado físico de  $a$  constante, es la constancia del voltaje de la batería o sea que estamos describiendo un circuito “DC”. Según la gráfica, escogemos dos puntos por donde pase la recta por ejemplo  $(0, 0,2)$ ,  $(5, 2,7)$ . La fórmula anterior nos dá  $m = 0,5$ .

**Cálculo del intercepto** Una vez se ha trazado la recta, el intercepto  $b$  se obtiene leyendo la distancia del origen al corte de la recta con el eje vertical  $y$ , que pasa por  $x = 0$ . El intercepto en el gráfico de la figura 2.1 corresponde al valor de  $1/I$  cuando  $R = 0$ ; para la gráfica que se ha trazado es  $b = 0,2$ .

### 2.2.2. Gráfica de líneas curvas

**Cálculo de la pendiente** En el caso de curvas la pendiente varía punto a punto. La pendiente en un punto está definida como la pendiente de la recta tangente a la curva en ese punto. La tangente a una curva en un punto  $P$ , es:

$$m = \text{pendiente en } P = \frac{\Delta y}{\Delta x}. \quad (2.3)$$

### 2.2.3. Interpolación y extrapolación

El problema general de la interpolación consiste en encontrar una curva suave, o sea sin ninguna irregularidad (como fractura, discontinuidad, etc), que se aproxime a la mayoría de los puntos experimentales. El problema de interpolación en el trabajo de laboratorio se resuelve de una manera relativamente simple.

La más sencilla es la *interpolación gráfica*. Consiste en trazar una curva que pase a través de todos los rectángulos de error dibujados alrededor de los puntos experimentales, de tal modo que aproximadamente el mismo número de puntos quede a cada lado de la curva, con alejamiento similar. Es claro que tal curva no necesita pasar a través de los puntos experimentales, sino simplemente a través de una región definida por los rectángulos (o las barras) en los cuales se sitúan con alta probabilidad los “valores verdaderos” de las cantidades medidas. Es el método usado para trazar la figura 2.2.

Este método, sin embargo, no es suficientemente simple y claro para resolver el problema de la interpolación. En otras palabras, el requisito exigido puede ser satisfecho por muchas curvas diferentes. Esto es evidente en la gráfica de la figura 2.3. Por esto es necesario definir un método analítico de interpolación que resuelva la ambigüedad.

El procedimiento matemático de interpolación más usado es el llamado *método de los mínimos cuadrados*. Explicaremos el método cuando hay una dependencia lineal entre las variables, usando los valores numéricos del ejemplo de la tabla 2.1.

Las variables de ese ejemplo están relacionadas por la ecuación de la línea recta,  $y = a \cdot x + b$ . Si se conocen los parámetros  $a$  y  $b$  (pendiente e intercepto con el eje de las ordenadas), podemos trazar fácilmente la recta. Como se espera una única recta experimental, los datos experimentales han de dar lugar a valores únicos de  $a$  y  $b$ . Para hallar por el método de los mínimos cuadrados tales parámetros es necesario calcular la suma de los cuadrados de

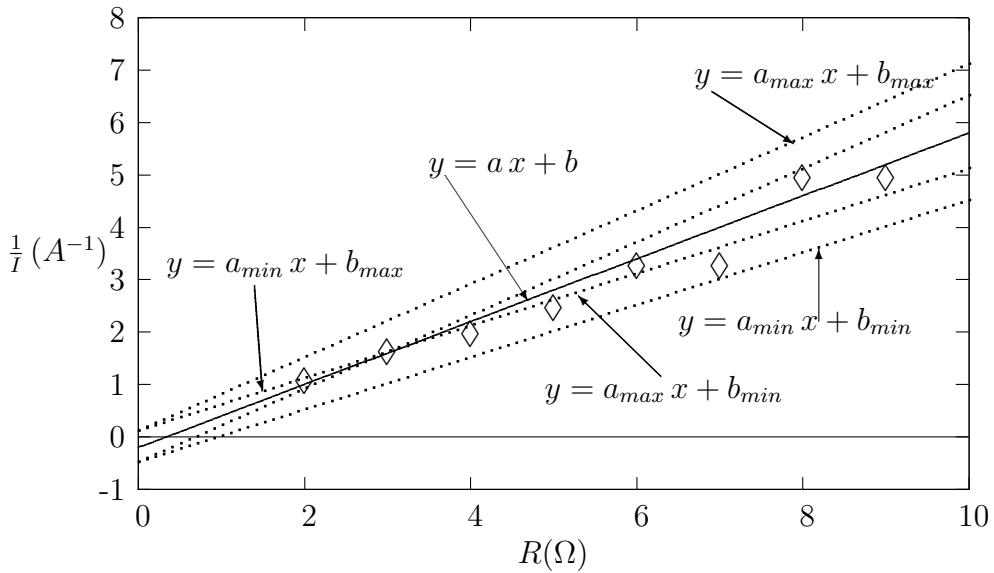


Figura 2.3: Gráfica de  $1/I$  contra  $R$  elaborada con las datos de la tabla 2.1, de acuerdo a la teoría de mínimos cuadrados. Nótense las dos líneas límites entre las cuales deben estar todos los datos.

las desviaciones verticales de los puntos experimentales respecto a la recta buscada y luego minimizar tal suma respecto a los parámetros  $a$  y  $b$ .

Consideremos que  $(x_i, y_i)$ ,  $i = 1, 2, 3, \dots, n$ , son las  $n$  parejas de valores obtenidos experimentalmente. Sobre la base de las propiedades (2) y (3) de la media aritmética dadas en el numeral 1.4.2 de la guía sobre estadística de errores (capítulo 1) se obtiene:

$$a = \frac{n \cdot \sum_{i=1}^n (x_i y_i) - \sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n y_i}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - (\sum_{i=1}^n x_i)^2} = \frac{\bar{x} \cdot \bar{y} - \bar{x} \cdot \bar{y}}{\bar{x}^2 - \bar{x}^2}, \quad (2.4)$$

$$b = \bar{y} - a \bar{x}. \quad (2.5)$$

$n$  es el número de puntos de la gráfica,  $(\bar{x}, \bar{y})$  es la coordenada del “centro de gravedad” del conjunto de datos y  $\bar{\text{---}}$  es una media aritmética. Los errores de estas cantidades se calculan mediante la fórmula siguiente:

$$s_a^2 = \left| \frac{\bar{y}^2 + a^2 \bar{x}^2 + b^2 - 2a \bar{x} \bar{y} - 2b \bar{y} + 2ab \bar{x}}{(n-2)(\bar{x}^2 - \bar{x}^2)} \right|, \quad (2.6)$$

$$s_b^2 = s_a^2 \cdot \bar{x}^2. \quad (2.7)$$

$x_i$	$y_i$	$x_i^2$	$y_i^2$	$x_i \cdot y_i$	
2	1.1	4	1.2	2.2	$n = 8$
3	1.7	9	2.9	5.1	
4	2.0	16	4	8.0	
5	2.5	25	6.2	12.5	
6	3.3	36	10.9	19.8	
7	3.3	49	10.9	23.1	
8	5.0	64	25	40.0	
9	5.0	81	25	45.0	
SUMA	44	23.9	284	86.1	$\bar{x} = 5,5 \quad \bar{y} = 3,0$
					$\bar{x} \cdot \bar{y} = 19,5$
					$\bar{y}^2 = 10,8$
					$\bar{x}^2 = 35,5$

Tabla 2.2: Datos para el cálculo de la pendiente y el intercepto usando las fórmulas del método de mínimos cuadrados.

En este cálculo se supone que los  $x_i$  se miden sin error y que todos los  $y_i$  tienen igual error. Resultados más exactos se logran introduciendo las incertidumbres de las medidas  $\Delta x_i$  y  $\Delta y_i$  a través de ciertos “factores de peso”  $p_i$ . Los resultados son:

$$a = \frac{\sum_{i=1}^n p_i \cdot \sum_{i=1}^n (p_i x_i y_i) - \sum_{i=1}^n p_i x_i \sum_{i=1}^n p_i y_i}{\sum_{i=1}^n p_i \sum_{i=1}^n p_i x_i^2 - (\sum_{i=1}^n p_i x_i)^2}, \quad (2.8)$$

$$b = \frac{\sum_{i=1}^n p_i x_i^2 \sum_{i=1}^n (p_i y_i) - \sum_{i=1}^n p_i x_i \sum_{i=1}^n p_i x_i y_i}{\sum_{i=1}^n p_i \sum_{i=1}^n p_i x_i^2 - (\sum_{i=1}^n p_i x_i)^2}. \quad (2.9)$$

$$p_i = \frac{1}{\Delta x_i + \Delta y_i}. \quad (2.10)$$

Estas fórmulas, y la generalización de (2.6) y (2.7), se obtienen fácilmente de las anteriores realizando los promedios con ayuda de los factores de peso y reemplazando a  $n$  por  $\sum p_i$ .

En la tabla 2.2 están transcritos los datos del experimento, llamando  $x_i$  a los valores de la resistencia y  $y_i$  a los inversos de las corrientes.

Cuando se reemplazan los valores apropiados de la tabla 2.1 en las fórmulas (2.5) y (2.9), se obtiene

$$a = 0,6 \ (A^{-1} \cdot \Omega^{-1}) \quad y \quad b = -0,2 \ (A^{-1}).$$

En la figura 2.3 se ha trazado la recta óptima ( $y = 0,6 \cdot x - 0,2$ ).

Físicamente se espera que el valor del parámetro  $b$  sea cero (corriente infinita cuando la resistencia es cero), pero el cálculo dí  $b = -0,2$ . No podemos imponer que la recta trazada pase por el punto  $(0, 0)$ , el cual tampoco puede considerarse como punto experimental porque no es posible medir una corriente infinita. Respecto al hecho de no pasar la curva por el origen sólo nos quedaría evaluar el error en el cálculo de  $b$  y verificar si se cumple o no que

$$b - s_b \leq 0 \leq b + s_b.$$

Reemplazando en las fórmulas 2.6 y 2.7 los valores requeridos, que se obtienen de la tabla 2.2, obtenemos que  $s_a = 0,1$  y  $s_b = 0,3$ , y por lo tanto  $-0,2 - 0,3 \leq 0 \leq -0,2 + 0,3$ , con lo cual concluimos que el valor  $b = -0,2$  efectivamente es atribuible a los errores experimentales, y no a una discrepancia respecto a la ley de Ohm.

A partir de  $s_a$  y  $s_b$  podemos calcular los intervalos en los cuales estarán la pendiente y el intercepto,

$$a_{\max} = a + s_a; \quad a_{\min} = a - s_a; \quad b_{\max} = b + s_b; \quad b_{\min} = b - s_b.$$

Estas cantidades permiten definir el conjunto posible de líneas rectas predicho por los datos, entre los cuales la recta de mínimos cuadrados es la más probable. (Ver figura 2.3). Las rectas extremas son ( $y = a_{\max} x + b_{\max}$ ,  $y = a_{\min} x + b_{\min}$ ).

Este par de rectas es muy útil para decidir cuáles datos experimentales deben descartarse: aquellos que caigan fuera de la región limitada por ellas. Además se espera que la mayoría de los datos experimentales estén alojados en la región comprendida entre las rectas ( $y = a_{\max} x + b_{\min}$ ,  $y = a_{\min} x + b_{\max}$ ), que aproximadamente se cortan entre sí y con la recta de mínimos cuadrados en el centro de gravedad del conjunto de datos,  $(\bar{x}, \bar{y})$ .<sup>1</sup>

Una vez se eliminan de la tabla de datos aquellos que caen por fuera de la zona permitida, delimitada por las dos líneas externas, se volverán a calcular los parámetros  $a$  y  $b$  junto con sus respectivos errores estándar.

En el tratamiento gráfico de los datos experimentales a menudo se incluye el procedimiento de *extrapolación gráfica*. La extrapolación es una ampliación del rango de validez de cierta dependencia funcional desde una región en la cual fué obtenida hasta una región externa al rango inicial de la variable independiente. De tal manera se pueden hallar teóricamente datos que, en principio, no se pueden obtener con medidas inmediatas.

---

<sup>1</sup>Exactamente se cortan en el punto ( $x_c = \sqrt{\bar{x}^2}$ ,  $y_c = (\bar{x} \cdot \bar{y} + \bar{y}x_c) / (x_c + \bar{x})$ ). En el ejemplo  $(\bar{x}, \bar{y})=(5,5, 3,0)$  y  $(x_c, y_c)=(6,0, 3,3)$  están sobre la recta de mínimos cuadrados y coinciden dentro del margen de error de los puntos de dicha recta.

$x$	2	4	6	8	10	12
$y$	7.5	19.0	47.0	119.0	300.0	753.5
$\log y$	0.87	1.28	1.67	2.07	2.47	2.87

Tabla 2.3: Datos para realizar una gráfica logarítmica.

En algunos de los experimentos de este curso de laboratorio es necesario realizar extrapolación de la dependencia lineal hasta el punto de intersección con alguno de los ejes de coordenadas. Se acostumbra representar la parte extrapolada de la gráfica por medio de líneas a trazos.

Desde el punto de vista físico la extrapolación no es una operación completamente justificada, pues se está suponiendo que cierta dependencia funcional es válida aún fuera del intervalo en el cual se han obtenido los datos. Casi siempre el único argumento para efectuar la extrapolación es la creencia en que el fenómeno físico tendrá la misma apariencia cualitativa en la región a donde se extrae. En el ejemplo que estamos considerando, al extraer la recta hasta alcanzar el intercepto suponemos que la ley de Ohm se cumple cuando la corriente es infinita.

## 2.2.4. Gráficas en papeles log-log y semi-log

Para analizar fácilmente algunas curvas es conveniente hacer cambios de variable. Una de las formas más fáciles de hacer esto es mediante el papel semilogarítmico o logarítmico. El objetivo es obtener una línea recta que, como se vió, es fácil de analizar. En el apéndice al final del manual encontrar copias de los diferentes tipos de papeles.

### 2.2.4.1. Papel semilogarítmico

Consideremos los datos que se muestran en la tabla 2.3, donde además de las filas con los datos experimentales aparece una tercera con el logaritmo decimal de la variable  $y$ .

En las figuras 2.4 y 2.5 aparecen las gráficas en papel milimetrado de  $y$  en función de  $x$  y de  $\log y$  en función de  $x$  respectivamente. Es claro que la línea que mejor se adapta a los puntos de la figura 2.5 es una recta. Esto significa que la ecuación buscada es de la forma  $y = b \cdot a^{mx}$ . En efecto, tomando el logaritmo decimal a los dos miembros de esta ecuación obtenemos

$$\log y = \log(b a^{mx}) = \log b + m x \log a.$$

Si ahora hacemos las sustituciones  $y' = \log y$ ,  $a' = m \log a$ , y  $b' = \log b$ , obtenemos

$$y' = b' + a' x,$$

que es la ecuación de una recta. En vez de calcular los valores de  $\log y$  y graficarlos como en la figura 2.5 existe una alternativa más conveniente: graficar  $x$  y  $y$  sobre un papel en

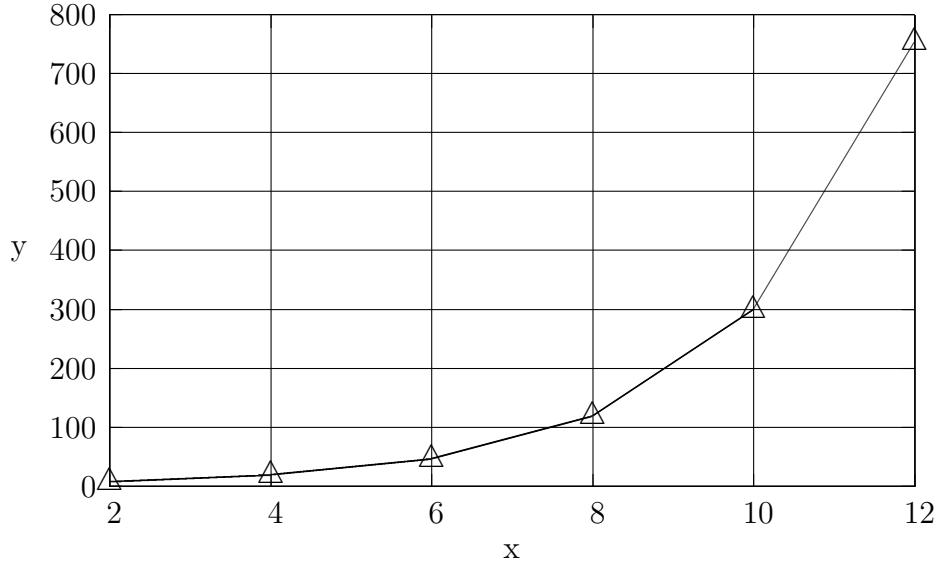


Figura 2.4: Gráfica de los datos de la tabla 2.3 en escala lineal.

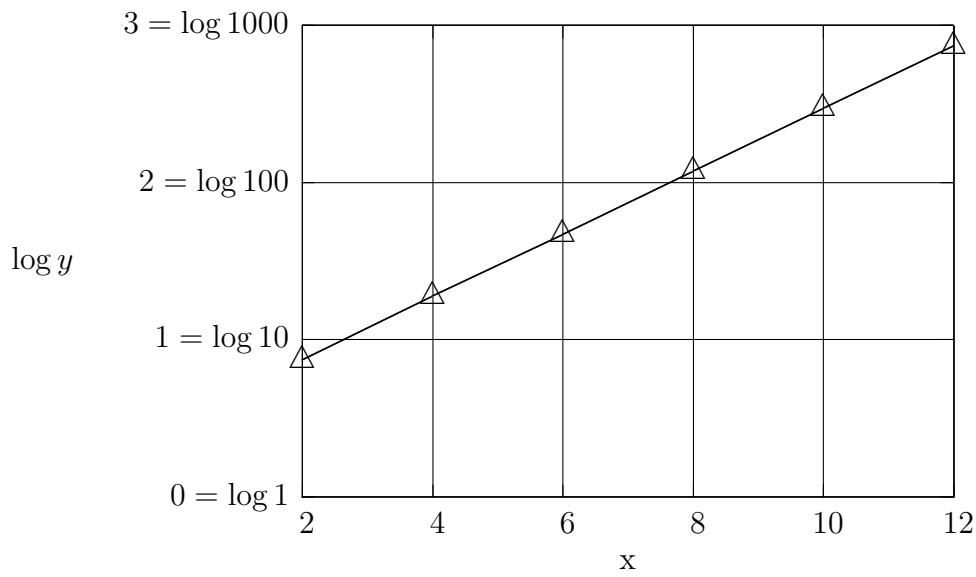


Figura 2.5: Gráfica con los datos de la tabla 2.3. Se grafica  $\log y$  en función de  $x$ .

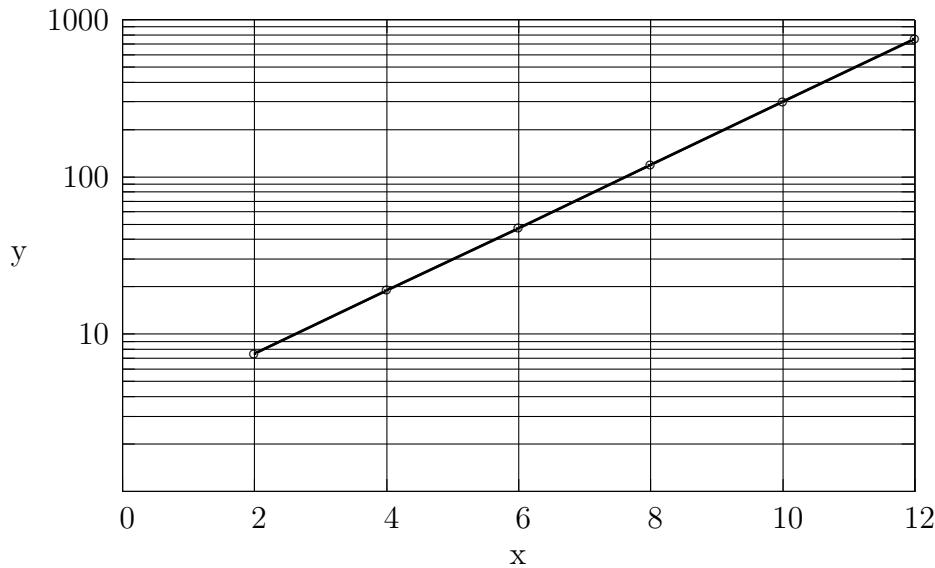


Figura 2.6: Gráfica con los datos de la tabla 2.3 en escala semilogarítmica.

el cual las escalas del eje  $y$  corresponde al logaritmo de las escalas del eje  $y$  de un papel milimetrado. Esto dá el tipo de papel “semilog” de la figura 2.6. Así cuando una tabla de datos de parejas  $(x, y)$  se gráfica en papel semilog, se localizan los puntos sobre el papel, sin previamente calcular el logaritmo de  $y$  pues el papel semilog lo hace de modo gráfico. Sin embargo, por comodidad, los números que se escriben en el eje vertical son los “ $y$ ” y no “ $\log y$ ”, a pesar de que lo que aparece graficado es  $(x, \log y)$ .

En este papel el eje horizontal tiene una escala milimetrada y el eje vertical una escala logarítmica. Si la escala logarítmica se repite dos veces el papel se llama de dos ciclos. Los valores en esta escala se numeran de tal manera que cada ciclo debe terminar en un número 10 veces mayor que el anterior, es decir, el primer ciclo empieza en 1 y termina en 10; el segundo empieza en 10 y termina en 100. El número de ciclos necesario estará dado por el número de potencias de 10 que abarquen los valores de  $y$ . En cada ciclo de las escalas del papel están escritos los mismos números,  $(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10)$ . Nótese que no puede aparecer el cero.

Ahora el valor de la pendiente  $a'$  en el papel semilog se calcula escogiendo 2 puntos  $(x_1, y_1)$ ,  $(x_2, y_2)$  por donde pase la recta, y evaluando:

$$a' = \frac{y'_2 - y'_1}{x_2 - x_1} = \frac{\log y_2 - \log y_1}{x_2 - x_1}.$$

Como  $a' = m \log a$  se sigue:

$$m = \frac{a'}{\log a} = \frac{\log\left(\frac{y_2}{y_1}\right)}{(x_2 - x_1) \log a}.$$

El intercepto de la recta es  $b'$  y se lee de la gráfica 2.5. Debe sin embargo tenerse en cuenta si el eje  $y'$  cae sobre  $x = 0$ , y si el eje  $x$  cae sobre  $y' = 0$ .

**En síntesis:** Rectas en papel semilog corresponden a ecuaciones del tipo  $y = b a^{mx}$ , donde  $m$  está dada por la fórmula citada y  $b = 10^{b'}$  es el número que se lee directamente en el papel semilog.

**NOTA:** El papel semilog está definido con una base decimal. Por esto  $a' = m \log a$ . En muchos casos  $a$  es la base natural  $e$ , ( $e = 2,718281$ ) y  $a' = m \times 0,434$ . En el caso en el cual  $a = 10$  obviamente  $a' = m$ . Algunas relaciones importantes que tienen que ver con estos cambios de base son:

- 1) Relación entre logaritmo natural ( $\ln$ ) y logaritmo decimal ( $\log$ ):

$$\log x = 0,4343 \ln x; \quad \ln x = 2,3026 \log x.$$

- 2) Cambio de base en exponentiación:

$$e^x = 10^{0,4343x}; \quad 10^x = e^{2,3026x}.$$

Nótese que  $\log e \cdot \ln 10 = 1$ .

#### 2.2.4.2. Forma logarítmica o “papel log-log”

En este papel las dos escalas son logarítmicas. Puede ser de dos o tres ciclos. Si los datos se ajustan a una función de la forma  $y = b x^a$ , en papel logarítmico se obtiene una línea recta. En efecto, tomando logaritmo decimal a ambos lados,

$$\log y = \log(b x^a) = a \log x + \log b.$$

Si se hacen los cambios de variable  $y' = \log y$ ,  $x' = \log x$ ,  $b' = \log b$  se sigue que  $y' = a x' + b'$ , donde  $a$  es la pendiente de la recta en papel logarítmico y  $b'$  es el intercepto.

Para calcular a  $a$  se escogen dos puntos  $P_1$  y  $P_2$  sobre la recta y se evalúa:

$$a = \frac{\log y_2 - \log y_1}{\log x_2 - \log x_1} = \frac{\log\left(\frac{y_2}{y_1}\right)}{\log\left(\frac{x_2}{x_1}\right)}.$$

Con  $(x_1, y_1)$ ,  $(x_2, y_2)$  leídos sobre el papel log-log. Una forma aún más simple de calcular a  $a$  consiste en **medir directamente con una regla** a  $\Delta y$  y  $\Delta x$  en centímetros o pulgadas y efectuar la operación  $(L_x/L_y)(\Delta y/\Delta x)$ . Note que es necesario medir con la misma regla la longitud de un ciclo de la respectiva escala logarítmica y luego dividir a  $\Delta y$  y  $\Delta x$  por la correspondiente longitud.

Por ejemplo, aplicando la fórmula anterior a la gráfica de la figura 2.7 obtenemos, tomando medidas en milímetros:

$$\frac{L_x}{L_y} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{63}{36} \frac{72}{59} = 2,1$$

Explique por qué es correcto el procedimiento anterior.

El intercepto de la recta es  $\log b$ , pero  $b$  se lee directamente con los números marcados en el papel log-log. Corresponde al valor de la coordenada vertical cuando la coordenada horizontal es 1 ( $\log 1 = 0$ ). Debe tenerse la precaución de extrapolar la línea si es necesario para tomar a  $b$  sobre un eje vertical que cae sobre el punto  $(0, 0) = (\log 1, \log 1)$ , ya que no siempre se tienen unos datos cuyo mínimo valor esté comprendido entre 1 y 10 y por esto el primer ciclo usado no necesariamente corresponde al intervalo 1 – 10, esto es al 0 – 1 del papel log-log.

**En síntesis:** Rectas en papel logarítmico corresponden en papel milimetrado (plano cartesiano normal) a  $y = b x^a$ .

**NOTA:** Se puede utilizar la fórmula para la pendiente  $a = \tan \alpha$ , siendo  $\alpha$  el ángulo de inclinación de la recta. Para ello bastaría medirlo con un transportador. Sin embargo este procedimiento es válido únicamente cuando los ciclos de las escalas sean iguales. Explique en su informe este comentario.

En cuanto al manejo de los errores, notemos que si  $\Delta u$  es el error del dato  $u$ , entonces el error del logaritmo de  $u$  será  $\Delta \ln(u) = \Delta u/u$ . Por lo tanto el error en el logaritmo se “amplifica” si  $u$  es pequeño y es despreciable cuando  $u$  es grande. Para dibujar los rectángulos de errores basta colocar los valores de  $u \pm \Delta u$ , donde  $u$  puede ser  $x$  o  $y$ .

Note que en los papeles logarítmicos aparecen divisiones “gruesas” y “finas”. ¿Cuanto valen los errores de apreciación en las diferentes escalas logarítmicas? ¿Con cuantas cifras significativas se podrán obtener los valores de la pendiente y el intercepto?

### 2.2.5. Representación de resultados con diagramas de frecuencia

Los diagramas de frecuencia se utilizan en situaciones en las cuales se llega a detectar la estructura estadística de la serie de medidas considerada, o sea cuando se tiene una serie de

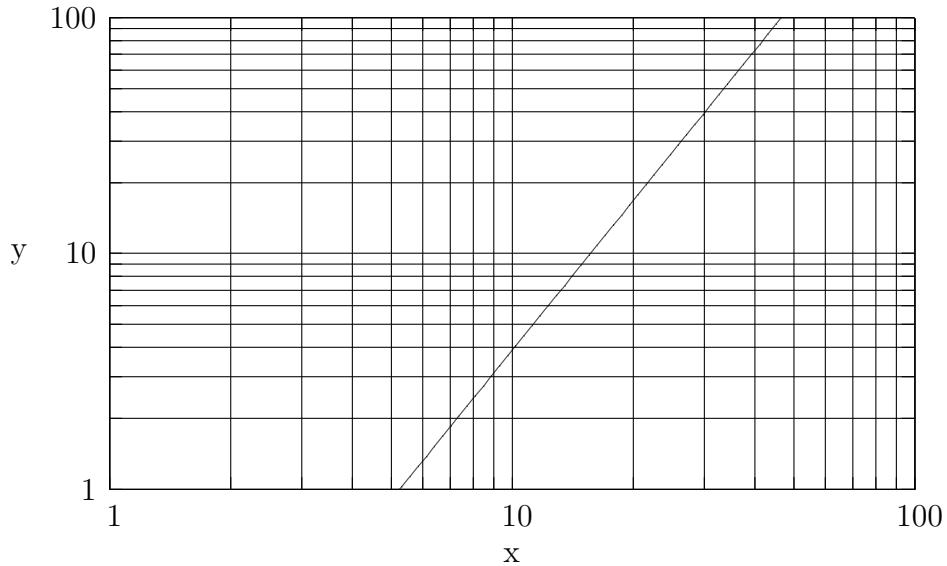


Figura 2.7: Gráfica en escala “log-log” de la función  $y = 0,03 x^{2,11}$ .

medidas repetidas con muchos datos ( $n > 30$ ).

La representación diagramática se efectúa en una de estas tres formas equivalentes: histograma, polígono y curva de frecuencias.

La construcción del histograma de frecuencias se hace mediante el siguiente procedimiento. El dominio de validez de las cantidades medidas se divide en intervalos convenientes, y luego se determina cuantos resultados de las medidas caen dentro de cada intervalo, o sea la frecuencia. En el eje de las abscisas se colocan los intervalos examinados, y en el eje de las ordenadas las correspondientes frecuencias. Finalmente, encima de cada intervalo se construye un rectángulo cuya base es igual al intervalo considerado, y cuya altura es la correspondiente frecuencia.

El polígono de frecuencias se construye similarmente. De la mitad de cada intervalo de la cantidad medida se coloca un punto a una altura que corresponde a la frecuencia, y los puntos así obtenidos se unen formando una línea poligonal.

La curva de frecuencias es una construcción teórica. Se obtiene aproximando el polígono de frecuencias por una curva suave (ver la curva de la distribución normal, figura 1.2), en el caso en el cual se toman intervalos de clase infinitesimales, cada uno abarcando un infinito número de casos.

Ejemplos de experimentos en los cuales los resultados se representan con estos diagramas son un experimento sobre determinación de la energía de las partículas  $\alpha$  detectadas con

ayuda de una emulsión nuclear, o un experimento sobre modelo de decaimiento radiactivo.

## 2.3. ALGUNAS NORMAS PARA GRAFICAR

1. Elaborar una tabla con los datos obtenidos experimentalmente. Estos datos pueden tabularse en columnas o filas. En la parte superior de las columnas, o la izquierda de las filas, se anota el símbolo o nombre de las cantidades medidas y sus unidades correspondientes. Toda tabla debe llevar un título explicativo que indique el significado de los datos y la forma como fueron obtenidos. Los datos deberán anotarse exactamente como son observados. Es correcto, y en muchos casos conveniente, incluir en la tabla de datos los resultados que han sido calculados, adicionando nuevas columnas o filas sin olvidar el encabezamiento de las mismas para mostrar claramente los números correspondientes a los datos y los números obtenidos mediante cálculos realizados con los datos.
2. Trazar dos líneas perpendiculares entre sí, llamadas el eje de abscisas (horizontal) y el eje de ordenadas (vertical), cuya intersección es el origen de coordenadas.
3. En cada eje debe indicarse explícitamente con un símbolo la cantidad que va a representarse y sus unidades. Por ejemplo: el eje vertical puede representar la velocidad de un móvil ( $m/s$ ) y el eje horizontal el tiempo ( $s$ ).
4. La escala de los ejes, cuando se usa papel milimetrado, debe escogerse de acuerdo a los valores máximos y mínimos de cada conjunto de datos de tal manera que la gráfica ocupe la mayor parte del papel disponible.
5. Se deben elegir, sin embargo, escalas que puedan subdividirse fácilmente. Valores recomendables de la longitud de las divisiones son: 1, 2, 5 y 10 unidades de los datos. No se recomiendan valores tales como 3, 7, 6 y 9 debido a que hacen difícil la localización y lectura de los valores en el gráfico. No es necesario que la escala sea la misma en ambos ejes, ni que el origen sea el punto (0,0).
6. Localice cada punto en su lugar aproximado y dibújelo en el papel. Si varias curvas se van a dibujar en el mismo papel y los puntos pueden interferir, use círculos, cuadrados y triángulos para encerrar los puntos correspondientes a cada curva. Es conveniente redondear los datos de acuerdo a la sensibilidad del papel.
7. Trace una línea suave a través de los puntos; no es necesario que pase por cada uno de ellos, pero deberán dejarse en lo posible igual número de puntos por encima y por debajo de la gráfica a trazar e igualmente espaciados de la misma. Un procedimiento riguroso, en el caso de líneas rectas, consiste en calcular la pendiente y el intercepto mediante las fórmulas de la teoría de mínimos cuadrados.

8. Toda gráfica debe llevar un título explicativo que se coloca una vez elaborada para darle significado a los resultados que muestra. Por ejemplo: “Velocidad de un deslizador en un riel de aire como una función del tiempo” en lugar de colocar “Velocidad vs. tiempo”.
9. Es imperativo aprender a usar programas de computador para la elaboración de gráficas, que ya tienen definidas estas y otras normas y proporcionan gráficas impresas de excelente calidad: EUREKA, GNUPLOT, etc.
10. Una tabla de datos primero se debe graficar en papel milimetrado. Si los puntos no se acomodan a una recta, graficar en papel semilog o en papel log-log. En alguno de estos dos se obtendrá una recta si la situación física se puede describir aproximadamente por una función potencia o por una exponencial. En situaciones más complicadas usualmente algún modelo teórico sugiere un cambio preliminar de variables que permiten obtener una línea recta en alguno de los tipos de papel estudiados. En otros casos las gráficas logarítmicas no se emplean para obtener “líneas rectas” sino simplemente para poder graficar datos que cubren un rango de muchos órdenes de magnitud.

## 2.4. PROCEDIMIENTO E INFORME

Los ejercicios 1 y 2 se refieren a los conjuntos de datos de las tablas 2.4 y 2.5, o los que el instructor sugiera. De acuerdo a las gráficas obtenidas en papel milimetrado realice luego gráficas logarítmicas o semilogarítmicas con el fin de obtener líneas rectas. Exprese las ecuaciones pertinentes en base decimal y natural.

### 2.4.1. Ejercicios

#### 2.4.1.1. Ejercicio 1

- a) Grafique los datos de velocidad contra tiempo de la tabla 2.4 en papel milimetrado y en papel log-log. Coloque la velocidad ( $v$ ) en el eje vertical y el tiempo ( $t$ ) en el eje horizontal.
- b) Dibuje las barras de error. Encuentre la ecuación de la gráfica logarítmica y a partir de ella encuentre la dependencia funcional entre  $v$  y  $t$ .
- c) Obtenga otras conclusiones de la gráfica (extensión, extrapolación, puntos especiales, datos despreciados, interpolación, etc.). Suponga errores uniformes en todas las medidas, con  $\Delta v = 0,05 \text{ m/s}$  y  $\Delta t = 0,01 \text{ s}$ .
- d) Analice el hecho de que en este caso sea posible ajustar los datos a líneas rectas en los dos tipos de papel. Para ello puede considerar la expansión en serie de Taylor de la función exponencial despreciando los términos de orden superior:

$$y = b x^a \approx b x_0^a + ab x_0^{a-1} (x - x_0) = (ay_0 x_0^{-1}) x + (1 - a) y_0.$$

$v \text{ (m/s)}$	2.28	3.20	3.89	4.60	5.30	5.87
$t \text{ (s)}$	1.00	1.88	2.63	3.38	4.13	4.83

Tabla 2.4: (Ejercicio 1.) Velocidad contra tiempo.

$t \text{ (s)}$	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60
$N$	850	600	380	290	185	155	95	65	50	34	22	16	16

Tabla 2.5: (Ejercicio 2.) Número de núcleos  $\mathbf{N(t)}$  contra tiempo.

#### 2.4.1.2. Ejercicio 2

Grafique los siguientes datos del decaimiento de una sustancia radiactiva (número  $N$  de núcleos contra el tiempo  $t$ ). Encuentre la ecuación de la gráfica en papel semilogarítmico. Suponga errores uniformes en todas las medidas, con  $\Delta t = 0,5$  y  $\Delta N = 5$ .

#### 2.4.1.3. Ejercicio 3

En la tabla 2.6 está la distribución de frecuencias del tiempo de vida de cierto producto industrial. Calcule la media y la desviación estándar ( $\bar{t}, \sigma$ ) de la muestra representada. Realice el histograma de frecuencias. Con el fin de comprobar si la muestra tiene una distribución normal, realice una gráfica en papel semilog de la frecuencia contra  $(t - \bar{t})^2$ . Si la distribución fuera normal, la pendiente sería igual a  $-(1/2\sigma^2) \log e$  y el intercepto a  $-\log(2\sqrt{2\pi}\sigma)$ .

#### 2.4.1.4. Ejercicio 4

Realice un estudio completo de una de sus gráficas lineales anteriores aplicando el método de los mínimos cuadrados (coloque barras de error, calcule los errores sobre la pendiente y el intercepto, etc).

Presente un informe que incluya los cuatro ejercicios y las preguntas formuladas a través de la presente guía.

$i$	Intervalo (años)	$t_i$	$f_i$	$f_i t_i$	$t_i - \bar{t}$	$f_i \cdot (t_i - \bar{t})$	$(t_i - \bar{t})^2$	$f_i \cdot (t_i - \bar{t})^2$
1	1.5-1.9	1.7	2					
2	2.0-2.4	2.2	3					
3	2.5-2.9	2.7	6					
4	3.0-3.4	3.2	12					
5	3.5-3.9	3.7	10					
6	4.0-4.4	4.2	5					
7	4.5-4.9	4.7	3					

Tabla 2.6: (Ejercicio 3.) Distribución de frecuencias del tiempo de vida de un producto. Los **41** datos se clasificaron en **7** intervalos de clase de longitud **0,5** años.

## 2.5. REFERENCIAS

- Obrada rezultata merenja. D. Koledin. En Praktikum iz Biofizike. Medicinska knjiga, Beograd-Zagreb, 1989.
- Análisis de gráficos. M. Pérez M. En guía de laboratorio de física I. Universidad de Antioquia, Medellín, 1987.
- Teoría de los errores. V. Giamberardino. Reverté, Caracas, 1981.
- Least squares for different experimental cases. H. R. Vega. Revista Mexicana de Física. Vol. 35, No. 4, 1989.
- Selective experiments in physics. No. 71990-003 CENCO. Central Scientific Company, 1972.



# **Apéndice A**

## **UNIDADES DE MEDIDA**

### **A.1. INTRODUCCIÓN**

Las matemáticas y la física se denominan ciencias exactas porque expresan relaciones entre objetos susceptibles de medirse; sin embargo las ciencias modernas en general, desde las ingenierías hasta la sociología, cada vez dependen más de las medidas y por tanto de las matemáticas. O sea que detrás del simbolismo más abstracto, en cualquier modelo matemático, está un conjunto de cantidades medibles experimentalmente.

Medir es comparar una cantidad de valor desconocido con un “estándar” o “patrón”, el cual está incorporado en las escalas del instrumento de medida. Al patrón escogido se le dá el nombre de unidad de medida. Las unidades de todas las magnitudes físicas conocidas se pueden derivar de un conjunto pequeño de unidades fundamentales.

En este apéndice se describe el Sistema Internacional de Unidades, de uso obligatorio en nuestro país, y su relación con otros sistemas de unidades.

### **A.2. UNIDADES FUNDAMENTALES Y COMPLEMENTARIAS EN EL “SI”**

Todos los problemas relacionados con las unidades de las magnitudes físicas se definen a nivel internacional en una conferencia sobre pesas y medidas, “Conférence Générale des Poids et Mesures” (CGPM). Las máximas autoridades mundiales son el “Comité International des Poids et Mesures”, la “International Standard Organization” y la “Organisation Internationale de Métrologie Légale”. La resolución 11 de 1960 de la CGPM proclamó el “Système International d’Unités”, (SI), que se basa en el sistema métrico decimal. En Colombia la autoridad en estas materias está a cargo del ICONTEC, que se fundamenta en las leyes, decretos y tratados internacionales sobre pesos y medidas del gobierno nacional al respecto, en especial en los decretos 1731 del 18 de septiembre de 1967 y 2416 del 9 de diciembre de

1971 en los cuales se adoptan como obligatorios en el territorio nacional el sistema métrico decimal y el SI, y el decreto 3464 del 26 de diciembre de 1980, por el cual se adopta el SI como obligatorio en todas las cuestiones de metrología en el territorio nacional.<sup>1</sup>

Aún es muy usado en el campo de la técnica el sistema inglés (Foot-Pound-Second, FPS), razón por la cual es necesario estudiarlo.

El SI es más coherente y sencillo y terminará reemplazando totalmente al FPS en las aplicaciones técnicas. Tiene como patrones básicos los 7 siguientes, de acuerdo con la resolución de la XIV CGPM celebrada en octubre de 1971:

De longitud el metro (*m*). De masa el kilogramo (*kg*). De tiempo el segundo (*s*). De intensidad de la corriente eléctrica el amperio (*A*). De temperatura el kelvin (*K*). De intensidad de la luz la candela (*cd*). Y de sustancia (o cantidad de materia) el mole (*mol*). Todas las demás unidades, como veremos, se pueden expresar en términos de estas siete.

Además de las 7 unidades fundamentales están definidas las siguientes 2 unidades complementarias:

De ángulo plano el radián (*rad*) y de ángulo sólido el estereoradián (*sr*).

Las unidades de magnitudes derivadas, que requieren productos o cocientes de las unidades básicas se escriben usando el punto como signo de multiplicación, aunque es aceptable el espacio. Por ejemplo:  $N \cdot m$  o  $n\ m$ , pero no es correcto  $Nm$ . Las unidades de magnitudes que llevan mayúsculas y minúsculas siempre se empiezan con la mayúscula. Así, no es permitido  $mN$ , que además podría conducir a la ambigüedad entre “newton por metro” y “milinewton”. Así, si adoptamos el sistema SI, en vez de escribir  $1\ g$  escribiremos  $10^{-2}\ kg$ , en vez de escribir  $41\ mts.$  escribiremos  $41\ m$ , en vez de escribir  $mt/sec^2$  o  $m/seg^2$  o  $m/s/s$  escribiremos  $m/s^2$ ,  $m\ s^{-2}$  o  $m \cdot s^{-2}$ , en vez de escribir  $52kJ$  o  $52\ KJ$  o  $52\ k\ J$  escribiremos  $52\ kJ$ , y en vez de escribir  $273^\circ K$ , escribiremos  $273,16\ K$ .

### **A.3. PATRONES DE LAS UNIDADES FUNDAMENTALES Y COMPLEMENTARIAS**

Cada una de estas unidades tiene hoy una definición científica con el propósito de que sea totalmente invariante en el tiempo y el espacio.

---

<sup>1</sup>El decreto 956 del 30 de mayo de 1931 reglamenta el sistema de pesas y medidas definido en la ley 33 de 1905, en cumplimiento del artículo 32 y del literal 15 del artículo 76 de la Constitución de 1886. La ley 155 de 1959 actualiza las normas sobre pesas y medidas. El decreto 767 de 1964 define al Icontec como asesor del gobierno en cuestiones de metrología. La Resolución 237 de 1976 del Consejo Nacional de Normas y Calidades oficializó la norma ICONTEC 1.000 Sistema Internacional de Unidades, SI.

1. El metro. Es una distancia igual a 1 650 763,73 veces la longitud de onda de la luz anaranjada emitida en el vacío por un átomo de kriptón-86 al realizar una transición entre los niveles  $2 p_{10}$  y  $5 d_5$  (1960).
2. El kilogramo. Es la masa del prototipo internacional del kilogramo, que se halla en el archivo nacional en Sèvres, Francia. Este prototipo es de una aleación de platino y 20 % de iridio (1889, 1901).
3. El segundo. Es un intervalo de tiempo igual a 9 192 631 770 veces el período de oscilación de la onda de radiación emitida por el átomo de cesio-133 al realizar una transición entre los dos niveles de estructura hiperfina del estado base (1967).
4. El amperio. Es la intensidad de corriente eléctrica continua requerida para que dos alambres conductores (rectilíneos, paralelos, de longitud infinita, de muy pequeña sección transversal y colocados en el vacío), separados a una distancia mutua de un metro, ejerzan entre sí una fuerza igual a  $2 \cdot 10^{-7} \cdot N$  por cada metro de longitud (1948).
5. El kelvin. Es la temperatura igual a 1/273,16 veces la temperatura termodinámica a la cual está el punto triple del agua (1967). El punto triple del agua está a  $273,17\text{ }K$ , y es la única temperatura a la cual coexisten los tres estados del agua, líquido, sólido y gaseoso.
6. La candela. Es la intensidad de la luz que sale de un cuerpo negro de área igual a  $1/600\,000\text{ }m^2$  en dirección perpendicular, calentado a una temperatura igual a la temperatura a la cual se solidifica el platino cuando está sometido a una presión de  $101\,325\text{ }Pa$ , que es  $2046,6\text{ }K$  (1967).<sup>2</sup>
7. El mole. Es la cantidad de sustancia que contiene igual número de átomos (o moléculas, iones, electrones u otros elementos estructurales) que  $0,012\text{ }kg$  de carbono-12 (1971). En biología molecular a un mole de luz ( $6,023 \cdot 10^{23}\text{ fotones}$ ); se le denomina un einstein.
8. El radián. Es el ángulo de un sector circular en el cual el radio y el arco tienen igual longitud.  $1\text{ rad} = 1\text{ m}/1\text{ m} = 1$  (1960).
9. El estereoradián. Es el ángulo sólido que corta sobre la superficie de la esfera una área igual al cuadrado del radio de esa esfera.  $1\text{ sr} = 1\text{ m}^2/1\text{ m}^2 = 1$  (1960).

## A.4. UNIDADES DERIVADAS

Son unidades que se pueden expresar en términos de las unidades básicas. Se expresan por medio de relaciones algebraicas que sólo involucran los signos de multiplicación y división.

---

<sup>2</sup>En el decreto 3464 de 1980 aparece la siguiente definición: 1 candela es la intensidad luminosa de una fuente que emite radiación monocromática de frecuencia  $540 \cdot 10^{12}\text{ Hz}$  en una dirección en la cual la intensidad de la radiación es de  $1/683\text{ W}$  por estereo-radián.

Magnitud Física	Nombre de la unidad	Abreviatura	Definición en unidades del SI
longitud ( $l$ )	metro	$m$	$m$
masa ( $m$ )	kilogramo	$kg$	$kg$
tiempo ( $T$ )	segundo	$s$	$s$
corriente ( $I$ )	amperio	$A$	$A$
temperatura ( $\theta$ )	kelvin	$K$	$K$
intensidad de la luz( $J$ )	candela	$cd$	$cd$
cantidad de sustancia	mole	$mol$	$mol$
ángulo plano	radián	$rad$	$rad$
ángulo sólido	estereoradián	$sr$	$sr$

Tabla A.1: Unidades fundamentales en el SI

- La tabla A.1 muestra la unidades fundamentales y las complementarias. La tabla A.2 presenta algunas unidades derivadas que poseen algún nombre especial.
- En la tabla A.3 se listan algunas unidades no pertenecientes al SI cuyo uso es permitido.
- En la tabla A.4 se señalan algunas unidades del sistema CGS que tienen nombres especiales. No se recomienda el uso de estas unidades.
- En la tabla A.5 se presenta una lista de unidades no pertenecientes al SI, especialmente inglesas, cuyo uso no es permitido pero que se hace necesario por razones comerciales<sup>3</sup>.

## A.5. ALGUNAS CONSTANTES FÍSICAS FUNDAMENTALES

Las constantes tales como la temperatura del punto triple del agua, las densidades del aire y del agua, la velocidad de la luz en el vacío, etc. se denominan “constantes físicas fundamentales”. La tabla A.6 muestra los valores de algunas de las constantes físicas fundamentales.

---

<sup>3</sup>El 28 de Julio de 1886 el Congreso de Estados Unidos proclamó la ley de normalización de los pesos y medidas, y en una ley de 1975 se aprobó la conversión al Sistema Internacional. Según la orden ejecutiva 12770 del Presidente, a partir del 30 de Septiembre de 1992 todas las agencias federales, y todas las empresas privadas que negocien con el gobierno, deberán usar el SI.

### Unidade derivadas del SI

Magnitud Física	Nombre de la Unidad	Abreviatura	Definición en unidades del SI
frecuencia ( $\nu = 1/T$ )	hertz	$Hz$	$s^{-1}$
fuerza ( $F = m a$ )	newton	$N$	$kg\ m\ s^{-2}$
presión ( $p = F/A$ )	pascal	$Pa$	$N/m^2 = m^{-1}\ kg\ s^{-2}$
energía ( $E$ ) trabajo ( $W = F L$ ) cantidad de calor ( $Q$ )	joule	$J$	$N\ m = m^2\ kg\ s^{-2}$
potencia (flujo térmico y energético) ( $P = W/T$ )	watt	$W$	$J/s = m^2\ kg\ s^{-2}$
carga eléctrica ( $q = I t$ )	coulombio	$C$	$A\ s$
potencial eléctrico ( $V$ ) tensión eléctrica ( $U$ ) fuerza electromotriz ( $E$ )	voltio	$V$	$W\ A^{-1} = m^2\ kg\ s^{-3}\ A^{-1}$
resistencia eléctrica ( $R = U/I$ )	ohmio	$\Omega$	$V\ A^{-1} = m^2\ kg\ s^{-3}\ A^{-2}$
conductividad eléctrica ( $G = I/U$ )	siemens	$S$	$A\ V^{-1} = m^{-2}\ kg^{-1}\ s^3\ A^2$
capacidad eléctrica ( $C = q/V$ )	farad	$F$	$A\ s\ V^{-1} = m^{-2}\ kg^{-1}\ s^4\ A^2$
flujo magnético ( $\Phi$ )	weber	$Wb$	$V\ s = m^2\ kg\ s^{-2}\ A^{-1}$

**Continúa en la siguiente página**

Tabla A.2: Unidades derivadas en el SI

Continuación de la página anterior			
Magnitud Física	Nombre de la Unidad	Abreviatura	Definición en unidades del SI
inducción magnética ( $B = \Phi/S$ )	tesla	T	$Wb/m^2 = kg\ s^{-2}\ A^{-1}$
inductancia ( $L = E dt/dI = d\Phi/dI$ )	henry	H	$= m^2\ kg\ s^{-2}\ A^{-2}$
actividad radiactiva de una sustancia ( $A = dN/dt$ )	bequerel	bq	$s^{-1}$
dosis de radiación ionizante ( $D = dE/dm$ )	gray	Gy	$J/kg = m^2\ s^{-2}$
dosis equivalente de radiación ionizante ( $H = D Q N$ )	sievert	Sv	$J/kg = m^2\ s^{-2}$
área ( $S = l^2$ )	metro cuadrado	$m^2$	$m^2$
volumen ( $V = l^3$ )	metro cúbico	$m^3$	$m^3$
densidad ( $\rho = m/V$ )	kilogramo por metro cúbico	$kg/m^3$	$kg/m^3$
velocidad ( $v = dl/dt$ )	metros por segundo	$m/s$	$m/s$
aceleración( $a = d^2l/dt^2$ )	metros por segundo al cuadrado	$m/s^2$	$m/s^2$
velocidad angular ( $\omega = 2\pi/T = d\phi/dt$ )	radianes por segundo	$rad/s$	$rad/s$
Continúa en la siguiente página			

Tabla A.2: Unidades derivadas en el SI

Continuación de la página anterior			
Magnitud Física	Nombre de la Unidad	Abreviatura	Definición en unidades del SI
aceleración angular ( $\alpha = d\omega/dt = d^2\phi/dt^2$ )	radianes por segundo al cuadrado	$rad/s^2$	$rad s^{-2}$
caudal de volumen ( $Q_V = V/t$ )	metros cúbicos por segundo	$m^3/s$	$m^3/s$
caudal de masa ( $Q_m = m/t$ )	kilogramos por segundo	$kg/s$	$kg s^{-1}$
masa molar	kilogramos por mole	$kg/mol$	$kg mol^{-1}$
concentración de materia (molaridad)	moles por metro cúbico	$mol/m^3$	$mol m^{-3}$
volumen molar	metro cúbico por mole	$m^3/mol$	$m^3 mol^{-1}$
energía molar	joule por mole	$J/mol$	$J mol^{-1}$
coeficiente dinámico de viscosidad ( $\eta = (F/S)dx/dv$ )	pascal segundo	$Pa s$	$N s/m^2 = m^{-1} kg s^{-1}$
coeficiente cinemático de viscosidad ( $\eta_c = \eta/d$ )	metros cuadrados por segundo	$Pa s/(kg/m^3)$ $= m^2/s$	$m^2 s^{-1}$
calor de vaporización capacidad calorífica	joule por kilogramo	$J/kg$	$m^2 s^{-2}$

Continúa en la siguiente página

Tabla A.2: Unidades derivadas en el SI

Continuación de la página anterior			
Magnitud Física	Nombre de la Unidad	Abreviatura	Definición en unidades del SI
entropía $S = dQ/d\theta$	joule por kelvin	$J/K$	$m^2 \ kg \ s^{-2} \ K^{-1}$
calor específico $c = dQ/(m d\theta)$	joule por kilogramo por kelvin	$J/(K \ kg)$	$m^2 \ s^{-2} \ K^{-1}$
conductividad calorífica $\lambda = (Q dl)/(S dt \theta)$	vatios por metro por kelvin	$W/(m \ K)$	$kg \ s^{-3} \ m \ K^{-1}$
densidad de flujo térmico ( $Q/(S t)$ )	vatios por metro cuadrado	$W/m^2$	$kg \ s^{-3}$
intensidad energética	vatios por estereorradián	$W/sr$	$m^2 \ kg \ s^{-3} \ sr^{-1}$
densidad de corriente ( $I S$ )	amperios por metro cuadrado	$A \ m^2$	$A \ m^{-2}$
intensidad del campo eléctrico ( $E = F/q$ )	voltios por metro	$V/m$	$m \ kg \ s^{-3} \ A^{-1}$
resistencia específica ( $\rho = R S/l$ )	ohmios metro	$\Omega/m$	$V \ A^{-1} \ m$ = $m^3 \ kg \ s^{-3} \ A^{-2}$
intensidad del campo magnético ( $H = F/m$ )	amperios por metro	$A/m$	$A \ m^{-1}$
permeabilidad ( $\mu$ )	henry por metro	$H/m$	$m \ kg \ s^{-2} \ A^{-2}$

Continúa en la siguiente página

Tabla A.2: Unidades derivadas en el SI

Continuación de la página anterior			
Magnitud Física	Nombre de la Unidad	Abreviatura	Definición en unidades del SI
flujo luminoso ( $\Phi_s$ )	lumen	$lm$	$cd \ sr$
iluminación ( $\Phi_s/S$ )	lux	$lx$	$lm \ m^{-2} = m^{-2} cd \ sr$
iluminación ( $L = J/S$ )	candelas por metro cuadrado	$cd/m^2$	$cd \ m^{-2}$
dosis de exposición a la radiación ionizante ( $X = dq/dm$ )	coulomb por kilogramo	$C/kg$	$kg^{-1} s A$
intensidad de la radiación ( $i = E/(ST)$ )	vatio por metro cuadrado	$J/(s \ m^2)$	$kg \ s^{-3}$
intensidad de la dosis de exposición ( $\dot{X} = dX/dt$ )	amperios por kilogramo	$C/(kg \ s)$	$A \ kg^{-1}$
intensidad de la dosis de absorción ( $\dot{D} = dD/dt$ )	gray por segundo	$Gy/s$	$m^2 \ s^{-3}$
intensidad de la dosis equivalente ( $\dot{H} = dH/dt$ )	sievert por segundo	$Sv/s$	$m^2 \ s^{-3}$

Tabla A.2: Unidades derivadas en el SI

Magnitud Física	Nombre de la Unidad	Abreviatura	Definición en unidades del SI
número de revoluciones	revoluciones por minuto	$rpm = min^{-1}$	$(1/60)s^{-1}$
velocidad	kilómetros por hora	$km/h$	$(1/3,6)m/s$
densidad	kilogramos por litro toneladas por metro cúbico	$kg/l$ $t/m^3$	$10^3kg/m^3$ $10^3kg/m^3$
densidad lineal	toneladas por metro	$t/m$	$10^3kg/m$
caudal de masa	kilogramos por hora toneladas por hora	$kg/h$ $t/h$	$(1/3600)kg/h$ $(1/3,6)kg/s$
cantidades definidas como partes por cien, mil o millón	por ciento por mil por millón	% ‰ ppm	$1\% = 1 \cdot 10^{-2}$ $1\‰ = 1 \cdot 10^{-3}$ $1ppm = 1 \cdot 10^{-6}$

Tabla A.3: Algunas unidades no pertenecientes al SI cuyo uso es permitido

Denominación	Abreviatura	Valor en unidades del SI
dina	$din$	$g \cdot cm \cdot s^{-2} = 10^{-5} N$
ergio	$erg$	$g \cdot cm^2 \cdot s^{-2} = 10^{-7} J$
poise	$P$	$din \cdot cm^{-2} = 0,1 Pa \cdot s$
stokes	$St$	$cm^2 \cdot s^{-1} = 10^{-4} m^2 \cdot s^{-1}$
gauss	$Gs, G$	$10^{-4} T$
oersted	$Oe$	$(1000/4\pi) A \cdot m^{-1}$
maxwell	$Mx$	$10^{-8} Wb$
stilb	$Sb$	$cd \cdot cm^{-2} = 10^4 cd \cdot m^{-2}$
fot	$ph$	$10^4 lx$

Tabla A.4: Algunas unidades del sistema CGS que tienen nombres especiales

### Factores de conversión

Denominación	Abreviatura	Valor en unidades del SI
LONGITUD		
angstrom	$\text{\AA}$	$10^{-10} \text{ m} = 0,1 \text{ nm}$
micrón	$\mu$	$10^{-6} \text{ m} = 1\mu \text{ m}$
pulgada	<i>in</i>	$25,399 \cdot 10^{-3} \text{ m}$
mil ( $10^{-3} \text{ in}$ )	<i>mil</i>	$25,399 \cdot 10^{-6} \text{ m}$
pié	<i>ft</i>	$0,348 \text{ m}$
yarda	<i>yd</i>	$0,914399 \text{ m}$
brazo	<i>fm</i>	$1,8288 \text{ m}$
milla	<i>mi</i>	$1609,344 \text{ m}$
milla marina	<i>mill</i>	$1852 \text{ m}$
fermi	<i>fm</i>	$10^{-15} \text{ m}$
unidad equis	<i>X</i>	$1,00206 \cdot 10^{-19} \text{ m}$
MASA		
unidad de masa atómica	<i>u</i>	$1,66053 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$
unidad gama	$\gamma$	$1 \mu \text{ g} = 10^{-9} \text{ kg}$
quilate	<i>k</i>	$1 \cdot 10^{-4} \text{ kg}$
tonelada grande	<i>ton</i>	$1,016 \cdot 10^3 \text{ kg}$
tonelada pequeña	<i>shortton</i>	$907,2 \text{ kg}$
tonelada métrica	<i>t</i>	$10^3 \text{ kg}$
quintal	<i>q</i>	$10^2 \text{ kg}$
libra	<i>lb</i>	$0,45359 \text{ kg}$
onza	<i>oz</i>	$28,35 \text{ g}$
TIEMPO		
minuto	<i>min</i>	$60 \text{ s}$
hora	<i>h</i>	$3600 \text{ s}$
día	<i>d</i>	$86\,400 \text{ s}$
TEMPERATURA		
grado centígrado o celsius	$^{\circ}\text{C}$	$1 \text{ K}$
cero absoluto	$0 \text{ K}$	$-273,16 \text{ }^{\circ}\text{C}$
grado fahrenheit	$^{\circ}\text{F}$	$(5/9) \text{ K}$
<b>Continúa en la siguiente página</b>		

Tabla A.5: Factores para convertir al SI algunas unidades no pertenecientes al SI

Continuación de la página anterior		
Denominación	Abreviatura	Valor en unidades del SI
	$T(^{\circ}F) = (9/5) T(K) - 459,7$	
	$T(^{\circ}F) = (9/5) T(^{\circ}C) + 32$	
	$T(K) = (5/9) [T(^{\circ}F) + 459,7]$	
	$T(^{\circ}C) = (5/9) [T(^{\circ}F) - 32]$	
grado rankine	$^{\circ}R$	$(5/9) K$
	$T (^{\circ}R)=T (^{\circ}F)+459.7$	
ANGULO PLANO		
ángulo llano		$2\pi \text{ rad}$
ángulo recto	$\text{l}$	$(\pi/2) \text{ rad}$
grado	$^{\circ}$	$(\pi/180) \text{ rad}$
minuto	,	$(\pi/10800) \text{ rad}$
segundo	"	$(\pi/648 000) \text{ rad}$
gon	$g$	$(\pi/200) \text{ rad}$
AREA		
área	$a$	$10^2 \text{ m}^2$
hectárea	$ha$	$10^4 \text{ m}^2$
barn	$b$	$10^{-28} \text{ m}^2$
milla cuadrada	$mi^2$	$2,590 \text{ km}^2$
acre	$acre$	$4,047 \cdot 10^3 \text{ m}^2$
yarda cuadrada	$yd^2$	$8,361 \cdot 10^{-1} \text{ m}^2$
pié cuadrado	$ft^2$	$9,290 \cdot 10^{-2} \text{ m}^2$
pulgada cuadrada	$in^2$	$6,452 \cdot 10^2 \text{ mm}^2$
VOLUMEN		
litro	$l$	$10^{-3} \text{ m}^3$
tonelada marina		$2,832 \text{ m}^3$
yarda cúbica	$yd^3$	$0,7646 \text{ m}^3$
pié cúbico	$ft^3$	$2,832 \cdot 10^{-2} \text{ m}^3$
galón británico	$gal (GB)$	$4,546 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$
galón americano	$gal (US)$	$3,785 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$
VELOCIDAD		
Continúa en la siguiente página		

Tabla A.5: Factores para convertir al SI algunas unidades no pertenecientes al SI

Continuación de la página anterior		
Denominación	Abreviatura	Valor en unidades del SI
pulgada por segundo	<i>in/s</i>	$2,54 \cdot 10 \text{ mm/s}$
pié por segundo	<i>ft/s</i>	$0,3048 \text{ m/s}$
pié por minuto	<i>ft/min</i>	$5,08 \cdot 10^{-3} \text{ m/s}$
milla por hora	<i>mph</i>	$0,4470 \text{ m/s}$
nudo (una milla marina por hora)	<i>knot</i>	$0,514 \text{ m/s}$
ACELERACION		
pié por segundo al cuadrado	<i>ft/s<sup>2</sup></i>	$0,3048 \text{ m/s}^2$
gal	<i>Gal</i>	$1 \text{ cm/s}^2$
DENSIDAD LINEAL DE MASA		
tex	<i>g/km</i>	$10^{-6} \text{ kg/m}$
CONDUCTIVIDAD TERMICA		
unidad térmica británica por pié por segundo por grado fahrenheit		$62,26 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$
caloría por centímetro por segundo por grado centígrado		$4,184 \cdot 10^2 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$
DENSIDAD DE FLUJO TERMICO		
unidad térmica británica por pié por segundo		$1,135 \cdot 10^4 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$
caloría por centímetro por minuto		$6,973 \cdot 10^2 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$
PRESION		
Torr o milímetro de mercurio	<i>Torr o mm Hg</i>	$133,322 \text{ Pa}$
milímetro de agua	<i>mm H<sub>2</sub>O</i>	$9,80665 \text{ Pa}$
bar	<i>bar</i>	$10^5 \text{ Pa} = 750 \text{ mm Hg} \approx 1 \text{ at}$
milibar	<i>mbar</i>	$10^2 \text{ Pa} = 0,75 \text{ mm Hg}$
microbar	<i>μbar = bary</i>	$\text{din/cm}^2 = 0,1 \text{ Pa} = 7,5 \cdot 10^{-4} \text{ Hg}$
atmósfera técnica	<i>at</i>	$98066 \text{ Pa} \approx 98 \text{ kPa}$
atmósfera física	<i>atm</i>	$101\ 325 \text{ Pa} \approx 1,033 \text{ at} = 760 \text{ mmHg}$
Continúa en la siguiente página		

Tabla A.5: Factores para convertir al SI algunas unidades no pertenecientes al SI

Continuación de la página anterior		
Denominación	Abreviatura	Valor en unidades del SI
dina por centímetro cuadrado	$din/cm^2$	$0,1 \text{ Pa}$
pié de agua ( $4^\circ\text{C}$ )	$ft H_2O$	$2,989 \cdot 10^3 \text{ Pa}$
pulgada de mercurio ( $0^\circ\text{C}$ )	$in Hg$	$3,386 \cdot 10^3 \text{ Pa}$
kilogramo-fuerza por centímetro cuadrado	$kgf/cm^2$	$9,807 \text{ Pa}$
libra-fuerza por pié cuadrado	$lbf/ft^2$	$47,88 \text{ Pa}$
libra-fuerza por pulgada cuadrada	$lbf/in^2$	$6,895 \cdot 10^3 \text{ Pa}$
VISCOSIDAD DINAMICA		
poise	$P$	$0,1 \text{ Pa s}$
VISCOSIDAD CINEMATICA		
stokes	$St$	$10^{-4} \text{ m}^2/\text{s}$
DENSIDAD		
libra por pulgada cúbica	$lb/in^3$	$2,768 \cdot 10^4 \text{ kg/m}^3$
libra por pié cúbico	$lb/ft^3$	$16,02 \text{ kg/m}^3$
ENERGIA, TRABAJO Y CANTIDAD DE CALOR		
electrón voltio	$eV$	$1,60219 \cdot 10^{-19} \text{ J}$
ergio	$erg$	$10^{-7} \text{ J}$
kilopondio-metro	$kpm$	$9,80655 \text{ J}$
caloría	$cal$	$4,1868 \text{ J}$
kilovatio hora	$kW \cdot h$	$3,6 \cdot 10^6 \text{ J}$
unidad térmica británica	$btu$	$1,054 \cdot 10^3 \text{ J}$
libra-fuerza pié	$lbf \cdot ft$	$1,356 \text{ J}$
POTENCIA		
voltio amperio	$VA$	$1 \text{ W}$
var	$var$	$1 \text{ W}$
caballo de fuerza (métrico)	$CF$	$735,498 \text{ W}$
caballo de fuerza (eléctrico)	$hp$	$745,7 \text{ W}$
unidad térmica británica por segundo	$btu/s$	$1,054 \cdot 10^3 \text{ W}$
caloría por segundo	$cal/s$	$4,184 \text{ W}$
Continúa en la siguiente página		

Tabla A.5: Factores para convertir al SI algunas unidades no pertenecientes al SI

Continuación de la página anterior		
Denominación	Abreviatura	Valor en unidades del SI
libra-fuerza pie por segundo	$lbf \cdot ft/s$	$1,356 W$
ACTIVIDAD RADIATIVA		
curie	$Ci$	$3,7 \cdot 10^{10} Bq$ (1 $Bq = 1 \text{ decaimiento}/s$ )
DOSIS EQUIVALENTE DE RADIACION IONIZANTE		
rad	$rad$	$10^{-2} J/kg = 10^{-2} Gy$
rem	$rem$	$10^{-2} J/kg = 10^{-2} Sv$
DOSIS DE EXPOSICION A LA RADIACION IONIZANTE		
röntgen	$R, r$	$2,58 \cdot 10^{-4} C/kg$
DOSIS DE ABSORCION Y DOSIS EQUIVALENTE		
rad por segundo	$rad/s$	$10^{-2} J/(kg s) = 10^{-2} W/kg$
rad por minuto	$rad/min$	$0,166 mW/kg$
rad por hora	$rad/h$	$2,77 \mu W/kg$
rem por segundo	$rem/s$	$10^{-2} Sv/s = 10^{-2} W/kg$
rem por minuto	$rem/min$	$0,166 mW/kg$
rem por hora	$rem/h$	$2,77 \mu W/kg$
INTENSIDAD DE LA DOSIS		
röntgen por segundo	$R/s$	$2,58 \cdot 10^{-4} C/(kg s) = 0,258 mA/kg$
röntgen por minuto	$R/min$	$4,3 \mu A/kg$
röntgen por hora	$R/s$	$71,67 nA/kg$

Tabla A.5: Factores para convertir al SI algunas unidades no pertenecientes al SI

### Algunas constantes físicas fundamentales

Constante Física	Símbolo	Valor en unidades del sistema SI	Valor en unidades del sistema CGS
velocidad de la luz en el vacío	$c$	$2,9979246 \cdot 10^8 m/s$	$2,9979246 \cdot 10^{10} cm/s$
Continúa en la siguiente página			

Tabla A.6: Valores de algunas constantes físicas fundamentales

Continuación de la página anterior			
Constante Física	Símbolo	Valor en unidades del sistema SI	Valor en unidades del sistema CGS
masa en reposo del electrón	$m_e$	$9,10953 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$	$9,10953 \cdot 10^{-28} \text{ g}$
masa en reposo del protón	$m_p$	$1,67265 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$	$1,67265 \cdot 10^{-24} \text{ g}$
masa en reposo del neutrón	$m_n$	$1,67495 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$	$1,67495 \cdot 10^{-24} \text{ g}$
volumen molar de un gas ideal ( $T = 273,16 \text{ K}$ y $P = 101/325 \text{ Pa}$ )	$V_M$	$2,2414 \cdot 10^{-2} \text{ m}^3/\text{mol}$	$22414 \cdot \text{ cm}^3/\text{mol}$
constante universal de los gases ideales	$R$	$8,3144 \text{ J}/(\text{mol}/\text{K})$	$8,3144 \cdot 10^7 \text{ erg}/(\text{mol}/\text{K})$
número de faraday	$F = e N_A$	$96\,484,6 \text{ C/mol}$	$2,89253 \cdot 10^{14} \text{ CGS/mol}$
número de avogadro	$N_A$	$6,02205 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$	$6,02205 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$
constante dieléctrica del vacío	$\epsilon_0$	$8,8541878 \cdot 10^{-12} \text{ F/m}$	1 ( <i>adimensional</i> )
permeabilidad magnética	$\mu_0$	$1,2566371 \cdot 10^{-6} \text{ H/m}$	1 ( <i>adimensional</i> )
constante de rydberg	$R_\infty$	$10\,973\,732 \text{ m}^{-1}$	$109\,737,32 \text{ cm}^{-1}$
carga eléctrica elemental	$e$	$1,602189 \cdot 10^{-19} \text{ C}$	$4,80324 \cdot 10^{-10} \text{ CGS}$
relación $e/m$ del electrón	$e/m$	$1,75880 \cdot 10^{11} \text{ C/kg}$	$5,27274 \cdot 10^{17} \text{ CGS/g}$
constante de planck	$\hbar$	$6,62618 \cdot 10^{-34} \text{ J s}$	$6,62618 \cdot 10^{-27} \text{ erg s}$
constante de josepson	$2e/h$	$4,83594 \cdot 10^{14} \text{ V}^{-1} \text{ s}^{-1}$	$10^{17} \text{ c}^{-1} \text{ CGS}$
magnetón de bohr	$\mu_B$	$9,27408 \cdot 10^{-24} \text{ A m}^2$	$9,27408 \cdot 10^{-21} \text{ CGS}$
constante de boltzmann	$k = R/N_A$	$1,38066 \cdot 10^{-23} \text{ J/K}$	$1,38066 \cdot 10^{-16} \text{ erg/K}$
constante de loschmidt	$N_L$	$2,6867 \cdot 10^{25} \text{ m}^{-3}$	$2,6867 \cdot 10^{19} \text{ cm}^{-3}$
punto triple del agua		$273,16 \text{ K}$	$0,01 \text{ }^\circ\text{C}$
densidad del agua a $3,98 \text{ }^\circ\text{C}$ y $101\,325 \text{ Pa}$		$999,973 \text{ kg/m}^3$	$0,999973 \text{ g/l}$
densidad del aire seco a $273,16 \text{ K}$ y $101\,325 \text{ Pa}$		$1,29229 \text{ kg/m}^3$	$1,2929 \text{ g/l}$
constante gravitacional	$\gamma$	$6,67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$	$6,67 \cdot 10^{-8} \text{ cm}^3 \text{ g}^{-1} \text{ s}^{-2}$
año sideral (365,256 días)		$3,1558 \cdot 10^7 \text{ s}$	$3,1558 \cdot 10^7 \text{ s}$
aceleración de la			
Continúa en la siguiente página			

Tabla A.6: Valores de algunas constantes físicas fundamentales

Continuación de la página anterior			
Constante Física	Símbolo	Valor en unidades del sistema SI	Valor en unidades del sistema CGS
gravedad (París)	$g$	$9,80665 \text{ m/s}^2$	$980,665 \text{ cm/s}^2$
aceleración de la			
gravedad (Medellín)	$g$	$9,7647 \text{ m/s}^2$	$976,47 \text{ cm/s}^2$

Tabla A.6: Valores de algunas constantes físicas fundamentales

## A.6. FORMULAS DIMENSIONALES

Toda magnitud física derivada puede expresarse en términos de las siete unidades fundamentales. Tales cantidades son la masa  $M$ , el tiempo  $T$ , la longitud  $L$ , la intensidad de la corriente eléctrica  $I$ , la temperatura termodinámica  $\theta$ , la intensidad de la luz  $J$  y la cantidad de sustancia  $N$ . Una cantidad derivada tiene una expresión dimensional en términos de las unidades fundamentales de la forma

$$[D] = L^p M^q T^r I^s \theta^t J^u N^v,$$

que se denomina la fórmula dimensional de la cantidad  $A$ . Los exponentes  $p, q, r, s, t, u, v$ , pueden ser positivos o negativos, enteros o fraccionarios, o iguales a cero.

Sólo tiene sentido la suma de cantidades escalares de la misma naturaleza, es decir que posean idéntica fórmula dimensional.

Por ejemplo, una cantidad física derivada es la fuerza  $F$ . Esta se define mediante la fórmula  $F = m a$ , siendo  $a$  la aceleración que es otra cantidad derivada. La fórmula dimensional de la fuerza es.

$$[F] = [m a] = M L T^{-2},$$

por lo tanto las unidades de fuerza en el SI son  $\text{kg m s}^{-2}$ .

## A.7. MULTIPLOS Y SUBMULTIPOS DECIMALES EN EL SI

Los patrones, aunque escogidos arbitrariamente, se han elegido de modo que las unidades sean de tamaño adecuado para las necesidades ordinarias del hombre. Así, 1 metro tiene el orden de magnitud “correcto” para la medida “normal” de distancias. Pero otras distancias tienen un tamaño tal que su escritura completa en unidades ordinarias resulta incómoda. Por ejemplo, la distancia del sol a la estrella más cercana es de  $404004000000000000 \text{ m} = 4,04004 \cdot 10^{16} \text{ m}$ ,

y el tiempo que tarda el electrón del átomo de hidrógeno en dar una vuelta alrededor del núcleo es de unos  $0,00000000000000024189\text{ s} = 2,4189 \cdot 10^{-17}\text{ s}$ . En estos casos se acostumbra escribir los valores de las magnitudes físicas en forma abreviada. Veamos:

Cien puede escribirse como un uno seguido de dos ceros, esto es  $100 = 10 \times 10$ . Análogamente, un millón puede escribirse como un uno seguido por seis ceros, es decir  $1000000 = 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10$ . La forma abreviada más cómoda de escribir estos dos números es  $10^2$  y  $10^6$ , respectivamente. Así,  $10^n$ , cuando  $n$  es un número entero, significa la unidad seguida de  $n$  ceros, o sea  $10$  multiplicado  $n$  veces por sí mismo. (Esta es una  $n$ -ésima “potencia” de diez).

Del mismo modo,  $0,1 = 1/10$ , puede escribirse como  $10^{-1}$ , y  $0,00001 = 1/100000 = 1/(10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10)$  como  $10^{-5}$ . Así  $10^{-n}$  cuando  $n$  es un número entero, es una fracción decimal formada por 1 dividido por el producto de  $n$  veces 10 por sí mismo.

De acuerdo con las recomendaciones de la ISO, la unidades decimales de medidas se expresan exclusivamente en términos de las unidades del SI y de las siguientes unidades que no pertenecen al SI: *litro* (volumen,  $10^{-6}\text{ m}^3$ ), *bar* (presión,  $10^5\text{ Pa}$ ), *tex* (densidad lineal de masa,  $1\text{ g/km}$ ), *vatio – hora* (energía,  $3600\text{ J}$ ), *electrón – voltio* (energía,  $1\text{ eV} = 1,60219 \cdot 10^{-19}\text{ J}$ ), *voltio – amperio* (potencia,  $1\text{ V A} = 1\text{ W}$ ), *var* (potencia eléctrica de un reactor,  $1\text{ W}$ ).

Se definen varios prefijos para denotar diferentes factores con potencias de diez. Por ejemplo,  $1\text{ ns} = 10^{-9}\text{ s}$ ,  $1\text{ }\mu\text{g} = 10^{-6}\text{ g}$ ,  $1\text{ mm} = 10^{-3}\text{ m}$ ,  $1\text{ km} = 10^3\text{ m}$ . No está permitido sin embargo escribir  $n\text{ s}$ ,  $\mu\text{ g}$ ,  $m\text{ m}$ ,  $k\text{ m}$ , etc. Otros ejemplos: terajoule (*TJ*), decalitro (*dal*), decímetro (*dm*), centipoise (*cP*), femtogramo (*fg*), exahertz (*EH<sub>z</sub>*). La tabla A.7 muestra los prefijos y sus abreviaturas.

## A.8. ALGUNAS CONSTANTES NUMERICAS

$\pi$	$= 3,141\ 592\ 7$	$1\ rad$	$= 57,295\ 779\ 5^\circ$	$\sqrt{\pi}$	$= 1,772\ 453\ 8$
$e$	$= 2,718\ 281\ 8$	$1/e$	$= 0,367\ 879\ 4$	$\sqrt{2}$	$= 1,414\ 213\ 6$
$\ln 2$	$= 0,693\ 147\ 2$	$\ln 10$	$= 2,302\ 587\ 1$	$\sqrt{3}$	$= 1,732\ 050\ 8$
$\log_{10} 2$	$= 0,301\ 030\ 0$	$\log_{10} e$	$= 0,434\ 294\ 5$	$\sqrt{10}$	$= 3,162\ 277\ 7$
$e$	$= 10^{0,4343}$	$10$	$= e^{2,3026}$	$1/2\pi$	$= 0,159\ 154\ 9$

prefijo	abreviatura	valor del prefijo
exa	$E$	$1\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000 = 10^{18}$
peta	$P$	$1\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000 = 10^{15}$
tera	$T$	$1\ 000\ 000\ 000\ 000 = 10^{12}$
giga	$G$	$1\ 000\ 000\ 000 = 10^9$
mega	$M$	$1\ 000\ 000 = 10^6$
kilo	$k$	$1\ 000 = 10^3$
hecto	$h$	$100 = 10^2$
deca	$da$	$10 = 10^1$
deci	$d$	$0,1 = 10^{-1}$
centi	$c$	$0,01 = 10^{-2}$
mili	$m$	$0,001 = 10^{-3}$
micro	$\mu$	$0,000\ 001 = 10^{-6}$
nano	$n$	$0,000\ 000\ 001 = 10^{-9}$
pico	$p$	$0,000\ 000\ 000\ 001 = 10^{-12}$
femto	$f$	$0,000\ 000\ 000\ 000\ 001 = 10^{-15}$
ato	$a$	$0,000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 001 = 10^{-18}$

Tabla A.7: Prefijos para la formación de unidades decimales

## A.9. REFERENCIAS

- Medunarodni sistem mernih jedinica (SI). J. Simonović. En Praktikum iz biofizike. Medicinska knjiga. Beograd-Zagreb, 1989.
- Unidades de medida. G. Pérez L. En Guía de prácticas de laboratorio de física I. Universidad de Antioquia, Medellín, 1990.
- Unidades de las magnitudes físicas. L. A. Sena. Mir. Moscú, 1979.
- Sistemas de pesos y medidas. Almanaque mundial 1990. Ed. América. Panamá, 1989.
- Diario Oficial. Números 32337 del 5 de octubre de 1967, 33509 del 3 de febrero de 1972, y 35682 del 19 de enero de 1981.
- Our knowledge of the fundamental constants of physics and chemistry in 1965. E. R. Cohen y J. W. M. DuMond. Reviews of Modern Physics. Vol. 37, No. 4, pág. 537-591, 1965.