Actividad 4

Ejercicio 1

Si usamos las notaciones del enunciado, el número que buscamos es igual al total de reparticiones de llaves posibles menos $\left|\bigcup_{i=1}^{5} A_i\right|$.

El número total de reparticiones de llaves posibles es $5!$, ya que hay 5 llaves que van en 5 sobres.

Y
$$\left|\bigcup_{i=1}^{5} A_i\right| = \sum_{i=1}^{5} |A_i| - \sum_{\substack{i,j=1 \\ i\neq j}}^{5} |A_i \cap A_j| + \sum_{\substack{i,j,k=1 \\ i\neq j\neq k}}^{5} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \sum_{\substack{i,j,k,h=1 \\ i\neq j\neq k\neq h}}^{5} |A_i \cap A_j \cap A_k \cap A_h| + \sum_{\substack{i,j,k,h,l=1 \\ i\neq j\neq k\neq h\neq l}}^{5} |A_i \cap A_j \cap A_k \cap A_h \cap A_l|$$

$$y \quad \sum_{i=1}^{5} |A_i| = \binom{5}{1} \cdot 4! = 5 \cdot 4! = 5!,$$

$$\sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{5} |A_i \cap A_j| = \binom{5}{2} \cdot 3! = \frac{5!}{2!},$$

$$\sum_{\substack{i,j,k=1 \\ i \neq j \neq k}}^{5} |A_i \cap A_j \cap A_k| = \binom{5}{3} \cdot 2! = \frac{5!}{3!},$$

$$\sum_{\substack{i,j,k,h=1 \\ i \neq j \neq k \neq h}}^{5} |A_i \cap A_j \cap A_k \cap A_h| = \binom{5}{4} \cdot 1! = \frac{5!}{4!},$$

$$\sum_{\substack{i,j,k,h,l=1 \\ i \neq j \neq k \neq h \neq l}}^{5} |A_i \cap A_j \cap A_k \cap A_h \cap A_l| = |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5| = 1$$

Por lo tanto el numero buscado es igual a:

$$5! - \left(5! - \frac{5!}{2!} + \frac{5!}{3!} - \frac{5!}{4!} + \frac{5!}{5!}\right)$$

$$= 5! \left(1 - \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{6} - \frac{1}{24} + \frac{1}{120}\right)\right)$$

$$= 5! \left(1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{24} - \frac{1}{120}\right)$$

$$= 5! \left(\frac{60}{120} - \frac{20}{120} + \frac{5}{120} - \frac{1}{120}\right) = 120 \cdot \frac{44}{120} = 44.$$