Problema de Coloración de Gráficas
Algoritmo de Búsqueda Gravitacional

Seminario de Ciencias de la Computación B

Canek Peláez Valdés

Universidad Nacional Autónoma de México

Sánchez Correa Diego Sebastián

1. Introducción

El problema de coloración de gráficas, específicamente la modalidad que involucra la búsqueda del número cromático de la gráfica, es uno de los problemas NP-duros que tienen una gran aplicación en la resolución de problemas del mundo real.

Una de estas es la optimización del uso de los registros disponibles en un procesador para la ejecución de un algoritmo; problema para el que es encontrado rápidamente una aproximación por los compiladores pero del cual, sin embargo, no se puede garantizar una solución óptima, dada la naturaleza del problema.

1.1. El problema

Una gráfica se define como una par ordenado compuesto de un conjunto de vértices V y un conjunto de aristas E, es decir, una gráfica es representada como sigue

$$G = (V, E)$$

donde

$$V = \{v_1, ..., v_n\}$$
$$E \subseteq V \times V$$

El problema es planteado sobre una gráfica no dirigida, es decir, donde se tiene que

$$(v, w) \in E \Rightarrow (w, v) \in E$$

El vecindaro de un vértice se define como todos los vértices para los cuales existe una arista que los une, es decir

$$N(v) = \{w \in V \mid (v, w) \in E\}$$

El problema de coloración de gráficas pregunta cuál es la mejor asignación de colores para cada uno de los vértices contenidos en la gráfica que minimice el número de colores usados, cumpliendo en todo caso que dos colores adyacentes no compartan el mismo color.

El número cromático define, dada una gráfica no dirigida, el número de colores mínimo que debe tener para colorearla por completo. Dadas las condiciones del problema, es posible obtener múltiples soluciones, ninguna de ellas pudiendo llamarse la más óptima (derivado de la naturaleza no determinista del problema).

1.2. La heurística

La heurística de búsqueda gravitacional (GSA) propone un modelo de búsqueda que sigue un patrón de enjambre, es decir, no existe un solo agente que realice la búsqueda; esta se divide entre diversos entes que permiten una mayor exploración y, eventualmente, una mayor explotación.

> *La inteligencia de enjambre es un modelo donde el comportamiento colectivo emergente is el resultado de un proceso de organización personal, donde los agentes están envueltos, a través sus acciones repetidas e interacción, com su ambiente en evolución. [3]*

Modelos de este tipo son bastante populares; entre ellos se encuentran PSO (Eberhart and Kennedy, 1995), ACS (M. Dorigo and V. Maniezzo, 2008), etcétera.

En esta heurística se plantea el uso de entes (soluciones) que se afectan mútuamente a través de fenómenos físicos, siguiendo las leyes de Newton.

> *En el algoritmo propuesto los agentes que buscan son una colección de masas que interactúan entre sí basándose en la gravedad Newtoniana y las leyes del movimiento. [2]*

A pesar de ser esta una de las primeras concepciones de los fenómenos como soluciones a problemas combinatorios, se usará una variación que lo ha tenido como inspiración y es descrito en [3].

Se define un conjunto de agentes

$$B = \{b_1, b_2, ...b_N\}$$

correspondientes a la cada nodo de la gráfica. Cada agente navegará sobre un mundo tórico [1] de acuerdo a un vector $\vec{v_i}$. En cada momento sabemos la posición de cada agente $p_i(t) = (x_i, y_i)$ donde x_i y y_i son coordenadas cartesianas en el espacio. Cuando $t = 0$, tenemos la posición inicial de los agentes $p_i(0) = (x_{0i}, y_{0i})$.

Suponemos que queremos colorear la gráfica con K colores, denotando como $C = \{1, 2, ..., K\}$ al conjunto de colores, donde K no debe ser menor que el número cromático asociado a la gráfica para que el algoritmo converja. Asignamos a estos colores, K puntos en el espacio, los colores objetivo $CG = \{g_1, ..., g_K\}$, dotados de una atracción gravitacional resultando en un componente de velocidad $\vec{v_{gc}}$ afectando a los agentes. La fuerza de atracción disminuirá con la distancia, pero afectará a todos los agenetes en el espacio.

[3] define el sistema como una tupla:

$$F = (B, CG, \{\vec{v_i}\}, K, \{\vec{a_{i,k}}\}, R)$$

donde:

- B es el conjunto de agentes
- $\{\vec{v_i}\}$ es el conjunto de vectores en el instante t

[1] Un toro es *la colección de todos los puntos* $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ *bajo la relación de equivalencia* $(x, y) \sim (a, b)$ *cuando* $x - a, y - b \in \mathbb{Z}$ [1]

- K es el número cromático hipotético [2]
- $\{\vec{a_{i,k}}\}$ es el conjunto de fuerzas de atracción de los colores objetivo ejercidas en los agentes.
- R denota las fuerzas de repulsión en el vecindario de los colores objetivo.

1.2.1. Velocidad de un agente

La velocidad de una agente está definida de la siguiente manera:

$$\vec{v_i}(y+1) = \begin{cases} 0 & c_i \in C \; \& \; (\lambda_i = 1) \\ d \cdot \vec{a_{i,k^*}} & c_i \notin C \\ v_r \cdot (p_r - p_i) & (c_i \in C) \; \& \; (\lambda_i = 0) \end{cases}$$

donde

- d es la distancia de la posición p_i del agente a la posición del color objetivo más cercano g_{k^*}
- $\vec{a_{i,k^*}}$ representa la fuerza de atracción que el color objetivo más cercano ejerce sobre el agente
- v_r es la magnitud de un vector aleatorio moviendo al agente hacia una dirección aleatoria p_r cuando este es expulsado de un color objetivo.
- λ_i es un parámetro que representa el efecto del grado de confort del agente. Cuando un agente b_i alcanza el radio de influencia de un color objetivo en un instante t, su velocidad se torna 0.

1.2.2. Dinámica dentro de un color objetivo

La interacción de los agentes y los colores objetivo se define a través de un radio de influencia generado por los colores. Y cuando el agente esté dentro de este, dejará de moverse y el nodo correspondiente en la gráfica será asignado a este color. Se denota al conjunto de agentes cuya posición en el espacio es la región que se encuentra los suficientemente cerca al vecindario de un color como

$$N(g_k) = \{b_i \text{ t.q. } ||p_i - g_k|| < r\}$$

Donde r representa el radio de influencia del color.

A pesar de que dentro del radio de influencia del color no hay más atracción gravitacional, puede estar presente cierto grado de repulsión entre agentes que están conectados a través de una arista en la gráfica G. Esta repulsión solo es efectiva para los agentes dentro del vecindario del mismo color objetivo. Este efecto se modela definiendo una función que tiene un valor de 1 si un par de agentes tienen una arista en común, y 0, en otro caso. Las fuerzas de repulsión que experimenta el agente b_i de los agentes en el color objetivo g_k se definen como sigue:

$$R(b_i, g_k) = \sum_{N(g_k)} \textit{repulsión } (b_i, b_j)$$

[2] Este se definirá como el número cromático para gráficas creadas artificialmente y como un número aleatorio (lo suficientemente grande) para gráficas, de la misma manera, aleatorias.

1.2.3. Confort

En cada paso del proceso iterativo en el que un agente permanece en un color objetivo sin ser perturbado, su confort aumenta (hasta llegar a un máximo definido). Cuando otro agente b_i, fuera del color objetivo g_{k^*} intenta entrar al vecindario de ese color objetivo, la fuerza de repulsión $R(b_i, g_{k^*})$ es evaluada. Si la repulsión es mayor que cero entonces el agente entrante desafiará la estabilidad del vecindario y al menos un agente tendrá que abandonarlo (el cual puede ser él mismo). Si los valores de confort de los agentes desafiados tienen valores mayores a cero, entonces su confort disminuirá en una unidad. Si su confort llega a cero, entonces el agente es expulsado del color objetivo a una posición p_r aleatoria en el espacio con velocidad v_r.

1.2.4. Función de Costo

La función de costo definida en la configuración espacial del sistema global es:

$$f(B, CG) = |\{b_i \ \textit{t.q.} \ c_i \in C \ \& \ R(b_i, g_{ci}) = 0\}|.$$

Esta función de costo es el número de nodos de la gráfica que tienen un color asignado y sin ningún conflicto dentro de un color objetivo. Los agentes fuera del vecindario de un color objetivo no pueden ser evaluados, para que estos sean parte de la solución al problema.

Se destacan a la dimensión del mundo y al radio de influencia de los colores objetivo como factores importantes para la determinación de la velocidad de convergencia del alforitmo. Si el mundo es grande y el radio pequeño el algoritmo convergerá lentamente, monótonamente; si el mundo es reducido y el radio es grande el algoritmo será más rápido pero la convergencia será inestable porque el algoritmo caerá en mínimos locales y necesitará un aumento en la energía transitoria para salir de ellos. La explicación de este comportamiento es que el mundo no está normalizado y la magnitud del vector velocidad puede ser más grande que el radio de influencia del color objetivo y puede cruzar un color sin caer en él.

Cuando todos los agentes se detienen, tenemos que $f(B, CG) = n$ y la asignación de K colores a la gráfica G ha sido concluida exitosamente.

2. Diseño

2.1. Analizador Sintáctico

2.2. El problema

2.3. Algoritmo de Búsqueda Gravitacional

2.3.1. Adaptación

3. Implementación

3.1. Problemas

3.1.1. Encapsulamiento

4. Experimentación

5. Conclusiones

Bibliografía

[1] Padraic Bartlett. Toroidal graphs, 2015.

[2] Esmat Rashedi, Hossein Nezamabadi-pour, and Saeid Saryazdi. Gsa: A gravitational search algorithm. Information Sciences, 2009.

[3] Israel Carlos Rebollo Ruiz. Gravitational swarm intelligence for graph coloring, 2012.