Appunti Algebra 1

APPUNTI DEL CORSO DI ALGEBRA 1 TENUTO
DALLA PROF. DEL CORSO E DAL PROF. LOMBARDO

Diego Monaco
d.monaco2@studenti.unipi.it

Anno Accademico 2022-23

Indice

Ringraziamenti

Davide Ranieri, Federico Allegri, Pietro Crovetto, **Francesco Sorce**, Leonardo Migliorini, Matteo Gori, Daniele Lapadula, Alessandro Fenu, **Leonardo Alfani**, Clementina Salamina, Giorgia Capecchi, Gianni Bellu, Carlo Rotolo, Lorenzo Picinelli, Alessandro Moretti, Lorenzo Bonetti, Vittorio Monti.

§1 Gruppi

§1.1 Automorfismi

Dato un gruppo G possiamo definire l'insieme degli automorfismi di G come segue:

$$\mathrm{Aut}(G) = \{\varphi : G \longrightarrow G | \, \varphi \, \text{isomorfismo}\}$$

si verifica facilmente che $(\mathrm{Aut}(G), \circ)$ è un gruppo, e in particolare $\mathrm{Aut}(G) \leqslant S(G)$, ovvero il gruppo delle permutazioni di G. Si osserva che $id \in \mathrm{Aut}(G)$, $\varphi \in \mathrm{Aut}(G) \implies \varphi^{-1} \in \mathrm{Aut}(G)$ e $\varphi, \psi \in \mathrm{Aut}(G) \implies \varphi \circ \psi \in \mathrm{Aut}(G)$.

Esempio 1.1 (Esempi di automorfismi)
Esempi di insiemi di automorfismi:

- $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}) = \{\pm id\}$.
- $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}^*$.
- $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \cong S_3$.
- $\mathrm{Aut}(\underbrace{\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times \ldots \times \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}}_{n \text{ volte}}) \cong GL_n(\mathbb{F}_p)$

§1.2 Automorfismi interni

Definizione 1.2. Dato un gruppo G possiamo definire l'omomorfismo di **coniugio**:

$$\varphi_g : G \longrightarrow G : x \longmapsto gxg^{-1}$$

dove l'elemento gxg^{-1} si dice **coniugato** di g.

Proposizione 1.3
Valgono i seguenti fatti:

(1) $\varphi_g \in \mathrm{Aut}(G)$, $\forall g \in G$.

(2) $\{\varphi_g | g \in G\} = \mathrm{Inn}(G) \trianglelefteq \mathrm{Aut}(G)$.[a]

[a] $\mathrm{Inn}(G)$ si definisce **gruppo degli automorfismi interni**.

Dimostrazione. Proviamo le due affermazioni:

(1) Per verificare che φ_g è un automorfismo bisogna verificare che φ_g è ben definita, ma ciò segue dalla chiusura di G per l'operazione. Verifichiamo che sia un omomorfismo:

$$\varphi_g(xy) = gxyg^{-1} = gxg^{-1}gyg^{-1} = \varphi_g(x)\varphi_g(y) \qquad \forall x, y \in G$$

ci resta da verificare che sia una bigezione. Partiamo dalla surgettività, vogliamo verificare che $\forall y \in G$, $\exists x \in G$:

$$\varphi_g(x) = y$$

in tal caso basta prendere $x = g^{-1}yg \in G$. Per l'iniettività si osserva:

$$\ker \varphi_g = \{x \in G | \varphi_g(x) = e\} = \{x \in G | gxg^{-1} = e \iff x = e\} = \{e\}$$

pertanto φ_g è iniettivo.

(2) Verifichiamo che $\text{Inn}(G) \trianglelefteq \text{Aut}(G)$; mostriamo prima che $\text{Inn}(G)$ è un sottogruppo di $\text{Aut}(G)$, infatti: $id = \varphi_e \in \text{Inn}(G)$, $\forall g_1, g_2 \in G$ vale che $\varphi_{g_1} \circ \varphi_{g_2} = \varphi_{g_1 g_2} \in \text{Inn}(G)$, infatti:

$$\varphi_{g_1} \circ \varphi_{g_2}(x) = \varphi_{g_1}(g_2 x g_2^{-1}) = g_1 g_2 x g_2^{-1} g_1^{-1} = \varphi_{g_1 g_2}(x)$$

infine, $(\varphi_g)^{-1} = \varphi_{g^{-1}} \in \text{Inn}(G)$:

$$(\varphi_g)^{-1} \circ \varphi_g(x) = (\varphi_g)^{-1}(gxg^{-1}) = x \iff (\varphi_g)^{-1} = \varphi_{g^{-1}}$$

e analogamente per l'inversa a destra. Per verificare la normalità bisogna mostrare che:

$$f \circ \text{Inn}(G) \circ f^{-1} \subseteq \text{Inn}(G) \qquad \forall f \in \text{Aut}(G)$$

ovvero:

$$f \circ \varphi_g \circ f^{-1} \in \text{Inn}(G) \qquad \forall f \in \text{Aut}(G), \forall \varphi_g \in \text{Inn}(G)$$

si osserva che $f \circ \varphi_g \circ f^{-1} = \varphi_{f(g)} \in \text{Inn}(G)$, infatti:

$$f \circ \varphi_g \circ f^{-1}(x) = f(\varphi_g(f^{-1}(x))) = f(g(f^{-1}(x))g^{-1}) =$$
$$= f(g)f(f^{-1}(x))f(g^{-1}) = f(g)x(f(g))^{-1} = \varphi_{f(g)}(x)$$

□

Osservazione 1.4 — Se G è abeliano, allora $\text{Inn}(G) = \{id\}$, infatti:

$$gxg^{-1} = gg^{-1}x = x \qquad \forall x \in G, \forall g \in G$$

Proposizione 1.5
Dato un gruppo G si ha:

$$\text{Inn}(G) \cong {}^{G}\!/_{Z(G)}$$

Dimostrazione. Per dimostrare il teorema ci basta trovare un omomorfismo surgettivo da G in $\text{Inn}(G)$ e poi sfruttare il Primo Teorema di Omomorfismo. Sia:

$$\phi : G \longrightarrow \text{Inn}(G) : g \longmapsto \varphi_g$$

tale applicazione è chiaramente ben definita, ed è surgettiva per come abbiamo definito $\text{Inn}(G)$. Verifichiamo che è un omomorfismo:

$$\phi(g_1 g_2) = \varphi_{g_1 g_2} = \varphi_{g_1} \circ \varphi_{g_2} = \phi(g_1) \circ \phi(g_2) \qquad \forall g \in G$$

dove la penultima uguaglianza è vera per quanto visto nella dimostrazione del (2) della proposizione precedente. A questo punto, per il primo teorema di omomorfismo si ha che:

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[r, two heads, "\phi"] \arrow[d, two heads, "\pi_{\ker\phi}"'] & \text{Inn}(G) \\
{}^{G}\!/_{\ker\phi} \arrow[ur, "\sim"] &
\end{tikzcd}$$

dunque:

$$\frac{G}{\ker \phi} \cong \mathrm{Inn}(G)$$

non ci resta che osservare:

$$\ker \phi = \{g \in G | \phi(g) = \varphi_g = id\} = \{g \in G | gxg^{-1} = x, \forall x \in G\} = \\ = \{g \in G | gx = xg, \forall x \in G\} = Z(G)$$

□

Osservazione 1.6 — L'isomorfismo trovato è del tipo $gZ(G) \longmapsto \varphi_g$, ricordiamo che è ben definito per il Primo Teorema di Omomorfismo.

Osservazione 1.7 — Si ricorda che se ${G}/{Z(G)}$ è ciclico, allora G è abeliano (e quindi ${G}/{Z(G)}$ è banale), infatti, sia:

$${G}/{Z(G)} = \langle gZ(G) \rangle$$

Presi $g_1, g_2 \in G$, si ha che $g_1 Z(G) = g^{k_1} Z(G)$ e $g_2 Z(G) = g^{k_2} Z(G)$, da cui:

$$g^{-k_1} g_1 Z(G) = Z(G) \iff g^{-k_1} g_1 \in Z(G)$$

ovvero $\exists z_1 \in Z(G) : g_1 = g^{k_1} z_1$ e analogamente $g_2 = g^{k_2} z_2$, da cui:

$$g_1 g_2 = g^{k_1} z_1 g^{k_2} z_2 = g^{k_1} g^{k_2} z_1 z_2 = g^{k_1 + k_2} z_1 z_2$$

e contemporaneamente:

$$g_2 g_1 = g^{k_2} z_2 g^{k_1} z_1 = g^{k_2} g^{k_1} z_2 z_1 = g^{k_2 + k_1} z_2 z_1 = g^{k_1 + k_2} z_1 z_2$$

dove nell'ultimo passaggio si è sfruttato il fatto che $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$ e $z_1, z_2 \in Z(G)$. Da ciò segue che G è abeliano.

Osservazione 1.8 — Dunque $\mathrm{Inn}(G)$ ciclico $\implies {G}/{Z(G)}$ ciclico $\implies G$ abeliano da cui:

$$\mathrm{Inn}(G) \cong {G}/{Z(G)} \cong \{e\}$$

Osservazione 1.9 — $N \trianglelefteq G \iff \forall \varphi_g \in \mathrm{Inn}(G)$ si ha $\varphi_g(N) = N$ (o anche $\varphi_g(N) \subseteq N$). Equivalentemente, i sottogruppi normali di G sono i sottogruppi **invarianti** per automorfismi interni (ovvero sono tali che $gNg^{-1} = N$, $\forall g \in G$). Se $N \trianglelefteq G$, si può considerare:

$$\mathrm{Inn}(G) \longrightarrow \mathrm{Aut}(N) : \varphi_g \longmapsto \varphi_{g|N}$$

con $\varphi_{g|N} : N \longrightarrow N$ che è un automorfismo, infatti rimane iniettivo, la surgettività segue dal fatto che $\varphi_g(N) = N$, e infine, essendo φ_g un omomorfismo su tutti gli elementi di G, lo sarà in particolare anche su tutti gli elementi di N. Dunque quando si ha un sottogruppo normale, ogni automorfismo interno si restringe a un automorfismo di N.

Abbiamo visto che i sottogruppi normali sono invarianti per automorfismi interni, possiamo generalizzare quest'idea e considerare i sottogruppi invarianti per automorfismi:

Definizione 1.10. Dato un sottogruppo $H \leqslant G$, esso si dice **caratteristico** se è invariante per automorfismi:

$$f(H) = H \qquad\qquad \forall f \in \mathrm{Aut}(G)$$

Anche in questo caso basta verificare che $f(H) \subseteq H$, $\forall f \in \mathrm{Aut}(G)$, perché si ha anche che:

$$f^{-1}(H) \subseteq H$$

da cui si ottiene:

$$f(f^{-1}(H)) \subseteq f(H)$$

Osservazione 1.11 — Si osserva che se H è caratteristico in G, allora è invariante per tutti gli automorfismi di G (e quindi in particolare quelli interni), dunque se H è caratteristico in G, allora è anche normale. Il viceversa è falso.

Osservazione 1.12 — Se H è caratteristico in G (dunque normale), si può scrivere un'applicazione:

$$\mathrm{Aut}(G) \longrightarrow \mathrm{Aut}(H) : f \longmapsto f_{|H}$$

dove $f_{|H}$ è un automorfismo di H.

Osservazione 1.13 — Si osserva che se H è l'unico sottogruppo di G di un certo ordine, allora H è caratteristico in G (segue immediatamente dal fatto che gli automorfismi preservano gli ordini degli elementi). In modo analogo, se H è caratterizzato da una proprietà invariante per automorfismo, allora è caratteristico.

Esercizio 1.14. Il centro di un gruppo $Z(G)$ è un sottogruppo caratteristico.

Soluzione. Per dimostrare che $Z(G)$ è caratteristico è sufficiente far vedere che:

$$f(Z(G)) \subseteq Z(G) \qquad \forall f \in \mathrm{Aut}(G)$$

ovvero:

$$f(z) \in Z(G) \qquad \forall f \in \mathrm{Aut}(G), \forall z \in Z(G)$$

dunque bisogna verificare che:

$$gf(z) = f(z)g \qquad \forall g \in G$$

poiché f è un automorfismo, allora $\exists h \in G : f(h) = g$, dunque:

$$gf(z) = f(h)f(z) = f(hz) = f(zh) = f(z)f(h) = f(z)g \qquad \forall g \in G$$

□

Esempio 1.15

Sia $G = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \{(\overline{0},\overline{0}),(\overline{1},\overline{0}),(\overline{0},\overline{1}),(\overline{1},\overline{1})\}$, G ha ordine 4 ed ha tre sottogruppi ciclici di ordine 2:

$$H_1 = \big\langle(\overline{1},\overline{0})\big\rangle \qquad H_2 = \big\langle(\overline{0},\overline{1})\big\rangle \qquad H_3 = \big\langle(\overline{1},\overline{1})\big\rangle$$

ed essendo G abeliano si ha $H_1, H_2, H_3 \trianglelefteq G$ (e quindi i sottogruppi sono invarianti per automorfismi interni). Tuttavia nessuno dei sottogruppi è caratteristico, infatti possiamo prendere un automorfismo non banale (e quindi non uno interno) e vedere come i sottogruppi di questo tipo non siano invarianti:

$$f = \begin{cases} (\overline{1},\overline{0}) \longmapsto (\overline{1},\overline{1}) \\ (\overline{0},\overline{1}) \longmapsto (\overline{0},\overline{1}) \end{cases}$$

la definizione della mappa data tuttavia non è completa, perché abbiamo stabilito solo dove vengono mandati i generatori, dobbiamo definire cosa faccia un elemento generico:

$$f((\overline{a},\overline{b})) = af((\overline{1},\overline{0})) + bf((\overline{0},\overline{1})) = (\overline{a},\overline{a}) + (\overline{0},\overline{b}) = (\overline{a},\overline{a+b})$$

a questo punto abbiamo definito completamente l'applicazione (rimarrebbe da verificare che f sia un omomorfismo), e si verifica facilmente che $f(H_1) = H_3$ quindi $H_1 \trianglelefteq G$, ma non caratteristico.

A questo punto è facile verificare che:

$$\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \cong S_3$$

infatti, ogni automorfismo del gruppo si ottiene fissando l'elemento neutro $(\overline{0},\overline{0}) \longmapsto (\overline{0},\overline{0})$, quindi il numero possibile di bigezioni è al più $3!$, occorre verificare che tutte e 6 le funzioni sono omomorfismi. Dimostriamo invece che:

$$\boxed{\mathrm{Aut}(S_3) \cong S_3}$$

Per farlo, poiché S_3 non è abeliano, possiamo osservare che:

$$\mathrm{Inn}(S_3) \cong {}^{S_3}\!\big/_{Z(S_3)} \cong S_3$$

in quanto l'unico elemento che commuta con tutti gli altri in S_3 è l'identità, quindi $Z(S_3) = \{id\} \cong \{e\}$. Per quanto detto si ha $\mathrm{Inn}(S_3) \trianglelefteq \mathrm{Aut}(S_3)$ e quindi $\mathrm{Aut}(S_3)$ contiene una copia isomorfa di S_3 come sottogruppo normale, pertanto, se verifichiamo che $|\,\mathrm{Aut}(S_3)| \leq 6$ abbiamo concluso. Sia $f \in \mathrm{Aut}(S_3)$, f può al più scambiare i 3 elementi di ordine 2, d'altra parte, fissate le immagini di τ_1, τ_2, τ_3[1], i due 3-cicli[2] sono completamente determinati, ciò significa che si hanno al più $3!$ automorfismi, dunque:

$$\mathrm{Aut}(S_3) = \mathrm{Inn}(S_3) \cong S_3 \implies \mathrm{Aut}(S_3) \cong S_3$$

[1] Con τ_i si intendono le trasposizioni che lasciano fisso l'elemento i.
[2] Come si vedrà $S_3 = \langle \tau_1, \tau_2, \tau_3 \rangle$

§1.3 Azione di un gruppo su un insieme

Definizione 1.16. Sia G un gruppo e X un insieme, un'**azione** di G su X è un omomorfismo:

$$\varphi : G \longrightarrow S(X) : g \longmapsto \varphi_g$$

dove $\varphi_g : X \longrightarrow X : x \longmapsto \varphi_g(x)$[3], con φ_g bigettiva, $\forall g \in G$. Si può definire un'azione anche come:

$$\varphi : G \times X \longrightarrow X : (g, x) \longmapsto \varphi_g(x)$$

Un'azione di G su X si indica con $G \circlearrowleft X$.

Esempio 1.17

Sia $X = G$, quindi $\varphi : G \longrightarrow S(G) : g \longmapsto \varphi_g$, con φ_g coniugio, φ è un'azione. Come si è visto nell'(1) della Proposizione 1.3 φ_g è un automorfismo di G (e quindi una bigezione), e φ è un omomorfismo. In questo caso si ha che:

$$\varphi_g(x) = gxg^{-1}$$

Esempio 1.18

Sia V un K-spazio vettoriale, sia:

$$\varphi : K^* \longrightarrow S(V) : \lambda \longmapsto \varphi_\lambda$$

con $\varphi_\lambda : V \longrightarrow V : \underline{v} \longmapsto \lambda\underline{v}$, φ è un'azione di K^* su V.

Sia $\varphi : G \longrightarrow S(X)$ un'azione, φ definisce una relazione di equivalenza su X:

$$x \sim y \iff \exists g \in G : \varphi_g(x) = y$$

ovvero due elementi sono in relazione se esiste un'applicazione $\varphi_g \in S(X)$, per cui un elemento è l'immagine dell'altro mediante tale applicazione. La relazione è appunto di equivalenza, infatti: $x \sim x$, per $g = e$ si ha (essendo φ un omomorfismo) $\varphi_e(x) = id(x) = x$, $x \sim y \implies y \sim x$:

$$\varphi_g(x) = y \implies x = (\varphi_g(y))^{-1} = \varphi_{g^{-1}}(y)$$

infine $x \sim y$, $y \sim z \implies x \sim z$, infatti si avrebbe: $\varphi_g(x) = y$, $\varphi_h(y) = z$ da cui:

$$z = \varphi_h(\varphi_g(x)) = \varphi_{hg}(x) \implies x \sim z$$

Definizione 1.19. Data la relazione di equivalenza $\sim$ si definiscono **orbite** le classi di equivalenza di X rispetto alla relazione $\sim$:

$$\mathrm{Orb}(x) = \{\varphi_g(x) | g \in G\} (\subseteq X)$$

Da cui:

$$X = \bigsqcup_{x \in \mathcal{R}} \mathrm{Orb}(x)$$

Con $\mathcal{R}$ insieme di rappresentanti. Un'orbita è quindi l'insieme di tutte le immagini di un elemento in un insieme, mediante tutte le possibili applicazioni (permutazioni) dell'insieme $\varphi(G)$.

[3] Alternativamente si può indicare l'immagine con $\varphi_g : x \longmapsto g * x$ dove il simbolo $*$ indica l'azione di g su x.

Definizione 1.20. Per ogni $x \in X$ si dice **stabilizzatore** di x:

$$\mathrm{St}(x) = \{g \in G | \varphi_g(x) = x\}$$

Cioè lo stabilizzatore è l'insieme degli elementi di G, che danno origine mediante φ alle applicazioni $\varphi_g \in S(X)$, che lasciano fisso un determinato elemento.

Esempio 1.21
Se $X = \mathbb{R}^2$ e G è il gruppo di traslazioni di vettore $\underline{v} = (0, l)$, allora:

$$\varphi : G \longrightarrow S(X) : \tau_{(0,l)} \longmapsto \tau_{(0,l)}\ ^{a}$$

con:

$$\mathrm{Orb}(x, y) = \{(x, y + l) | l \in \mathbb{R}\} \quad \text{e} \quad \mathrm{St}(x, y) = \{\tau_{(0,l)} | (x, y + l) = (x, y)\} = \{id\}$$

[a] Si osserva che il primo $\tau_{(0,l)}$ è un elemento del gruppo G, mentre il secondo è un'applicazione bigettiva di X.

Esempio 1.22
Se $X = \mathbb{R}^2$ e G è il gruppo delle rotazioni di centro O, allora:

$$\varphi : G \longrightarrow S(\mathbb{R}^2) : r_\theta \longmapsto r_\theta$$

con:

$$\mathrm{St}(x, y) = \begin{cases} \{id\} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ G & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

e, detta ω la circonferenza di centro O e raggio $\sqrt{x^2 + y^2}$:

$$\mathrm{Orb}(x, y) = \{(x', y') \in \mathbb{R}^2 | (x', y') \in \omega\}$$

Proposizione 1.23 ($\mathrm{St}(x) \leqslant G$)
Dato un gruppo G e un'azione $\varphi : G \longrightarrow S(X)$, si ha che $\mathrm{St}(x) \leqslant G$.[a]

[a] In generale lo stabilizzatore non è un sottogruppo normale.

Dimostrazione. Si osserva che $e \in \mathrm{St}(x)$, in quanto $\varphi_e(x) = id(x) = x$, inoltre, presi $g, h \in \mathrm{St}(x)$, ovvero $\varphi_g(x) = \varphi_h(x) = x$, allora:

$$\varphi(gh)(x) = \varphi_{gh}(x) = \varphi_g \circ \varphi_h(x) = \varphi_g(\varphi_h(x)) = \varphi_g(x) = x \implies gh \in \mathrm{St}(x)$$

dove si ha che $\varphi_{gh}(x) = \varphi_g \circ \varphi_h(x)$ in quanto φ è un omomorfismo. Infine, preso $g \in \mathrm{St}(x)$, si ha $g^{-1} \in \mathrm{St}(x)$, infatti φ_g è bigettiva e quindi ammette inversa:

$$(\varphi_g)^{-1} \circ \varphi_g(x) = x \implies (\varphi_g)^{-1}(\varphi_g(x)) = x \implies (\varphi_g)^{-1}(x) = x$$

con $(\varphi_g)^{-1}(x) = (\varphi(g))^{-1}(x) = (\varphi(g^{-1}))(x) = \varphi_{g^{-1}}(x)$ e per quanto detto:

$$\varphi_{g^{-1}}(x) = x \implies g^{-1} \in \mathrm{St}(x)$$

□

Osservazione 1.24 ($\mathrm{Orb}(x) \longleftrightarrow [G : \mathrm{St}(x)]$) — Sia $x \in X$ e $g, h \in G$, allora:

$$\varphi_g(x) = \varphi_h(x) \iff \varphi_{h^{-1}}(\varphi_g(x)) = x$$

e per le proprietà di omomorfismo dell'azione φ, si ha:

$$\varphi_{h^{-1}}(\varphi_g(x)) = x \iff \varphi_{h^{-1}g}(x) = x \iff h^{-1}g \in \mathrm{St}(x)$$

ovvero $g\,\mathrm{St}(x) = h\,\mathrm{St}(x)$, in quanto $\mathrm{St}(x) \leqslant G$ e la condizione ottenuta è esattamente quella dell'equivalenza modulo $\mathrm{St}(x)$, quindi:

$$\mathrm{Orb}(x) \longleftrightarrow \text{classi laterali di } \mathrm{St}(x) \text{ in } G = [G : \mathrm{St}(x)]$$

cioè due elementi danno la stessa immagine (di un fissato elemento $x \in X$) se e solo se stanno nella stessa classe laterale modulo $\mathrm{St}(x)$, e la corrispondenza biunivoca tra orbita e classi laterali è data da:

$$g\,\mathrm{St}(x) \longmapsto \varphi_g(x) \qquad \text{e} \qquad h\,\mathrm{St}(x) \longmapsto \varphi_h(x)$$

che è ben definita e per quanto detto all'inizio è iniettiva:

$$\varphi_g(x) = \varphi_h(x) \iff g\,\mathrm{St}(x) = h\,\mathrm{St}(x)$$

(quindi due elementi di un'orbita sono uguali se e solo se lo sono le classi laterali dei rispettivi elementi che generano le applicazioni sono uguali modulo $\mathrm{St}(x)$, dunque per ogni elemento dell'orbita c'è una e una sola classe laterale modulo $\mathrm{St}(x)$) e surgettiva:

$$\forall y \in \mathrm{Orb}(x), y = \varphi_g(x) \implies g\,\mathrm{St}(x) \longmapsto y$$

e quindi concludiamo che il numero di classi laterali di $\mathrm{St}(x)$ in G è lo stesso della cardinalità di $\mathrm{Orb}(x)$.

Per quanto detto si ha:

$$|G| = |\,\mathrm{St}(x)|[G : \mathrm{St}(x)]$$

ma $[G : \mathrm{St}(x)]$ è il numero di classi laterali di $\mathrm{St}(x)$ in G, che è proprio uguale a $|\,\mathrm{Orb}(x)|$ pertanto vale la seguente:

Proposizione 1.25 (Lemma orbita-stabilizzatore)
Sia G un gruppo finito e X un insieme, allora:

$$|G| = |\,\mathrm{Orb}(x)||\,\mathrm{St}(x)| \qquad \forall x \in X$$

Osservazione 1.26 — Si osserva che essendo $\mathrm{St}(x) \leqslant G$, allora è ovvio (per Lagrange) che $|\,\mathrm{St}(x)| \mid |G|$, tuttavia, per la proposizione precedente, si ha che: $|\,\mathrm{Orb}(x)| \mid |G|$ con $\mathrm{Orb}(x) \subseteq X$.

Ricordando che:

$$X = \dot{\bigcup_{x \in \mathcal{R}}} \operatorname{Orb}(x)$$

se $|X| < +\infty$ si ha:

$$\boxed{|X| = \sum_{x \in \mathcal{R}} |\operatorname{Orb}(x)| = \sum_{x \in \mathcal{R}} \frac{|G|}{|\operatorname{St}(x)|}}$$

§1.4 Azione di coniugio

Definizione 1.27. Si parla di **azione di coniugio**, quando si ha un'azione di G su G stesso:

$$\varphi : G \longrightarrow \text{Inn}(G)(\trianglelefteqslant \text{Aut}(G)) : g \longrightarrow \varphi_g$$

Abbiamo già osservato che è un'azione (ovvero che φ è un omomorfismo). In questo caso:

$$\text{Orb}(x) = \{\varphi_g(x)|g \in G\} = \{gxg^{-1}|g \in G\} = \mathcal{C}\ell_G(x)$$

dove $\mathcal{C}\ell_G(x)$ prende il nome di **classe di coniugio** di x[4]. Mentre:

$$\text{St}(x) = \{g \in G|\varphi_g(x) = gxg^{-1} = x\} = \{g \in G|gx = xg\} = Z_G(x)$$

dove $Z_G(x)$ si dice **centralizzatore** di x. Per quanto detto in precedenza si ha:

$$|G| = |\mathcal{C}\ell_G(x)||Z_G(x)|$$

In particolare $|\mathcal{C}\ell_G(x)| \mid |G|$ e :

$$|G| = \sum_{x \in \mathcal{R}} |\mathcal{C}\ell_G(x)| = \sum_{x \in \mathcal{R}} \frac{|G|}{|Z_G(x)|}$$

Osservazione 1.28 — $\mathcal{C}\ell_G(x)$ è un sottoinsieme, non un sottogruppo di G, poiché non c'è mai l'identità.

Osservazione 1.29 — Osserviamo che $Z_G(x) = G \iff x \in Z(G)$, infatti per un elemento del centro si ha che $\forall g \in G$ l'elemento commuta, e dunque il suo centralizzatore è tutto il gruppo.

Osservazione 1.30 — Per un'azione di coniugio si ha che $x \in Z(G)$ se e solo se $\text{Orb}(x) = \{x\}$ e $\text{St}(x) = G$ (ovvero $\varphi_g(x) = x$, $\forall g \in G$).

$$|G| = \sum_{x \in Z(G)} \frac{|G|}{|Z_G(x)|} + \sum_{x \in \mathcal{R} \setminus Z(G)} \frac{|G|}{|Z_G(x)|}$$

ma, per quanto detto, se $x \in Z(G)$, allora $\dfrac{|G|}{|Z_G(x)|} = |\mathcal{C}\ell_G(x)| = \{x\}$, segue dunque la relazione:

$$\boxed{|G| = |Z(G)| + \sum_{x \in \mathcal{R} \setminus Z(G)} \frac{|G|}{|Z_G(x)|}}$$

che prende il nome di **formula delle classi** (di coniugio).

[4] Si può indicare anche con C_x.

§1.5 Applicazioni ai p-gruppi

Definizione 1.31. Si definisce ***p*-gruppo** un gruppo di ordine p^n, con p primo e $n \geq 1$.

Se G è un p-gruppo la formula delle classi diventa:

$$p^n = |G| = |Z(G)| + \sum_{x \in \mathcal{R} \setminus Z(G)} \frac{|G|}{|Z_G(x)|}$$

con $|Z(G)| = p^z$, $0 \leq z \leq n$, facciamo due osservazioni fondamentali:

(1) Il centro di un p-gruppo non è mai banale, infatti, se osserviamo la formula delle classi, si ha:

$$p^n = |Z(G)| + \sum_{x \in \mathcal{R} \setminus Z(G)} \frac{|G|}{|Z_G(x)|} \implies |Z(G)| + \sum_{x \in \mathcal{R} \setminus Z(G)} \frac{|G|}{|Z_G(x)|} \equiv 0 \pmod p$$

con $\dfrac{|G|}{|Z_G(x)|} > 1$, poiché $Z_G(x) = G$ se e solo se $x \in Z(G)$, viceversa deve essere che $\dfrac{|G|}{|Z_G(x)|} = p^{k_x}$, $k > 0$, poiché G è un p-gruppo (e quindi anche $Z_G(x)$), dunque:

$$|Z(G)| \equiv 0 \pmod p \implies |Z(G)| \geq 2$$

e quindi il centro di un p-gruppo non è mai banale.

(2) Un gruppo di ordine p^2 è abeliano, infatti, si ha:

$$|G| = p^2 \implies |Z(G)| = \begin{cases} 1 & \text{non può accadere per (1)} \\ p & \text{no perché allora } G/Z(G) \text{ ciclico, ma } G \text{ non è abeliano} \\ p^2 & \end{cases}$$

dunque l'unica possibilità è che $Z(G) = G \iff G$ abeliano.

§1.6 Teorema di Cauchy

Teorema 1.32 (Teorema di Cauchy)
Dato un gruppo G e un primo p, se $p \mid |G|$, allora $\exists x \in G : \mathrm{ord}_G(x) = p$. [a]

[a] Si considera già noto il teorema per gruppi abeliani.

Dimostrazione. Sia $|G| = pn$, procediamo per induzione su n, nel caso $n = 1$ il teorema è ovvio. Supponiamo vera la tesi per i gruppi di ordine pm, con $1 \leq m < n$ e proviamola per n. Distinguiamo due casi:

- Se esiste $H \lneq G$ con $p \mid |H|$, ovvero $|H| = pm \implies$ vale il teorema di Cauchy per ipotesi induttiva (essendo $m < n$), quindi $\exists x \in H : \mathrm{ord}_H(x) = p$, ma essendo $H \subset G \implies x \in G$ e quindi la tesi è vera.

- Se $\forall H \lneq G$ si ha $p \nmid |H|$, allora si può applicare a G la formula delle classi rispetto all'azione di coniugio:

$$pn = |G| = |Z(G)| + \sum_{x \in \mathcal{R} \setminus Z(G)} \frac{|G|}{|Z_G(x)|}$$

ricordando che il centralizzatore di x è uno stabilizzatore (e quindi un sottogruppo di G), si ha $p \nmid |Z_G(x)|$, e quindi:

$$p \left| \sum_{x \in \mathcal{R} \setminus Z(G)} \frac{|G|}{|Z_G(x)|} \right.$$

da cui segue che $p \mid |Z(G)| = \underbrace{|G|}_{=pn} - \sum pl_x$[5], per quanto premesso ($\forall H \lneq G$ si ha $p \nmid |H|$), ed essendo $Z(G) \leqslant G$, l'unica possibilità è che $Z(G) = G$ e vale il teorema poiché è già stato dimostrato per il caso in cui G è abeliano.

$\square$

[5] Con pl_x indichiamo le varie cardinalità del rapporto tra $|G|$ e $|Z_G(x)|$ al variare di x.

§1.7 Azione di coniugio su un sottogruppo

Sia $X = \{H \leqslant G\}$ e $\varphi : G \longrightarrow S(X) : g \longmapsto \varphi_g(X)$, con $\varphi_g : X \longrightarrow X : H \longmapsto gHg^{-1} = \{ghg^{-1} | h \in H\}$. Si verifica facilmente che φ è un omomorfismo; mostriamo invece che φ_g è una permutazione (cioè bigettiva), per l'iniettività si osserva che:

$$\varphi_g(H) = \varphi_g(K) \iff gHg^{-1} = gKg^{-1} \iff H = K$$

mentre per la surgettività si ha che $\forall H \in X, \exists L \in X$:

$$\varphi_g(L) = H \iff gLg^{-1} = H \iff L = g^{-1}Hg$$

inoltre si ha anche:

$$\operatorname{Orb}(H) = \{\varphi_g(H) | g \in G\} = \{gHg^{-1} | g \in G\} \quad \operatorname{St}(H) = \{g \in G | \varphi_g(H) = H\} = N_G(H)$$

dove $\operatorname{Orb}(H)$ è l'insieme dei coniugati di H, mentre $\operatorname{St}(H) = N_G(H)$ prende il nome di **normalizzatore** di H.

Osservazione 1.33 — Si osserva che $H \trianglelefteq G$ se e solo se $\operatorname{Orb}(H) = \{H\} \iff N_G(H) = G$, ovvero se H è sempre chiuso per coniugio in G.

Per quanto affermato nella Proposizione 1.25 si ha:

$$|G| = |\operatorname{Orb}(H)||N_G(H)| \implies |\operatorname{Orb}(H)| = \frac{|G|}{|N_G(H)|}$$

Osservazione 1.34 — Quindi in generale, dato $H \leqslant G$ si ha che $\#\{gH\} = [G : H]$ e $\#\{gHg^{-1}\} = [G : N_G(H)]$.

Osservazione 1.35 (Sulla definizione di sottogruppo normale) — I sottogruppi normali possono essere ridefiniti nella maniera seguente, $H \trianglelefteq G$ se e solo se:

$$H = \bigcup_{h \in H} \mathcal{C}\ell_h$$

cioè un sottogruppo è normale se e solo se è l'unione delle classi di coniugio dei suoi elementi. Infatti:

$$H \trianglelefteq G \iff ghg^{-1} \in H \qquad \forall h \in H, \forall g \in G$$

che equivale a:

$$\mathcal{C}\ell_h = \{ghg^{-1} | h \in H\} \subseteq H \quad \forall h \in H \implies \bigcup_{h \in H} \mathcal{C}\ell_h \subseteq H$$

d'altra parte se H è normale è chiuso per coniugio, ovvero il coniugio di ogni suo elemento è ancora in H ($ghg^{-1} = h'$, $\forall h \in H$) e in particolare ciò significa che:

$$H \subseteq \bigcup_{h \in H} \mathcal{C}\ell_h$$

§1.8 Teorema di Cayley

Teorema 1.36 (Teorema di Cayley)
Ogni gruppo è isomorfo ad un sottogruppo di un gruppo di permutazioni. In particolare, se $|G| = n$, allora G è isomorfo a un sottogruppo di S_n.

Dimostrazione. Definiamo la mappa:

$$\lambda : G \hookrightarrow S(G) : g \longmapsto \varphi_g$$

con $\varphi_g : G \longrightarrow G : x \longmapsto gx$, l'applicazione λ prende il nome di **rappresentazione regolare a sinistra** di G, si vuole dimostrare che λ è un omomorfismo iniettivo. Osserviamo innanzitutto che λ è ben definita, cioè $\varphi_g \in S(G)$, infatti φ_g è iniettiva (segue dalle leggi di cancellazione) e surgettiva, perché $\forall y \in G$, $\exists g^{-1}y \in G : \varphi_g(g^{-1}y) = y$. Verifichiamo che λ è un omomorfismo:

$$\lambda(g_1 g_2) = \varphi_{g_1 g_2}$$

con $\varphi_{g_1 g_2}(x) = \varphi_{g_1} \circ \varphi_{g_2}(x)$, $\forall x \in G$, e quindi:

$$\lambda(g_1 g_2) = \lambda(g_1)\lambda(g_2) \qquad \forall g_1, g_2 \in G$$

infine, per l'iniettività si ha che:

$$\ker \lambda = \{g \in G | \lambda(g) = \varphi_g = id = \varphi_e\} = \{e\}$$

da ciò segue che $G \cong \lambda(G) \leqslant S(G)$, e se $|G| = n$ si ha che $\mathrm{Im}(G) \leqslant S_n$. □

Osservazione 1.37 — In generale, dato $G = \{g_1 = e, g_2, \dots, g_n\}$ e $\lambda : G \hookrightarrow S(G) \cong S_n$, si ha che:

$$g_1 = e \longmapsto \lambda_{g_1} \qquad \text{con} \qquad \lambda_{g_1} : G \longrightarrow G : g_i \longmapsto g_i$$

$$g_2 \longmapsto \lambda_{g_2} \qquad \text{con} \qquad \lambda_{g_2} : G \longrightarrow G : x \longmapsto g_2 x \longmapsto g_2^2 x \longmapsto \dots \longmapsto g_2^{k-1} x$$

con $k = \mathrm{ord}_G(g_2)$. λ_{g_2} può essere rappresentata mediante la notazione dei cicli:

$$(x, g_2 x, \dots, g_2^{k-1} x)$$

preso poi $y \notin \lambda_{g_2}(G)$, si ha analogamente:

$$(y, g_2 y, \dots, g_2^{k-1} y)$$

Esempio 1.38
Nel caso in cui $G = \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ consideriamo l'azione:

$$\lambda : G \longrightarrow S(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}) \cong S_8{}^{a} : \overline{a} \longmapsto \lambda_a$$

che, per quanto visto genera ad esempio le applicazioni:[b]

$$\begin{aligned} 1 &\longmapsto \lambda_1 : X \longrightarrow X : a \longmapsto 1 + a \implies & (0, 1, \dots, 7) \\ 2 &\longmapsto \lambda_2 : X \longrightarrow X : a \longmapsto 2 + a \implies & (0, 2, 4, 6)(1, 3, 5, 7) \\ 4 &\longmapsto \lambda_4 : X \longrightarrow X : a \longmapsto 4 + a \implies & (0, 4)(1, 5)(2, 6)(3, 7) \end{aligned}$$

che permutano gli elementi di X secondo i cicli trovati.

[a] Perché appunto $S(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z})$ è l'insieme di permutazioni di un insieme di 8 elementi.
[b] Per $+$ si intende la somma modulo 8.

Definizione 1.39. Un'azione λ si dice **fedele** se è iniettiva.

Ad esempio l'azione di rappresentazione regolare a sinistra è fedele:

$$\ker \lambda = \{g \in G | \lambda(g) = id\} = \{g \in G | \lambda_g(e) = e\} = \{g \in G | ge = e\} = \{e\}$$

infatti $\lambda(e) = \lambda_e = id$ e inoltre

$$\lambda(g) = \lambda_g = id \implies \lambda_g(e) = e \implies ge = e \implies g = e$$

da cui λ fedele.

Osservazione 1.40 — Esiste anche un'applicazione $\rho : G \longrightarrow S(G)(\cong S_n)$, $(n = |G|)$, detta azione di **rappresentazione regolare a destra**, con:

$$g \longmapsto \rho_g : x \longmapsto xg^{-1}$$

Lemma 1.41 (Lemma di Ranieri)
Sia G un gruppo abeliano di ordine n, allora $\forall d \mid n, \exists H \leqslant G : |H| = d$.[a][b]

[a] Il nome ovviamente non è ufficiale, ma deriva da un curioso aneddoto in cui è coinvolto il buon Davide Ranieri, pertanto vi sconsiglio di citarlo con questo nome in contesti ufficiali, ma se voleste farlo comunque è a vostro rischio e pericolo :)
[b] La dimostrazione non è stata fatta durante il corso, ma è stata comunque aggiunta per completezza.

Dimostrazione. Si consideri innanzitutto il caso $d = p^k$, p primo, e mostriamolo per induzione: per $k = 1$ la tesi è equivalente al Teorema di Cauchy (anche solo per i gruppi abeliani). Supponiamo la tesi per $k - 1$. Poiché in particolare $p \mid |G|$ scegliamo un sottogruppo H di G di ordine p; tale sottogruppo è normale poiché G è abeliano. $p^{k-1} \mid |G/H| \implies$ per ipotesi induttiva $\exists K \leqslant G/K : |K| = p^{k-1}$.
Prendendo la controimmagine di K tramite la proiezione al quoziente troviamo il sottogruppo di G cercato.
A questo punto possiamo scrivere in generale $d = p_1^{k_1} \dots p_s^{k_s}$; per ogni i troviamo sottogruppi H_i di ordini $p_i^{k_i}$ (tutti normali), poiché considerando il generato dagli elementi di ordine potenza di p_i: questo è un p_i-gruppo ed è normale per abelianità, se non avesse

ordine $p_i^{k_i}$ allora quozientando G per questo avremmo per Cauchy un elemento di ordine p_i e considerando la controimmagine della proiezione avremmo perso un elemento di ordine potenza di p_i (dato che avevamo quozientato per un p_i-gruppo). Si ha quindi che $H_1H_2 \leqslant G$ per normalità, inoltre $|H_1 \cap H_2| = 1$ poiché l'ordine di un elemento in tale intersezione deve dividere $(p_1^{k_1}, p_2^{k_2}) = 1$. Pertanto $|H_1H_2| = p_1^{k_1}p_2^{k_2}$. Ragionando per induzione otteniamo che il sottogruppo $H_1 \dots H_k$ ha ordine d come voluto. □

Esercizio 1.42. Sia G un gruppo, se $|G| = p^n$, allora esiste:

$$\{e\} = H_n < H_{n-1} < \dots < H_1 < G$$

con $H_i \trianglelefteq G$ e $|H_i| = p^{n-i}$, $\forall i \in \{1, \dots, n\}$.

Soluzione. Procediamo per induzione su n, per $n = 1$ è ovvio, infatti si ha $H_1 = \{e\} \trianglelefteq G$. Supponiamo la tesi vera $\forall 1 \leq k \leq n-1$, osserviamo che G è un p-gruppo, pertanto il suo centro non è banale:

$$|Z(G)| = p^z \qquad z \geq 1$$

sia $\mathcal{G} = {}^{G}\!/_{Z(G)}$, essendo $|G/Z(G)| < p^n$ (perché deve essere $|Z(G)| \geq p$), allora vale l'ipotesi induttiva, dunque $|\mathcal{G}| = p^m$, con $m = n - z$ $(< n)$, allora esiste:

$$\mathcal{H}_m = \{e_{\mathcal{G}}\} < \mathcal{H}_{m-1} < \dots < \mathcal{H}_1 < \mathcal{G}$$

con $|\mathcal{H}_i| = p^{m-i}$ e $\mathcal{H}_i \trianglelefteq \mathcal{G}$. Data la proiezione al quoziente:

$$\pi_{Z(G)} : G \longrightarrow \mathcal{G}$$

per il Teorema di Corrispondenza dei sottogruppi, esiste una bigezione tra i sottogruppi di ${}^{G}\!/_{Z(G)}$ e i sottogruppi di G che contengono $Z(G)$, la quale preserva normalità e indice del sottogruppo, pertanto preso $\mathcal{H}_i \leqslant {}^{G}\!/_{Z(G)}$ è sufficiente applicare $\pi_{Z(G)}^{-1}$ alla catena scritta sopra e troviamo:

$$Z(G) = \pi_{Z(G)}^{-1}(\mathcal{H}_m) < \dots < \pi_{Z(G)}^{-1}(\mathcal{H}_1) < \pi_{Z(G)}^{-1}(\mathcal{G})(= G)$$

Segue per il teorema di corrispondenza che $\pi_{Z(G)}^{-1}(\mathcal{H}_i) = H_i \trianglelefteq G$, ovvero si preserva la normalità dei sottogruppi, inoltre, segue sempre dal teorema che:

$$p^i = [\mathcal{G} : \mathcal{H}_i] = [G : H]$$

dunque la catena esiste e $|H_i| = p^{n-i}$ per $1 \leq i \leq m$. Essendo $Z(G)$ abeliano, i sottogruppi di ogni suo ordine (che esistono sempre per il Lemma Di Ranieri) sono normali in $Z(G)$, inoltre $|Z(G)| = p^z$ (dunque si hanno sottogruppi normali di ordine p^l per $l \geq z$), pertanto esiste la catena:

$$\{e\} = H_n < \dots < H_m = Z(G) \qquad \text{con } |H_j| = p^{n-j}, \forall m \leq j \leq n$$

Bisogna infine verificare che $H_j \trianglelefteq G$, dunque:

$$gH_jg^{-1} = H_j \qquad \forall g \in G$$

ma $H_j \subset Z(G)$ (quindi è invariante per coniugio rispetto a ogni $g \in G$) dunque è sempre verificata l'ultima uguaglianza. □

§1.9 Permutazioni

Ricordiamo brevemente che:

Definizione 1.43. Dato un insieme X si definisce **permutazione** un'applicazione bigettiva di X in se stesso.

Indichiamo con $S(X)$ il gruppo delle permutazioni di X e con S_n il gruppo delle permutazioni di un insieme di cardinalità n, che per semplicità indichiamo con $\{1, \dots, n\}$. Le permutazioni si possono indicare in vari modi, ad esempio, preso $\sigma \in S_{12}$ si può rappresentare mediante la matrice di permutazione:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 3 & 2 & 4 & 5 & 1 & 9 & 8 & 7 & 6 & 12 & 11 & 10 \end{pmatrix}$$

o anche con la notazione dei cicli:

$$\sigma = (1\ 3\ 4\ 5)(6\ 9)(7\ 8)(10\ 12)$$

ogni ciclo prende il nome di **k-ciclo** (dove k indica la sua lunghezza), come si osserva i cicli di lunghezza 1 sono stati omessi, in quanto lasciano fissi gli elementi, inoltre, i 2-cicli prendono il nome di **trasposizioni**.
Formalmente, sia $\sigma \in S_n$ una permutazione di un insieme di n elementi, per descrivere tale permutazione possiamo considerare l'insieme X, con $|X| = n$, il gruppo $G = \langle \sigma \rangle$ e definire l'azione:

$$\varphi : G = \langle \sigma \rangle \hookrightarrow S(X) \cong S_n : \sigma \longmapsto \sigma$$

con $\sigma \in S_n$ e $\sigma : i \longmapsto \sigma(i)$, dunque abbiamo definito l'azione $\langle \sigma \rangle \circlearrowleft X$ data dall'inclusione, la quale ci permetterà di descrivere come σ agisce sull'insieme $\{1, \dots, n\}$. Osserviamo che:

$$\text{Orb}(x) = \{\sigma(x) | \sigma \in \langle \sigma \rangle\} = \{\sigma^l(x) | l \in \mathbb{N}\} = \{x, \sigma(x), \sigma^2(x), \dots, \sigma^{m_x - 1}(x)\}$$

con $|\operatorname{Orb}(x)| = m_x$, con $m_x = \min\{k > 0 | \sigma^k(x) = x\}$, perché se $\sigma^k(x) = x$, allora $\sigma^{k+1}(x) = \sigma(x)$, pertanto, sia $k \in \mathbb{N}$ tale che $\sigma^k(x) \in \{x, \dots, \sigma^{k-1}(x)\}$, allora $\exists h :$

$$\sigma^k(x) = \sigma^h(x) \qquad \text{con } 0 \leq h \leq k-1$$

Dunque vale che $\sigma^{k-h}(x) = x \in \{x, \dots, \sigma^{k-1}(x)\}$ e per la minimalità di k si ha che $h = 0$.
L'azione di $\langle \sigma \rangle$ su X divide X in orbite e su ogni orbita σ agisce ciclicamente (ovvero $\sigma(\operatorname{Orb}(x)) = \operatorname{Orb}(x)$).

Definizione 1.44. Si dice **ciclo** di $\sigma \in S_n$ l'orbita di un elemento $x \in \{1, \dots, n\}$ vista come insieme ordinato:

$$(x, \sigma(x), \dots, \sigma^{m_x - 1}(x))$$

Osservazione 1.45 — Un ciclo di lunghezza k (un k-ciclo) ha k scritture distinte, in quanto possiamo scegliere arbitrariamente il primo elemento.

Osservazione 1.46 — Data $\sigma \in S_n$, essa è determinata dalle immagini di $\{1, \dots, n\}$, dunque è determinata dai suoi cicli.

Esempio 1.47

Presa ad esempio $\sigma \in S_{10}$:

$$\sigma = (1\ 2\ 3)(4\ 5)(6\ 7\ 8\ 9)$$

chiamiamo i suoi cicli:

$$\sigma_1 = (1\ 2\ 3) \qquad \sigma_2 = (4\ 5) \qquad \sigma_3 = (6\ 7\ 8\ 9)$$

dove appunto $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 \in S_{10}$ e:

$$\sigma = \sigma_1 \circ \sigma_2 \circ \sigma_3$$

Definizione 1.48. Una permutazione si dice **ciclica** se ha un unico ciclo (orbita) non banale.[6]

Osservazione 1.49 — Si osserva che:

- Cicli disgiunti commutano.
- L'ordine di una permutazione ciclica è la lunghezza del suo ciclo:

$$\sigma = (x_1, \dots, x_k) \implies \operatorname{ord} \sigma = k$$

quindi $\sigma^k = id$ e se $d < k$, allora $\sigma^d(x_1) = x_{d+1} \neq x_1$.

Proposizione 1.50 (Struttura Delle Permutazioni)

Ogni permutazione si scrive in modo unico (a meno dell'ordine e della scrittura di cicli) come prodotto di cicli disgiunti, ovvero come composizione di permutazioni cicliche che agiscono su insiemi disgiunti.

Dimostrazione. I cicli della permutazione sono univocamente determinati in quanto orbite della permutazione, sappiamo che ogni permutazione si scrive come prodotto dei suoi cicli, e per concludere basta osservare che i cicli disgiunti commutano. □

Osservazione 1.51 — Si osserva che l'unicità della scrittura di una permutazione vista nella Proposizione 1.50 è effettivamente valida solo nel caso di cicli disgiunti, infatti, prendendo ad esempio:

$$\sigma = (1\ 2)(2\ 4) \in S_4 \qquad \text{con} \qquad \sigma_1 = (2\ 4) \quad \text{e} \quad \sigma_2 = (1\ 2)$$

non essendo σ_1, σ_2 cicli disgiunti, si osserva che $\sigma_2 \circ \sigma_1 = (2\ 4\ 1)$ e quindi σ era in realtà un 3-ciclo, e la sua fattorizzazione è unica come tale (mentre non era unica come prodotto di cicli non disgiunti).

[6] D'ora in avanti si utilizzeranno i termini "permutazione ciclica" e "ciclo" come sinonimi, in quanto una permutazione ciclica è appunto un singolo ciclo non banale.

Corollario 1.52

S_n è generato dalle permutazioni cicliche.

Dimostrazione. Segue immediatamente dal fatto che ogni permutazione si ottiene mediante composizione di permutazioni cicliche. $\square$

Esempio 1.53

Per esempio, preso S_4, le permutazioni possibili sono cicli del tipo:

$$id \qquad (a\ b) \qquad (a\ b\ c) \qquad (a\ b\ c\ d) \qquad (a\ b)(c\ d)$$

per contare il numero di 2-cicli, ci basta scegliere 2 elementi dell'insieme in $\binom{4}{2}$ modi e poi considerare tutti i possibili riordinamenti ciclici (dove la scelta del primo elemento è arbitraria), e ciò può essere fatto in $\frac{2!}{2}$ modi, per un totale di:

$$\binom{4}{2}\frac{2!}{2} = 6$$

e ragionando analogamente per i 3-cicli e i 4-cicli si ottiene:

$$\binom{4}{3}\frac{3!}{3} = 8 \qquad \text{e} \qquad \binom{4}{4}\frac{4!}{4} = 6$$

infine, per quanto riguarda le permutazioni ottenute dalla composizione di due 2-cicli, possiamo scegliere e permutare due coppie di elementi, come nei casi precedenti, tuttavia, essendo i cicli disgiunti, questi commutano (banalmente perché lasciano fissi gli altri elementi del dominio), quindi bisogna anche dividere per il numero di permutazioni dei cicli della stessa lunghezza, ovvero 2! dunque:

$$\binom{4}{2}\frac{2!}{2}\binom{2}{2}\frac{2!}{2}\cdot\frac{1}{2!} = 3$$

e dal conteggio delle permutazioni di S_4 divise per cicli di diversa lunghezza si ottiene: $1+6+8+6+3 = 24 = |S_4|$.

Osservazione 1.54 — Quanto visto nell'esempio precedente può essere generalizzato ottenendo:

$$\#\{\sigma \in S_n | \sigma \text{ è un } k\text{-ciclo}\} = \binom{n}{k}\frac{k!}{k} = \binom{n}{k}(k-1)!$$

Esempio 1.55

Per quanto detto risulta semplice ad esempio calcolare:

$$\#\{\sigma \in S_{20} | \sigma \text{ si fattorizza in cicli del tipo } 2+2+2+4+5+5\}$$

applicando quanto detto nell'osservazione precedente si trovano:

$$\frac{\binom{20}{2}\binom{18}{2}\binom{16}{2}1!1!1!}{3!} \cdot \binom{14}{4} 3! \cdot \frac{\binom{10}{5}\binom{5}{5}4!4!}{2!}$$

Proposizione 1.56 (Ordine di una permutazione)

Data $\sigma \in S_n$ con $\sigma = \sigma_1 \dots \sigma_k$, con σ_i cicli disgiunti, allora:

$$\operatorname{ord} \sigma = [\operatorname{ord} \sigma_1, \dots, \operatorname{ord} \sigma_k]$$

Dimostrazione. Sia σ_i un l_i-ciclo, ovvero $\operatorname{ord} \sigma_i = l_i$, vogliamo dimostrare che:

$$\operatorname{ord} \sigma = [l_1, \dots, l_k] = d$$

osserviamo che $\sigma^d = (\sigma_1 \dots \sigma_k)^d = \sigma_1^d \dots \sigma_k^d$, in quanto i cicli σ_i sono disgiunti (pertanto commutano), ed essendo $d = [l_1, \dots, l_k]$ si ha che $l_i \mid d$, $\forall \in \{1, \dots, k\}$, pertanto:

$$\sigma^d = \sigma_1^d \dots \sigma_k^d = id \implies \operatorname{ord} \sigma = m \mid d$$

d'altra parte, si ha che:

$$\sigma^m = \sigma_1^m \dots \sigma_k^m = id \iff \sigma_i^m = id, \forall i \in \{1, \dots, k\}$$

dunque $\operatorname{ord} \sigma_i = l_i \mid m$, $\forall i \in \{1, \dots, k\}$, ovvero $[l_1, \dots, l_k] \mid m$ da cui si conclude che $m = [l_1, \dots, l_k]$. □

Proposizione 1.57 (S_n è generato dalle trasposizioni)

Le trasposizioni generano S_n, $\forall n \geq 2$.

Dimostrazione. Per dimostrare l'affermazione bisogna mostrare che ogni permutazione è prodotto di trasposizioni (in generale non disgiunte). Poiché ogni permutazione, per quanto affermato nella Proposizione 1.50, è il prodotto di cicli (permutazioni cicliche) disgiunti, è sufficiente mostrare che i cicli sono tutti prodotto di trasposizioni, infatti si può osservare che:

$$(1 \ \dots \ k) = (1 \ k)(1 \ k-1) \dots (1 \ 2)$$

dove l'uguaglianza è tra funzioni, quindi ci basta mostrare che danno la stessa immagine. Se $i > k$, allora entrambe le funzioni mandano $i \longmapsto i$, se $i \leq k$, allora la funzione a sinistra manda $i \longmapsto i+1$ e $k \longmapsto 1$, quella a destra lascia fisso i fino al ciclo $(1 \ i)$ che manda $i \longmapsto 1$, e il ciclo successivo (alla sinistra del precedente) $(1 \ i+1)$ manda $1 \longmapsto i+1$, infine i cicli successivi lasciano fisso $i+1$ (quindi complessivamente abbiamo $i \longmapsto i+1$), mentre k viene lasciato fisso da tutti i cicli tranne $(1 \ k)$, quindi $k \longmapsto 1$. □

Osservazione 1.58 — La scrittura di una permutazione come prodotto di trasposizioni non è unica. Ad esempio in S_4:

$$\sigma = (1\ 2)(2\ 4) = (1\ 2)(3\ 4)(3\ 4)(2\ 4)$$

La seguente proposizione ci mostra invece che è fissata la parità della decomposizione in trasposizioni, cioè se σ si scompone come prodotto di m trasposizioni, ogni altra decomposizione come prodotto di trasposizioni ha un numero di trasposizioni con la stessa parità.

Proposizione 1.59 (Segno di una permutazione)
L'applicazione:

$$sgn : S_n \longrightarrow \{\pm 1\} : \sigma \longmapsto sgn(\sigma) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{\sigma(i) - \sigma(j)}{i - j}$$

è un omomorfismo di gruppi. Inoltre, se σ è una trasposizione, allora $sgn(\sigma) = -1$.

Dimostrazione. Osserviamo inizialmente che sgn è ben definita cioè:

$$sgn(\sigma) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{\sigma(i) - \sigma(j)}{i - j} \in \{\pm 1\}$$

al denominatore del prodotto vi sono tutte le possibili coppie $i - j$ (in $\{1, \dots, n\}$, prese tutte ordinatamente con $i < j$) e anche al numeratore poiché σ è bigettiva, l'unica cosa che può cambiare è l'ordine (ovvero potrebbe comparire $i - j$ al numeratore e $j - i$ al denominatore), quindi $sgn(\sigma) \in \{\pm 1\}$. Mostriamo che sgn è un omomorfismo:

$$sgn(\sigma \circ \tau) = \prod_{i<j} \frac{\sigma(\tau(i)) - \sigma(\tau(j))}{i - j} = \prod_{i<j} \frac{\sigma(\tau(i)) - \sigma(\tau(j))}{i - j} \frac{\tau(i) - \tau(j)}{\tau(i) - \tau(j)}$$

da cui:

$$\prod_{i<j} \frac{\sigma(\tau(i)) - \sigma(\tau(j))}{\tau(i) - \tau(j)} \frac{\tau(i) - \tau(j)}{i - j} = \underbrace{\prod_{i<j} \frac{\sigma(\tau(i)) - \sigma(\tau(j))}{\tau(i) - \tau(j)}}_{sgn(\sigma)} \underbrace{\prod_{i<j} \frac{\tau(i) - \tau(j)}{i - j}}_{sgn(\tau)} \qquad \forall \sigma, \tau \in S_n$$

Ci resta da verificare che il segno di una trasposizione è -1. Sia $\sigma = (a\ b)$, analizzando il segno delle varie coppie, distinguiamo le seguenti possibilità per i vari fattori del prodotto:

- $\{i, j\} \cap \{a, b\} = \emptyset$, in tal caso σ lascia fissi gli elementi, $\sigma(i) = i, \sigma(j) = j \implies \frac{\sigma(i)-\sigma(j)}{i-j} = 1$.
- $\{i, a\}$ con $i \neq b$ (il caso $\{i, b\}$ con $i \neq a$ è analogo), in tal caso $\frac{\sigma(i)-\sigma(a)}{i-a} = \frac{i-b}{i-a}$, però vi è anche il fattore $\frac{\sigma(i)-\sigma(b)}{i-b} = \frac{i-a}{i-b}$ e il loro prodotto dà 1.
- Infine, nel caso in cui $\{i, j\} = \{a, b\}$ si ha:

$$\frac{\sigma(a) - \sigma(b)}{a - b} = \frac{b - a}{a - b} = -1$$

Dunque si conclude che $sgn((a\ b)) = -1$. $\square$

Osservazione 1.60 — La proposizione appena vista dimostra quanto detto sopra, ovvero:

$$\sigma = \tau_1 \dots \tau_m \qquad \text{con } \tau_i \text{ trasposizione}$$

allora $sgn(\sigma) = \prod_{1 \leq i \leq m} sgn(\tau_i) = (-1)^m$.

Definizione 1.61. Una permutazione $\sigma \in S_n$ si dice **pari** se $sgn(\sigma) = 1$, **dispari** se $sgn(\sigma) = -1$.

Definizione 1.62. Dato l'omomorfismo $sgn : S_n \longrightarrow \{\pm 1\}$, si definisce **gruppo alterno**:

$$\mathcal{A}_n = \ker sgn = \{\sigma \in S_n | \, \sigma \text{ è pari}\}$$

Osservazione 1.63 — Si osserva che $\mathcal{A}_n \trianglelefteq S_n$ e $|\mathcal{A}_n| = \dfrac{n!}{2}$ poiché ${S_n}/{\mathcal{A}_n} \cong \{\pm 1\}$.

Osservazione 1.64 — Per quanto detto nella Proposizione 1.57, un k-ciclo si può scrivere nella forma:

$$(1 \ \dots \ k) = \underbrace{(1 \ k)(1 \ k-1) \dots (1 \ 2)}_{k-1 \text{ trasposizioni}}$$

dunque un k-ciclo è pari se $k \equiv 1 \pmod 2$, dispari se $k \equiv 0 \pmod 2$.

§1.10 Classi di coniugio in S_n

Teorema 1.65
Due permutazioni in S_n sono coniugate se e solo se hanno la stessa decomposizione in cicli disgiunti.

Dimostrazione. Mostriamo le due implicazioni:

- Presa $\sigma = (a_1 \ \dots \ a_k)$ e $\tau \in S_n$, vogliamo dimostrare che $\tau \circ \sigma \circ \tau^{-1}$ è ancora un k-ciclo. Sia $\tau(a_i) = b_i$, allora si ha che $\tau\sigma\tau^{-1} = (b_1 \ \dots \ b_k)$, con $b_i \neq b_j$, $\forall i \neq j$, poiché τ è bigettiva; verifichiamo l'uguaglianza mostrando che le due funzioni coincidono per tutti gli elementi. Si osserva che nel ciclo a destra accade semplicemente che $b_i \longmapsto b_{i+1}$, a sinistra invece:

$$b_i \xmapsto{\tau^{-1}} a_i \overset{\sigma}{\mapsto} a_{i+1} \overset{\tau}{\mapsto} b_{i+1} \qquad \forall i \in \{1, \dots, k\}$$

  Se, invece, $x \neq b_i$, $\forall i \in \{1, \dots, k\}$, a sinistra si ha $\tau^{-1}(x) \neq a_1, \dots, a_k$ (perché non si parte da alcun b_i), quindi $\sigma(\tau^{-1}(x)) = \tau^{-1}(x)$, e quindi $\tau\sigma\tau^{-1}(x) = \tau\tau^{-1}(x) = x$; a destra invece, essendo $x \neq b_i \forall i$ viene lasciato fisso, ciò conclude che le due funzioni sono uguali e quindi $\tau\sigma\tau^{-1}$ è un k-ciclo.

- Mostriamo ora che due permutazioni con la stessa fattorizzazione in cicli disgiunti sono coniugate. Siano:

$$\sigma = (a_1 \ \dots \ a_l)(b_1 \ \dots \ b_s) \dots (z_1 \ \dots \ z_t)$$

$$\rho = (a'_1 \ \dots \ a'_l)(b'_1 \ \dots \ b'_s) \dots (z'_1 \ \dots \ z'_t)$$

  per dimostrare la tesi è sufficiente trovare $\tau \in S_n$ tale che $\tau \circ \sigma \circ \tau^{-1} = \rho$. Scegliamo τ definita da:

$$\tau(a_i) = a'_i, \tau(b_i) = b'_i, \dots, \tau(z_i) = z'_i$$

  ed eventualmente si aggiungono altri elementi. Verifichiamo allora che $\tau \circ \sigma \circ \tau^{-1} = \rho$, consideriamo (WLOG) il primo ciclo:

$$a'_i \xmapsto{\tau^{-1}} a_i \overset{\sigma}{\mapsto} a_{i+1} \overset{\tau}{\mapsto} a'_{i+1}$$

  e quindi $a'_i \longmapsto a'_{i+1}$, pertanto $\tau \circ \sigma \circ \tau^{-1}$ e ρ coincidono sempre.

$\square$

Esempio 1.66
In S_5 la classe di coniugio di $\sigma = (1\ 2)(3\ 4)$ è $C_\sigma = \{(a\ b)(c\ d) \in S_5\}$, con:

$$\# C_\sigma = \frac{\binom{5}{2}\binom{3}{2} 1!1!}{2!} = 15$$

e da ciò si ricava anche che:

$$\# Z_{S_5}(\sigma) = \frac{|S_5|}{|C_\sigma|} = \frac{5!}{15} = 8$$

Esempio 1.67

Sia $\sigma = (3\ 5)(14) \in S_5$ e sia $\rho = (1\ 2)(3\ 4)$, cerchiamo $\tau \in S_5$ tale che:

$$\tau \circ \sigma \circ \tau^{-1} = \rho$$

si può scegliere $\tau = (1\ 3)(2\ 5)$, da cui:

$$(1\ 3)(2\ 5) \circ (3\ 5)(14) \circ (1\ 3)(2\ 5) = (1\ 2)(3\ 4) = \rho$$

Corollario 1.68

Valgono i seguenti fatti:

(1) Il numero di classi di coniugio in S_n è uguale al numero di partizioni di n.

(2) Se $H \leqslant S_n$, allora $H \trianglelefteq S_n$ se e solo se contiene tutte le permutazioni di un certo tipo o nessuna.

§1.11 Prodotto diretto

Ricordiamo brevemente che se G_1 e G_2 sono gruppi, allora l'insieme $G_1 \times G_2$ con l'operazione fatta componente per componente prende il nome di **prodotto diretto**.

Esempio 1.69

Presi ad esempio $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ e S_4, si ha $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z} \times S_4$, con $\sigma = (\overline{1}, (1\ 2\ 3))$ e $\rho = (\overline{4}, (1\ 4\ 2\ 4))$ in $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z} \times S_4$ e l'operazione:

$$\sigma \cdot \rho = (\overline{1} + \overline{4}, (1\ 2\ 3) \circ (1\ 4\ 2\ 3)) = (\overline{5}, (1\ 4\ 3\ 2))$$

Osservazione 1.70 — Si ricordano i seguenti fatti:

- Se $H, K \leqslant G$ in generale HK non è un sottogruppo, ma $HK \leqslant G \iff HK = KH$. Ovviamente se uno tra H e K è normale in G, allora questo è sempre vero.
- $H \times K \leqslant G \times G$.

Lemma 1.71

Siano $H, K \trianglelefteq G$ e $H \cap K = \{e\}$, allora $hk = kh$, $\forall h \in H$, $\forall k \in K$.

Dimostrazione. Preso $hkh^{-1}k^{-1}$, si ha:

$$hkh^{-1}k^{-1} = \underbrace{\underbrace{(hkh^{-1})}_{=k'} k^{-1}}_{\in K} = \underbrace{h \underbrace{(kh^{-1}k^{-1})}_{=h'}}_{\in H}$$

dunque $hkh^{-1}k^{-1} \in H \cap K \implies hkh^{-1}k^{-1} = e$, da cui segue la tesi. □

Teorema 1.72 (Decomposizione in prodotto diretto)

Sia G un gruppo e siano $H, K \trianglelefteq G$ tali che:

(1) HK = G.

(2) $H \cap K = \{e\}$.

Allora $G \cong H \times K$.

Dimostrazione. Definiamo l'applicazione:

$$\varphi : H \times K \longrightarrow G : (h, k) \mapsto hk$$

Si verifica che è un omomorfismo:

$$\varphi((h_1, k_1)(h_2, k_2)) = \varphi((h_1h_2, k_1k_2)) = h_1h_2k_1k_2$$

per il Lemma 1.71 si ha che $h_1h_2k_1k_2 = h_1k_1h_2k_2 = \varphi((h_1, k_1))\varphi((h_2, k_2))$, $\forall h_1, h_2 \in H$, $\forall k_1, k_2 \in K$. Si osserva ora che φ è surgettiva, per l'ipotesi (1); infine, è iniettiva in quanto:

$$\ker \varphi = \{(h, k) \in H \times K | hk = e\} = \{(h, k) \in H \times K | h = k^{-1}\} = \{e\}$$

dove nell'ultima uguaglianza si è usato il fatto che $H \cap K = \{e\}$. □

Osservazione 1.73 — Se abbiamo due sottogruppi G_1 e G_2 e costruiamo $G = G_1 \times G_2$, allora presi:

$$H = G_1 \times \{e_2\} \trianglelefteq G \qquad \text{e} \qquad K = \{e_1\} \times G_2 \trianglelefteq G$$

H, K sono normali, hanno intersezione banale e sono tali che $HK = G$, quindi verifichiamo le ipotesi del teorema, pertanto $G \cong H \times K$.

Esempio 1.74

Sia G un gruppo con $|G| = p^2$, dalla formula delle classi avevamo ottenuto che G è necessariamente abeliano, quindi G è isomorfo a $\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$ o $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Se G è ciclico, allora $G \cong \mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$. Mostriamo che se non lo è, allora $G \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ e in questo caso tutti gli elementi di G hanno ordine p.
Consideriamo $(e \neq)x \in G$ e $H = \langle x \rangle \trianglelefteq G$ (in quanto G abeliano); prendiamo $y \in G \setminus \langle x \rangle$ e analogamente $K = \langle y \rangle \trianglelefteq G$, da ciò segue che $H \cap K = \{e\}$, infatti H e K sono sottogruppi ciclici di G aventi ordini due primi distinti e quindi hanno in comune solo l'elemento neutro. Osservando infine che per cardinalità $HK = G$, per cardinalità:

$$|HK| = \frac{|H||K|}{|H \cap K|} = \frac{p \cdot p}{1} = p^2$$

le ipotesi del Teorema 1.72 sono verificate, dunque:

$$G \cong H \times K \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$$

§1.12 Prodotto semidiretto

Definizione 1.75. Dati due gruppi H, K e l'azione:

$$\varphi : K \longrightarrow \mathrm{Aut}(H)(\leqslant S(H)) : k \longmapsto \varphi_k$$

si dice **prodotto semidiretto** di H e K via φ:

$$H \rtimes_\varphi K$$

(o anche $K_\varphi \ltimes H$) l'insieme ottenuto come prodotto cartesiano $H \times K$ con l'operazione definita da:

$$(h, k)(h', k') = (h \cdot_H \varphi_k(h'), k \cdot_K k')$$

Proposizione 1.76 (Il Prodotto Semidiretto è un gruppo)
Dati due gruppi H, K, allora $H \rtimes_\varphi K$ è un gruppo.

Dimostrazione. Come si verifica facilmente l'operazione indotta dal prodotto semidiretto è associativa, verifichiamo che (e_H, e_K) è l'elemento neutro:

$$(h, k)(e_H, e_K) = (h \cdot \varphi_k(e_H), ke_K) = (he_H, k) = (h, k)$$

dove $\varphi_k(e_H) = e_H$ poiché φ_k è un automorfismo (e quindi in particolare un omomorfismo), a sinistra, invece, si ha:

$$(e_H, e_K)(h, k) = (e_H \cdot \varphi_{e_K}(h), e_K k) = (e_H \cdot id(h), k) = (e_H h, k) = (h, k)$$

Per l'inverso si osserva:

$$(h, k)^{-1} = ((\varphi_k)^{-1}(h^{-1}), k^{-1}) = (\varphi_{k^{-1}}(h^{-1}), k^{-1})$$ [7]

dunque si verifica a destra:

$$(h, k)(\varphi_{k^{-1}}(h^{-1}), k^{-1}) = (h \cdot \varphi_k(\varphi_{k^{-1}}(h^{-1})), kk^{-1}) = \\ = (h \cdot id(h^{-1}), e_K) = (hh^{-1}, e_K) = (e_H, e_K)$$

e analogamente a sinistra:

$$(\varphi_{k^{-1}}(h^{-1}), k^{-1})(h, k) = (\varphi_{k^{-1}}(h^{-1}) \cdot \varphi_{k^{-1}}(h), k^{-1}k) = \\ = (\varphi_{k^{-1}}(h^{-1}h), e_K) = (\varphi_{k^{-1}}(e_H), e_K) = (e_H, e_K)$$

□

[7] L'uguaglianza $(\varphi_k)^{-1} = \varphi_{k^{-1}}$ segue dal fatto che φ è un omomorfismo e quindi manda inversi in inversi.

Osservazione 1.77 — Si osserva che $H \rtimes_\varphi K$ è il prodotto diretto se e solo se $\varphi_k = id_H$, $\forall k \in K$. Infatti:

$$(h,k)(h',k') = (h \cdot \varphi_k(h'), kk') = (hh', kk') \iff \varphi_k(h') = h' \qquad \forall k \in K$$

e dunque $\varphi_k = id_H$.

Teorema 1.78 (Decomposizione in prodotto semidiretto)
Sia G un gruppo e siano $H, K \leqslant G$, con $H \trianglelefteqslant G$, tali che:

(1) $HK = G$.

(2) $H \cap K = \{e\}$.

Allora $G \cong H \rtimes_\varphi K$, dove $\varphi : K \longrightarrow \operatorname{Aut}(H) : k \longmapsto \varphi_k$, con $\varphi_k : H \underset{\sim}{\longrightarrow} H : h \longmapsto khk^{-1}$.

Dimostrazione. Costruiamo esplicitamente un isomorfismo tra i due gruppi:

$$\mathcal{F} : H \rtimes_\varphi K \longrightarrow G : (h,k) \longmapsto hk$$

Verifichiamo che è un omomorfismo:

$$\mathcal{F}((h,k)(h',k')) = \mathcal{F}(h \cdot \varphi_k(h'), kk') = \mathcal{F}(h\underbrace{kh'k^{-1}}_{=\varphi_k(h')}, kk') = hkh'k^{-1}kk' = \underbrace{hk}_{=\mathcal{F}(h,k)} \underbrace{h'k'}_{=\mathcal{F}(h',k')}$$

Si vede inoltre che $\mathcal{F}$ è surgettiva per l'ipotesi (1) e iniettiva per la (2), infatti:

$$\ker \mathcal{F} = \{(h,k) \in H \rtimes_\varphi K | \mathcal{F}(h,k) = hk = e\} = \{e\}$$

□

Osservazione 1.79 — Si osserva che φ_k è la restrizione al sottogruppo H dell'automorfismo interno $g \longmapsto kgk^{-1}$, poiché $H \trianglelefteqslant G$, allora la restrizione a H di ogni elemento di $\operatorname{Inn}(G)$ è un automorfismo di H.

Osservazione 1.80 — Sapendo che $G \cong H \rtimes_\varphi K$ e seguendo i passaggi della verifica di omomorfismo al contrario, si ricava che necessariamente φ è esattamente l'azione di coniugio su H.

Osservazione 1.81 — Siano $\overline{H} = H \times \{e_K\}$ e $\overline{K} = \{e_H\} \times K$, si osserva che $\overline{H}, \overline{K} \leqslant G = H \rtimes_\varphi K$, infatti sono chiusi per prodotto (ristretto):

$$(h, e_K)(h', e_K) = (h \cdot \varphi_{e_K}(h'), e_K) = (h \cdot id(h'), e_K) = (hh', e_K)$$

$$(e_H, k)(e_H, k') = (e_H \cdot \varphi_k(e_H), kk') = (e_H, kk')$$

e si verifica facilmente anche per inverso. Si osserva che $\overline{H} \trianglelefteqslant G$[a], in quanto $\overline{H} = \ker \pi$, con:

$$\pi : H \rtimes_\varphi K \longrightarrow K : (h, k) \longmapsto k$$

con π omomorfismo come si vede:

$$\pi((h, k)(h', k')) = \pi(h \cdot \varphi_k(h'), kk') = kk' = \pi((h, k))\pi((h', k'))$$

Per come li abbiamo presi si nota subito che $\overline{H}\,\overline{K} = G$ e $\overline{H} \cap \overline{K} = \{e\}$, quindi valgono le ipotesi del Teorema 1.78, pertanto:

$$G \cong H \rtimes_\varphi K \cong \overline{H} \rtimes_\varphi \overline{K}$$

[a] $\overline{K}$ in generale non è normale, lo è solo se il prodotto è diretto, infatti in quel caso vale il Teorema 1.72.

Esempio 1.82 ($S_n \cong \mathcal{A}_n \rtimes_\varphi \langle (1\ 2) \rangle$)

Verifichiamo che S_n è prodotto semidiretto di $H = \mathcal{A}_n$ e $K = \langle (1\ 2) \rangle$ [a] usando il Teorema 1.78, per quanto detto nel (1) del Corollario 1.68 sappiamo che $\mathcal{A}_n \triangleleft S_n$, inoltre, sempre per il punto (1), essendo $|\mathcal{A}_n| = \frac{n!}{2}$, segue per cardinalità che $HK = S_n$. Essendo $\mathcal{A}_n = \ker sgn$ e $\langle (1\ 2) \rangle$ una trasposizione $H \cap K = \{e\}$ (in quanto il nucleo dell'omomorfismo segno contiene solo permutazioni pari), pertanto segue la tesi:

$$S_n \cong \mathcal{A}_n \rtimes_\varphi \langle (1\ 2) \rangle$$

Osserviamo inoltre che:

$$\varphi : \langle (1\ 2) \rangle \longrightarrow \mathrm{Aut}(\mathcal{A}_n) : (1\ 2) \longmapsto \varphi_{(1\ 2)}, id \longmapsto id$$

con $\varphi_{(1\ 2)} : \mathcal{A}_n \longrightarrow \mathcal{A}_n : \rho \longmapsto (1\ 2)\rho(1\ 2)^{-1}$.

[a] In generale va bene qualsiasi trasposizione (che esiste sempre in S_n per $n \geq 2$).

Esempio 1.83 ($D_n \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \rtimes_\varphi \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$)
Ricordando che $D_n = \langle r, s | r^n = s^2 = id, srs^{-1} = r^{-1} \rangle$, possiamo osservare ancora una volta che le ipotesi del Teorema 1.78 sono soddisfatte. Poiché $\operatorname{ord} r = n$, allora $|\langle r \rangle| = n$, e in particolare $[D_n : \langle r \rangle] = 2 \implies \langle r \rangle \triangleleft D_n$; inoltre, $\langle r \rangle \cap \langle s \rangle = \{id\}$ perché $\det(r_i) = 1$, mentre $\det(sr_i) = -1$, $\forall i \in \{1, \dots, n\}$. Infine, essendo $\operatorname{ord} s = 2$, allora il prodotto di sottogruppi avrà cardinalità:

$$|\langle r \rangle \langle s \rangle| = \frac{|\langle r \rangle||\langle s \rangle|}{|\langle r \rangle \cap \langle s \rangle|} = \frac{2n}{1} = 2n$$

dunque $\langle r \rangle \langle s \rangle = D_n$. Pertanto $D_n \cong \langle r \rangle \rtimes_\varphi \langle s \rangle$, dove $\langle r \rangle \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ e $\langle s \rangle \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, quindi:

$$D_n \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \rtimes_\varphi \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

con:

$$\varphi : \langle s \rangle \longrightarrow \operatorname{Aut}(\langle r \rangle) : s \longmapsto \varphi_s$$

dove $\varphi_s : \langle r \rangle \longrightarrow \langle r \rangle : r \longmapsto srs^{-1} (= r^{-1})$. Si osserva che deve essere $\operatorname{ord} \varphi_s | \operatorname{ord} s = 2$, quindi ci sono soltanto due possibilità:

$$\varphi_s = \begin{cases} id \\ r \longmapsto r^{-1} \end{cases}$$

nel caso in cui $\varphi_s = id$ si ottiene il prodotto diretto, nell'altro caso si ottiene il prodotto semidiretto che definisce D_n. Se in $\operatorname{Aut}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ ci sono altri elementi di ordine due (ad esempio se $\operatorname{Aut}(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}^* \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$) si possono definire anche altri prodotti semidiretti:

$$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \rtimes_\varphi \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

Rimane il problema di verificare se danno o meno due gruppi isomorfi.

Esempio 1.84 (Gruppi di ordine pq)
Sia $|G| = pq$, per il Teorema Di Cauchy esistono $x, y \in G$ tali che $\operatorname{ord} x = q$, $\operatorname{ord} y = p$, assumiamo (WLOG) $q > p$, allora si ha che:

$$H = \langle x \rangle \triangleleft G$$

poiché $[G : H] = p$, con p più piccolo primo che divide $|G|$. Alternativamente si può vedere che H è caratteristico in G poiché è l'unico sottogruppo di quell'ordine; se $H' < G$ e $|H'| = q$, se fosse $H \neq H'$, allora $H \cap H' = \{e\}$ e quindi:

$$|HH'| = \frac{|H||H'|}{|H \cap H'|} = \frac{q \cdot q}{1} = q^2 > pq$$

quindi H' non può essere un sottogruppo di G. Si verifica che, detto $K = \langle y \rangle$, le ipotesi del Teorema 1.78 sono soddisfatte:

$$HK = G \qquad H \cap K = \{e\} \qquad H \triangleleft G$$

da ciò segue che ogni gruppo di ordine pq è prodotto semidiretto: $G \cong H \rtimes_\varphi K$.

Per classificare tutti i gruppi di ordine pq bisogna classificare tutti i possibili prodotti semidiretti $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z} \rtimes_{\varphi} \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ a meno di isomorfismo. Osserviamo che un prodotto semidiretto deve avere un'operazione definita da:

$$\varphi : \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \longrightarrow \operatorname{Aut}(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}^* \cong \mathbb{Z}/(q-1)\mathbb{Z}$$

Essendo $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} = \langle y \rangle$ e $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z} = \langle x \rangle$ possiamo scrivere:

$$\varphi : \langle y \rangle \longrightarrow \operatorname{Aut}(\langle x \rangle)(\cong \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}^* \cong \mathbb{Z}/(q-1)\mathbb{Z}) : y \longmapsto \varphi_y$$

dove $\varphi_y : \langle x \rangle \longrightarrow \langle x \rangle : x \longmapsto x^l$ (poiché gli automorfismi di un gruppo ciclico mandano un elemento in una sua potenza, o prodotto se la notazione è additiva). Per definire φ su $\langle y \rangle$ (un dominio ciclico) basta assegnare φ_y con la condizione $\operatorname{ord} \varphi_y \mid \operatorname{ord} y = p$, inoltre, $\varphi_y \in \operatorname{Aut}(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/(q-1)\mathbb{Z} \implies \operatorname{ord} \varphi_y \mid q-1$, quindi $\operatorname{ord} \varphi_y \mid (p, q-1)$. Distinguiamo due casi:

- Se $p \nmid q-1$, si ha che $\operatorname{ord} \varphi_y \mid 1 \implies \varphi_y = id$, dunque l'unico automorfismo possibile di $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$ è l'identità, pertanto si ha un prodotto diretto tra $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$ e quindi esiste ed è unico il gruppo di ordine pq: $\mathbb{Z}/pq\mathbb{Z}$.
- Se $p \mid q-1$, allora o $\operatorname{ord} \varphi_y = 1$ e quindi ancora $\varphi_y = id$; oppure $\operatorname{ord} \varphi_y = p$, e poiché ci sono $p-1$ elementi di ordine p in $\mathbb{Z}/(q-1)\mathbb{Z}$, abbiamo $p-1$ scelte per φ_y che danno un prodotto semidiretto.

Si osserva che $\operatorname{ord}_{\operatorname{Aut}(\langle x \rangle)} \varphi_y = \operatorname{ord}_{\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}^*}(\bar{l})$, in quanto:

$$\varphi_y(x) = x^l \implies (\varphi_y(x))^{k\text{[8]}} = x^{l^k}$$

quindi $\operatorname{ord} \varphi_y = p \iff l^p \equiv 1 \pmod q \iff \operatorname{ord}(\bar{l}) = p$.

Possiamo verificare che le $p-1$ scelte per φ_y danno tutte gruppi isomorfi, quindi se $p \mid q-1$ ci sono esattamente due gruppi di ordine pq a meno di isomorfismo. Detti:

$$G_1 \cong \langle x \rangle \rtimes_{\varphi} \langle y \rangle \qquad \text{e} \qquad G_2 \cong \langle x \rangle \rtimes_{\psi} \langle y \rangle$$

con $\varphi_y(x) = x^l$, $\psi_y(x) = x^{\lambda}$ e $\operatorname{ord}_{\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}^*}(\overline{\lambda}) = \operatorname{ord}_{\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}^*}(\bar{l}) = p$ (necessariamente, per quanto detto sopra è l'unico altro ordine possibile, oltre ad 1), abbiamo $\langle l \rangle = \langle \lambda \rangle$ se e solo se $l = \lambda^r$, con $0 < r < p$. Consideriamo l'applicazione:

$$\mathcal{F} : G_1 \longrightarrow G_2 : x \longmapsto x, y \longmapsto y^r$$

essa definisce un isomorfismo tra i due gruppi G_1 e G_2. Per verificare che la mappa sia effettivamente un isomorfismo, consideriamo le presentazioni dei due gruppi:

$$G_1 = \left\langle x, y \middle| x^q = y^p = e_1, yxy^{-1} = x^l \right\rangle \quad \text{e} \quad G_2 = \left\langle x, y \middle| x^q = y^p = e_2, yxy^{-1} = x^{\lambda} \right\rangle$$

affinché $\mathcal{F}$ sia un isomorfismo, deve rispettare gli ordini dei generatori e verificare che sia preservata la relazione di commutazione su di essi definita; osserviamo che:

$$\mathcal{F}(x^q) = (\mathcal{F}(x))^q = x^q = e_2 \qquad \text{in quanto } x^q = e_2 \text{ in } G_2$$

e anche:

$$\mathcal{F}(y^p) = (\mathcal{F}(y))^p = (y^r)^p = (y^p)^r = e_2 \qquad \text{in quanto } y^p = e_2 \text{ in } G_2$$

[8] In questo caso si intende $\underbrace{\varphi_y \circ \ldots \circ \varphi_y}_{k\text{-volte}}(x)$, da cui l'esponente l^k di x.

ed infine:

$$\mathcal{F}(yxy^{-1}) = \mathcal{F}(x^l)$$

in quanto:

$$\mathcal{F}(yxy^{-1}) = \mathcal{F}(y)\mathcal{F}(x)\mathcal{F}(y^{-1}) = \underbrace{y^r x y^{-r}}_{\in G_2} = (\varphi_y(x))^{r\,[9]} = x^{\lambda^r} = {}^{[10]}x^l = \mathcal{F}(x^l)$$

ciò garantisce che $\mathcal{F}$, ottenuto estendendo l'assegnamento $x \longmapsto x, y \longmapsto y^r$ a tutto il gruppo, è un omomorfismo; si verifica inoltre che è anche una bigezione e quindi è un isomorfismo.

[9] Anche in questo caso si intende la composizione r volte.
[10] Qui stiamo usando l'ipotesi per cui $l = \lambda^r$.

§1.13 Teorema di struttura per i gruppi abeliani finiti

Teorema 1.85 (Teorema Di Struttura Dei Gruppi Abeliani Finiti)
Sia G un gruppo abeliano finito, allora G è prodotto diretto di gruppi ciclici, cioè:

$$G \cong \mathbb{Z}/n_1\mathbb{Z} \times \ldots \times \mathbb{Z}/n_s\mathbb{Z}$$

Inoltre tale scrittura è unica se $n_{i+1} \mid n_i$, $\forall i \in \{1, \ldots, s-1\}$.

Osservazione 1.86 (Schema della dimostrazione) — Sia:

$$G(p) = \{g \in G | \operatorname{ord}(g) = p^k, k \in \mathbb{N}\}$$

$G(p)$ prende il nome di **p-componente** o componente di **p-torsione**. Si osserva che:

- $G(p)$ è un sottogruppo di G perché G è abeliano, dunque:

  $$\operatorname{ord}(xy) \mid [\operatorname{ord}(x), \operatorname{ord}(y)] \qquad \forall x, y \in G$$

  quindi se x ed y hanno per ordine una potenza di p, anche il prodotto ha per ordine una potenza di p, quindi $xy \in G(p)$, ed essendo G finito allora $G(p)$ è un sottogruppo. [a]

- $G(p)$ è un sottogruppo caratteristico di G (ciò segue dal fatto che gli automorfismi conservano l'ordine degli elementi, e quindi $G(p)$ viene mandato in $G(p)$).

[a] Si osserva che le p-componenti sono p-gruppi.

Teorema 1.87 (I gruppi abeliani sono prodotto delle loro p-componenti)
Sia G un gruppo abeliano, con $|G| = n = p_1^{e_1} \ldots p_s^{e_s}$, con i primi $p_i \neq p_j$, $\forall i \neq j$, allora:

$$G \cong G(p_1) \times \ldots \times G(p_s)$$

Inoltre la decomposizione di G come prodotto di p-gruppi di ordine tra loro coprimi è unica.

Teorema 1.88 (I p-gruppi si spezzano come prodotto di p-gruppi ciclici)
Sia G un p-gruppo abeliano. Esistono e sono univocamente determinati $r_1, \ldots, r_s$ tali che $r_1 \geq r_2 \geq \ldots \geq r_t$ [a], per i quali:

$$G \cong \mathbb{Z}/p^{r_1}\mathbb{Z} \times \ldots \times \mathbb{Z}/p^{r_t}\mathbb{Z}$$

[a] L'ordine degli esponenti assicura l'unicità della fattorizzazione.

Segue la dimostrazione del Teorema Di Struttura Dei Gruppi Abeliani Finiti:

Dimostrazione. **Esistenza**: Dato il gruppo G, abeliano e finito, per il Teorema 1.87 si ha:

$$G \cong G(p_1) \times \ldots \times G(p_s)$$

possiamo applicare il Teorema 1.88 ad ognuno dei fattori $G(p_i)$ ed ottenere:

$$G \cong G(p_1) \times \ldots \times G(p_s) \cong$$
$$\cong (\mathbb{Z}/p_1^{r_{1_1}}\mathbb{Z} \times \ldots \mathbb{Z}/p_1^{r_{1_{t_1}}}\mathbb{Z}) \times \ldots \times (\mathbb{Z}/p_s^{r_{s_1}}\mathbb{Z} \times \ldots \mathbb{Z}/p_s^{r_{s_{t_s}}}\mathbb{Z})$$

con $r_{i_1} \geq \ldots \geq r_{i_{t_i}}$. Per il Teorema Cinese del Resto possiamo rimettere assieme i termini formati da primi distinti in modo da mantenere la relazione di divisibilità (e quindi unicità) richiesta dal teorema:

$$\mathbb{Z}/\underbrace{(p_1^{r_{1_1}} \ldots p_s^{r_{s_1}})}_{n_1}\mathbb{Z} \times \ldots \times \mathbb{Z}/\underbrace{(p_1^{r_{1_t}} \ldots p_s^{r_{s_t}})}_{n_t}\mathbb{Z}$$

dove $t = \max\{t_1, \ldots, t_s\}$ e poniamo $r_{i_h} = 0$ se $h > t_i$. Si osserva che, per come abbiamo riscritto la fattorizzazione si ha: $n_t \mid n_{t-1} \mid \ldots \mid n_1$.
Unicità: Segue dall'unicità del Teorema 1.87 e del Teorema 1.88, infatti se ci fossero due decomposizioni di G diverse con ordini che si dividono in catena, ripercorrendo gli isomorfismi, avremmo all'inizio due diverse decomposizioni per $G(p)$ (o per G come prodotto di p-componenti). $\square$

Esempio 1.89

Sia $G \cong \mathbb{Z}/100\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/8\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/15\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/2^2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/5^2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2^3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$, e raggruppando in base all'ordine degli elementi otteniamo i p-sottogruppi:

$$G \cong \underbrace{(\mathbb{Z}/2^3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2^2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})}_{G(2)} \times \underbrace{(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z})}_{G(3)} \times \underbrace{(\mathbb{Z}/5^2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/5\mathbb{Z})}_{G(5)}$$

e per il Teorema Di Struttura possiamo riscrivere il prodotto in ordine decrescente (rimettendo assieme p-gruppi ciclici di ordine massimo):

$$G \cong \mathbb{Z}/(2^3 \cdot 3 \cdot 5^2)\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/(2^2 \cdot 3 \cdot 5)\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

Esempio 1.90

Classificare i gruppi abeliani di ordine 1000. Per fare ciò osserviamo che $1000 = 2^3 \cdot 5^3$, allora:

$$G = G(2) \times G(5)$$

con $|G(2)| = 2^3$, e $|G(5)| = 5^3$ pertanto le p-componenti possono essere scritti come prodotto di gruppi ciclici nei seguenti modi:

$$G(2) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}/2^3\mathbb{Z} \\ \mathbb{Z}/2^2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \\ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \end{cases} \qquad \text{e} \qquad G(5) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}/5^3\mathbb{Z} \\ \mathbb{Z}/5^2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \\ \mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \end{cases}$$

Dunque i gruppi abeliani di ordine 1000 (a meno di isomorfismo) sono $3 \cdot 3 = 9$, in quanto per il Teorema di Struttura abbiamo una fattorizzazione unica come prodotto di gruppi cicli finiti, e per tale fattorizzazione abbiamo 3 scelte per la 2-componente e 3 scelte per la 5-componente.

Dimostriamo ora il Teorema 1.87

Dimostrazione. **Esistenza**: Sia $|G| = n$, con $n = p_1^{e_1} \dots p_s^{e_s}$, procediamo per induzione su s. Nel caso in cui $s = 1$, si ha $|G| = p_1^{e_1} \implies G = G(p_1)$. Supponiamo la tesi vera $\forall m : 2 \leq m < n$, possiamo scrivere $n = mm'$ con $(m, m') = 1$ e $m, m' < n$, allora (in notazione additiva) vogliamo verificare che:

$$G \cong mG \times m'G$$

È facile verificare che $mG, m'G < G$ (basta vedere la chiusura per l'operazione), ed essendo G abeliano si ha anche $mG, nG \triangleleft G$; si osserva inoltre che, essendo $(m, m') = 1$, allora $\exists h, k \in \mathbb{Z}$:

$$mh + m'k = 1 \implies m(gh) + m'(gk) = g \qquad \forall g \in G \implies G \subseteq mG + m'G$$

il contrario è ovvio, dunque:

$$mG + m'G = G$$

Inoltre, sia $x \in mG \cap m'G$, ovvero $x = mg = m'g'$, allora si osserva che $m'x = m'mg = ng = 0$ e $mx = mm'g' = ng' = 0$, dunque:

$$\operatorname{ord}(x) \mid m \qquad \text{e} \qquad \operatorname{ord}(x) \mid m' \implies \operatorname{ord}(x) \mid (m, m') = 1 \implies x = 0$$

Quindi $mG \cap m'G = \{e\}$, pertanto sono verificate ipotesi del Teorema 1.72, dunque è vero che $G \cong mG \times m'G$. Osserviamo che:

$$mG = G_{m'} = \{g \in G | m'g = 0\} \qquad \text{e} \qquad m'G = G_m = \{g \in G | mg = 0\}$$

Verifichiamo (WLOG) $m'G = G_m$ mostrando la doppia inclusione tra insiemi; $m'G \subseteq G_m$, ovvero $m'x \in G_m$, perché $mm'x = nx = 0$, viceversa, preso $x \in G_m$, ovvero $mx = 0$, per quanto visto sopra abbiamo che:

$$\underbrace{mx}_{=0} h + m'kx = x \implies x = m'(kx) \implies x \in m'G$$

quindi $G_m \subseteq m'G \implies m'G = G_m$. Pertanto possiamo scrivere:

$$G \cong G_m \times G_{m'}$$

Poiché $|G_m|, |G_{m'}| < |G|$, perché G_m contiene tutti e soli gli elementi di G di ordine che divide m, inoltre $G_m \neq \{0\}$ (per Cauchy, dato che $1 < m < n$), quindi $G_{m'} \lneq G$ e viceversa. Possiamo quindi applicare l'ipotesi induttiva e scrivere:

$$G_m = \prod_{i \in I} G(p_i) \qquad \text{e} \qquad G_{m'} = \prod_{j \in J} G(p_j)$$

con $I \cup J = \{1, \ldots, s\}$ e $I \cap J = \emptyset$ (poiché $(m, m') = 1$).
Unicità: La scrittura come prodotto di p-componenti è unica, perché se G fosse anche isomorfo ad altri p-gruppi:

$$G \cong H_1 \times \ldots \times H_n \qquad \text{con } H_i \ p_i\text{-gruppo e } H_i < G$$

allora $H_i \subseteq G(p_i)$ (in quanto $G(p_i)$ contiene tutti gli elementi di ordine potenze di p_i), ma:

$$|G| = |H_1| \ldots |H_s| = |G(p_1)| \ldots |G(p_s)| \implies {}^{11}|H_i| = |G(p_i)| \qquad \forall i \in \{1, \ldots, s\}$$

quindi segue che $H_i = G(p_i)$, $\forall i \in \{1, \ldots, s\}$. □

Lemma 1.91

Sia G un p-gruppo abeliano e sia x_1 un elemento di ordine massimo in G, preso $\overline{x} \in {}^{G}\!/_{\langle x_1 \rangle}$ esiste $y \in \pi^{-1}_{\langle x_1 \rangle}(\overline{x}) : \operatorname{ord}_G(y) = \operatorname{ord}_{G/\langle x_1 \rangle}(\overline{x})$, ovvero preso un elemento nel quoziente, esiste sempre un elemento nella sua fibra con lo stesso ordine.

Dimostrazione. Nelle ipotesi in cui siamo, sia $\pi^{-1}_{\langle x_1 \rangle}(\overline{x}) = \pi^{-1}_{\langle x_1 \rangle}(x + \langle x_1 \rangle)$, dunque l'elemento $y \in \pi^{-1}(\overline{x})$ che cerchiamo è della forma:

$$y = x + a x_1$$

Sappiamo che $\pi_{\langle x_1 \rangle}(y) = \pi_{\langle x_1 \rangle}(x) = \overline{x}$ (stiamo considerando due elementi nella stessa classe laterale); dato che il quoziente è ancora un p-gruppo, sia $p^r = \operatorname{ord}_{\langle x_1 \rangle}(\pi_{\langle x_1 \rangle}(y)) = \operatorname{ord}_{\langle x_1 \rangle}(\overline{x}) \mid \operatorname{ord}_G(y)$ (per le proprietà di omomorfismo), possiamo scegliere y (scegliendo a[12]) in modo che il suo ordine sia esattamente p^r (dalla divisibilità precedente sappiamo che p^r divide il suo ordine):

$$(p^r y =) p^r x + p^r a x_1 = 0 \iff p^r x = -p^r a x_1$$

dove essendo $\operatorname{ord}_{\langle x_1 \rangle}(\overline{x}) = p^r$ allora $p^r x \in \langle x_1 \rangle$ (ovvero la sua proiezione modulo $\langle x_1 \rangle$, sta nella classe laterale banale) dunque $p^r x = b x_1$. Per ipotesi avevamo assunto che x_1 ha ordine massimo, chiamiamolo p^{r_1}, deve essere che $r \leq r_1$, ma:

$$0 = p^{r_1} x \iff {}^{13}p^{r_1 - r} p^r x = 0 \iff p^{r_1 - r} b x_1 = 0$$

e l'ultima uguaglianza è vera se e solo se $p^{r_1} \mid p^{r_1 - r} b$ (essendo $\operatorname{ord}_G(x_1) = p^{r_1}$), dunque se e solo se $p^r \mid b \implies b = p^r b_1$. Infine, scegliendo $a = -b_1$ e sostituendo nell'espressione iniziale, si ha:

$$p^r y = p^r x - p^r b_1 x_1 = b x_1 - \underbrace{p^r b_1}_{=b} x_1 = 0$$

pertanto $y = x - b_1 x_1 \in G$ realizza la proprietà richiesta. □

[11] Ciò deriva dal fatto che per coprimalità tra gli altri fattori $|G(p_i)|$ divide $|H_i|$, dunque vale anche la divisibilità inversa tra gli ordini.
[12] Infatti x_1 è fissato per ipotesi, mentre x è fissato perché determinato da $\overline{x}$, sempre per ipotesi.
[13] Abbiamo moltiplicato e diviso per p^r.

Dimostriamo ora il Teorema 1.88:

Dimostrazione. **Esistenza**: Sia G un p-gruppo, $|G| = p^n$, proviamo la tesi per induzione su n. Per $n = 1$ si ha che $|G| = p \implies G \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, e quindi la tesi è verificata. Supponiamo la tesi vera per $1 \leq m < n$ e proviamola per n; sia $x_1 \in G$ un elemento di ordine massimo, $\mathrm{ord}(x_1) = p^{r_1}$:

- Se $r_1 = n$, allora G è ciclico $\implies G \cong \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$.
- Se $r_1 < n$, poiché G è abeliano si ha $\langle x_1 \rangle \lhd G$, quindi possiamo considerare ${}^{G}\!/\!_{\langle x_1 \rangle}$ che ha ordine $p^{n-r_1} < p^n$, dunque vale l'ipotesi induttiva ed il gruppo quoziente può essere fattorizzato come prodotto di gruppi ciclici:

$$ {}^{G}\!/\!_{\langle x_1 \rangle} \cong \langle \overline{x_2} \rangle \times \ldots \times \langle \overline{x_t} \rangle \text{ [14]} $$

sia $\mathrm{ord}(\overline{x_i}) = p^{r_i}$, e supponiamo di aver scritto il prodotto diretto in modo ordinato, con $r_2 \geq \ldots \geq r_t$. Consideriamo la proiezione al quoziente:

$$ \pi : G \longrightarrow {}^{G}\!/\!_{\langle x_1 \rangle} \cong \langle \overline{x_2} \rangle \times \ldots \times \langle \overline{x_t} \rangle \text{ [15]} $$

per il Lemma 1.91 esistono $x_2, \ldots, x_t \in G$ tali che $\mathrm{ord}_G(x_i) = \mathrm{ord}_{G/\langle x_1 \rangle}(\overline{x_i}) = p^{r_i}$. Vogliamo mostrare allora che:

$$ H = \langle x_2, \ldots, x_t \rangle \cong \langle x_2 \rangle \times \ldots \times \langle x_t \rangle $$

ovvero che il sottogruppo di G finitamente generato da $x_2, \ldots, x_t$ è isomorfo al prodotto diretto dei singoli sottogruppi ciclici generati dai medesimi elementi. Consideriamo di nuovo la proiezione al quoziente modulo $\langle x_1 \rangle$, ma ristretta ad H:

$$ \pi_{|H} : H \longrightarrow {}^{G}\!/\!_{\langle x_1 \rangle} \cong \langle \overline{x_2} \rangle \times \ldots \times \langle \overline{x_t} \rangle : a_2x_2 + \ldots + a_tx_t \longmapsto (a_2\overline{x_2}, \ldots, a_t\overline{x_t}) $$

è un isomorfismo, infatti π è un omomorfismo, è surgettivo (in quanto si possono mandare tutti i generatori x_i di H nelle t-uple di generatori di $G/\langle x_1 \rangle$); per l'iniettività si osserva che gli elementi del nucleo sono del tipo:

$$ \pi(a_2x_2 + \ldots + a_tx_t) = (a_2\overline{x_2}, \ldots, a_t\overline{x_t}) = (0, \ldots, 0) \iff a_i\overline{x_i} = 0 \quad \forall i \in \{2, \ldots, t\} $$

cioè se e solo se $\mathrm{ord}_{G/\langle x_1 \rangle}(\overline{x_i}) =$ [16]$p^{r_i} \mid a_i$, $\forall i \in \{2, \ldots, t\}$. Segue che $\pi_{|H}$ è un isomorfismo e si ha:

$$ H \cong \langle \overline{x_2} \rangle \times \ldots \times \langle \overline{x_t} \rangle \cong \langle x_2 \rangle \times \ldots \times \langle x_t \rangle $$

Dove l'ultimo isomorfismo deriva dal fatto che abbiamo scelto elementi di ordini uguali, che quindi generano gli stessi gruppi ciclici a meno di isomorfismo. Mostriamo che $G \cong \langle x_1 \rangle \times H (\cong \langle x_2 \rangle \times \ldots \times \langle x_t \rangle)$ e per farlo verifichiamo che le ipotesi del Teorema 1.72 siano soddisfatte.
Per mostrare che l'intersezione è banale, consideriamo un elemento in quest'ultima, ovvero un elemento che può essere scritto come:

$$ a_1x_1 = a_2x_2 + \ldots + a_tx_t $$

[14] Dunque si ha $|\langle \overline{x_2} \rangle \times \ldots \times \langle \overline{x_t} \rangle| = p^{n-r_1}$.
[15] L'isomorfismo tra i due gruppi è quello che manda $(G/\langle x_1 \rangle \ni) \, \overline{g} = a_2\overline{x_2} + \ldots + a_t\overline{x_t}$ (poiché $G/\langle x_1 \rangle$ è finito è anche finitamente generato) in $(a_2\overline{x_2}, \ldots, a_t\overline{x_t}) (\in \langle \overline{x_2} \rangle \times \ldots \times \langle \overline{x_t} \rangle)$.
[16] Qui stiamo usando ancora il Lemma 1.91

applicando π alle due scritture si ha:

$$\overline{0} = a_2\overline{x_2} + \ldots + a_t\overline{x_t} \iff (a_2\overline{x_2}, \ldots, a_t\overline{x_t}) = (\overline{0}, \ldots, \overline{0})$$

in quanto $G/\langle x_1\rangle \cong \prod_{i=2}^{t}\langle\overline{x_i}\rangle$, dunque l'unica possibilità di annullare la somma scritta è che $a_i \equiv 0 \pmod{p^{r_1}}$ (ovvero a_i è multiplo dell'ordine di $\overline{x_i}$), $\forall i \in \{2, \ldots, t\}$, da ciò segue che anche nel gruppo di partenza $a_i = 0$ e quindi $a_1x_1 = 0$, pertanto $\langle x_1\rangle \cap H = \{0\}$. Per mostrare che $\langle x_1\rangle + H = G$, osserviamo che $\langle x_1\rangle + H \subseteq G$ e che la sua cardinalità è:

$$|\langle x_1\rangle + H| = \frac{|\langle x_1\rangle||H|}{|\langle x_1\rangle \cap H|} = \frac{p^{r_1}\cdot p^{n-r_1}}{1} = p^n$$

Le ipotesi sono soddisfatte e quindi $G \cong \langle x_1\rangle \times H \cong \langle x_1\rangle \times \ldots \times \langle x_t\rangle$.

<u>Unicità</u>: Sia $|G| = p^n$ e procediamo ancora per induzione su n. Per $n = 1$ segue sempre $G \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ e quindi la tesi è verificata. Supponiamo la tesi vera per $m < n$ e proviamola per n; sia:

$$G \cong \mathbb{Z}/p^{r_1}\mathbb{Z} \times \ldots \times \mathbb{Z}/p^{r_t}\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/p^{k_1}\mathbb{Z} \times \ldots \times \mathbb{Z}/p^{k_s}\mathbb{Z}$$

dove supponiamo $r_1 \geq \ldots \geq r_t$ e $k_1 \geq \ldots \geq k_s$. Deve essere necessariamente che $t = s$, perché, considerando:

$$G_p = \{g \in G | pg = 0\}$$

con G_p gruppo caratteristico (poiché gli isomorfismi conservano gli ordini degli elementi) e quindi:

$$G_p \cong (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^t \cong (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^s \implies t = s$$

Quindi le lunghezze delle fattorizzazioni sono uguali, per concludere ci basta utilizzare l'ipotesi induttiva al gruppo pG (con $|pG| = p^{n-t}$):

$$pG \cong \frac{p\mathbb{Z}}{p^{r_1}\mathbb{Z}} \times \ldots \times \frac{p\mathbb{Z}}{p^{r_t}\mathbb{Z}} \cong \mathbb{Z}/p^{r_1-1}\mathbb{Z} \times \ldots \times \mathbb{Z}/p^{r_t-1}\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/p^{k_1-1}\mathbb{Z} \times \ldots \times \mathbb{Z}/p^{k_t-1}\mathbb{Z}$$

quindi pG ha decomposizione unica (per ipotesi induttiva), da cui:

$$r_1 - 1 = k_1 - 1, \ldots, r_t - 1 = k_t - 1 \iff r_1 = k_1, \ldots, r_t = k_t$$

□

Osservazione 1.92 — Il Lemma 1.91 non vale in generale per quozienti qualsiasi, ad esempio:

$$\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}\big/\langle p\rangle \cong \frac{\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}}{\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}} \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$$

e con la proiezione:

$$\pi : \mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z} \longrightarrow \frac{\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}}{\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}} \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} : 1 \longmapsto \overline{1}$$

con $\overline{1}$ che ha ordine p nel gruppo di arrivo, mentre:

$$\pi^{-1}(\overline{1}) = \{1 + kp\}_{k=1,\ldots,p-1}$$

con $1 + kp$ che ha ordine p^2, $\forall k : 1 \leq k \leq p$, dunque stiamo quozientando per un elemento che non ha ordine massimo; nelle condizioni del lemma, invece, stiamo quozientando per un elemento di ordine massimo.

§1.14 Teorema di Sylow

Osservazione 1.93 — Dato un gruppo G finito cosa possiamo dire dell'esistenza di elementi e sottogruppi di un certo ordine? Riepiloghiamo di seguito i principali risultati visti:

- $H \leqslant G \implies |H| \mid |G|$ (Teorema Di Lagrange).
- $\forall p$ primo tale che $p \mid |G|$, $\exists x \in G : \text{ord}_G(x) = p$ (Teorema Di Cauchy).
- Se G è ciclico, $\forall d \mid |G|$, $\exists x \in G : \text{ord}_G(x) = d$ (dalla definizione di gruppo ciclico).
- G è ciclico se e solo se $d = |G|$ (esiste $x \in G$ tale che $d = \text{ord}_G(x)$).
- Se G è abeliano $\forall d \mid |G|$, $\exists H \leqslant G$ tale che $|H| = d$ (Lemma Di Ranieri).

L'ultimo fatto può essere ricavato (alternativamente) dal Teorema di Struttura, infatti:

$$G = G_{p_1} \times \ldots \times G_{p_r}$$

con $|G| = p_1^{e_1} \ldots p_r^{e_r}$, se $d = p_1^{a_1} \ldots p_r^{a_r}$, bisogna verificare che per ogni i esiste $H_{p_i} \leqslant G_{p_i}$ tale che $|H_{p_i}| = p^{a_i}$. Poiché:

$$G = \mathbb{Z}/p^{n_1}\mathbb{Z} \times \ldots \mathbb{Z}/p^{n_s}\mathbb{Z} \qquad \text{con} \sum n_i = e$$

possiamo costruire sottogruppi di ogni ordine [17]; inoltre, dato che G è abeliano il prodotto di sottogruppi è un sottogruppo:

$$H_{p_1} \ldots H_{p_r} < H$$

e inoltre:

$$H_{p_1} \ldots H_{p_r} \cong H_{p_1} \times \ldots \times H_{p_r}$$

poiché $H_{p_i} \cap H_{p_j} = \{e\}$, dunque:

$$|H_{p_1} \ldots H_{p_r}| = \prod |H_{p_i}| = \prod p_i^{a_i} = d$$

e quindi otteniamo il sottogruppo di ordine d voluto.

Osservazione 1.94 — Se G non è abeliano e $d \mid |G|$ non è detto che G abbia sottogruppi di ordine d.

[17] Ad esempio $|H_p| = p^{72}$, preso $G_p = \mathbb{Z}/p^{30}\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/p^{30}\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/p^{30}\mathbb{Z}$, può essere ottenuto come $H_p = \mathbb{Z}/p^{30}\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/p^{30}\mathbb{Z} \times p^{18}\mathbb{Z}/p^{30}\mathbb{Z}$.

Esempio 1.95 ($\mathcal{A}_4$ non contiene sottogruppi di ordine 6)

Sappiamo che $|\mathcal{A}_4| = 4!/2 = 12$, se $\exists H < \mathcal{A}_4$ di ordine 6, allora $H \triangleleft \mathcal{A}_4$; per Cauchy $\exists x \in H : \text{ord}(x) = 2$, con $x = (a\ b)(c\ d)$, deve essere quindi che:

$$\mathcal{C}\ell_{\mathcal{A}_4}(x) \subset H$$

poiché $H \triangleleft \mathcal{A}_4$ e per definizione è unione di classi di coniugio in $\mathcal{A}_4$. Sappiamo che:

$$\mathcal{C}\ell_{\mathcal{A}_4}(x) = \{(1\ 2)(3\ 4), (1\ 3)(2\ 4), (1\ 4)(2\ 3)\}$$

Visto che $|\mathcal{C}\ell_{\mathcal{A}_4}((a\ b)(c\ d))| = 3$, allora $\mathcal{C}\ell_{\mathcal{A}_4}((a\ b)(c\ d)) = \mathcal{C}\ell_{S_4}((a\ b)(c\ d))$, dunque se $H \triangleleft \mathcal{A}_4 \implies H \supset \{e, (1\ 2)(3\ 4), (1\ 3)(2\ 4), (1\ 4)(2\ 3)\} = V$ [a], allora $V < H$, ma $4 \nmid 6 \implies$ assurdo.

[a] V prende il nome di **gruppo di Klein** o **Klein 4-group**.

Lemma 1.96

Sia G un p-gruppo e $H \lneq G$, allora $H \lneq N_G(H)$.

Dimostrazione. Essendo G un p-gruppo abbiamo che $|G| = p^n$. Procediamo per induzione su n. Se $n = 0$ non c'è niente da dimostrare. Se $n > 0$ consideriamo due casi:

- Se $Z(G) \nsubseteq H$, dato che $H \cup Z(G) \subseteq N_G(H)$, abbiamo che $\emptyset \neq Z(G) \setminus H \subseteq N_G(H) \setminus H$ da cui la tesi.
- Se $Z(G) \subseteq H$ osserviamo che $Z(G)$ è normale in G e che $Z(G)$ non è banale perché G è un $p-$gruppo, dunque possiamo considerare ${}^{G}\!/_{Z(G)}$ di ordine strettamente minore all'ordine di G. Sia $\pi : G \longrightarrow {}^{G}\!/_{Z(G)}$ la mappa di proiezione al quoziente. Per ipotesi induttiva $N_{G/Z(G)}\left({}^{H}\!/_{Z(G)}\right)$ contiene strettamente ${}^{H}\!/_{Z(G)}$, quindi per il teorema di corrispondenza si ha che anche le loro controimmagini tramite π rispettano un contenimento stretto (perché si preservano gli indici). Sempre per corrispondenza $\pi^{-1}\left(N_{G/Z(G)}\left({}^{H}\!/_{Z(G)}\right)\right) = H$, quindi basta mostrare che $\pi^{-1}\left(N_{{}^{G}\!/_{Z(G)}}\left({}^{H}\!/_{Z(G)}\right)\right) \subseteq N_G(H)$, e questo deriva dal fatto che se $g \in \pi^{-1}\left(N_{G/Z(G)}\left({}^{H}\!/_{Z(G)}\right)\right)$ allora $gHg^{-1} \subseteq HZ(G) = H$.[18]

$\square$

Definizione 1.97. Dato G un gruppo finito e p un primo, tali che $|G| = p^n m$, con $p^n \parallel |G|$[19] e $n \geq 1$ e $(m, p) = 1$, allora un sottogruppo di G di ordine p^n prende il nome di **p-sottogruppo di Sylow** (**p-Sylow**).[20]

[18] Dimostrazione proposta da Francesco Sorce.
[19] Il simbolo $\parallel$ indica la divisibilità esatta, ovvero p^n è la massima potenza di p che divide $|G|$.
[20] I p-sottogruppi di Sylow possono anche essere pensati come p-sottogruppi di ordine massimale.

Teorema 1.98 (Teorema Di Sylow)
Sia G un gruppo finito, con $|G| = p^n m$, con p primo, $n \geq 1$ e $(m, p) = 1$ [a], allora:

(1) $\forall \alpha : 0 \leq \alpha \leq n$, $\exists H \leqslant G : |H| = p^\alpha$. (Esistenza)

(2) $\forall \alpha : 0 \leq \alpha \leq n-1$, ogni sottogruppo di ordine p^α è contenuto in un sottogruppo di ordine $p^{\alpha+1}$. In particolare, ogni p-sottogruppo è contenuto in un p-sottogruppo di Sylow. (Inclusione)

(3) Due qualunque p-sottogruppi di Sylow di G sono coniugati (quindi tutti i p-sottogruppi di ordine massimale sono isomorfi). (Coniugio)

(4) Sia n_p il numero di p-sottogruppi di Sylow di G, allora: (Numero)

$$n_p \mid |G| \qquad \text{e} \qquad n_p \equiv 1 \pmod p \qquad \text{e} \qquad n_p = [G : N_G(S)]^b$$

[a] Ovvero $p^n \parallel |G|$, o anche $\nu_p(|G|) = n$ (dove con ν_p intendiamo la valutazione p-adica).
[b] Con S ci si riferisce a un qualsiasi p-Sylow, per un p fissato.

Dimostrazione. Dimostriamo tutte le affermazioni del teorema:

(1) Dimostriamo che $\forall \alpha : 0 \leq \alpha \leq n$ esiste almeno un sottogruppo di ordine p^α; sia $\mathcal{M} = \{X \subset G | \#X = p^\alpha\}$, allora:

$$|\mathcal{M}| = \binom{|G|}{|X|} = \binom{p^n m}{p^\alpha} = \frac{p^n m (p^n m - 1) \dots (p^n m - p^\alpha + 1)}{p^\alpha (p^\alpha - 1) \dots (p^\alpha - p^\alpha + 1)} \text{ [21]}$$

Possiamo riscrivere il prodotto dei termini nel modo seguente:

$$\prod_{i=0}^{p^\alpha - 1} \frac{p^n m - i}{p^\alpha - i} = p^{n-\alpha} m \prod_{i=1}^{p^\alpha - 1} \frac{p^n m - i}{p^\alpha - i}$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo raccolto il primo termine, $p^{n-\alpha}m$, e lo abbiamo portato fuori dalla produttoria.
Osserviamo a questo punto che $p^{n-\alpha}$ è la più grande potenza di p che divide $|\mathcal{M}|$[22], infatti, si osserva che $p \nmid \prod_{i=1}^{p^\alpha-1} \frac{p^n m - i}{p^\alpha - i}$, cioè $\forall \in \{1, \dots, p^\alpha - 1\}$ si ha che $p \nmid \frac{p^n m - i}{p^\alpha - i}$, come si osserva infatti:

$$\nu_p(p^n m - i) = \nu_p(p^\alpha - i) = \nu_p(i)$$

dunque, se $p \nmid i \implies p^n m - i$ e $p^\alpha - i$ non sono divisibili per p; se fosse $i = p^k j$, con $(j, p) = 1$, allora $p^\alpha - i = p^\alpha - p^k j = p^k \underbrace{(p^{\alpha-k} - j)}_{\text{non divisibile per } p}$, con $k < \alpha$, (analogamente per $p^n m - i$), per quanto abbiamo detto deve essere necessariamente che:

$$p^{n-\alpha} \parallel |\mathcal{M}|$$

ovvero $p^{n-\alpha}$ è l'esatta potenza di p che divide $|\mathcal{M}|$. Consideriamo $M \in \mathcal{M}$, allora $gM \in \mathcal{M}$, $\forall g \in G$, dunque possiamo considerare l'azione:

$$\phi : G \longrightarrow S(\mathcal{M}) : g \longmapsto \varphi_g$$

[21] Si osserva che abbiamo semplificato al numeratore e al denominatore il termine $(p^n m - p^\alpha)!$.
[22] O anche $p^{n-\alpha} \parallel |\mathcal{M}|$, o ancora $\nu_p(|\mathcal{M}|) = n - \alpha$.

dove $\varphi_g : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M} : M \longmapsto gM$ è una bigezione. Data l'azione ϕ sappiamo che:

$$\mathcal{M} = \dot{\bigcup_{i=1}^{s}} \operatorname{Orb}(M_i) \implies |\mathcal{M}| = \sum_{i=1}^{s} |\operatorname{Orb}(M_i)| = \sum_{i=1}^{s} \frac{|G|}{|\operatorname{St}(M_i)|}$$

unendo ciò a quanto detto si ha che $p^{n-\alpha} \parallel \sum_{i=1}^{s} \frac{|G|}{|\operatorname{St}(M_i)|}$, quindi non tutte le orbite possono essere divisibili per una potenza maggiore di $p^{n-\alpha}$, ovvero esiste almeno un i tale per cui $p^{n-\alpha+1} \nmid |\operatorname{Orb}(M_i)|$(ovvero non può essere diviso per una potenza più grande di quanto detto), da ciò segue: $p^{n-\alpha+1} \nmid |\operatorname{Orb}(M_i)| = \frac{|G|}{|\operatorname{St}(M_i)|} = \frac{p^n m}{|\operatorname{St}(M_i)|}$, pertanto deve essere necessariamente che:

$$p^\alpha \mid |\operatorname{St}(M_i)| = t$$

cioè, affinché il rapporto non sia divisibile per p^α, al denominatore deve esserci una potenza di p maggiore o uguale ad α. D'altra parte, sia $x \in M_i$, la funzione:

$$\varphi_x : \operatorname{St}(M_i) \longrightarrow M_i : y \longmapsto yx$$

è iniettiva[23], dunque $t = |\operatorname{St}(M_i)| \leq |M_i| = p^\alpha$, segue quindi $t = p^\alpha$, pertanto $\operatorname{St}(M_i)$ è il sottogruppo di ordine p^α cercato.

(2) Sia S un p-sottogruppo di Sylow di G, con $|S| = p^n$, e sia $H \leqslant G$, con $|H| = p^\alpha$; consideriamo l'insieme ${}^{G}\!/\!_{S} = X$ dato dalle classi laterali di S in G, allora:

$$|X| = [G : S] = \frac{p^n m}{p^n} = m$$

Consideriamo l'azione di H su X data da:

$$\varphi : H \longrightarrow S(X) : h \longmapsto \varphi_h$$

con $\varphi_h : X \longrightarrow X : gS \longmapsto hgS$ bigezione; per la formula delle classi si ha:

$$m = |X| = \sum_{i=1}^{r} |\operatorname{Orb}(g_i S)| = \sum_{i=1}^{r} \frac{|H|}{|\operatorname{St}(g_i S)|} = \sum_{i=1}^{r} p^{a_i}$$

(essendo p-gruppi). Poiché per ipotesi $p \nmid m$, allora esiste i tale che $a_i = 0$ (dunque c'è un 1 nella fattorizzazione che impedisce la divisibilità di m per p) $\implies \operatorname{Orb}(g_i S) = \{g_i S\} \implies \operatorname{St}(g_i S) = H$ (ovvero per tale i si ha una classe laterale $g_i S$ la cui orbita è solo se stessa, e quindi il suo stabilizzatore è tutto H). Da ciò segue che $\forall h \in H$:

$$hg_i S = g_i S \iff hg_i \in g_i S \iff h \in g_i S g_i^{-1} \iff H \subset g_i S g_i^{-1}$$

dove $|g_i S g_i^{-1}| = |S|$ dunque $g_i S g_i^{-1}$ è un p-Sylow ed H di ordine p^α è contenuto in un p-Sylow. Questo dimostra il punto (3), ovvero due p-Sylow di G sono coniugati, infatti la relazione trovata vale per ogni α ed in particolare prendendo $|H| = p^n \implies H \leqslant g_i S g_i^{-1}$ ma i due sottogruppi hanno lo stesso ordine, quindi $H = g_i S g_i^{-1}$; pertanto, tutti i p-Sylow per ogni p sono coniugati tra loro in G.
Per completare la dimostrazione del punto (2) utilizziamo il risultato del Lemma 1.95, considerando $|H| = p^\alpha$, con $\alpha \leq n - 1$ e $H \lneq S$ (stiamo supponendo che

[23] Si vede che $\varphi_x(y) = \varphi_x(z) \iff yx = zx \iff y = z$.

H stia in S), dunque $H \lneq N_S(H)$ [24], sia ora $\frac{N_S(H)}{H}$, esso è un p-gruppo non banale e per il Teorema di Cauchy esiste una classe laterale $\overline{x}(= xH)$ di ordine p, infine, per il Teorema di Corrispondenza [25], $\pi_H^{-1}(\langle\overline{x}\rangle)$ è un sottogruppo di $N_S(H)$ che contiene H (sempre per il Teorema Di Corrispondenza) ed ha ordine $p^{\alpha+1}$ (poiché stiamo considerando la controimmagine di un sottogruppo con p elementi, ciascuno dei quali fatto da classi laterali di p^α elementi, dunque la cardinalità della controimmagine si ottiene moltiplicando la fibra di ciascun elemento, che appunto ha ordine p^α, per il numero di elementi p).

(4) Sia n_p il numero dei p-sottogruppi di Sylow, per quanto detto al punto (3) i p-sottogruppi di Sylow sono tutti coniugati, dunque per ciò che abbiamo visto sul numero di coniugi rispetto all'azione di coniugio si ha $n_p = |\mathcal{C}\ell(S)| = [G : N_G(S)]$, da cui:

$$n_p = \frac{|G|}{|N_G(S)|} \implies |G| = n_p|N_G(S)| \implies n_p \mid |G|$$

Sia X l'insieme dei p-Sylow di G, consideriamo l'azione di coniugio:

$$\phi : S \longrightarrow S(X) : s \longmapsto \varphi_s$$

con $\varphi_s : X \longrightarrow X : H \longmapsto sHs^{-1}$ bigezione; ϕ ha un'unica orbita banale, ovvero quella del gruppo S, $\mathrm{Orb}(S) = \{S\}$, infatti, per ogni altra orbita si ha:

$$\mathrm{Orb}(H) = \{sHs^{-1}|s \in S\} = \{H\} \iff sHs^{-1} = H \qquad \forall s \in S$$

ovvero:

$$S \subset N_G(H)$$

ma sappiamo anche che $H \lneq N_G(H)$, pertanto si deve avere che:

$$HS < N_G(H)$$

(poiché S normalizza H il prodotto di sottogruppi da un sottogruppo), ma questo è assurdo se $S \neq H$, perché avremmo:

$$|SH| = \frac{|S||H|}{|S \cap H|} = \frac{p^n \cdot p^n}{p^k}\,{}^{26} = p^{2n-k} \nmid |G|$$

Quindi esiste un'unica orbita banale e applicando la formula delle classi otteniamo:

$$n_p = |X| = \sum_{i=1}^{r} \underbrace{|\,\mathrm{Orb}(H_i)|}_{p^{a_i} \neq 1} + \underbrace{|\,\mathrm{Orb}(S)|}_{=1} = pf + 1 \qquad f \in \mathbb{Z}$$

o equivalentemente $n_p \equiv 1 \pmod p$.

□

[24] Si noti che abbiamo preso il normalizzatore di H in S.
[25] Tra i sottogruppi di $\frac{N_S(H)}{H}$ ed i sottogruppi di $N_S(H)$ che contengono H.
[26] $k < n$.

Corollario 1.99

Sia G un gruppo abeliano finito, $\forall p$ primo tale che $p \mid |G|$, $G(p)$ è l'unico p-Sylow di G. Inoltre G è il prodotto diretto dei suoi p-Sylow:

$$G \cong G(p_1) \times \ldots \times G(p_r)$$

con $|G| = \prod p_i^{e_i}$.

Dimostrazione. □

Esempio 1.100 (Classificazione dei gruppi di ordine 12)

Poiché $12 = 2^2 \cdot 3$, per Sylow, sappiamo che $\exists P_2, P_3$, con P_2 2-Sylow, P_3 3-Sylow e $|P_2| = 4$, $|P_3| = 3$; abbiamo che $P_2 \cap P_3 = \{e\}$ poiché p-gruppi distinti, dunque $G = P_2P_3$, in quanto:

$$|P_2P_3| = \frac{|P_2||P_3|}{|P_2 \cap P_3|} = \frac{4 \cdot 3}{1} = 12$$

inoltre, almeno uno tra P_2 e P_3 è normale. Se $P_3 \triangleleft G$ allora abbiamo un sottogruppo normale; se $P_3 \ntriangleleft G$, allora osserviamo che, per quanto detto al punto (4) del Teorema Di Sylow, possiamo avere solo che $n_3 = 1, 4$, ma non essendo P_3 normale n_3 non può essere 1, dunque $n_3 = 4$; da ciò segue che in G ci sono 8 elementi di ordine 3[a] e 4 elementi di ordine diverso da 3, che quindi formano l'unico 2-Sylow, equivalentemente $n_2 = 1$, e quindi P_2 è normale. Osserviamo che supponendo invece $P_2 \ntriangleleft G$, si arriva simmetricamente a concludere che $P_3 \triangleleft G$, pertanto uno dei due sottogruppi di Sylow è necessariamente normale e in entrambi i casi sono soddisfatte le ipotesi del Teorema 1.78, segue che G è un prodotto semidiretto tra P_2 e P_3. Studiamo separatamente i due casi.

[a] $4 \cdot 3 - 4 = 8$.

Esempio 1.101 ($G \cong P_2 \rtimes_\varphi P_3$)
Se $P_2 \lhd G$, allora $G \cong P_2 \rtimes_\varphi P_3$. P_2 ha ordine 4, dunque è $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ o $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, mentre P_3 è necessariamente $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$; nel primo caso abbiamo:

$$\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \rtimes_\varphi \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \qquad \text{con} \qquad \varphi : \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \longrightarrow \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

in questo caso l'unica possibilità è $[1]_3 \longmapsto id$, dunque il prodotto semidiretto è in realtà sempre un prodotto diretto, dunque il primo gruppo trovato è:

$$\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$$

nel secondo caso abbiamo:

$$(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \rtimes_\varphi \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \qquad \text{con} \qquad \varphi : \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \longrightarrow \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \cong S_3$$

a questo punto, possiamo o mandare $[1]_3 \longmapsto id$ ottenendo il prodotto diretto:

$$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$$

oppure mandare $[1]_3$ in un altro elemento il cui ordine divida 3 (in questo caso uno dei due 3-cicli), dunque abbiamo due scelte per $\varphi([1]_3)$; entrambe le scelte danno origine a due prodotti semidiretti isomorfi[a]. Osserviamo che abbiamo:

$$(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \rtimes_\varphi \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} = G \hookrightarrow S_4$$

infatti, G agisce per coniugio sull'insieme $\{P_3, P_3', P_3'', P_3'''\}$ dei quattro 3-Sylow di G, pertanto abbiamo l'azione transitiva $\phi : G \longrightarrow S(X) \cong S_4$, con $\ker \phi = \{id\}$ (dunque è un'azione fedele). Si verifica facilmente che l'unica possibilità è che G sia isomorfo al gruppo alternante di 4 elementi, dunque abbiamo ottenuto il gruppo:

$$\mathcal{A}_4$$

[a] Come nel caso dei gruppi di ordine pq.

Esempio 1.102 ($G \cong P_3 \rtimes_\varphi P_2$)
Se $P_3 \triangleleft G$, allora $G \cong P_3 \rtimes_\varphi P_2$. Analogamente a quanto visto prima P_2 ha ordine 4, dunque è $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ o $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, e P_3 è $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$. Il primo prodotto che abbiamo è:

$$\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \rtimes_\varphi \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \qquad \text{con} \qquad \varphi : \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \longrightarrow \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

dunque $[1]_4 \longmapsto id, -id$, nel primo caso riotteniamo il prodotto diretto e $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$, nel secondo caso invece otteniamo un prodotto semidiretto che ci dà il gruppo:

$$\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \rtimes_\varphi \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$$

L'ultimo prodotto possibile è:

$$\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \rtimes_\varphi (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \qquad \text{con} \qquad \varphi : \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \longrightarrow \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

se mandassimo tutti gli elementi nell'identità otterremmo un prodotto diretto, alternativamente, riscrivendo $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ come $\langle x \rangle \times \langle y \rangle$ (i cui elementi saranno $\{e, x, y, xy\}$), abbiamo due elementi di ordine 2 che vanno in $-id$ e l'elemento neutro e un altro elemento di ordine 2 che vanno in id. Possiamo dunque costruire tre prodotti semidiretti che danno origine a gruppi isomorfi, supponiamo (WLOG) che:

$$\varphi_x = id \qquad \varphi_y = -id \qquad \varphi_{xy} = -id$$

dunque abbiamo:

$$\langle x \rangle \times \langle y \rangle \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \qquad \text{e} \qquad \langle z \rangle \cong \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$$

possiamo osservare che:

$$\varphi_x(Z) = xzx^{-1} = id(z) = z \implies x \text{ commuta con } z$$

similmente:

$$\varphi_y(z) = yzy^{-1} = -id(z) = -z$$

dunque il sottogruppo generato da y e z è:

$$\left\langle y, z | y^2 = 1, z^3 = 1, yzy^{-1} = z^{-1} \right\rangle \cong D_3$$

quindi il gruppo che si ottiene con i tre prodotti semidiretti è $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times D_3$ (il prodotto diretto deriva dal fatto che x commuta sia con y che con z), ovvero:

$$D_6$$

Abbiamo quindi classificato tutti i gruppi di ordine 12:

$$\mathbb{Z}/12\mathbb{Z} \qquad \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \qquad \mathcal{A}_4 \qquad \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \rtimes_\varphi \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \qquad D_6$$

§1.15 Gruppo dei Quaternioni

Definizione 1.103. Si definisce gruppo dei **quaternioni** il gruppo con la seguente presentazione:

$$Q_8 = \langle i, j | i^4 = 1, i^2 = j^2, ij = j^3 i \rangle$$

Osservazione 1.104 (Ordini di i e j) — Osserviamo che $\text{ord}(i) = 4$, per la definizione che ne abbiamo dato, da ciò si ricava che, essendo $j^2 = i^2$, allora $j^4 = 1 \implies \text{ord}(j) \mid 4$, ciò unito al fatto che:

$$\text{ord}(j^2) = \frac{\text{ord}(j)}{(2, \text{ord}(j))} = \text{ord}(i^2) = 2$$

implica che $\text{ord}(j) = 4$. Dunque abbiamo due gruppi ciclici di ordine 4, $\langle i \rangle$ e $\langle j \rangle$, con $\langle i \rangle \cap \langle j \rangle = \{1, i^2 = j^2\}$.

Dalla presentazione del gruppo, sappiamo che $Q_8 = \langle i \rangle \langle j \rangle$ dunque possiamo stabilire l'ordine:

$$|Q_8| = |\langle i \rangle \langle j \rangle| = \frac{|\langle i \rangle||\langle j \rangle|}{|\langle i \rangle \cap \langle j \rangle|} = \frac{4 \cdot 4}{2} = 8$$

quindi il gruppo dei quaternioni ha 8 elementi, dati da:

$$Q_8 = \{1, i, j, i^2 = j^2, i^3, j^3, ij, i^3 j\}$$

Osservazione 1.105 — Q_8 non è abeliano perché:

$$ij = j^3 i = j^{-1} i \neq ji$$

Osservazione 1.106 — Osserviamo che $\langle i \rangle, \langle j \rangle \triangleleft Q_8$ perché hanno indice 2, inoltre $\langle i^2 \rangle, \langle j^2 \rangle \triangleleft Q_8$ (per verifica diretta).

Ricordando che un sottogruppo di ordine 2 è normale se e solo se è un sottogruppo di $Z(G)$ [27], possiamo osservare che:

Osservazione 1.107 — $\langle i^2 \rangle = Z(Q_8)$, infatti, per quanto detto si deve avere che $\langle i^2 \rangle \leqslant Z(Q_8)$, inoltre Q_8 è un p-gruppo non abeliano, ed essendo $|Q_8| = p^3$ segue che:

$$|Z(Q_8)| = \begin{cases} 1 & \text{assurdo per quanto detto sui p-gruppi} \\ p & \\ p^2 & \text{ma allora } Q_8/Z(Q_8) \text{ ciclico} \implies Q_8 \text{ abeliano} \\ p^3 & \implies Z(Q_8) = Q_8, \text{ assurdo} \end{cases}$$

ovvero $|Z(Q_8)| = 2$ e quindi è proprio $\langle i^2 \rangle$.

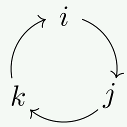
Posto convenzionalmente $ij = k$, gli elementi si possono riscrivere anche come:

$$Q_8 = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$$

con $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $j^3 = -j$, $i^3 j = -k$.

[27] Infatti, preso $H = \{e, h\} \trianglelefteq G$, allora $gHg^{-1} = H$, $\forall g \in G$, ovvero $ghg^{-1} \in H \iff ghg^{-1} = h \iff gh = hg$, $\forall g \in G$, dunque $h \in Z(G)$ (nel caso in cui $ghg^{-1} = e$, allora $h = e$, e ovviamente appartiene al centro), pertanto $H \leqslant Z(G)$.

Osservazione 1.108 (Prodotto in Q_8) — I prodotti tra gli elementi di Q_8 seguono il 3-ciclo:



che percorso in senso orario ci dà i prodotti:

$$ij = k \qquad jk = i \qquad ki = j$$

ed in senso antiorario:

$$ji = -k \qquad ik = -j \qquad kj = -i$$

Le operazioni fatte in questo modo sono equivalenti a quelle che si ottengono con le regole di commutazione della presentazione, ad esempio:

$$k^2 = (ij)^2 = ijij = ijj^3i = i^2$$

Osservazione 1.109 (Ordine degli elementi) — Dunque in Q_8 1 ha ordine 1, -1 ha ordine 2, mentre i, $-i$, j, $-j$, k, $-k$ hanno ordine 4.

Abbiamo visto che Q_8 è un gruppo di ordine 8 non è abeliano, e per quanto detto $Q_8 \ncong D_4$, poiché ha Q_8 ha sei elementi di ordine 4, mentre D_4 ne ha soltanto uno.

Osservazione 1.110 (Sottogruppi di Q_8) — Per quanto riguarda i sottogruppi di Q_8 osserviamo in primis che $\langle -1 \rangle = Z(Q_8)$ ed è caratteristico (perché è il centro oppure perché è l'unico sottogruppo di ordine 2); $\langle i \rangle$, $\langle j \rangle$, $\langle k \rangle$ sono sottogruppi di ordine 4, dunque sono normali. Abbiamo quindi dimostrato che tutti i sottogruppi (includendo ovviamente quelli banali) di Q_8 sono normali.

Concludiamo la discussione su Q_8 osservando che non può essere prodotto semidiretto di due suoi sottogruppi, infatti $\forall H_1, H_2 \leqslant Q_8$ si ha $H_1 \cap H_2 \neq \{1\}$, infatti, l'intersezione contiene sempre il sottogruppo $\{1, -1\}$.

Esercizio 1.111. Dimostrare che $Q_8 \hookrightarrow GL_2(\mathbb{C})$.

Soluzione. □

A questo punto siamo pronti per classificare tutti i gruppi di ordine 8:

Esempio 1.112 (Classificazione dei gruppi di ordine 8)
Distinguiamo innanzitutto i gruppi in base all'abelianità:

- Se G è abeliano, allora per il nel Teorema di Struttura abbiamo che $G \cong G(2)$ e per la 2-componente abbiamo le seguenti possibilità:
$$\mathbb{Z}/8\mathbb{Z} \qquad \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \qquad \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$
- Se G non è abeliano, allora ha almeno un elemento di ordine 4 (se avesse tutti elementi di ordine 2 sarebbe isomorfo a $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3$), sia $a \in G$ tale che $\text{ord}(a) = 4$, allora $\langle a \rangle \triangleleft G$ e:
$$G/_{\langle a \rangle} = \{\langle a \rangle, b\langle a \rangle\} \qquad b \in G \setminus \langle a \rangle$$
dove deve essere $b^2\langle a \rangle = \langle a \rangle$, infatti se fosse $b^2\langle a \rangle = b\langle a \rangle \implies b\langle a \rangle = \langle a \rangle \implies b \in \langle a \rangle$, che è assurdo, dunque:
$$b^2\langle a \rangle = \langle a \rangle \implies b^2 \in \{e, a, a^2, a^3\}$$
ma non può essere che $b^2 = a, a^3$, altrimenti b avrebbe ordine 8, dunque rimangono soltanto i casi $b^2 = 1$ e $b^2 = a^2$.
  (1) Se $a^4 = 1$ e $b^2 = 1$, allora $G = \{1, a, a^2, a^3, b, ba, ba^2, ba^3\}$ da cui (si verificano facilmente le ipotesi del Teorema 1.78) segue:
  $$G \cong \langle a \rangle \rtimes_{\varphi} \langle b \rangle \cong D_4$$
  dove $\varphi : \langle b \rangle \longmapsto \text{Aut}(\langle a \rangle) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} : b \longmapsto \varphi_b$ e $\varphi_b : \langle a \rangle \longmapsto \langle a \rangle : a \longmapsto a^{-1}$ (ovvero $\varphi_b = -id$, se avessimo scelto l'identità avremmo ottenuto uno dei prodotti diretti già visti sopra).
  (2) Se $a^4 = 1$ e $b^2 = a^2$, osserviamo che $bab^{-1} \in \langle a \rangle$ (essendo il generato da a normale in G), inoltre non può essere che $bab^{-1} = 1$ (altrimenti $a = 1$) o $bab^{-1} = a^2$ (poiché il coniugio conserva l'ordine degli elementi) e non piò nemmeno essere che $bab^{-1} = a$ (poiché abbiamo supposto che G non sia commutativo). Pertanto abbiamo necessariamente $bab^{-1} = a^3 \iff ba = a^3b$, da cui segue:
  $$G \cong Q_8$$
  dove l'isomorfismo manda $a \longmapsto i$ e $b \longmapsto j$.

Dunque i gruppi di ordine 8 sono:
$$\mathbb{Z}/8\mathbb{Z} \qquad \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \qquad \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \qquad D_4 \qquad Q_8$$

Esercizio 1.113. Determinare il minimo n tale che $Q_8 \hookrightarrow S_n$.

Soluzione. Osserviamo inizialmente che per il Teorema di Cayley $n \leq 8$ e che per quello di Lagrange l'ordine dell'immagine di Q_8 deve dividere quello di S_n, pertanto $n \geq 4$, dunque abbiamo un numero finito di possibilità:

$$S_4, S_5, S_6, S_7, S_8$$

Se Q_8 si immergesse in S_4, con $|S_4| = 2^3 \cdot 3$, sarebbe un suo 2-Sylow; poiché D_n si immerge sempre in S_n [28], sappiamo che $D_4 \hookrightarrow S_4$, ed in particolare D_4 è un 2-Sylow di S_4, ma ciò significa che Q_8 non è in S_4, poiché non è un coniugato di D_4.
Si ragiona in maniera analoga per S_5, infatti $|S_5| = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$ e $D_4 \subset S_4 \subset S_5$, dunque i due 2-Sylow di S_4 sono isomorfi a quelli di S_5, ed ancora una volta ciò significa che Q_8 non si immerge nel gruppo.
Sia $|S_6| = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5$, detto P_2 un 2-Sylow di S_6, osserviamo che se fosse $Q_8 \hookrightarrow S_6$, dovremmo avere:

$$i \longmapsto \sigma \qquad j \longmapsto \rho \qquad k \longmapsto \sigma\rho = \eta$$

con $\text{ord}(\sigma) = \text{ord}(\rho) = 4$ e $\sigma^2 = \rho^2 = \eta^2$, dove $\text{ord}(\sigma^2) = \text{ord}(\rho^2) = \text{ord}(\eta^2) = 2$. Osserviamo che le permutazioni di ordine 4 in S_6 possono essere soltanto 4-cicli o 4-cicli uniti a 2-cicli, mentre le permutazioni di ordine 2 sono prodotto di trasposizioni (al più tre, essendo in S_6).

Osservazione 1.114 — Osserviamo che una permutazione è un quadrato se e solo se i cicli di lunghezza pari compaiono a coppie. Infatti:

- Se η è un k-ciclo, con k dispari, η è un quadrato di un k-ciclo, ovvero:

$$\eta = \eta^{k+1} = \left(\eta^{\frac{k+1}{2}}\right)^2$$

  Se η è un k-ciclo, con k pari, allora si verifica che:

$$(a_1 \ \dots \ a_k)(b_1 \ \dots \ b_k) = (a_1 \ b_1 \ \dots \ a_k \ b_k)^2$$

- Se $x^2 = (\eta_1 \ \dots \ \eta_2)^2 = \eta_1^2 \dots \eta_s^2$, allora otteniamo cicli di lunghezza dispari e coppie di cicli.

Ad esempio, in S_6, una coppia di 3-cicli può essere sia un quadrato di un ciclo di lunghezza pari, sia il quadrato di altri due 3-cicli:

$$(1\ 2\ 3)(4\ 5\ 6) = (1\ 4\ 2\ 5\ 3\ 6)^2 = ((1\ 2\ 3)(4\ 5\ 6))^2$$

mentre in S_4 una coppia di cicli di lunghezza pari può essere soltanto il quadrato di un 4-ciclo:

$$(1\ 2)(3\ 4) = ((1\ 4\ 2\ 3))^2 = ((1\ 3\ 2\ 4))^2$$

Dunque il fatto che $\sigma^2 = \rho^2 = \eta^2$ hanno ordine 2 (quindi sono fatte da sole trasposizioni) e che sono quadrati (quindi i cicli di lunghezza pari compaiono a coppie), ci dice che le trasposizioni sono prodotti di un numero pari di trasposizioni, pertanto l'unica possibilità è che:

$$\sigma^2 = \rho^2 = \eta^2 = (a\ b)(c\ d)$$

[28] In tal caso infatti basta mandare $x \in D_4$ nella corrispondente permutazione dei vertici.

Risolvendo $x^2 = (1\ 2)(3\ 4)$, otteniamo:

$$x_1 = (1\ 3\ 2\ 4) \qquad x_2 = (1\ 4\ 2\ 3) \qquad x_3 = (1\ 3\ 2\ 4)(5\ 6) \qquad x_4 = (1\ 4\ 2\ 3)(5\ 6)$$

abbiamo quindi 4 soluzioni in S_6, mentre in Q_8 ne avevamo 6, pertanto nemmeno S_6 contiene una copia isomorfa di Q_8.
Q_8 non si immerge nemmeno in S_7 perché i 2-Sylow di S_7 sono isomorfi a quelli di S_6, e quindi siamo nello stesso caso di prima.
Dunque per esclusione deve essere necessariamente che:

$$Q_8 \hookrightarrow S_8 \implies n = 8$$

Per Cayley l'immersione è di Q_8 in $S(Q_8)$, dunque la mappa che realizza ciò è data da:

$$i \longmapsto \varphi_i \qquad \text{con} \qquad \varphi_i : Q_8 \longrightarrow Q_8 : x \longmapsto ix$$

in particolare con la notazione dei cicli abbiamo che l'immagine di φ_i di Q_8 è data da:

$$(1\ i\ \ -1\ i)(j\ k\ \ -j\ \ -k)$$

analogamente per $\varphi_j(Q_8)$:

$$(1\ j\ \ -1\ \ -j)(i\ \ -k\ \ -i\ k)$$

e numerando in qualsiasi ordine gli elementi di Q_8 possiamo scrivere le permutazioni corrispondenti in S_8:

$$i \longmapsto (1\ 2\ 3\ 4)(5\ 6\ 7\ 8) \qquad j \longmapsto (1\ 5\ 2\ 6)(3\ 8\ 4\ 7)$$

$\square$

Esempio 1.115 (Classificazione dei gruppi di ordine 30)

Osserviamo che $|G| = 2 \cdot 3 \cdot 5$ e distinguiamo due casi:

- Se G è abeliano, allora per il Teorema di Struttura $G \cong G(2) \times G(3) \times G(5)$, dunque l'unica possibilità è che il gruppo sia ciclico:
$$G \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/30\mathbb{Z}$$
- Se G non è abeliano, osserviamo che (in generale) $30 = 2d$, con d dispari, dunque G ha un sottogruppo di ordine 15, che è normale in quanto ha indice 2 ed è ciclico, in quanto è un gruppo di ordine pq con $p \nmid q - 1$, pertanto G contiene una copia isomorfa di $\mathbb{Z}/15\mathbb{Z}$. Per Cauchy esiste un elemento di ordine 2 e quindi anche una copia isomorfa a $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ in G (in particolare potevamo prendere direttamente il 2-Sylow), dunque i due gruppi verificano le ipotesi del Teorema 1.78, da cui: [a]
$$G \cong \mathbb{Z}/15\mathbb{Z} \rtimes_\varphi \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$
con:
$$\varphi : \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \longrightarrow \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/15\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/15\mathbb{Z}^* \cong \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}^* \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$$
dove abbiamo che $[1]_2 \longmapsto \varphi_y$, e adottando la notazione moltiplicativa, $\varphi_y : \mathbb{Z}/15\mathbb{Z} \longmapsto \mathbb{Z}/15\mathbb{Z} : \overline{x} \longmapsto \overline{x}^l$, abbiamo $\mathrm{ord}(\varphi_y) \mid 2$, dunque ci sono due possibilità, o $\varphi_y = id$ (quindi $l = 1$), o $\varphi_y^2 = id \implies \varphi_y^2(x) = (x^l)^l = x^{l^2} = x$, da cui segue (essendo x un generatore di $\mathbb{Z}/15\mathbb{Z}$):
$$l^2 \equiv 1 \pmod{15} \implies x \equiv \pm 1, \pm 4 \pmod{15}$$
Dunque, per $l = 1$ otteniamo il prodotto diretto già trovato sopra, per gli altri tre possibili l invece otteniamo 3 gruppi non isomorfi di ordine 30, infatti, per $l = -1$, abbiamo:
$$\varphi_y(x) = x^{-1} \iff yxy^{-1} = x^{-1} \implies \mathbb{Z}/15\mathbb{Z} \rtimes_\varphi \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \cong D_{15}$$
Per $l = 4$ invece si ottiene $D_5 \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ e per $l = -4$ si ottiene $D_3 \times \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ [b], i quali sono gruppi non isomorfi, ad esempio perché hanno centri diversi:
$$Z(D_{15}) = \langle id \rangle \qquad Z(D_5 \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}) = Z(D_5) \times Z(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$$
$$Z(D_3 \times \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$$

[a] La direzione del prodotto semidiretto è data dal fatto che $\mathbb{Z}/15\mathbb{Z}$ è l'unico normale tra i due sottogruppi.

[b] Andrebbe aggiunto il perché ma non è chiarissimo dalle note della Del Corso.

I gruppi di ordine 30 sono quindi:
$$\mathbb{Z}/30\mathbb{Z} \qquad D_{15} \qquad D_5 \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \qquad D_3 \times \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$$

§2 Anelli

§2.1 Riepilogo sugli anelli

Definizione 2.1. Un **anello** è un insieme non vuoto munito di due operazioni $(A, +, \cdot)$ tali che:

- $(A, +)$ è un gruppo abeliano.
- $\cdot$ è associativa.
- Valgono le leggi distributive a destra e sinistra:
$$a(b+c) = ab + ac \qquad \text{e} \qquad (a+b)c = ac + bc \qquad\qquad \forall a, b, c \in A$$

Esempio 2.2 (Anelli)
Esempi di anelli:

- $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.
- Dato un anello A, $A[x]$, l'insieme dei polinomi a coefficienti in A è un anello.
- $M_{m\times m}(K)$.
- $\text{End}(G) = \text{Hom}(G, G)$, con G gruppo abeliano e le operazioni di somma e composizione.

Riepiloghiamo brevemente [29] le definizioni che riguardano gli anelli: [30]

Definizione 2.3. Un anello A si dice **commutativo** se l'operazione $\cdot$ è commutativa.

Definizione 2.4. Un anello A si dice **con identità** se esiste $1 \in A$ elemento neutro per il prodotto.

Definizione 2.5. Un anello $(A, +, \cdot)$ si dice **campo** se $(A \setminus \{0\}, \cdot)$ è un gruppo abeliano.

Definizione 2.6. Un anello $(A, +, \cdot)$ si dice **corpo** se $(A \setminus \{0\}, \cdot)$ è un gruppo.

Definizione 2.7. Dato un anello A, $x \in A$ si dice **divisore di zero** se $\exists y \in A$, $y \neq 0$ tale che $xy = yx = 0$.

Definizione 2.8. Dato un anello A, $x \in A$ si dice **nilpotente** se $\exists n \in \mathbb{N}$ tale che $x^n = 0$.

Definizione 2.9. Dato un anello A, $x \in A$ si dice **invertibile** se $\exists y \in A$ tale che $xy = yx = 1$.

Definizione 2.10. Un anello A si dice **dominio d'integrità** se:
$$D(A) = \{x \in A |\, x \text{ è un divisore di } 0\} = \{0\}$$

Definiamo inoltre l'insieme degli elementi invertibili di A:
$$A^* = \{x \in A |\, x \text{ è invertibile}\}$$
e dei nilpotenti:
$$\mathcal{N} = \{x \in A |\, x \text{ è nilpotente}\}$$

[29] In caso di dubbi sulle definizioni si può fare riferimento alle dispense di Aritmetica dove sono state trattate più ampiamente.
[30] Per convenzione adotteremo lo 0 per indicare l'elemento neutro rispetto all'operazione + e l'1 per indicare l'elemento neutro rispetto all'operazione $\cdot$.

Esercizio 2.11. Calcolare i divisori di zero, gli invertibili ed i nilpotenti di:

$$\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$$

Soluzione. □

Proposizione 2.12

Dato A un anello commutativo con identità:

(1) $(A^*, \cdot)$ è un gruppo abeliano.

(2) $A^* \cap D(A) = \emptyset$.

(3) Se A è un anello finito, allora $A = D(A) \cup A^*$. In particolare, un dominio d'integrità finito è un campo.

Dimostrazione. Proviamo le affermazioni:

(1) Per provare che $(A^*, \cdot)$ è un gruppo abeliano, è sufficiente verificare le proprietà richieste dalla definizione:

  (a) Chiusura: osserviamo che $\forall x, y \in A^*$, allora $\exists x^{-1}y^{-1} \in A$, pertanto $xy \in A^*$, poiché $y^{-1}x^{-1} \in A^*$.

  (b) Associatività: poiché $A^* \subseteq A$, allora, essendo A associativo rispetto al $\cdot$, allora anche gli elementi di un suo qualsiasi sottoinsieme saranno associativi tra loro.

  (c) Elemento Neutro: $1 \in A$, infatti, l'inverso di 1 è se stesso, quindi 1 è invertibile.

  (d) Inverso: Segue per la stessa definizione di A^* che ogni suo elemento debba avere inverso moltiplicativo nel gruppo, $\forall x \in A, \exists x^{-1} \in A$:

$$x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = 1 \qquad \forall x \in A$$

  (e) L'abelianità segue immediatamente dall'abelianità di A (infatti $A^* \subset A$, dunque l'abelianità vale in particolare per gli elementi di A^*).

(2) Supponiamo per assurdo che $D(A) \cap A^* \neq \emptyset$, e consideriamo $x \in D(A) \cap A^*$, poiché $x \in D(A)$, allora $\exists z \in A, z \neq 0$, tale per cui:

$$xz = zx = 0$$

d'altra parte, poiché $x \in A^*$, allora $\exists y$ per cui:

$$xy = yx = 1$$

da cui segue:

$$(zx)y = z(xy) \implies 0 \cdot y = z \implies z = 0$$

ma ciò è assurdo, pertanto $D(A) \cap A^*$ è vuoto.

(3) Il contenimento $D(A) \cup A^* \subseteq A$ è ovvio in quanto i primi due sono sottoinsiemi del primo, ci resta da verificare quello opposto. Sia $x \in A$, se $x \in D(A)$ abbiamo concluso, se $x \in A \setminus D(A)$, allora possiamo definire l'omomorfismo di gruppi:

$$\varphi_x : A \longrightarrow A : a \longmapsto xa$$

con:

$$\ker \varphi_x = \{y \in A | \varphi_x(y) = xy = 0\} = \{0\}$$

infatti, non essendo x un divisore di zero, l'unica possibilità, in base all'annullamento del prodotto è che $y = 0 \implies xy = 0$. Poiché $|A| < +\infty$ l'omomorfismo è anche surgettivo, dunque è una bigezione, pertanto $1 \in \mathrm{Im}\varphi_x \implies \exists a \in A$ tale che $\varphi_x(a) = xa = 1 \implies x \in A^*$.

□

Definizione 2.13. Dato $B \subset A$ non vuoto, si dice che B è un **sottoanello** di A se è chiuso rispetto alle operazioni $+$ e $\cdot$ ristrette a B.

Definizione 2.14. Dato $I \subset A$, con A anello commutativo, si dice che A è un **ideale** di A se:

- $(I, +) < (A, +)$.
- Vale la **proprietà di assorbimento** a destra e sinistra:[31]

$$aI \subset I \qquad \text{e} \qquad Ia \subset I \qquad \forall a \in A$$

Osservazione 2.15 — Per verificare che un sottoinsieme di un anello commutativo con identità è un ideale ci basta verificare soltanto che $(I, +)$ è chiuso per l'operazione $+$ e che valga la proprietà di assorbimento, infatti, da ciò segue che $(-1)a \in I$, dove (-1) esiste in A è un gruppo rispetto al $+$.

Da questo momento in poi, anche se non specificato, assumiamo di star operando sempre in anelli commutativi con identità.

Esempio 2.16 (Ideali)
Gli ideali vanno ricercati tra i sottogruppi di un anello, ad esempio:

- Considerando l'anello $\mathbb{Z}$, abbiamo gli ideali dati da $\{n\mathbb{Z}\}_{n \in \mathbb{N}}$, infatti:

$$xn\mathbb{Z} \subset n\mathbb{Z} \qquad \forall x \in \mathbb{Z}$$

  ed essendo $\mathbb{Z}$ abeliano, abbiamo un ideale.
- I sottogruppi $\{0\}$ (ideale **banale**) e A (ideale **improprio**) sono ideali dell'anello A.

Esercizio 2.17. Dato l'anello delle matrici $A = M_{n \times n}(K)$ dimostrare che non ha ideali bilateri diversi da $\{0\}$ e A.

Soluzione. Sia $J \subseteq A$ un ideale non banale e $M \in J$ non nulla. Osserviamo che l'Algoritmo di Gauss applicato ad M può essere espresso come moltiplicazione di M a sinistra e a destra per opportuni elementi di A. Dunque, se $k = \mathrm{rnk}\, M > 0$, la matrice

$$N = \left(\begin{array}{c|c} I_k & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$$

[31] Se A non è un anello commutativo e $(I, +) < (A, +)$, possono valere separatamente le proprietà di assorbimento, nel caso in cui valga $aI \subset I$, $\forall a \in A$, si parla di **ideale sinistro**, mentre nel caso $Ia \subset I$, $\forall a \in A$, si parla invece di **ideale destro**.

appartiene a J. Allora anche

$$N' = N \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right)$$

è elemento di J. Coniugando N' per matrici di permutazione di base troviamo nell'ideale matrici diagonali con diagonale nulla tranne per un 1 nella i-esima riga per ogni i, e sommando tutte queste matrici otteniamo $I_n \in J$, ovvero $J = A$.[32] □

Definizione 2.18. Dato un sottoinsieme non vuoto di un anello $S \subset A$, si definisce **ideale generato** da S in A:

$$(S) := \left\{ \sum_{i=1}^{n} a_i s_i \middle| a_i \in A, s_i \in S, n \in \mathbb{N} \right\}$$

Osserviamo che se $S = \{x\}$ possiamo definire l'ideale generato da un elemento:

$$(x) = \{ax | a \in A\} = Ax$$

in tal caso l'ideale prende anche il nome di **ideale principale**.

Proposizione 2.19

L'ideale generato da un sottoinsieme S di un anello A è un ideale.

Dimostrazione. Per verificare che un ideale generato sia effettivamente un ideale, bisogna verificare che sia un sottogruppo del gruppo abeliano $(A, +)$ e che valga la proprietà di assorbimento (bilaterale in questo caso, poiché stiamo operando nel caso di anelli commutativi). Presi $x, y \in S$, ovvero della forma:

$$x = \sum_{i=1}^{n} a_i s_i \qquad \text{e} \qquad y = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \sigma_j \qquad a_i, \alpha_j \in A \qquad s_i, \sigma_j \in S$$

si osserva che:

$$x + y = \sum_{i=1}^{n} a_i s_i + \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \sigma_j \in (S)$$

dunque I è chiuso per la somma. Infine, per ogni $a \in A$ si ha:

$$ax = a \sum_{i=1}^{n} a_i s_i = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{a a_i}_{\in A} s_i \in (S)$$

dunque (S) è un ideale. □

Esempio 2.20 (Ideali generati)

Alcuni esempi di ideali generati possono essere:

- $n\mathbb{Z} = (n)$, con $n \in \mathbb{Z}$.
- Dato $K \subset F$ e $\alpha \in F$ algebrico su K, sia $\mu_\alpha(x) \in K[x]$ il polinomio minimo di α, sappiamo che:
$$(\mu_\alpha(x)) = \{p(x) \in K[x] | p(\alpha) = 0\}$$

[32] Dimostrazione proposta da Davide Ranieri.

§2.2 Operazioni tra ideali

Proposizione 2.21 (Operazioni tra ideali)
Dato A un anello commutativo e $I, J \subset A$ ideali, abbiamo che:

- $I \cap J$ è un ideale.
- $I + J = (I, J) = \{i + j | i \in I, j \in J\}$ è un ideale.
- $IJ = (\{xy | x \in I, y \in J\})$ è un ideale.
- $\sqrt{I} = \{x \in A | \exists n \in \mathbb{N} : x^n \in I\}$ è un ideale. In particolare $\sqrt{0} = \mathcal{N}$ è un ideale.
- $(I : J) = \{x \in A | xJ \subseteq I\}$ è un ideale.

Dimostrazione. Verifichiamo tutte le affermazioni:

- $I \cap J$ è un sottogruppo di A e, $\forall x \in I \cap J$ si ha:
$$ax \in I \qquad \text{e} \qquad ax \in J \qquad \forall a \in A$$
dunque $I \cap J$ assorbe e quindi è un ideale (bilatero in quanto abbiamo supposto l'anello commutativo).

- Dato $I + J = \{i + j | i \in I, j \in J\}$, presi $x, y \in I + J$, ovvero:
$$x = i_1 + j_1 \qquad \text{e} \qquad y = i_2 + j_2 \implies x + y = \underbrace{(i_1 + i_2)}_{\in I} + \underbrace{(j_1 + j_2)}_{\in J} \in I + J$$
inoltre, $\forall a \in A$ si ha che:
$$ax = \underbrace{ai_1}_{\in I} + \underbrace{aj_1}_{\in J} \in I + J \qquad \forall x \in I + J$$
dunque $I+J$ è un ideale. Verifichiamo che $I+J = (I, J)$; osserviamo che ovviamente:
$$\forall i + j \in I + J, i + j \in (I, J) \implies I + J \subseteq (I, J)$$
per verificare l'altro contenimento bisogna verificare che $I, J \subset I + J$ e da queste inclusioni e dal fatto che $I + J$ è un ideale segue che $I + J$ contiene il più piccolo ideale di A che contiene sia I che J (e quindi contiene il loro generato). Osserviamo innanzitutto che in generale:
$$(S) = \bigcap_{\substack{S \subseteq X \subseteq A \\ X \text{ ideale}}} X$$
dove l'intersezione è appunto il più piccolo ideale di A che contiene S. Dobbiamo dimostrare ora quanto detto; osserviamo che (S) è contenuto nell'intersezione in quanto è uno dei termini di quest'ultima; il contenimento opposto segue dal fatto che $\forall x \in S$ si ha $x = \sum a_i s_i \in X$ (poiché X è un ideale che contiene S, per come l'abbiamo definito), d'altra parte, per vedere che un ideale generato (S) è contenuto a sua volta in un ideale $\mathcal{I}$ di A, basta vedere che $S \subset \mathcal{I}$ (ed è ciò che abbiamo appena fatto con S). A questo punto, tornando all'inclusione iniziale, ci basta

verificare che, come abbiamo anticipato, $I+J$ contenga sia I che J; essendo $0 \in J$ abbiamo:

$$I \subset I+J$$

infatti basta considerare sempre $j=0$ per ottenere tutti gli elementi di I; in maniera simmetrica si dimostra la stessa cosa per J, dunque $I, J \subset I+J \implies (I,J) \subset I+J \implies I+J=(I,J)$.

- $IJ = (\{xy | x \in I, y \in J\})$ è un ideale per definizione.
- Verifichiamo che $\sqrt{I} = \{x \in A | x^n \in I, n \in \mathbb{N}\}$ è un ideale, presi $x, y \in \sqrt{I}$, ovvero $x^n, y^m \in I$, $n, m \in \mathbb{N}$, vogliamo provare che $x+y \in \sqrt{I}$ (ovvero che esiste $d \in \mathbb{N}$ tale che $(x+y)^d \in I$), osserviamo che:

$$(x+y)^{n+m} = \sum_{i=0}^{n+m} \binom{n+m}{i} x^i y^{m+n-i}$$

dove $\forall i \in \{0, \ldots, m+n\}$ si ha che $i \geq n \implies x^i \in I$, oppure che $n+m-i \geq m \implies y^{n+m-i} \in I$, dunque tutti i termini di $(x+y)^{n+m}$ stanno in I e quindi $x+y \in \sqrt{I}$. Osserviamo che $\forall a \in A$ si che:

$$(ax)^n = a^n \underbrace{x^n}_{\in I} \in I \implies ax \in \sqrt{I}$$

- Dato $(I : J) = \{x \in A | xJ \subseteq I\}$ e presi $x, y \in (I : J)$ si ha che:

$$(x+y)J = \underbrace{xJ}_{\subseteq I} + \underbrace{yJ}_{\subseteq I} \implies x+y \in (I : J)$$

inoltre, $\forall a \in A$ abbiamo:

$$axJ = a(xJ) \subseteq aI \subseteq I \implies ax \in (I : J) \qquad \forall x \in (I : J)$$

□

Osservazione 2.22 ($I \cup J$) — $I \cup J$ in generale non è un ideale.

Osservazione 2.23 ($IJ \subset I \cap J$) — Osserviamo che $IJ \subset I \cap J$, infatti presi $x \in I$ e $y \in J$ si ha dalla proprietà di assorbimento che:

$$\underbrace{x}_{\in I} \underbrace{y}_{\in A} \in I \qquad \text{e} \qquad \underbrace{x}_{\in A} \underbrace{y}_{\in J} \in J \implies xy \in I \cap J$$

Osservazione 2.24 ($IJ = I \cap J$) — Se $I+J=A$, allora $IJ = I \cap J$. Dall'ipotesi possiamo dedurre che:

$$i + j = 1$$

vogliamo verificare che $\forall x \in I \cap J$ si ha $x \in IJ$ (dall'osservazione precedente sappiamo già che $IJ \subset I \cap J$, quindi stiamo verificando il contenimento opposto), possiamo scrivere:

$$x \cdot 1 = x(i+j) = \underbrace{xi}_{\in IJ} + \underbrace{xj}_{\in IJ} \in IJ$$

dove l'appartenenza segue dal fatto che stiamo considerando la somma di due elementi in IJ (che è un gruppo additivo).

Esempio 2.25 (Operazioni tra ideali in $\mathbb{Z}$)
Osserviamo che presi ad esempio gli elementi nell'intersezione degli ideali $m\mathbb{Z}$ e $n\mathbb{Z}$, questi sono i multipli comuni sia ad m che ad n in $\mathbb{Z}$, ovvero:

$$m\mathbb{Z} \cap n\mathbb{Z} = [m, n]\mathbb{Z}$$

Mentre, il prodotto tra i due ideali contiene gli interi multipli si di m che di n:

$$m\mathbb{Z} \cdot n\mathbb{Z} = mn\mathbb{Z}$$

Osserviamo poi che la somma è data da tutti gli interi multipli del loro M.C.D.:

$$m\mathbb{Z} + n\mathbb{Z} = (m, n)\mathbb{Z}$$

infatti, per l'identità di Bézout, si ha:

$$m\mathbb{Z} + n\mathbb{Z} = \{am + bn | a, b \in \mathbb{Z}\} = \{dx | x \in \mathbb{Z}\}$$

Consideriamo ora $n = p_1^{e_1} \dots p_r^{e_r}$, possiamo considerare:

$$\sqrt{n\mathbb{Z}} = p_1 \dots p_r\mathbb{Z}$$

poiché:

$$\sqrt{n\mathbb{Z}} = \{x \in \mathbb{Z} | x^k \in n\mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z}\} = \{x \in \mathbb{Z} | n \mid x^k, k \in \mathbb{Z}\}$$

ma $n \mid x^k \implies p_i \mid x^k$, $\forall i \in \{1, \dots, r\}$, ovvero $p_1 \dots p_r \mid x \implies x \in p_1 \dots p_r\mathbb{Z}$. Viceversa $x = p_1 \dots p_r m \in \sqrt{n\mathbb{Z}}$ perché, detto $e = \max e_i$:

$$x^e = p_1^e \dots p_r^e m^e = ny \in n\mathbb{Z}$$

quindi ad esempio:

$$\sqrt{100\mathbb{Z}} = 10\mathbb{Z}$$

Infine, osserviamo che:

$$(m\mathbb{Z} : n\mathbb{Z}) = \frac{m}{(m, n)}\mathbb{Z}$$

quindi ad esempio:

$$(75\mathbb{Z} : 18\mathbb{Z}) = \frac{75}{(75, 18)} = 25\mathbb{Z}$$

questo poiché:

$$(75\mathbb{Z} : 18\mathbb{Z}) = \{x \in \mathbb{Z} | 18x\mathbb{Z} \subset 75\mathbb{Z}\} = 25\mathbb{Z}$$

infatti $18x\mathbb{Z} \subset 75\mathbb{Z} \iff 75 \mid 18x \iff 25 \mid 6x \iff 25 \mid x$.

Proposizione 2.26 (Proprietà ideali propri)
Valgono i seguenti fatti:

(1) Dato $I \subset A$ ideale, I è un **ideale proprio** ($I \subsetneq A$) se e solo se $I \cap A^* = \emptyset$.

(2) A è un campo se e solo se gli unici ideali di A sono $\{0\}$ e A.

Dimostrazione. Dimostriamo singolarmente i fatti:

(1) Se $I \cap A^* = \emptyset$, poiché vale sempre che $1 \in A^*$, allora c'è almeno un elemento di A che non sta nell'ideale, quindi $I \subsetneq A$. Viceversa, sia I ideale proprio e supponiamo $x \in I \cap A^*$, allora x è invertibile, dunque $\exists y \in A$ tale che $xy = 1$, ma:

$$1 = \underbrace{x}_{\in I} \underbrace{y}_{\in A} \in I \implies a \cdot 1 \in I^{33} \qquad \forall a \in A \implies A \subset I$$

che è assurdo in quanto avevamo supposto $I \subset A$, dunque $I \cap A^* = \emptyset$.

(2) A è un campo se e solo se $A^* = A \setminus \{0\}$, ma per il punto (1) l'unico elemento fuori da A^* è 0, dunque $I = \{0\}$ e $I = A$ sono gli unici ideali che possiamo avere.

□

[33] In pratica se c'è l'identità in I c'è esattamente ogni elemento dell'anello che contiene l'ideale.

§2.3 Anelli quoziente e omomorfismi di anelli

Definizione 2.27. Dati A e B anelli, $f : A \longrightarrow B$ è un **omomorfismo di anelli** se:

- $f(a_1 + a_2) = f(a_1) + f(a_2)$, $\forall a_1, a_2 \in A$.
- $f(a_1 a_2) = f(a_1) f(a_2)$, $\forall a_1, a_2 \in A$.

Osservazione 2.28 — Se A e B sono anelli commutativi con identità in genere si richiede anche:

$$f(1_A) = 1_B$$

poiché tale condizione non è già implicata da altro; ad esempio:

$$f(a) = f(1_A a) = f(1_A) f(a) \implies f(a) - f(1_A) f(a) = (1_B - f(1_A)) f(a) = 0$$

ma non abbiamo la legge di cancellazione in quanto non è detto che A sia un dominio d'integrità. Se B è un dominio e $f(a) \neq 0$, allora, da quanto detto sopra segue $f(1_A) = 1_B$, ma se $f(A) \subset D(B)$ non è detto che $f(1_A) = 1_B$.

Definizione 2.29. Sia A un anello e $I \subseteq A$ un suo ideale, il gruppo quoziente $\left({}^{A}\!/\!{}_{I}, + \right)$ ha anche una struttura di anello con l'operazione:

$$(a + I) \cdot (b + I) \overset{\text{def}}{=} ab + I$$

Osservazione 2.30 — Si verifica facilmente che l'operazione è ben definita, infatti, presi:

$$a + I = a' + I \qquad \text{e} \qquad b + I = b' + I$$

segue:

$$(a' + I) \cdot (b' + I) = a'b' + I = (a + I)(b + I) + I = ab + I$$

Osservazione 2.31 — Si verifica facilmente che $\left({}^{A}\!/\!{}_{I}, +, \cdot \right)$ è un anello.

Osservazione 2.32 — Possiamo definire una proiezione all'anello quoziente:

$$\pi_I : A \longrightarrow {}^{A}\!/\!{}_{I} : a \longmapsto a + I$$

con π_I omomorfismo di anelli surgettivo e $\ker \pi_I = I$.

Proposizione 2.33
Gli ideali sono tutti e soli i nuclei degli omomorfismi di anello definiti su A.

Dimostrazione. Sia $\varphi : A \longrightarrow B$ un omomorfismo di anelli, allora $\ker \varphi$ è un ideale di A, infatti $\ker \varphi < A$ perché φ è in particolare un omomorfismo di gruppi, inoltre, $\forall a \in A$ si ha che:

$$ax \in \ker \varphi \qquad \forall x \in \ker \varphi$$

in quanto $\varphi(ax) = \varphi(a)\varphi(x) = \varphi(a) \cdot 0 = 0$; dunque i nuclei degli omomorfismi di anelli sono ideali. Viceversa, tutti gli ideali sono nuclei degli omomorfismi di proiezione al quoziente π_I. $\square$

Teorema 2.34 (Teorema di Omomorfismo di Anelli)
Dati A, B anelli e $f : A \longrightarrow B$ omomorfismo (di anelli), esiste un unico omomorfismo (di anelli) φ che fa commutare il diagramma:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & B \\ A/_{\ker f} \arrow[ur, dashed, "\varphi"'] & \end{tikzcd}$$

cioè tale che $f = \varphi \circ \pi$, con φ iniettivo e $\mathrm{Im}\varphi = \mathrm{Im}f$.

Dimostrazione. Per il Teorema di Omomorfismo i gruppi, essendo f in particolare un omomorfismo di gruppi, posto $I = \ker f$, sappiamo che esiste ed è unico l'omomorfismo:

$$\varphi : A/_{I} \longrightarrow B$$

tale che $f = \varphi \circ \pi_I$, con φ è iniettivo e $\mathrm{Im}\varphi = \mathrm{Im}f$. Non ci resta altro da fare che verificare che φ è anche un omomorfismo di anelli:

$$\varphi((a + I)(b + I)) = \varphi(ab + I) = f(ab) \qquad \forall a, b \in A$$

viceversa:

$$f(ab) = f(a)f(b) = \varphi(a + I)\varphi(b + I) \qquad \forall a, b \in I$$

dove la seconda uguaglianza è vera per ipotesi. $\square$

Lemma 2.35 (Gli ideali si comportano come i sottogruppi normali con gli omomorfismi)
Dato $f : A \longrightarrow B$ omomorfismo di anelli vale che:

(1) $\forall J \subset B$ ideale si ha $f^{-1}(J)$ è un ideale di A.

(2) Se f è surgettiva $\forall I \subset A$ ideale si ha $f(I)$ ideale di B

Dimostrazione. Dimostriamo le proposizioni:

(1) Sappiamo già che $f^{-1}(J)$ è un sottogruppo di A, verifichiamo che valga la proprietà di assorbimento, ovvero:

$$af^{-1}(J) \subset f^{-1}(J) \qquad \forall a \in A$$

sia $x \in f^{-1}(J) \implies f(x) \in J$, allora:

$$\underbrace{f(a)}_{\in B}\underbrace{f(x)}_{\in J} = f(ax) \in J \qquad \forall x \in f^{-1}(J)$$

da cui $ax \in f^{-1}(J)$.

(2) Sappiamo che $f(I)$ è un sottogruppo di B, verifichiamo l'assorbimento, sia $b \in B$, poiché f è surgettiva esiste $a \in A$ tale che $b = f(a)$, dunque:

$$bf(x) = f(a)f(x) = f(\underbrace{ax}_{\in I}) \in f(I)$$

□

Teorema 2.36 (Teorema di Corrispondenza tra Ideali)
Sia $I \subset A$ un ideale e π_I la proiezione all'anello quoziente modulo I, π_I induce una corrispondenza biunivoca tra gli ideali di ${}^{A}\!/_{I}$ e gli ideali di A che contengono I, e tale corrispondenza preserva l'ordinamento.

Dimostrazione. Per il Teorema di Corrispondenza tra sottogruppi abbiamo già la bigezione tra questi, dobbiamo tuttavia verificare che restringendo la corrispondenza agli ideali questa associ ancora un ideale di A ad un ideale di ${}^{A}\!/_{I}$ e viceversa, cioè l'immagine e la controimmagine di un ideale mediante π_I è ancora un ideale (in particolare, per la Corrispondenza tra Sottogruppi sappiamo già che le controimmagini contengono l'ideale per il quale si quozienta). Siano:

$$X = \{J \subseteq A\,\text{ideale} | I \subset J\} \qquad \text{e} \qquad Y = \left\{\mathcal{J} \subset {}^{A}\!/_{I} \,\middle|\, \mathcal{J} \text{ ideale}\right\}$$

per il Lemma 2.35, essendo π_I surgettivo, si ha che le immagini e la controimmagini via π_I:

$$J \longmapsto \pi_I(J) \qquad \text{e} \qquad \mathcal{J} \longmapsto \pi_I^{-1}(\mathcal{J})$$

sono ideali, e ciò conclude la dimostrazione. □

Esempio 2.37
Se nel Lemma 2.35 f non fosse surgettiva, allora l'immagine di un ideale non sarebbe un ideale, ad esempio presa:

$$f : \mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Q} : (2) \longmapsto 2\mathbb{Z}$$

con $2\mathbb{Z}$ che non è un ideale di $\mathbb{Q}$ perché $\mathbb{Q}$ è un campo e quindi i suoi ideali sono soltanto $\{0\}$ e $\mathbb{Q}$.

Definizione 2.38. Dato un omomorfismo di anelli $f : A \longrightarrow B$ e un ideale $I \subset A$ definiamo **estensione** di I a B via f l'ideale generato in B da $f(I)$:

$$(f(I)) = f(I)B = IB$$

Definizione 2.39. Dato un omomorfismo di anelli $f : A \longrightarrow B$ e un ideale $J \subset B$ definiamo **contrazione** di J ad A via f l'ideale $f^{-1}(J)$.

Osservazione 2.40 — Gli omomorfismi sono sostanzialmente inclusioni a meno di isomorfismo, conoscendo la corrispondenza tra ideali indotta da π_I osserviamo che:

$$A \hookrightarrow B : I \longmapsto IB$$

che manda ogni ideale nella propria estensione ad un **sovra anello** e:

$$J \longmapsto J \cap A$$

che manda ogni ideale di B nella propria contrazione ad un **sottoanello** fanno si che l'applicazione:

$$\varphi : A \hookrightarrow B \longrightarrow B/J$$

sia tale che:

$$\ker \varphi = \{a \in A | \varphi(a) = a + J = J\} = \{a \in A | a \in J\} = J \cap A = \pi_I^{-1}(J)$$

da cui si ha anche che:

$$\frac{A}{J \cap A} \hookrightarrow B/J$$

per il Primo Teorema di Omomorfismo.

Osservazione 2.41 — Dal Teorema di Omomorfismo di Anelli si deducono anche il secondo ed il terzo teorema di omomorfismo, ovvero:

$$\frac{A/I}{J/I} \cong A/J \qquad \text{e} \qquad \frac{I+J}{J} \cong \frac{I}{I \cap J}$$

dove in entrambi i casi gli isomorfismi sono di anelli.

§2.4 Prodotto diretto di anelli

Definizione 2.42. Dati gli anelli A, B il prodotto cartesiano $A \times B$ può essere dotato di una struttura di anello con le operazioni:

$$(a_1, b_1) + (a_2, b_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2) \quad \text{e} \quad (a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2) = (a_1 \cdot a_2, b_1 \cdot b_2)$$

$\forall a_1, a_2 \in A, \forall b_1, b_2 \in B$, l'insieme $A \times B$ con queste operazioni si dice **prodotto diretto** di anelli.

Teorema 2.43 (Teorema Cinese Del Resto Per Anelli)
Dato A anello commutativo con unità, I, J suoi ideali, allora la mappa di doppia proiezione:

$$f : A \longrightarrow A/_I \times A/_J : a \longmapsto (a + I, a + J)$$

è un omomorfismo di anelli, con $\ker f = I \cap J$. Inoltre, $I + J = A$ se e solo se f è surgettiva, ed in tal caso si ottiene:

$$A/_{IJ} \cong A/_I \times A/_J$$

Dimostrazione. Verifichiamo in primis che f sia un omomorfismo di anelli:

$$f(a+b) = ((a+b)+I, (a+b)+J) = (a+I, a+J)+(b+I, b+J) = f(a)+f(b) \quad \forall a, b \in A$$

dove la terza uguaglianza è assicurata dalla struttura di anello del quoziente; analogamente:

$$f(ab) = (ab + I, ab + J) = (a + I, a + J)(b + I, b + J) = f(a)f(b) \quad \forall a, b \in A$$

Osserviamo ora che:

$$\ker f = \{a \in A | f(a) = (a + I, a + J) = (I, J)\} = \{a \in A | a \in I, a \in J\} = I \cap J$$

Verifichiamo separatamente le due implicazioni della seconda parte del teorema:

- Supponiamo che $I + J = A$, ovvero che esistono i e j tali che $i + j = 1$[34], e verifichiamo che f è surgettiva. Per verificare che f è surgettiva dobbiamo far vedere che:
$$\forall a, b \in A, \exists x \in A : f(x) = (a + I, b + J)$$
per ipotesi sappiamo che $x \in A \implies x \in I + J$ quindi possiamo prendere $x = bi + aj \in A$, per $i \in I$ e $j \in J$, dunque:
$$f(x) = (\underbrace{bi}_{\in I} + aj + I, bi + \underbrace{aj}_{\in J} + J) = (aj + I, bi + J)$$
da cui, osservando che $j = 1 - i$ e $i = 1 - j$ per ipotesi abbiamo:
$$(aj + I, bi + J) = (a(1 - i) + I, b(1 - j) + J) = (a + I, b + J)$$
e pertanto abbiamo ottenuto $f(x) = (a + I, b + J)$.

[34] Poiché l'identità è in $I + J$, allora per la proprietà di assorbimento ogni altro elemento di A è in $I + J$.

- Supponiamo ora che f sia surgettiva e proviamo che $I + J = A$. Se f è surgettiva abbiamo che:
$$\exists i \in A : f(i) = (I, 1 + J)$$
dunque per tale i si ha che:
$$i \in I \qquad \text{e} \qquad i \equiv 1 \pmod{J}$$
da cui si ricava che: $\underbrace{i}_{\in I} = 1 + \underbrace{j}_{\in J} \implies 1 \in I + J \implies I + J = A$.

Per il Primo Teorema di Omomorfismo abbiamo a questo punto che se f è surgettiva (ed equivalentemente $I + J = A$), allora:
$$\frac{A}{\ker f} \cong {}^{A}\!/_{I} \times {}^{A}\!/_{J} \implies \frac{A}{I \cap J} \cong {}^{A}\!/_{I} \times {}^{A}\!/_{J}$$
D'altra parte, per l'Osservazione 2.24, essendo $I + J = A$, allora $I \cap J = IJ$, da cui la tesi:
$${}^{A}\!/_{IJ} \cong {}^{A}\!/_{I} \times {}^{A}\!/_{J}$$
$\square$

Osservazione 2.44 — Per il Teorema Cinese Del Resto tra gruppi sapevamo che:
$$\mathbb{Z}/mn\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \iff (m, n) = 1$$
per il Teorema Cinese Del Resto tra anelli ora sappiamo che:
$$f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$$
con $\ker f = m\mathbb{Z} \cap n\mathbb{Z} = [m, n]\mathbb{Z}$, da cui:
$$\mathbb{Z}/[m, n]\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$$
avevamo visto che f è surgettiva se e solo se $(m, n) = 1$, ed in questo modo $[m, n] = mn$ (o equivalentemente $n\mathbb{Z} + m\mathbb{Z} = (n, m)\mathbb{Z} = \mathbb{Z}$), dunque:
$$\mathbb{Z}/[m, n]\mathbb{Z} = \mathbb{Z}/mn\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$$
pertanto la nuova versione del Teorema Cinese del Resto è una generalizzazione della precedente.

§2.5 Ideali primi e massimali

Definizione 2.45. Sia $(\mathcal{F}, \leqslant)$ un insieme parzialmente ordinato e sia $X \subset \mathcal{F}$ un suo sottoinsieme, diciamo che $M \in \mathcal{F}$ è un **maggiorante** per X se:

$$A \leqslant M \qquad \forall A \in X$$

Definizione 2.46. Sia $(\mathcal{F}, \leqslant)$ un insieme parzialmente ordinato, diciamo che $A \in \mathcal{F}$ è un elemento **massimale** per $\mathcal{F}$ se:

$$\forall B \in \mathcal{F} : A \leqslant B \implies A = B$$

Definizione 2.47. Sia $(\mathcal{F}, \leqslant)$ un insieme parzialmente ordinato, diciamo che $A \in \mathcal{F}$ si dice **massimo** per $\mathcal{F}$ se:

$$\forall B \in \mathcal{F} : B \leqslant A$$

Definizione 2.48. Sia $(\mathcal{F}, \leqslant)$ un insieme parzialmente ordinato, una **catena** di $\mathcal{F}$ è un sottoinsieme di $\mathcal{F}$ totalmente ordinato.

Definizione 2.49. Sia $(\mathcal{F}, \leqslant)$ un insieme parzialmente ordinato, $(\mathcal{F}, \leqslant)$ si dice **induttivo** se ogni catena di $\mathcal{F}$ ammette un maggiorante in $\mathcal{F}$.

Lemma 2.50 (Lemma di Zorn)
Sia $(\mathcal{F}, \leqslant)$ un insieme non vuoto, parzialmente ordinato e induttivo, allora $\mathcal{F}$ contiene elementi massimali.

Osservazione 2.51 — Spesso il Lemma di Zorn viene usato su famiglie $\mathcal{F}$ di ideali ordinati secondo la relazione di inclusione $\subseteq$.

Definizione 2.52. Dato un ideale proprio $I \subsetneq A$, I si dice **primo** se:

$$xy \in I \implies x \in I \lor y \in I \qquad \forall x, y \in A$$

ovvero se ogni volta che contiene un prodotto, contiene uno dei due fattori.

Definizione 2.53. Un ideale I si dice **massimale** se è un elemento massimale della famiglia $\mathcal{F}$ di tutti gli ideali propri di A, ovvero:

$$I \text{ è massimale} \iff \forall J \subsetneq A : I \subseteq J \implies I = J$$

Esempio 2.54 (Ideali primi di $\mathbb{Z}$)
Gli ideali primi di $\mathbb{Z}$ sono (p) con p primo, infatti:

$$xy \in (p) \iff p \mid xy \iff p \mid x \lor p \mid y$$

ovvero se $x \in (p)$ o $y \in (p)$. Se consideriamo invece (m), con m non primo, dunque riducibile $m = ab$, con $1 < a < m$ e $1 < b < m$, allora:

$$ab \in (m) \qquad \text{ma} \quad a \notin (m) \quad \text{e} \quad b \notin (m)$$

dunque (m) non è primo.

Proposizione 2.55 (Proprietà degli Ideali Massimali)
Dato un anello A allora:

(1) Ogni ideale proprio di A è contenuto in un ideale massimale.

(2) Ogni elemento non invertibile di A è contenuto in un ideale massimale.

Dimostrazione. Verifichiamo le affermazioni:

1. Sia $I \subsetneq A$ un ideale proprio e sia $\mathcal{F}$ la famiglia di tutti gli ideali propri che lo contengono:
$$\mathcal{F} = \{J \subsetneq A | I \subseteq J\}$$
osserviamo che $I \in \mathcal{F} \implies \mathcal{F} \neq \emptyset$, inoltre $(\mathcal{F}, \subseteq)$ è induttivo, infatti, detta $\mathscr{C}$ una catena, essa sarà un sottoinsieme di $\mathcal{F}$ totalmente ordinato della forma:
$$\mathscr{C} = \{J_n\}^{35} \subseteq \mathcal{F}$$
allora posta $\bigcup J_n{}^{36} = J \in \mathcal{F}$, verifichiamo che J è maggiorante di $\mathscr{C}$. Si ha che:
   - $\forall J_n \in \mathscr{C} : J_n \subseteq J$, segue ovviamente da come abbiamo definito J, avendolo costruito come l'unione di tutti i J_n.
   - $J \in \mathcal{F}$, poiché $I \subset J_n \subset J$, $\forall J_n \in \mathcal{F}$, e infine J è un ideale proprio, infatti, se per assurdo fosse $1 \in J = \bigcup J_n \implies \exists n$ tale che $1 \in J_n \subsetneq A$ che è assurdo (se un ideale contenesse l'identità del prodotto, allora conterrebbe tutti gli elementi dell'anello).

   Dunque ogni catena $\mathscr{C}$ di $\mathcal{F}$ ammette maggiorante[37], pertanto $\mathcal{F}$ è induttivo e vale il Lemma di Zorn, per il quale la famiglia $\mathcal{F}$ ammette almeno un elemento massimale M.
   Resta da verificare che tale elemento massimale M sia un ideale massimale dell'anello (poiché abbiamo dimostrato che è massimale per la famiglia $\mathcal{F}$ degli ideali che ne contengono uno proprio, la quale ovviamente non è la famiglia di tutti gli ideali propri di A), ciò segue subito osservando che, supponendo $L \subsetneq A$ ideale proprio con $M \subseteq L$, allora:
$$I \subseteq M \subseteq L \implies L \subset \mathcal{F}$$
dunque L è un elemento della famiglia $\mathcal{F}$, e per la massimalità di M in $\mathcal{F}$, segue che $M = L$.

2. Segue immediatamente dal punto (1), infatti, sia $x \in A \setminus A^*$, allora per la Proposizione 2.26 l'ideale generato da x è proprio, $(x) \subsetneq A$, e quindi vale il punto (1) appena dimostrato:
$$(x) \subseteq M \implies x \in M$$
con M ideale massimale di A.

□

[35] I vari J_i sono contenuti tutti uno dentro l'altro "in catena".
[36] Andrebbe dimostato che l'unione di ideali in catena, analogamente a quanto accade per i sottogruppi, è un ideale.
[37] Abbiamo verificato addirittura che tale maggiorante sia un massimo della catena.

Proposizione 2.56 (Caratterizzazione degli ideali primi e massimali)
Dato un ideale proprio di $I \subsetneq A$, allora:

(1) I è primo se e solo se ${}^{A}\!/_{I}$ è un dominio.

(2) I è massimale se e solo se ${}^{A}\!/_{I}$ è un campo.

Dimostrazione. Verifichiamo le affermazioni:

(1) Presi $x, y \in A$, per definizione abbiamo che I è primo se e solo se $xy \in I \implies x \in I$ o $y \in I$, d'altra parte, ${}^{A}\!/_{I}$ è un dominio se e solo se:

$$(x+I)(y+I) = xy + I = I \iff xy \in I \implies x \in I \quad \text{o} \quad y \in I$$

ovvero se e solo se, quando un prodotto di elementi si annulla (quindi fa la classe laterale neutra in questo caso) uno dei due elementi è già nella classe laterale neutra dell'anello quoziente (quindi è già l'unico elemento neutro del prodotto, come richiesto dal fatto che l'anello sia un dominio), ma come si vede ciò è equivalente a dire che I è primo.

(2) Per il (2) della Proposizione 2.26 ${}^{A}\!/_{I}$ è un campo se e solo se gli unici ideali che contiene sono quelli impropri, $\overline{(0)}$ e ${}^{A}\!/_{I}$, dunque per il Teorema di Corrispondenza ciò è equivalente a dire che gli ideali di A che contengono I sono soltanto A ed I stesso [38], ovvero I è un ideale massimale di A.

□

Corollario 2.57 (Caratterizzazione degli ideali primi e massimali 2)
Dato A un anello si ha:

(1) A è un dominio se e solo se (0) è un ideale primo.

(2) A è un campo se e solo se (0) è un ideale massimale.

(3) I massimale $\implies$ I primo.

Dimostrazione. Proviamo le affermazioni:

(1) Per l'(1) della Proposizione 2.56 sappiamo che (0) è primo se e solo se ${}^{A}\!/_{(0)}$ è un dominio, ma:

$${}^{A}\!/_{(0)} \cong A$$

da cui segue che A è un dominio.

(2) Per il punto (2) della Proposizione 2.56 sappiamo che (0) è massimale se e solo se ${}^{A}\!/_{(0)}$ è un campo, ma:

$${}^{A}\!/_{(0)} \cong A$$

da cui segue che A è un campo.

[38]Infatti si ha che $\pi_I^{-1}\left({}^{A}\!/_{I}\right) = A$ e $\pi_I^{-1}(\overline{(0)}) = I$.

(3) Per quanto detto nel (2) della Proposizione 2.56, I è massimale se e solo se ${}^{A}\!/_{I}$ è un campo, in particolare ciò significa che ${}^{A}\!/_{I}$ è un dominio d'integrità, ma per l'(1) della Proposizione 2.56 ciò è equivalente a dire che I sia primo.

$\square$

Esempio 2.58 ($\mathbb{Z}$ è un dominio ma non un campo)
Si osserva che l'ideale (0) è un ideale primo (poiché $xy \in (0) \iff xy = 0 \implies x \in (0)$ o $y \in (0)$, poiché $\mathbb{Z}$ è un dominio), ma non massimale, infatti:

$$(0) \subset (m) \qquad \forall m \in \mathbb{Z}$$

Corollario 2.59
La corrispondenza biunivoca tra ideali per mezzo della proiezione:

$$\pi_I : A \longrightarrow {}^{A}\!/_{I}$$

conserva ideali primi e massimali.[a]

[a] Ovviamente gli ideali considerati devono contenere I, altrimenti non c'è nulla da preservare in arrivo.

Dimostrazione. Osserviamo preliminarmente che si ha $I \subseteq J \subseteq A$, dunque nella proiezione π_I si ha che:

$$J \longmapsto \pi_I(J) = {}^{J}\!/_{I}$$

Dobbiamo dimostrare che J è primo (massimale) in A se e solo se ${}^{J}\!/_{I}$ è primo (massimale) in ${}^{A}\!/_{I}$. Per quanto detto nella Proposizione 2.56 J primo (massimale) è equivalente al fatto che ${}^{A}\!/_{J}$ sia un dominio (campo), e, ugualmente deve essere che $\dfrac{A/I}{J/I}$ è un dominio (campo) ma dal Secondo Teorema di Omomorfismo di Anelli si ha:

$$\frac{A/I}{J/I} \cong {}^{A}\!/_{J}$$

che in entrambi i casi verifica la tesi. $\square$

§2.6 Anello delle frazioni di un dominio

Definizione 2.60. Consideriamo un anello commutativo con identità A, che sia un dominio di integrità. Sia $S \subset A$ con le seguenti proprietà:

- $0 \notin S$.
- $1 \in S$.
- S è moltiplicativamente chiuso: $xy \in S$, $\forall x, y \in S$.

Il sottoinsieme S con queste proprietà si dice **parte moltiplicativa** di A.

Definizione 2.61. Dato un anello commutativo con identità A, che sia un dominio di integrità, e S la sua parte moltiplicativa, allora possiamo definire l'insieme delle **frazioni di un dominio**:

$$S^{-1}A = \left\{ \frac{a}{s} \middle| a \in A, s \in S \right\} \Big/ \sim \; = \frac{A \times S}{\sim}$$

con la relazione $\sim$ data da $\frac{a}{s} \sim \frac{b}{t} \iff at = bs.$[39]

Osservazione 2.62 — La relazione $\sim$ usata nella definizione precedente è una relazione di equivalenza, infatti:

- $\sim$ è riflessiva in quanto $\frac{a}{s} \sim \frac{a}{s} \iff as = sa$, che è vero in quanto abbiamo supposto A commutativo.
- $\sim$ è simmetrica in quanto $\frac{a}{s} \sim \frac{b}{t} \iff at = bs \iff \frac{b}{t} \sim \frac{a}{s}$.
- $\sim$ è transitiva in quanto, dati $\frac{a}{s} \sim \frac{b}{t}$ e $\frac{b}{t} \sim \frac{c}{u}$ abbiamo che:

  $$at = bs \qquad \text{e} \qquad bu = tc$$

  da cui, moltiplicando la prima per u si ha:

  $$aut = bus = tcu \implies aut = cts \iff t(au - cs) = 0$$

  essendo per ipotesi A un dominio[a] e $t \in S$ (dunque $t \neq 0$) segue:

  $$au = cs \iff \frac{a}{s} \sim \frac{c}{u}$$

[a] È importante notare che qui stiamo usando il fatto che A è un dominio.

[39] Alternativamente possiamo scrivere la relazione come: $(a, s) \sim (b, t) \iff at = bs$, ed indicare con $\frac{a}{s}$ la classe di equivalenza dei due elementi.

Proposizione 2.63 (Anello delle frazioni di un dominio)
L'insieme delle frazioni di un dominio munito con le operazioni di:

$$\frac{a}{s} + \frac{b}{t} = \frac{at + bs}{st} \qquad \text{e} \qquad \frac{a}{s} \cdot \frac{b}{t} = \frac{ab}{st}$$

è un anello commutativo con identità.[a]

[a] Con l'identità data dall'elemento $1/1$.

Dimostrazione. Bisogna verificare in primis che le operazioni sono ben definite (in quanto le abbiamo definite tra classi di equivalenza), consideriamo $\frac{a}{s} \sim \frac{a'}{s'}$ e $\frac{b}{t} \sim \frac{b'}{t'}$, vogliamo verificare che le due somme:

$$\frac{a}{s} + \frac{b}{t} = \frac{at + bs}{st} \qquad \text{e} \qquad \frac{a'}{s'} + \frac{b'}{t'} = \frac{a't' + b's'}{s't'}$$

diano lo stesso risultato; per ipotesi sappiamo che $as' = a's$ e $bt' = b't$, osserviamo che l'uguaglianza tra le due somme è vera se e solo se:

$$(at + bs)s't' = (a't' + b's')st$$

sviluppando l'LHS otteniamo:

$$att's' + bss't' = a'stt' + b'tss' = (a't' + b's')st$$

che dimostra che l'operazione $+$ è ben definita.[40] $\square$

Esempio 2.64 (Anello delle frazioni di $\mathbb{Z}$)
Preso $A = \mathbb{Z}$ e $S = \{10^k\}_{k \geq 0}$ (si verifica facilmente che S rispetta le tre proprietà richieste dalla definizione) abbiamo che l'anello delle frazioni di $\mathbb{Z}$ è dato da:

$$S^{-1}A = \left\{ \frac{z}{10^k} \middle| z \in \mathbb{Z}, k \geq 0 \right\}$$

con ad esempio $\frac{5}{10} = \frac{1}{2} \in S^{-1}A$.

Osservazione 2.65 — Nel caso dell'esempio precedente si osserva che $\frac{2}{1} \in S^{-1}$ ed è invertibile:

$$\frac{2}{1} \cdot \frac{5}{10} = \frac{1}{1}$$

Proposizione 2.66 ($S^{-1}A$ come estensione di A)
Dato un dominio A e il suo anello delle frazioni, l'applicazione:

$$f : A \longrightarrow S^{-1}A : a \longmapsto \frac{a}{1}$$

è un omomorfismo iniettivo di anelli.[a]

[a] Dunque $A \subset S^{-1}A$, cioè $S^{-1}A$ è un'estensione di A.

[40] Le restanti (lunghissime e noiosissime) 9 verifiche verranno aggiunte in seguito :).

Dimostrazione. Verifichiamo che f sia un omomorfismo di anelli:

$$f(a+b) = \frac{a+b}{1} = \frac{a}{1} + \frac{b}{1} = f(a) + f(b) \qquad \forall a, b \in A$$

e analogamente:

$$f(ab) = \frac{ab}{1} = \frac{a}{1} \cdot \frac{b}{1} = f(a)f(b) \qquad \forall a, b \in A$$

Per l'iniettività studiamo il nucleo:

$$\ker f = \left\{ a \in A \middle| f(a) = \frac{a}{1} = \frac{0}{1} \right\}^{41} = \{a \in A | a \cdot 1 = 0 \cdot 1 = 0\} = \{0\}$$

dunque l'omomorfismo è iniettivo. □

Osservazione 2.67 ($S = A \setminus \{0\}$) — Se A è un dominio, allora $S = A \setminus \{0\}$[a] è una parte moltiplicativa, infatti, $\forall x, y \in S$, ovvero $x \neq 0$ e $y \neq 0$, dunque $xy \in S$, $xy \neq 0$.

[a] Sarebbe A^* se A fosse finito.

Definizione 2.68. Dato un dominio A, definiamo **campo dei quozienti** di A:

$$S^{-1}A = Q(A)$$

l'anello delle frazioni con parte moltiplicativa $S = A \setminus \{0\}$.

Proposizione 2.69 ($A \subset Q(A)$)
Dato A dominio e la sua parte moltiplicativa $S = A \setminus \{0\}$, l'anello delle frazioni $S^{-1}A = Q(A)$ è il più piccolo campo che contiene A.

Dimostrazione. Verifichiamo prima che $Q(A)$ è un campo e poi la tesi:

- Per verificare che $Q(A)$ sia un campo, ci basta verificare che esistono gli inversi moltiplicativi, e ciò segue immediatamente dal fatto che $\forall a \in A$, $a \neq 0$, allora $\frac{1}{a} \in Q(A)$ (in questo modo tutti gli elementi di A, eccetto lo 0, possono essere scritti come $\frac{1}{a}$) ed è tale per cui:

$$\frac{a}{1} \cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{1}$$

- Per la Proposizione 2.66 sappiamo già che $A \subset S^{-1}A$, ed ora abbiamo dimostrato che $S^{-1}A$ è un campo, ci resta da verificare che $S^{-1}A (= Q(A))$ sia effettivamente il più piccolo campo che contiene A. Sia K è un campo tale che $A \subset K$, allora $\frac{1}{a} \in K$, $\forall a \in A \setminus \{0\}$, ovvero K contiene tutti gli inversi degli elementi di A, allora, $\forall b \in A$, $\forall a \in A \setminus \{0\}$, cioè K contiene tutti gli elementi di $S^{-1}A$:

$$\frac{b}{a} \in K \implies Q(A) = S^{-1}A \subset K$$

pertanto, essendo contenuto in ogni campo che contiene A, e contenendolo a sua volta, $Q(A)$ è il più piccolo campo che contiene A.

□

[41] Ricordiamo che $0/1$ è l'elemento neutro di $S^{-1}A$.

Esempio 2.70

Vediamo alcuni esempi di anelli delle frazioni di domini e campi quoziente:

- Consideriamo $A = \mathbb{Z}$, $S_1 = \{10^k\}_{k \geq 0}$ e $S_0 = A \setminus \{0\}$, allora si ha che:
$$\mathbb{Z} \subset S_1^{-1}\mathbb{Z} \subset S_0^{-1}\mathbb{Z} = Q(\mathbb{Z}) = \mathbb{Q}$$
- Considerando $A = K[x]$ si ha che:
$$Q(A) = K(x) = \left\{ \frac{f(x)}{g(x)} \middle| f(x), g(x) \in K[x], g(x) \neq 0 \right\}$$
- Sia A un dominio e $P \subset A$ un suo ideale primo, possiamo considerare $S = A \setminus P$ che è una parte moltiplicativa, in quanto $0 \notin S$, $1 \in S$ e $\forall x, y \in S$ si ha:
$$x, y \notin P \implies xy \notin P$$
poiché P è primo, dunque $xy \in A \setminus P = S$. In questo caso indichiamo $S^{-1}A = A_p$ e prende il nome di **localizzato** dell'anello A all'ideale P.

Osservazione 2.71 — Dato il localizzato di A a P, A_p, si osserva che esso è un **anello locale**, ovvero un anello che ha un unico ideale massimale.

Esempio 2.72 (Localizzato di un ideale primo)

Se consideriamo $A = \mathbb{Z}$ e $P = 2\mathbb{Z}$, allora la parte moltiplicativa è data da $S = \mathbb{Z} \setminus 2\mathbb{Z}$ (i numeri dispari), da cui abbiamo che:
$$S^{-1}\mathbb{Z} = \mathbb{Z}_{(2)} = \left\{ \frac{a}{b} \middle| a \in \mathbb{Z}, b \equiv 1 \pmod 2 \right\}$$

Esercizio 2.73. Dati $A = \mathbb{Z}$, $P = 2\mathbb{Z}$ e $S = \mathbb{Z} \setminus 2\mathbb{Z}$, verificare che l'ideale $(2)\mathbb{Z}_{(2)}$ è l'unico ideale massimale di $\mathbb{Z}_{(2)}$.

Soluzione. La tesi è equivalente a mostrare che $\mathbb{Z}_{(2)}^* = \mathbb{Z}_{(2)} \setminus (2)\mathbb{Z}_{(2)}$. Infatti, sappiamo già che $(2)\mathbb{Z}_{(2)}$ è un ideale, mentre qualunque ideale non contenuto in esso contiene necessariamente un elemento invertibile ed è perciò non proprio. Se $\frac{a}{b} \notin (2)\mathbb{Z}_{(2)}$ allora sia a che b sono dispari, dunque $\frac{b}{a} \in \mathbb{Z}_{(2)}$ ed è chiaramente l'inverso di $\frac{a}{b}$. Viceversa se $\frac{a}{b}$ è invertibile esiste $\frac{c}{d} \in \mathbb{Z}_{(2)}$ tale che $\frac{ac}{bd} = 1$, cioè $ac = bd$. Se uno tra a e c fosse pari lo sarebbe anche bd, e poiché 2 è primo uno tra b e d sarebbe pari, contraddicendo la definizione di $\mathbb{Z}_{(2)}$. Dunque $\frac{a}{b} \in \mathbb{Z}_{(2)} \setminus (2)\mathbb{Z}_{(2)}$.[42] □

[42] Dimostrazione proposta da Davide Ranieri.

Osservazione 2.74 (Elementi invertibili di $S^{-1}A$) — Osserviamo che gli invertibili dell'anello $S^{-1}A$ sono:

$$(S^{-1}A)^* = \left\{ \frac{a}{s} \,\middle|\, \frac{s}{a} \in S^{-1}A \right\}$$

ovvero esistono $b \in A$ e $t \in S$ tali che $\dfrac{s}{a} = \dfrac{b}{t} \iff st = ab \in S$ (cioè esiste una scrittura di questo tipo in $S^{-1}A$, ma poiché non è detto che a appartenga ad S, sappiamo che, per quanto scritto, almeno un suo multiplo c'è), dunque:

$$(S^{-1}A)^* = \left\{ \frac{a}{s} \,\middle|\, \exists b \in A \text{ t.c. } ab \in S \right\}$$

Ad esempio, nel caso di $A = \mathbb{Z}$ e $S = \{10^k\}_{k \geq 0}$, abbiamo che:

$$\frac{5}{10} = \frac{1}{2} \in (S^{-1}A)^* \qquad \text{ma} \qquad 2 \notin S$$

dunque $2 \in (S^{-1}A)^*$, poiché il suo inverso, $\dfrac{1}{2} = \dfrac{5}{10}$, ha una scrittura che rispetta la proprietà richiesta dall'insieme (e tale scrittura è appunto un multiplo di quella iniziale).

Osservazione 2.75 (Ideali di $S^{-1}A$) — Sia $I \subset A$ un ideale di A, possiamo costruire l'insieme:

$$S^{-1}I = \left\{ \frac{x}{s} \in S^{-1}A \,\middle|\, x \in I, s \in S \right\} \cong \frac{I \times S}{\sim}$$

per tale insieme valgono le proprietà espresse dalla proposizione seguente.

Proposizione 2.76 (Ideali di $S^{-1}A$)
Sia $I \subset A$ e sia $S^{-1}A$ l'insieme costruito come sopra, allora:

(1) $S^{-1}I$ è un ideale di $S^{-1}A$.

(2) $\forall J \subset S^{-1}A$, $\exists I \subset A$ tale che $J = S^{-1}I$ (cioè ogni ideale di $S^{-1}A$ si ottiene da un ideale di A, considerandone il relativo anello delle frazioni).

(3) $S^{-1}I$ è un ideale proprio di $S^{-1}A$ se e solo se $I \cap S = \emptyset$.

(4) Sia P un ideale primo di A, con $P \cap S = \emptyset$, allora $S^{-1}P$ è un ideale primo di $S^{-1}A$.

Dimostrazione. Dimostriamo le singole affermazioni:

(1) Per verificare che $S^{-1}I$ sia un ideale verifichiamo prima la chiusura per somma:

$$\frac{x}{s} + \frac{y}{t} = \frac{\overbrace{xt + ys}^{\in I}}{\underbrace{st}_{\in S}} \in S^{-1}I \qquad \forall x, y \in I$$

dove l'appartenenza del numeratore deriva dal fatto che x, y siano elementi di un ideale. Per verificare la proprietà di assorbimento osserviamo che:

$$\frac{a}{s} \cdot \frac{x}{t} = \frac{\overbrace{ax}^{\in I}}{\underbrace{st}_{\in S}} \in S^{-1}I \qquad \forall \frac{a}{s} \in S^{-1}A$$

(2) Sia $J \subset S^{-1}A$ un ideale, per quanto detto nella Proposizione 2.66, sappiamo che $S^{-1}A$ è un'estensione di A, inoltre se consideriamo $f^{-1}(J)$, che per il Lemma 2.35, sappiamo essere un ideale, ed in particolare una contrazione di J ad A, abbiamo che:

$$f^{-1}(J) = J \cap A = I \subset A$$

vogliamo mostrare che vale $J = S^{-1}I$. Osserviamo che $\forall x \in I$ si ha $f(x) = \frac{x}{1} \in J$, dunque:

$$\underbrace{\frac{1}{s}}_{\in S^{-1}A} \cdot \frac{x}{1} = \frac{x}{s} \in J \implies S^{-1}I \subseteq J$$

cioè per assorbimento di J ci sono tutti gli elementi di $S^{-1}I$. Viceversa si ha che $\forall \frac{x}{s} \in J$ possiamo scrivere:

$$\frac{x}{1} = \frac{x}{s} \cdot \frac{s}{1} \in J \implies x = f^{-1}\left(\frac{x}{1}\right) \in I$$

ovvero il numeratore di ogni elemento in $S^{-1}J$ è un elemento di I, dunque considerando l'anello delle frazioni $S^{-1}I$ esso contiene tutte quelle di $S^{-1}J$, da cui si conclude $\frac{x}{s} \in S^{-1}I \implies J \subseteq S^{-1}I$.

(3) Dimostriamo la negazione[43], ovvero $S^{-1}I$ non proprio equivale a $S^{-1}I = S^{-1}A$, ma essendo il primo un ideale questo è vero se e solo se:

$$\frac{1}{1} \in S^{-1}I \iff \exists x \in I, \exists s \in S : \frac{1}{1} = \frac{x}{s}$$

che, per la relazione definita sugli anelli di frazioni è equivalente a chiedere che $I \ni x = s \in S \iff I \cap S \neq \emptyset$.

(4) Sia P un ideale primo, se fosse $P \cap S \neq \emptyset$, allora per quanto visto al punto (3) non sarebbe proprio (e dunque nemmeno primo), viceversa, se $P \cap S = \emptyset$ vogliamo dimostrare che $S^{-1}P$ primo in $S^{-1}A$; consideriamo:

$$\frac{a}{s} \cdot \frac{b}{t} \in S^{-1}P$$

ciò è equivalentemente al fatto che $\exists \sigma \in S$ e $\exists p \in P$ tali per cui:

$$\frac{ab}{st} = \frac{p}{\sigma} \iff ab\sigma = \underbrace{p}_{\in P} st \in P \implies ab\sigma \in P$$

ma, essendo per ipotesi che $\sigma \in P$ e $P \cap S = \emptyset$, allora $ab \in P$, e poiché P è primo si deve avere $a \in P$ p $b \in P$, e quindi la frazione di uno dei due deve essere quella in $S^{-1}P$: $\frac{a}{s} \in S^{-1}P \quad$ o $\quad \frac{b}{t} \in S^{-1}P$ e quindi $S^{-1}P$ primo.

□

[43] Poiché trattandosi di un'equivalenza logica va bene lo stesso.

§2.7 Divisibilità nei domini

Definizione 2.77. Sia A un dominio e siano $a, b \in A$, con $a \neq 0$, si dice che $a \mid b$ (a **divide** b) se:

$$\exists c \in A : b = ac$$

Osservazione 2.78 — Osserviamo che $a \mid b \iff (b) \subseteq (a)$, infatti:

$$a \mid b \iff \exists c \in A : b = ac \iff b \in (a) \iff (b) \subseteq (a)$$

Definizione 2.79. Dato A dominio e a, a', diciamo che a ed a' sono **associati**, $a \sim a'$, se vale una delle seguenti tre condizioni equivalenti:

(i) $a \mid a'$ e $a' \mid a$.

(ii) $\exists u \in A^*$ tale che $a = ua'$.

(iii) $(a) = (a')$.

Osservazione 2.80 (Equivalenza delle condizioni) — Osserviamo che le tre condizioni date sono equivalenti, infatti, per quanto riguarda (i) e (iii) si ha:

$$a \mid a' \iff (a') \subseteq (a) \qquad \text{e} \qquad a' \mid a \iff (a) \subseteq (a')$$

dunque se sono vere entrambe le condizioni (i) e (iii) sono equivalenti. Dobbiamo da verificare che (i) $\implies$ (ii), dalle due divisibilità segue che:

$$a' = xa \qquad \text{e} \qquad a = ya' \implies a = yxa \implies a(1 - xy) = 0$$

poiché $a \neq 0$, ed A dominio per ipotesi si ha che $xy = 1 \implies y \in A^*$, ovvero la (ii). Viceversa, assumiamo (ii) e deduciamo (iii):[a]

$$a = ua' \implies a \in (a') \implies (a') \subseteq (a)$$

con $u \in A^*$, pertanto $\exists v \in A^*$ tale che $uv = vu = 1$, moltiplicando la prima relazione per v si ottiene:

$$a' = va \implies a' \in (a) \implies (a) \subseteq (a')$$

e si conclude $(a) \subseteq (a')$.

[a] A questo punto sappiamo che già che (i) e (iii) sono equivalenti, quindi non è necessario fare verifiche distinte.

Definizione 2.81. Dati $a, b \in A$ dominio, non entrambi nulli, diciamo che $d \in A$ è un **massimo comun divisore** per a e b se:

(1) $d \mid a$ e $d \mid b$.

(2) $\forall x \in A$ tale che $x \mid a$ o $x \mid b$, allora $x \mid d$.

Proposizione 2.82 (Gli M.C.D. di due elementi in un dominio sono associati)
Dati $d, d' \in A$, essi sono due massimi comun divisori di una stessa coppia di elementi a e b di A, $d = (a, b)$ e $d' = (a, b)$, se e solo se sono associati, $d \sim d'$.

Dimostrazione. Se d e d' sono due massimi comun divisori di a e b, allora vale che:

$$d \mid a \wedge d \mid b \qquad \text{e} \qquad x \mid a \wedge x \mid b \implies x \mid d$$

e contemporaneamente:

$$d' \mid a \wedge d' \mid b \qquad \text{e} \qquad x \mid a \wedge x \mid b \implies x \mid d'$$

dunque, considerando d, esso deve essere diviso da d' in quanto massimo comune divisore:

$$d = ud'$$

e simmetricamente:

$$d' = vd$$

da cui, sfruttando il fatto che A è un dominio segue:

$$d = ud' = uvd \implies d(1 - uv) = 0 \implies uv = 1 \implies u, v \in A^*$$

e quindi $d \sim d'$ per definizione. □

Definizione 2.83. Dato un dominio A e $x \in A$, con $x \notin A^* \cup \{0\}$, x si dice **primo** se $\forall a, b \in A$:

$$x \mid ab \implies x \mid a \vee x \mid b$$

Definizione 2.84. Dato un dominio A e $x \in A$, con $x \notin A^* \cup \{0\}$, x si dice **irriducibile** se $\forall a, b \in A$:

$$x = ab \implies a \in A^* \vee b \in A^*$$

Proposizione 2.85 (primo $\implies$ irriducibile)
Dato A dominio, se x è primo, allora è irriducibile.

Dimostrazione. Supponiamo che:

$$x = ab$$

essendo x primo, allora $x \mid a$ o $x \mid b$, assumiamo (WLOG) che $x \mid a$, allora:

$$a = xc \implies x = bcx \implies x(1 - bc) = 0$$

poiché A è un dominio, e poiché $x \neq 0$ per ipotesi segue che:

$$bc = 1 \implies b, c \in A^*$$

in particolare ciò significa che x è irriducibile, in quanto scrivendolo come $x = ab$, abbiamo verificato che $b \in A^*$. □

Proposizione 2.86 (Caratterizzazione di primi ed irriducibili in domini)
Dato un dominio A si ha che:

(1) x è primo se e solo se (x) è un ideale primo non nullo.

(2) x è irriducibile se e solo se (x) è un ideale massimale nell'insieme degli ideali principali.

Dimostrazione. Verifichiamo entrambe le proprietà:

(1) Sia (x) un ideale primo, ovvero:

$$ab \in (x) \iff a \in (x) \lor b \in (x)$$

ciò è equivalente al richiedere che $x \mid a$ o $x \mid b$, ovvero che x sia primo in A.

(2) Dimostriamo separatamente le due implicazioni. Sia x irriducibile e supponiamo che sia $(x) \subseteq (y) \subsetneq A$, dunque $\exists z \in A$ tale che $x = yz$, sappiamo che $y \notin A^*$ (altrimenti sarebbe l'ideale conterebbe l'identità e avremmo $(y) = A$), poiché x deve essere irriducibile segue necessariamente che $z \in A^*$ e quindi $x \sim y$, cioè:

$$(x) = (y)$$

pertanto (x) è massimale tra gli ideali principali. Per il viceversa dimostriamo la contronominale; sia x riducibile, allora:

$$x = yz \qquad \text{con } y, z \notin A^*$$

e per quanto detto segue che:

$$(x) \subsetneq (y) \subsetneq A$$

dove la seconda inclusione non può essere un'uguaglianza in quanto $y \notin A^* \implies 1 \notin (y)$, mentre la prima segue dal fatto che $z \notin A^*$ (e quindi x e y non sono associati), pertanto (x) non è massimale tra gli ideali principali.

□

Esempio 2.87

Osserviamo che se x è primo nel dominio d'integrità $A = K[x, y]$, allora:

$$A/_{(x)} \cong K[y]$$

che sappiamo essere un dominio, dunque per la Proposizione 2.56 (x) è primo. Poiché x è primo è anche irriducibile, quindi (x) è massimale tra gli ideali principali di A, ma non è un ideale massimale di A in quanto $K[y]$ non è un campo, infatti:

$$(x) \subsetneq (x, y) \subsetneq A$$

ovvero (x) non è massimale in quanto è contenuto nell'ideale proprio (x, y).

§2.8 Domini euclidei (ED)

Definizione 2.88. Un dominio di integrità A si dice **dominio euclideo** (ED) se esiste una funzione:

$$d : A \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{N}$$

detta **grado**, con le seguenti proprietà:

(i) $d(x) \leq d(xy)$, $\forall x, y \in A \setminus \{0\}$.

(ii) $\forall x \in A$, $\forall y \in A \setminus \{0\}$, $\exists q, r \in A$ tali che:

$$x = yq + r$$

con $d(r) < d(y)$[44] oppure $r = 0$.

Osservazione 2.89 — In un dominio euclideo ogni elemento si può "ben approssimare" con un multiplo di ogni altro elemento. La funzione grado serve per dire cosa significa esattamente "approssimare bene".

Esempio 2.90 (Domini Euclidei)

Vediamo alcuni esempi di domini euclidei:

(1) $(\mathbb{Z}, |\cdot|)$ è un dominio euclideo, infatti sappiamo che per le proprietà del valore assoluto vale che:

$$|xy| = |x||y| \geq |x| \qquad \forall y \neq 0$$

ed esiste la divisione euclidea con il resto:

$$\forall x, y \in \mathbb{Z}, \exists q, r \in \mathbb{Z} : x = qy + r$$

con $|r| < |y|$ oppure $r = 0$, la prima condizione posta non ci assicura l'unicità (infatti possiamo approssimare sia dal basso che dall'alto prendendo anche resti negativi), ma poiché sappiamo che in realtà vale:

$$0 \leq r < |y|$$

allora tale scrittura è unica.

(2) $(K[x], \deg)$ è un dominio euclideo, infatti:

$$\deg(f(x)g(x)) = \deg f(x) + \deg g(x) \geq \deg f(x)$$

e vale la divisione euclidea tra polinomi con resto:

$$\forall f(x), g(x) \in K[x], \exists q(x), r(x) \in K[x] : f(x) = g(x)q(x) + r(x)$$

con $\deg r(x) < \deg g(x)$ oppure $\deg r(x) = 0$.

(3) $(\mathbb{Z}[i], N)$, l'anello degli **interi di Gauss**, $\mathbb{Z}[i] = \{a + ib | a, b \in \mathbb{Z}\}$, con la norma data da:

$$N : \mathbb{Z}[i] \longrightarrow \mathbb{N} : (a + ib =)\alpha \longmapsto N(\alpha) = \alpha\overline{\alpha} = a^2 + b^2$$

[44] Ciò non assicura l'unicità di q ed r, ma non è richiesto dalla definizione.

Osserviamo che $\mathbb{Z}[i] \subset \mathbb{Q}(i) \subset \mathbb{C}$, dunque $\mathbb{Z}[i]$ è un dominio. Osserviamo inoltre che valgono le proprietà richieste dalla definizione di dominio euclideo per la norma definita in precedenza:

$$N(\alpha\beta) = |\alpha\beta|^2 = |\alpha|^2|\beta|^2 \geq |\alpha|^2 = N(\alpha)$$

che è vera in quanto $|\beta|^2 = x^2 + y^2 \geq 1$. Per la proprietà (ii), vorremmo che $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{Z}[i]$, con $\beta \neq 0$, si può "approssimare" α con un multiplo di β; abbiamo che $\frac{\alpha}{\beta} \in \mathbb{C}$, ma in generale non in $\mathbb{Z}[i]$, se $\frac{\alpha}{\beta} \in \mathbb{Z}[i]$, vogliamo trovare semplicemente il valore del rapporto in $\mathbb{Z}[i]$ (ed abbiamo che $r = 0$), se $\frac{\alpha}{\beta} \notin \mathbb{Z}[i]$, allora vogliamo scrivere:

$$\alpha = \beta q + r \qquad \text{con} \qquad N(r) < N(\beta)$$

Osserviamo il reticolo formato dai multipli di β nel piano complesso:[45]

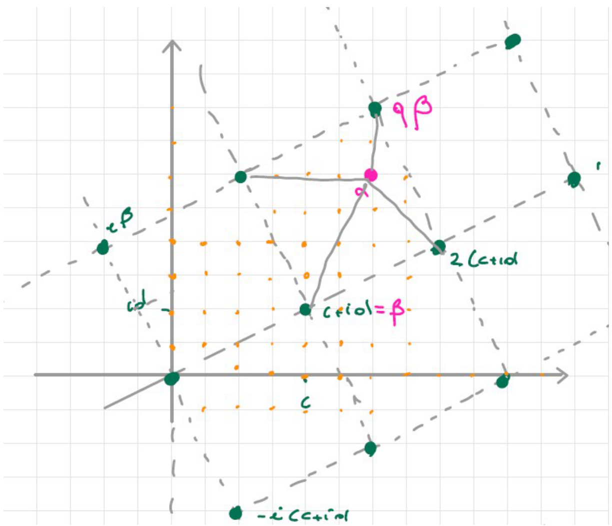


Figura 1: Reticolo dei multipli interi di β nel piano complesso.

Come si osserva α cade in un quadrato (compreso il bordo) e del quale $q\beta$ è il multiplo di β più vicino ad α, pertanto, scelto $q\beta$ abbiamo:

$$r = \alpha - q\beta$$

con $N(r) < \frac{1}{2}$ diagonale quadrato $<$ lato $= N(\beta)$.

Proposizione 2.91 (Algoritmo di Euclide)
Dato un dominio euclideo A, $\forall a, b \in A$ non entrambi nulli esiste l'MCD (a, b), determinato mediante l'algoritmo di Euclide.

Dimostrazione. Poiché in un dominio euclideo esiste una funzione grado (che è appunto il caso generale del valore assoluto) ed è possibile la divisione euclidea con resto per definizione, allora vale l'Algoritmo di Euclide con la stessa dimostrazione già vista per $\mathbb{Z}$, e con in questo caso l'applicazione grado generica al posto del valore assoluto:

[45]Immagine provvisoria, non appena ho tempo la disegno in TikZ.

- **L'algoritmo termina**: L'algoritmo termina perché la successione dei resti r_n è una successione a termini in $\mathbb{N}$ strettamente decrescente, pertanto è definitivamente costante (in questo caso 0).

- **Correttezza dell'algoritmo**: Si dimostra l'algoritmo per induzione sul numero degli N passi richiesti. Sia $\mathcal{P}(n)$:"Se l'algoritmo termina in N passi, allora funziona.", per $N = 1$, si ha che:
$$a = qb + 0$$
con $b = r_0$ (ovvero $b \mid a$), e quindi $(a, b) = r_0$. Supponiamo per ipotesi induttiva che l'Algoritmo di Euclide funzioni per ogni numero di passi $m \leq N - 1$ e proviamo che è vero per N. Sia:
$$\begin{cases} a = qb + r_1 & 0 \leq r_1 < |b| \\ r_0 = q_1 r_1 + r_2 & 0 \leq r_2 < r_1 \\ \vdots \\ r_{n-2} = q_{n-1} r_{n-1} + r_n & 0 \leq r_n < r_{n-1} \\ r_{n-1} = q_n r_n + 0 \end{cases}$$
possiamo applicare l'algoritmo di Euclide per (r_0, r_1) (in tal modo si ha una sequenza di $N - 1$ passi) ed ottenere $r_n = (b, r_1)$:
$$\begin{cases} r_0 = q_1 r_1 + r_2 & 0 \leq r_2 < r_1 \\ \vdots \\ r_{n-2} = q_{n-1} r_{n-1} + r_n & 0 \leq r_n < r_{n-1} \\ r_{n-1} = q_n r_n + 0 \end{cases}$$
da cui $r_n = (b, r_1) = (b, a - q_0 b) = (a, b)$, dove l'ultima uguaglianza è giustificata dalla proprietà dell'M.C.D.

$\square$

Proposizione 2.92 (Elementi invertibili)
Dato un dominio euclideo A, gli elementi di grado minimo sono gli elementi di A^*.

Dimostrazione. Consideriamo $d(A \setminus \{0\}) \subset \mathbb{N}$, ovvero l'immagine del dominio euclideo mediante l'applicazione grado, tale immagine è non vuota[46] ed è un sottoinsieme di $\mathbb{N}$, pertanto, per il Principio del Minimo ammette elemento minimo d_0, sia $x \in A \setminus \{0\}$ un elemento nella controimmagine di d_0, quindi tale che $d(x) = d_0$, tale elemento è quindi di grado minimo, vediamo che è invertibile. Sappiamo che $\forall y \in A \setminus \{0\}$ possiamo fare la divisione euclidea per x:
$$y = qx + r$$
ed in questo caso non può essere che $d(r) < d(x) = d_0$, in quanto abbiamo supposto d_0 minimo, dunque l'unica possibilità è che $r = 0$ e $y = qx$, in particolare, per $y = 1$, $\exists q \in A$ tale che:
$$1 = qx \implies x \in A^*$$

[46]Praticamente è ovvio, altrimenti non avrebbe nemmeno senso parlare di A come dominio.

Viceversa, sia $x \in A^*$, allora $(x) = A$ (poiché in (x) vi è 1), pertanto, $\forall a \in A$:

$$a = qx \qquad q \in A$$

inoltre, sappiamo per le proprietà del grado che $d(x) \leq d(qx)$, $\forall q \in A \setminus \{0\}$, ovvero:

$$d(x) \leq d(a) \qquad \forall a \in A$$

quindi x è un elemento di grado minimo. $\square$

Proposizione 2.93 (Ideali di un dominio euclideo)
Dato un dominio euclideo A, tutti gli ideali di A sono principali[a] e generati da un elemento di grado minimo.

[a]Quindi ogni dominio euclideo è un PID.

Dimostrazione. Sia $I \subset A$ un ideale, se $I = \{0\}$, allora è principale, altrimenti, preso $I \neq \{0\}$, vogliamo mostrare che I è generato da un singolo elemento di grado minimo. Sia $x \in I$ un elemento di grado minimo (esiste perché $d(I) \subset \mathbb{N}$ e non vuoto), allora è ovvio che $(x) \subseteq I$, viceversa, si ha che $\forall a \in A$ si può fare la divisione euclidea per x:

$$a = qx + r \qquad d(r) < d(x) \vee r = 0$$

da cui segue che $r = a - qx \in I$ da cui $d(x) \leq d(r) \implies r = 0$, ovvero:

$$a = qx \in (a) \implies I \subseteq (a)$$

$\square$

§2.9 Domini a ideali principali (PID)

Definizione 2.94. Un dominio A si dice a **ideali principali** (PID) se ogni ideale di A è principale:

$$\forall I \subseteq A, I \,\text{ideale}, \exists x \in I : I = (x)$$

Proposizione 2.95 (Ideali primi di un PID)
Dato un dominio ad ideali principali A, gli unici ideali primi di A sono (0) e gli ideali massimali.

Dimostrazione. Dall'(1) del Corollario 2.57 sappiamo che il fatto che A sia un dominio è equivalente al fatto che (0) sia un ideale primo, inoltre, dal (3) del Corollario 2.57 sappiamo anche che tutti gli ideali massimali di un anello sono primi.
Viceversa, vogliamo dimostrare che gli ideali primi diversi da (0) di un dominio a ideali principali sono solo quelli massimali; sia P un ideale primo diverso da (0), essendo in un PID si ha che $P = (x)$, verifichiamo che P è massimale osservando che, essendo A un dominio, per l'(1) della Proposizione 2.86, P è primo se e solo se x è primo, e dunque x irriducibile (è vero in ogni dominio per la Proposizione 2.58). Essendo x irriducibile segue che (x) è massimale tra gli ideali principali di A (per il (2) della Proposizione 2.86), e poiché A è un PID (dunque tutti gli ideali sono principali), allora (x) è un ideale massimale per A. □

Osservazione 2.96 (M.C.D. nei PID) — Se A è un PID e $x, y \in A$, non entrambi nulli, osserviamo che l'ideale generato da x e y deve essere tale che:

$$(x, y) = (d)$$

con d un M.C.D.[a] di x e y. Infatti:

$$x \in (d) \qquad \text{e} \qquad y \in (d)$$

dunque $d \mid x$ e $d \mid y$, inoltre, se $c \mid x$ e $c \mid y$, allora $x, y \in (x)$, da cui:

$$(d) = (x, y) \subseteq (c) \implies d \in (c) \implies c \mid d$$

dunque d è un M.C.D. tra x ed y.

[a] M.C.D. a meno di prodotto per elementi di A^*.

§2.10 Domini a fattorizzazione unica (UFD)

Definizione 2.97. Dato A un dominio, esso si dice **a fattorizzazione unica** (UFD) se $\forall x \in A$, $x \notin A^* \setminus \{0\}$ si scrive in modo unico, a meno dell'ordine di fattori e di moltiplicazione per elementi invertibili, come prodotto di elementi irriducibili.

Esempio 2.98 (Esempi di UFD)
Esempi noti di UFD sono il dominio degli interi $\mathbb{Z}$, e quello dei polinomi in un'ordinata a coefficienti in un campo $K[x]$.

Proposizione 2.99 (UFD $\implies$ $\exists$M.C.D.)
Sia A un dominio a fattorizzazione unica, allora presi $a, b \in A$, non entrambi nulli, esiste M.C.D.(a, b).

Dimostrazione. Sia d il prodotto dei fattori irriducibili comuni fra a e b, presi con il minimo esponente con cui compaiono, allora per verifica diretta si mostra che d è l'M.C.D.[47] □

Osservazione 2.100 — Osserviamo che nei tre tipi di domini analizzati esiste sempre l'M.C.D., ma con delle differenze:

- Se A è un dominio euclideo (ED): con l'algoritmo di Euclide si può determinare l'M.C.D. di due elementi:
$$d = (a, b) \qquad a, b \in A$$
e i coefficienti $x_0, y_0 \in A$ per i quali vale l'identità di Bézout:
$$d = ax_0 + by_0$$
- Se A è un dominio a ideali principali (PID): sappiamo che presi due elementi si ha:
$$(a, b) = (d) \qquad a, b, d \in A$$
con d che è l'M.C.D. tra a e b, ma non disponiamo di un algoritmo "facile" per poterlo determinare, tuttavia esistono $x_0, y_0 \in A$ tali che:
$$d = ax_0 + by_0$$
e ciò deriva semplicemente dal fatto che $d \in (a, b)$, dunque si può scrivere come loro combinazione lineare (ugualmente però non disponiamo di algoritmi "facili" per poter determinare x_0 e y_0).
- Se A è un dominio a fattorizzazione unica (UFD): allora $\forall a, b \in A$ non entrambi nulli, esiste $d =$ M.C.D.(a, b), ma **non è detto che** $(d) = (a, b)$ e quindi neppure che $d = ax_0 + by_0$. Infatti, sicuramente è vero che $(a, b) \subset (d)$, ma non

[47] Si tratta praticamente solo di verifiche formali, pertanto conto di aggiungerla in seguito.

è detto che valga il contenimento opposto, il quale vale solo se $d = ax_0 + by_0$. Ad esempio, preso l'UFD $\mathbb{Z}[x]$, l'ideale:

$$I = (2, x)$$

è tale che M.C.D.$(2, x) = 1$, ma $1 \notin (2, x)$, perché se non fosse coì avremmo:

$$1 = 2a(x) + xb(x)$$

che per $x = 0$ porta a:

$$1 = 2a(0) + 0 \implies 2 \mid 1$$

che è assurdo.

Teorema 2.101 (Caratterizzazione degli UFD)
Dato un dominio A, sono fatti equivalenti:

(1) A è un UFD.

(2) Valgono le due condizioni seguenti:
   (i) Ogni elemento irriducibile è primo.
   (ii) Ogni catena discendete di divisibilità è stazionaria, ovvero se $\{a_i\} \subset A$, con:
   $$a_{i+1} \mid a_i \qquad \forall i \geq 0$$
   allora $\exists n_0$ tale che $a_i \sim a_{n_0}$, $\forall i \geq n_0$.

Osservazione 2.102 — La condizione (i) permette di dimostrare che la fattorizzazione in primi è unica, dunque è equivalente a questo fatto; mentre, la condizione (ii) permette di dimostrare l'esistenza della fattorizzazione, e quindi vi è equivalente, pertanto il teorema dice che essere un UFD è equivalente al fatto che in un dominio valga il teorema di fattorizzazione unica.

Osservazione 2.103 — Osserviamo che la condizione (ii) può essere riformulata equivalentemente come: ogni catena ascendente di ideali principali è stazionaria, ovvero, considerata $\{(a_i)\}_{i \geq 0}$, catena ascendente di ideali di A:

$$(a_1) \subseteq (a_2) \subseteq \dots$$

allora $\exists n_0$ tale che $(a_i) = (a_{n_0})$, $\forall i \geq n_0$.[a]

[a] Tra l'altro ciò, estendendo la condizione di stazionarietà ad ogni catena di ideali (quindi non solo principali), definisce un **anello noetheriano**.

Corollario 2.104 (A PID $\implies$ A UFD)
Se A è un dominio a ideali principali, allora è anche un dominio a fattorizzazione unica.

Dimostrazione. Per dimostrare il corollario ci basta verificare che per ogni PID valgono le condizioni (i) e (ii) del Teorema 2.101, e ciò è equivalente al dire che ogni PID è un UFD. Sia A un PID, e sia $x \in A$ un elemento irriducibile, per quanto visto nella Proposizione 2.95 l'ideale (x) è massimale in A, ma dalla (3) del Corollario 2.57, sappiamo quindi che (x) è primo, e poiché siamo in un dominio vale la (1) della Proposizione 2.86 che ci assicura che x è primo, dunque vale la (i).
Consideriamo ora una catena ascendente di ideali (principali):

$$(a_1) \subseteq (a_2) \subseteq \dots$$

e sia:

$$I = \bigcup_{i \geq 0} (a_i)$$

tale unione di ideali in catena è un ideale[48] di A, ed è pertanto principale, dunque $I = (a)$. Osserviamo che a appartiene all'unione, per cui $a \in (a_{n_0})$, e quindi:

$$I = (a) \subseteq (a_{n_0})$$

ma d'altra parte avevamo detto che I è l'unione di tutti gli ideali principali di A, quindi $(a_{n_0}) \subseteq (a) = I$, dunque $I = (a_{n_0})$; a questo punto sappiamo che:

$$(a_i) \subset (a_{n_0}) \qquad \forall i \geq 0$$

dove si ha $(a_i) = (a_{n_0})$ quando vi è anche il contenimento opposto, e ciò avviene, poiché stiamo considerando ideali in catena, $\forall i \geq n_0 \implies \{(a_i)\}$ è stazionaria e quindi è verificata la (ii). □

Osservazione 2.105 — L'ultimo corollario ci permette di poter mettere in relazione i vari tipi di domini d'integrità:

$$\underbrace{\text{ED}}_{\text{Domini euclidei}} \subset \underbrace{\text{PID}}_{\text{Domini a ideali principali}} \subset \underbrace{\text{UFD}}_{\text{Domini a fattorizzazione unica}}$$

Esempio 2.106 (Anello senza la (ii))

Consideriamo l'estensione $K[\{x^{\frac{1}{n}}\}_{n \geq 1}]$, essa non è un UFD, in quanto non vale la (ii) dell'Teorema 2.101:

$$x^{\frac{1}{2^{n+1}}} \mid x^{\frac{1}{2^n}} \mid \dots \mid x^{\frac{1}{4}} \mid x^{\frac{1}{2}} \mid x$$

dove tale catena non è definitivamente stazionaria (il successivo può sempre dividere il precedente) dunque non esiste la fattorizzazione di x.

[48] Come già osservato in precedenza ciò andrebbe dimostrato.

Esempio 2.107 (Anello senza la (i))
Consideriamo l'anello $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}] = \{a + b\sqrt{-5} | a, b \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{Q}(\sqrt{-5}) \subset \mathbb{C}$, tale anello non è un UFD poiché non vale la (i), infatti, ad esempio, 2 è irriducibile ma non primo in $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$:

$$2 = (a + b\sqrt{-5})(c + d\sqrt{-5}) \implies N(2) = (a^2 + 5b^2)(c^2 + 5d^2)$$

da cui possiamo dedurre che le uniche possibilità sono $a = \pm 2, c = \pm 1, b = 0, d = 0$ (oppure invertiti), pertanto 2 è irriducibile, ma non è primo perché:

$$2 \mid 6 = (1 + \sqrt{-5})(1 - \sqrt{-5}) \qquad \text{ma} \qquad 2 \nmid (1 + \sqrt{-5}), (1 - \sqrt{-5})$$

poiché, $\alpha = \dfrac{1 \pm \sqrt{-5}}{2} = \dfrac{1}{2} \pm \dfrac{\sqrt{-5}}{2} \notin \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$. In $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ abbiamo quindi due fattorizzazioni distinte per 6:

$$6 = 2 \cdot 3 = (1 + \sqrt{-5})(1 - \sqrt{-5})^{a}$$

[a] Per essere precisi dovremmo verificare che 2,3,$1 \pm \sqrt{-5}$ sono irriducibili in $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$.

Osservazione 2.108 — $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ non essendo un UFD, non è neppure un PID, infatti, ad esempio, l'ideale $(2, 1 + \sqrt{-5})$ non è principale.

Teorema 2.109 (A UFD $\implies$ $A[x]$ UFD)
Se A è un dominio a fattorizzazione unica, allora anche $A[x]$ è un anello a fattorizzazione unica.

Corollario 2.110 (A UFD $\implies$ $A[x_1, \dots, x_n]$ UFD)
Se A un dominio a fattorizzazione unica, allora anche $A[x_1, \dots, x_n]$ è un anello a fattorizzazione unica.

Dimostrazione. Dal Teorema 2.109 segue il caso base $A[x]$, per induzione si suppone vera la tesi per $A[x_1, \dots, x_{n-1}] = B$, e poi si considera $B[x_n]$, che è un UFD per il caso iniziale, dunque la tesi è vera per induzione. □

Osservazione 2.111 (Schema della dimostrazione del Teorema 2.109) — La dimostrazione del Teorema 2.109 si articola in tre tappe:

(1) $A[x]$ dominio.

(2) Ogni irriducibile di $A[x]$ è primo (condizione (i)).

(3) Ogni catena discendete di divisibilità è stazionaria (condizione (ii)).

Da cui si conclude per il Teorema di Caratterizzazione degli UFD.

Dimostrazione. Iniziamo quindi verificando il primo punto come segue.

(1) Siano $f(x), g(x) \in A[x] \setminus \{0\}$, e $\deg f(x) = n \geq 0$, $\deg g(x) = m \geq 0$, essendo $a_n, b_m \neq 0$, segue che $a_n b_m \neq 0$ poiché per ipotesi A un dominio di integrità, pertanto $f(x) \cdot g(x) \neq 0$ se $f(x), g(x) \neq 0 \implies A[x]$ è un dominio d'integrità.

> **Osservazione 2.112 —** Osserviamo anche che da ciò discende che $(A[x])^* = A^*$, infatti, considerando $f(x) \in (A[x])^*$, $\exists g(x) \in A[x]$ tale che:
>
> $$f(x)g(x) = 1 \implies \deg f(x) + \deg g(x) = 0$$
>
> ovvero $\deg f(x) = \deg g(x) = 0$, per cui $f(x), g(x) \in A$, ed in particolare $f(x) = a$, $g(x) = b$, pertanto:
>
> $$ab = 1 \implies f(x) \in A^*$$

□

Per verificare la condizione (i) dobbiamo prima caratterizzare gli irriducibili di $A[x]$, e fare ciò abbiamo bisogno del Lemma di Gauss.

Definizione 2.113. Dato A un UFD e $f(x) \in A[x]$, con $f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$, si dice **contenuto** di $f(x)$ l'M.C.D. dei suoi coefficienti:

$$c(f(x)) = (a_0, \ldots, a_n)$$

> **Osservazione 2.114 —** Il contenuto di un polinomio a coefficienti in un UFD è definito a meno di associati.

Definizione 2.115. Dato A un UFD e $f(x) \in A[x]$, $f(x)$ si dice **primitivo** se $c(f(x)) \sim 1$.

> **Osservazione 2.116 —** Ovviamente dato $f(x) \in A[x]$ si ha che:
>
> $$f(x) = c(f(x))f'(x) \qquad c(f'(x)) = 1$$
>
> dove $f'(x) \in A[x]$ e:
>
> $$f'(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{a_i}{d} x^i \qquad \frac{a_i}{d} \in A, \left(\frac{a_0}{d}, \ldots, \frac{a_n}{d}\right) = 1$$

Lemma 2.117 (Lemma di Gauss)
Dati $f(x), g(x) \in A[x]$, allora:

$$c(f(x)g(x)) = c(f(x))c(g(x))$$

Dimostrazione. Distinguiamo due casi:

- Se $c(f(x)) = c(g(x)) = 1$, dunque $f(x)$ e $g(x)$ sono primitivi, vogliamo verificare che $c(f(x)g(x)) = 1$; se $f(x)g(x)$ non fosse primitivo (ovvero associato ad 1) allora $c(f(x)g(x))$ non sarebbe invertibile (gli elementi invertibili sono associati ad 1), ovvero esisterebbe p primo tale che $p \mid c(f(x)g(x))$, consideriamo la proiezione modulo (p):

$$\pi_{(p)} : A[x] \longrightarrow \frac{A}{(p)}[x] : f(x) \longmapsto \overline{f(x)}$$

con $\overline{f(x)} \neq 0$ in quanto $p \nmid c(f(x))$, analogamente $\pi_{(p)}(g(x)) = \overline{g(x)} \neq 0$, poiché $p \nmid c(g(x))$, ma $\pi_{(p)}(f(x)g(x)) = \overline{f(x)}\,\overline{g(x)} = 0$, perché avevamo supposto che $p \mid c(f(x)g(x))$, ma questo è assurdo in quando $\dfrac{A}{(p)}$ è un dominio e quindi, per quanto detto, A dominio $\implies$ $A[x]$ dominio, ovvero $\dfrac{A}{(p)}[x]$ è un dominio, da cui $c(f(x)g(x)) = 1$.

- Consideriamo ora il caso generale, sia $f(x) = c(f(x))f'(x)$, con $f'(x)$ primitivo, e analogamente $g(x) = c(g(x))g'(x)$, con $g'(x)$ primitivo, abbiamo che:

$$h(x) = f(x)g(x) = c(f(x))c(g(x))g'(x)f'(x)$$

dove $h'(x) = g'(x)f'(x)$ è primitivo perché prodotto di polinomi primitivi, dunque:

$$h(x) = c(h(x))h'(x)$$

e uguagliando i contenuti si ha:

$$c(h(x))\underbrace{c(h'(x))}_{=1} = c(f(x))c(g(x))\underbrace{c(g'(x)f'(x))}_{=1} \implies$$
$$c(h(x)) = c(f(x)g(x)) = c(f(x))c(g(x))$$

$\square$

Corollario 2.118
Siano $f(x), g(x) \in A[x]$, con $c(f(x)) = 1$ e $f(x) \mid g(x)$ in $K[x]$, con K campo dei quozienti di A, allora $f(x) \mid g(x)$ in $A[x]$.

Dimostrazione. Per ipotesi sappiamo che $f(x) \mid g(x)$ in $K[x]$, ovvero $\exists h(x) \in K[x]$ tale che $g(x) = f(x)h(x)$, allora $\exists d \in A$ tale che:

$$h_1(x) = dh(x) \in A[x]$$

(stiamo "cancellando" il denominatore), dunque:

$$dg(x) = f(x)h_1(x) \in A[x]$$

da cui per il Lemma di Gauss:

$$dc(g(x)) = c(f(x)h_1(x)) = c(f(x))c(h_1(x)) = c(h_1(x)) \implies d \mid c(h_1(x))$$

dove abbiamo usato nell'ultimo passaggio il fatto che $c(f(x)) = 1$, dunque abbiamo $\dfrac{h_1(x)}{d} = h(x) \in A[x]$ e quindi la divisibilità iniziale era anche in $A[x]$. $\square$

Corollario 2.119

Sia $f(x) \in A[x]$ e $f(x) = g(x)h(x)$ in $K[x]$ (con K campo dei quozienti di A), con $\deg f(x), \deg g(x) \geq 1$, allora esiste $\delta \in K^*$ tale che $g_1(x) = \delta g(x) \in A[x]$, $h_1(x) = \delta^{-1}h(x) \in A[x]$ e $f(x) = g_1(x)h_1(x)$.

Dimostrazione. Analogamente a quanto fatto per il corollario precedente, sappiamo che $\exists d \in A$ tale che $g_1(x) = dg(x) \in A[x]$ (stiamo di nuovo "eliminando" i denominatori, ad esempio moltiplicando per l'm.c.m.), dunque:

$$f(x) = dg(x)d^{-1}h(x) = g_1(x)(d^{-1}h(x)) = c(g_1(x))g_1'(x)(d^{-1}h(x))$$

con $g_1'(x) \in A[x]$ primitivo (dividendo per il contenuto, che è un invertibile di A, siamo rimasti in $A[x]$), pertanto abbiamo:

$$f(x) = g_1'(x)(\underbrace{c(g_1(x))d^{-1}h(x)}_{\in K[x]})$$

ovvero $g_1'(x) \mid f(x)$ in $K[x]$, ma allora per il Corollario 2.118 segue che $g_1'(x) \mid f(x)$ in $A[x]$, dunque:

$$h_1(x) = \underbrace{\frac{c(g_1(x))}{d}}_{=\delta^{-1}} h(x)$$

abbiamo quindi determinato δ e δ^{-1} richiesti dalla tesi. □

Osservazione 2.120 — Il teorema non ci dice altro che se $f(x)$ è riducibile in $K[x]$, allora è riducibile anche in $A[x]$, con polinomi dello stesso grado (per la precisione associati a quelli iniziali).[a]

[a] In Aritmetica, avevamo trattato il caso particolare del Lemma di Gauss applicato a $\mathbb{Q}[x]$ e $\mathbb{Z}[x]$.

Esempio 2.121

Un esempio del discorso appena fatto è rappresentato dalla fattorizzazione di un polinomio in $\mathbb{Q}[x]$ e $\mathbb{Z}[x]$:

$$(x^2 - 1) = \left(\frac{100}{7}x + \frac{100}{7}\right)\left(\frac{7}{100}x - \frac{7}{100}\right) = (x+1)(x-1)$$

Teorema 2.122 (Caratterizzazione degli irriducibili di $A[x]$)

Dato A UFD, gli elementi irriducibili di $A[x]$ sono tutti e soli quelli che soddisfano una tra le seguenti:

(1) $f(x) \in A$ irriducibile in A.

(2) $f(x) \in A[x]$, con $\deg f(x) \geq 1$, $c(f(x)) = 1$ e $f(x)$ irriducibile in $K[x]$ (anello dei polinomi a coefficienti nel campo dei quozienti di A).

Dimostrazione. Distinguiamo i due casi:

1. Se $f(x) \in A$, dunque è costante, allora, come già osservato in precedenza, si ha:

$$f(x) = g(x)h(x) \implies \deg g(x) + \deg h(x) = \deg f(x) = 0$$

dove l'implicazione è data dal fatto che siamo in un dominio, dunque segue che $\deg g(x) = \deg h(x) = 0$, pertanto $g(x), h(x) \in A$, per cui $f(x)$ è irriducibile in $A[x]$ se e sole $f(x)$ è irriducibile in A (che è la stessa cosa che avevamo già osservato dicendo che $(A[x])^* = A^*$).

2. Sia $f(x)$ con $\deg f(x) \geq 1$. Supponiamo che $f(x)$ sia irriducibile in $A[x]$, abbiamo che:

$$f(x) = c(f(x))f'(x)$$

con $c(f(x))$ invertibile in $A[x]$, $c(f(x)) \in (A[x])^* = A^*$ (per quanto detto al punto (1)), d'altra parte, sia $f(x) = g(x)h(x)$ in $K[x]$, allora per il Corollario 2.119, possiamo scriverlo come prodotto di polinomi dello stesso grado in $A[x]$:

$$f(x) = g_1(x)h_1(x) \qquad \text{con} \qquad \deg g_1(x) = \deg g(x), \deg h_1(x) = \deg h(x)$$

poiché $f(x)$ è irriducibile in $A[x]$ deve essere che $g_1(x)$ o $h_1(x)$ sono invertibili. Abbiamo quindi che $\deg g_1(x) = 0$ o $\deg h_1(x) = 0$, da cui $\deg g(x) = 0$ o $\deg h(x) = 0$, ovvero $g(x) \in (K[x])^*$ o $h(x) \in (K[x])^*$, dunque $f(x)$ è irriducibile in $K[x]$.
Verifichiamo il viceversa, sia $f(x)$ primitivo ed irriducibile in $K[x]$, e sia $f(x) = g(x)h(x)$ in $A[x]$ (e anche in $K[x]$), poiché $f(x)$ è irriducibile in $K[x]$ $g(x)$ o $h(x)$ sono invertibili in $K[x]$ e quindi costanti, supponiamo quindi ad esempio che sia $g(x) \in A$, da ciò segue che:

$$1 = c(f(x)) = c(g(x)h(x)) = c(g(x))c(h(x)) = gc(h(x))$$

dove nell'ultima uguaglianza abbiamo usato il fatto che, essendo $g(x)$ costante, allora è uguale al suo contenuto, dunque $g \in A^*(= (A[x])^*)$, pertanto $f(x)$ è irriducibile in $A[x]$.

$\square$

Proposizione 2.123 (Condizione (i) per $A[x]$)
Dato A UFD, in $A[x]$ ogni irriducibile è primo.

Dimostrazione. Sia $f(x) \in A[x]$ irriducibile, per dimostrare che è primo bisogna verificare che $\forall g(x), h(x) \in A[x]$ si ha che:

$$f(x) \mid g(x)h(x) \implies f(x) \mid g(x) \quad \text{o} \quad f(x) \mid h(x) \quad \text{in } A[x]$$

Distinguiamo due casi:

- Se $\deg f(x) = 0$, ovvero $f(x) = f \in A$, dunque se f è irriducibile in A, essendo A UFD, allora f è primo in A; infatti abbiamo che:

$$f \mid gh \implies f = c(f) \mid c(gh) = c(g)c(h) \implies f \mid c(g) = g \quad \text{o} \quad f \mid c(h) = h$$

dunque f primo.

- Sia $f(x)$ primitivo e irriducibile in $K[x]$, con $\deg f(x) \geq 1$, si osserva che $K[x]$ è euclideo, dunque $f(x)$ è primo in $K[x]$ (poiché avevamo detto che ED $\subset$ UFD), dunque se:
$$f(x) \mid g(x)h(x) \qquad \text{in } A[x]$$
allora $f(x) \mid g(x)$ o $f(x) \mid h(x)$ in $K[x]$. Avendo supposto che $f(x)$ è primitivo, allora per il Corollario 2.118:
$$f(x) \mid g(x)h(x) \qquad \text{in } A[x]$$

□

Proposizione 2.124 (Condizione (ii) per $A[x]$)
Sia $\{f_n(x)\}$ una successione di elementi di $A[x]$ tale che:
$$f_{i+1}(x) \mid f_i(x)$$
allora è stazionaria, ovvero $\exists n_0$ tale che $f_i(x) \sim f_{n_0}(x)$, $\forall i \geq n_0$.

Dimostrazione. Si osserva che per il Lemma di Gauss si ha che:
$$f(x) \mid g(x) \implies c(f(x)) \mid c(g(x)) \qquad \text{e} \qquad f'(x) \mid g'(x)$$
infatti, se $g(x) = f(x)h(x) \implies c(g(x))g'(x) = c(f(x))f'(x)c(h(x))c'(x)$, ma per quanto detto $c(g(x)) = c(f(x)h(x)) = c(f(x))c(hc(x))$, da cui $f'(x) \mid g'(x)$. Alla successione $\{f_i(x)\}$ possiamo quindi associare le successioni $\{c(f_i(x))\}$ e $\{f_i'(x)\}$, per quanto abbiamo detto si ha:
$$c(f_{i+1}(x)) \mid c(f_i(x)) \qquad \text{e} \qquad f_{i+1}'(x) \mid f_i'(x) \qquad \forall i \geq 0$$
dove la successione $\{c(f_i(x))\}$ è stazionaria, in quanto è una catena discendete di divisibilità dell'UFD A, dunque:
$$\exists m_0 : c(f_i(x)) \sim c(f_{m_0}(x)) \qquad \forall i \geq m_0$$
Consideriamo ora $\{f_i'(x)\}$ e associamo a questa la successione $\{\deg f_i'(x)\}$, ma dalla condizione:
$$f_{i+1}'(x) \mid f_i'(x) \implies \deg f_{i+1}'(x) \leq \deg f_i'(x)$$
dunque $\{\deg f_i'(x)\}$ è una successione di numeri naturali decrescente, pertanto si stabilizza:
$$\exists d_0 : \deg f_i'(x) \leq \deg f_{d_0}'(x) \qquad \forall i \geq d_0$$
pertanto $\forall i \geq d_0$ abbiamo che $f_i'(x)$ e $\deg f_{i+1}'(x)$ hanno lo stesso grado e $f_i'(x) \mid f_{d_0}'(x)$, cioè differiscono per una costante, ma essendo entrambi primitivi la costante deve essere un'unità, per cui:
$$f_i'(x) \sim f_{d_0}'(x) \qquad \forall i \geq d_0$$
dunque, detto $n_0 = \max\{m_0, d_0\}$, $\forall i \geq n_0$ vale contemporaneamente che:
$$c(f_i(x)) \sim c(f_{m_0}(x)) \qquad \text{e} \qquad f_i'(x) \sim f_{d_0}'(x)$$
da cui la tesi:
$$f_i(x) = c(f_i(x))f_i'(x) \sim c(f_{n_0}(x))f_{n_0}'(x) \qquad \forall i \geq n_0$$

□

Con la dimostrazione di quest'ultima proposizione abbiamo concluso la dimostrazione del Teorema di Caratterizzazione degli UFD.

Osservazione 2.125 — Osserviamo che in generale se A è un PID, allora non è sempre vero che $A[x]$ sia un PID, ad esempio nel caso di $\mathbb{Z}$ sappiamo che $\mathbb{Z}[x]$ non è un PID, in quanto, ad esempio, l'ideale $I = (2, x)$ non è principale. Analogamente, in generale se A è un ED, allora non è sempre vero che $A[x]$ sia un ED, anche qui come controesempio possiamo considerare il caso di $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Z}[x]$.

Osservazione 2.126 — Se K è un campo, allora abbiamo che $K[x]$ è euclideo, mentre $K[x, y]$ è un UFD (poiché vale sempre il Teorema di Caratterizzazione degli UFD, e $K[x]$ è un UFD), ma $K[x, y]$ non è un PID, in quanto ad esempio $I = (x, y)$ non è principale.

Esercizio 2.127. Dimostrare che dato $K[x, y]$ campo, l'ideale $I = (x, y)$ non è principale.

Soluzione. □

Proposizione 2.128 (Criterio di irriducibilità Eisenstein)
Dato A UFD e $f(x) \in A[x]$ primitivo, con $f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$, e $p \in A$ un primo tale che:

(1) $p \nmid a_n$.

(2) $p \mid a_i$, $\forall i \in \{0, \ldots, n-1\}$.

(3) $p^2 \nmid a_0$.

Allora $f(x)$ è irriducibile in $A[x]$ (e in $K[x]$, con K campo dei quozienti di A).

Dimostrazione. La dimostrazione è identica a quella già trattata in Aritmetica, con la sola differenza che in questo caso utilizziamo un UFD generico al posto di $\mathbb{Z}$.
Supponiamo per assurdo che $f(x)$, con $\deg(f(x)) = n$ sia riducibile, allora:

$$f(x) = g(x)h(x)$$

con $\deg f(x) = m \geq 1$, $\deg(h(x)) = n - m \geq 1$. Possiamo applicare la proiezione al quoziente modulo (p), e per le ipotesi si ha:

$$\overline{f(x)} = \overline{a_n}x^n (\neq \overline{0})$$

e inoltre:

$$\pi_{(p)}(f(x)) = \pi_{(p)}(g(x))\pi_{(p)}(h(x))$$

con:

$$\pi_{(p)}(g(x)) = \overline{b_m}x^m + \ldots + \overline{b_0} \qquad \text{e} \qquad \pi_{(p)}(h(x)) = \overline{c_{n-m}}x^{n-m} + \ldots + \overline{c_0}$$

Si ha che $\pi_{(p)}(f(x)) \in \dfrac{A}{(p)}[x]$ (che è un campo), quindi UFD, da ciò segue che $\pi_{(p)}(g(x))$ e $\pi_{(p)}(h(x))$ sono fattori del polinomio $\overline{a_n}x^n$, da cui segue, per la definizione di prodotto tra polinomi che:

$$\pi_{(p)}(g(x)) = \overline{b_m}x^m \qquad \text{e} \qquad \pi_{(p)}(h(x)) = \overline{c_{n-m}}x^{n-m}$$

ma da ciò segue che $b_0 \equiv c_0 \equiv 0 \pmod{p}$, da cui $a_0 \equiv b_0 c_0 \equiv 0 \pmod{p^2}$, ovvero $p^2 \mid a_0$, ma ciò è assurdo. □

§2.11 Terne pitagoriche

Definizione 2.129. Si definiscono **terne pitagoriche** le terne di soluzioni intere dell'equazione:

$$x^2 + y^2 = z^2 \qquad x, y, z \in \mathbb{Z}$$

con $(x, y, z) = 1$.

Osserviamo che possiamo riformulare il problema negli interi di Gauss nel modo che segue:

$$x^2 + y^2 = (x + iy)(x - iy) = z^2$$

dunque determinare le terne pitagoriche significa risolvere questo problema moltiplicativo in $\mathbb{Z}[i]$.

Osservazione 2.130 — Osserviamo che la coprimalità dei tre fattori la implica anche a coppie: $(x, y, z) = 1 \implies (x, y) = (x, z) = (y, z) = 1$.

Osservazione 2.131 — Abbiamo che $x \not\equiv y \pmod 2$, infatti, studiando l'equazione modulo 4:

$$x^2 + y^2 \equiv z^2 \pmod 4$$

dove essendo un quadrato modulo 4 abbiamo che $z^2 \in \{0, 1\}$, dunque $x^2, y^2 \in \{0, 1\}$, ma non possono essere contemporaneamente pari, altrimenti avremmo che $(x, y) \neq 1$, e neppure contemporaneamente dispari, altrimenti la somma dei loro quadrati modulo 4 sarebbe 2, pertanto x ed y sono uno pari e l'altro dispari.

Osservazione 2.132 — Consideriamo l'ideale $I = (x + iy, x - iy)$, verifichiamo che $I = (1)$, o equivalentemente che $x + iy$ e $x - iy$ sono coprimi (abbiamo visto che in un ED l'ideale generato da due elementi è quello generato dal loro M.C.D.). Osserviamo che:

$$2x = (x + iy) + (x - iy) \in I$$

Analogamente, considerando la differenza si ha $2y \in y$ e, considerando il prodotto, $x^2 + y^2 \in I$; poiché x ed y hanno diversa parità, $x^2 + y^2$ è dispari, mentre $2x$ è pari, dunque si ha che:

$$1 \in (2x, 2y, x^2 + y^2) \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}[i]$$

infatti, se non ci fosse 1, $\exists p$ tale che $p \mid 2x$, $p \mid 2y$, da cui $p = 2$ (in quanto $(x, y) = 1$), ma $2 = p \mid x^2 + y^2$, che però è dispari, dunque:

$$I = (1)$$

o equivalentemente $x + iy$ e $x - iy$ sono coprimi e quindi entrambi dei quadrati a meno di unità.

Osservazione 2.133 (Invertibili di $\mathbb{Z}[i]$) — Osserviamo che gli elementi di $(\mathbb{Z}[i])^*$ sono gli $u \in \mathbb{Z}[i]$ tali per cui $\exists v \in \mathbb{Z}[i]$:

$$uv = 1^{a} \implies v = \overline{u} \implies u\overline{u} = 1$$

ovvero $u = \varepsilon + i\delta \in \mathbb{Z}[i]$ dove:

$$u\overline{u} = \varepsilon^2 + \delta^2 = 1$$

che ha per soluzioni:

$$\begin{cases} \varepsilon = \pm 1 \\ \delta = 0 \end{cases} \qquad \text{e} \qquad \begin{cases} \varepsilon = 0 \\ \delta = \pm 1 \end{cases}$$

dunque $(\mathbb{Z}[i])^* = \{\pm 1, \pm i\}$.

[a] Stiamo usando il fatto che nei complessi il prodotto fa 1 se è tra elementi coniugati.

Allora, per quanto detto sappiamo che:

$$x + iy = u\alpha^2 \qquad \alpha \in \mathbb{Z}[i], u \in \{\pm 1, \pm i\}$$

e analogamente:

$$x - iy = \overline{u}\,\overline{\alpha}^2 \qquad \overline{\alpha} \in \mathbb{Z}[i], \overline{u} \in \{\pm 1, \pm i\}$$

Considerando $\alpha = a + ib$ si ottiene:

$$x + iy = u(a^2 - b^2 - 2iab)$$

distinguiamo ora due casi:

- Se $u = \pm 1$, allora si ottiene:

$$\begin{cases} x = \pm(a^2 - b^2) \\ y = \mp 2ab \\ z = \pm(a^2 + b^2) \end{cases}$$

- Se $u = \pm i$, allora si ottiene:

$$\begin{cases} x = \mp 2ab \\ z = \pm(a^2 - b^2 - 2) \\ y = \pm(a^2 + b^2) \end{cases}$$

che forniscono la parametrizzazione delle terne pitagoriche e rispondono al problema iniziale di determinarle.

Osservazione 2.134 (Ultimo teorema di Fermat) — Il procedimento risolutivo appena utilizzato nel caso delle terne pitagoriche non può essere generalizzato al caso dell'equazione:

$$x^n + y^n = z^n \qquad n \geq 3$$

inizialmente, possiamo considerare solo il caso in cui $n = p$, infatti, se non ci fossero soluzioni nemmeno nel caso di un primo, non potremmo trovarle nel caso generale. Distinguiamo due casi:

- Se $p \nmid xyz$, abbiamo $x^p + y^p = z^p$ che può essere fattorizzata:

  $$(x + y)(x + \zeta_p y) \dots (x + \zeta_p^{p-1} y) = z^p \qquad \text{in } \mathbb{Z}[\zeta_p]$$

  si può dimostrare in questo caso che i fattori sono a due a due coprimi, ma da ciò non possiamo concludere che sono tutte potenze p-esime (altrimenti a questo punto potremmo dimostrare che non esistono soluzioni), perché in generale $\mathbb{Z}[\zeta_p]$ **non** è un UFD, ad esempio per $p = 23$ non è vero[a].

- Se p divide esattamente uno tra x,y e z, ma non discutiamo ora questo caso.

[a] Ed anzi è proprio il più piccolo primo per il quale non funziona.

§3 Campi

§3.1 Riepilogo sulle estensioni di campi

Definizione 3.1. Dato un campo K ed una sua estensione L, $\alpha \in L$ si dice **algebrico** su K se:

$$\exists f(x) \in K[x] \setminus \{0\} : f(\alpha) = 0$$

Definizione 3.2. Dato un campo K ed una sua estensione L, $\alpha \in L$ si dice **trascendente** su K se non è algebrico, ovvero:

$$\nexists f(x) \in K[x] \setminus \{0\} : f(\alpha) = 0$$

Definizione 3.3. Dato un campo K, una sua estensione L, e $\alpha \in L$, possiamo definire l'**omomorfismo di valutazione** di α su $K[x]$ come:

$$\varphi_\alpha : K[x] \longrightarrow K[\alpha](\subset L) : f(x) \longmapsto f(\alpha)$$

Per tale omomorfismo vale il diagramma:

$$\begin{tikzcd} K[x] \arrow[r, two heads, "\varphi_\alpha"] \arrow[d, two heads, "\pi_{\ker \varphi_\alpha}"'] & K[\alpha](\subset L) \\ \dfrac{K[x]}{\ker \varphi_\alpha} \arrow[ur, "\sim", "\overline{\varphi_\alpha}"'] & \end{tikzcd}$$

Da cui abbiamo che:

$$K[\alpha] \cong \frac{K[x]}{\ker \varphi_\alpha}$$

dove $K[\alpha]$ è un dominio perché è un sottoanello di un campo, dunque $\ker \varphi_\alpha \subset K[x]$ è un ideale primo (per l'(1) della Proposizione 2.56).

Osservazione 3.4 — Ricordiamo che, data un'estensione $K \subset L$, si ha per $\alpha \in L$ che:

- α è trascendente su $K \iff \ker \varphi_\alpha = \{0\} \iff \varphi_\alpha$ è iniettivo $\iff K[x] \cong K[\alpha]$.
- α è algebrico su $K \iff \ker \varphi_\alpha \neq \{0\} \iff \varphi_\alpha$ non è iniettivo.

Se consideriamo $\alpha \in L$ algebrico su $K[x]$, dunque $\ker \varphi_\alpha \neq \{0\}$, poiché $K[x]$ è un PID, allora $\ker \varphi_\alpha$ è un ideale massimale di $K[x]$ (poiché vale la Proposizione 2.95), dunque $\dfrac{K[x]}{\ker \varphi_\alpha}$ è un campo, e lo è quindi $K[\alpha]$, di conseguenza, coincide col suo campo dei quozienti[49] $K[\alpha] = K(\alpha)$.

Osservazione 3.5 — Poiché $K[x]$ è un PID, si ha che $\ker \varphi_\alpha = (\mu_\alpha(x))$, con $\mu_\alpha(x) \in \ker \varphi_\alpha$, ed essendo un ideale massimale $\mu_\alpha(x)$ è irriducibile in $K[x]$ (Proposizione 2.86). Inoltre, scegliamo $\mu_\alpha(x)$ come l'unico generatore monico, infatti essendo $K[x]$ anche un ED, per la Proposizione 2.93 sappiamo che i suoi ideali sono generati da elementi di grado minimo, e tali elementi differiscono per un elemento di $K \setminus \{0\}$.

[49] Volendo per la Proposizione 2.69.

Definizione 3.6. Data l'estensione ${}^{L}\!/_{K}$ ($K \subseteq L$), si dice **grado** di ${}^{L}\!/_{K}$:

$$[L : K] = \dim_K L$$

se $[L : K] < +\infty$, diciamo che ${}^{L}\!/_{K}$ è un'estensione **finita** (o di **grado finito**).

Proposizione 3.7 (Grado di un'estensione semplice)
Data l'estensione ${}^{L}\!/_{K}$ e $\alpha \in L$, allora il grado dell'estensione semplice $K \subseteq K(\alpha)$ è dato da:

$$[K(\alpha) : K] = \begin{cases} +\infty & \text{se } \alpha \text{ è trascendente su } K \\ \deg \mu_\alpha(x) & \text{se } \alpha \text{ è algebrico su } K \end{cases}$$

Dimostrazione. Osserviamo che per quanto già detto, α è trascendente su K se e solo $\ker \varphi_\alpha = \{0\}$ (a questo punto abbiamo già concluso la dimostrazione della prima parte), quindi se e solo se l'omomorfismo di valutazione è iniettivo, ed essendo surgettivo per definizione, si ha che:

$$K[x] \cong K[\alpha] \iff K(x) \cong K(\alpha)$$

Analogamente, per quanto detto, α algebrico su K è equivalente a dire:

$$K(\alpha) \cong K[\alpha] \cong \frac{K[x]}{(\mu_\alpha(x))}$$

con l'isomorfismo che manda la base $\{\overline{1}, \overline{x}, \dots, \overline{x}^{n-1}\}$ di $\dfrac{K[x]}{(\mu_\alpha(x))}$, in $\{1, \alpha, \dots, \alpha^{n-1}\}$, ovvero la K-base di $K(\alpha)$, da cui segue che:

$$\dim_K K(\alpha) = n = \deg \mu_\alpha(x)$$

□

Proposizione 3.8 (Proprietà delle torri di estensioni)
Data una torre di estensioni $K \subset F \subset L$, ${}^{F}\!/_{K}$ è finita se e solo se ${}^{F}\!/_{L}$ e ${}^{L}\!/_{K}$ sono finite e inoltre:

$$[F : K] = [F : L][L : K]$$

Dimostrazione. La dimostrazione è identica a quella già vista in Aritmetica. Siano $[F : K] = n$ e $[L : F] = m$, verifichiamo che $[L : K] = nm$; per definizione sappiamo che $[F : K] = n$ ovvero F è un K-spazio vettoriale con $\dim_K F = n$, e ugualmente, $[L : F] = m$ ovvero L è un F-spazio vettoriale con $\dim_F L = m$, possiamo considerare allora una K-base di F, $\{v_1, \dots, v_n\}$, ed una F-base di L, $\{w_1, \dots, w_m\}$, per dimostrare la tesi, dobbiamo dimostrare che $\dim_K L = nm$, ovvero L ammette una K-base di cardinalità nm. Consideriamo l'insieme $\{v_i w_j\}_{i=1,\dots,n}^{j=1,\dots,m}$, come si osserva facilmente, esso ha cardinalità nm, dimostriamo quindi che tale insieme è una K-base di L, per fare ciò verifichiamo separatamente che gli elementi di $\{v_i w_j\}_{i=1,\dots,n}^{j=1,\dots,m}$ generano tutti gli elementi di L e che sono tra loro linearmente indipendenti:

- Sia $\alpha \in L$, poiché L è per ipotesi un F-spazio vettoriale, quindi $L = \langle w_1, \ldots, w_m \rangle_F$, si ha che:
$$\alpha = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j w_j \qquad\qquad \lambda_j \in F$$
d'altra parte, poiché F è un K-spazio vettoriale, quindi $F = \langle w_1, \ldots, w_m \rangle_K$, si ha che:
$$\lambda_j = \sum_{i=1}^{n} a_{j_i} v_i \qquad\qquad a_{j_i} \in K$$
e sostituendo si ottiene:
$$\alpha = \sum_{j=1}^{m} \left(\sum_{i=1}^{n} a_{j_i} v_i \right) w_j = \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} a_{j_i} v_i w_j \qquad\qquad a_{j_i} \in K$$
e quindi l'insieme $\{v_i w_j\}_{i=1,\ldots,n}^{j=1,\ldots,m}$ genera L su K[50].

- Per dimostrare che l'insieme $\{v_i w_j\}_{i=1,\ldots,n}^{j=1,\ldots,m}$ è costituito da elementi linearmente indipendenti, è sufficiente mostrare che la somma:
$$\sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} a_{j_i} v_i w_j = 0$$
se e solo se sono nulli tutti i coefficienti a_{j_i}. Scriviamo esplicitamente la somma esterna:
$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_{1_i} v_i \right) w_1 + \left(\sum_{i=1}^{n} a_{2_i} v_i \right) w_2 + \ldots + \left(\sum_{i=1}^{n} a_{m_i} v_i \right) w_m = 0$$
i prodotti $a_{j_i} v_i$, essendo $v_i \in F$ e $a_i \in K$, sono contenuti in F, pertanto, la somma appena scritta è una combinazione lineare dei w_j (della F-base di L), che sappiamo essere linearmente indipendenti su F (perché appunto sono una base di L), quindi la somma fa 0 se e solo se i coefficienti sono tutti nulli, ovvero:
$$\sum_{i=1}^{n} a_{1_i} v_i = \ldots = \sum_{i=1}^{n} a_{m_i} v_i = 0$$

essendo $\{v_1, \ldots, v_n\}$ una K-base di F, le singole somme $\sum_{i=1}^{n} a_{j_i} v_i$ sono nulle se e solo se $a_{j_i} = 0$, $\forall i \in \{1, \ldots, n\}$, quindi la somma iniziale è nulla se e solo se $a_{j_i} = 0$, $\forall i \in \{1, \ldots, n\}$, $\forall j \in \{1, \ldots, m\}$, quindi gli elementi di $\{v_i w_j\}_{i=1,\ldots,n}^{j=1,\ldots,m}$ sono linearmente indipendenti. □

Proposizione 3.9 (Proprietà del composto di estensioni)
Date due torri di estensioni di K, $K \subset L \subset FL$ e $K \subset F \subset FL$, con $[L : K] = m$ e $[F : K] = n$, allora $[FL : K] = d < +\infty$ e $[m, n] \mid d$.

[50] Ovviamente tutti i prodotti $v_i w_j$ sono contenuti in L per le proprietà di campo e perché appartengono a sottocampi del campo considerato.

Dimostrazione. Per dimostrare la proposizione, osserviamo che, avendo supposto $n, m < +\infty$, allora possiamo considerare FL come L-spazio vettoriale con un insieme di generatori di n elementi, da cui si ricava che FL è anche un K-spazio vettoriale di dimensione finita; per la precisione applicando due volte il Teorema delle torri di estensioni all'estensione:

$$\begin{tikzcd}
 & FL \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] \arrow[dd, dash, "d"] & \\
L \arrow[dr, dash, "m"'] & & F \arrow[dl, dash, "n"] \\
 & K &
\end{tikzcd}$$

otteniamo che $m \mid d$ e $n \mid d$, da cui la tesi. □

Definizione 3.10. Un'estensione ${}^{L}\!/_{K}$ si dice **algebrica** se $\forall \alpha \in L$, α è algebrico su K.

Proposizione 3.11 (Estensione finita $\Longrightarrow$ algebrica)
Ogni estensione di grado finito è algebrica.

Dimostrazione. Vogliamo verificare che $\forall \alpha \in L$, α è algebrico su K, abbiamo che la torre:

$$K \subseteq K(\alpha) \subseteq L$$

è finita per ipotesi ($[L : K] < +\infty$), pertanto la sottoestensione $K \subseteq K(\alpha)$ è a sua volta finita (volendo per il Teorema delle torri), quindi per la Proposizione 3.7 α è algebrico su K (poiché siamo nel caso di un'estensione semplice), ed essendo vero per ogni α, allora L è un'estensione algebrica di K. □

Proposizione 3.12 (Campo delle estensioni algebriche)
Data un'estensione ${}^{L}\!/_{K}$, sia $A = \{\alpha \in L | \, \alpha \text{ è algebrico su } K\}$, allora A è un campo (ed ovviamente è un'estensione algebrica di K).

Dimostrazione. Verifichiamo che A sia un campo; siano $\alpha, \beta \in A$, allora $[K(\alpha) : K] < +\infty$ e $[K(\beta) : K] < +\infty$, consideriamo la torre:

$$K \subseteq K(\alpha) \subseteq K(\alpha)(\beta) = K(\alpha, \beta)$$

la prima estensione è finita per ipotesi, mentre la seconda è finita per la Proposizione 3.9 in quanto estensione composta da $K(\alpha)$ e $K(\beta)$ (entrambe semplici e quindi finite perché algebriche, per la Proposizione 3.7). Essendo dunque $K \subseteq K(\alpha, \beta)$ un'estensione finita, per la Proposizione 3.11 è algebrica, quindi tutti gli elementi $\alpha \pm \beta$, $\alpha\beta$ e $\dfrac{1}{\beta}$ sono algebrici su K, pertanto A è un campo. □

Osservazione 3.13 — Il viceversa della Proposizione 3.11 in generale è falso; non lo è nel caso in cui l'estensione sia semplice, come visto nella Proposizione 3.7.

Esempio 3.14 (Estensione algebrica non finita)
Consideriamo l'estensione $\mathbb{Q} \subset \mathbb{C}$, e l'insieme $\overline{\mathbb{Q}} = \{\alpha \in \mathbb{C} | \, \alpha \text{ è algebrico su } \mathbb{Q}\}$, costruito come nella Proposizione 3.12, che è un'estensione algebrica di $\mathbb{Q}$. Verifichiamo che $[\overline{\mathbb{Q}} : \mathbb{Q}] = +\infty$; consideriamo la torre:

$$\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(\sqrt[n]{2}) \subset \overline{\mathbb{Q}} \qquad \forall n \geq 2$$

l'estensione $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(\sqrt[n]{2})$ ha grado n, in quanto il suo polinomio minimo è il 2-Eisenstein:

$$\mu_{\sqrt[n]{2}}(x) = x^n - 2$$

per il Teorema delle torri:

$$[\overline{\mathbb{Q}} : \mathbb{Q}] = [\overline{\mathbb{Q}} : \mathbb{Q}(\sqrt[n]{2})][\mathbb{Q}(\sqrt[n]{2}) : \mathbb{Q}] \geq n \qquad \forall n \geq 2$$

dunque l'estensione $\mathbb{Q} \subset \overline{\mathbb{Q}}$ ha grado $+\infty$, in quanto ha grado maggiore di n definitivamente.

Osservazione 3.15 — Ricordiamo che avevamo definito un'estensione **finitamente generata** una scrittura del tipo $L = K(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ che può essere definita equivalentemente come:

$$K(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = K(\alpha_1) \ldots (\alpha_n) = \{p(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) | p(x_1, \ldots, x_n) \in K[x_1, \ldots, x_n]\}$$

con $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ algebrici su K, o anche come il più piccolo campo che contiene K e gli elementi $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$:

$$K(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = \bigcap_{\substack{K \subseteq M \subseteq L \\ \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in M}} M$$

Proposizione 3.16 (Estensione algebrica e finitamente generata $\Longrightarrow$ finita)
Sia ${}^{L}\!/\!_{K}$ finitamente generata da elementi algebrici, $L = K(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, allora ${}^{L}\!/\!_{K}$ è finita.

Dimostrazione. Possiamo dimostrare la tesi per induzione; per $n = 1$, la tesi è vera per la Proposizione 3.7, in quanto abbiamo un'estensione semplice ed algebrica. Supponiamo la tesi vera per $n - 1$, abbiamo che:

$$K(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = K(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1})(\alpha_n)$$

consideriamo la torre:

$$K \subset K(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}) \subset K(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1})(\alpha_n)$$

dove la prima estensione è finita per ipotesi induttiva, mentre la seconda perché estensione semplice ed algebrica su un campo più piccolo, o alternativamente perché estensione composta di estensioni finite per quanto già detto, quindi vale Proposizione 3.9; pertanto per ${}^{L}\!/\!_{K}$ è finita per ogni $n \in \mathbb{N}$. $\square$

Osservazione 3.17 — Della Proposizione 3.16 vale anche il viceversa, infatti, presa un'estensione finita $[L : K] = n$, consideriamo $v_1, \dots, v_n$ una K-base di L, allora è vero che è finitamente generata:

$$L = \langle v_1, \dots, v_n \rangle_K = K(v_1, \dots, v_n)$$

dunque si può affermare che **un'estensione è finita se e solo se è finitamente generata da elementi algebrici**.

Proposizione 3.18 (Proprietà delle estensioni algebriche rispetto a torri e composto)
Valgono le seguenti proprietà per le estensioni algebriche:

(1) Data una torre di estensioni $K \subset L \subset F$, ${}^{F}\!/_{K}$ è algebrica se e solo se ${}^{F}\!/_{L}$ e ${}^{L}\!/_{K}$ sono algebriche.

(2) Date due estensioni ${}^{L}\!/_{K}$ e ${}^{M}\!/_{K}$ esse sono algebriche se e solo se l'estensione composta ${}^{LM}\!/_{K}$ è algebrica.

Osservazione 3.19 (Sulla definizione di estensione composta) **—** Dati $L, M \subset \Omega$ sottocampi dello stesso campo Ω, abbiamo che il composto è:

$$LM = L(M) = M(L)$$

ovvero il più piccolo sottocampo di Ω che contiene sia L che M. Se K ed L sono finitamente generati:

$$L = K(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \qquad \text{e} \qquad M = K(\beta_1, \dots, \beta_m)$$

allora il loro composto è dato da:

$$LM = K(\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_1, \dots, \beta_m)$$

Dimostrazione. Proviamo le due affermazioni:

(1) La prima implicazione segue quasi immediatamente, infatti, se ${}^{F}\!/_{K}$ è algebrica, allora $\forall \alpha \in F$, α è algebrico su K, dunque tutti gli $\alpha \in L \subset F$ sono algebrici su K perché elementi anche di F, pertanto L è algebrico su K; inoltre, F è algebrico su L perché contiene K, dunque tutti gli elementi di F sono già algebrici su K e quindi lo saranno anche in un campo più grande.
Viceversa sia $\alpha \in F$, per ipotesi sappiamo che ${}^{F}\!/_{L}$ e ${}^{L}\!/_{K}$ sono algebriche, quindi α è algebrico su L, dunque:

$$\exists f(x) \in L[x] \setminus \{0\} : f(\alpha) = 0 \qquad \text{con} \qquad f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$$

consideriamo $L_0 = K(a_0, \dots, a_n)$ (estensione finitamente generata ed algebrica di K), si ha per costruzione che $f(x) \in L_0[x]$, dunque α è algebrico su L_0:

$$K \subset L_0 \subset L_0(\alpha)$$

dove la prima estensione è finitamente generata ed algebrica (perché $\forall a_i \in L$, a_i è algebrico su K), pertanto è finita per la Proposizione 3.16, inoltre la seconda estensione è a sua volta finita perché algebrica (quindi vale la Proposizione 3.11), di conseguenza, per il Teorema delle torri, la torre di estensione è finita, $[L_0(\alpha) : K] < +\infty$, dunque, sempre per la Proposizione 3.11 ${L_0(\alpha)}/{K}$ è algebrica. Abbiamo quindi dimostrato che $\alpha \in F$ è algebrico su K, $\forall \alpha \in F$, dunque ${F}/{K}$ è algebrica.

(2) Sia ${LM}/{K}$ algebrica e sia $\alpha \in M \subset LM$, allora è algebrico su K, in quanto tutti gli elementi di LM già lo erano, dunque non stiamo facendo altro che prendere una sottoestensione di un'estensione algebrica, che quindi sarà a sua volta algebrica, ovvero ${M}/{K}$ algebrica; in maniera identica ${L}/{K}$ è anch'essa algebrica.
Supponiamo ora che ${L}/{K}$ e ${M}/{K}$ siano algebriche, consideriamo $\alpha \in LM = L(M)$, ovvero $\alpha = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i m_i$, con $\lambda_i \in L$ e $m_i \in M$, dunque:

$$\alpha \in F = K(\lambda_1, \dots, \lambda_n, m_1, \dots, m_n)$$

dove tale estensione è algebrica (perché tutti gli elementi che abbiamo aggiunto sono algebrici), quindi per la Proposizione 3.16 è finita, e dunque α è algebrico su K, $\forall \alpha \in LM$, da cui la tesi.

□

§3.2 Chiusura algebrica di un campo

Definizione 3.20. Un campo Ω si dice **algebricamente chiuso** se ogni polinomio $f(x) \in \Omega[x]$ non costante ha almeno una radice in Ω.

Esempio 3.21
Per il Teorema Fondamentale dell'Algebra $\mathbb{C}$ è algebricamente chiuso.

Osservazione 3.22 — Se Ω è algebricamente chiuso gli unici polinomi irriducibili di $\Omega[x]$ sono quelli di grado 1.

Definizione 3.23. Data l'estensione ${}^{\Omega}\!/_{K}$, Ω è una **chiusura algebrica** di K se:

- Ω è algebricamente chiuso.
- ${}^{\Omega}\!/_{K}$ è un'estensione algebrica.

Esempio 3.24
Osserviamo che:

(1) $\mathbb{C}$ è la chiusura algebrica di $\mathbb{R}$.

(2) $\mathbb{C}$ non è la chiusura algebrica di $\mathbb{Q}$, poiché non tutti gli elementi di $\mathbb{C}$ sono algebrici su $\mathbb{Q}$.

Teorema 3.25 (Esistenza e unicità della chiusura algebrica)
Sia K un campo, allora esiste sempre una sua chiusura algebrica. Inoltre due qualsiasi chiusure algebriche su K sono isomorfe.[a]

[a] Nel senso che gli isomorfismi tra le varie chiusure algebriche fissano K.

Esempio 3.26
Consideriamo $\overline{\mathbb{Q}} = \{\alpha \in \mathbb{C} | \, \alpha \text{ è algebrico su } \mathbb{Q}\}$, tale insieme è un campo, per quanto asserito nella Proposizione 3.12, ed è per una chiusura algebrica di $\mathbb{Q}$, infatti ${}^{\overline{\mathbb{Q}}}\!/_{\mathbb{Q}}$ è un'estensione algebrica per definizione. Verifichiamo che $\overline{\mathbb{Q}}$ è algebricamente chiuso; sia $f(x) \in \overline{\mathbb{Q}}[x]$ non costante, allora $f(x)$ ammette almeno una radice $\alpha \in \mathbb{C}$, poiché $f(x) \in \overline{\mathbb{Q}}[x] \subset \mathbb{C}[x]$ e $\mathbb{C}$ è algebricamente chiuso. Per mostrare che $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}}$, bisogna dimostrare che α è algebrico su $\mathbb{Q}$, consideriamo la torre:

$$\mathbb{Q} \subset \overline{\mathbb{Q}} \subset \overline{\mathbb{Q}}(\alpha)$$

la prima estensione è algebrica per quanto già discusso, la seconda è algebrica perché semplice (Proposizione 3.7), dunque per torri α è algebrico su $\mathbb{Q}$, inoltre $\alpha \in \mathbb{C}$, per cui $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}}$ che quindi è algebricamente chiuso, perché quanto detto vale per qualunque polinomio in $\overline{\mathbb{Q}}[x]$.

Osservazione 3.27 — L'argomento dell'esempio precedente può essere utilizzato per costruire $\overline{K}$ chiusura algebrica di K ogni volta che si ha:

$$K \subset \Omega$$

con Ω algebricamente chiuso, definendo $\overline{K} = \{\alpha \in \Omega | \, \alpha \text{ è algebrico su } K\}$, da cui $\overline{K}$ chiusura algebrica si K (infatti $\overline{K}$ è un estensione algebrica di K per definizione, ed iterando il ragionamento precedente si mostra come sia anche algebricamente chiuso).

Definizione 3.28. Sia $f(x) \in K[x]$, con $\deg f(x) \geq 1$, e siano $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \overline{K}$ le radici di $f(x)$, si definisce **campo di spezzamento** di $f(x)$ su K il sottocampo di $\overline{K}$:

$$K(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$$

Osservazione 3.29 — La definizione di campo di spezzamento può essere estesa ad una famiglia di polinomi $\mathcal{F} = \{f_i(x) | i \in I\} \subset K[x]$, infatti, dato l'insieme delle radici di un polinomio $f_i(x)$ della famiglia, $\{\alpha_{ij}\}_{i \in I}^{j=1,\dots,n_i}$, il campo di spezzamento di $\mathcal{F}$ su K è dato da:

$$K(\{\alpha_{ij}\}_{j=1,\dots,n_i} | i \in I)$$

Tale estensione della definizione risulta necessaria soltanto nel caso di famiglie infinite di polinomi, infatti nel caso finito è sufficiente considerare il campo di spezzamento dell'unico polinomio prodotto di tutti gli altri (prodotto che non è definito nel caso di una famiglia infinita).

Esempio 3.30 (Campo di spezzamento di $x^3 - 2$)
Consideriamo $f(x) = x^3 - 2 \in \mathbb{Q}[x]$, le radici di $f(x)$ in $\mathbb{C}[x]$ sono $\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{2}\zeta_3$ e $\sqrt[3]{2}\zeta_3^2$, dunque il campo di spezzamento di $f(x)$ su $\mathbb{Q}$ è dato da :

$$\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{2}\zeta_3, \sqrt[3]{2}\zeta_3^2) = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \zeta_3)$$

dove l'ultima uguaglianza andrebbe verificata mediante doppio contenimento.

Esempio 3.31 (Campo di spezzamento di $x^n - 1$)
Consideriamo $\Phi_n(x) = x^n - 1 \in \mathbb{Q}[x]$, le radici di $\Phi_n(x)$ in $\mathbb{C}[x]$ sono gli elementi del gruppo $\langle \zeta_n \rangle = \{\alpha \in \mathbb{C} | \alpha^n = 1\}$, con ζ_n radice n-esima primitiva di 1, pertanto $\mathbb{Q}(\zeta_n)$ è il campo di spezzamento del polinomio ciclotomico n-esimo:

$$x^n - 1 = \prod_{i=0}^{n-1} (x - \zeta_n^i)$$

Ci poniamo ora il seguente problema: dato un campo K, la sua chiusura algebrica $\overline{K}$ e $\alpha \in \overline{K}$ (algebrico su K), vogliamo sapere in quanti modi si può immerge $K(\alpha)$ in $\overline{K}$ con:

$$\varphi : K(\alpha) \hookrightarrow \overline{K} \qquad \text{con} \qquad \varphi_{|K} = id_K$$

Osservazione 3.32 (Omomorfismi da campi) — Osserviamo che in generale un omomorfismo definito su un campo può avere solo nucleo banale, infatti, esso è in particolare un omomorfismo tra anelli, dunque il nucleo è un ideale, ma per la (2) della Proposizione 2.26 gli unici ideali di un campo sono se stesso e $\{0\}$, dunque il nucleo o è tutto o è banale, pertanto gli unici omomorfismi possibili da un campo sono o iniettivi o nulli.

Possiamo rispondere alla domanda iniziale per mezzo della seguente proposizione.

Proposizione 3.33 (Numero di estensioni via identità di $K(\alpha)$ a $\overline{K}$)
Dato un campo K ed $\alpha \in \overline{K}$, con $\overline{K}$ chiusura algebrica di K, detto k il numero di radici distinte di $\mu_\alpha(x)$ in $\overline{K}$, allora:

$$\exists \varphi_1, \ldots, \varphi_k : K(\alpha) \hookrightarrow \overline{K} \qquad \text{con} \qquad \varphi_{i|K} = id_K$$

ovvero esistono esattamente k estensioni distinte da $K(\alpha)$ a $\overline{K}$.

Dimostrazione. Per quanto detto sull'omomorfismo di valutazione sappiamo che $K(\alpha) \cong \dfrac{K[x]}{(\mu_\alpha(x))}$, dunque, determinando un omomorfismo da $K[x]$ ad $\overline{K}$ possiamo applicare il Primo Teorema di Omomorfismo. Sia dunque:

$$\widetilde{\varphi} : K[x] \longrightarrow \overline{K} : x \longmapsto \beta, p(x) \longmapsto p(\beta) \qquad \forall \beta \in \overline{K}$$

per tale omomorfismo abbiamo che $(\mu_\alpha(x)) \subset \ker \widetilde{\varphi} \iff \mu_\alpha(x) \in \ker \widetilde{\varphi}$ (per le proprietà degli ideali), quindi se e solo se $\mu_\alpha(\beta) = 0$, quindi per tutte le radici di $\mu_\alpha(x)$ in $\overline{K}$ si ha che:

$$\begin{tikzcd}
K[x] \arrow[r, "\widetilde{\varphi}"] \arrow[d, two heads, "\pi_{(\mu_\alpha(x))}"'] & \overline{K} \\
K(\alpha) \cong \dfrac{K[x]}{(\mu_\alpha(x))} \arrow[ur, hook, "\varphi"'] &
\end{tikzcd}$$

dove φ è un omomorfismo per il Primo Teorema di Omomorfismo, ed è iniettivo (per quanto già visto nell'Osservazione 3.32) perché omomorfismo **non nullo** tra campi (ad esempio perché $1 \longmapsto 1$). Si osserva infine che le φ_i sono distinte perché danno diversa immagine quando calcolate su x. $\square$

Dalla proposizione appena dimostrata ci poniamo un secondo problema, quello di contare il numero di radici di $\mu_\alpha(x)$ in $\overline{K}$, essendo $\overline{K}$ algebricamente chiuso, allora il numero delle radici del polinomio, ciascuna contata con la propria molteplicità, è dato da $\deg \mu_\alpha(x) = n$, a questo punto, per determinare se $\mu_\alpha(x)$ abbia o meno radici multiple possiamo fare uso del criterio che segue.

Teorema 3.34 (Criterio della Derivata)
Sia $f(x) \in K[x]$, $f(x)$, allora $f(x)$ ha radici multiple in $\overline{K}$ se e solo se $(f(x), f'(x)) \neq 1$. Inoltre se $f(x)$ è irriducibile in $K[x]$, allora $f(x)$ ha radici multiple se e solo se $f'(x) = 0$.

Dimostrazione. Il primo fatto è stato trattato in Aritmetica, quindi non ne forniremo qui una dimostrazione. Per il secondo fatto si può osservare che $f(x) \in K[x] \implies f'(x) \in K[x]$, da cui $(f(x), f'(x)) \in K[x]$ (perché si ottiene mediante l'Algoritmo di Euclide), e se $f(x)$ è irriducibile in $K[x]$ l'M.C.D. fa 1 oppure $f(x)$; dove il secondo caso si realizza se e solo se $f'(x) = 0$ (dato che $\deg f'(x) < \deg f(x)$). □

Dunque se in $K[x]$ i polinomi irriducibili non hanno derivata nulla, allora il numero delle loro radici distinte coincide con il loro grado.

Definizione 3.35. Un campo K tale per cui tutti i polinomi irriducibili in $K[x]$ hanno derivata non nulla prende il nome di **campo perfetto**.

Osservazione 3.36 (Campi perfetti) — Osserviamo che:

- Se $\operatorname{char} K = 0$, allora K è un campo perfetto, infatti, detto $f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$, allora $f'(x) = \sum_{i=0}^{n-1} i a_i x^i$, $\forall n \geq 1$, ovvero la derivata di un polinomio non costante non può essere mai nulla.

- $\mathbb{F}_{p^n}$ è perfetto $\forall p$ primo, $\forall n \geq 1$.

- Al contrario possiamo vedere che per campi con caratteristica diversa da 0 esistono polinomi irriducibili con derivata nulla, sia $K = \mathbb{F}_p(t)$ e $f(x) = x^p - t \in K[x]$, abbiamo che $f'(x) = px^{p-1} = 0$, possiamo verificare che $f(x)$ è irriducibile in $K[x]$. Osserviamo che:
$$f(x) \in \mathbb{F}_p[t][x] := A[x]$$
dove A UFD (essendo un ED), dunque per il Lemma di Gauss verificare che $f(x)$ è irriducibile in $K[x] = \mathbb{F}_p(t)[x]$ è equivalente a verificare che sia irriducibile in $A[x] = \mathbb{F}_p[t][x]$. In $A[x]$, essendo UFD vale il Criterio di Eisenstein, dunque $f(x)$ è irriducibile rispetto all'ideale $P = (t)$, che è primo in quanto massimale, infatti $\dfrac{A}{(t)} \cong \mathbb{F}_p$. Inoltre se $\alpha \in \overline{K}$ è una radice di $f(x)$, abbiamo che $f(\alpha) = \alpha^p - t = \implies t = \alpha^p$, da cui:
$$f(x) = x^p - \alpha^p = (x - \alpha)^p$$
dove nell'ultima uguaglianza abbiamo usato il lemma del Binomio Ingenuo, pertanto in realtà $f(x)$ ha un'unica radice in $\overline{K}$.

Ci limiteremo (assumendolo anche senza ripeterlo ogni volta) ai campi perfetti, pertanto un polinomio irriducibile di $K[x]$ di grado n avrà esattamente n radici distinte in $\overline{K}$.

Proposizione 3.37 (Numero di estensioni di $K(\alpha)$ a $\overline{K}$)
Dato $\alpha \in \overline{K}$, con $[K(\alpha) : K] = n$, si ha che $\forall \varphi : K \hookrightarrow \overline{K}$ immersione, esistono esattamente n estensioni a $K(\alpha)$, cioè:
$$\exists \varphi_1, \dots, \varphi_n : K(\alpha) \hookrightarrow \overline{K} \qquad \text{con} \qquad \varphi_{i|K} = \varphi$$

Osservazione 3.38 — Abbiamo già visto che ciò è vero se $\varphi = id_K$, nella Proposizione 3.33, la nuova proposizione ci permette di contare il numero di estensioni di un omomorfismo da K in $\overline{K}$ ad uno da $K(\alpha)$ in $\overline{K}$. Ad esempio, dato $K = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ e l'omomorfismo:

$$\varphi : K \hookrightarrow \overline{K} : \sqrt[3]{2} \longmapsto \sqrt[3]{2}\zeta_3$$

ci chiediamo quanti sono gli omomorfismi:

$$\varphi_i : K(\zeta_3) \hookrightarrow \overline{K} \qquad \text{con} \qquad \varphi_{i|K} = \varphi$$

cioè che quando ristretti a K si comportano come φ.

Dimostrazione. In analogia con quanto fatto nella dimostrazione della Proposizione 3.33, consideriamo:

$$\widetilde{\varphi} : K[x] \longrightarrow \overline{K} : x \longmapsto \beta : p(x) \longmapsto p(\beta) \qquad \text{con} \qquad \varphi_{i|K} = \varphi$$

per tale omomorfismo abbiamo che $(\mu_\alpha(x)) \subseteq \ker\widetilde{\varphi} \iff \widetilde{\varphi}(\mu_\alpha(x)) = 0 \iff \varphi(\mu_\alpha(x))(\beta) = 0$, dunque applichiamo φ ai coefficienti di $\mu_\alpha(x)$ (prima venivano lasciati fissi perché usavamo l'identità) e poi valutiamo il nuovo polinomio in β, pertanto β deve essere una radice di $\varphi(\mu_\alpha(x))$, dunque le estensioni di φ a $K(\alpha)$ sono tante quante le radici distinte di $\varphi(\mu_\alpha(x))$ in $\overline{K}$.
Poiché $\mu_\alpha(x)$ è irriducibile per definizione, allora $\varphi(\mu_\alpha(x))$ è irriducibile, inoltre, $\deg \mu_\alpha(x) = \deg \varphi(\mu_\alpha(x))$ (poiché l'omomorfismo è iniettivo), pertanto, essendo il campo perfetto il numero di radici distinte di $\varphi(\mu_\alpha(x))$ è uguale al suo grado, e quindi a quello di $\mu_\alpha(x)$. $\square$

Corollario 3.39 (Numero di estensioni a $\overline{K}$ di un'estensione qualsiasi)
Sia E/K un'estensione, con $[E : K] = n$, allora $\forall \varphi : K \hookrightarrow \overline{K}$ immersione, esistono n immersioni:

$$\varphi_1, \dots, \varphi_n : E \hookrightarrow \overline{K} \qquad \text{con} \qquad \varphi_{i|K} = \varphi$$

Dimostrazione. La dimostrazione segue facilmente per induzione, infatti per $n = 1$ abbiamo che l'estensione è semplice e quindi vale la Proposizione 3.37; per $n > 1$ consideriamo $\alpha \in E \setminus K$ per il quale si ha la torre di estensioni:

$$K \subset K(\alpha) \subset E$$

con $[K(\alpha) : K] = m$ e $[E : K(\alpha)] = d$. Se $m = n$, allora $E = K(\alpha)$ e siamo ancora nel caso precedente; se $1 < m < n \implies d < n$, essendo $n = md$ (in pratica stiamo supponendo di aver già messo nell'estensione almeno un nuovo elemento), dunque per la Proposzione 3.37 φ si estende in m modi a $K(\alpha)$:

$$\varphi_1, \dots, \varphi_m : K(\alpha) \hookrightarrow \overline{K} \qquad \text{con} \qquad \varphi_{i|K} = \varphi$$

Ogni $\varphi_i : K(\alpha) \hookrightarrow \overline{K}$ si estende a sua volta per ipotesi induttiva:

$$\varphi_{i1}, \dots, \varphi_{1d} : E \hookrightarrow \overline{K} \qquad \text{con} \qquad \varphi_{ij|K(\alpha)} = \varphi_i$$

dunque abbiamo $\{\varphi_{ij}\}_{i=1,\dots,m}^{j=1,\dots,d} : E \hookrightarrow \overline{K}$, ovvero $md = n$ estensioni, con $\varphi_{ij|K(\alpha)} = \varphi_i$, per cui $\varphi_{ij|K} = \varphi_{i|K} = \varphi$, quindi tutte le n estensioni funzionano. $\square$

§3.3 Estensioni normali

Definizione 3.40. Dato $\alpha \in \overline{K}$, diciamo che i **coniugati** di α su K sono le radici del polinomio minimo di α su K.

Definizione 3.41. Data un'estensione algebrica $K \subset L$, essa si dice **separabile** se il polinomio minimo di ogni elemento è un **polinomio separabile**, ovvero se ha radici tutte distinte in un suo campo di spezzamento.[51]

Nella trattazione di teoria di campi di queste dispense considereremo soltanto estensioni separabili.

Esempio 3.42

Sia $f(x) = x^3 - 2$, tale polinomio coincide con $\mu_{\sqrt[3]{2}/\mathbb{Q}}(x)$, ovvero il polinomio minimo di $\alpha = \sqrt[3]{2}$ su $\mathbb{Q}$, vogliamo studiare le immersioni di $\mathbb{Q}(\alpha)$ in $\overline{\mathbb{Q}}$:

$$\varphi : \mathbb{Q}(\alpha) \hookrightarrow \overline{\mathbb{Q}} \qquad \text{con} \qquad \varphi_{i|\mathbb{Q}} = id_{\mathbb{Q}}$$

dati i coniugati di α (dunque le radici di $\mu_{\alpha/\mathbb{Q}}$): α, $\alpha\zeta_3$, $\alpha\zeta_3^2$, il nostro omomorfismo deve mandare ogni radice in un'altra, dunque abbiamo più possibilità:

$$\varphi(\alpha) = \begin{cases} \alpha \\ \alpha\zeta_3 \\ \alpha\zeta_3^2 \end{cases}$$

pertanto in base alla scelta di $\varphi(\alpha)$ abbiamo le possibilità:

$$\varphi(\mathbb{Q}(\alpha)) = \mathbb{Q}(\varphi(\alpha)) = \begin{cases} \mathbb{Q}(\alpha) \\ \mathbb{Q}(\alpha\zeta_3) \\ \mathbb{Q}(\alpha\zeta_3^2) \end{cases}$$

da cui $\mathbb{Q}(\alpha)$ è isomorfo su $\mathbb{Q}$ (o si dice anche i tre isomorfismi fissano $\mathbb{Q}$ puntualmente) a questi tre campi (distinti), ciò è in accordo con la Proposizione 3.33.

[51] Questa definizione è stata aggiunta per completezza al materiale della professoressa, infatti verrà citata successivamente qualche volta, pertanto, sebbene non vi sarà una trattazione ulteriore a riguardo, ho ritenuto opportuno aggiungerla qui.

Esempio 3.43
Sia p un primo e consideriamo il campo ciclotomico p-esimo $\mathbb{Q}(\zeta_p)$; per tale campo abbiamo che:

$$\mu_{\zeta_p/\mathbb{Q}}(x) = \frac{x^p - 1}{x - 1} = x^{p-1} + \ldots + x + 1$$

il quale è irriducibile perché è traslato di un p-Eisenstein, pertanto i coniugati di ζ_p sono ζ_p^i, con $1 \leq i < p$ (ovvero sono $p-1$), da cui:

$$[\mathbb{Q}(\zeta_p) : \mathbb{Q}] = \phi(p) = p - 1$$

Le immersioni di ${}^{\mathbb{Q}(\zeta_p)}\!/_{\mathbb{Q}}$ sono del tipo:

$$\varphi_i : \mathbb{Q}(\zeta_p) \longrightarrow \overline{\mathbb{Q}} : \zeta_p \longmapsto \zeta_p^i \qquad \text{con} \qquad \varphi_{i|\mathbb{Q}} = id_{\mathbb{Q}}$$

ed abbiamo quindi $p-1$ possibili immersioni, ancora una volta in accordo con la Proposizione 3.33, per cui abbiamo:

$$\varphi_i(\mathbb{Q}(\zeta_p)) = \mathbb{Q}(\varphi_i(\zeta_p)) = \mathbb{Q}(\zeta_p^i) = \mathbb{Q}(\zeta_p) \qquad \forall i \in \{1, \ldots, p-1\}$$

dove l'ultima uguaglianza deriva dal fatto che $\mathbb{Q}(\zeta_p^i) \subseteq \mathbb{Q}(\zeta_p)$ e $\mu_{\zeta_p^i}(x) = \mu_{\zeta_p}(x)$, dunque abbiamo un contenimento di estensioni che hanno lo stesso grado, quindi sono la stessa estensione.

Definizione 3.44. Un'estensione algebrica ${}^{F}\!/_{K}$ si dice **normale** se:

$$\forall \varphi : F \hookrightarrow \overline{K} \qquad \text{con} \qquad \varphi_{|K} = id_K$$

si ha che $\varphi(F) = F$, ovvero l'estensione viene fissata da ogni immersione del campo di partenza nella sua chiusura algebrica.

Esempio 3.45 (Estensione normale)
Alcuni esempi di estensioni normali possono essere:

- $\mathbb{Q}(\zeta_p)$ è un'estensione normale su $\mathbb{Q}$.
- Detto $F = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \zeta_3)$, allora l'estensione ${}^{F}\!/_{\mathbb{Q}}$ è normale, infatti data:

  $$\varphi : F \hookrightarrow \overline{\mathbb{Q}} \qquad \text{con} \qquad \varphi_{|\mathbb{Q}} = id_{\mathbb{Q}}$$

  con:

  $$\varphi(\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \zeta_3)) = \mathbb{Q}(\varphi(\sqrt[3]{2}), \varphi(\zeta_3)) \overset{a}{=} \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}\zeta_3^i, \zeta_3^j) = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \zeta_3)$$

  per $i \in \{0, 1, 2\}$ e $j \in \{1, 2\}$ (dunque abbiamo 6 immersioni, come previsto dall'Corollario 3.39), quindi abbiamo F invariante rispetto a φ, per cui ${}^{F}\!/_{\mathbb{Q}}$ è un'estensione normale.

[a] Le immagini di entrambi gli elementi devono essere loro coniugati per quanto detto in precedenza.

Proposizione 3.46 (Caratterizzazione delle estensioni normali)
Sia ${}^{F}\!/_{K}$ un'estensione algebrica (finita)[a], sono fatti equivalenti:

(1) ${}^{F}\!/_{K}$ normale.

(2) Ogni polinomio irriducibile $f(x) \in K[x]$ che ha una radice in F ha tutte le sue radici in F.

(3) F è il campo di spezzamento su K di una famiglia di polinomi di $K[x]$.

[a] La proposizione è vera anche senza questa ipotesi, ma la dimostriamo solo in questo caso.

Dimostrazione. Verifichiamo le varie equivalenze:

- (1) $\implies$ (2): sia $f(x) \in K[x]$ e siano $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \overline{K}$ le radici di F, per ipotesi sappiamo che $f(x)$ ha almeno una radice in F, supponiamo sia α_1, allora $K(\alpha_1) \subset F$, dunque $\forall i \in \{1, \dots, n\}$ consideriamo le immersioni:

$$\varphi_i : K(\alpha_1) \hookrightarrow K(\alpha_i) \subseteq \overline{K} : \alpha_1 \longmapsto \alpha_i \qquad \text{con} \qquad \varphi_{i|K} = id_K$$

esse esistono sempre per la Proposizione 3.33, inoltre, $\forall i \in \{1, \dots, n\}$ sia $\widetilde{\varphi}_i$ un'estensione di φ_i a F, cioè ogni immersione di $K(\alpha_i)$ si estende ad F in tanti modi quanti il grado $[F : K(\alpha_1)]$, pertanto, fissata un'estensione di φ_i:

$$\widetilde{\varphi}_i : (K(\alpha_i) \subset) F \longrightarrow \overline{K} \qquad \text{con} \qquad \widetilde{\varphi}_{i|K(\alpha_1)} = \varphi_i \implies \widetilde{\varphi}_{i|K} = id_K$$

cioè $\widetilde{\varphi}_i$ si restringe a K proprio come φ_i, da cui, essendo ${}^{F}\!/_{K}$ normale, si ha che $\widetilde{\varphi}_i(F) = F$, ma in particolare ciò significa che dalla radice α_1 di $f(x)$, che va nei suoi coniugati mediante $\widetilde{\varphi}_i$, otteniamo tutte le altre radici dentro F:

$$\widetilde{\varphi}_i(\alpha_1) = \varphi_i(\alpha_1) = \alpha_i \in F \qquad \forall i \in \{1, \dots, n\}$$

che prova la tesi.

- (2) $\implies$ (3): Consideriamo F_0 il campo di spezzamento su K della famiglia di polinomi:

$$\mathcal{F} = \{\mu_\alpha(x) | \alpha \in F,\ \mu_\alpha(x) \text{ polinomio minimo di } \alpha \text{ su } K\}$$

abbiamo che $F \subseteq F_0$, poiché abbiamo aggiunto tutte le radici di tutti i polinomi minimi di tutti gli elementi di F, dunque F_0 contiene almeno F. D'altra parte:

$$F_0 = K(\beta |\, \beta \text{ radice di } \mu_\alpha(x) \in \mathcal{F})$$

dove $\mu_\alpha(x)$ è irriducibile su $K[x]$ e α è una sua radice in F, dunque per ipotesi F contiene tutte le radici β di $\mu_\alpha(x)$, $\forall \mu_\alpha(x) \in \mathcal{F}$, ovvero $F_0 \subseteq F$, quindi $F = F_0$, per cui F è proprio il campo di spezzamento dei polinomi della famiglia $\mathcal{F}$.

- (3) $\implies$ (1): Consideriamo:

$$\varphi : F \hookrightarrow \overline{K} \qquad \text{con} \qquad \varphi_{|K} = id_K$$

vogliamo dimostrare che $\varphi(F) = F$, avendo per ipotesi che F è il campo di spezzamento di:

$$\mathcal{F} = \{f_1(x), \dots, f_k(x)\}$$

per cui $\{\alpha_{ij}\}_{j=1,\dots,n_i}$ sono le radici di $f_i(x)$, dunque possiamo riscrivere F come:

$$F = K(\{\alpha_{ij}\}|i = 1,\dots,k, j = 1,\dots,n_i)$$[52]

Sappiamo che per ogni i e j, poiché φ è un'immersione deve mandare le radici in loro coniugati, dunque $\varphi(\alpha_{ij}) = \alpha_{ij'}$ (ovvero un'altra radice dello stesso polinomio $f_i(x) \in K[x]$, con $\mu_{\alpha_{ij}}(x) \mid f_i(x)$), da cui abbiamo che:

$$\varphi(F) = \varphi(K(\{\alpha_{ij}\}|i = 1,\dots,k, j = 1,\dots,n_i)) = \\ = K(\varphi(\alpha_{ij})|i = 1,\dots,k, j = 1,\dots,n_i) \subset F$$

dove il contenimento segue dal fatto che abbiamo soltanto permutato gli elementi $\{\alpha_{ij}\}$, per cui $K \subset \varphi(F) \subset F$, ma poiché F e $\varphi(F)$ hanno lo stesso grado finito su K, allora $\varphi(F) = F$.

□

Esempio 3.47 (Ogni estensione di grado 2 è normale)

Sia F/K un'estensione, supponiamo di essere in caratteristica diversa da 2[a], con $[F : K] = 2$ e sia $\alpha \in F \setminus K \implies F = K(\alpha)$ abbiamo che quindi il polinomio minimo è della forma:

$$\mu_\alpha(x) = x^2 + bx + x \in K[x]$$

con:

$$\alpha_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2} \implies \alpha = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2} \implies F = K(\alpha) = K(\sqrt{\Delta})$$

infatti si verifica facilmente che $\alpha_1, \alpha_2 \in K(\sqrt{\Delta}) = F$, ovvero F è il campo di spezzamento di $\mu_{\alpha/K}(x)$, pertanto per la (3) della Proposizione 3.46 F/K è normale.

[a] Per la precisione, l'osservazione funziona anche in questo caso, infatti l'unico polinomio di grado 2 irriducibile in un campo di caratteristica 2 può essere solo $x^2 + x + 1$ (dato che tutti quei campi estendono $\mathbb{F}_2$) e per questo si verifica che se α è una radice, $\alpha + 1$ è l'altra radice e quindi effettivamente l'estensione è sempre di grado 2.

Esempio 3.48 (Estensione non normale)

L'estensione $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})/\mathbb{Q}$ non è normale, infatti, preso $f(x) = x^3 - 2$ irriducibile su $\mathbb{Q}$ abbiamo in $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ una sola radice di $f(x)$ e non tutte, pertanto tale estensione non può essere normale.

Proposizione 3.49 (Proprietà delle estensioni normali rispetto a composto ed intersezione)

Date due estensioni F/K e L/K in una fissata chiusura algebrica $\overline{K}$ normali, allora FL/K e $F \cap L/K$ sono normali.

[52] Potremmo anche considerare il campo di spezzamento del polinomio prodotto dei precedenti, ma le radici sarebbero sempre le stesse.

Dimostrazione. La proprietà del composto segue immediatamente dal fatto che l'immersione nella chiusura algebrica:

$$\varphi : FL \longrightarrow \overline{K} \qquad \text{con} \qquad \varphi_{|K} = id_K$$

è un omomorfismo, per cui:

$$\varphi(FL) \overset{[53]}{=} \varphi(F)\varphi(L) = FL$$

dunque FL è un'estensione normale. Analogamente per l'intersezione abbiamo:

$$\varphi(F \cap L) \overset{[54]}{=} \varphi(F) \cap \varphi(L) = F \cap L$$

ed in questo caso stiamo estendendo φ sia ad L sia ad F. □

Proposizione 3.50 (Proprietà delle estensione normali rispetto alle torri)

Data una torre di estensioni $K \subset F \subset L$ in una fissata chiusura algebrica $\overline{K}$, se L/K è normale, allora L/F è normale.[a]

[a] In generale F/K non è normale.

Dimostrazione. Per ipotesi sappiamo che:

$$\forall \varphi : F \hookrightarrow \overline{K} \qquad \text{con} \qquad \varphi_{|F} = id_F$$

essendo $K \subset F$, allora id_F include già id_K, quindi $\varphi_{|F} = id_F \implies \varphi_{|K} = id_K$, dato che L/K è normale, abbiamo $\varphi(L) = L$ per tutte le immersioni φ di L che fissano K, ma abbiamo visti che le immersioni che fissano F fissano K dunque $\varphi(L) = L$ anche un questo caso, pertanto L/F è normale.
Dimostrazione alternativa.[55] L/K normale significa che è campo di spezzamento di una famiglia di polinomi in $K[x] \subseteq F[x]$, quindi L è il campo di spezzamento della stessa famiglia vista come polinomi in F. □

Osservazione 3.51 — Prendendo $K = \mathbb{Q}$, $F = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ e $L = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \zeta_3)$, abbiamo che L/K è normale in quanto tutte le radici del polinomio minimo dei due elementi sono in L, ma per lo stesso motivo F/K non è normale.

[53] Ciò deriva dal fatto che gli elementi di FL sono combinazioni polinomiali degli elementi di F e di L.
[54] Ciò andrebbe verificato, ma è abbastanza semplice.
[55] Proposta da Francesco Sorce.

Osservazione 3.52 — Osserviamo che il viceversa della Proposizione 3.50 è falso, presa ad esempio la torre:

$$\begin{array}{c} \mathbb{Q}(\sqrt[4]{2}) \\ \mid 2 \\ \mathbb{Q}(\sqrt{2}) \\ \mid 2 \\ \mathbb{Q} \end{array}$$

entrambe le estensioni sono normali, poiché di grado 2, ma la torre non è normale perché $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2})/\mathbb{Q}$ contiene solo due radici di $x^4 - 2$.

§3.4 Gruppo di Galois

Definizione 3.53. Un'estensione ${}^{E}\!/_{K}$ si dice **estensione di Galois** se è normale e separabile.

In queste dispense tratteremo soltanto il caso di estensioni di Galois finite. Poiché ${}^{E}\!/_{K}$ è normale possiamo considerare l'insieme:

$$\{\varphi : E \hookrightarrow \overline{K} | \varphi_{|K} = id_K\}$$

considerando ora lo stesso insieme, poiché l'estensione è normale, dunque $\varphi(E) = E$ per ogni φ, possiamo restringere l'insieme di arrivo degli omomorfismi ottenendo:

$$\mathrm{Aut}_K E = \{\varphi : E \underset{\sim}{\longrightarrow} E | \varphi_{|K} = id_K\}$$

i K-automorfismi di E, cioè gli automorfismi dell'estensione che fissano K, tale insieme con l'operazione di composizione forma il **gruppo di Galois**:

$$\mathrm{Gal}\left({}^{E}\!/_{K}\right) := \mathrm{Aut}_K(E)$$

con:

$$\left|\mathrm{Gal}\left({}^{E}\!/_{K}\right)\right| = [E : K]$$

Proposizione 3.54

Il gruppo di Galois dell'estensione di Galois ${}^{E}\!/_{K}$, $\mathrm{Gal}\left({}^{E}\!/_{K}\right)$ è un gruppo.

Dimostrazione. Essendo un sottoinsieme del gruppo degli automorfismi di un campo, è sufficiente mostrare che un sottogruppo, dunque date $\varphi, \psi \in \mathrm{Gal}\left({}^{E}\!/_{K}\right)$, allora si verifica che $\varphi \circ \psi \in \mathrm{Gal}\left({}^{E}\!/_{K}\right)$, inoltre, essendo automorfismi sono invertibili e i loro inversi sono ancora automorfismi, dunque:

$$\forall \varphi \in \mathrm{Gal}\left({}^{E}\!/_{K}\right) \implies \varphi^{-1} \in \mathrm{Gal}\left({}^{E}\!/_{K}\right)$$

□

Proposizione 3.55

Dato $f(x) \in K[x]$ irriducibile di grado n e detto F il suo campo di spezzamento su K, allora:

$$n \mid [F : K] \mid n!$$

e $\mathrm{Gal}\left({}^{F}\!/_{K}\right) \hookrightarrow S_n$.

Dimostrazione. Dette $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ le radici di $f(x)$ in $\overline{K}$, allora $F = K(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, da cui si ha la torre:

$$K \subseteq K(\alpha_1) \subseteq F \implies n = [K(\alpha_1) : K] \mid [F : K] = \left|\mathrm{Gal}\left({}^{F}\!/_{K}\right)\right|$$

dove la divisibilità segue ovviamente dal Teorema delle torri. Consideriamo ora:

$$\phi : \mathrm{Gal}\left({}^{F}\!/_{K}\right) \longrightarrow S(\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}) \cong S_n : \varphi \longmapsto \varphi_{|\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}}$$

Osserviamo che:

- **ϕ è ben definita**: poiché $\forall \varphi \in \text{Gal}\left({}^{F}\!/\!_{K}\right)$, φ permuta le radici di $f(x)$ poiché manda ciascuna in un suo coniugato.

- **ϕ è un omomorfismo**: si verifica direttamente che:

$$\phi(\varphi \circ \psi) = (\varphi \circ \psi)_{|\{\alpha_1,\dots,\alpha_n\}} = \varphi(\psi|\{\alpha_1,\dots,\alpha_n\}) = \varphi_{|\{\alpha_1,\dots,\alpha_n\}} \circ \psi_{|\{\alpha_1,\dots,\alpha_n\}}$$

  $\forall \phi, \psi \in \text{Gal}\left({}^{F}\!/\!_{K}\right)$, in questo caso stiamo restringendo φ alle radici perché ψ sulle radici ha immagine nelle radici, per quanto detto sopra.

- **ϕ è iniettiva**: poiché, avendo dimostrato che è un omomorfismo possiamo studiarne il nucleo:

$$\ker \phi = \left\{ \varphi \in \text{Gal}\left({}^{F}\!/\!_{K}\right) \middle| \varphi(\alpha_i) = id(\alpha_i) = \alpha_i, \forall i \in \{1,\dots,n\} \right\} = \{id\}$$

  dove l'ultima uguaglianza è data dal fatto che se φ fissa tutti i generatori di ${}^{F}\!/\!_{K}$, l'unica possibilità è che sia l'identità (banalmente perché stiamo considerando funzioni che permutano delle radici, dunque ce n'è una sola che le lascia tutte fisse ed è l'identità). In alternativa si poteva anche osservare che φ è in particolare K lineare e le radici formano una base su K di F, dunque dato che φ coincide con l'identità su queste essa è l'identità.

$\square$

Osservazione 3.56 — Con la dimostrazione precedente abbiamo anche visto che il gruppo di Galois agisce fedelmente su $\{\alpha_1,\dots,\alpha_n\}$. Inoltre tale azione è transitiva perché ha un'unica orbita:

$$\text{Orb}(\alpha_1) = \left\{ \varphi(\alpha_1) \middle| \varphi \in \text{Gal}\left({}^{F}\!/\!_{K}\right) \right\} = \{\alpha_1,\dots,\alpha_n\}$$

infatti, essendo $[K(\alpha_1) : K] = n$, allora ho esattamente n immersioni che permutano i coniugati (ognuna delle quali si può estendere ad F):

$$\forall i \in \{1,\dots,n\}, \exists \psi_i : K(\alpha_1) \longrightarrow K(\alpha_i) \subset \overline{K} : \alpha_1 \longmapsto \alpha_i$$

e per tali immersioni abbiamo appunto che l'unica orbita è quella vista sopra.

Esempio 3.57 (Gruppo di Galois)
Sia K un campo e $f(x) \in K[x]$ irriducibile, con F campo di spezzamento di $f(x)$ su K, studiamo il gruppo di Galois di ${}^{F}\!/_{K}$ al variare del grado di $f(x)$:

- Se $\deg f(x) = 2$, allora $[F : K] = 2$, per la Proposizione 3.55, dunque $\operatorname{Gal}\left({}^{F}\!/_{K}\right) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, pertanto $\operatorname{Gal}\left({}^{F}\!/_{K}\right) = \{id, \varphi\}$, dove, essendo $F = K(\sqrt{\Delta})$ abbiamo che:
$$id : a + b\sqrt{\Delta} \longmapsto a + b\sqrt{\Delta} \qquad \text{e} \qquad \varphi : a + b\sqrt{\Delta} \longmapsto a - b\sqrt{\Delta}$$
o analogamente, se fosse $f(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2)$ le applicazioni sarebbero state tali che $id : \alpha_1 \longmapsto \alpha_1$ e $\varphi : \alpha_1 \longmapsto \alpha_2$.
- Se $\deg f(x) = 3$, allora $3 \mid [F : K] \mid 6$, per la Proposizione 3.55 sappiamo che $\operatorname{Gal}\left({}^{F}\!/_{K}\right) \leqslant S_3$ pertanto:
$$\operatorname{Gal}\left({}^{F}\!/_{K}\right) \cong \begin{cases} \mathcal{A}_3 \cong \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \\ S_3 \end{cases}$$
Discutiamo di seguito entrambi i casi con due esempi.

Esempio 3.58
Se fosse $f(x) = x^3 - 2$, con $K = \mathbb{Q}$ e $F = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \zeta_3) \implies [F : K] = 6$ e quindi $\operatorname{Gal}\left({}^{F}\!/_{K}\right) \cong S_3$; per quanto detto sulle immersioni sappiamo che qualsiasi automorfismo del gruppo di Galois deve mandare un elemento nei suoi coniugati, quindi abbiamo in totale appunto 6 possibili immersioni al variare di φ:
$$\varphi(\sqrt[3]{2}) = \sqrt[3]{2}\zeta_3^i \qquad \text{e} \qquad \varphi(\zeta_3) = \zeta_3^j \qquad \text{con} \quad i \in \{0,1,2\}, j \in \{0,1\}$$
Necessariamente φ deve verificare le relazioni sopra[a] che danno al più 6 possibili φ. Poiché il grado è 6, tutte e 6 funzionano cioè si estendono ad F, ciò perché:
$$\begin{tikzcd}
 & F \arrow[dl, no head] \arrow[dd, no head] \arrow[dr, no head] & \\
\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}) \arrow[dr, no head, "3"'] & & \mathbb{Q}(\zeta_3) \arrow[dl, no head, "2"] \\
 & \mathbb{Q} &
\end{tikzcd}$$
ovvero $[F : \mathbb{Q}] = [Q(\sqrt[3]{2}) : \mathbb{Q}][\mathbb{Q}(\zeta_3) : \mathbb{Q}] = 6$.

[a] E per la precisione, affinché il discorso fatto sopra funzioni gli elementi devono essere algebricamente indipendenti.

Esempio 3.59 (Vi sconsiglio caldamente di leggere quest'esempio prima che l'abbia riscritto)

[a] Consideriamo $f(x) = x^3 + x^2 - 2x - 1$, ovvero il polinomio minimo di $\zeta_7 + \zeta_7^{-1}$ su $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{Q}(\zeta_7 + \zeta^{-1})/\mathbb{Q}$, che è normale, quindi di Galois[b], abbiamo quindi che:

$$\mathrm{Gal}\left(\mathbb{Q}(\zeta_7 + \zeta_7^{-1})/\mathbb{Q}\right) \cong \mathcal{A}_3$$

verifichiamo quanto appena detto. Abbiamo che $[\mathbb{Q}(\zeta_7) : \mathbb{Q}] = \phi(7) = 6$, pertanto:

$$\mathrm{Gal}\left(\mathbb{Q}(\zeta_7)/\mathbb{Q}\right) = \{\varphi : \zeta_7 \longmapsto \zeta_7^i | (i, 7) = 1\}$$

Osserviamo che il polinomio scritto sopra è proprio il polinomio minimo di $\alpha = \zeta_7 + \zeta_7^{-1} \in \mathbb{Q}(\zeta_7)$, infatti per l'appartenenza appena citata sappiamo che tutte le radici di $\mu_{\zeta_7+\zeta_7^{-1}}(x)$ stanno in $\mathbb{Q}(\zeta_7)$, ed esse sono:

$$\left\{\varphi(\alpha) \middle| \varphi \in \mathrm{Gal}\left(\mathbb{Q}(\zeta_7)/\mathbb{Q}\right)\right\}$$

le radici sono queste poiché, data la torre:

$$\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Q}(\alpha) \subseteq \mathbb{Q}(\zeta_7)$$

le immersioni ψ mandano α in una qualsiasi radice coniugata di $\mu_\alpha(x)$, per cui l'insieme:

$$\{\psi(\alpha)\}$$

che, al variare delle immersioni ψ di $\mathbb{Q}(\alpha)$ in $\overline{\mathbb{Q}}$, è l'insieme delle radici di $\mu_\alpha(x)$, dunque possiamo scrivere:

$$\mu_\alpha(x) = \prod_\psi (x - \psi(\alpha))$$

D'altra parte ogni immersione ψ si estende ad uno $\varphi \in \mathrm{Gal}\left(\mathbb{Q}(\zeta_7)/\mathbb{Q}\right)$ e $\forall \varphi \in \mathrm{Gal}\left(\mathbb{Q}(\zeta_7)/\mathbb{Q}\right)$, sappiamo che $\varphi(\alpha)$ sarà ancora una radice di $\mu_\alpha(x)$, pertanto abbiamo:

$$\{\text{radici di } \mu_\alpha(x)\} = \{\psi(\alpha)\}_{\psi:\mathbb{Q}(\alpha)\longrightarrow\mathbb{Q}} = \{\varphi(\alpha)\}_{\varphi\in\mathrm{Gal}\left(\mathbb{Q}(\zeta_7)/\mathbb{Q}\right)}$$

infine abbiamo che:

$$\{\text{radici di } \mu_\alpha(x)\} = \{\varphi(\zeta_7+\zeta_7^{-1}) = \zeta_7^i+\zeta_7^{-i} | i = 1, \ldots, 6\} = \{\zeta_7+\zeta_7^{-1}, \zeta_7^2+\zeta_7^{-2}, \zeta_7^3+\zeta_7^{-3}\}$$

ciò dimostra l'assunto iniziale $[\mathbb{Q}(\zeta_7+\zeta_7^{-1}) : \mathbb{Q}] = \deg \mu_{\zeta_7+\zeta_7^{-1}}(x) = 3$. Per concludere osserviamo che l'estensione è di Galois perché è il campo di spezzamento di $\mu_{\zeta_7+\zeta_7^{-1}}(x)$ in quanto:

$$\zeta_7^2 + \zeta_7^{-2} = (\zeta_7 + \zeta_7^{-1})^2 - 2 \in \mathbb{Q}(\zeta_7 + \zeta_7^{-1})$$

e analogamente:

$$\zeta_7^3 + \zeta_7^{-3} = (\zeta_7 + \zeta_7^{-1})^3 - 3(\zeta_7 + \zeta_7^{-1}) \in \mathbb{Q}(\zeta_7 + \zeta_7^{-1})$$

si può verificare che im tal modo, con qualche calcolo, è possibile trovare l'espressione di $\mu_\alpha(x)$.

[a]Questo è l'esercizio risolto dalla Del Corso con la spiegazione più contorta in assoluto, prometto di riscriverlo per bene nella prima revisione.
[b]Ciò sempre in virtù del fatto che stiamo lavorando soltanto su estensioni separabili.

§3.5 Gruppo di Galois di $\mathbb{F}_{q^d}/\mathbb{F}_q$

Proposizione 3.60 (L'estensione $\mathbb{F}_{q^d}/\mathbb{F}_q$)
Data l'estensione $\mathbb{F}_{q^d}/\mathbb{F}_q$, con $q = p^r$, essa è normale.

Dimostrazione. Osserviamo che:

$$\forall \varphi : \mathbb{F}_{p^n} \hookrightarrow \overline{\mathbb{F}_p}$$

$\varphi(\mathbb{F}_{p^n})$ è un sottocampo di $\overline{\mathbb{F}_p}$ con p^n elementi (essendo φ iniettiva), e per l'unicità dei campi con p^n elementi deve essere necessariamente che $\varphi(\mathbb{F}_{p^n}) = \mathbb{F}_{p^n}$, pertanto l'estensione è normale.[56] □

Osservazione 3.61 — Osserviamo che tutte le estensioni di campi finiti sono normali, infatti, considerando la torre:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{F}_{p^n} = \mathbb{F}_{q^d} \arrow[d, dash, "\text{NOR.}"] \arrow[dd, dash, bend right=60, "\text{NOR.}"'] \\ \mathbb{F}_q = \mathbb{F}_{p^r} \arrow[d, dash] \\ \mathbb{F}_p \end{tikzcd}$$

dove per quanto detto $\mathbb{F}_{p^n}/\mathbb{F}_p$ è normale, dunque per la Proposizione 3.50 tutte le estensioni di campi finiti sono normali.

Definizione 3.62. Si dice **automorfismo di Frobenius** l'automorfismo:

$$\phi : \mathbb{F}_{q^d} \xrightarrow[\sim]{} \mathbb{F}_{q^d} : x \longmapsto x^q$$

Teorema 3.63 (Gruppo di Galois di estensioni di campi finiti)
Il gruppo di Galois $\mathrm{Gal}\left(\mathbb{F}_{q^d}/\mathbb{F}_q\right)$, con $q = p^r$, è generato dall'automorfismo di Frobenius ϕ di $\mathbb{F}_{q^d}$:

$$\mathrm{Gal}\left(\mathbb{F}_{q^d}/\mathbb{F}_q\right) = \langle \phi \rangle$$

con ϕ automorfismo di Frobenius del campo $\mathbb{F}_{q^d}$:

$$\phi : \mathbb{F}_{q^d} \xrightarrow[\sim]{} \mathbb{F}_{q^d} : x \longmapsto x^q$$

Dimostrazione. Per prima cosa verifichiamo che $\phi \in \mathrm{Gal}\left(\mathbb{F}_{q^d}/\mathbb{F}_q\right)$; ϕ è un omomorfismo di anelli in quanto:

$$\phi(\alpha + \beta) = (\alpha + \beta)^q = \alpha^q + \beta^q = \phi(\alpha) + \phi(\beta) \qquad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{F}_{q^d}$$

[56]Alternativamente si ricorda che in Aritmetica, avevamo costruito tutte le estensioni $\mathbb{F}_{p^n}$ di campi finiti $\mathbb{F}_p$, come campi di spezzamento del polinomio $f(x) = x^{p^n} - x \in \mathbb{F}_p[x]$.

dove l'ultima uguaglianza segue dal fatto che $q = p^r$, dunque siamo in caratteristica p e vale il Lemma del Binomio Ingenuo. Analogamente:

$$\phi(\alpha\beta) = (\alpha\beta)^q = \alpha^q\beta^q = \phi(\alpha)\phi(\beta) \qquad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{F}_{q^d}$$

si verifica facilmente inoltre che è iniettivo e surgettivo. $\forall \alpha \in \mathbb{F}_q$ si ha che $\phi(\alpha) = \alpha^q = \alpha$ (perché stiamo considerando elementi di $\mathbb{F}_q$), dunque ϕ è un automorfismo di $\mathbb{F}_{q^d}$ che lascia fisso $\mathbb{F}_q$, pertanto $\phi \in \operatorname{Gal}\left(\mathbb{F}_{q^d}/\mathbb{F}_q\right)$, per definizione. Osserviamo che per ipotesi $\operatorname{Gal}\left(\mathbb{F}_{q^d}/\mathbb{F}_q\right)$ è un gruppo di ordine d e quindi ovviamente $\operatorname{ord}\phi = k \mid d$; d'altra parte se $\phi^k = id$, $\forall \alpha \in \mathbb{F}_{q^d}$ si ha che:

$$\phi^k(\alpha) = \alpha^{q^k} = \alpha$$

cioè il polinomio $f(x) = x^{q^k} - x$ ha come radici tutti i q^d elementi di $\mathbb{F}_{q^d}$, pertanto abbiamo:

$$\deg f(x) = q^k \geq q^d = |\mathbb{F}_{q^d}| \implies k \geq d$$

da cui $k = d$ e quindi la tesi:

$$\operatorname{Gal}\left(\mathbb{F}_{q^d}/\mathbb{F}_q\right) = \langle \phi \rangle$$

□

Esempio 3.64

Consideriamo $E = {}^{\mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt{3})}\!\big/_{\mathbb{Q}}$, abbiamo che le estensioni alla chiusura algebrica via identità:

$$\varphi : E \hookrightarrow \overline{\mathbb{Q}}$$

sono determinate dalle immagini di $\sqrt{2}$ e $\sqrt{3}$, dunque abbiamo:

$$\varphi = \begin{cases} \sqrt{2} \longmapsto \pm\sqrt{2} \\ \sqrt{3} \longmapsto \pm\sqrt{3} \end{cases}$$

da cui il diagramma:

$$\begin{tikzcd}
& E \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] \arrow[dd, dash, "4"] & \\
\mathbb{Q}(\sqrt{3}) \arrow[dr, dash, "2"'] & & \mathbb{Q}(\sqrt{2}) \arrow[dl, dash, "2"] \\
& \mathbb{Q} &
\end{tikzcd}$$

dove il composto e le due estensioni semplici sono normali (perché di grado 2); le quattro immersioni possibili sono:

$$id = \varphi_1 = \begin{cases} \sqrt{2} \longmapsto \sqrt{2} \\ \sqrt{3} \longmapsto \sqrt{3} \end{cases} \qquad \varphi_2 = \begin{cases} \sqrt{2} \longmapsto -\sqrt{2} \\ \sqrt{3} \longmapsto \sqrt{3} \end{cases} \qquad \varphi_3 = \begin{cases} \sqrt{2} \longmapsto \sqrt{2} \\ \sqrt{3} \longmapsto -\sqrt{3} \end{cases}$$

$$\varphi_4 = \begin{cases} \sqrt{2} \longmapsto -\sqrt{2} \\ \sqrt{3} \longmapsto -\sqrt{3} \end{cases}$$

con $\varphi_i(E) = E$, $\forall i = 1, \dots, 4$. Il gruppo di Galois è dato da $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, poiché ha ordine 4, e tutti gli elementi, esclusa l'identità, hanno ordine 2. Si verifica facilmente via contenimenti che $\mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt{3}) = \mathbb{Q}(\sqrt{2}+\sqrt{3})$, tuttavia possiamo anche osservare a questo punto che, data la torre:

$$\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Q}(\sqrt{2}+\sqrt{3}) \subseteq E$$

di grado 4, abbiamo che:

$$\varphi_1(\sqrt{2}+\sqrt{3}) = \sqrt{2}+\sqrt{3} \qquad \varphi_2(\sqrt{2}+\sqrt{3}) = -\sqrt{2}+\sqrt{3}$$

$$\varphi_1(\sqrt{2}+\sqrt{3}) = \sqrt{2}-\sqrt{3} \qquad \varphi_1(\sqrt{2}+\sqrt{3}) = -\sqrt{2}-\sqrt{3}$$

$\gamma = \sqrt{2}+\sqrt{3}$ ha quattro immagini distinte[a] attraverso le immersioni del gruppo di Galois, e mediante questo γ viene mandato in suoi coniugati su $\mathbb{Q}$; dunque il polinomio minimo di γ su $\mathbb{Q}$ ha almeno grado 4, ma per la torre precedente ciò significa che $\mathbb{Q}(\gamma) = E$.

[a] Per essere precisi ciò significa che, data la base $\{1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{6}\}$ di E, per mezzo di questa si verifica che tutte e quattro quelle immagini hanno scrittura unica e distinta.

Osservazione 3.65 — In questo caso abbiamo assunto direttamente che $\deg \mu_\gamma(x) = 4$, perché $\deg \mu_\gamma = \#\{\psi : \mathbb{Q}(\gamma) \hookrightarrow \overline{\mathbb{Q}}\}$ e ogni ψ si estende ad E, via:

$$\varphi_i : E \hookrightarrow \overline{\mathbb{Q}}$$

pertanto $\{\varphi_i(\gamma)\}$ è l'insieme dei coniugati di γ su $\mathbb{Q}$.

§3.6 Teorema dell'elemento primitivo

Teorema 3.66 (Teorema dell'elemento primitivo)
Sia K un campo e sia E/K un'estensione finita (e separabile), allora E/K è semplice, cioè:

$$\exists \gamma \in E : E = K(\gamma)$$

Dimostrazione. Distinguiamo due casi:

- **K campo infinito**: Per ipotesi abbiamo che E/K è finita, dunque per la Proposizione 3.16, ciò è equivalente al dire che E è finitamente generata da elementi algebrici, $E = K(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, dimostriamo per induzione che E/K è semplice. Per $n = 2$ (trattiamo solo di questo caso in quanto una volta dimostrata la tesi per $n = 2$, basterà come al solito aggiungere un altro alla volta e procedere per induzione usando il caso $n = 2$ come fatto che rende vero il passo induttivo[57]) abbiamo $E = K(\alpha, \beta)$, sia $[E : K] = n$, allora per il Corollario 3.35:

$$\exists \varphi_1, \dots, \varphi_n : E \hookrightarrow \overline{K} \qquad \text{con} \qquad \varphi_{i|K} = id_K$$

sia x un'indeterminata, consideriamo i polinomi $\alpha + \beta x$, possiamo definire il polinomio:

$$F(x) = \prod_{i<j} (\varphi_i(\alpha) + x\varphi_i(\beta) - \varphi_j(\alpha) - x\varphi_j(\beta)) \in \overline{K}[x]^{58}$$

con $\deg F(x) \leq \binom{n}{2}$ e $F(x) \neq 0$ in quanto se un fattore fosse 0, quindi $\varphi_i(\alpha) + x\varphi_i(\beta) = \varphi_j(\alpha) + x\varphi_j(\beta)$, da cui $x(\varphi_i(\beta) - \varphi_j(\beta)) + \varphi_i(\alpha) - \varphi_i(\alpha) = 0$, per il principio di identità dei polinomi avremmo:

$$\begin{cases} \varphi_i(\beta) - \varphi_j(\beta) = 0 \\ \varphi_i(\alpha) - \varphi_i(\alpha) = 0 \end{cases} \qquad \iff \qquad \begin{cases} \varphi_i(\beta) = \varphi_j(\beta) \\ \varphi_i(\alpha) = \varphi_i(\alpha) \end{cases}$$

da cui $\varphi_i \equiv \varphi_j$ perché $E = K(\alpha, \beta)$ (infatti due immersioni in cui i generatori coincidono sono la stessa immersione), ma ciò è assurdo, in quanto avevamo assunto $i < j$. Dunque il polinomio è non nullo ed ha grado limitato, sappiamo quindi che $F(x)$ ha al più $\deg F(x)$ radici in $\overline{K}$ e poiché K è un campo infinito, allora $\exists t \in K$ tale che $F(t) \neq 0$, dunque:

$$F(t) = \prod_{i<j} (\underbrace{\varphi_i(\alpha) + t\varphi_i(\beta)}_{=\varphi_i(\alpha + x\beta)} \underbrace{-\varphi_j(\alpha) - t\varphi_j(\beta)}_{=-\varphi_j(\alpha + x\beta)}) \neq 0$$

da ciò abbiamo che:

$$\varphi_i(\alpha + t\beta) \neq \varphi_j(\alpha + t\beta) \qquad \forall i \neq j$$

quindi $\gamma = \alpha + t\beta$ ha n coniugati, pertanto $[K(\gamma) : K] = n \implies E = K(\gamma)$ (ovvero le due estensioni dello stesso campo hanno lo stesso grado e quindi coincidono).

[57] Andrebbe dimostrato anche il caso $n = 1$, ma è banale.
[58] È come se applicassimo φ_i al polinomio $\alpha + \beta x$ e poi vi sottraessimo φ_j applicata allo stesso.

- ***K* campo finito**: Se ${}^{E}\!/_{K}$ è finita, allora E è finito, da cui, per la nota proprietà sui sottogruppi moltiplicativi di un campo finito, sia che E^* è un sottogruppo moltiplicativo finito di E ed è ciclico, $E^* = \langle \gamma \rangle$, ma per un altro teorema noto da Aritmetica, si ha che $E = K(\gamma)$.

$\square$

§3.7 Teorema di corrispondenza di Galois

Data l'estensione di Galois (finita) L/K e $H < \operatorname{Gal}(L/K)$ sottogruppo, definiamo la scrittura L^H come:

$$L^H = \operatorname{Fix}(H) := \{\alpha \in L | \varphi(\alpha) = \alpha, \forall \alpha \in H\} \subseteq L$$

ovvero il sottocampo[59] di L di tutti gli elementi fissati da tutti i K-automorfismi del sottogruppo H. Si osserva che per tale sottocampo si ha che:

$$K \subseteq L^H \subseteq L$$

la seconda inclusione segue immediatamente dalla definizione, la prima deriva dal fatto che essendo i K-automorfismi in particolare delle immersioni di L in $\overline{K}$ via identità (per come è definito il gruppo di Galois), allora almeno tutti gli elementi del campo K devono essere fissati per definizione.

Lemma 3.67 (Il campo fissato è quello base $\iff$ fissiamo rispetto a tutto il gruppo di Galois)

Sia L/M un'estensione di Galois e $H < \operatorname{Gal}(L/M)$, allora:

$$M = L^H \iff H = \operatorname{Gal}(L/M)$$

Dimostrazione. Dimostriamo separatamente le due implicazioni:

- Supponiamo che $G = \operatorname{Gal}(L/M)$ e dimostriamo che $L^G = M$. Se $M \subsetneq L^G$, allora $[L^G : M] > 1$, quindi:

  $$\exists \varphi : L^G \longrightarrow \overline{M} \qquad \text{con} \qquad \varphi_{|M} = id_M$$

  con $\varphi \neq id$ in quanto il grado è maggiore di 1, per cui non c'è solo l'identità tra le immersioni; a questo punto sappiamo dalla Proposizione 3.39 che l'immersione si può estendere ad un campo più grande, dunque sia:

  $$\widetilde{\varphi} : L \longrightarrow \overline{M} \qquad \text{con} \qquad \widetilde{\varphi}_{|L^G} = \varphi$$

  dove $\widetilde{\varphi}_{|M} = \varphi_{|M} = id$. D'altra parte abbiamo per ipotesi che L/M è normale, dunque $\widetilde{\varphi}(L) = L$, quindi: $\widetilde{\varphi} \in \operatorname{Gal}(L/M)$ (perché è un automorfismo che fissa puntualmente L e si restringe all'identità su M), da ciò abbiamo che $\widetilde{\varphi}$ fissa puntualmente L^G, che è assurdo perché avevamo supposto il grado dell'estensione maggiore di 1 (quindi con un elemento non fissato da $\widetilde{\varphi}$).

- Essendo L/M un'estensione finita, per il Teorema dell'elemento primitivo $L = M(\alpha)$, sia $H \leqslant G$ e consideriamo:

  $$f(x) = \prod_{\sigma \in H} (x - \sigma(\alpha)) \qquad \text{con} \qquad \deg f(x) = |H|$$

[59] Andrebbe verificato che è un campo.

si ha $f(x) \in L^H[x]$, poiché, se consideriamo $\rho \in H$, allora si ha:

$$\rho f(x) = \prod_{\sigma \in H} (x - \rho(\sigma(\alpha))) = \prod_{\sigma \in H} (x - \sigma(\alpha)) = f(x)$$

dove l'ultima uguagliando deriva dal fatto che anche ρ è un elemento di H, e dunque l'unica cosa che fa è permutare gli elementi dell'insieme stesso. Se $H = G$ abbiamo $|G| = [L : M] = [M(\alpha) : M] = \deg \mu_{\alpha/M}(x) \geq \deg f(x) = |H|$, in quanto $f(x) \in L^M[x] = M[x]$ per ipotesi e $f(\alpha) = 0$, da cui $\mu_\alpha(x) \mid f(x)$ e quindi la tesi $H = G$.

$\square$

Lemma 3.68
Data l'estensione ${}^{L}\!/_{K}$ di Galois e $H < \mathrm{Gal}\left({}^{L}\!/_{K}\right)$, sia $\sigma \in \mathrm{Gal}\left({}^{L}\!/_{K}\right)$, allora:

$$L^{\sigma H \sigma^{-1}} = \sigma(L^H)$$

Dimostrazione. Ricordando che $L^H = \{\alpha \in L | \varphi(\alpha) = \alpha, \forall \varphi \in H\}$, abbiamo che:

$$\sigma(L^H) = \{\sigma(\alpha) | \alpha \in L^H\} = \{\underbrace{\sigma(\alpha)}_{=\beta} | \varphi(\alpha) = \alpha, \forall \varphi \in H\}$$

da cui:

$$\begin{aligned}\sigma(L^H) = \{\beta \in L | (\varphi \circ \sigma^{-1})(\beta) = \sigma^{-1}(\beta), \forall \varphi \in H\} = \\ = \{\beta \in L | (\sigma \circ \varphi \circ \sigma^{-1})(\beta) = \beta, \forall \varphi \in H\} = L^{\sigma H \sigma^{-1}}\end{aligned}$$

$\square$

Osservazione 3.69 — Non è detto che $\sigma(L^H)$ faccia L^H, tuttavia sarà sempre una sottoestensione di ${}^{L}\!/_{K}$, poiché L è ancora fissato, quindi in generale abbiamo:

$$\begin{tikzcd}
 & L \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] \arrow[dd, dash] & \\
L^H \arrow[dr, dash] & & \sigma(L^H) \arrow[dl, dash] \\
 & K &
\end{tikzcd}$$

Teorema 3.70 (Teorema di Corrispondenza di Galois)
Data l'estensione di Galois (finita) L/K c'è una corrispondenza biunivoca tra l'insieme delle sottoestensioni di L/K e l'insieme dei sottogruppi di $\mathrm{Gal}\left(L/K\right)$. Inoltre $H \triangleleft G$ se e solo se L^H/K è normale, ed in tal caso abbiamo:

$$\mathrm{Gal}\left(L^H/K\right) \cong \frac{\mathrm{Gal}\left(L/K\right)}{\mathrm{Gal}\left(L/L^H\right)} = G/H$$

Dimostrazione. Detto $\mathcal{E}_{L/K} = \{F | K \subseteq F \subseteq L\}$ l'insieme delle sottoestensioni di L/K e $\mathcal{G}_{L/K} = \left\{H < \mathrm{Gal}\left(L/K\right)\right\}$ l'insieme dei sottogruppi del gruppo di Galois dell'estensione, allora essi sono in bigezione:

$$\mathcal{E}_{L/K} \longleftrightarrow \mathcal{G}_{L/K}$$

mediante le applicazioni:

$$\alpha : \mathcal{E}_{L/K} \longrightarrow \mathcal{G}_{L/K} : F \longmapsto \mathrm{Gal}\left(L/F\right) \text{ [60]}$$

e:

$$\beta : \mathcal{G}_{L/K} \longrightarrow \mathcal{E}_{L/K} : H \longmapsto L^H$$

Si osserva che essendo L^H un campo e $K \subseteq L^H \subseteq L$ per definizione, allora β è ben definita; osserviamo anche che si ha:

$$\mathrm{Gal}\left(L/F\right) < \mathrm{Gal}\left(L/K\right)$$

perché un automorfismo di F che fissa puntualmente F, ovviamente fissa puntualmente anche il suo sottoinsieme K, dunque l'immagine via $\alpha di F$ sta in $\mathcal{G}$, pertanto α è ben definita. Verifichiamo ora che α e β descrivono una bigezione tra $\mathcal{E}_{L/K}$ e $\mathcal{G}_{L/K}$, mostriamo che sono una l'inversa dell'altra:

$$\beta \circ \alpha(F) = \beta\left(\mathrm{Gal}\left(L/F\right)\right) = L^{\mathrm{Gal}\left(L/F\right)} = F \qquad \forall F \in \mathcal{E}_{F/K}$$

dove l'ultima uguaglianza è garantita dal Lemma 3.67, in quanto stiamo considerando il campo fissato da tutto il gruppo di Galois $\mathrm{Gal}\left(L/F\right)$. Viceversa:

$$\alpha \circ \beta(H) = \alpha(L^H) = \mathrm{Gal}\left(L/L^H\right) = H \qquad \forall H \in \mathcal{G}_{F/K}$$

infatti, $H < \mathrm{Gal}\left(L/L^H\right)$ in quanto tutti gli elementi di L^H sono fissati dagli elementi di H per definizione e quindi $H \subseteq \mathrm{Gal}\left(L/L^H\right)$; d'altra parte $\mathrm{Gal}\left(L/L^H\right) \subseteq H$, perché, detto $L^H = M$, abbiamo $H \subseteq \mathrm{Gal}\left(L/M\right)$ e $L^H = M$, dunque per il Lemma 3.67 segue che $H = \mathrm{Gal}\left(L/L^H\right)$.

[60] Per la precisione, avendo assunto che estensione normale e di Galois siano la stessa cosa e che L/K sia di Galois, allora L/F è di Galois, mentre non è detto che F/K lo sia, per la Proposizione 3.50, ed essendo di Galois ciò ci permette di usare la corrispondenza scritta sopra.

Verifichiamo ora la seconda parte del teorema; sappiamo che $H \triangleleft \operatorname{Gal}\left({}^{L}\!/\!_{K}\right) \iff gHg^{-1} = H$, $\forall \sigma \in \operatorname{Gal}\left({}^{L}\!/\!_{K}\right)$ e per il Lemma 3.68 abbiamo che:

$$\sigma(L^H) = L^{\sigma H \sigma^{-1}} = L^H \qquad \forall \sigma \in \operatorname{Gal}\left({}^{L}\!/\!_{K}\right)$$

e ciò è equivalente al dire che ${}^{L^H}\!/\!_{K}$ è normale, perché, $\forall \psi : L^H \hookrightarrow \overline{K}$, con $\psi_{|K} = id_K$, si ha che $\psi(L^H) = L^H$, poiché ogni ψ si estende a L e quindi:

$$\forall \varphi \in \operatorname{Gal}\left({}^{L}\!/\!_{K}\right), \exists \sigma \in \operatorname{Gal}\left({}^{L}\!/\!_{K}\right) : \sigma_{|L^H} = \psi$$

Infine, resta da verificare che $\operatorname{Gal}\left({}^{L^H}\!/\!_{K}\right) \cong {}^{G}\!/\!_{H}$, consideriamo l'omomorfismo di restrizione:

$$\Gamma : \operatorname{Gal}\left({}^{L}\!/\!_{K}\right) \twoheadrightarrow \operatorname{Gal}\left({}^{L^H}\!/\!_{K}\right) : \varphi \longmapsto \varphi_{|L^H}$$

esso è ovviamente surgettivo perché ogni $\psi \in \operatorname{Gal}\left({}^{L^H}\!/\!_{K}\right)$ si estende ad L, ed inoltre:

$$\begin{aligned}\ker \Gamma = \left\{\varphi \in \operatorname{Gal}\left({}^{L}\!/\!_{K}\right) \middle| \varphi_{|L^H} = id\right\} = \left\{\varphi \in \operatorname{Gal}\left({}^{L}\!/\!_{K}\right) \middle| \varphi(\alpha) = \alpha, \forall \alpha \in L^H\right\} = \\ = \operatorname{Gal}\left({}^{L}\!/\!_{L^H}\right) \cong H\end{aligned}$$

□

Osservazione 3.71 — Il teorema ci dice che, data ad esempio la torre:

$$\begin{tikzcd} L \arrow[d, dash, "H"] \arrow[dd, dash, bend right=60, "G"'] \\ L^H \arrow[d, dash, "{}^{G}\!/\!_{H}"] \\ K \end{tikzcd}$$

dove G è il gruppo di Galois di ${}^{L}\!/\!_{K}$. Essendo anche ${}^{L}\!/\!_{L^H}$ di Galois per ipotesi, e detto H il suo gruppo di Galois, allora, per il teorema precedente, se $H \triangleleft G$, si ha che anche ${}^{L^H}\!/\!_{K}$ è di Galois ed il suo gruppo di Galois è ${}^{G}\!/\!_{H}$.

Proposizione 3.72 (Proprietà della corrispondenza di Galois)
Dati $H, S < \operatorname{Gal}\left({}^{L}\!/\!_{K}\right)$, allora valgono le seguenti:

(1) $H \leqslant S \iff L^H \supset L^S$.

(2) $L^{H \cap S} = L^H L^S$.[a]

(3) $L^{\langle S, H\rangle} = L^H \cap L^S$.

[a] Intendiamo il composto dei due campi.

Dimostrazione. Dimostriamo le affermazione:

(1) "Ovvio".

(2) Osserviamo che $H \cap S \subset H, S$, dunque $L^{H \cap S} \supset L^H, L^S$, per il punto (1); pertanto un campo che contiene entrambi i sottocampi conterrà anche il composto, $L^{H \cap S} \supset L^H L^S$. D'altra parte $L^H L^S \subset L \implies \exists N \leqslant \operatorname{Gal}\left(L/K\right)$ tale che $L^H L^S = L^N$, per il Teorema di corrispondenza di Galois, inoltre:

$$\operatorname{Gal}\left(L/L^N\right) = N \subset \left(\underbrace{\operatorname{Gal}\left(L/L^H\right)}_{=H \cap S} \cap \operatorname{Gal}\left(L/L^S\right)\right)$$

da cui $N \subset H \cap S \iff L^N \supset L^{H \cap S}$.

(3) Abbiamo che $H \subseteq \langle H, S \rangle$ e $S \subseteq \langle H, S \rangle$, da cui $L^S, L^H \supseteq L^{\langle H, S \rangle}$, da cui $L^{\langle H, S \rangle} \subseteq L^H \cap L^S$.
Viceversa sia $\alpha \in L^H \cap L^S$, allora $\varphi(\alpha) = \alpha$, $\forall \varphi \in H, S$, quindi α è fissato dai generatori del gruppo $\langle H, S \rangle$, pertanto α è fissato da tutti gli elementi di $\langle H, S \rangle$, da cui la tesi:

$$L^H \cap L^S \subseteq L^{\langle H, S \rangle}$$

□