Corso di Laurea in Matematica
Geometria 2 - Esercizi settimanali A.A. 2023/24

Diego Monaco

Esercizi I settimana

Esercizio 1.

(1) Si calcoli la cardinalità di $\mathbb{P}^n(\mathbb{F}_q)$, dove $\mathbb{F}_q$ denota un campo finito con q elementi.

(2) Siano r_0, r_1, r_2 tre rette non concorrenti (cioè tali che $r_0 \cap r_1 \cap r_2 = \emptyset$) in un piano proiettivo $\mathbb{P}(V)$ (quindi $\dim \mathbb{P}(V) = 2$) su un campo $\mathbb{K}$. Si mostri che esiste:

$$P \in \mathbb{P}(V) \setminus (r_0 \cup r_1 \cup r_2)$$

Soluzione. Vediamo i due punti:

(1) Dalla definizione data di spazio proiettivo abbiamo che:

$$\#\mathbb{P}^n(\mathbb{F}_q) = \#\mathbb{P}(\mathbb{F}_q^{n+1}) = \# \left(\frac{\mathbb{F}_q^{n+1} \setminus \{0\}}{\sim} \right)$$

Osserviamo che le classi di equivalenza di $\sim$ hanno la stessa cardinalità, data da $q-1$. Infatti $v \sim w \iff v = \lambda w$, $\lambda \in \mathbb{F}_q^*$, ovvero, fissato un rappresentante, le classi di equivalenza si ottengono tutte moltiplicando per gli scalari invertibili di $\mathbb{F}_q$, che sono $q-1$, pertanto tutte le classi di equivalenza di $\sim$ hanno questa cardinalità e da sopra si ottiene:

$$\#\mathbb{P}^n(\mathbb{F}_q) = \frac{q^{n+1}-1}{q-1}$$

(2) Chiamiamo: $P_0 = r_0 \cap r_1, P_1 = r_1 \cap r_2, P_2 = r_2 \cap r_0$ (tali intersezioni esistono poiché stiamo considerando coppie di rette in un piano proiettivo, che per quanto visto a lezione si intersecano necessariamente in un punto), e siano $[v_0] = P_0, [v_1] = P_1, [v_2] = P_2$, con $v_0, v_1, v_2 \in V$, le classi associate ai punti. Osserviamo che, essendo le rette non concorrenti, i punti P_0, P_1, P_2 sono necessariamente distinti, e per come definiti non allineati (quindi i vettori associati non stanno sullo stesso piano, pertanto sono indipendenti (essendo in uno spazio di dimensione 3)) per cui dei rappresentanti a loro associati sono linearmente indipendenti. Consideriamo:

$$v_0 + v_1 + v_2 \in V \qquad \text{con} \qquad P := [v_0 + v_1 + v_2] \in \mathbb{P}(V)$$

e verifichiamo che P è il punto di $\mathbb{P}(V)$ richiesto dalla traccia. Se fosse $P \in r_0 = L(P_0, P_2)$, avremmo:

$$[v_0 + v_1 + v_2] \in L(P_0, P_2) \iff v_0 + v_1 + v_2 \in \mathrm{Span}(v_0, v_2)$$

e dalle proprietà di sottospazio vettoriale di $\text{Span}(v_0, v_2)$ seguirebbe che $v_1 \in \text{Span}(v_0, v_2)$, ma questo è assurdo poiché v_1 è linearmente indipendente con v_0, v_2, pertanto $P \notin r_0$. Ragionando in maniera analoga nel caso di r_1 ed r_2 si ottiene che $P \in \mathbb{P}(V) \setminus (r_0 \cup r_1 \cup r_2)$, come richiesto.
Osserviamo che tale soluzione vale sia nel caso in cui $\mathbb{K}$ sia un campo infinito, sia nel caso finito, tuttavia, in quest'ultimo caso si può fare direttamente il conto usando il punto (1) e ricordando che una retta proiettiva corrisponde ad un $\mathbb{P}^1(V)$ come segue:

$$\#\mathbb{P}(V) - \#(r_0 \cup r_1 \cup r_2) = \frac{q^3 - 1}{q - 1} - \#(r_0 \cup r_1 \cup r_2)$$

dove $\#(r_0 \cup r_1 \cup r_2)$ si ottiene usando il principio di inclusione-esclusione, con $\#r_i = \#\mathbb{P}^1(\mathbb{K}) = \frac{q^2-1}{q-1} = q + 1$, $\#r_i \neq r_j = 1$ (dall'ipotesi) e $\#r_1 \cap r_2 \cap r_3 = 0$ (sempre per ipotesi), e quindi:

$$\begin{aligned}\#\mathbb{P}(V) - \#(r_0 \cup r_1 \cup r_2) &= q^2 + q + 1 - 3q \\ &= q^2 - 2q + 1\end{aligned}$$

che è maggiore di 0 se e solo se $q \neq 1$ (che è sempre vero per un campo finito).

□

Esercizio 2. Siano W_1, W_2, W_3 piani $\mathbb{P}^4(\mathbb{K})$ tali $W_i \cap W_j$ è un punto per ogni $i \neq j$ e che $W_1 \cap W_2 \cap W_3 = \emptyset$. Si mostri che esiste un unico piano $W_0 \subseteq \mathbb{P}^4(\mathbb{K})$ tale che per $i = 1, 2, 3$ l'insieme $W_0 \cap W_i$ sia una retta proiettiva.

Soluzione. Siano $P_1 = W_1 \cap W_2$, $P_2 = W_2 \cap W_3$, $P_3 = W_3 \cap W_1$ (sono distinti perché per ipotesi i tre piani non si intersecano contemporaneamente) e sia $W_0 = L(P_1, P_2, P_3)$. Si osserva che $\dim W_0 = 2$, infatti essendo i tre punti distinti e non allineati (altrimenti i piani coinciderebbero), detti $v_1, v_2, v_3 \in V$ dei rappresentanti si ha che sono linearmente indipendenti e:

$$L(P_1, P_2, P_3) = \pi(\text{Span}(v_1, v_2, v_3))$$

dove, dalla lineare indipendenza segue che $\dim(\text{Span}(v_1, v_2, v_3)) = 3$ e nel proiettivo $\dim(L(P_1, P_2, P_3)) = 2 \implies W_0$ è un piano.
Verifichiamo che è quello richiesto dalla tesi. Consideriamo $W_0 \cap W_1$, poiché $P_1, P_2 \in W_1$ e $W_0 = L(P_1, P_2, P_3)$, allora:

$$P_1, P_2 \in W_0 \cap W_1 \implies L(P_1, P_2) \subseteq W_0 \cap W_1$$

e come segue da quanto osservato prima $\dim(L(P_1, P_2)) = 1$ (= è una retta proiettiva), inoltre $\dim(W_0 \cap W_1) \leq 1$, perché se fosse 2 i piani coinciderebbero, ma questo è assurdo perché $P_2 \notin W_1$, pertanto $W_0 \cap W_1 = L(P_1, P_2)$. Ragionando analogamente si verifica che W_0 è il piano richiesto dalla traccia.
Per l'unicità, sia W_0' un piano che soddisfa le ipotesi del problema, allora interseca W_i nella retta r_i', per $i = 1, 2, 3$. Sia $P_1' = \underbrace{r_1'}_{=W_0' \cap W_1} \cap \underbrace{r_2'}_{=W_0 \cap W_2} \implies P_1' \in W_1 \cap W_2 \overset{\text{ipotesi}}{\implies} P_1' = P_1$, e analogamente $P_2' = P_2, P_3' = P_3$, da ciò segue $L(P_1, P_2, P_3) \subseteq W_0'$, ma allora per dimensione $W_0' = W_0$. □

Esercizio 3. Siano r_1, r_2, r_3 rette di $\mathbb{P}^4(\mathbb{K})$ a due a due sghembe e non tutte contenute in un iperpiano (cioè un sottospazio 3-dimensionale di $\mathbb{P}^4(\mathbb{K})$). Si dimostri che esiste un'unica retta che interseca sia r_1, sia r_2, sia r_3.

Soluzione. Siano $S_1 = L(r_1, r_2), S_2 = L(r_2, r_3), S_3 = L(r_3, r_1)$, essendo le rette sghembe segue che:

$$\dim(S_i) = \dim r_i + \dim r_j - \dim(r_i \cap r_j) = 1 + 1 - (-1) = 3$$

da cui segue che:

$$\dim(S_i \cap S_j) = \underbrace{\dim S_i}_{=3} + \underbrace{\dim S_j}_{=3} - \dim(L(S_i, S_j)) \qquad i \neq j$$

con $\dim(L(S_i, S_j)) \leq \dim \mathbb{P}^4(\mathbb{K}) = 4$, inoltre, per definizione $L(S_i, S_j)$ è il più piccolo sottospazio che contiene 3 rette (sghembe), che quindi non stanno tutte in un iperpiano e quindi $\dim(L(S_i, S_j)) \geq 4$ (cioè per ipotesi il più piccolo sottospazio che contiene le tre rette è proprio $P^4(\mathbb{K})$), pertanto $\dim(L(S_i, S_j)) = 4 \implies \dim(S_i \cap S_j) = 2$.
Consideriamo quindi $S_1 \cap S_2 \cap S_3 =: r$ (cioè l'intersezione tra i più piccoli sottospazi che contengono r_1, r_2, r_3) e osserviamo che:

$$\dim r = \underbrace{\dim(S_1)}_{=3} + \underbrace{\dim(S_2 \cap S_3)}_{=2} - \underbrace{\dim(L(S_1, L(S_2, S_3)))}_{\leq 4} \geq 1$$

inoltre $\dim r \leq 3$ (perché intersezione di sottospazi di dimensione 3), e in particolare non può essere 3 (altrimenti $S_1 = S_2 = S_3$, che è contro l'ipotesi perché staremmo dicendo che le tre rette sono contenute in un iperpiano) e analogamente non può essere 2 (altrimenti avremmo $S_i \cap S_j \subseteq S_k$, ma questo implicherebbe ancora l'avere le tre rette in uno stesso iperpiano), pertanto $\dim r = 1$, ed è proprio una retta proiettiva.
Abbiamo che r è una retta cercata, infatti:

$$r \subseteq S_1 \cap S_2 = L(r_1, r_2) \cap L(r_2, r_3) (\supseteq r_2)$$

avendo dimostrato che la dimensione di $S_1 \cap S_2$ è 2, e ricordando che due rette si intersecano sempre su un piano proiettivo, abbiamo che $r \cap r_2 \neq \emptyset$, e analogamente per le altre due rette.
Per l'unicità, data r' che soddisfa le ipotesi del problema, ci basta verificare che $r' \subseteq S_1 \cap S_2 \cap S_3 = r$ (e poi si conclude per dimensione). Osserviamo che:

$$\dim(L(r', r_1)) = 2 - 0 = 2$$

e idem per $\dim(L(r', r_i)) = S'_i$, da questo segue che:

$$\dim(L(S'_1, S'_2)) = \dim(L(L(r', r_1), L(r', r_2))) = 2 + 2 - \dim(S'_1 \cap S'_2)$$

con $\dim(S'_1 \cap S'_2) \leq 2$ (perché intersezione di sottospazi di dimensione 2) e $\dim(S'_1 \cap S'_2) \geq 1$ (perché c'è almeno r' nell'intersezione), in particolare la dimensione non può essere 2 perché altrimenti $S'_1 = S'_2 \implies r_1 = r_2$, si conclude quindi che $\dim(L(S'_1, S'_2)) = 3$. Osservando che:

$$S_1 = L(r_1, r_2) \subseteq L(L(r', r_1), L(r', r_2)) = L(S'_1, S'_2)$$

dunque per dimensione $S_1 = L(S'_1, S'_2) \supseteq r'$, e ragionando analogamente per S_2 ed S_3 si ottiene $r' \subseteq S_1 \cap S_2 \cap S_3$. $\square$

Esercizio 4. Sia $f : \mathbb{P}^1(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{K})$ una proiettività diversa dall'identità. Si mostri che $f^2 = \mathrm{Id}$ se e solo se esistono punti distinti $P, Q \in \mathbb{P}^1(\mathbb{K})$ tali che $f(P) = Q$ e $f(Q) = P$.

Soluzione. Verifichiamo le due implicazioni separatamente:

$\boxed{\Longrightarrow}$ Se $f \neq \mathrm{Id}$, allora $\exists P \in \mathbb{P}^1(\mathbb{K})$ tale che $f(P) = Q$, con $Q \neq P$, e usando l'ipotesi si ottiene:

$$f^2(P) = P = f(Q)$$

e quindi abbiamo trovato i due punti richiesti dalla tesi.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Siano $[v] = P$ e $[w] = Q$, con $v, w \in \mathbb{K}^2$ (essendo i punti distinti per ipotesi i vettori associati sono distinti e linearmente indipendenti) e sia φ l'applicazione lineare associata a f, l'ipotesi equivale a:

$$\begin{aligned} f(P) = Q, f(Q) = P &\iff [\varphi(v)] = [w], [\varphi(w)] = [v] \\ &\iff \varphi(v) = \lambda w, \varphi(w) = \mu v \qquad \lambda, \mu \in \mathbb{K}^* \end{aligned}$$

da cui, usando $B = \{v, w\}$ come base di $\mathbb{K}^2$, si ottiene:

$$M_B(\varphi) = \begin{pmatrix} 0 & \mu \\ \lambda & 0 \end{pmatrix} \implies (M_B(\varphi))^2 = \lambda\mu \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

che equivale a $\varphi^2 = \lambda\mu \,\mathrm{Id}$ e passando al proiettivo si ottiene che $[\varphi^2] = [\mathrm{Id}]$ ovvero la mappa proiettiva f^2 (indotta da φ^2) è uguale all'identità proiettiva Id, indotta dall'identità su $\mathbb{K}^2$, pertanto $f^2 = \mathrm{Id}$.

Alternativa per $\boxed{\Longleftarrow}$: Prendiamo $R \in \mathbb{P}^1(\mathbb{K})$ distinto da P e Q (esiste sempre indipendentemente da $\mathbb{K}$), allora (P, Q, R) è un riferimento proiettivo di $\mathbb{P}^1(\mathbb{K})$. Nelle coordinate omogenee indotte:

$$P = [0, 1] \qquad Q = [0, 1] \qquad R = [1, 1]$$ [1]

Se $f = [\varphi]$, con $\varphi \in \mathrm{End}(\mathbb{K}^2)$, allora in queste coordinate, dalle ipotesi, bisogna avere:

$$\varphi \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \lambda \in \mathbb{K}^*$$

$$\varphi \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \mu \in \mathbb{K}^*$$

a questo punto:

$$\varphi^2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda\mu \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad \varphi^2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda\mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

quindi (avendo definito φ^2 su una base di $\mathbb{K}^2$) si ha $\varphi^2 = \lambda\mu \,\mathrm{Id} \implies f^2 = [\varphi^2] = [\lambda\mu \,\mathrm{Id}] = [\mathrm{Id}] \implies f^2 = \mathrm{Id}$. □

[1] R è il punto unità del riferimento, e la scelta della base normalizzata è coerente con quella del punto unità (abbiamo visto a lezione che esiste sempre una proiettività che porta il riferimento $\mathscr{R}$ in quello standard, quindi possiamo sempre prendere la base normalizzata associata a quest'ultimo, ovvero quella canonica, da cui le coordinate omogenee scelte).

Soluzione alternativa. Dall'ipotesi sappiamo che $f^2(P) = P$ e $f^2(Q) = Q$ (e sappiamo che $P \neq Q$), se riuscissimo a trovare $R \in \mathbb{P}^1(\mathbb{K})$, $R \neq P, Q$, con $f^2(R) = R$, allora potremmo concludere usando il teorema fondamentale delle trasformazioni proiettive con il riferimento proiettivo dato da (P, Q, R), infatti in questo caso sapremmo che f^2 è uguale alla trasformazione proiettiva che fissa i tre punti (cioè l'identità).
In particolare, basterebbe trovare $R \in \mathbb{P}^1(\mathbb{K})$ tale che $f(R) = R$, perché poi (per l'iniettività di f) sarebbe distinto da P e Q e avremmo chiaramente $f^2(R) = R$.
Non possiamo dire che esiste un punto fisso per f perché non sappiamo nulla su $\mathbb{K}$, possiamo tuttavia passare ad una sua chiusura algebrica $\mathbb{K} \subseteq \overline{\mathbb{K}}$. Si ha quindi che $\mathbb{P}^1(\mathbb{K}) \subseteq \mathbb{P}^1(\overline{\mathbb{K}})$ e che una proiettività di $\mathbb{P}^1(\mathbb{K})$ si estende naturalmente ad una proiettività di $\mathbb{P}^1(\overline{\mathbb{K}})$ (è data da una matrice in $\mathcal{M}(2, \mathbb{K})$). In $\mathbb{P}^1(\overline{\mathbb{K}})$ possiamo trovare l'R che mancava e segue che l'estensione di f a $\mathbb{P}^1(\overline{\mathbb{K}})$ è un'involuzione (cioè $f = f^{-1}$). Possiamo quindi dire che $f(R) = R$ e che $f^2 = \mathrm{Id}$.

□

Esercizi II settimana

Esercizio 5. Siano P_1, P_2, P_3 punti di $\mathbb{P}^2(\mathbb{K})$ in posizione generale, e sia $r \subseteq \mathbb{P}^2(\mathbb{K})$ una retta tale che $P_i \notin R$ per $i = 1, 2, 3$.

(1) Si mostri che esiste un'unica proiettività $f : \mathbb{P}^2(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{K})$ tale che $f(P_1) = P_1$, $f(P_2) = P_3$, $f(P_3) = P_2$ e $f(r) = r$.
(2) Si mostri che l'insieme dei punti fissi di f è dato dall'unione di un punto $M \in r$ ed una retta s con $M \notin S$.

Esercizio 6. Si considerino i punti di $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ dati da:

$$P_1 = [1, 0, 0], \quad P_2 = [0, 1, 0], \quad P_3 = [0, 0, 1], \quad P_4 = [1, 1, 1]$$

$$Q_1 = [1, -1, -1], \quad Q_2 = [1, 3, 1], \quad Q_3 = [1, 1, -1], \quad Q_4 = [1, 1, 1]$$

(1) Si determini una formula esplicita per la proiettività $f : \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ tale che $f(P_i) = Q_i$, per $i = 1, 2, 3, 4$.
(2) Si determinino tutte le rette $r \subseteq \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ tali che $f(r) = r$.

Soluzione. Vediamo i due punti:

(1) Essendo $\mathscr{R} = (P_1, P_2, P_3, P_4)$ e $\mathscr{R}' = (Q_1, Q_2, Q_3, Q_4)$ due riferimenti proiettivi di $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ il teorema fondamentale delle trasformazioni proiettivi ci assicura l'esistenza di una proiettività f che realizza quanto richiesto dalla tesi. Per trovare una una formula esplicita della proiettività ci basta trovarne una per l'applicazione lineare associata $[\varphi] = f$, facendo attenzione a prendere una base normalizzata in partenza e arrivo. Per la definizione del proiettivo abbiamo che $P_1 = [\lambda_1(1, 0, 0)], P_2 = [\lambda_2(0, 1, 0)], P_3 = [\lambda_3(0, 0, 1)], P_4 = [\lambda(1, 1, 1)]$, con $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda \in \mathbb{R}^*$, per trovare la φ giusta dobbiamo usare come basi in partenza e arrivo quelle ottenute da una scelta dei rappresentanti sopra normalizzate, e per fare ciò vogliamo che:

$$\varphi(\lambda_i e_i) = \lambda_i \varphi(e_i) \qquad i = 1, 2, 3$$

e:

$$\varphi(\lambda(e_1 + e_2 + e_3)) = \lambda\varphi(e_1) + \lambda\varphi(e_2) + \lambda\varphi(e_3)$$

ora possiamo supporre per semplicità che $\lambda = 1$ e risolvere il sistema:

$$\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix}1\\3\\1\end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$$

da cui si ottiene che $\lambda_1, \lambda_2 = 1$ e $\lambda_3 = -1$ (in questo modo abbiamo determinato i rappresentanti vettoriali di $P_1, P_2, P_3, Q_1, Q_2, Q_3$ per avere due basi normalizzate). Per il teorema di struttura delle applicazioni lineari abbiamo quindi che usando come basi:

$$B = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,-1)\} \quad \text{e} \quad B' = \{(1,-1,-1),(1,3,1),(-1,-1,1)\}$$

si ottiene:

$$M_{B'}^{B}(\varphi) = \begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\-1 & 3 & -1\\-1 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

da cui si ricava la formula per f in coordinate omogenee:

$$f : \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) : [a,b,c] \longmapsto [a+b-c, -a+3b-c, -a+b+c]$$

(2)

$\square$