

# Logica Matematica

APPUNTI DEL CORSO DI LOGICA MATEMATICA  
TENUTO DAL PROF. MARCELLO MAMINO

DIEGO MONACO  
d.monaco2@studenti.unipi.it  
UNIVERSITÀ DI PISA

Anno Accademico 2023-24



## Indice

<b>1</b>	<b>Formule, Strutture e Teorie</b>	<b>4</b>
1.1	Formule . . . . .	4
	<b>Bibliografia</b>	<b>8</b>

## Premessa

Queste dispense sono la quasi esatta trascrizione in  $\text{\LaTeX}$  delle dispense del corso di Logica Matematica [1], tenuto dal prof. Marcello Mamino nell'anno accademico 2023-24 presso l'Università di Pisa.

Quest'opera è stata rilasciata con la licenza Creative Commons Attribuzione - Condividi allo stesso modo 4.0 Internazionale. Per leggere una copia della licenza visita il sito web <https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/deed.it>.



## §1 Formule, Strutture e Teorie

La logica, lo dice il nome si occupa di linguaggi. Un **linguaggio** è un insieme di **stringhe**, ossia sequenze finite di simboli, di un certo **alfabeto**<sup>1</sup>. Da un punto di vista tecnico, se vogliamo formalizzare il nostro discorso, per esempio, nella teoria degli insiemi, potremmo dire che l'alfabeto può essere un insieme qualunque. Se, per esempio, vogliamo usare come alfabeto  $A = \{a, b, c, \dots, z\}$ , dove  $a, b, c$ , etc. possono essere qualunque, purché distinti fra loro, allora le stringhe sono sequenze **finite** come, per esempio:

$$() \quad (a, x, a, x, a, x, a, x, a, x) \quad (m, l, \ddot{o})$$

che conviene scrivere più compattamente come:

$$\varepsilon^2 \quad axaxaxaxax \quad ml\ddot{o}$$

L'ambiente in cui formalizziamo le nostre definizioni, in questo caso la teoria degli insiemi, si dice **metateoria**. Non vogliamo forzare una particolare scelta per la metateoria. Sarà elementare formalizzare il materiale di questo corso, per chi, per esempio, ha seguito il corso di **Elementi di Teoria degli Insiemi**, prendendo come metateoria la teoria degli insiemi di Zermelo-Fraenkel (ZFC). La nostra esposizione sarà basata su ZFC, mantenendo, però, un tono informale, con due promesse: di non fare leva sui dettagli incidentali della formalizzazione di ZFC, e di evidenziare i casi in cui si sfruttano principi insiemistici non costitutivi - in pratica, forme dell'assioma di scelta.

In conclusione, parleremo di stringhe che sono sequenze finite di elementi dell'alfabeto, ma mantenendo l'illusione che siano semplicemente tracce di inchiostro sulla carta, che è, poi, l'intuizione che intendiamo formalizzare. Illusione doppiamente, perché, nella fattispecie, non c'è inchiostro, ma configurazioni di elettricità statica.

### §1.1 Formule

Informalmente, vorremmo generalizzare il meccanismo per mezzo del quale si dice che un **gruppo** è un insieme dotato di un elemento invertibile  $e$ , un'operazione  $\dots$ , etc. tale che  $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$ ,  $x \cdot e = e \cdot x = x$ , etc. Vorremmo dire che un gruppo è semplicemente un **modello** della teoria dei gruppi, la quale è costituita dalle condizioni - l'associatività, l'esistenza dell'identità e degli inversi - che vede soddisfare un **struttura** per essere un gruppo. Per esplorare matematicamente la relazione che lega una teoria ai suoi modelli, occorre specificare precisamente di che tipo siano le condizioni che possono costituire una teoria - per noi saranno le **formule al primo ordine** - e come una struttura la soddisfa. L'idea è che una formula si ottenga combinando **formule atomiche** - per esempio equazioni - per mezzo di connettivi logici:  $\wedge, \vee, \neg, \rightarrow$  e i quantificatori  $\forall, \exists$ .

<sup>1</sup>Tecnicamente  $L = A^{<\mathbb{N}}$ , con  $A$  alfabeto.

<sup>2</sup>È la **stringa vuota**.

**Esempio 1.1** (Teoria dei gruppi - v.1)

- **simboli di base:**  $e, \dots, \dots, \dots^{-1}$
- **assiomi:**

$$\forall x \forall y \forall z (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$$

$$\forall x e \cdot x = x$$

$$\forall x x \cdot e = x$$

$$\forall x x \cdot (x^{-1}) = e$$

$$\forall x (x^{-1}) \cdot x = e$$

Notare che il dominio dei quantificatori è costituito da tutti gli elementi del gruppo:  $\forall x$  significa “per ogni elemento del gruppo”.

Spesso non c'è un unico modo di formalizzare un concetto.

**Esempio 1.2** (Teoria dei gruppi - v.2)

- **simboli di base:**  $e, \dots, \dots$
- **assiomi:**

$$\forall x \forall y \forall z (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$$

$$\forall x e \cdot x = x$$

$$\forall x x \cdot e = x$$

$$\forall x x \cdot (x^{-1}) = e$$

$$\forall x \exists y x \cdot y = e \wedge y \cdot x = e$$

**Crucialmente** è ammesso quantificare solo su elementi della struttura, non, per esempio, sui sottoinsiemi. Questo è il motivo per cui si parla di **logica al primo ordine**. della struttura, sui numeri naturali o sulle formule stesse. È per questa ragione che la logica che studiamo si dice **del primo ordine**: se, per esempio, potessimo quantificare anche sui sottoinsiemi della struttura, allora lavoreremmo al **secondo ordine**. ZFC, la teoria degli insiemi, ricorderete, è formalizzata al primo ordine - c'è un solo tipo di oggetti, gli insiemi, e si può dire “per ogni insieme  $x$ ” o “esiste un insieme  $x$ ”. Quando, in ZFC, si quantifica sui sottoinsiemi, lo si fa per mezzo di una perifrasi,  $\forall x \subseteq y \dots$  significa  $\forall x (x \subseteq y \rightarrow \dots)$ , e questo è sottilmente diverso da dire “per ogni sottoinsieme  $x$  di  $y$ ”, infatti, dire “per ogni elemento  $x$  dell'universo degli insiemi che sia un sottoinsieme di  $y$ ”. Vedremo una conseguenza sorprendente, il **paradosso di Skolem**, di questo fatto. Formalmente, definiremo le formule dando una grammatica - in particolare una **grammatica libera dal contesto**.

Una grammatica identifica le stringhe di un linguaggio descrivendo un processo ricorsivo che permette di scrivere una stringa più lunga combinando stringhe più brevi. Lo studio, in generale, delle grammatiche non fa parte degli obiettivi di questo corso, vediamo invece il caso particolare che ci interessa.

**Definizione 1.3** (Linguaggio del primo ordine). Un **linguaggio del primo ordine** - brevemente linguaggio -  $L = (R, F, ar)$  è dato da due insiemi disgiunti  $R$  e  $F$ , rispettiva-

mente i **simboli di relazione** e i **simboli di funzione**, e una funzione  $\text{ar} : R \sqcup F \rightarrow \mathbb{N}$  che associa ad ogni simbolo un numero naturale, detto **arietà**.<sup>3</sup>

**Esempio 1.4** (Linguaggio degli anelli ordinati)

Il linguaggio degli anelli ordinati è:

$$L_{or} = (\{<\}, \{0, 1, +, \cdot\}, \text{ar}_{or})$$

dove:

$$\begin{array}{ll} \text{ar}_{or}(<) = 2 & < \text{ è un simbolo di relazione binaria} \\ \text{ar}_{or}(+) = \text{ar}_{or}(\cdot) = 2 & + \text{ e } \cdot \text{ sono simboli di funzione binaria} \\ \text{ar}_{or}(0) = \text{ar}_{or}(1) = 0 & 0 \text{ e } 1 \text{ sono simboli di costante} \end{array}$$

Si osservi che i simboli di costante li vediamo come funzioni di arietà 0.

**Nota:** qui c'è un piccolo conflitto nella terminologia, perché, secondo la definizione precedente, un “linguaggio” è, in pratica, la collezione dei simboli di base di una teoria, mentre abbiamo già chiamato “linguaggio” l'insieme delle stringhe. È così non è colpa mia.

**Osservazione 1.5** — Nella definizione di linguaggio ammettiamo simboli di funzione 0-ari, che chiameremo **simboli di costante**, e simboli di relazione 0-ari, che chiameremo **simboli di costante proposizionale**. Le costanti proposizionali ammetteranno due sole interpretazioni: *vero* e *falso*.

Per il resto di questo capitolo fissiamo un linguaggio al primo ordine  $L = (R, F, \text{ar})$ .

**Definizione 1.6** ( $L$ -termine). Gli  **$L$ -termini** sono stringhe dell'alfabeto dato da:

$$F \sqcup \{x_0, x_1, x_2, \dots\} \sqcup \{(\,,\,), \cdot\}$$

Chiamiamo l'insieme numerabile:

$$\text{Var} \stackrel{\text{def}}{=} \{x_0, x_1, x_2, \dots\} = \{x_i\}_{i \in \mathbb{N}}$$

insieme dei **simboli di variabile**. Un  **$L$ -termine** è quindi una stringa in  $F \sqcup \text{Var} \sqcup \{(\,,\,), \cdot\}$ , e può essere [definito induttivamente come segue]:

- un simbolo di variabile  $x_i \in \text{Var}$
- la stringa  $f(t_1, t_2, \dots, t_k)$ , dove  $f \in F$  è un simbolo di funzione,  $t_1, \dots, t_k$  sono  $L$ -termini, e  $\text{ar}(f) = k$ .

**Osservazione 1.7** — Se  $c$  è un simbolo di costante - funzione 0-aria - allora  $c()$  è un  $L$ -termine. In pratica, ometteremo le parentesi, scrivendo semplicemente  $c$ . Similmente useremo, per i simboli che denotano le operazioni aritmetiche, la comune *notazione infissa*, per esempio  $x_0 + (x_1 \cdot x_2)$  in luogo di  $+(x_0, \cdot(x_1, x_2))$ . Infine ci prenderemo la libertà di usare scritture diverse da  $x_0, x_1, x_2$  etc. per i simboli di variabile, es.  $x + y \cdot z$ , dove non può esserci confusione. Non bisogna confondere le scritture di questo tipo  $x + y \cdot z$ , che sono abbreviazioni, un stereografia che

<sup>3</sup>Tecnicamente staremmo anche fissando un alfabeto da cui prendere i simboli.

impieghiamo fra di noi per parlare dei termini, con i termini stessi, che sono gli oggetti definiti formalmente.

### Esempio 1.8

Ecco alcuni esempi di  $L_{or}$  termini:

$$\cdot(+ (x_0, 1()), x_1) \quad + (+ (1(), 1()), 1())$$

vulgo:

$$(x_0 + 1) \cdot x_1 \quad (1 + 1) + 1$$

**Definizione 1.9** ( $L$ -formula). Le  **$L$ -formule** sono stringhe dell'alfabeto dato da:

$$F \sqcup R \sqcup \text{Var} \sqcup \{ (, ), ,, \top, \perp, \neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \forall, \exists \}^4$$

Una  $L$ -formula può essere una **formula atomica**, ossia:

- $\top$  o  $\perp$ ,
- $r(t_1, t_2, \dots, t_k)$  con  $r \in R$  simbolo di relazione e  $t_1, \dots, t_k$   $L$ -termini, e  $\text{ar}(r) = k$ ,
- $t_1 = t_2$  con  $t_1, t_2$   $L$ -termini.

oppure è ottenuta combinando formule atomiche per mezzo di **connettivi logici** e **quantificatori**:

- $(\neg \varphi)$  con  $\varphi$   $L$ -formula,
- $(\varphi \wedge \psi)$  con  $\varphi, \psi$   $L$ -formule,
- $(\varphi \vee \psi)$  con  $\varphi, \psi$   $L$ -formule,
- $(\varphi \rightarrow \psi)$  con  $\varphi, \psi$   $L$ -formule,
- $(\forall x_k \varphi)$  con  $\varphi$   $L$ -formula e  $x_k \in \text{Var}$  simbolo di variabile,
- $(\exists x_k \varphi)$  con  $\varphi$   $L$ -formula e  $x_k \in \text{Var}$  simbolo di variabile.

<sup>4</sup>Pertanto la differenza sostanziale tra  $L$ -termini ed  $L$ -formule sta nel fatto che, nelle seconde, le stringe possono essere costruite ricorsivamente anche usando connettivi logici e quantificatori (ed usando come base anche relazioni di  $L$ -termini (e non funzioni)).

## Riferimenti bibliografici

- [1] Marcello Mamino, *Logica Matematica*, Università di Pisa, Pisa, 2023-24.