

CC4102 - Control 2

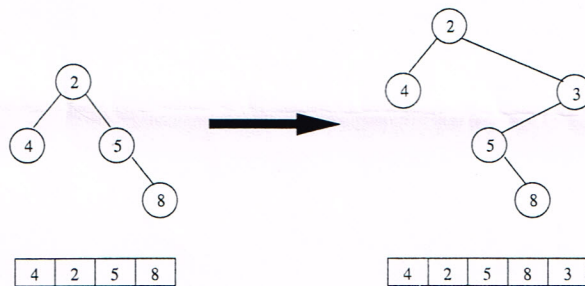
Prof. Gonzalo Navarro

19 de Octubre de 2012

P1 (2.0 pt)

Dado un arreglo de enteros distintos $A[1, n]$, un *árbol cartesiano* es un árbol binario de n nodos. Si el mínimo de A está en $A[i]$, entonces la raíz del árbol cartesiano corresponde a $A[i]$, el hijo izquierdo al árbol cartesiano de $A[1, i - 1]$ y el hijo derecho al árbol cartesiano de $A[i + 1, n]$. Cuando el rango de A se hace vacío el árbol cartesiano es vacío.

Diseñe un algoritmo de tiempo $O(n)$ para construir el árbol cartesiano de $A[1, n]$. Para ello, considere procesar $A[1, n]$ de izquierda a derecha. Para cada nuevo $A[i]$, se revisa la rama más derecha del árbol, de abajo hacia arriba, hasta encontrar un nodo con un elemento menor a $A[i]$. Se inserta $A[i]$ como hijo derecho de ese nodo, y la rama recorrida como su hijo izquierdo.



P2 (4.0 pt)

Dado el mismo arreglo $A[1, n]$, se llama *range minimum query (RMQ)* a la siguiente consulta: $\text{RMQ}_A(i, j) = \arg\min_{i \leq k \leq j} A[k]$, es decir la posición donde se encuentra el mínimo en $A[i, j]$. Se busca preprocesar $A[1, n]$ para resolver RMQs en tiempo constante.

1. Considere precalcular los valores $M[i, k] = \text{RMQ}_A(i, i + 2^k)$ para todos los i y k que tengan sentido. Muestre que con dos accesos a esta tabla y a A se responde RMQ en tiempo $O(1)$. Calcule el espacio que requiere esta solución y muestre cómo construir M en tiempo óptimo.
2. Pruebe que $\text{RMQ}_A(i, j)$ corresponde al nodo del árbol cartesiano de menor profundidad entre aquellos correspondientes a $A[i, j]$, y que el nodo que representa $A[i]$ tiene preorden i .
3. Reduzca el espacio de esta solución a $O(n)$ bits y tiempo $O(\log n)$, mediante esparsificar M (o sea sólo mantener algunas celdas), representar árboles cartesianos con paréntesis, y utilizar tablas universales. Inspírese en la solución para *rank* vista en clases.
4. Reduzca el espacio a $2n + o(n)$ bits (aparte de A) y el tiempo a $O(1)$ mediante usar dos niveles de esparsificación de M . Nuevamente, inspírese en la solución de *rank*.

Tiempo: 2.0 horas

Con una hoja de apuntes

Responder en hojas separadas