

CC40A - Control 1

Prof. Gonzalo Navarro

27 de Mayo de 2010

El examen, como puede ver, suma 8.5 puntos. Los excesos sobre 7 se premiarán con una felicitación, pero no son reciclables :-).

P1 (2.0 pt)

Se tiene una secuencia $P[1, n]$ de números reales positivos y un *objetivo* real x . Se desea encontrar todas las posiciones j tal que, para algún $i \leq j$, $\sum_{k=i}^j P[k] = x$.

Resuelva este problema en tiempo $O(n)$.

P2 (2.5 pt)

Considere un árbol de n elementos donde en el i -ésimo hijo se almacena una fracción p_i del total de los elementos del subárbol, de modo que $\sum p_i = 1$. Al momento de buscar, se entra al i -ésimo hijo con probabilidad $q_i \geq p_i$. Se desea analizar la cantidad de hojas a las que llega el algoritmo.

1. (0.5pt) Dé una recurrencia que describa la cantidad de hojas a las que se llega en promedio cuando se parte de un árbol con n nodos.
2. (1pt) Demuestre que el total de hojas a las que se llega es $O(n^\alpha)$ y halle una ecuación o fórmula que determine α .
3. (1pt) Muestre que α está entre 0 y 1, y determine cómo deben ser los q_i en los casos extremos $\alpha = 0$ y $\alpha = 1$.

P3 (3.0 pt)

Un *árbol cartesiano* para un arreglo de enteros $A[1, n]$ se define de la siguiente manera: la raíz del árbol es el elemento mínimo $A[\mu]$ del arreglo A (si hay varios se elige el más izquierdo). El hijo izquierdo es el árbol cartesiano de $A[1, \mu - 1]$ y el hijo derecho es el árbol cartesiano de $A[\mu + 1, n]$.

1. (0.5pt) Dibuje el árbol cartesiano de $A[1, 10] = \langle 2, 9, 4, 6, 7, 5, 3, 1, 8, 10 \rangle$.
2. (1pt) El *ancestro común más bajo* de dos nodos i y j , $lca(i, j)$, es el nodo de mayor profundidad que es ancestro de i y de j . Demuestre que el mínimo valor en cualquier rango $A[i, j]$ se halla en $A[lca(i, j)]$, donde lca se refiere al árbol cartesiano.
3. (1.5pt) Muestre que el árbol cartesiano se puede construir en tiempo $O(n)$. Considere usar inducción, procesando los elementos de A de izquierda a derecha, y análisis amortizado para obtener la cota.

Tiempo: 2 horas

Con una hoja de apuntes