Auxiliar #8 - Algoritmos aleatorizados y/o probabilistas II

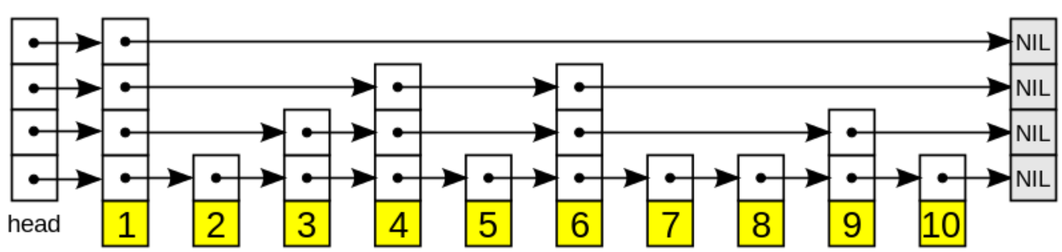
14 de diciembre de 2020 - Bernardo Subercaseaux

Problema 1. (★★) Usted desea comprar un artículo en una feria con n puestos, cada uno de los cuáles ofrece el artículo a un precio distinto y desconocido. Sin embargo, los comerciantes no toleran el rechazo, así que al pasar por un puesto se debe elegir inmediatamente si comprar ahí o no (si se elige no comprar en un puesto luego no se puede volver). Diseñe un algoritmo que con probabilidad mayor o igual a $1/4$ compra el artículo en el puesto más barato.

Solución 1 . El algoritmo consiste en: (i) elegir un orden al azar para visitar los n puestos, (ii) mientras se visitan los primeros $n/2$ puestos se recuerda el precio más bajo (iii) mientras se visita la segunda mitad de los puestos, si se encuentra una oferta más barata que la obtenida en el paso (ii), se compra inmediatamente. La probabilidad de éxito está dada porque en los primeros $n/2$ puestos visitados se encuentre el 2do artículo más barato, y que en los segundos $n/2$ se encuentre el 1ero. Es decir, de los $n!$ órdenes posibles, los exitosos son aquellos que tienen el 2do artículo más barato en una de las primeras $n/2$ posiciones del orden, el primero más barato en una de las segundas $n/2$ posiciones, y el resto del orden es indiferente. Es decir

$$\Pr(\text{éxito}) = \left(\frac{n}{2} \cdot \frac{n}{2} \cdot (n-2)!\right) / n! \geq \left(\frac{n}{2} \cdot \frac{n-1}{2} \cdot (n-2)!\right) / n! = \frac{\frac{n!}{4}}{n!} = 1/4$$

Problema 2. (★★★) En esta pregunta se analizará el comportamiento de las *Skip Lists*, una alternativa probabilista a los árboles balanceados en la que se pueden insertar, buscar y borrar elementos. Inicialmente se tiene una lista enlazada de n elementos ordenados de forma creciente. Luego se realiza un procedimiento por *capas*, considerando la lista inicial como la capa 0. Por cada nodo de la capa i se tira una moneda cargada de probabilidad p para decidir si se copiará tal nodo en la capa $i+1$. De esta forma, cada capa forma una lista enlazada, con cada vez menos nodos. Para buscar, se comienza en la capa más alta, ya que tiene menos nodos, y la búsqueda se va refinando al utilizar las capas inferiores.



1. ¿Cuántas copias se esperan por nodo de la lista inicial?
2. Dado que se requieren nodos especiales para marcar el inicio y fin de cada capa, pruebe que si $p \leq 1/2$ entonces con alta probabilidad no hay más de $1/p \lg_{1/p} n$ capas.

3. Asumiendo que $1/p \lg_{1/p} n$ es el valor esperado del número de capas, ¿cuál es el valor esperado de la cantidad total de nodos?.

Solución 2 .

1. La probabilidad de que por un nodo se hagan k copias es $p^k(1-p)$. Sea X la v.a. que dice cuántas copias se hacen de un nodo fijo.

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{k=0}^{\infty} kp^k(1-p) && (1)\\ &= p(1-p)\sum_{k=0}^{\infty} kp^{k-1} && (2)\\ &= p(1-p)\frac{\partial}{\partial p}\left(\sum_{k=0}^{\infty} p^k\right) && (3)\\ &= p(1-p)\frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{1}{1-p}\right) = p(1-p)\frac{1}{(1-p)^2} = \frac{p}{1-p} && (4) \end{aligned}$$

2. Para un nodo fijo, la probabilidad de tener más de $1/p \lg_{1/p} n$ capas está acotada por $p^{1/p \lg_{1/p} n}$. Pero
$$p^{1/p \lg n} = \frac{1}{(1/p)^{1/p \lg_{1/p} n}} = \frac{1}{n^{1/p}}$$
Dado que $p \leq 1/2$ entonces la probabilidad anterior es menor o igual que $1/n^2$. Dado que para que hayan ese número de capas, necesitamos que al menos uno de los nodos alcance esa cantidad de capas, usando la cota de la uníon ($Pr(A \cup B) \leq Pr(A) + Pr(B)$) tenemos que la probabilidad de exceder esa cantidad de capas es menor o igual que $n \cdot \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n}$. Es decir, la probabilidad es muy baja para n grande.

3. Se esperan entonces $n(1 + \frac{p}{1-p}) + 1/p \lg_{1/p} n$ nodos en total, lo que es $O(n)$ para p fijo..