

AUXILIAR #5 - EJERCICIOS AVANZADOS DE ANÁLISIS AMORTIZADO

2 de noviembre de 2020 - Bernardo Subercaseaux

Problema 1. (★★) Una permutación P es un arreglo de tamaño n que contiene exactamente a los elementos $\{1, \dots, n\}$. Un ciclo en P es una secuencia $i \rightarrow P[i] \rightarrow P[P[i]] \rightarrow \dots \rightarrow i$. Diseñe un algoritmo que cuenta la cantidad de ciclos disjuntos usando espacio adicional $O(1)$.

Problema 2. (★★★★) Si bien mantener un arreglo ordenado de n elementos permite buscar elementos en $O(\log n)$ a través de búsqueda binaria, insertar nuevos elementos tarda $O(n)$. Diseñe una estructura que permita mantener n elementos de forma de buscar en tiempo $O(\log^2 n)$ e insertar en tiempo $O(\log n)$ amortizado. ¿Cómo podría soportarse una operación de borrado de elementos?

Problema 3. (★★★) Esta pregunta busca analizar una variante de la estructura Union-Find, donde partimos con n elementos, cada uno de los cuáles define una clase separada, y realizaremos $m > n$ operaciones Find.

1. ¿Cuántas operaciones Union puede haber?
2. Modifique el análisis realizado en clases para demostrar que el costo total es $O(n \log n + m)$.
3. Demuestre que si se hacen todas las operaciones Union antes del primer Find, entonces el costo total es $O(m)$.