

# AUXILIAR #1 - COTAS INFERIORES

6 de septiembre de 2020 - Bernardo Subercaseaux

---

**Problema 1. (★★)** Alicia y Roberto deciden jugar al ahorcado. Alicia elige un entero  $k \geq 1$  y dibuja  $k$  líneas horizontales en una pizarra, simbolizando las letras que le restan a Roberto por adivinar para formar una palabra válida en el idioma español. En cada ronda del juego Roberto dice una letra, y si la letra pertenece a la palabra que Alicia tiene en mente, entonces ella escribe en la pizarra todas sus ocurrencias. De lo contrario Roberto pierde una *vida*. Pruebe que Roberto necesita comenzar con al menos 10 vidas para ganar el juego.

En los siguientes problemas trabajaremos en el modelo en que el input es un grafo que recibimos a través de su matriz de adyacencia  $A$ , y contaremos la cantidad de accesos  $A(u, v)$  efectuados. Llamaremos *consulta de adyacencia* a cada uno de estos accesos. Cada consulta de adyacencia  $A(u, v)$  puede pensarse como preguntarle *¿Hay una arista de  $u$  a  $v$ ?* a un adversario.

**Problema 2. (★★)** En un grafo dirigido de  $n$  nodos se define un *sumidero* como un nodo al que entran  $n - 1$  aristas y del cual no sale ninguna. Pruebe que para determinar si un grafo  $G$  de  $n$  nodos tiene un sumidero se requieren  $\Omega(n)$  consultas de adyacencia. ¿Es esta cota ajustada?

**Problema 3. (★★)** Demuestre que determinar si un grafo no dirigido de  $n$  nodos tiene un nodo de grado 3 se requieren  $\binom{n}{2} - n$  consultas de adyacencia.

**Problema 4. (★★★)** Demuestre que determinar si un grafo no dirigido de  $n$  nodos es conexo se requieren  $\binom{n}{2}$  consultas de adyacencia.