



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DO PIAUÍ.
CAMPUS PARNAÍBA
CURSO DE LICENCIATURA EM FÍSICA

DIEGO CONCEIÇÃO CARVALHO

**PÊNDULOS FÍSICOS ACOPLADOS POR MOLAS: UMA INVESTIGAÇÃO POR
VIDEOANÁLISE E ARDUINO**

PARNAÍBA
2022

DIEGO CONCEIÇÃO CARVALHO

**PÊNDULOS FÍSICOS ACOPLADOS POR MOLAS: UMA INVESTIGAÇÃO POR
VIDEOANÁLISE E ARDUINO**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado como exigência parcial para obtenção do diploma do Curso de licenciatura em Física do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Piauí. *Campus Parnaíba.*

Orientador: Prof. Dr. Alexandro das Chagas de Sousa Nascimento
Instituto Federal do Piauí

Coorientador: Prof. Me. Itamar Vieira de Sousa Júnior
Instituto Federal do Piauí

PARNAÍBA
2022

DIEGO CONCEIÇÃO CARVALHO

PÊNDULOS FÍSICOS ACOPLADOS POR MOLAS: UMA INVESTIGAÇÃO POR VIDEOANÁLISE E ARDUINO

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado
como exigência parcial para obtenção do di-
ploma do Curso de licenciatura em Física do
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tec-
nologia do Piauí. *Campus Parnaíba.*

Trabalho aprovado. Parnaíba, 24 de Novembro de 2022.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Alexandre das Chagas de Sousa Nascimento (orientador)
Instituto Federal do Piauí (IFPI)

Prof. Me. Itamar Vieira de Sousa Júnior (coorientador)
Instituto Federal do Piauí (IFPI)

Prof. Me Lucas Izídio de Sousa Sampaio (examinador)
Instituto Federal do Piauí (IFPI)

Prof. Dr. Gildálio Dias Lima (examinador)
Universidade Federal do Delta do Parnaíba (UFDPar)

DIEGO CONCEIÇÃO CARVALHO PÊNDULOS FÍSICOS ACOPLADOS
POR MOLAS: UMA INVESTIGAÇÃO POR VIDEOANÁLISE E ARDUINO/
DIEGO CONCEIÇÃO CARVALHO. – Parnaíba, 2022- 69 p. : il.(alguma
color.);

Orientador:

Prof. Dr. Alexandre das Chagas de Sousa Nascimento

Coorientador:

Prof. Me. Itamar Vieira de Sousa Júnior

– Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Piauí. *Campus* Parnaíba,
2022.

1. Palavra-chave1. 2. Palavra-chave2. I. Orientador. II. Universidade xxx. III.
Faculdade de xxx. IV. Título

CDU 02:141:005.7

AGRADECIMENTOS

A finalização com êxito deste trabalho de carácter investigativo não teria sido possível sem as contribuições de diversas pessoas desta instituição de ensino, que mesmo sem nenhum vínculo oficial com o trabalho, se dispuseram a contribuir para a sua realização.

Ao Professor Doutor Alexandre das Chagas de Sousa Nascimento agradeço pelas sábias orientações, a motivação e empenho pelo estudo e aos momentos dispostos para sanar dúvidas. O sucesso deste trabalho deve-se muito à sua competência e olhar clínico para questões analíticas, sendo que seu forte espírito científico e criativo renderam a mim encontros proveitosos, agradáveis e produtivos.

Devo gratular também ao Professor Mestre Itamar Vieira de Sousa Júnior (coorientador), a quem tenho um forte apreço e admiração por seus estudos e didática em sala de aula, sendo inclusive meu primeiro e último professor em disciplinas específicas nesta jornada de graduação.

Um agradecimento especial a Rodrigo dos Santos Almeida, técnico de laboratório e ao professor Lucas Izídio de Sousa Sampaio por disponibilizar de seus conhecimentos e de seu tempo para nos auxiliar na impressão das peças em 3D.

Agradeço impreterivelmente à minha família, em especial aos meus pais Rocilda do Carmo Conceição e Adalberto de França Carvalho, que me apoiaram e seguem apoiando em todas minhas decisões e que me auxiliaram financeira e moralmente tanto antes como durante todo este percurso acadêmico.

A todos os meus amigos que fiz durante este período de graduação, em especial a Winklei Brandão de Araújo, que me proporcionou momentos de muita descontração, leveza, e aprendizado. A Rodrigo Rodrigues; Lucas de Oliveira; Zilmara Albuquerque; Carlos Victor; Humberto Santos; Rosemeire Açucena; Vitor de Sousa Rodrigues; Eduardo Cardozo e aos meus colegas do curso de licenciatura em Química Wellington Silva Aguiar; Kamila Macedo e Luana Chris Sousa.

Gostaria de agradecer imensamente a Kevin Santos e Daiane Nascimento, que me apoiaram e me acolheram em um período muito difícil de minha vida. Nunca me esquecerei disso.

Por fim, agradeço a minha namorada Cecília Sávia Oliveira Aguiar por companheirismo, carinho e apoio. Além de me completar como pessoa, ela me ajudou a passar por momentos turbulentos e me proporcionou muitos momentos incríveis e inesquecíveis. Por ela fui orientado em muitas de minhas decisões, inclusive acadêmicas, o que serviu consideravelmente no meu crescimento pessoal e profissional.

“Meu objetivo é expor uma ciência muito nova que trata de um tema muito antigo. Talvez nada na natureza seja mais antigo que o movimento...”

Galileu Galilei

“A unidade é a variedade, e a variedade na unidade é a suprema lei do Universo”.

Isaac Newton

“A coisa mais incompreensível que há no Universo é o facto de ele ser comprehensível”.

Albert Einstein

RESUMO

CARVALHO, Diego. PÊNDULOS FÍSICOS ACOPLADOS POR MOLAS: UMA INVESTIGAÇÃO POR VIDEOANÁLISE E ARDUINO. 2022. 69 f. Trabalho de Conclusão de Curso – , Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Piauí. *Campus Parnaíba*. Parnaíba, 2022.

A utilização de tecnologias educacionais livres no ensino de Física tem atraído grande interesse da comunidade científica e dentro da sala de aula como uma forma de agregar para uma aprendizagem mais efetiva e autônoma. Nesse contexto, a realização de atividades experimentais em aulas de física mediadas por ferramentas tecnológicas que possibilitem aos estudantes tornarem-se agentes centrais e ativos no processo de aprendizagem e que apresentem flexibilidade de uso, baixo custo e ao mesmo tempo um boa precisão de medidas físicas, são de fundamental importância dentro do contexto de ensino moderno. Para contemplar esses aspectos, propomos o estudo de oscilações de dois pêndulos físicos acopladas por molas. As medidas são realizadas com um uso de duas ferramentas: (i) encoder incremental rotativo ligado a uma placa arduino para medidas de deslocamento angular e (ii) Tracker, um software livre de videoanálise. O resultados obtidos pelos dois métodos apresentam grande precisão entre eles além de boa concordância com os cálculos teóricos. Para o caso particular do pêndulo físico livre de acoplamento, verificamos como o período de oscilação é modificado com a distribuição de massa do pêndulo e com isso obtemos parâmetros físicos tais como a aceleração da gravidade e o raio de giração. Para o sistema de dois pêndulos físicos acoplados, usamos (ii) para analisar importantes informações a respeito do período de oscilação para modos simétricos e antissimétricos e período do batimento em termos da posição das molas de acoplamento. Por fim, as técnicas de construção do sistema com o software Fusion 360; os métodos de coleta com o Arduino e a Tracker, além das ferramentas de tratamento de dados como o Python, Origin e SciDavis, se mostram de grande relevância para o ensino de física e abre portas para investigações de sistemas mais avançados.

Palavras-chave: Ensino de Física. Pêndulo físico. Oscilação acoplada. Arduino. Videoanálise.

ABSTRACT

CARVALHO, Diego. Educational Data Mining for Performance Forecasting and Student Evasion in Introductory Algorithm Disciplines. 2022. 69 f. Trabalho de Conclusão de Curso – , Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Piauí. *Campus Parnaíba*. Parnaíba, 2022.

The use of accessible educational technologies in the teaching of Physics has attracted significant interest from the scientific community and within the classroom to add to more effective and autonomous learning. In this context, carrying out experimental activities in physics classes mediated by technological tools that allow students to become central and active agents in the learning process and that present flexibility of use, low cost, and at the same time a good precision of physical measurements are of fundamental importance within the context of modern education. To contemplate these aspects, we propose the study of oscillations of two physical pendulums coupled by springs. The measurements are performed using two tools: (i) a rotary incremental encoder connected to an Arduino board for angular displacement measurements and (ii) Tracker, a free video analysis software. The results obtained by the two methods show great precision between them and good agreement with the theoretical calculations. On the uncoupled physical pendulum case, we verify how the period of oscillation is modified with the mass distribution of the pendulum, and with that, we obtain physical parameters such as the acceleration of gravity and the radius of rotation. For the system of two coupled physical pendulums, we used (ii) to analyze important information regarding the period of oscillation for symmetrical and antisymmetrical modes and the period of the beat in terms of the position of the coupling springs. Finally, the experimental techniques used in this work, such as Arduino sensing, video analysis technique, and implementation of the Python language in data processing, as well as the physical phenomena studied, are shown to be of great relevance to the teaching of physics and open doors to investigations of more advanced systems and improvements in data collection modes.

Keywords: Teaching Physics. Physical pendulum. Coupled oscillation. Arduino. Video analysis.

LISTA DE FIGURAS

Figura 3.1 – Interface inicial do programa Tracker para o caso de estudo de oscilações acopladas em fase.	21
Figura 3.2 – <i>Hardware</i> Arduino MEGA 2560.	23
Figura 3.3 – Interface inicial IDE Arduino.	24
Figura 3.4 – Exemplos de <i>shields</i>	25
Figura 3.5 – Enconder Rotativo Incremental modelo.	26
Figura 3.6 – Esquema de funcionamento de um enconder incremental.	27
Figura 3.7 – Representação de ondas quadradas emitidas por um sensor enconder rotativo incremental.	27
Figura 4.1 – Corpo com dimensões e formatos quaisquer.	30
Figura 4.2 – Corpo arbitrário com superfície plana.	32
Figura 4.3 – Representação de um pêndulo físico.	32
Figura 4.4 – Cilindro com eixo fixo em relação ao seu centro de massa.	34
Figura 4.5 – Barra delgada com eixo fixo em relação ao seu centro de massa.	35
Figura 4.6 – Representação de um pêndulo físico.	36
Figura 4.7 – Esquematização para determinação do momento de inércia do disco.	37
Figura 5.1 – Pêndulos acoplados e parâmetros do sistema.	40
Figura 5.2 – Modos normais de vibração.	46
Figura 5.3 – Batimentos.	47
Figura 6.1 – Processo de construção e impressão de peças 3D.	49
Figura 6.2 – Ferramentas de coletas de dados em posição.	50
Figura 6.3 – Pêndulo Físico para oscilação livre.	51
Figura 6.4 – Pêndulos Físicos para oscilações acopladas.	51
Figura 6.5 – Esquematização para o pêndulo físico.	52
Figura 6.6 – Comparação entre os gráficos de θ em função do tempo obtidos em ambos os métodos.	55
Figura 6.7 – T em função de h	57
Figura 6.8 – $T^2h/4\pi^2$ em função de h^2	59

LISTA DE TABELAS

Tabela 3.1 – Conexões.	28
Tabela 6.1 – Dados para T e h (Arduino & Tracker).	56
Tabela 6.2 – Valores para a frequência angular nos modos simétrico e antissimétrico para ambos os pêndulos.	64

LISTA DE SÍMBOLOS

\circledR	Registrado
κ	Constante da mola
θ	Ângulo de oscilação
I	Momento de inércia
τ	Torque
ω	Frequência angular de oscilação
Ω	Termo de acoplamento
Θ	Constante arbitrária
ϕ	Constante arbitrária para condições iniciais
η	Coordenadas normais
α	Aceleração angular
P	Força-peso
k	Raio de giração

SUMÁRIO

1 – INTRODUÇÃO	13
2 – TECNOLOGIAS NO ENSINO DE FÍSICA	16
2.1 A FORMAÇÃO DO ATUAL PROFESSOR DE FÍSICA FRENTE A NOVA ERA DA EDUCAÇÃO TECNOLÓGICA	16
2.2 O USO DO DO COMPUTADOR NO ENSINO DE FÍSICA	17
2.2.1 Modelagem e simulação computacional	17
3 – FERRAMENTAS DE AQUISIÇÃO DE DADOS: TRACKER & ARDUINO	19
3.1 O MÉTODO DA VIDEOANÁLISE: <i>SOFTWARE TRACKER</i>	19
3.1.1 O <i>software Tracker</i>	20
3.2 MICROCONTROLADORES & ARDUINO	22
3.2.1 Arduino MEGA	23
3.2.2 <i>Software IDE Arduino</i>	24
3.2.3 <i>Shields</i>	25
3.2.4 Encoders Rotativos Incrementais	26
4 – TORQUE E MOMENTO DE INÉRCIA EM UM PÊNDULO FÍSICO	29
4.1 MOMENTO DE INÉRCIA	29
4.2 TEOREMA DOS EIXOS PARALELOS (STEINER)	30
4.3 TEOREMA DOS EIXOS PERPENDICULARES	31
4.4 O PÊNDULO FÍSICO	32
5 – SISTEMAS ACOPLADOS	39
5.1 SISTEMA DE PÊNDULOS ACOPLADOS	39
5.2 SISTEMA DE DOIS PÊNDULOS FÍSICOS ACOPLADOS POR MOLAS	40
5.2.1 Coordenadas Normais	44
5.3 AJUSTE DAS CONDIÇÕES INICIAIS E OS MODOS NORMAIS DE VIBRAÇÃO	45
5.4 O FENÔMENO DOS BATIMENTOS	46
6 – RESULTADOS E DISCUSSÕES	49
6.1 PREPARAÇÃO DO EXPERIMENTO	49
6.2 CAPTURA DOS DADOS COM TRACKER E ARDUINO: PÊNDULO FÍSICO EM OSCILAÇÃO LIVRE	52
6.2.1 Tracker	53
6.2.2 Arduino	54

6.3	DISCUSSÃO DOS RESULTADOS PARA PÊNDULO EM OSCILAÇÃO LIVRE: ARDUINO & TRACKER	55
6.4	CAPTURA DOS DADOS COM TRACKER: PÊNDULOS FÍSICOS ACOPLADOS	63
6.5	DISCUSSÃO DOS RESULTADOS PARA OSCILAÇÕES ACOPLADAS: TRACKER	63
7 – CONCLUSÕES	66
7.1	Considerações Finais	66
7.2	Trabalhos Futuros	66
Referências	67

1 INTRODUÇÃO

O uso da experimentação dentro de sala de aula corrobora com a reestruturação conceitual, verificação e reflexão de fenômenos, sendo, portanto, a parte central da produção de novos conhecimentos, possibilitando, inclusive, a produção de uma aprendizagem significativa a partir do momento em que os conhecimentos assimilados pelos alunos são considerados pelo professor da disciplina, favorecendo então o processo de contextualização de conceitos abstratos, relacionando-os com os acontecimentos do cotidiano, o que contribui fortemente para o constructo do saber matemático, científico e tecnológico que presidem a produção moderna (LEITÃO; TEIXEIRA; ROCHA, 2011; FEDERAL, 2005). Conforme afirma Moreira (2004), a experimentação promove a integração entre conceitos teóricos e práticos, o que permite a efetividade na aquisição de conhecimentos. Contudo, tendo em vista a realidade da maioria das escolas públicas do Brasil, a falta de acesso a laboratórios e materiais didáticos específicos inviabiliza a realização de práticas experimentais dentro de sala de aula, reduzindo a física a um mero campo teórico.

Segundo Leitão, Teixeira e Rocha (2011), dentre as possibilidades disponíveis para uso instrucional dentro de sala de aula e em laboratórios, destaca-se o método da videoanálise. Essa ferramenta se apresenta com grande potencial no estudo de fenômenos que envolvem movimentos dinâmicos de sistemas, ao se instruir basicamente de uma câmera fotográfica e um *software* de computador capaz de analisar as filmagens, não necessitando portanto de grandes investimentos para tal, visto a disponibilidade de programas livres com esta finalidade, ao qual se destaca o Tracker.

A implementação e concomitância de métodos mais sofisticados de análise de dados favorece a obtenção de resultados mais coerentes, precisos e com menores taxas de erro ao serem automatizadas ações ou métodos de captura de dados. Tendo em vista a sua facilidade de acesso e linguagem de programação acessível, o uso do *Arduino* por meio de sensores tem se tornado uma alternativa bastante popular e eficaz no meio científico, tendo contribuído bastante no ramo da pesquisa experimental nas últimas décadas, pois ao dispor de uma quantidade considerável de bibliotecas na *internet* que possibilitam criar, utilizar ou aprimorar projetos já existentes para a construção de um novo projeto, permite-se ter um vasto aporte em experimentos tanto didáticos dentro de uma sala de aula como também em estudos investigativos laboratoriais (ARDUINO, 2021b).

Recentemente, Trocaru et al. (2020) utilizando-se do método da videoanálise com o *software* Tracker, realizou um estudo clássico de oscilações acopladas entre dois pêndulos físicos, evidenciando os seus resultados quanto às análises dos modos normais de vibração (simétrico e antissimétrico) e o fenômeno dos batimentos de modo a confrontar os resultados esperados por uma análise teórica e os resultados obtidos por meio da medição tendo

como foco a análise de vários outros conceitos inerentes à temática como os períodos de oscilação envolvidos, constantes das molas envolvidas e o acoplamento elástico além da direta dependência dos períodos de batimento com a posição do acoplamento da mola. E nesta mesma linha de pesquisa, destaca-se também o estudo realizado por Chiriacescu et al. (2020) que utilizou-se de dois métodos de estudo para análise de dados, o Arduino e o Tracker abrangendo o método da videoanálise para a análise da dinâmica do *pêndulo de Kater* ou pêndulo físico. Desta forma, os autores responsáveis pelo estudo buscaram uma correlação entre ambos os métodos envolvendo medições dos períodos de oscilação deste sistema, obtendo inclusive um bom acordo entre eles, evidenciando, portanto, que a integração entre diferentes métodos de análise no estudo de fenômenos para a obtenção de dados experimentais complementa na riqueza da investigação de modo em geral.

Destaca-se, portanto, que o estudo de sistemas oscilantes e acoplados são encontrados em diversas situações físicas, como no estudo de circuitos RLC, problema de três corpos, teoria do caos, pêndulos acoplados, movimentos microscópicos em sólidos cristalinos e a oscilação do campo magnético, dentre outros, contudo, este fenômeno não se restringe somente ao campo de estudo da Física em si, sendo encontradas também aplicações na área da Química e Biologia. Como exemplo, podemos citar a vibração de átomos, que por si só não constituem uma estrutura rígida, oscilando em torno de suas posições de equilíbrio, e por estarem sempre de forma aglomerada, estes movimentos oscilatórios afetam diretamente o comportamento sistemático do conjunto, o que caracteriza um sistema oscilante e acoplado (ALONSO; FINN, 2018; THORNTON; MARION, 2011).

Portanto, com base nestes estudos realizados por Chiriacescu et al. (2020) e Trocaru et al. (2020) dentre tantos outros aqui citados, este trabalho propõe-se em estudar uma extensão dos sistemas aqui supracitados, sendo guiado pelos roteiros experimentais da PHYSICS - PHYWE¹ e 3B SCIENTIFIC², analisando tanto o caso mais simples de um pêndulo físico com oscilação livre utilizando-se dos dois métodos (Arduino e videoanálise), como também o caso de pêndulos físicos acoplados entre si tanto por uma mola quanto também com molas fixas laterais, utilizando-se para isso exclusivamente o método da videoanálise devido a limitações de *hardware* e *software* com o objetivo de comparar os resultados obtidos com as previsões teóricas. Neste contexto, foram analisadas diversas situações de esquematização do sistema, como a variação a posição de fixação da molas, o acoplamento de massas pré-definidas em posições diversas para alterações no momento de inércia do sistema, período e frequência, dentre outras modificações relevantes.

ORGANIZAR ESTE ULTIMO PARÁGRAFO CONFORME A ORGANIZAÇÃO FINAL DOS CAPÍTULOS

A fim de alcançar os objetivos descritos anteriormente, estruturamos este trabalho na

¹Disponível em: <http://phylab.yonsei.ac.kr/exp_ref/phywe/1_3_25.pdf>

²Disponível em: <https://www.3bscientific.com.br/PhysicsExperiments/UE1050600_PT.pdf>

forma que se segue. No capítulo 2, delineamos os fundamentos teóricos acerca da viabilidade de aplicação de métodos automatizados de pesquisa de baixo custo, tendo em vista a facilidade de acesso e o grande repositório disponível na internet. Na sequência deste mesmo capítulo, estruturamos os fundamentos teóricos sobre videoanálise e destacamos os diversos trabalhos que já foram realizados tendo como base a utilização do sensoriamento por Arduino, destacando resultados promissores na área da pesquisa e instrumentação no ensino de física. No capítulo 3 foram destacados os procedimentos experimentais utilizados na coleta de dados por ambos os métodos, destacando no capítulo 4 os resultados encontrados, sobretudo na plotagem de gráficos. Por fim, no capítulo 5 finalizamos o trabalho com algumas conclusões e pretensões futuras.

2 TECNOLOGIAS NO ENSINO DE FÍSICA

Conforme afirmam Moreira (2004), Silva, Tavares e Silva (2018), o ensino de Física, da educação básica ao ensino superior, requer de seus mediadores (professores) práticas pedagógico-metodológicas que visem o maior engajamento dos alunos para que o aprendizado se torne algo significativo e com sentido, possibilitando associações de conhecimentos. O que corrobora fortemente para o cumprimento dessas ações, principalmente na era da informação em que vivemos, são as tecnologias disponíveis em suas diversas formas e denominadas como TIC's (Tecnologias da Informação e Comunicação) que podem ser agregadas aos meios de educação e estão cada vez mais presentes nas práticas pedagógicas dos professores.

2.1 A FORMAÇÃO DO ATUAL PROFESSOR DE FÍSICA FRENTE A NOVA ERA DA EDUCAÇÃO TECNOLÓGICA

Pensar em educação tecnológica nos tempos atuais é, acima de uma questão de modernização do ensino, uma questão de leis e princípios estabelecidos por órgãos normativos da educação brasileira, como a Lei 9.394/96 da Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB), que estabelece a formação do indivíduo para o uso de tecnologias nos diversos níveis de ensino (BRASIL, 1996), assim como os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), que, trazendo um enfoque para o Ensino Médio, estabelecem o desenvolvimento de um saber matemático, científico e tecnológico como condição de cidadania e, quando voltado especificamente para o ensino de Física, defende que diversas tecnologias atuais podem ser associadas e utilizadas para obtenção dos saberes físicos, de forma que um aprendizado culturalmente significativo e contextualizado da Física transcendia naturalmente os domínios disciplinares estritos, logo, os métodos avaliativos, conteúdos e metodologias de ensino devem ser adequadas para que o aluno ao final do Ensino Médio demonstre “*domínio dos princípios científicos e tecnológicos que presidem a produção moderna*” (LOPES, 2002; FEDERAL, 2005).

Contudo, nota-se que este processo de ascensão da Física como uma disciplina interdisciplinar, transversal e contextualizada está intrinsecamente ligado ao processo de formação inicial dos professores, que deve considerar estes aspectos, tornando os alunos capazes de aplicar seus conhecimentos em variados contextos e situações reais. O ato de criticar construtivamente dentro da sala de aula, segundo Angotti (1993), é algo que vem se perdendo com o passar dos tempos se levarmos em conta o processo formativo dos docentes atuais, que muitas vezes é dotado da falta de significado de conteúdos considerados críticos.

Tendo em vista o papel incontestável das ciências no processo de evolução da humanidade, que encontra-se constantemente em processo de mutável tecnológica e socialmente,

torna-se imprescindível que os novos e futuros professores adquiram uma postura mais voltada ao desenvolvimento do pensamento crítico e científico de seus alunos, ensinando-os a aprender de forma correta e significativa, sempre buscando a correlação entre os conteúdos, possibilitando conduzir investigações e desenvolver a capacidade de argumentação e questionamentos científicos de forma inteligente. Assim, como as ciências físicas estão cercadas por inúmeros conhecimentos contemporâneos e modernos, cujos estudos buscam resolver problemas atuais das sociedades humanas em áreas diversas, a formação atual desta nova era de professores deve levar em conta todos estes aspectos (ARAUJO et al., 2018).

2.2 O USO DO COMPUTADOR NO ENSINO DE FÍSICA

Atualmente, devido à expansão dos meios tecnológicos em praticamente todas as áreas de organização social, encontram-se disponíveis diversas formas de utilização do computador para os mais diversos fins. Quando nos restringimos à aplicação destes recursos dentro do campo educacional, são abertos um leque de possibilidades para o professor, que pode utilizar-se destes meios como uma forma de aprimoramento de suas práticas pedagógicas, indagando e trazendo para si a atenção de seus alunos como resultado do engajamento que estes meios possibilitam, compactuando com os pressupostos teóricos da aprendizagem significativa.

2.2.1 Modelagem e simulação computacional

Dentro do contexto educacional, já há vários recursos disponíveis para o professor, onde se destacam as simulações, que servem para fazer uma aproximação de uma situação real para uma situação computadorizada, pois são modelos simplificados da realidade, que permitem que o aluno visualize algo que seria impossível ou demasiadamente difícil de visualizar na vida real; e as modelagens computacionais, que de modo simplificado, permite ao aluno criar uma espécie de “micromundo”, sujeito a leis não necessariamente iguais a do mundo real, manipuláveis através de equações do modelo, associando a eles parâmetros pré-estabelecidos (ALIPRANDINI; SCHUHMACHER; MURIEL, 2009; MENDES, 2019).

Dentre os *softwares* disponíveis atualmente voltados especificamente para o método da simulação e modelagem computacional, destacam-se programas como Modellus¹ e Phet², que são amplamente utilizados em sala de aula com o objetivo de realizar simulações. Possuindo uma interface moderna e atraente, estes softwares são capazes de plotar gráficos, mostrar equações, representação da ação de forças sobre um corpo e determinação de diversas outras grandezas físicas. O fato de serem manipuláveis proporciona aos alunos se

¹Disponível em: <https://docente.ifrn.edu.br/alessandrrolim/informatica-aplicada-a-fisica/software-modellus-4.01/view>

²Disponível em: https://phet.colorado.edu/pt_BR/

tornarem agentes ativos neste processo de construção de conhecimentos, tendo um contato direto com o objeto de estudo (SILVA; TAVARES; SILVA, 2018).

Em se tratando do ensino de Física, temos uma vasta bibliografia de trabalhos realizados em experimentações dentro da sala de aula, bem como em ambientes de pesquisa, o que demonstra o grande aporte da utilização das TIC's(Tecnologias da Informação e Comunicação) como uma potencial ferramenta cognitiva que permite ao estudante/pesquisador construir uma perspectiva do mundo que o cerca ao desenvolver habilidades de análise e interiorização de conhecimentos. Contudo, é importante destacar que quando se fala no uso de tecnologias dentro da sala de aula, deve ser levado em consideração que o uso destas ferramentas precisa servir como um meio ou um complemento de aprendizagem, visto que estes recursos não substituem o professor e que de certa forma podem trazer resultados negativos se não forem bem empregados, logo, cabe ao docente, por intermédio de políticas educacionais, governamentais e também internas à escola, ter uma preparação adequada para possuir habilidades e competências necessárias (SILVA; TAVARES; SILVA, 2018; CAVALCANTE; TAVOLARO; MOLISANI, 2011).

3 FERRAMENTAS DE AQUISIÇÃO DE DADOS: TRACKER & ARDUINO

No campo de estudo da Física, o método da videoanálise possui grandes potencialidades para fins educacionais pois permite uma maior dinamização na prática pedagógica de ensino, uma vez que o uso didático deste recurso não é de uso passivo, sendo possível uma interação entre o aluno-pesquisador, o objeto de estudo e o produto, no caso, o vídeo, o que proporciona uma dinamização na prática pedagógica de ensino ao explorar meios diversos de investigar a natureza.

Através do sensoriamento por meio da plataforma Arduino, operados em linguagem de programação C/C++, torna-se possível a coleta de diversos dados do ambiente ao seu redor, sendo esta uma opção utilizada em larga escala tanto em projetos científicos, acadêmicos e até mesmo para fins industriais e de pesquisa aplicada, além da robótica.

3.1 O MÉTODO DA VIDEOANÁLISE: *SOFTWARE TRACKER*

O estudo de alguns campos da Física requerem uma análise minuciosa de dados para observações de fenômenos físicos, sejam eles palpáveis ou não. A depender do tipo de caso e do objeto de estudo em si, estas análises podem demandar o uso de tecnologias específicas, como *softwares* de computadores, aplicativos em celulares ou *tablets*. Nas últimas décadas, com a popularização das câmeras digitais, bem como sua facilidade de acesso e seu maior poder de captura de imagens com altas resoluções, tornou-se viável a análise de fenômenos físicos através de recursos de mídia, como os vídeos, sendo este método conhecido por videoanálise, dentre os quais se destacam programas como Tracker (*software* livre) e Logger Pro (*software* utilizável mediante aquisição de licença), que em suma servem para analisar fenômenos dinâmicos quadro a quadro por meio de um vídeo, que é uma sequência de imagens (LEITÃO; TEIXEIRA; ROCHA, 2011; JR et al., 2012).

Conforme sugerido, o método da videoanálise consiste em fazer capturas de uma sequência de imagens (vídeo) para que estas possam ser analisadas quadro a quadro. Para fazer a conversão de dados reais (objeto estudado) para um conjunto de imagens sucessivas digitais (vídeo) em algum *software* de computador, é necessário que sejam adotadas as escalas de correção adequadas, como a utilização da base de tempo do equipamento utilizado, além de informar ao programa qual o fator de escala entre o espaço físico real capturado com o espaço expresso em *pixels*.

Fortemente aplicável nos campos da Mecânica ao estudar grandezas como posição, velocidade e energia de um corpo, o método da videoanálise também pode ser utilizado para estudar fenômenos de ondulatória, como nas oscilações de sistemas livres ou acoplados; fenômenos ligados a eletricidade e magnetismo como no estudo de um circuito LC, dentre

outros (LEITÃO; TEIXEIRA; ROCHA, 2011; TROCARI et al., 2020).

3.1.1 O *software* Tracker

Certamente, um dos programas mais utilizados em larga escala no meio acadêmico quando se fala em análise de movimentos por meio do método da videoanálise é o *software* gratuito Tracker. Este programa é resultado da parceria entre o professor Douglas Brown, da faculdade comunitária Cabrillo College, Califórnia, Estados Unidos e pelo *Open Source Physics*, que é um projeto financiado pela *Nacional Science Foundation* e Davidson College, que juntos buscam fornecer um ferramental e bibliotecas de código aberto voltadas para o ensino de Física (TRACKER, 2021; CHRISTIAN; ESQUEMBRE; BARBATO, 2011).

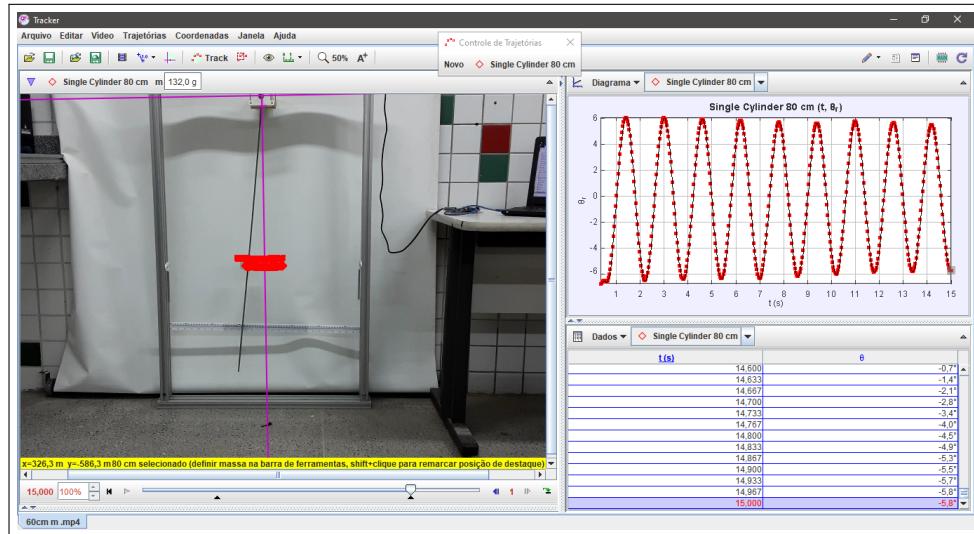
Quando trazemos o contexto do uso de tecnologias para o âmbito do espaço escolar, estamos corroborando para a construção de um ser humano não-passivo, e o uso de tecnologias como o Tracker permite que o aluno-pesquisador acompanhe de perto a produção dos dados experimentais, se tornando um agente ativo do processo de pesquisa, sendo capaz de manipular dados, construir gráficos e analisar situações reais, quebrando o paradigma da sequência de roteiros experimentais fechados e pouco dinâmicos (FILHO, 2004; ANJOS, 2008).

Devemos entender um vídeo como um conjunto de imagens sequenciadas, (*frames*), que são capturadas e reproduzidas em um intervalo de tempo determinado. Os aparelhos reprodutores de vídeos o reproduzem a uma certa taxa pré-determinada, que dependem, dentre outros fatores, da arquitetura e limitações físicas do aparelho considerado. Como exemplos temos as TVs modernas, que são capazes de reproduzir vídeos a uma taxa de 60 fps (frames por segundo), enquanto que as câmeras de celulares populares fazem essa captura de imagens a uma taxa de 30 fps. Assim, podemos afirmar que a qualidade e resolução dos dados obtidos para análise dependem sobretudo da qualidade das imagens obtidas, e de modo geral, quanto maior a taxa de fps, maior a suavidade do video. Para uma câmera com baixa resolução, que permite somente a gravação de algumas dezenas de quadro por segundo, tem-se uma perda considerável na análise de vídeos que têm objetos se movendo mais rapidamente (ordens iguais ou superiores a algumas dezenas de metros por segundo), pois o objeto percorre espaços maiores do que a câmera é capaz de capturar nos intervalos de tempo em que o movimento de abre e fecha do obturador ocorre, desta forma, em algumas situações em que se deseja utilizar o *software* de maneira extremamente precisa, é necessário que se recorra a uma câmera com altas resoluções, o que de certa forma pode encarecer, ou até mesmo inviabilizar o seu uso (TRACKER, 2021; LEITÃO; TEIXEIRA; ROCHA, 2011).

Para que haja a coleta dos dados experimentais do objeto de estudo com o uso do programa, devem ser considerados alguns procedimentos básicos, que vão desde a

preparação do ambiente de filmagem e instalação do *software* à definição dos parâmetros do corpo de estudo após o processamento do vídeo no programa, onde são definidas a marcação de escalas e pontos quadro a quadro¹. Abaixo, na Figura (3.1), a interface do Tracker.

Figura 3.1 – Interface inicial do programa Tracker para o caso de estudo de oscilações acopladas em fase.



Fonte: Autoria própria (2022).

Basicamente, a utilização padrão deste *software* consiste em três etapas simples, a saber: organização do experimento e ambientação da filmagem com iluminação considerável; captura das filmagens do movimento de interesse e transferência do arquivo para o programa previamente instalado. Podemos observar que sua interface é simples, bastante intuitiva e autoexplicativa, o que compete a ele a sua popularidade. Os “caminhos” traçados pelo *software* neste caso da figura acima foi feito por meio de captura automática. À esquerda temos um frame do vídeo analisado, observe os eixos adotados como o *x* estando orientado para baixo. Logo a direita no campo inferior temos os dados tabelados para o ponto de massa definido e acima deste o gráfico referente para posição angular em função do tempo, ambos coletados de forma simultânea.

¹Para uma descrição mais precisa dos procedimentos iniciais que devem ser tomados, os seguintes manuais e dicas podem ser consultados, estando disponíveis em:

- <https://trackerbrasil.ct.utfpr.edu.br/?page_id=8>
- <<http://www.if.ufrgs.br/cref/uab/lab/tracker.html>>. Acesso em: 19 de janeiro de 2022.
- <<http://paginapessoal.utfpr.edu.br/lenz/tracker/ManualTrackerdetalhado.pdf/view>>. Acesso em: 19 de janeiro de 2022.
- <<https://www.youtube.com/channel/UCnh-8DQM3Tm2a1pj05Fb4Uw>>. Acesso em: 19 de janeiro de 2022.

3.2 MICROCONTROLADORES & ARDUINO

Os microcontroladores, por possuírem tamanho relativamente pequeno e um baixo custo energético, além de grande capacidade de processamentos de dados, encontram-se presentes em vários equipamentos eletrônicos que conhecemos, desde um controle remoto a um minimalista celular atual. São placas que têm microprocessadores embutidos que analisam instruções pré-definidas e executam ações, possuindo memória e pinos de entrada e saída que servem para comunicação com diferentes tipos de sensores, temporizadores, resistores e portas seriais, diferenciando-se entre si com respeito à velocidade de processamento de dados, quantidade de memória disponível, pinos de entrada e saída, arquitetura eletrônica, tipos e quantidades de periféricos, dentre outros (BUKMAN, 2016).

Nas últimas décadas, um dos tipos de microcontroladores que têm se destacado tanto no campo da ciência e educação como indústria e robótica é o Arduino, que é uma plataforma *Open Source* de prototipagem eletrônica surgida em 2005 por um grupo de pesquisadores italianos, que tinham como objetivo principal criar um sistema de programação acessível, rápida e fácil de se programar, voltada a alunos e projetistas amadores sem formação específica, para que pudessem ser desenvolvidos dispositivos independentes de baixo custo que permitissem a interação com o ambiente através de diversos sensores para os mais variados objetivos, como por exemplo, sensores de movimento, temperatura, pressão, umidade, distância, sons, entre outros (ARDUINO, 2021b; THOMSEN, 2014).

O sistema baseado em Arduino é projetado com um microcontrolador que possui suporte para entrada e saída (*input/output*) embutidos, sendo utilizados um microcontrolador AVR, de propriedade da empresa Atmel, que garante a sua facilidade, baixo consumo energético e altos níveis de integração. Estes microcontroladores da ATMEL® servem como complemento dos microcontroladores baseados em ARM® SMART desta mesma empresa, o que fornece uma combinação única de desempenho e flexibilização de um projeto (ATMEL, 2018).

Na internet é possível encontrar uma gama de informações disponíveis acerca do Arduino, como fóruns de debate, tutoriais com cursos completos, além de sua própria documentação em seu site oficial², o que aumenta ainda mais o seu poder de aplicabilidade e expansão nas mais diversas áreas do conhecimento e pesquisa devido a facilidade de criar, reproduzir ou adaptar protótipos já prontos tendo como base as inúmeras bibliotecas em repositórios diversos que facilitam a configuração de uma placa e integraram-se ao interfaceamento de outros *hardwares*, contribuindo então no desenvolvimento de *firmwares*³.

Se tratando do ensino de Física, temos uma vasta bibliografia de trabalhos realizados em experimentações dentro da sala de aula, bem como em ambientes de pesquisa, o que

²<https://www.arduino.cc/>

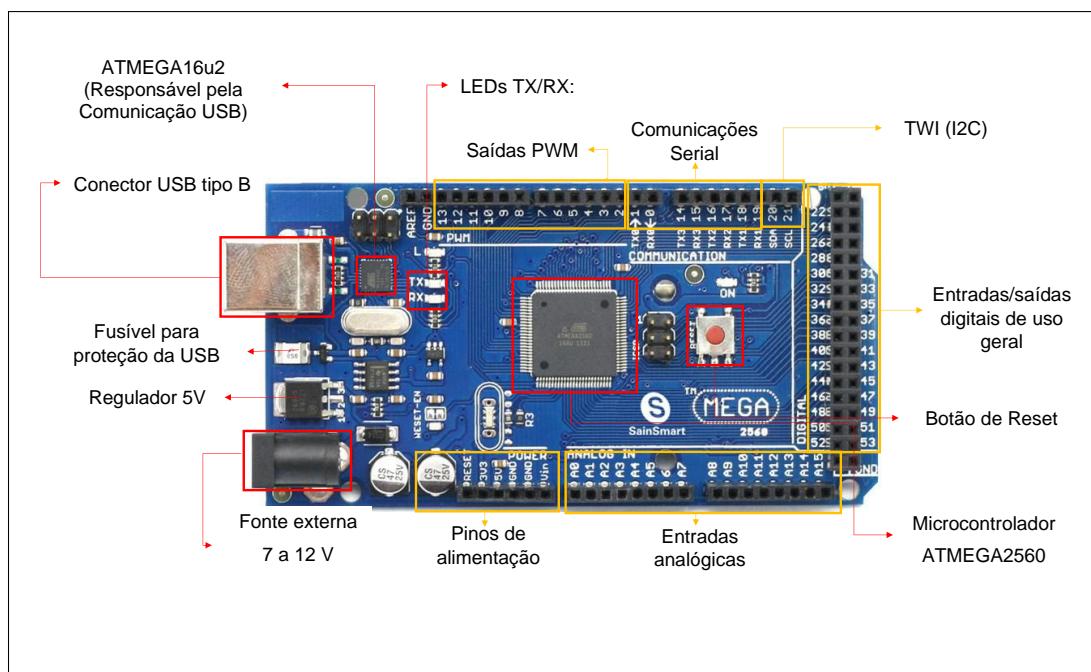
³Os *firmwares* são um conjunto de instruções operacionais que são programadas diretamente no hardware de equipamentos eletrônicos.

demonstra o grande apporte da utilização das tecnologias da informação como uma potencial ferramenta cognitiva que permite ao estudante/pesquisador construir uma perspectiva do mundo que o cerca ao desenvolver habilidades de análise e interiorização de conhecimentos (CAVALCANTE; TAVOLARO; MOLISANI, 2011). Corroborando com esta afirmação, diversos trabalhos estão sendo realizados tendo como base a plataforma Arduino, tendo em vista que a sua integração com aparatos experimentais através dos sensores permite medir, calcular e inferir diversas grandezas e fenômenos físicos nas mais diversas áreas, como na Mecânica (JÚNIOR et al., 2020; CHIRIACESCU et al., 2020); Termodinâmica (OLIVEIRA et al., 2019); Eletricidade (CAVALCANTE; TAVOLARO; MOLISANI, 2011; MOYA, 2018); Ótica (ATKIN, 2017) e Física Moderna (SILVEIRA; GIRARDI, 2017; OLIVEIRA et al., 2020).

3.2.1 Arduino MEGA

Atualmente, existem diversos tipos de placas Arduino para os mais diversos fins e aplicações, sendo o *Arduino MEGA 2560* baseado no microcontrolador *ATmega2560* como uma das opções mais populares e com utilização em diversos trabalhos, tendo em vista que este modelo é voltado a projetos que necessitem de memória de programa com maior capacidade. Na Figura (3.2), tem-se a esquematização simplificada da placa citada e utilizada neste trabalho.

Figura 3.2 – Hardware Arduino MEGA 2560.



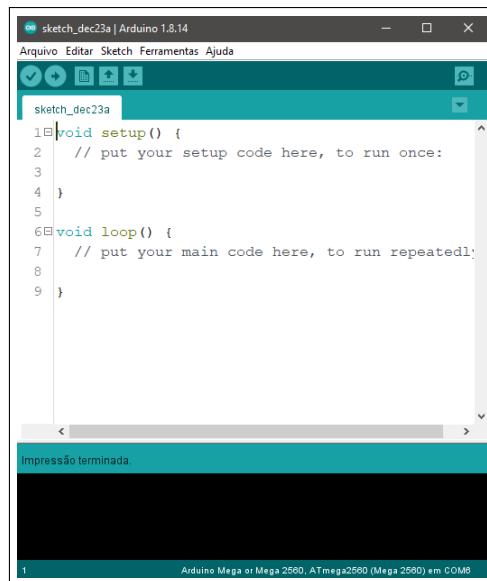
Fonte: Autoria própria (2021)

A referente placa conta com 54 pinos de entrada/saída digital, sendo 15 deles podendo ser usados com saídas PWM (Pulse Width Modulation)⁴ que são utilizadas por sistemas digitais para variação do valor médio de uma forma de onda periódica; 16 entradas analógicas; botão de *reset* que reinicia a placa; conector USB tipo B que faz a conexão com o computador, podendo ser também uma opção de alimentação da placa; pinos de alimentação que fornecem diversos valores de tensão que podem ser utilizados para energizar os componentes do projeto, dentre outros componentes como os resistores *pull-up* nos pinos 20 - 21 da placa e o conversor Serial-USB ATMEGA16u2 que é responsável pela comunicação entre o computador e o microcontrolador, sendo que os LEDs TX e RX acendem quando o Arduino está transmitindo e recebendo dados pela porta serial respectivamente (SEMICONDUCTORS, 2021).

3.2.2 Software IDE Arduino

Para que o Arduino seja capaz de executar uma ação, é necessário que ele carregue o código previamente definido, e isto é realizado por meio de uma interface de programação conhecida como **Arduino IDE**, que dispensa a utilização de programas em ambientes de linhas de comando. A sua sintaxe de programação é uma derivação do *Wiring*, que é baseada em C/C++, possuindo funções específicas para trabalhar com a portas do Arduino. Observe na Figura (3.3) abaixo a interface inicial da IDE do *Arduino*.

Figura 3.3 – Interface inicial IDE Arduino.



Fonte: Autoria própria (2021).

Esta IDE é basicamente um editor de textos com sintaxe específica de programação que conecta o *hardware* ao *software* do Arduino, analisando previamente o código e listando possíveis erros e fazendo o *upload* para a placa após as eventuais correções. Basicamente,

⁴Mais informações em: <<https://www.citisystems.com.br/pwm/>>

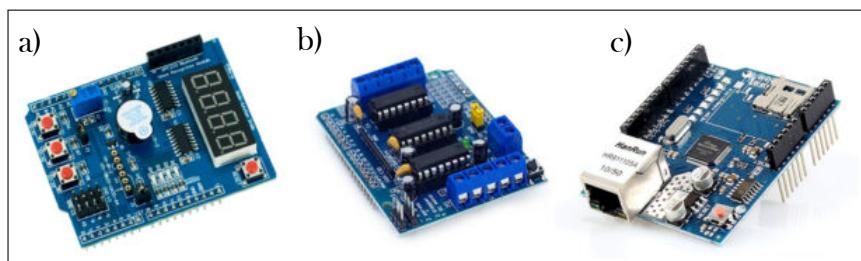
são necessárias duas funções fundamentais para seu funcionamento, o *setup()* e o *loop()* (BUKMAN, 2016).

Além disso, a plataforma utiliza-se de um *bootloader*, que dispensa o uso de programadores para o chip e também o uso de softwares adicionais (JÚNIOR et al., 2020; ARDUINO, 2021b).

3.2.3 Shields

As potencialidades de uma placa Arduino podem ser ampliadas ainda mais se utilizadas algumas *shields*, que basicamente são outras placas que podem ser plugadas ou acopladas à placa principal, sendo os pinos estendidos para não serem perdidas nenhuma função. Muitas delas empilháveis, o que possibilita a criação de módulos de *hardware* com várias finalidades e funções específicas. Conforme sugerido anteriormente, o Arduino, além de suas funções mais simples utilizando sensores, pode ser utilizado também para outras funções ainda mais complexas, como conexão com a *internet*, receptor GPS, controlador de motores, simulação de telefones celulares, tocadores de MP3, dentre outras funções. Como exemplos, podemos citar os LCD *Shield* com Teclado; *Protoshield*; Base *Shield Groove*; *Shield* Multifunções Nível Intermediário; Motor *Shield* L293D e *Ethernet Shield W5100*, (QUADROS, 2021). Abaixo, na Figura (3.4), vemos alguns exemplos destas placas auxiliares:

Figura 3.4 – Exemplos de *shields*.



Fonte: <<https://www.filipeflop.com/blog/o-que-sao-shields-para-arduino/>>

Como explica Quadros (2021), o *shield* Multifunções Nível Intermediário é uma placa auxiliar que possui funções de outras placas integradas em uma só (**Figura 3.4(a)**). Os 4 botões do *display* e o *buzzer* permitem interação com o usuário, sendo seus outros pinos de conexão destinados à ligação de sensores de temperatura e afins. Já o Motor *Shield* equipado com dois chips L293D (**ver Figura 3.4(b)**) é uma opção viável em se tratando de projetos de robótica que necessitem de poucos motores, visto que esta é uma placa auxiliar com esta finalidade específica de acionamento de motores, com uma capacidade de chaveamento até 16 V e 600 mA. Como último exemplo, o *Ethernet Shield W5100* (**ver Figura 3.4(c)**) permite conectar o Arduino a uma rede local *Ethernet* implementando internamente o protocolo TCP/IP, liberando o Arduino para as funções de controle.

3.2.4 Encoders Rotativos Incrementais

Para a medição da posição angular dos pêndulos físicos, foram utilizados 2 encoders ou codificadores rotativos incrementais de modelo - LPD3806-600BM-G5-24C - **ver Figura (3.5)** abaixo.

Figura 3.5 – Enconder Rotativo Incremental modelo.



Fonte: Autoria própria (2021).

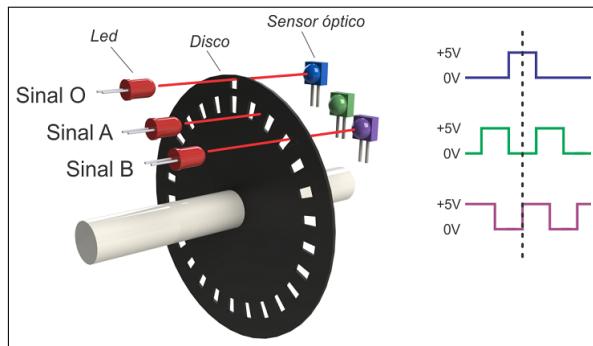
Estes codificadores são responsáveis por rastrear o giro dos eixos de um sistema para gerar informações digitais de posição ou movimento, sendo inclusive muito utilizados na indústria e robótica, como na verificação de velocidade de uma esteira e até controle de posição em máquinas industriais automatizadas, estando sempre emparelhados com *drivers* (OGUNTOSIN; AKINDELE, 2019).

Diferentemente dos potenciômetros, os encoders podem girar indefinidamente em torno do seu eixo de rotação e são projetados com diversos tipos de resolução para as mais diferentes aplicações, nas quais os pulsos produzidos para uma rotação completa ou uma revolução em torno do eixo variam de 16 (2^4) até 1024 (2^{10}) pulsos.

Existem vários tipos de encoders, contudo, de modo geral, para os encoders ópticos, tem-se um princípio de funcionamento comum. Basicamente, eles são constituídos por um diodo emissor de luz (LED) e um disco opaco que pode ser construído com vidro, metal ou plástico, tendo também um detector luminoso colocado no lado oposto do disco. Neste disco, há várias “janelas” (setores opacos e transparentes a luz) que permitem ou bloqueiam a passagem da luz emitida pelo LED conforme o giro do eixo, enviando sinais que são convertidos em pulsos elétricos e enviados pelos canais A, B e O, gerando pulsos de ondas quadradas que podem ser interpretadas em posição ou movimento (ALMEIDA, 2018). Observe a Figura (3.6) abaixo:

O modelo de sensor mais comercializado, segundo Almeida (2018), é o sensor ótico incremental, que diferente do absoluto, não é capaz de contabilizar a posição final ao qual o eixo foi deixado assim que desligado da fonte de alimentação, zerando então sua contagem. Este modelo de sensor, conforme mencionado anteriormente, possui três canais de saída, os canais A, B e O, o que possibilita adquirir o ângulo de rotação bem como seu sentido (horário ou anti-horário), além da marcação do início ou fim de uma revolução. O sinal A é o sinal principal, que fornece os pulsos (*clocks*) na mesma proporção de giro do eixo; o sinal B, é equivalente ao sinal A, entretanto, este é defasado em $\pm 90^\circ$, sendo responsável então por determinar o sentido de rotação do eixo. O sinal O, simplesmente marca as

Figura 3.6 – Esquema de funcionamento de um encoder incremental.

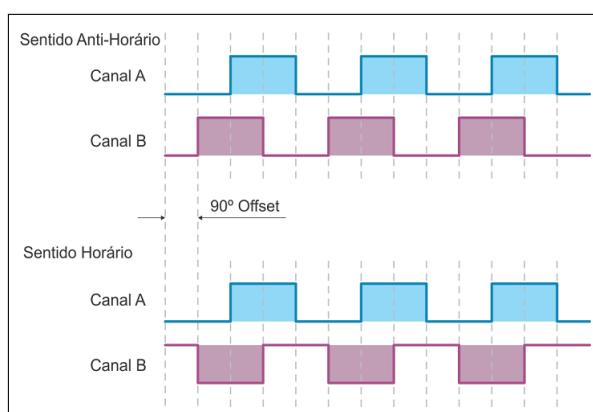


Fonte: (ALMEIDA, 2018)

revoluções completas.

Um diagrama esquemático dos pulsos de onda quadrada permite entender melhor um funcionamento de um encoder incremental. Observe a Figura (3.7)

Figura 3.7 – Representação de ondas quadradas emitidas por um sensor enconder rotativo incremental.



Fonte: (ALMEIDA, 2018)

O pulso alto inicial de uma onda indica o momento ao qual a luz emitida pelo LED foi detectada pelo sensor, o pulso constante horizontal superior indica a permanência de recebimento (sinal *high*) desta luz, o pulso baixo indica o momento em que houve bloqueio da luz ao passar pelo setor opaco e por fim o pulso horizontal inferior indica a permanência de não-recebimento da luz (sinal *low*). Desta forma, conforme a Figura (3.7) quando o sinal B estiver adiantado em 90° em relação ao sinal A, isso indica que o encoder gira em sentido anti-horário, neste caso a borda de subida de um sinal A se encontra com o sinal B no estado 1, analogamente, quando a B estiver em 0 durante a borda de subida do sinal A, o encoder estará girando no sentido horário. O terceiro sinal do encoder, o sinal O ou Z ou I, tem por objetivo indicar a posição “0” (zero) do encoder, com essa informação é possível detectar o número de voltas completas que o dispositivo acoplado ao encoder gerou.

O modelo utilizado neste trabalho possui as seguintes especificidades (OGUNTOSIN; AKINDELE, 2019) :

- A fase única é obtida por 600 pulsos por revolução, portanto, a saída de 2 fases muda para 2400 pulsos por revolução ($600 \cdot (2)^2 = 2400$ P/R);
- Velocidade mecânica máxima de 5000 rotações por minuto;
- A frequência de resposta está na faixa de 0 a 20 kHz.

As conexões são feitas da seguinte forma:

Tabela 3.1 – Conexões.

Cor do fio	Representação
Fio vermelho (1)	Entrada de alimentação DC, (5-24 V DC)
Fio preto (2)	Entrada de alimentação DC, aterramento (0V)
Fio verde (3)	Saída de fase A
Fio branco (4)	Saída de fase B

Fonte: (OGUNTOSIN; AKINDELE, 2019) - traduzido.

Segundo Oguntosin e Akindele (2019), para uma revolução completa ou 360° neste encoder incremental, tem-se 2400 pulsos, logo para um único pulso temos um ângulo que vale:

$$\hat{\text{Ângulo}} = \text{Posição do Encoder} \cdot \frac{360^\circ}{2400} = \text{Posição do Encoder} \cdot 0.15^\circ$$

ou em radianos como sendo

$$\hat{\text{Ângulo}} = \text{Posição do Encoder} \cdot \frac{0.30}{360} \pi \text{rad}$$

Sendo assim, este tipo de encoder pode facilmente ser implementado a um micro-controlador Arduino conectado em suas duas saídas, o que permite facilmente descobrir a direção de rotação. O ângulo de movimento e o ponto máximo ao qual o codificador girou também pode ser determinado contando-se o número de pulsos dos sinais A e B.

4 TORQUE E MOMENTO DE INÉRCIA EM UM PÊNDULO FÍSICO

A dinâmica de corpos rígidos pode assumir diversos graus de liberdade, executando, portanto, movimentos complexos em torno de seus eixos de rotação. Sendo assim, o modo mais simples deste tipo de movimento recai no caso onde há um corpo rígido rotacionando em torno de um eixo fixo, que é o caso de um pêndulo físico.

4.1 MOMENTO DE INÉRCIA

Um dado corpo qualquer que se move sem rotacionar sobre um plano determinado executa um movimento simples de translação, no entanto, se este corpo rotaciona em torno de um eixo fixo passa a atuar uma outra grandeza física, ao qual se denomina *inércia de rotação*, que caracteriza o momento de inércia de um corpo. Se considerarmos a componente z do momento angular total de um corpo para um caso de um círculo circunscrito em um plano transversal paralelo ao plano xy com um único grau de liberdade φ , teremos que

$$L_Z = I\omega \quad (4.1)$$

sendo que para uma distribuição contínua de massa ($dm = \mu dv$) com μ constante¹, temos este momento calculado por:

$$I = \int r^2 dm \quad (4.2)$$

Com efeito, para calcular o *momento de inércia*, devemos multiplicar cada elemento de massa dm de um corpo por r^2 , que é a distância ao eixo de rotação, integrando em seguida ao corpo todo. Aplicando a lei fundamental da dinâmica das rotações na Equação (4.1) temos que:

$$\frac{dL_Z}{dt} = \frac{d}{dt}(I\omega) = \tau_Z^{(ext)} \quad (4.3)$$

onde $\tau_Z^{(ext)}$ configura-se como a componente Z da resultante dos torques externos em relação ao ponto fixo O (escolhido arbitrariamente já que I e ω não dependem dessa escolha) (NUSSENZVEIG, 2013).

Como para um corpo rígido com distribuição de massa contínua tem-se que as distâncias r ao eixo são constantes, temos então que a Equação (4.3) pode então ser escrita como:

$$\tau_Z^{(ext)} = I\alpha \quad (4.4)$$

¹Dizer que μ é constante implica dizer que um dado corpo ao qual esta grandeza se refere é homogêneo.

onde $\alpha = \dot{\omega} = \ddot{\theta}$ é a aceleração angular.

Sendo o momento de inércia definido como a multiplicação entre a massa do objeto pelo quadrado da distância de um dado comprimento (por razões dimensionais), é conveniente definir uma grandeza que age como se toda massa de um dado objeto estivesse concentrada a uma dada distância do eixo escolhido, o que resultaria em seu momento de inércia, a esta grandeza dá-se o nome de *raio de giração* (k) do objeto em relação a este eixo, que é expressa da seguinte forma (NUSSENZVEIG, 2013):

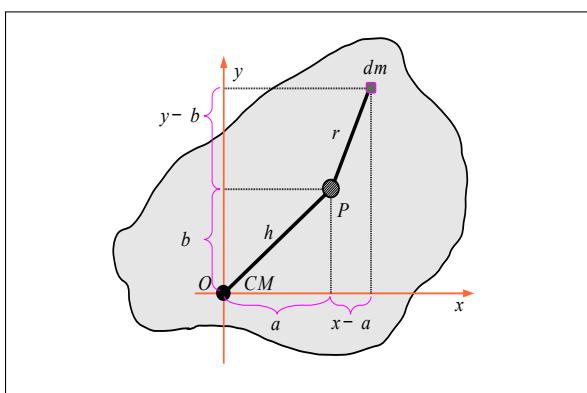
$$I = Mk^2 \quad (4.5)$$

Para cada tipo de simetria de objeto temos um valor distinto de raio de giração, sendo, por exemplo, os momentos de inércia de um *anel circular*, *disco circular*, *barra delgada (ambos em torno do centro)* e *esfera (em torno de um diâmetro)* calculados considerando um eixo relativo que passa pelo C.M, para os outros casos onde isso não acontece, recorre-se ao teorema dos eixos paralelos (NUSSENZVEIG, 2013).

4.2 TEOREMA DOS EIXOS PARALELOS (STEINER)

Nesta subseção, iremos deduzir o teorema dos eixos paralelos, também conhecido como teorema de *Steiner*. Este teorema relaciona dois momentos de inércia distintos, o I_{CM} , do corpo considerado em relação a um eixo de rotação que passa pelo seu centro de massa e I_P que se refere ao momento de inércia do corpo em relação a um segundo eixo paralelo ao primeiro eixo, ambos relativos a um corpo de dimensões e formato qualquer. A Figura (4.2) abaixo representa um caso geral de um corpo de formato qualquer sobre o qual estão sendo tomados os dois eixos paralelos I_{CM} , no ponto “ O ” e I_P , no referido ponto “ P ”.

Figura 4.1 – Corpo com dimensões e formatos quaisquer.



Fonte: Autoria própria (2021).

Vamos tomar o sistema de coordenadas cartesianas com a origem no centro de massa do sistema e definir um elemento de massa infinitesimal dm localizado a uma distância r do ponto “ P ”, (ao qual queremos determinar o momento de inércia), que está distante h do eixo de rotação auxiliar referente ao centro de massa. A distância r é definida como:

$$r^2 = y^2 + x^2 - 2by - 2ax + \underbrace{(b^2 + a^2)}_{h^2}$$

obtida por teorema de Pitágoras e expansão do quadrado da diferença.

Tomando a definição de momento de inércia expressa na Equação (4.2) para cada um dos termos, ficaremos com

$$I = \underbrace{\int x^2 dm}_{I_{cm}} + \underbrace{\int y^2 dm}_{h^2 M} - 2b \int y dm - 2a \int x dm \quad (4.6)$$

O termo “ h ” na Equação (4.6) é constante por isso sai da integral, resultando no momento de inércia a esta mesma distância de “ O ”. Os dois termos iniciais dão o momento de inércia do centro de massa, que por sua própria definição zeram os dois termos finais, localizados na origem. Reorganizando, ficamos com

$$I = I_{CM} + Mh^2 \quad (4.7)$$

À expressão em (4.7) dá-se o nome de teorema dos eixos paralelos ou de *Steiner*, cuja definição é,

Teorema 1 (Steiner). *O momento de inércia de um corpo qualquer em relação a um eixo é a soma do momento de inércia em relação a um eixo paralelo, passando pelo centro de massa, com o produto da massa M do corpo pelo quadrado da distância l entre os dois eixos.*

4.3 TEOREMA DOS EIXOS PERPENDICULARES

Em Física, o teorema dos eixos perpendiculares (ou teorema da figura plana), pode ser utilizado para determinar o momento de inércia de um objeto rígido que se situa inteiramente em um plano, sobre um eixo perpendicular a este mesmo plano, levando em conta os momentos de inércia correspondentes deste objeto sobre dois eixos perpendiculares, onde todos os eixos devem passar por um único ponto.

Da mesma forma, se considerarmos \mathbf{y} como o eixo de rotação teremos que

$$dI_y = x^2 dm$$

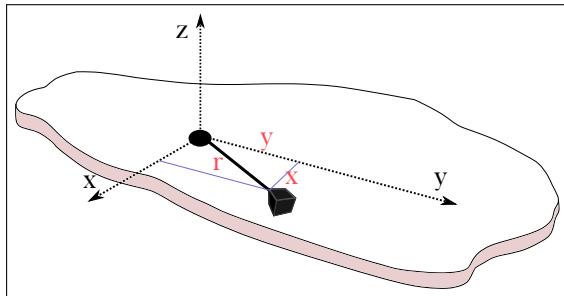
de tal modo que se o eixo de rotação for o eixo \mathbf{z} , então a distância do elemento de massa dm até este eixo é o próprio r , tal que

$$dI_z = r^2 dm = x^2 dm + y^2 dm$$

Assim, fica definido o teorema dos eixos perpendiculares como

$$dI_z = dI_x + dI_y \quad (4.8)$$

Figura 4.2 – Corpo arbitrário com superfície plana.



Fonte: Autoria própria (2021).

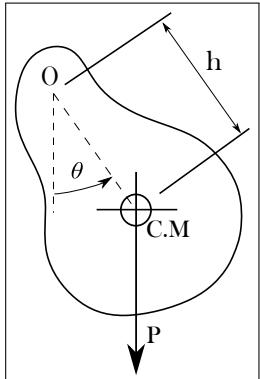
Vamos considerar novamente um elemento infinitesimal de massa dm (representado pelo cubo em destaque) situado no plano xy , conforme a figura ao lado. Por efeito, consideremos que ambos os eixos podem rotacionar livremente, desde que respeitem a condição de estarem sempre perpendiculares entre si. Sendo assim, se considerarmos que o eixo de rotação é o x , então

$$dI_x = y^2 dm$$

4.4 O PÊNDULO FÍSICO

Para esta análise, vamos considerar um corpo rígido com massa m (não necessariamente simétrico) que encontra-se suspenso por um ponto fixo “ O ”, localizado a uma exata distância “ a ” de seu centro de massa (C.M), conforme pode ser visto na Figura (4.3) abaixo.

Figura 4.3 – Representação de um pêndulo físico.



Fonte: Autoria própria (2021).

Este corpo pode girar sem atrito em torno de um eixo horizontal que passa por “ O ”. Quando em equilíbrio, a linha que liga o segmento OP , que passa pelo centro de massa, é vertical. Se sobre este corpo for produzido um deslocamento angular θ em torno do seu eixo de rotação, então ele estará sujeito a um torque restaurador que buscará trazer este corpo de volta a posição de equilíbrio (situação onde irá oscilar em torno de O). A expressão em termos de torque que descreve essa situação está expressa a seguir:

$$\tau = -\mathbf{h} \times \mathbf{P} \quad (4.9)$$

onde h é a distância de “ O ” ao centro de massa e \vec{P} é a força-peso correspondente. O sinal negativo é uma convenção para definir este torque como *torque restaurador*.

Utilizando-se de deslocamento muito pequenos, onde $\theta \ll 1$, o que nos permite considerar que $\sin \theta \approx \theta$ (expresso em radianos), podemos ainda reescrever a expressão (4.9) utilizando os módulos de cada argumento, tal que,

$$\tau = -mgh\theta \quad (4.10)$$

Em termos de momento de inércia e da aceleração angular correspondentes do corpo em relação ao eixo que passa por O , podemos expressar este torque da seguinte forma:

$$\tau = I_h\alpha(t) \quad (4.11)$$

Lembrando que $\alpha(t) = \dot{\omega} = \ddot{\theta}$ e I_h é o momento de inércia de determinado corpo que está localizado a uma distância “ a ”. Igualando as Equações (4.10) e (4.11), temos como resultado uma equação diferencial de 2ª ordem

$$\ddot{\theta} + \underbrace{\frac{mgh}{I_h}}_{\omega^2} \theta = 0, \quad (4.12)$$

para o qual se deseja encontrar uma expressão para θ que seja sua solução. A solução proposta é do tipo

$$\theta(t) = \theta_0 \cos(\omega t), \quad (4.13)$$

em ω é a frequência angular do pêndulo. Ao substituirmos a Equação (4.13) em (4.12), obtemos,

$$\omega^2 = \frac{mgh}{I_h} \quad (4.14)$$

Considerando a relação entre período e frequência ($\omega = 2\pi \frac{1}{T}$), podemos reescrever a expressão em (4.14) como

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I_h}{mgh}} \quad (4.15)$$

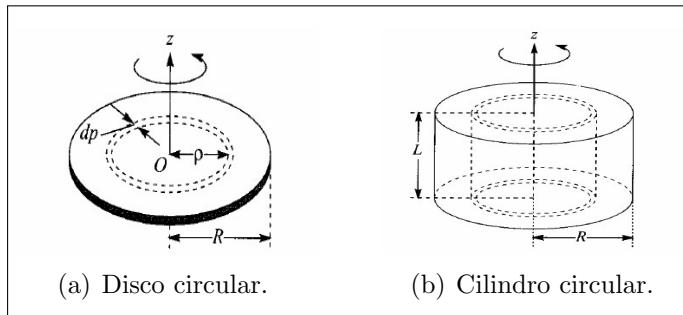
onde T é o período de oscilação para o pêndulo físico.

Até o momento, nos restringimos a calcular o período de oscilação de um pêndulo físico em um caso geral, contudo, os resultados ficam mais interessantes quando definimos geometricamente os corpos como objetos de estudo, e ainda quando fazemos uma combinação de corpos, que será o caso estudado neste trabalho, consistindo de um pêndulo físico formado por uma barra rosada e um cilindro disposto em seu comprimento em determinadas posições. Para tal, utilizaremos dos dois teoremas até aqui abordados, a saber: *Teorema dos Eixos Paralelos* e *Teorema dos Eixos Perpendiculares*.

Nos pontos que se seguem são calculados os momentos de inércia dos corpos citados, e em seguida retornamos ao resultado da Equação (4.15), definindo-o em termos de *raios de giração*.

• Momento de Inércia: Disco Circular em torno do centro

Figura 4.4 – Cilindro com eixo fixo em relação ao seu centro de massa.



Fonte: (NUSSENZVEIG, 2013)

Vamos imaginar este disco como a decomposição de anéis circulares concêntricos, conforme a Figura (4.4)(a), cujo único anel possui raio ρ variando de 0 a R . Pela razão direta entre elementos de massa dm e elementos de volume dV do anel e seus volumes V e massas totais M , temos que

$$\frac{dm}{M} = \frac{2\pi\rho d\rho}{\pi R^2} = \frac{2}{R^2}\rho d\rho$$

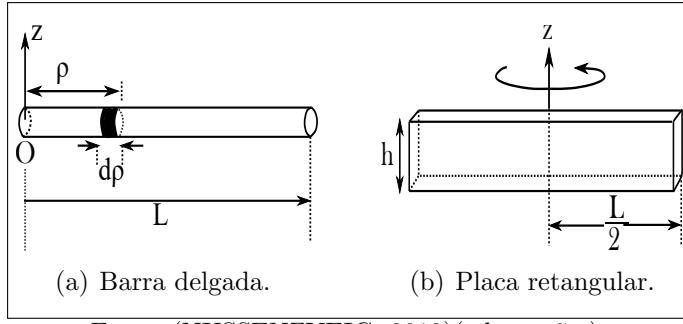
de modo que

$$I = \int \rho^2 dm = \frac{2M}{R^2} \int_0^R \rho^3 d\rho = \frac{2M}{R^2} \frac{\rho^4}{4} \Big|_0^R = \frac{2R^4}{4R^2}$$

notemos que a razão entre os volumes cancela naturalmente a relação entre a espessura do disco, tal que o resultado para o referente momento de inércia independe desta grandeza, assim, se pensarmos que um cilindro é a superposição de inúmeros anéis tal que sua soma fornece sua altura L , esta expressão dá o momento de inércia tanto de um disco como a de um cilindro qualquer de massa M , raio R e altura L (Figura (4.4)(b)). Desta forma, obtemos finalmente o momento de inércia de um cilindro em torno de um eixo paralelo ao seu comprimento passando pelo seu centro de massa como:

$$\left\{ \begin{array}{l} I_{c(CM)} = \frac{MR^2}{2} \end{array} \right. \quad (4.16)$$

Figura 4.5 – Barra delgada com eixo fixo em relação ao seu centro de massa.



Fonte: (NUSSENZVEIG, 2013)(adaptação.)

• **Momento de Inércia: Barra Delgada em torno de uma extremidade e do centro de massa**

Tomemos como referência a Figura (4.5), cujo eixo está fixado na extremidade da barra delgada de comprimento L e massa M . Destaquemos uma porção infinitesimal de massa dm que possui uma porção equivalente de comprimento dr . Em termos de densidade linear, isso nos dá $(\lambda \frac{M}{L})$, que em termos infinitesimais fica $(\lambda \frac{dm}{dr})$, ou $dm = \lambda dr$. Utilizando a definição de momento de inércia na expressa na Equação (4.2), temos:

$$I = \int_0^L r^2 dm = \int_0^L r^2 \lambda dr = \lambda \int_0^L r^2 dr \quad (4.17)$$

Basta agora resolvemos a Equação em (4.17).

$$I = \lambda \frac{r^3}{3} \Big|_0^L = \lambda \frac{L^3}{3} = \frac{M L^2}{3} \quad (4.18)$$

o que finalmente nos dá:

$$I_b = \frac{1}{3} M L^2 \quad (4.19)$$

Por efeito, se quisermos determinar o momento de inércia que passa pelo centro de massa (I_{bCM}), basta que utilizemos o teorema de *Steiner* expresso em (4.7). Assim:

$$I_b = I_{bCM} + M d^2 \rightarrow I_{bCM} = \frac{1}{3} M L^2 + M \left(\frac{L}{2} \right)^2 I_{bCM} = \frac{1}{3} M L^2 + M \frac{L^2}{4}$$

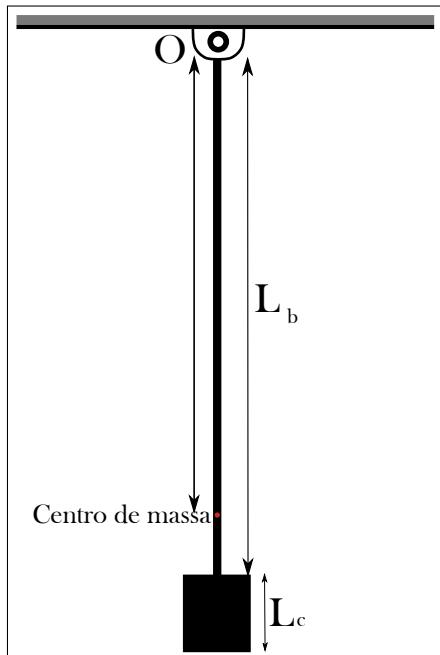
Organizando esta expressão em termos de M.M.C, ficamos finalmente com o momento de inércia em relação ao centro de massa de uma barra delgada.

$$I_{bCM} = \frac{ML^2}{12} \quad (4.20)$$

Percebemos, portanto, a analogia com o caso anterior para o cálculo do momento de inércia do cilindro. O resultado da (4.20) independe do comprimento da barra e é válido desde que a área de secção transversal possa ser desprezada ($L >> \pi r^2$), sendo assim, esta expressão é válida tanto para uma barra delgada como para uma placa retangular delgada de comprimento L em torno de um eixo que passa pelo seu centro de massa e é perpendicular à direção de seu comprimento, sendo também independente de sua altura h (Figura (4.5)(b)).

Até este ponto, calculamos os momentos de inércia do cilindro que passa pelo seu centro de massa e da barra delgada em relação a um eixo que passa em uma de suas extremidades e também por seu centro de massa correspondente.

Figura 4.6 – Representação de um pêndulo físico.



Fonte: Autoria própria (2021).

Para o caso em que temos uma barra de comprimento L_b e massa M_b , e um cilindro fixo, sem rotação, disposto em sua extremidade, com altura L_c , raio R_c e massa M_c , devemos utilizar tanto o *Teorema dos Eixos Perpendiculares* e o *Teorema de Steiner* para determinar o momento de inércia isolado deste cilindro em relação ao eixo encontrado anteriormente com o eixo que passa pelo ponto “O” e finalmente, levando em consideração a contribuição da barra neste cálculo, teremos o momento de inércia total do sistema formado por um pêndulo físico. Esta descrição ficará mais clara na discussão a seguir. Observe o esquema da Figura (4.6) ao lado:

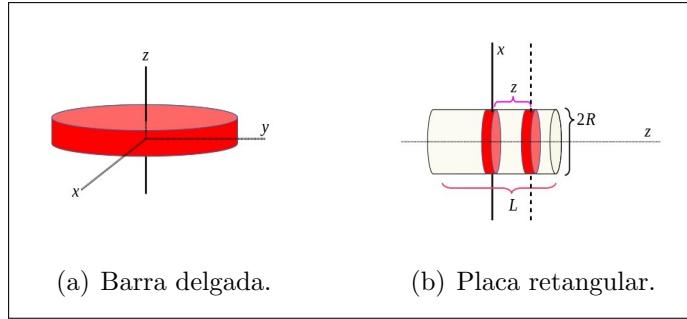
Imaginemos um cilindro qualquer de comprimento “ L ” (Figura (4.7)(b)) sobre o qual passa um eixo paralelo ao seu diâmetro exatamente em seu centro de massa e dividamo-o em vários discos de raio “ R ” e comprimento “ dz ” por onde passam três eixos perpendiculares entre si, tal como pode ser visto na Figura (4.7)(a)).

Vamos aproveitar da simetria do problema e determinar o momento de inércia em torno do eixo “ x ”. Se tomarmos o *teorema dos eixos perpendiculares*, teremos que

$$dI_z = dI_x + dI_y, \text{ mas : } dI_x = dI_y, \text{ logo : } dI_x = dI_y = \frac{1}{2}dI_z$$

Logo, tomado o resultado em (4.16),

Figura 4.7 – Esquematização para determinação do momento de inércia do disco.



Fonte: Autoria própria (2022).

$$dI_x = dI_{CM} = \frac{1}{4}R^2 dm \quad (4.21)$$

Agora, vamos utilizar o teorema dos eixos paralelos para determinar o momento de inércia de um outro disco distante “z” do disco central e paralelo a ele. Ficamos com,

$$dI_x = dI_{CM} + z^2 dm = \frac{1}{4}R^2 dm + z^2 dm \quad (4.22)$$

Observemos que o elemento infinitesimal de massa dm possui atrelado a ele um elemento também infinitesimal de volume dv , tal que podemos relacioná-los em termos de densidade volumétrica por ($dm = \rho dv$) o que nos dá $dm = \rho(\pi R^2 dz)$, mas $\rho = \frac{M}{\pi R^2 L}$, logo, temos que $dm = \frac{M}{L} dz$. Desta forma, a Equação (4.22) nos fornece:

$$dI_x = \frac{1}{4}R^2 \frac{M}{L} dz + z^2 \frac{M}{L} dz \quad (4.23)$$

Vamos realizar a integral sobre a Equação (4.23) utilizando diretamente a Equação (4.2). Para isso, vamos dividir o cilindro em duas partes, $-\frac{L}{2}$ e $\frac{L}{2}$ e realizar a integral.

$$I = \frac{1}{4}R^2 \frac{M}{L} \int_{-L/2}^{L/2} dz + \frac{M}{L} \int_{-L/2}^{L/2} z^2 dz \quad (4.24)$$

Realizando a integral em (4.24) e substituindo os limites de integração, teremos finalmente que,

$$I = \frac{1}{4}M_c R^2 + \frac{1}{12}M_c L_c^2 \quad (4.25)$$

Com este resultado, temos o momento de inércia do cilindro em relação ao seu centro de massa com relação a um eixo que passa paralelo ao seu diâmetro, contudo, o que nos interessa é calcular o I com respeito ao ponto “O”. Desta forma, utilizando a Equação (4.7), e considerando a distância h na Figura (4.6), temos que o I_{total} correspondente para o cilindro nesta situação é dado por:

$$I_C = \underbrace{\frac{1}{4}M_cR_c^2 + \frac{1}{12}M_cL_c^2}_{I_{Ccm}} + M_ch^2 \quad (4.26)$$

Até este ponto, temos o momento de inércia do cilindro em relação ao ponto “O”. No entanto, ainda devemos levar em consideração o momento de inércia da barra no sistema. Para tal, utilizaremos novamente o *Teorema de Steiner* para determinar seu I em relação também a este ponto, e, incluiremos também a sua contribuição para o I em relação ao seu centro de massa segundo a Equação (4.20). O desenvolvimento fica da seguinte forma:

$$I_{Bcm} = \frac{1}{12}M_bL_b^2 \rightarrow I_{Btotal} = \frac{1}{12}M_bL_b^2 + M_bh^2 \quad (4.27)$$

Finalmente, somando o resultado da (4.27) com (4.26), teremos o resultado que expressa o momento de inércia total fica, segundo a Equação (4.28):

$$I_{TOTAL} = \frac{1}{4}M_cR_c^2 + \frac{1}{12}M_cL_c^2 + \frac{1}{12}M_bL_b^2 + (M_c + M_b)h^2 \quad (4.28)$$

Desta forma, ao retornarmos a Equação (4.15), temos:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\frac{1}{4}M_cR_c^2 + \frac{1}{12}M_cL_c^2 + \frac{1}{12}M_bL_b^2 + (M_c + M_b)h^2}{Mgh}} \quad (4.29)$$

em que $M = M_c + M_b$.

Podemos escrever os resultados da Equação (4.29) em termos de raios de giração (k), que é a distância do eixo (que não necessariamente passa pelo centro de massa) a um ponto, tal que, se toda a massa do corpo estivesse ali concentrada, o seu momento de inércia com relação ao eixo que passa por esse ponto, seria equivalente ao do corpo que constitui todo o pêndulo físico. Esta grandeza relaciona-se com o momento de inércia por $I = Mk^2$, sendo k o raio de giração equivalente. Desta forma, podemos reescrever a (4.29) como:

$$I_{TOTAL} = k^2 = \frac{1}{4M}M_cR_c^2 + \frac{1}{12M}M_cL_c^2 + \frac{1}{12M}M_bL_b^2 + h^2 \quad (4.30)$$

Assim, temos o período em termos de raio de giração na (4.31).

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\frac{1}{4M}M_cR_c^2 + \frac{1}{12M}M_cL_c^2 + \frac{1}{12M}M_bL_b^2 + h^2}{Mgh}} \quad (4.31)$$

5 SISTEMAS ACOPLADOS

O estudo do movimento microscópico de sólidos e oscilações de um campo magnético, por exemplo, encontram-se atrelados ao campo de estudo da física, além disso, a descrição de sistemas acoplados se estende a diversas outras áreas de conhecimento, tendo, inclusive, aplicabilidade na área da físico-química, como na possível descrição de moléculas como sistemas oscilantes. Diante da relevância deste fenômeno na natureza e, tendo em vista sua vasta aplicabilidade experimental, torna-se essencial o estudo e análise destes tipos de sistemas acoplados dentro de sala aula, – como na investigação de variáveis como amplitudes de movimento, frequência e período de oscilações, – para que desta forma, haja a compreensão de diversos fenômenos da natureza, sejam eles biológicos, químicos ou físicos, visto que nela, encontramos diversas formas de acoplamento (THORNTON; MARION, 2011).

5.1 SISTEMA DE PÊNDULOS ACOPLADOS

Um sistema de pêndulo simples compreende um modelo idealizado de uma massa m que oscila em torno de um ponto de equilíbrio após sofrer uma perturbação, estando suspenso por um fio de comprimento L de massa desprezível, visto que $m_L \ll m$. Aqui a força restauradora é devida à gravidade que força o objeto a retornar para o ponto mais baixo e no tratamento teórico supõe-se que toda a massa está concentrada em um único ponto. Diferente deste sistema quase ideal, um pêndulo físico ou pêndulo composto, é definido como qualquer corpo rígido que pode oscilar verticalmente em torno de um eixo perpendicular ao seu plano, estando suspenso por um ponto “ O ”. Este sistema compreende uma vasta gama de situações reais, tal como a sua distribuição de massa, tal que os efeitos de torque e inércia devam ser considerados.

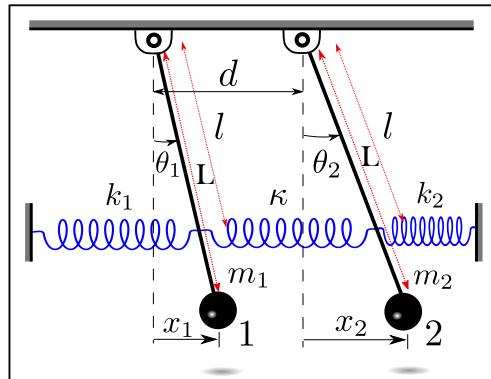
A aplicação de uma força acionadora periódica e externa a um sistema formado por um único oscilador harmônico, implica no caso em que o próprio acionador se comporta como um oscilador. Neste caso, estamos desprezando o efeito de retorno do oscilador harmônico sobre o acionador, o que em muitos casos não confere importância tão relevante na descrição de sua dinâmica, mas se consideramos a oscilação de dois ou mais osciladores conectados, tal que sua energia possa ser transferida de trás para frente, temos então um caso de sistemas de oscilações acopladas, que podem ser descritas em termos de *coordenadas normais* que oscilam com frequência simples, bem definidas e independentes uma das outras, não estando sujeitas, portanto, a nenhum tipo de acoplamento. Essas coordenadas normais permitem descrever a dinâmica complexa de um sistema acoplado, por vezes não-periódico, independente do acoplamento das coordenadas ordinárias que descrevem a posição das partículas. Ao fazer uma coordenada normal variar com o tempo, temos a

excitação dos **modos normais**, que para um sistema com n graus de liberdade, tem-se n modos normais de vibração, podendo alguns serem idênticos. Portanto, o movimento geral de um sistema complexo como este, é na verdade a sobreposição destes modos de oscilação, contudo, o ajuste das condições iniciais permite que eles sejam excitados independentemente, facilitando sua descrição (THORNTON; MARION, 2011; NUSSENZVEIG, 2018).

5.2 SISTEMA DE DOIS PÊNDULOS FÍSICOS ACOPLADOS POR MOLAS

Consideremos um sistema composto por dois pêndulos físicos idênticos acoplados entre si por meio de uma mola de constante elástica κ e também por molas fixas laterais com constantes elásticas k_1 e k_2 estando suspensos por hastes de comprimento L (de massas não-desprezíveis) por um ponto fixo O , tal que os efeitos de inércia e torque tanto das massas pendulares quanto das barras devam ser considerados. A cada extremidade das hastes são fixadas massas m_1 e m_2 de valores iguais entre si, ou seja $m_1 = m_2 = m$, onde l é a distância do eixo de rotação até o ponto onde encontram-se as molas de massas desprezíveis, como pode ser visto na Figura (5.1)(BUTKOV, 1968).

Figura 5.1 – Pêndulos acoplados e parâmetros do sistema.



Fonte: Autoria própria (2021).

Assim, de forma geral, para cada um dos pêndulos vale a seguinte relação:

$$I_i \ddot{\theta}_i = \tau_i \quad (5.1)$$

onde θ_i é o ângulo entre a haste e o eixo vertical; I_i refere-se ao momento de inércia do pêndulo em torno do seu ponto de suspensão ($I_1 = I_2$ se considerarmos características iguais) e τ_i é o torque exercido em cada haste (TROCARU et al., 2020).

O torque resultante generalizado é dado por:

$$\tau_i = \tau_{ei} - \tau_{gi} \quad (5.2)$$

onde tem-se que $\tau_{gi} = mgL \operatorname{sen} \theta_i$, que é o torque devido a ação da força gravitacional e $\tau_{ei} = \kappa xl \cos \theta_i - k_1 x_i \cos \theta_i = \kappa xl \cos \theta_i - k_2 x_i \cos \theta_i$ sendo devido a ação da própria mola,

onde x refere-se a extensão da mola central relaxada e x_i ao deslocamento das molas de constantes k_1 e k_2 .

Analisemos, portanto, o caso particular em que os pêndulos acoplados movem-se para a direita, neste caso, temos um deslocamento referente a mola central de ($x_2 - x_1 > 0$), sendo $x_2 > x_1$, o que resulta em um esticamento ou elongação resultante da mola central. Por efeito, a mola k_1 exerce uma força $-k_1x_1$ sobre a massa m_1 e, consequentemente, a mola k_2 produz uma força $-k_2x_2$ sobre a massa m_2 . Tais expressões são provenientes da lei de Hooke (ALONSO; FINN, 2018; NUSSENZVEIG, 2018).

Considerando um regime de pequenas oscilações, no qual $\theta_i \ll 1$, vale a aproximação $\sin \theta_i \approx \theta_i$ e $\cos \theta_i \approx 1$ (o que configura um sistema acoplado em uma dimensão com dois graus de liberdade). Podemos facilmente observar que $x_i \approx l\theta_i$ no braço de alavanca, exatamente no ponto onde encontram-se as molas k_1 e k_2 . Assim, tomando a expressão em (5.2), temos o seguinte sistema de equações para a massa m_1 e massa m_2 ¹:

$$\begin{cases} \tau_{r1} = \tau_{e1} - \tau_{g1} = \kappa(x_2 - x_1)l\cos\theta_1^1 - k_1x_1l\cos\theta_1^1 - mgL\sin\theta_1^1 \\ \tau_{r2} = \tau_{e2} - \tau_{g2} = -\kappa(x_2 - x_1)l\cos\theta_2^1 - k_2x_2l\cos\theta_2^1 - mgL\sin\theta_2^1 \end{cases} \quad (5.3)$$

Consideremos que $k_1 = k_2$, assim, tomando a Equação (5.1), fazendo a substituição angular $x_i = l\theta_i$ e colocando os devidos termos em evidência e dividindo todos os membros por I , teremos o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} \ddot{\theta}_1 + \left(\underbrace{\frac{k_1l^2}{I} + \frac{mgL}{I}}_{\omega_0^2} \right) \theta_1 - \underbrace{\frac{\kappa l^2}{I}}_{\Omega^2} (\theta_2 - \theta_1) = 0 \\ \ddot{\theta}_2 + \left(\underbrace{\frac{k_1l^2}{I} + \frac{mgL}{I}}_{\omega_0^2} \right) \theta_2 + \underbrace{\frac{\kappa l^2}{I}}_{\Omega^2} (\theta_2 - \theta_1) = 0 \end{cases} \quad (5.4)$$

onde tomando $\omega_0^2 = \frac{mgL}{I} + \frac{k_1l^2}{I}$ e $\Omega^2 = \frac{\kappa l^2}{I}$ teremos uma equação diferencial ordinária de 2ª ordem acoplada (TROCARU et al., 2020):

$$\begin{cases} \ddot{\theta}_1 + \omega_0^2\theta_1 - \Omega^2(\theta_2 - \theta_1) = 0 \\ \ddot{\theta}_2 + \omega_0^2\theta_2 + \Omega^2(\theta_2 - \theta_1) = 0 \end{cases} \quad (5.5)$$

A Equação (5.5) descreve um movimento oscilatório que pode executar oscilações harmônicas com certas frequências características, no entanto, este conjunto de equações não é capaz de descrever o M.H.S por causa dos termos de acoplamento devido a mola.

¹Os sinais são tomados conforme a contribuições das forças peso e força elástica no sistema que produzem movimentos de rotação em determinados sentidos.

Sendo assim, a seguinte solução pode ser suposta afim de encontrar a solução geral (BUTKOV, 1968):

$$\begin{cases} \theta_1(t) = \Theta_1 e^{-i\omega t} \\ \theta_2(t) = \Theta_2 e^{-i\omega t} \end{cases} \quad (5.6)$$

Derivando a Equação (5.6) e substituindo as relações na Equação (5.5), cancelando o fator exponencial ($e^{-i\omega t}$) e reunindo os termos em comum, chegamos a um sistema de duas equações lineares homogêneas, que descrito na forma matricial fica:

$$\begin{bmatrix} \omega_0^2 - \omega^2 + \Omega^2 & -\Omega^2 \\ -\Omega^2 & \omega_0^2 - \omega^2 + \Omega^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Theta_1 \\ \Theta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Para que haja uma solução não-trivial para este sistema, o determinante deve se anular, tal que:

$$\det \left(\begin{bmatrix} \omega_0^2 - \omega^2 + \Omega^2 & -\Omega^2 \\ -\Omega^2 & \omega_0^2 - \omega^2 + \Omega^2 \end{bmatrix} \right) = 0$$

Assim, teremos a expansão para o produto secular na seguinte forma:

$$(\omega_0^2 - \omega^2 + \Omega^2)^2 - (\Omega^2)^2 = 0$$

que pode ser visto também como

$$[(\omega_0^2 - \omega^2 + \Omega^2 + \Omega^2)][(\omega_0^2 - \omega^2 + \Omega^2 - \Omega^2)] = 0 \quad (5.7)$$

Assim, temos que a solução para ω na Equação (5.7) fornece diretamente as duas autofrequências para o sistema, dadas por:

$$\omega_s = \omega_0; \quad \omega_a = \sqrt{\omega_0^2 + 2\Omega^2} \quad (5.8)$$

As Equações em (5.8) expressam as *frequências características do sistema*. Sendo assim, as massas pendulares só podem vibrar em M.H.S com estes valores de ω . Para obtermos uma descrição mais explícita do movimento, substituímos os valores de ω nas Equações (5.6), obtemos as relações correspondentes:

$$\Theta_1 = \Theta_2 \ (\omega = \omega_s); \quad \Theta_1 = -\Theta_2 \ (\omega = \omega_a) \quad (5.9)$$

Por serem homogêneas, um dos coeficientes permanece indeterminado. Fisicamente, essa situação implica que o sistema pode vibrar com amplitude arbitrária para qualquer

uma das frequências características, logo, as relações existentes entre Θ_1 e Θ_2 correspondem a relação entre as massas oscilantes (BUTKOV, 1968). Tomemos a primeira frequência (ω_a), que dá origem à solução:

$$\theta_1^{(1)}(t) = C_1 e^{-i\omega_s t}; \quad \theta_2^{(1)}(t) = C_1 e^{-i\omega_s t} \quad (5.10)$$

Temos então que qualquer que seja o valor da constante complexa C_1 , as duas massas pendulares vibrarão em fase com diferença de fase nula. Escrevamos:

$$C_1 = u_0 e^{i\varphi_u}; \quad (u_0, \varphi_u = real) \quad (5.11)$$

Logo, temos que as soluções reais são:

$$\begin{cases} \theta_1^{(1)}(t) = u_0 \cos(\omega_s t - \varphi_u) \\ \theta_2^{(1)}(t) = u_0 \cos(\omega_s t - \varphi_u) \end{cases} \quad (5.12)$$

Prosseguindo de maneira análoga para a segunda frequência (ω_a), temos:

$$\theta_1^{(2)}(t) = C_2 e^{-i\omega_a t}; \quad \theta_2^{(2)}(t) = -C_2 e^{-i\omega_a t}, \text{ com } C_2 = v_0 e^{i\varphi_v} \quad (5.13)$$

Assim:

$$\begin{cases} \theta_1^{(2)}(t) = v_0 \cos(\omega_a t - \varphi_v) \\ \theta_2^{(2)}(t) = -v_0 \cos(\omega_a t - \varphi_v) = v_0 \cos(\omega_a t - \varphi_v + \pi) \end{cases} \quad (5.14)$$

A defasagem em $\theta_2^{(2)}(t)$ indica que as massas pendulares vibrarão com diferença de fase de π . Aos pares de soluções (θ_1, θ_2) dá-se o nome de *modo normal de vibração* ou *modo característico de vibração*. De modo geral, o sistema pode ter uma solução que é resultado dos dois *modos normais de vibração*, assim (BUTKOV, 1968):

$$\begin{cases} \theta_1(t) = u_0 \cos(\omega_s t - \varphi_u) + v_0 \cos(\omega_a t - \varphi_v) \\ \theta_2(t) = u_0 \cos(\omega_s t - \varphi_u) - v_0 \cos(\omega_a t - \varphi_v) \end{cases} \quad (5.15)$$

A homogeneidade do sistema torna fácil a verificação de que o conjunto de equações em (5.15) é uma solução do sistema de equações diferenciais acopladas, sendo esta a solução geral. O movimento das massas pendulares pode ser obtido a partir de quatro condições iniciais arbitrárias, definidas por:

$$\begin{cases} \theta_1(0), \dot{\theta}_1(0) \\ \theta_2(0), \dot{\theta}_2(0) \end{cases} \quad (5.16)$$

a partir destes quatro valores definidos pelas condições iniciais do problema, obtém-se os parâmetros $u_0, v_0, \varphi_u, \varphi_v$ (BUTKOV, 1968).

5.2.1 Coordenadas Normais

O conjunto de soluções explicitado na Equação (5.5) exprime matematicamente que o sistema de pêndulos encontra-se acoplado, o que é visto facilmente na dependência de θ_1 com θ_2 na satisfação da equação diferencial ordinária correspondente. Fisicamente, isto implica dizer que, em geral, o movimento de um dos pêndulos implicará no movimento do outro.

Segundo Butkov (1968), Thornton e Marion (2011), um movimento arbitrário devido à condições iniciais quaisquer pode ser representado pela superposição dos modos característicos (Equação (5.9)), sendo necessário tomar condições iniciais adequadas para que haja esse movimento segundo estes dois modos, contudo, por mais que a expressão em (5.5) nos leve a entender que sempre o movimento de um acarretará no movimento do outro pêndulo, isto não é aplicável quando se trata especificamente dos modos normais de vibração, visto que é possível excitar um modo normal sem afetar diretamente o outro, e esta afirmativa nos induz a pensar que estes modos de vibração **não** estão acoplados.

Ao afirmarmos que um movimento dito arbitrário de um sistema de pêndulos acoplados pode ser representado como a superposição de dois modos normais de vibração, podemos definir um conjunto de coordenadas dependentes do tempo e que são combinações lineares de θ_1 e θ_2 , sendo, portanto, correspondentes à excitação de diversos modos de oscilação do sistema (BUTKOV, 1968). Para este caso, temos por uma notação complexa o seguinte²:

$$\begin{cases} \theta_1 = Ae^{-i\omega_s t} + Be^{-i\omega_a t}; \\ \theta_2 = Ae^{-i\omega_s t} - Be^{-i\omega_a t} \end{cases}$$

Ao adicionarmos e subtrairmos o sistema de equações acima, temos que,

$$\begin{cases} 2Ae^{-i\omega_s t} = \theta_1 + \theta_2; \\ 2Be^{-i\omega_a t} = \theta_1 - \theta_2 \end{cases}$$

Analisemos agora duas situações. Na primeira, o sistema vibra no primeiro modo normal, ou seja, estamos tomando $B = 0$ ou equivalentemente $\theta_1 - \theta_2 = 0$, $\forall t$ e ao mesmo tempo, temos que $\theta_1 + \theta_2$ exibe variações harmônicas e de modo análogo, no segundo modo, temos que $\theta_1 + \theta_2 = 0$ para todos os valores de t . Ou seja, tomando $2Ae^{-i\omega_s t} = \eta_1$ e $2Be^{-i\omega_a t} = \eta_2$, observa-se que as variações de η_1 não são correspondentes a variações de η_2 , logo, são independentes (BUTKOV, 1968). Em termos destas novas variáveis temos:

$$\begin{cases} \theta_1 = \frac{1}{2}(\eta_2 + \eta_1) \\ \theta_2 = \frac{1}{2}(\eta_2 - \eta_1) \end{cases} \quad (5.17)$$

²A e B são constantes complexas determinadas pelas condições iniciais.

Assim, reorganizando a Equação (5.5) de modo a agrupar os valores correspondentes a θ_1 e θ_2 , podemos substituir (5.18) em (5.5), o que nos dá

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(\ddot{\eta}_2 + \ddot{\eta}_1) + \frac{1}{2}(\omega_0^2 + \Omega^2)(\eta_2 + \eta_1) - \frac{\Omega^2}{2}(\eta_2 - \eta_1) &= 0 \\ \frac{1}{2}(\ddot{\eta}_2 - \ddot{\eta}_1) + \frac{1}{2}(\omega_0^2 + \Omega^2)(\eta_2 - \eta_1) - \frac{\Omega^2}{2}(\eta_2 + \eta_1) &= 0 \end{aligned} \quad (5.18)$$

E utilizando-se de simples algebrismos como soma e subtração encontramos que,

$$\ddot{\eta}_2 + \Omega^2\eta_2 = 0; \quad \ddot{\eta}_1 + (\omega_0^2 + 2\Omega^2)\eta_1 = 0 \quad (5.19)$$

onde podemos verificar agora que as equações de movimento estão *desacopladas*, tornando-se trivial a tarefa de calcular as frequências características, que são exatamente as mesmas expressas na Equação (5.8).

Às coordenadas η_1 e η_2 , dá-se o nome de *coordenadas normais*, que, para este caso, são dependentes das quatro constantes arbitrárias, que por sua vez, são definidas pelas condições iniciais do problema (BUTKOV, 1968; THORNTON; MARION, 2011).

5.3 AJUSTE DAS CONDIÇÕES INICIAIS E OS MODOS NORMAIS DE VIBRAÇÃO

Conforme afirmam Thornton e Marion (2011), Alonso e Finn (2018), o movimento geral de um sistema acoplado é, na verdade, uma sobreposição de dois *modos normais de vibração*, desta forma, tomando as condições iniciais apropriadas, podemos ter movimentos oscilatórios em *fase* ou em *oposição de fase*.

Para o caso em que os osciladores movem em *fase* ($\theta_1 = \theta_2$), com amplitudes iguais teremos que

$$\theta_1 = u_0 \operatorname{sen}(\omega_s t + \varphi_u); \quad \theta_2 = u_0 \operatorname{sen}(\omega_s t + \varphi_u); \quad \omega_s = \sqrt{\frac{mgL}{I} + \frac{k_1 l^2}{I}} \quad (5.20)$$

As equações acima sugerem que a frequência dos osciladores acoplados é igual à frequência de oscilação que cada massa teria individualmente se não houvesse acoplamento, pois tomando as condições do sistema que se move em fase com massas e amplitudes iguais, a mola de acoplamento κ não sofre nenhum tipo de deformação, logo, não exerce diretamente uma força sobre as massas, que movem-se como se não houvesse acoplamento, embora haja (BUTKOV, 1968).

Já no segundo caso, onde as massas movem-se em *oposição de fase*, i.e ($\theta_1 = -\theta_2$), e com amplitudes iguais, temos:

$$\theta_1 = v_0 \operatorname{sen}(\omega_a t + \varphi_v); \quad \theta_2 = -v_0 \operatorname{sen}(\omega_a t + \varphi_v); \quad \omega_a = \sqrt{\omega_0^2 + 2\Omega^2} \quad (5.21)$$

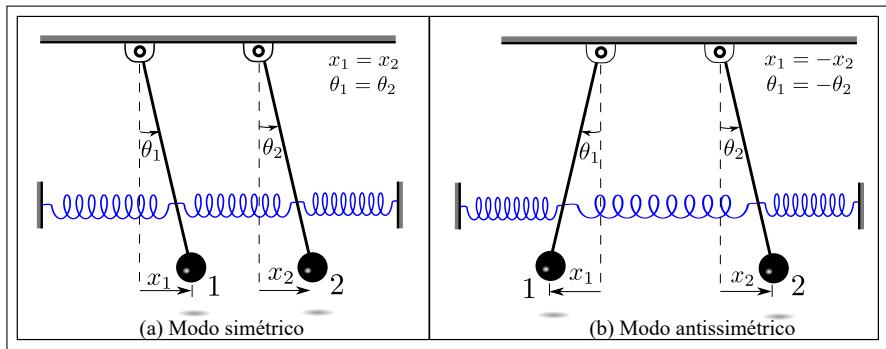
Vemos claramente neste último caso que a frequência dos osciladores em *oposição de fase* é maior que a frequência dos osciladores *em fase* ($\omega_a > \omega_s$), que teoricamente estão sem efeito da mola de acoplamento. Isto se explica fisicamente pelo fato de que diferente do modo normal em fase, este modo tem a mola κ comprimida ou distendida, o que provoca um aumento de contribuição das molas de constantes k_1 ou k_2 no sistema.

Temos então que nos modos normais de vibração, as massas se movem com uma diferença de fase constante, sendo nula para o modo em fase (simétrico) e π quando em fora de fase (antissimétrico). Desta forma, para o caso em que ambas as massas oscilam *fora de fase*, os deslocamentos são sempre iguais e contrários (Figura 5.2(b)), implicando em uma elevação da frequência de oscilação, visto que não há simetria no movimento, forçando as molas a trabalhar mais, deste modo, $\omega_a > \omega_0$ - ver Equação (5.8).

Tomemos agora as condições iniciais onde $\theta_1(0) = \theta_2(0)$ e $\dot{\theta}_1(0) = \dot{\theta}_2(0)$, o que indica que as partículas oscilam em *fase* com *frequência livre* ω_s , caracterizando então o **modo simétrico**, onde os deslocamentos dos dois pêndulos são iguais (Figura 5.2(a)), levando a um menor grau de frequência, que pode ser melhor entendida se compreendermos que devido a mola de acoplamento não se comprimir nem se estender no modo simétrico, é como se ela não existisse, uma vez que sua deformação anula seus efeitos em confronto com os efeitos da *força restauradora* agente.

Abaixo, vemos uma representação esquemática dos *modos simétrico* e *antissimétrico* do sistema descrito.

Figura 5.2 – Modos normais de vibração.



Fonte: Autoria própria (2021).

5.4 O FENÔMENO DOS BATIMENTOS

Retomemos ao conjunto de Equações expresso em (5.15), que contém *quatro* constantes arbitrárias, logo exprimindo a solução geral da Equação Diferencial de 2º ordem expressa em (5.5) - que envolve uma combinação linear dos modos normais de oscilação, sendo estas então correspondentes. Notamos que ambas as expressões para θ_1 e θ_2 denotam

as resultantes da interferência de dois movimentos harmônicos simples (acoplados) na mesma direção, entretanto com *frequências* e *fases* distintas.

À título de visualização da física do problema, vamos considerar um caso especial onde as amplitudes u_0 e v_0 são iguais e que a diferença inicial de fase seja constante igual a 0, i.e ($\varphi_u = \varphi_v$), assim, aplicando uma identidade trigonométrica para a função *seno*³, obteremos que

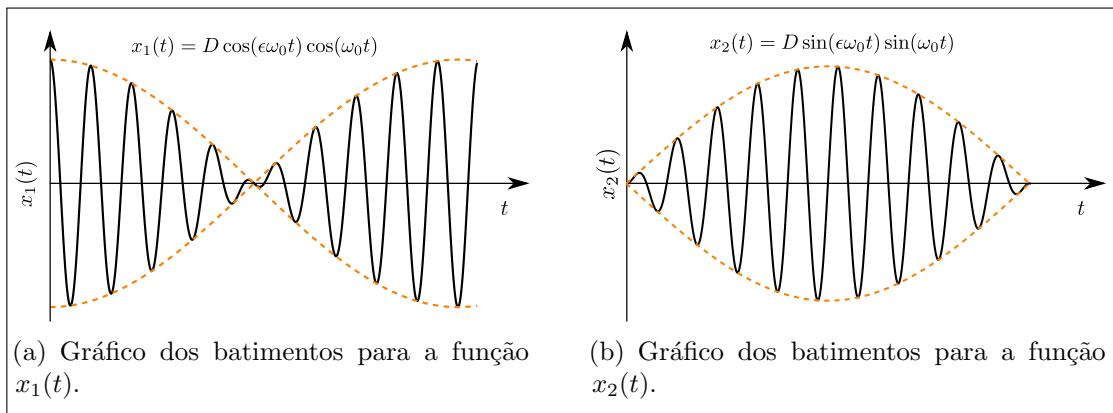
$$\begin{cases} \theta_1 = u_0 \operatorname{sen} \omega_s t + u_0 \operatorname{sen} \omega_a t = u_0 (\operatorname{sen} \omega_s + \operatorname{sen} \omega_a t) \\ \theta_1 = [2u_0 \cos \frac{1}{2}(\omega_s - \omega_a)t] \operatorname{sen} \frac{1}{2}(\omega_s + \omega_a)t \end{cases} \quad (5.22)$$

e para a função θ_2 ,

$$\begin{cases} \theta_2 = u_0 \operatorname{sen} \omega_s t - u_0 \omega_a t = u_0 (\operatorname{sen} \omega_s t - \operatorname{sen} \omega_s t) \\ \theta_2 = [2u_0 \operatorname{sen} \frac{1}{2}(\omega_s - \omega_a)t] \cos \frac{1}{2}(\omega_s + \omega_a)t \end{cases} \quad (5.23)$$

A partir destas expressões notamos que os movimentos são oscilatórios com frequências angulares próprias e que a amplitude modulada para θ_1 é $2A \cos \frac{1}{2}(\omega_s - \omega_a)t$, enquanto que para θ_2 é $2A \operatorname{sen} \frac{1}{2}(\omega_s - \omega_a)t = 2A \cos[\frac{1}{2}(\omega_s - \omega_a)t - \pi/2]$. Logo, vemos que estes fatores de modulação diferem por um fator $\pi/2$, que corresponde justamente à diferença de fase, estando relacionado a um quarto do período de modulação. Podemos observar graficamente este comportamento nas Figuras (5.3(a)) e (5.3(b)) a seguir:

Figura 5.3 – Batimentos.



Fonte: Autoria própria (2021).

A Figura (5.3) acima expõe o gráfico geral de θ_t (*linha cheia*) e da *envoltória* das oscilações rápidas (*linhas interrompidas*).

Segundo Butkov (1968), em decorrência da defasagem entre os dois fatores de modulação, ocorre uma transferência de energia entre os dois osciladores, logo, a cada um quarto do período de modulação, a amplitude modulada de um dos osciladores decresce

³A função aplicada foi $\operatorname{sen} \alpha \pm \operatorname{sen} \beta = 2 \operatorname{sen} \frac{1}{2}(\alpha \pm \beta) \cos \frac{1}{2}(\alpha \mp \beta)$.

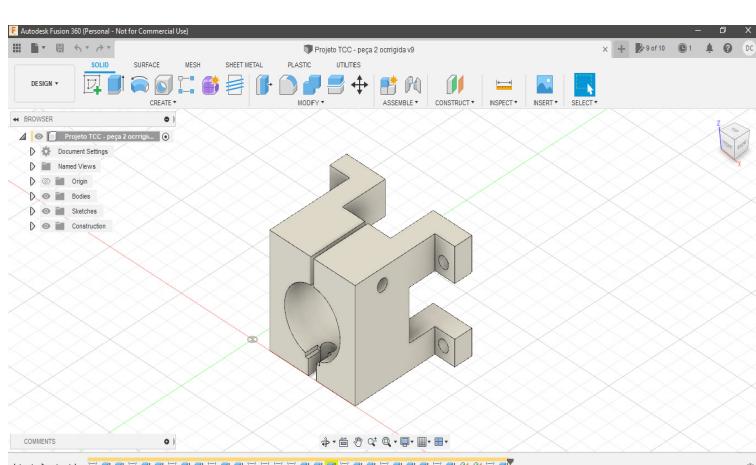
enquanto a do outro cresce, acarretando em uma transferência de energia, processo ao qual se repete continuamente. O processo que configura esta troca de energia entre os osciladores é o que caracteriza o fenômeno dos *batimentos* (THORNTON; MARION, 2011).

6 RESULTADOS E DISCUSSÕES

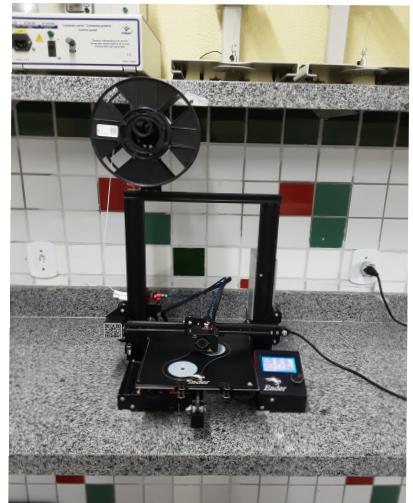
6.1 PREPARAÇÃO DO EXPERIMENTO

O sistema montado nesse experimento para análise com o Tracker e Arduino, consiste de um pêndulo físico formado por uma barra de comprimento total aproximado de 1 *metro*, capaz de comportar cilindros de massas pré-definidas. Para análise do sistema acoplado, (onde foi utilizado somente o método da videoanálise), o sistema utilizado consistiu somente na expansão do anterior para *dois* pêndulos com características idênticas acoplados entre si por uma mola de constante κ e molas fixas laterais de constantes k_1 e k_2 . O sistema de pêndulos foi disposto em perfis de alumínio estrutural 30 mm x 60 mm e toda a estrutura que comporta os componentes mecânicos, foi construída com base em modelagem 3D com o *software* Fusion 360¹ (Figura (6.1)(a) e (b)).

Figura 6.1 – Processo de construção e impressão de peças 3D.



a) Processo de modelagem 3D no Fusion 360.



b) Processo de impressão 3D.

Fonte: Autoria própria (2022).

Na parte que compete a análise por Arduino, foi utilizado um sensor de posição angular (*encoder* incremental de modelo LPD3806-600BM-G5-24C), (Figura(6.2)(a)), que recebia o movimento de oscilação do eixo vinculado ao pêndulo através de um acoplador (Figura(6.2)(b)). Para a captura das imagens foi utilizada uma câmera filmadora de um celular Redmi 9S gravando a uma taxa de 60 FPS devido a necessidade de captura de imagens com uma boa taxa de resolução e um tripé de filmadora com Ring Light, que garantiu a posição fixa de filmagem sem tremulações e com melhor iluminação

¹Os arquivos referentes a estas peças podem ser acessados livremente na plataforma Github, estando disponíveis em: <<https://github.com/diegoIFPI2021/Diego-s-files-from-TCC-2.git>>.

(Figura(6.2)(c)). Para a parte que compete a videoanálise, foram feitas marcações em todo o comprimento da barra, partindo da sua base inferior, percorrendo-a de 5 em 5 centímetros, de modo a coletar pontos suficientes para tornar a análise concisa a medida que houvesse a distribuição e variação de massa pelos cilindros.

Figura 6.2 – Ferramentas de coletas de dados em posição.



Fonte: Autoria própria (2022).

Em ambos os métodos de captura de dados, foi utilizada uma régua milimétrica magnética a fim de garantir o abandono em posições sempre iguais com 100 mm de amplitude. Além disso, foi utilizado um fundo branco para melhor contraste e um ponto preto no cilindro, que é constituído de material de cor esbranquiçada (poliácido láctico - PLA)² que foi tomado como referência para ponto de massa no *software* Tracker. O *setup* experimental para a oscilação livre é vista na Figura (6.3) e o caso acoplado na Figura (6.4).

²O plástico PLA (também chamado de PDLA, PLLA), ou melhor dizendo, poliácido láctico, é um polímero sintético termoplástico que vem substituindo os plásticos convencionais em diversas aplicações, inclusive em impressão 3D. Disponível em: <<https://www.ecycle.com.br/plastico-pla/>>.

Figura 6.3 – Pêndulo Físico para oscilação livre.



Fonte: Autoria própria (2022).

Figura 6.4 – Pêndulos Físicos para oscilações acopladas.



Fonte: Autoria própria (2022).

6.2 CAPTURA DOS DADOS COM TRACKER E ARDUINO: PÊNDULO FÍSICO EM OSCILAÇÃO LIVRE

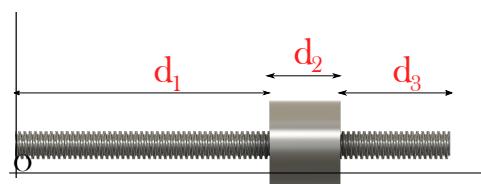
Nesta seção, são discutidos os métodos de coletas de dados. A preparação do ambiente no que se refere a iluminação e a diminuição do atrito entre os rolamentos do sistema foram pontos cruciais para uma melhor coleta de dados que fossem de acordo com os pressupostos teóricos.

A construção do pêndulo físico estudado neste trabalho foi pensada de modo a ser possível acoplar cilindros³ no decorrer do comprimento da barra rosada ao qual ele é composto, desta forma, foram marcadas 19 posições estratégicas no comprimento da barra em relação ao eixo de rotação até a base inferior do cilindro de 3,0 cm de altura por 6 cm de diâmetro e 135 g de massa.

Tendo em vista que os resultados a serem observados levavam em conta a variação do centro de massa do sistema com a mudança de posição do cilindro ao longo da barra, foi realizada a coleta no Arduino e por gravação de vídeo utilizando-se 1 cilindro acoplado a ela, sendo as medidas realizadas de forma independente.

A determinação do centro de massa, no entanto, foi calculada mediante a utilização de *software*, tendo em vista a linearidade das posições, contudo, levou-se em conta características específicas dos componentes, como comprimentos e massas, considerando-os inclusive como objetos bem definidos geometricamente. A medida que o cilindro era posto mais acima, havia uma porção da barra equivalente abaixo. O cálculo dessa massa restante foi feito com base na densidade específica do material utilizado, que foi descoberta tendo em mãos seu comprimento total, área de secção transversal e massa. Qualquer porção abaixo do cilindro foi considerado um novo corpo, com características distintas quanto a massa e comprimento. Veja a Figura (6.5).

Figura 6.5 – Esquematização para o pêndulo físico.



Fonte: Autoria Própria (2022).

³Os cilindros foram construídos em impressão 3D, contudo, como o material utilizado (ácido poliláctico - PLA) possui pouca densidade, eles foram preenchidos com argamassa para que pudessem contribuir mais significativamente em seu momento de inércia.

Logo, para um caso genérico onde havia *três* corpos, utilizou-se a seguinte relação:

$$R_{1,z} = \frac{d_1}{2}; \quad R_{2,z} = d_1 \frac{d_2}{2}; \quad R_{3,z} = d_1 + d_2 + \frac{d_3}{2}$$

onde esses termos denotam, com base na Figura (6.5) as posições do centro de massa em relação a “O”.

Assim, para um caso qualquer, onde tem-se a variação da massa dos corpos em d_1 e d_3 , vale a seguinte relação:

$$Z_{CM} = \frac{m_1 R_{1,z} + m_2 R_{2,z} + m_3 R_{3,z}}{m_1 + m_2 + m_3} \quad (6.1)$$

Por efeito, a densidade linear da barra roscada foi de $\lambda = 4.464,60 \text{ kg/m}^2$, tal que a relação acima em (6.1) fica,

$$Z_{CM} = \frac{\lambda(r^2)d_1 \frac{d_1}{2} + m_2 \left(d_1 + \frac{d_2}{2} \right) + \lambda(r^2)d_3(d_1 + d_2 + \frac{d_3}{2})}{(m_1 + m_2 + m_3)} \quad (6.2)$$

onde r é o raio da barra, que vale 3,175 mm.

6.2.1 Tracker

Em um primeiro momento, buscou-se analisar a relação entre o período do pêndulo simples utilizado com a variação da posição do cilindro na barra, o que provocava deslocamento do centro de massa no sistema. Desta forma, foram gravados 19 vídeos, sendo 2 deles com duração média de 15 segundos, a fim de verificar o gráfico da posição angular em função do tempo e os outros 17 com duração média de 6 segundos, a fim de tomar somente as informações sobre o período. A justificativa de escolha deste pequeno intervalo de tempo se baseia no fato de que por se tratar de um sistema real, portanto, amortecido, o pêndulo físico estava sujeito a dissipação de sua energia de oscilação por meio do atrito entre as peças e após um considerável tempo posterior, tendo como consequência, o cessar do movimento.

Após a captura das imagens, os arquivos de mídia foram transferidos para o computador para que assim fossem analisados com o *software* Tracker. Apesar do programa ser capaz de plotar e analisar gráficos, após os dados interessantes a esse estudo terem sido captados em tabelas, como ângulo de rotação (θ), tempo (t) e frequência (ω), eles foram salvos em arquivos .txt e analisados no plotador gráfico Origin, para que através dos picos de oscilação (onde ocorre a inversão no sentido de movimento), fossem medidos os períodos equivalentes para cada configuração, utilizando-se para isso métodos manuais como calculadora, o que de certa forma, aumentou o tempo de análise consideravelmente.

6.2.2 Arduino

A detecção das posições angulares do sistema foram realizadas por meio de sensoriamento Arduino com a utilização de um encoder rotativo incremental, sobre o qual falamos na subseção (3.2.4) - pág. 26. A placa utilizada foi a Arduino Mega 2560, com *shield* de expansão vinculado a ela, estando todo o circuito organizado uma placa de circuito impresso $10cm^2$, o que garantiu a fixação dos componentes elétricos como a fiação, evitando assim a movimentação desnecessária que poderia causar ruídos nos pulsos elétricos recebidos.

A lógica do código utilizado se baseou em rotinas de interrupção, que são realizadas a nível de *hardware* por meio da função *attachInterrupt()*. Esta função é acionada quando há mudança no estado lógico de pinos digitais ao qual ela está vinculada, no caso da placa mencionada, sendo os pinos 2 e 3, estando ligadas às fases A e B do encoder, que por ora determinam o sentido de rotação do eixo por meio de interpretação dos estados *high* e *low* (ARDUINO, 2021a). No caso do código utilizado (ver Apêndices ?? e ??), conectamos o sinal de saída A ao pino 2 e sinal de saída B ao pino 3. Neste caso, a interrupção gerada chama as rotinas **Interrupt_A** e **Interrupt_B**, que carregam o código que é executado toda vez que há essa mudança de estado.

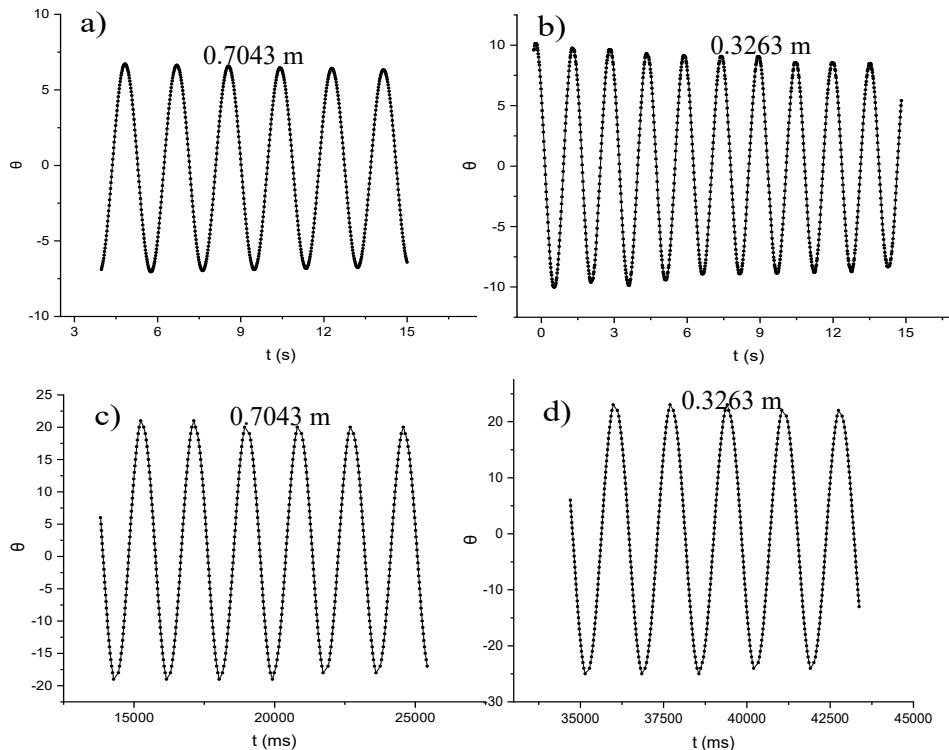
Outro ponto importante a ser mencionado é a utilização de variáveis declaradas como voláteis, interpretadas como ***volatile***. Ao utilizar este tipo de variável, nos prevenimos de possíveis problemas de compilação que podem vir a ocorrer, como por exemplo o risco que existe do compilador simplesmente eliminar esta variável da memória ao compilar o programa, pois ela não é usada diretamente nas rotinas de *loop()* e *setup()*. Compiladores costumam fazer isso para eliminar variáveis não utilizadas e, assim, economizar espaço em memória.

No que se refere a coleta de dados, foram feitas 19 capturas de forma independente da captura de imagens, de modo a garantir a convergência para resultados idênticos (ou próximos) mesmo utilizando métodos diferentes. Após a coleta dos dados brutos direto do Monitor Serial que possui interação com o usuário, os arquivos foram salvos em arquivo .txt, sendo em seguida analisados no plotador gráfico Origin. Da mesma forma que no método da videoanálise, quatro dos dados de coleta foram salvos e analisados completamente para que pudessem ser observados e comparados aos gráficos obtidos no método anterior. Veja a Figura (6.6) na seção (6.3), pág. 55.

6.3 DISCUSSÃO DOS RESULTADOS PARA PÊNDULO EM OSCILAÇÃO LIVRE: ARDUINO & TRACKER

O pêndulo físico utilizado, nesta ocasião, estava sujeito apenas à força de ação da gravidade e às forças de resistência (atrito entre os rolamentos). Para o método da videoanálise, tem os gráficos das Figuras (6.6)(a) e (b) e para o sensoriamento em Arduino, temos os gráficos expressos nas Figuras ((6.6)(c) e (d)). Ambos descrevem o comportamento do pêndulo em termos de posição angular (em graus) em função do tempo. Contudo, nota-se uma maior suavidade com relação ao 1º método (videoanálise). Tal fato deve-se a falta de resolução do dispositivo utilizado com base em Arduino.

Figura 6.6 – Comparação entre os gráficos de θ em função do tempo obtidos em ambos os métodos.



Fonte: Autoria própria (2022).

Os resultados observados graficamente estão de acordo com a predisposição teórica, que descreve o movimento oscilatório de um pêndulo físico, dependendo, contudo, de um período, ou seja, do tempo necessário para completar uma oscilação. Nota-se que à medida que o tempo evolui, a posição oscila em torno de um ponto de equilíbrio. Pelo próprio comportamento expresso na Figura (6.6), onde acontece tipos de movimentos bem definidos em intervalos de tempo regulares, conclui-se que este é definido como movimento periódico ou harmônico. Notamos bem discretamente a diminuição da amplitude a medida que o tempo evolui, o que ocorre devido o próprio sistema não ser forçado periodicamente, estando sujeito somente à ação da força-peso e aos inevitáveis atritos, motivo esse que nos

remeteu a escolha de analisar somente curtos intervalos de tempo. Os ângulos nas figuras diferem-se numericamente devido às escalas adotadas.

•Dependência funcional entre T e h e o período mínimo

Em um segundo momento, com base nos dados obtidos para o período de uma oscilação completa, pôde-se determinar uma relação entre tal grandeza e a distância do eixo de rotação até o centro de massa do sistema formado pelo cilindro e pela barra, cujo método de determinação dessa referida distância está na seção (6.2). Um ponto que dificultou esta determinação foi o fato de que o nosso ponto de giração era fixo, assim, para fazer a devida equivalência da posição variante do centro de massa, fez-se necessário a movimentação do cilindro no comprimento da barra, que ficava com uma porção de seu comprimento agindo como outro corpo independente, dotado de outras características, inclusive com consideráveis contribuições para o cálculo do momento de inércia. A seguir, na Tabela (6.1) temos os dados para os períodos coletados por ambos os métodos e a sua correlação com a distância do eixo ao centro de massa. Estes dados serão a base de nossa análise neste ponto e nos que se seguem.

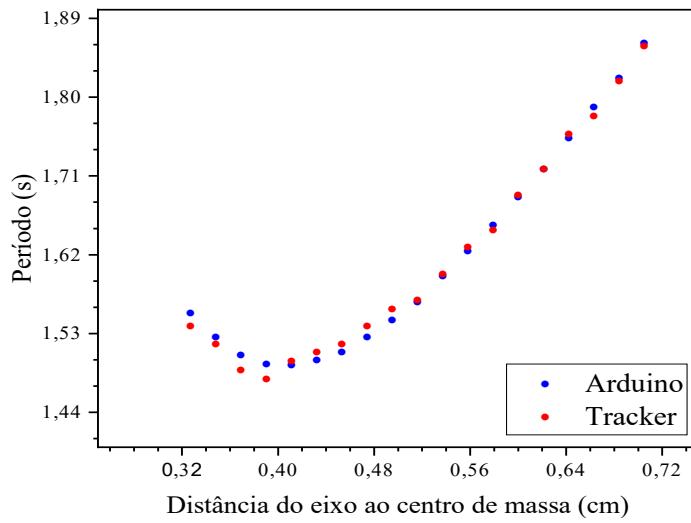
Tabela 6.1 – Dados para T e h (Arduino & Tracker).

h (m)	$T_{arduino}$ (s)	$T_{tracker}$ (s)
0,7043	1,864	1,86
0,6833	1,824	1,82
0,6623	1,79	1,78
0,6413	1,755	1,76
0,6203	1,72	1,72
0,5993	1,688	1,69
0,5783	1,656	1,65
0,5573	1,626	1,63
0,5363	1,597	1,6
0,5153	1,568	1,57
0,4943	1,547	1,56
0,4733	1,528	1,54
0,4523	1,511	1,52
0,4313	1,502	1,51
0,4103	1,496	1,5
0,3893	1,497	1,48
0,3683	1,507	1,49
0,3473	1,527	1,52
0,3263	1,555	1,54

Fonte: Autoria própria (2022).

Com base nos dados obtidos para ambos os métodos, pudemos determinar o período em função da distância do eixo até o centro de massa utilizando a Equação (6.2). A seguir, tem-se os gráficos sobrepostos (Figura(6.7)), que mostram a convergência para valores próximos obtidos.

Figura 6.7 – T em função de h .



Fonte: Autoria própria (2022).

A partir de uma análise direta para os gráficos obtidos na Figura (6.7), notamos que o período de oscilação mínimo ocorre quando a posição do eixo ao centro de massa está entre $0,40 \text{ m} < h < 0,42 \text{ m}$, e cresce quando $h \rightarrow 0$, sendo este o termo que denota esta distância do eixo ao centro de massa. Por efeito, podemos realizar a derivação da função expressa na Equação (4.29), que relaciona o período em função da referida distância entre o eixo e o centro de massa do sistema, obtendo assim por meio de cálculos teóricos, um valor equivalente ao observado na figura anterior.

Derivando a Equação (4.29) em relação a h , de modo a achar o mínimo, temos:

$$(T_{min})^2 = \left[2\pi \sqrt{\frac{I_{total}}{Mgh_{min}}} \right]^2 \rightarrow \frac{d}{dh_{min}} \left(T_{min}^2 \right)^0 = \frac{d}{dh_{min}} \left(4\pi^2 \frac{I_{total}}{Mgh_{min}} \right)$$

$$\frac{d}{dh_{min}} \left[4\pi^2 \left[M_c \left(\frac{1}{4}R_c^2 + \frac{1}{3}L_c^2 \right) + \frac{1}{3}M_bL_b^2 + Mh^2 \right] \right] \frac{1}{Mgh_{min}} = 0$$

Para este nosso sistema, temos que $M_c = 0,135 \text{ kg}$; $M_b = 0,174 \text{ kg}$; $R_c = 0,03 \text{ m}$; $L_c = 0,03 \text{ m}$ e $L_b = 0,97 \text{ m}$. Vamos considerar também a aceleração da gravidade como $9,78 \text{ m/s}^2$. Assim, substituindo os valores numéricos ficamos com:

$$\frac{d}{dh_{min}} \left(0,71576h_{min}^{-1} + 4,03665h_{min} \right) = 0,$$

Finalmente, ao derivarmos ficamos com,

$$-0,71576h_{min}^{-2} + 4,03665 = 0 \rightarrow h_{min} = \sqrt{\frac{0,71576}{4,03665}} \approx 0,42 \text{ m.}$$

Notemos, que este valor é, com boa aproximação, coerente com o valor apontado no gráfico obtido na Figura (6.7).

Se tomarmos os 4 primeiros dados para h (da direita para a esquerda), notamos que quando $h \rightarrow 0$, $T \rightarrow \infty$. Não é possível ver claramente este comportamento no gráfico da Figura ((6.7) devido a coleta de dados dos sistema não permitir isso, no entanto, é intuitivo notar que quando o centro de oscilação coincide com o centro de massa do sistema, o pêndulo não é capaz de oscilar. Por efeito, quando h vai tomando valores maiores que 0, o período passa por um valor mínimo e cresce novamente a medida em que o centro de massa variável se afasta do eixo de rotação. Novamente considerando os 4 primeiros valores para h , é possível notar que ele possui uma natureza decrescente, sendo assim, podemos determinar esta dependência linear. Primeiramente, achemos o coeficiente linear através de $\alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x}$.

$$\alpha = \frac{\log(1,555) - \log(1,497)}{\log(0,32630) - \log(0,38930)} \rightarrow \alpha = -0,21534$$

Para encontrar uma dependência em lei de potência, usamos:

$$\begin{aligned} \log(b) &= \log(y) - \alpha \log(x) \rightarrow \log(b) = \log(1,555) - (-0,21534 \cdot \log(0,3263)) \rightarrow \\ &\rightarrow \log(b) = 0,08699 \rightarrow b = 10^{0,08699} \rightarrow b = 1,22177 \end{aligned}$$

Desta forma, concluímos que esta dependência funcional entre $T \times S$ é dada por $T = 1,2217 \cdot (h)^{-0,21534}$. Este resultado de fato é satisfatório, pois pelo próprio comportamento do gráfico, esperava-se uma dependência em uma lei de potência com expoentes negativos. Os valores obtidos no experimento se comportam exatamente como a fórmula condiz (para os pontos supracitados), para valores de h cada vez menores, o período se torna cada vez maior.

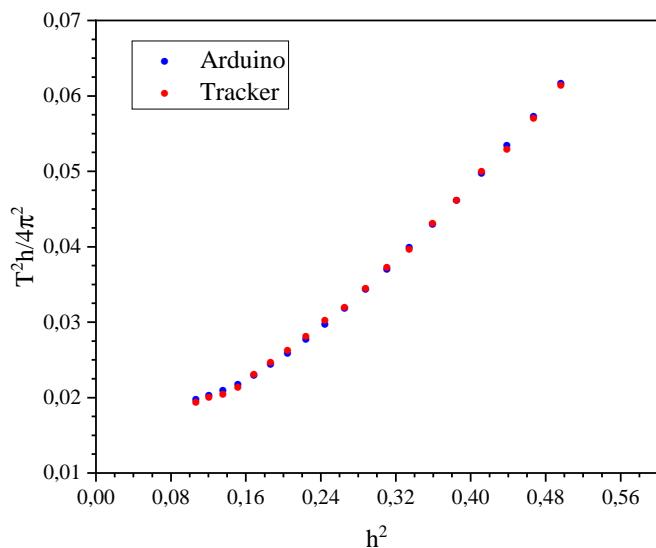
•Relação linear entre $T^2h/4\pi^2$ e h^2 pelo Método dos Mínimos Quadrados

Vamos moldar a Equação (4.29) em sua forma geral, em que só é levado o momento de inércia do centro de massa e em relação a um eixo paralelo. Assim, elevando ambos os membros ao quadrado, temos,

$$\underbrace{\frac{T^2h}{4\pi^2}}_Y = \underbrace{\frac{I}{mg}}_{\alpha_0} + \underbrace{\frac{1}{g}}_{\alpha_1} \underbrace{h^2}_X \quad (6.3)$$

Notamos portanto, que esta função se comporta como uma reta, desta forma, tomando a relação linear entre $\frac{T^2}{4\pi^2}h$ em função de h^2 e levando em conta os dados da Tabela (6.1), foi plotado o gráfico que as relaciona linearmente na Figura (6.8) a seguir:

Figura 6.8 – $T^2h/4\pi^2$ em função de h^2



Fonte: Autoria Própria (2022).

Neste momento, vamos implementar um código em Python capaz de determinar a equação que descreve o comportamento desta reta para fazer o melhor ajuste entre elas, para tal, utilizaremos o **Método dos Mínimos Quadrados**, baseando-nos na biblioteca *Linear Regression; Mathplotlib e Numpy*⁴. O objetivo deste método consiste em encontrar uma função que represente, com boa aproximação, os valores tabelados, a partir do experimento realizado e, além disso, nos permita determinar, com certa margem de segurança, valores que estão fora do intervalo inicialmente definido, sendo matematicamente definida como (ALMEIDA, 2015):

⁴O código está disponível na página do Github no link: <>

$$\alpha_0 = \frac{\sum_{i=1}^n y_i \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i y_i \right) \sum_{i=1}^n x_i}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2} \quad (6.4)$$

$$\alpha_1 = \frac{n \left(\sum_{i=1}^n x_i y_i \right) - \sum_{i=1}^n y_i \sum_{i=1}^n x_i}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2} \quad (6.5)$$

o termo α_0 fornece o coeficiente linear e α_1 fornece o coeficiente angular da reta.

Ao implementarmos os valores no Python, (sendo as operações iniciais como multiplicações de colunas por constantes tendo sido realizadas com a função **sum()** do Origin), obtemos:

$$\begin{cases} Y = 0,005089911989302483 + [0,10882858]X \rightarrow \text{Arduino} \\ Y = 0,005102250269336292 + [0,10868614]X \rightarrow \text{Tracker} \end{cases} \quad (6.6)$$

Tomando a Equação (4.15) na pág. 33, e elevando ambos os membros ao quadrado e relacionando a (6.3), temos

$$\frac{T^2 h}{4\pi^2} = \frac{I_t}{Mg} \quad (6.7)$$

ou seja

$$\begin{cases} \frac{I_t}{Mg} = 0,005089911989302483 + (0,10882858)h^2 \rightarrow \text{Arduino} \\ \frac{I_t}{Mg} = 0,005102250269336292 + (0,10868614)h^2 \rightarrow \text{Tracker} \end{cases} \quad (6.8)$$

Desta forma, substituindo os valores numéricos conhecidos ($g = 9,78 \text{ m/s}^2$; $M = 0,309 \text{ kg}$) e considerando o ponto mais distante do eixo em relação ao centro de massa ($0,7043 \text{ m}$) podemos obter os momentos inércias experimentais para ambos os casos. Assim:

$$\begin{cases} I_{ard} = 0,17852 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \\ I_{TRK} = 0,17834 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \end{cases} \quad (6.9)$$

Podemos agora comparar estes valores obtidos experimentalmente com o valor de I obtido teoricamente por meio da Equação (4.28) (veja a pág. 38). Façamos o cálculo numérico diretamente da equação supracitada substituindo os valores já conhecidos considerando o primeiro ponto das medidas, em que $h = 0,7043 \text{ m}$ e consequentemente $L_b = 0,97 \text{ m}$, visto que o cilindro possui 3 mm de altura.

$$\begin{aligned}
 I_{TOTAL} &= \frac{1}{4}M_cR_c^2 + \frac{1}{3}M_cL_c^2 + \frac{1}{12}M_bL_b^2 + (M_c + M_b)h^2 \rightarrow \\
 &= (0,135)(0,03)^2 \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{3} \right) + \frac{1}{12}0,174(0,97)^2 + \underbrace{(0,309)}_{M_c + M_c} (0,7043)^2 = 0,16692 \text{ kg} \cdot \text{m}^2
 \end{aligned}$$

Em termos absolutos, temos uma diferença de $1,160 \cdot 10^{-2}$ para o primeiro método (Arduino), representando um erro de 6,49%; e uma diferença de $1,142 \cdot 10^{-2}$ para o segundo método (Tracker), com um erro percentual de 6,40%⁵. Esta diferença, mesmo que mínima, é devido aos próprios atritos entre os rolamentos do sistema e outras forças dissipativas que não são levadas em conta nos cálculos teóricos.

Contudo, notou-se que quanto menor é a distância entre o centro de massa e o eixo de rotação, maior é o erro entre o valor obtido teórica e experimentalmente. Tal fato se deve justamente pela disposição do sistema, onde a distância ao centro de massa era alterada com a movimentação do cilindro e não com a mudança no eixo de rotação, o que gerou uma outra contribuição para o momento de inércia da barra que restava abaixo do cilindro, cuja expressão (4.28) não levava em consideração.

Desta forma, conclui-se que que o pêndulo físico satisfaz o **teorema dos eixos paralelos** para h somente quando o erro experimental é pequeno, caso haja uma discrepância muito grande, o teorema tende a ficar insatisfatório.

•Determinação da aceleração a partir do raio de giração

Vamos agora obter a aceleração da gravidade a partir do raio de giração do sistema. Retomando a Equação (4.31), e moldando-a para deixá-la em seu formato mais genérico (obedecendo ao teorema dos eixos paralelos), ficamos com a relação expressa em (6.10).

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{k^2 + h^2}{gh}} \quad (6.10)$$

Se elevarmos ambos os lados ao quadrado, podemos organizá-la de modo a deixá-la na forma de uma equação da reta (6.11), o que nos permite calcular os coeficientes angular e linear. Tomemos novamente os dados da Tabela (6.1), e utilizemos o método de MMQ (Equações (6.5) e (6.5)), tomindo o cuidado de determinar os coeficientes a partir das funções T^2h versus h^2 . Nos dispensaremos de repetir o processo, que é análogo ao feito para o momento de inércia. Assim, os referidos valores para o Arduino serão: $\alpha_0 = 0,2008542388466621$ e $\alpha_1 = 4,2967538$ e para o Tracker serão: $\alpha_0 = 0,20143193554571037$ e $\alpha_1 = 4,29079398$.

⁵Esses dados foram traçado utilizando-se erro relativo comum.

Ao correlacionarmos novamente com a equação da reta ajustada os casos de equivalência acima descritos, temos que:

$$T^2 h = \underbrace{\frac{4\pi^2 k^2}{g}}_{\alpha_0} + \underbrace{\frac{4\pi^2}{g} h^2}_{\alpha_1} \quad (6.11)$$

por comparação direta temos,

$$\begin{cases} \alpha_0 = \frac{4\pi^2 k^2}{g} \\ \alpha_1 = \frac{4\pi^2}{g} \end{cases} \quad (6.12)$$

Antes de calcularmos o valor de g , vamos primeiro calcular o raio de giração de giração do sistema levando em conta o maior valor de distância do eixo ao centro de massa a partir da Equação (4.30)⁶. Assim, ao substituirmos diretamente os valores na equação supracitada, teremos:

$$k = 0,21038m \quad (6.13)$$

Façamos primeiramente o cálculo com os dados do Arduino. Em posse de todos os valores necessários, podemos finalmente determinar a aceleração da gravidade g por ambas as equações da (6.12) e então fazer uma média simples entre elas.

$$\begin{cases} g = \frac{4\pi^2 k^2}{\alpha_0} = \frac{4\pi^2 (0,21038)^2}{0,20085} = 8,69955 \text{ m/s}^2 \\ g = \frac{4\pi^2}{\alpha_1} = \frac{4\pi^2}{4,29675} = 9,18797 \text{ m/s}^2 \end{cases}$$

Ao fazermos a média entre os valores obtidos, tem-se finalmente que o valor encontrado para a aceleração da gravidade utilizando o método do Arduino foi de:

$$g = 8,94376 \rightarrow g \approx 8,95 \text{ m/s}^2$$

Façamos agora com os dados para o Tracker.

$$\begin{cases} g = \frac{4\pi^2 k^2}{\alpha_0} = \frac{4\pi^2 (0,21038)^2}{0,20189} = 8,67450 \text{ m/s}^2 \\ g = \frac{4\pi^2}{\alpha_1} = \frac{4\pi^2}{4,29110} = 9,20073 \text{ m/s}^2 \end{cases}$$

Novamente, ao fazermos esta média aritmética simples, obtemos o valor obtido da aceleração da gravidade neste método de:

$$g = 8,93761 \rightarrow g \approx 8,94 \text{ m/s}^2$$

De fato, este valor está bem abaixo do esperado em confronto com o atualmente aceito, que é de $9,81 \text{ m/s}^2$. No entanto, conforme afirma Lopes (2002) em seus estudos, a

⁶O motivo pelo qual foi adotado este ponto já foi explicado e valem as mesmas considerações.

aceleração da gravidade não deve ser pensada como uma constante, mas sim uma grandeza física que varia com a altitude. Além disso, devemos considerar os erros experimentais ao qual estamos sujeitos, visto que o sistema adotado não dispõe de alta precisão. Desta forma, este valor pode ser considerado como aceitável, se observado a faixa de erro percentual encontrada, sendo de 9,27% para o Arduino e 9,39% para o Tracker.

6.4 CAPTURA DOS DADOS COM TRACKER: PÊNDULOS FÍSICOS ACOPLADOS

Na parte que compete a análise de pêndulos físicos acoplados, foi utilizado somente o método da videoanálise devido a limitações no *hardware* do Arduino, o que nos impossibilitou em trabalhar com ambos os métodos.

Algumas etapas importantes precederam as gravações dos vídeos para análise, dentre elas, a determinação das constantes das molas. Ao todo, foram utilizadas 3 molas, sendo uma principal de acoplamento e outras duas molas fixas laterais. Os valores das constantes das molas fixas laterais foram de $k_1 = 9,08\text{N/m}$; $k_2 = 9,07\text{N/m}$ e $\kappa = 1,40\text{N/m}$, valores estes obtidos mediante medidas em laboratório com uso de dinamômetro, massas pré-definidas e régua magnética milimétrica. No que se refere a preparação do ambiente, foi novamente utilizado um painel branco de fundo e pontos pretos para serem captados no vídeo.

Por efeito de simplificação da situação, alteramos as massas dos cilindros, adicionando-os esferas de ferro em seu interior, para que pudéssemos considerar $M_{cilindro} \gg M_{barra}$. Ao total, o conjunto formado pelos 3 cilndros utilizados obteve uma massa de **COLCAR VALOR.**

Os vídeos foram capturados com as posições das molas em diferentes distâncias em relação ao centro eixo de rotação, tendo sido seus valores expressos na Tabela (**citar tabela que vou construir**). Em seguida, os dados foram tratados no Tracker e analisados no Origin, utilizando-se ainda o método em Python para determinação das equações das retas.

6.5 DISCUSSÃO DOS RESULTADOS PARA OSCILAÇÕES ACOPLADAS: TRACKER

Este sistema de pêndulos acoplados, é basicamente uma extensão do caso anterior com o pêndulo livre, tendo a seu sistema, um total de três molas acopladas e uma quantidade diferente de massa no cilindro, tal que a contribuição para o momento de inércia da barra possa ser desprezada, visto que $M_{cilindro} \gg M_{barra}$.

•Análise da dinâmica dos pêndulos em oscilação simétrica e antissimétrica.

Na Tabela (6.2), temos os referentes dados para a velocidade angular obtidas em cada uma das alturas pré-dispostas, que por definição, denotam a distância do eixo de rotação até a posição em que estão acopladas as molas. Os subíndices s e a , denotam modo

simétrico e antissimétrico, respectivamente, sendo o outro subíndice vinculado (1 e 2), em referência a denominação arbitrária para o pêndulo físico 1 e 2.

Tabela 6.2 – Valores para a frequência angular nos modos simétrico e antissimétrico para ambos os pêndulos.

$l(m)$	$\omega_{a1}(rad/s)$	$\omega_{a2}(rad/s)$	$\omega_{s1}(rad/s)$	$\omega_{s2}(rad/s)$

Fonte: Autoria própria (2022).

Vamos retomar a Equação (5.8) na pág. (42). Se lembramos que Ω^2 carrega os termos I , κ e l , tal que $\Omega^2 = \frac{\kappa l^2}{I}$, então podemos elevá-la ao quadrado e relacioná-la com a equação de uma reta. Observe a relação na Equação (6.14) a seguir:

$$\underbrace{\omega_a^2}_Y = \underbrace{\omega_0^2}_{\alpha_0} + \underbrace{\frac{2\kappa}{I}}_{\alpha_1} \underbrace{l^2}_X \quad (6.14)$$

Este formato que nos indica que há novamente uma relação linear entre ω^2 e l^2 . Contudo, este caso da Equação (6.14) contempla somente as oscilações acopladas. Levando em conta esta hipótese, plotamos os gráficos referentes a estas grandezas para verificação dos conceitos teóricos. As Figuras ()(a) e (b) mostram essa relação.

Notamos pela composição dos gráficos que realmente há esta relação linear entre ω^2 e l^2 . Assim sendo, a partir dos dados da Tabela (6.2) e utilizando novamente o **Método dos Mínimos Quadrados**, implementado em linguagem Python, foi possível determinar as equações da reta para cada um dos pêndulos em cada um dos 2 casos do modo antissimétrico.

Para o caso em que os pêndulos oscilam em fase ou em simetria, segundo Nussenzveig (2013) afirma que é como se a mola não existisse, log, o termo Ω^2 não é levado em conta e a Equação (6.14) afirma que a frequência de oscilação do pêndulo em fase coincide com a frequência angular de um pêndulo livre sem acoplamento, ou seja,

$$\omega_s^2 = \omega_0^2 \quad (6.15)$$

A Equação (6.15) sugere um comportamento de um gráfico por uma constante. Verifiquemos.

Notamos, portanto, que com base nas Figuras ()() e (), há realmente um comportamento linear e constante quando os pêndulos oscilam em fase. Ao calcularmos as equações da reta, obtemos:

- Estimativa do período do pêndulo livre e das constantes das moals.**

7 CONCLUSÕES

Parte final do texto, na qual se apresentam as conclusões do trabalho acadêmico. É importante fazer uma análise crítica do trabalho, destacando os principais resultados e as contribuições do trabalho para a área de pesquisa.

7.1 Considerações Finais

Encerramento do trabalho acadêmico.

7.2 Trabalhos Futuros

Também deve indicar, se possível e/ou conveniente, como o trabalho pode ser estendido ou aprimorado.

Referências

- ALIPRANDINI, D. M.; SCHUHMACHER, E.; MURIEL, C. Processo ensino e aprendizagem de física apoiada em software de modelagem. In: **I Simpósio Nacional de Ensino de Ciência e Tecnologia**, p. 1370–1380, 2009. Citado na página 17.
- ALMEIDA, F. **O que é Encoder? Para que serve? Como escolher? Como interfacear?** 2018. Disponível em:<<https://www.hitecnologia.com.br/blog/o-que-%C3%A9-encoder-para-que-serve-como-escolher-como-interfacear/>>. Acesso em: 07 de janeiro de 2022. Citado 2 vezes nas páginas 26 e 27.
- ALMEIDA, R. d. O método dos mínimos quadrados: estudo e aplicações para o ensino médio. **Campos dos Goytacazes: UENF**, 2015. Citado na página 59.
- ALONSO, M.; FINN, E. J. **Física: Um curso universitário-Mecânica**. [S.l.]: Editora Blucher, 2018. v. 1. Citado 3 vezes nas páginas 14, 41 e 45.
- ANGOTTI, J. A. P. Conceitos unificadores e ensino de física. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, v. 15, n. 1, p. 191–198, 1993. Citado na página 16.
- ANJOS, A. J. S. dos. As novas tecnologias e o uso dos recursos telemáticos na educação científica: a simulação computacional na educação em física. **Caderno Brasileiro de Ensino de Física**, Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC), v. 25, n. 3, p. 569–600, 2008. Citado na página 20.
- ARAUJO, G. d. A. et al. Caos em um pêndulo duplo: uma investigação utilizando videoanálise. Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Piauí, 2018. Citado na página 17.
- ARDUINO. **AttachInterrupt()**. 2021. Disponível em:<<https://www.arduino.cc/reference/en/language/functions/external-interrupts/attachinterrupt/>>. Acesso em: 23 de agosto de 2021. Citado na página 54.
- ARDUINO. **O que é o Arduino?** 2021. Disponível em:<<https://www.arduino.cc/en/Guide/Introduction>>. Acesso em: 13 de agosto de 2021. Citado 3 vezes nas páginas 13, 22 e 25.
- ATKIN, K. An arduino-based experiment designed to clarify the transition to total internal reflection. **Physics Education**, IOP Publishing, v. 53, n. 2, p. 025003, 2017. Citado na página 23.
- ATMEL. 2018. Disponível em:<<https://www.microchip.com/en-us/tools-resources/search-discover/atmel-start>>. Acesso em: 23 de dezembro de 2021. Citado na página 22.
- BRASIL. **Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional**. [S.l.]: Ministério da Educação, 1996. Disponível em:<http://portal.mec.gov.br/index.php?option=com_content&view=article&id=12907:legislacoes&catid=70:legislacoes>. Acesso em: 21 de abril de 2021. Citado na página 16.
- BUKMAN, G. Desenvolvimento de um protótipo para segurança residencial de baixo custo. 2016. Citado 2 vezes nas páginas 22 e 25.

- BUTKOV, E. **Mathematical Physics (1968)**. [S.l.]: Addison-Wesley Publishing Company, Incorporated, 1968. Citado 6 vezes nas páginas 40, 42, 43, 44, 45 e 47.
- CAVALCANTE, M. A.; TAVOLARO, C. R. C.; MOLISANI, E. Física com arduino para iniciantes. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, SciELO Brasil, v. 33, n. 4, p. 4503–4503, 2011. Citado 2 vezes nas páginas 18 e 23.
- CHIRIACESCU, B. et al. Arduino and tracker video—didactic tools for study of the kater pendulum physical experiment. **Romanian Reports in Physics**, v. 72, n. 1, p. 14, 2020. Citado 2 vezes nas páginas 14 e 23.
- CHRISTIAN, W.; ESQUEMBRE, F.; BARBATO, L. Open source physics. **Science**, American Association for the Advancement of Science, v. 334, n. 6059, p. 1077–1078, 2011. Citado na página 20.
- FEDERAL, S. Lei de diretrizes e bases da educação nacional. **Diário Oficial [da] República Federativa do Brasil, Poder Legislativo, Brasília, DF**, v. 19, p. 26, 2005. Citado 2 vezes nas páginas 13 e 16.
- FILHO, J. de P. A. Regras da transposição didática aplicadas ao laboratório didático. **Caderno brasileiro de ensino de Física**, v. 21, p. 44–58, 2004. Citado na página 20.
- JR, A. G. B. et al. Videoanálise com o software livre tracker no laboratório didático de física: movimento parabólico e segunda lei de newton. **Caderno Brasileiro de Ensino de Física**, p. 469–490, 2012. Citado na página 19.
- JÚNIOR, I. V. d. S. et al. Física experimental com arduino: ondas em uma corda tensionada. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, SciELO Brasil, v. 42, 2020. Citado 2 vezes nas páginas 23 e 25.
- LEITÃO, L. I.; TEIXEIRA, P. F. D.; ROCHA, F. S. da. A vídeo-análise como recurso voltado ao ensino de física experimental: um exemplo de aplicação na mecânica. **Revista electrónica de investigación en educación en ciencias**, Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires, v. 6, n. 1, p. 18–33, 2011. Citado 3 vezes nas páginas 13, 19 e 20.
- LOPES, A. C. Os parâmetros curriculares nacionais para o ensino médio e a submissão ao mundo produtivo: o caso do conceito de contextualização. **Educação & Sociedade**, v. 23, n. 80, p. 386–400, 2002. Citado 2 vezes nas páginas 16 e 62.
- MENDES, E. A. Usando o arduino e a linguagem python no ensino de física. 2019. Citado na página 17.
- MOREIRA, M. A. Pesquisa básica em educação em ciências: uma visão pessoal. **Revista Chilena de Educación Científica**, v. 3, n. 1, p. 10–17, 2004. Citado 2 vezes nas páginas 13 e 16.
- MOYA, A. A. An arduino experiment to study charge–voltage relationships in capacitors. **Physics Education**, IOP Publishing, v. 54, n. 1, p. 015005, 2018. Citado na página 23.
- NUSSENZVEIG, H. M. **Curso de Física Básica: Mecânica**. [S.l.]: Editora Blucher, 2013. v. 1. Citado 5 vezes nas páginas 29, 30, 34, 35 e 64.

- NUSSENZVEIG, H. M. **Curso de Física Básica: fluidos, oscilações e ondas, calor.** [S.l.]: Editora Blucher, 2018. v. 2. Citado 2 vezes nas páginas 40 e 41.
- OGUNTOSIN, V.; AKINDELE, A. Design of a joint angle measurement system for the rotary joint of a robotic arm using an incremental rotary encoder. In: IOP PUBLISHING. **Journal of Physics: Conference Series.** [S.l.], 2019. v. 1299, n. 1, p. 012108. Citado 3 vezes nas páginas 26, 27 e 28.
- OLIVEIRA, F. et al. Looking for absolute zero using an arduino. **Physics Education**, IOP Publishing, v. 54, n. 6, p. 065012, 2019. Citado na página 23.
- OLIVEIRA, I. N. d. et al. Construção de uma maquete experimental automatizada para o estudo da polarização da luz e comprovação experimental da lei de malus com o auxílio da plataforma arduino. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, SciELO Brasil, v. 42, 2020. Citado na página 23.
- QUADROS, D. **O que são shields para Arduino?** [S.l.]: FelipeFlop, 2021. Disponível em:<<https://www.filipeflop.com/blog/o-que-sao-shields-para-arduino/>>. Acesso em: 23 de dezembro de 2021. Citado na página 25.
- SEMICONDUCTORS, V. **IR Receiver Modules for Remote Control Systems.** 2021. Disponível em:<<https://www.vishay.com/docs/82459/tsop48.pdf>>. Acesso em: 16 de julho de 2021. Citado na página 24.
- SILVA, D. M. da; TAVARES, C. V. F.; SILVA, A. M. da. O uso da tecnologia como meio auxiliar para o ensino da física. **CIET: EnPED**, 2018. Citado 2 vezes nas páginas 16 e 18.
- SILVEIRA, S.; GIRARDI, M. Development of an experimental arduino kit for teaching modern physics in high school. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, SciELO Brasil, v. 39, n. 4, 2017. Citado na página 23.
- THOMSEN, A. **O que é o Arduino.** [S.l.]: FelipeFlop, 2014. Disponível em:<<https://www.filipeflop.com/blog/o-que-e-arduino/>>. Acesso em: 23 de dezembro de 2021. Citado na página 22.
- THORNTON, S. T.; MARION, J. B. **Dinâmica clássica de partículas e sistemas.** [S.l.]: Cengage Learning, 2011. Citado 6 vezes nas páginas 14, 39, 40, 44, 45 e 48.
- TRACKER. **TRACKER.** [S.l.]: Tracker Brasil, 2021. Disponível em:<<https://trackerbrasil.ct.utfpr.edu.br/>>. Acesso em: 21 de abril de 2021. Citado na página 20.
- TROCARU, S. et al. Using tracker as video analysis and augmented reality tool for investigation of the oscillations for coupled pendula. **Romanian Reports in Physics**, v. 72, n. 1, p. 16, 2020. Citado 5 vezes nas páginas 13, 14, 20, 40 e 41.