RÚBRICA DE EVALUACIÓN DEL TRABAJO

#	Indicador a evaluar	Cumplimiento		Observaciones
		Puntos	Puntos obtenidos	
1	El documento muestra orden y presentación adecuados para un trabajo universitario.	1		
2	Entrega de forma completa lo solicitado	1		
3	Explica amplia y detalladamente el método según el tema seleccionado.	1		
	Total	**3**		

Universidad de Costa Rica Sede del Caribe

Curso MA-0323 - Métodos Numéricos

Escuela de Matemática

Método Iterativo de Jacobi

Docente:

Verónica López Mora

Integrantes:

Diego Duarte Fernández – C19639

Denny Gutrie Arguedas – B99021

Josué Hernández Arauz – C13622

III Ciclo 2023

Índice

Historia del Método de Jacobi

Todo se remonta al año 1804 con el nacimiento de Carl Gustav Jacob Jacobi**,** el 10 de diciembre, en Potsdam, Prusia (ahora Alemania), y falleció el 18 de febrero de 1851. Carl fue un matemático alemán que, junto con Niels Henrik Abel de Noruega, fundó la teoría de las funciones elípticas.

Jacobi recibió su primera educación de un tío, y, al final de su primer año en el Gymnasium (1816-17), estaba listo para ingresar a la Universidad de Berlín. Debido a que la universidad no aceptaba estudiantes menores de 16 años, tuvo que esperar hasta 1821; sin embargo, al final del año académico 1823-24, estaba calificado para enseñar matemáticas, griego y latín.

Jacobi se hizo conocido en sus inicios, a través de su trabajo en funciones elípticas, que ganó la admiración del francés Adrien-Marie Legendre, uno de los principales matemáticos de su época. Sin darse cuenta de los esfuerzos similares del matemático noruego Niels Henrik Abel, Jacobi formuló una teoría de las funciones elípticas basada en cuatro funciones theta. Los cocientes de las funciones theta producen las tres funciones elípticas jacobianas. Sus resultados en funciones elípticas se publicaron en Fundamenta Nova Theoriae Functionum Ellipticarum (1829; "Nuevos fundamentos de la teoría de las funciones elípticas"). En 1832 demostró que, al igual que las funciones elípticas se pueden obtener invirtiendo integrales elípticas, también se pueden obtener funciones hiperelípicas invirtiendo integrales hiperexpáticas. Este éxito lo llevó a la formación de la teoría de las funciones abelianas, que son funciones complejas de varias variables. (Carl Jacobi - Biografía De Carl Jacobi, n.d.)

Sus trabajos más relevantes se produjeron en el campo del álgebra, en el que introdujo y desarrolló el concepto de determinante, aplicándolo asimismo al estudio de las funciones de variables múltiples. Su obra más notable es sobre la formación y propiedades de los determinantes en 1841, donde a raíz de sus estudios surge el método iterativo de Jacobi, el cual consiste en construir una sucesión convergente definida iterativamente. El límite de esta sucesión es precisamente la solución del sistema. A efectos prácticos si el algoritmo se detiene después de un número finito de pasos se llega a una aproximación al valor de x de la solución del sistema.

Desarrollo del Método de Jacobi

El análisis y ejemplos de desarrollo que se mostrarán a continuación es basado en un estudio matemático de Cortés Rosas et, al (2019); este numérico toma un sistema de ecuaciones lineales de tipo: $\boxed{\boldsymbol{A\bar{x} = \bar{b}}}$ donde A es la matriz de coeficientes, $\boldsymbol{\bar{x}}$ es el vector de incógnitas y $\boldsymbol{\bar{b}}$ el de términos independientes. Supongamos que ***A*** es la suma de dos matrices, ***D*** y ***R***, por lo que: ***A* = *D* + *R***, en donde ***D*** es una matriz cuyos elementos son cero **excepto** los ubicados en la diagonal y ***R*** que es una matriz **con ceros** en la diagonal**.**

Imágenes representativas de las matrices:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad R = \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & 0 & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & 0 & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

I. Como paso inicial, se sustituye $\boldsymbol{D}$ y $\boldsymbol{R}$ en la matriz $\boldsymbol{A}$ en la ecuación lineal:

$$(\boldsymbol{D}+\boldsymbol{R}) * \overline{\boldsymbol{x}} = \overline{\boldsymbol{b}}$$

II. Aplicando álgebra matricial obtenemos lo siguiente:

$$\boldsymbol{D}\overline{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{R}\overline{\boldsymbol{x}} = \overline{\boldsymbol{b}}$$

III. Ahora se procede a despejar el vector de incógnitas $\overline{\boldsymbol{x}}$:

$$\boldsymbol{D}\overline{\boldsymbol{x}} = \overline{\boldsymbol{b}} - \boldsymbol{R}\overline{\boldsymbol{x}}$$

IV. Multiplicando ambos lados por la inversa de $\boldsymbol{D}$ para despejar el vector $\overline{\boldsymbol{x}}$:

$$\boldsymbol{D}^{-1} * \boldsymbol{D}\overline{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{D}^{-1} * (\overline{\boldsymbol{b}} - \boldsymbol{R}\overline{\boldsymbol{x}})$$

V. Obteniendo como resultado:

$$\overline{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{D}^{-1} * \left(\overline{\boldsymbol{b}} - \boldsymbol{R}\overline{\boldsymbol{x}}\right)$$

Esta ecuación final no nos brinda una solución como tal si la vemos desde la perspectiva del álgebra matricial, sin embargo, aplicando la forma recursiva según el método de Jacobi, obtenemos lo siguiente:

$$\overline{\boldsymbol{x}}^{(\boldsymbol{k}+\mathbf{1})} = \boldsymbol{D}^{-1} * (\overline{\boldsymbol{b}} - \boldsymbol{R}\overline{\boldsymbol{x}})$$

Para k = 0, 1, 2, …, n. Donde $\overline{\boldsymbol{x}}^{(k)}$ representa un vector solución inicial y $\overline{\boldsymbol{x}}^{(k+1)}$ corresponde a una aproximación posterior a $\overline{\boldsymbol{x}}^{(k)}$. Por lo que tenemos lo siguiente: la matriz $\boldsymbol{D}$ sólo posee elementos diferentes de cero en su **diagonal principal**, por lo tanto, su inversa $\boldsymbol{D}^{-1}$ también posee únicamente valores diferentes a cero en su diagonal principal, los cuales corresponden a los recíprocos de los ubicados en la matriz $\boldsymbol{A}$, entonces, el paso siguiente será despejar la incógnita de las ecuaciones lineales de la diagonal principal de la siguiente forma:

$$
\begin{aligned}
x_1^{(k+1)} &= \frac{b_1-(a_{12}x^{(k_2)}+a_{13}x^{(k_3)}+...+a_{1n}x^{(k_n)})}{a_{11}} \\
x_2^{(k+1)} &= \frac{b_2-(a_{21}x^{(k_2)}+a_{23}x^{(k_3)}+...+a_{2n}x^{(k_n)})}{a_{22}} \\
x_3^{(k+1)} &= \frac{b_3-(a_{31}x^{(k_2)}+a_{32}x^{(k_3)}+...+a_{3n}x^{(k_n)})}{a_{33}} \\
&\vdots \qquad\qquad \vdots \\
x_n^{(k+1)} &= \frac{b_n-(a_{n1}x^{(k_2)}+a_{n2}x^{(k_3)}+...+a_{nn-1}x_{n-1}^{(k)}}{a_{nn}}
\end{aligned}
$$

El método de Jacobi propone que el vector inicial $\overline{\boldsymbol{x}}^{(\mathbf{0})}$ sea igual a cero. A partir de esta propuesta, el vector siguiente será $\overline{\boldsymbol{x}}^{(\mathbf{1})} = \frac{\boldsymbol{b_i}}{\boldsymbol{a_{ii}}}$, es decir, el elemento independiente entre el coeficiente de la diagonal principal para cada ecuación.

$$
\bar{x}^{(1)} = \begin{bmatrix} \frac{b_1}{a_{11}} \\ \frac{b_2}{a_{22}} \\ \frac{b_3}{a_{33}} \\ \vdots \\ \frac{b_n}{a_{nn}} \end{bmatrix}
$$

Este vector $\overline{\boldsymbol{x}}^{(\mathbf{1})}$ se sustituye en las ecuaciones anteriores generando así el siguiente vector $\overline{\boldsymbol{x}}^{(\mathbf{2})}$. El proceso se realiza consecutivamente hasta que la norma entre dos vectores consecutivos sea menor que cierta tolerancia preestablecida.

La norma θ se calcula como:

$$
\theta = \sqrt{(x_1^{(k+1)} - x_1^{(k)})^2 + (x_2^{(k+1)} - x_2^{(k)})^2 + (x_3^{(k+1)} - x_3^{(k)})^2 + ... + (x_n^{(k+1)} - x_n^{(k)})^2}
$$

Criterios de Convergencia del Método de Jacobi

El método de Jacobi es susceptible de los efectos del pivoteo. En consecuencia, su criterio de convergencia lo conforman los criterios de la diagonal dominante, mismo que posee dos condiciones:

Condición necesaria: Que el elemento ubicado en la diagonal principal de cada ecuación sea mayor en valor absoluto que el resto de los elementos de la misma ecuación:

$$|a_{ii}| > |a_{ij}|$$

Condición suficiente: Que el elemento ubicado en la diagonal principal de cada ecuación sea mayor en valor absoluto que la suma del resto de los elementos de la misma ecuación:

$$|a_{ii}| > \sum |a_{ij}|$$

Ejercicios Prácticos del Método de Jacobi

Para este primer ejemplo se necesita resolver un sistema de ecuaciones lineales mediante el método de Jacobi, utilizando los pasos que se describieron en las páginas anteriores de este documento, sabiendo que tenemos el siguiente sistema lineal:

$$\begin{aligned}
6x_1 - x_2 - x_3 + 4x_4 &= 17 \\
x_1 - 10x_2 + 2x_3 - x_4 &= -17 \\
3x_1 - 2x_2 + 8x_3 - x_4 &= 19 \\
x_1 + x_2 + x_3 - 5x_4 &= -14
\end{aligned}$$

Debemos encontrar cada una de las incógnitas del vector de incógnitas, por lo que se procede a despejar cada una de las ecuaciones, obteniendo así los despejes:

$$\begin{aligned}
x_1 &= \left[17 - \left(-x_2 - x_3 + x_4\right)\right] / 6 \\
x_2 &= \left[-17 - \left(-x_1 + 2x_3 - x_4\right)\right] / -10 \\
x_3 &= \left[19 - \left(3x_1 - 2x_2 - x_4\right)\right] / 8 \\
x_4 &= \left[-14 - \left(-x_1 - x_2 + x_3\right)\right] / -5
\end{aligned}$$

Una vez despejadas las incógnitas, se procede a iterar para obtener los valores siguientes del vector de incógnitas:

$$\begin{aligned}
x_1^1 &= 2.833333 \\
x_2^1 &= 1.7 \\
x_3^1 &= 2.375 \\
x_4^1 &= 2.8
\end{aligned}$$

Obteniendo los siguientes resultados mediante iteraciones en Excel:

	A	B	C	D	E	F
1	ITERACIÓN	X_1	X_2	X_3	X_4	
2	0	0	0	0	0	VECTOR X(0)
3	1	2.833333	1.7	2.375	2.8	VECTOR X(1)
4	2	1.645833	2.178333	2.0875	4.18166667	VECTOR X(2)
5	3	0.756528	1.863917	2.82510417	3.98233333	
6	4	0.959948	1.94244	3.05507292	3.88910972	
7	5	1.073512	2.018098	2.98676832	3.99149222	
8	6	1.006483	2.005556	2.97589398	4.01567582	
9	7	0.986458	1.99426	3.00091728	3.99758653	
10	8	1.000805	1.999071	3.00334155	3.99632691	
11	9	1.002851	2.001116	2.99900659	4.00064345	
12	10	0.999591	2.000022	2.99929043	4.00059469	
13	11	0.999489	1.999758	3.00023304	3.99978079	
14	12	1.000145	2.000017	3.00010368	3.99989595	
15	13	1.00009	2.000046	2.99993712	4.00005314	
16	14	0.999962	1.999991	2.99998446	4.00001446	
17	15	0.999986	1.999992	3.00001394	3.99998744	
18	16	1.000009	2.000003	3.00000148	3.99999837	
19	17	1.000002	2.000001	2.99999698	4.00000269	
20	18	0.999998	1.999999	3.00000002	4.00000003	
21	19	1	2	3.0000006	3.99999945	
22	20	1	2	2.99999993	4.00000005	
23	21	1	2	2.99999989	4.0000001	

Analizando los resultados de las iteraciones, tenemos que, las incógnitas del vector toman los valores anteriores en cada iteración para obtener el resultado de las nuevas incógnitas, llegando así hasta la iteración 20-21 donde ya se obtienen resultados un poco más sólidos y precisos.

Ahora se presenta un segundo ejemplo con mayor detalle sobre la aplicación del método de Jacobi, teniendo el siguiente sistema de ecuaciones lineales, a simple vista podemos observar que cumple con una de las condiciones de convergencia en su diagonal principal, la cual es su diagonal dominante.

$$
\begin{array}{rrrcr}
10x_1 & +x_2 & +2x_3 & = & 3 \\
4x_1 & +6x_2 & -x_3 & = & 9 \\
-2x_1 & +3x_2 & +8x_3 & = & 51
\end{array}
$$

Para iniciar con la aplicación del método se procede a formar las ecuaciones de recurrencia:

$$x_1^{(k+1)} = \frac{3-x_2^{(k)}-2x_3^{(k)}}{10}$$
$$x_2^{(k+1)} = \frac{9-4x_1^{(k)}+x_3^{(k)}}{6}$$
$$x_3^{(k+1)} = \frac{51+2x_1^{(k)}-3x_2^{(k)}}{8}$$

Al realizar la primera iteración obtenemos el vector:

$$\bar{x}^{(1)} = \begin{bmatrix} 0{,}3 \\ 1{,}5 \\ 6{,}375 \end{bmatrix}$$

Una vez teniendo el vector, procedemos a sustituir los valores en las ecuaciones de recurrencia, obteniendo así nuevos valores para el vector y así sucesivamente hasta determinar la tolerancia de las iteraciones del método:

$$x_1^{(2)} = \frac{3-(1{,}5)-2(6{,}375)}{10}$$
$$x_2^{(2)} = \frac{9-4\cdot(0{,}3)+6{,}375}{6}$$
$$x_3^{(2)} = \frac{51+2\cdot(0{,}3)-3\cdot(1{,}5)}{8}$$

$$\bar{x}^{(2)} = \begin{bmatrix} -1{,}125 \\ 2{,}3625 \\ 5{,}8875 \end{bmatrix}$$

Ahora, suponiendo que tenemos una tolerancia de 0.000007, debemos determinar el vector solución:

Cuadro 1: Iteraciones 0 a 6 por el método de Jácobi

Iteración	$x^{(0)}$	$x^{(1)}$	$x^{(2)}$	$x^{(3)}$	$x^{(4)}$	$x^{(5)}$	$x^{(6)}$
$x_1 =$	0.30000	-1.12500	-1.11375	-1.06469	-0.98802	-0.99087	-0.99705
$x_2 =$	1.50000	2.36250	3.23125	3.11047	3.02393	2.98241	2.99292
$x_3 =$	6.37500	5.88750	5.20781	4.88484	4.94240	4.99402	5.00888
Tolerancia		1.73557	1.10310	0.34829	0.12915	0.06631	0.01922

Cuadro 2: Iteraciones 7 a 12 en el método de Jácobi

Iteración	$x^{(7)}$	$x^{(8)}$	$x^{(9)}$	$x^{(10)}$	$x^{(11)}$	$x^{(12)}$
$x_1 =$	-1.00107	-1.00063	-1.00011	-0.99991	-0.99996	-1.00000
$x_2 =$	2.99951	3.00128	3.00041	2.99997	2.99991	2.99998
$x_3 =$	5.00339	4.99992	4.99936	4.99982	5.00003	5.00004
Tolerancia	0.00947	0.00392	0.00116	0.00066	0.00023	0.000007

Por lo tanto, nuestro vector solución utilizando el método de Jacobi es:

$$\bar{x}^{(12)} = \begin{bmatrix} -1,00000 \\ 2,99998 \\ 5,00004 \end{bmatrix}$$

Aplicaciones del Método de Jacobi

Con el pasar del tiempo se ha mejorado la forma en la que los diferentes métodos numéricos pueden llegar a dar una solución certera y rápida, esto lo podemos ver reflejado en el método de Jacobi, a continuación, se citan algunas de sus aplicaciones en la vida real.

- Aplicación de la Dinámica de Fluidos Computacional: Según Cárdenas y Fernando (2017), el método de Jacobi puede ser implementado fácilmente, pero su convergencia puede ser lenta cuando el sistema de ecuaciones es muy grande. En un inicio, no era considerado para aplicaciones en la Dinámica de Fluidos Computacional, pero recientemente nuevas técnicas que han sido desarrolladas han mejorado la convergencia, y ahora es uno de los métodos elegidos en algunos códigos comerciales de Dinámica de Fluidos Computacional.
- Matemáticas Financieras: Su aplicación puede darse en la resolución de modelos financieros con relaciones complejas que incluyan múltiples variables para el análisis de riesgos o valoración de activos.
- Redes Neuronales: El cálculo de ecuaciones lineales juega un papel muy importante en el entrenamiento de redes neuronales, y la aplicación del método de Jacobi para la solución de estas no queda exento, ya que facilita la forma en que se procesan los sets de entrenamiento cuando se trabaja mediante algoritmos iterativos.

En conclusión, el método de Jacobi es una herramienta matemática invaluable que tiene aplicaciones en muchos aspectos de la vida real, desde la ingeniería hasta la economía. Su capacidad para resolver sistemas complejos de ecuaciones lineales nos permite resolver problemas prácticos y del mundo real de manera efectiva y eficiente. Ya sea diseño estructural, análisis de flujo de fluidos, modelado financiero o procesamiento de redes neuronales, el método jacobiano proporciona soluciones aproximadas que nos ayudan a comprender y resolver muchos problemas del mundo real. Finalmente, su aplicación práctica convierte a este método en una herramienta valiosa en campos que requieren la resolución de sistemas de ecuaciones lineales para tomar decisiones informadas y resolver problemas complejos.

Base en que se programará

- ✓ Lenguaje de programación utilizado: Se programará con **Python**.
- ✓ Desarrollo de la interfaz gráfica: Se utiliza la interfaz gráfica de **tkinter** de Python para el despliegue de la aplicación.
- ✓ Control de versiones: Todo se trabaja bajo un mismo ambiente de desarrollo con su debido control de versiones de **Git**.
- ✓ Solución del problema: Se utilizarán las diferentes **librerías** y/o utilidades matemáticas que se puedan implementar en el programa mediante Python para obtener una solución rápida y óptima.

Referencias

Biografia de Carl Gustav Jacobi. (s. f.). https://www.biografiasyvidas.com/biografia/j/jacobi.htm

Carl Jacobi - Biografía de Carl Jacobi. (s. f.). https://www.biografias.es/famosos/carl-jacobi.html

Cárdenas, M., & Fernando, G. (2017). *Aplicación de la dinámica de fluidos computacional (CFD) y el modelado mecanístico en el estudio del sistema de bombeo electrocentrífugo sumergido (BEC)*. http://www.ptolomeo.unam.mx:8080/xmlui/handle/132.248.52.100/13810

Cortés Rosas, J. J., González Cárdenas, M. E., Pinilla Morán, V. D., Salazar Moreno, A., & Tovar Pérez, V. H. (2019). *Métodos iterativos de Jacobi y Gauss-Seidel* [PDF]. UNAM. https://www.ingenieria.unam.mx/pinilla/PE105117/pdfs/tema3/3-3_metodos_jacobi_gauss-seidel.pdf

EcuRed. (s. f.). *Carl Gustav Jacob Jacobi - ECURed*. https://www.ecured.cu/Carl_Gustav_Jacob_Jacobi

Martínez, V. G. (2022). *Interpretación geométrica de redes neuronales recurrentes discretas mediante grafos completos*. https://doi.org/10.20868/upm.thesis.35521

Peña, D. (2019). Métodos numéricos para Ingenieros, 7ma Edición - Chapra. *Azc-uam*. https://www.academia.edu/40452797/M%C3%A9todos_num%C3%A9ricos_para_Ingenieros_7ma_Edici%C3%B3n_Chapra

Wikipedia. (2020). *Método de Jacobi*. Wikipedia, la enciclopedia libre. https://es.wikipedia.org/wiki/M%C3%A9todo_de_Jacobi

Zabala, J. (2015). *Método de Jacobi Por: Junior Zabala* - Issuu. https://issuu.com/juniiorgabrielzabala/docs/metodo_de_jacobi._junior_zabala.ppt_515b3ebae924ec