INTRODUCCIÓN A SISTEMAS DE CONTROL

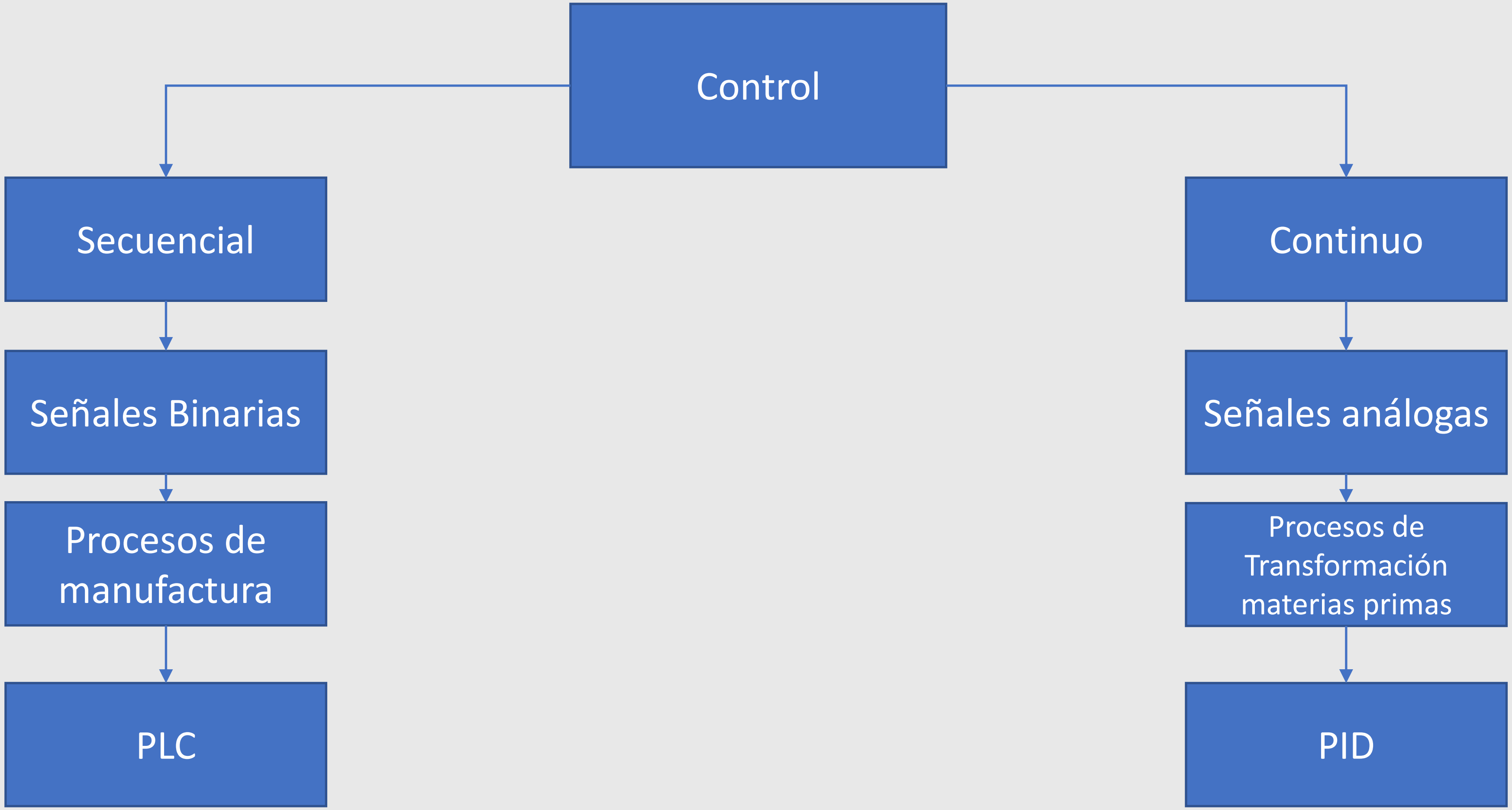
Ing. Jhon E Rodríguez MSc.

7 semestre

2022-2

Control

Dominios de control

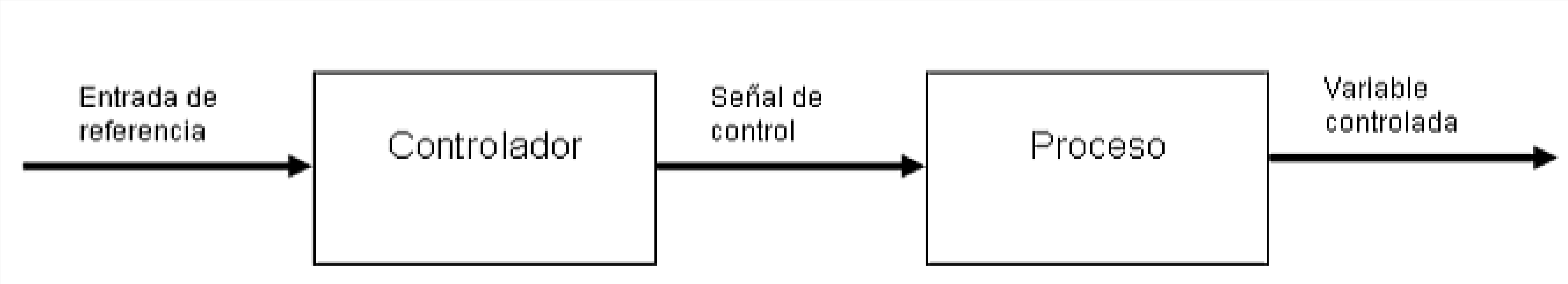


Sistema

- Conjunto de reglas o principios que relacionan salidas con las entradas

Clasificación Sistemas de Control

- Lazo Abierto

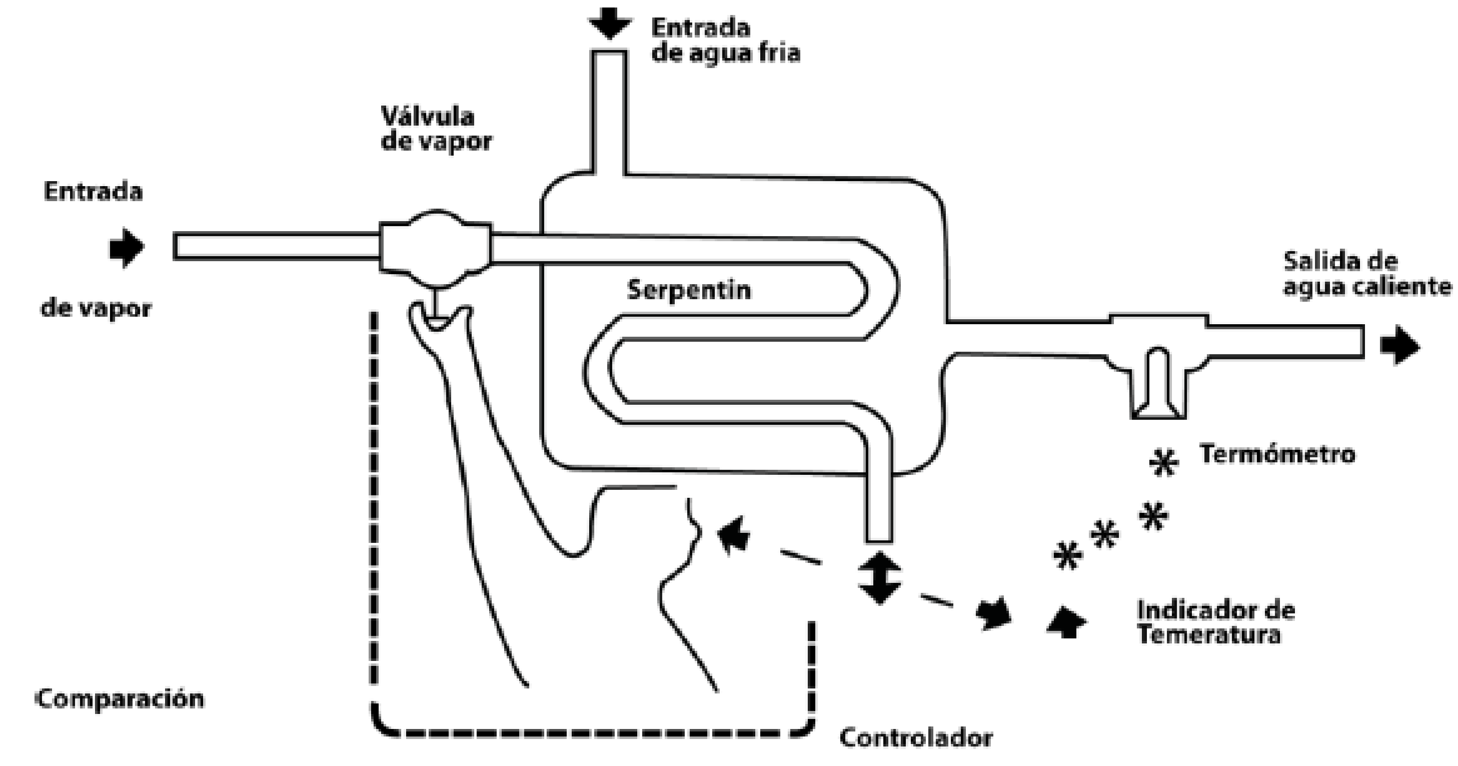


Clasificación Sistemas de Control

- Lazo Abierto

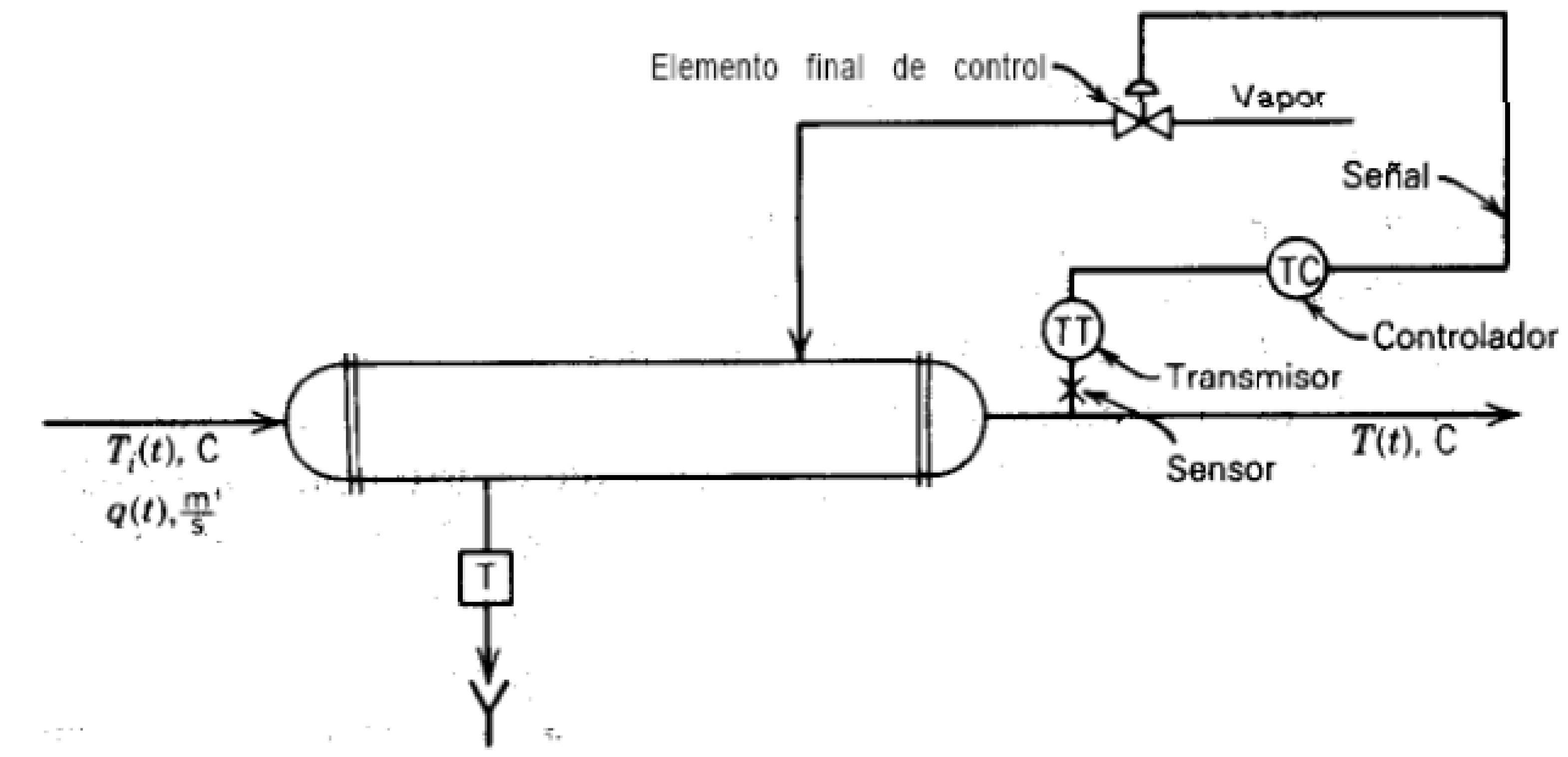
Clasificación Sistemas de Control

- Lazo cerrado No - Automático



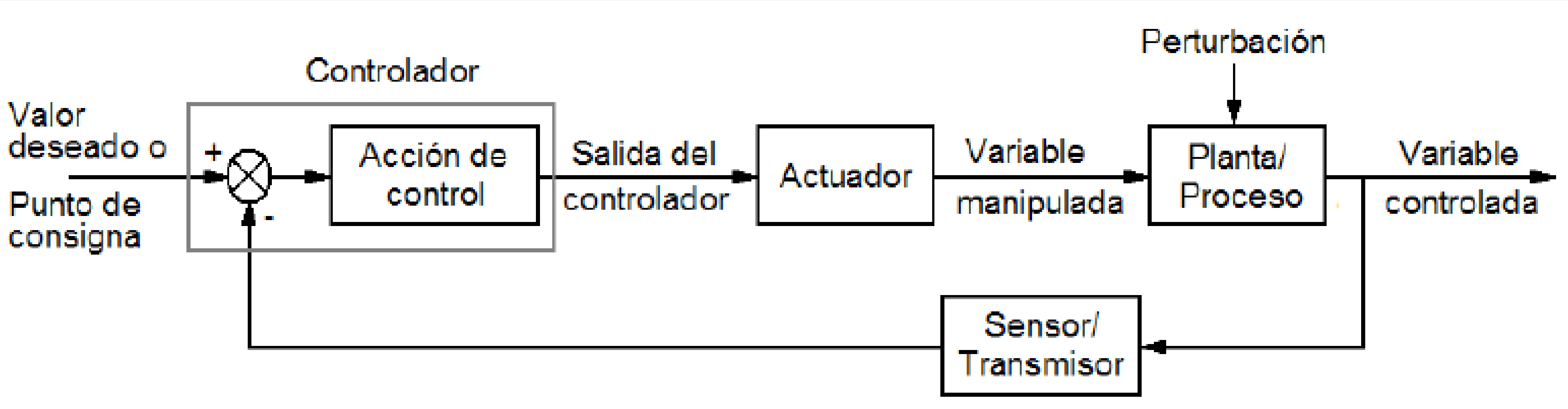
Clasificación Sistemas de Control

- Lazo cerrado Automático



Clasificación Sistemas de Control

- Lazo cerrado



Clasificación Sistemas de Control

- Lazo cerrado

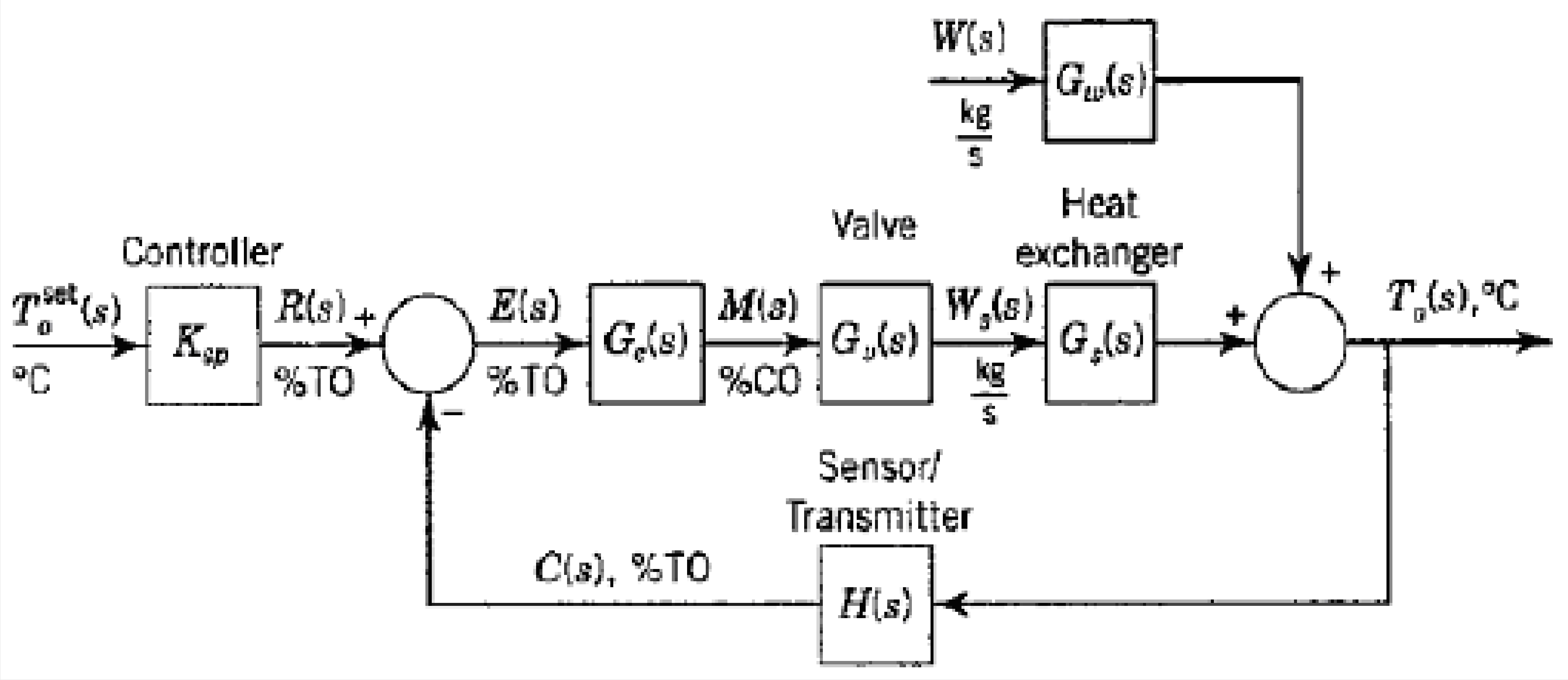
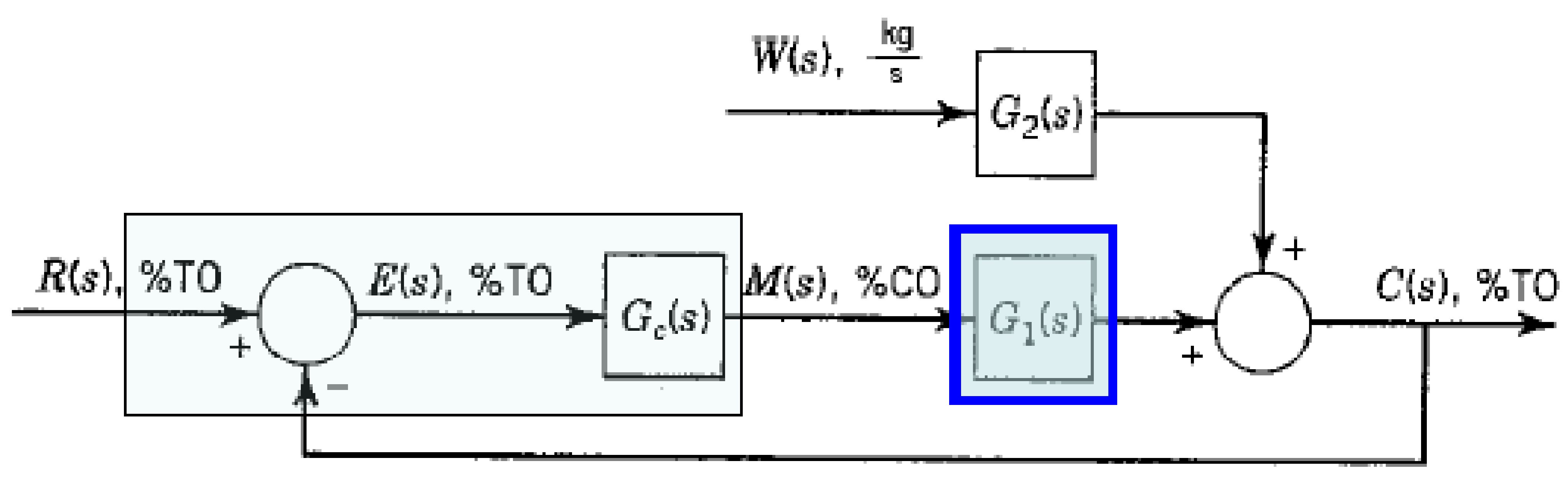


Diagrama de bloques

Clasificación Sistemas de Control

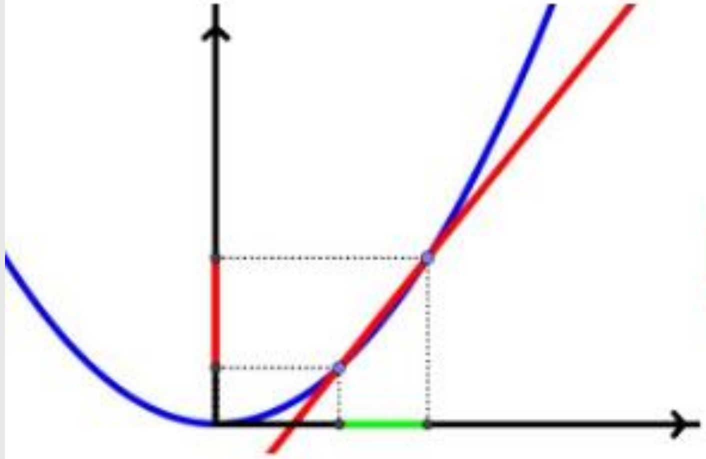
- Lazo cerrado



Planta Ampliada

Recordando cálculo diferencial

- Definición de la derivada



$$\lim_{h \to 0} \frac{f_{(x+h)} - f_{(x)}}{h}$$

$$f(x) = x^2$$

$$\frac{df(x)}{dx} = 2x$$

$$\frac{df(2)}{dx} = 2(2) = 4$$

$$\frac{df(3)}{dx} = 2(3) = 6$$

$$\frac{df(0)}{dx} = 2(0) = 0$$

Como lucen los modelos de ecuaciones diferenciales…

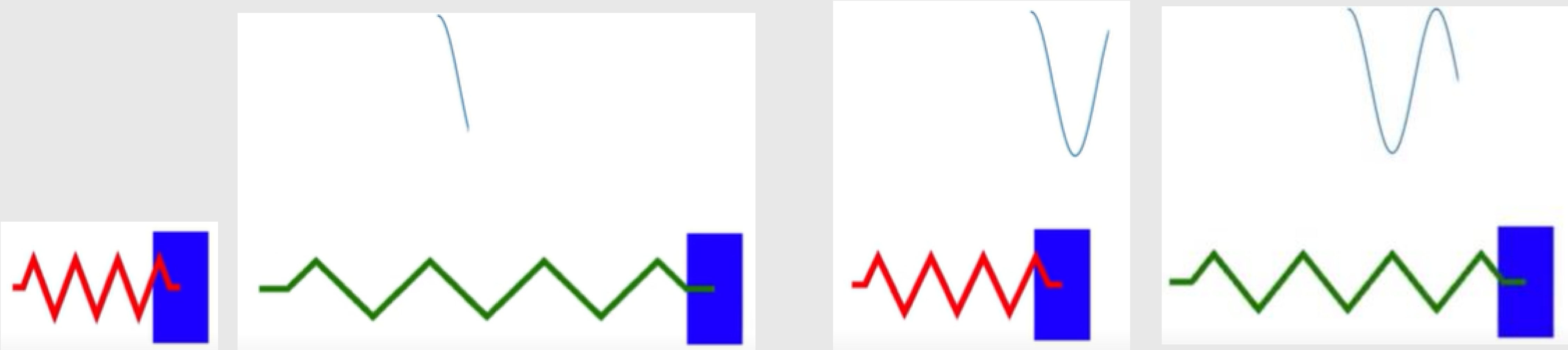
- Son combinaciones lineales de derivadas de diferente orden:

$$a_1 \frac{d^2F}{dt} + a_2 \frac{dF}{dt} + a_3 F = u(t)$$

- Donde F es la salida del Sistema
- U es la entrada del Sistema
- La solución no es un número es una función

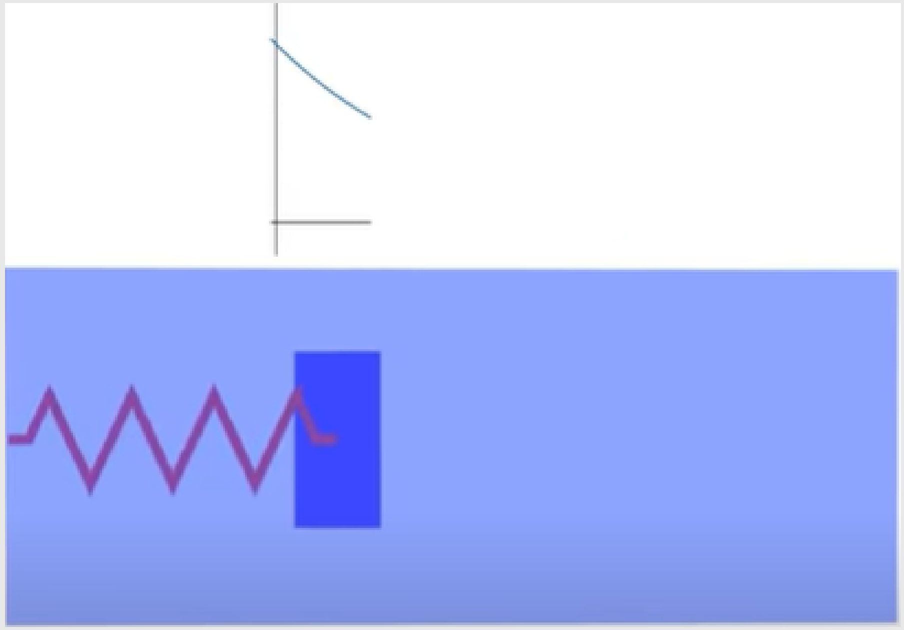
Ejemplo

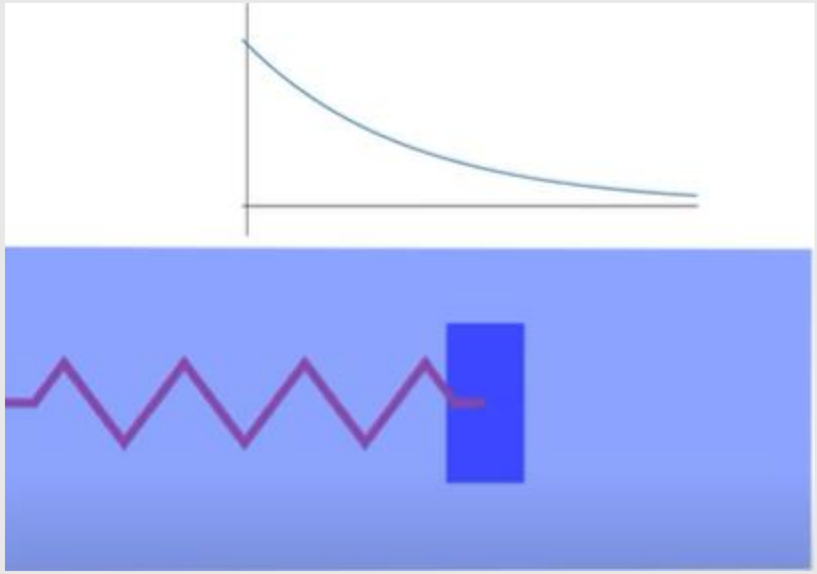
- Comportamiento sinusoidal



Ejemplo

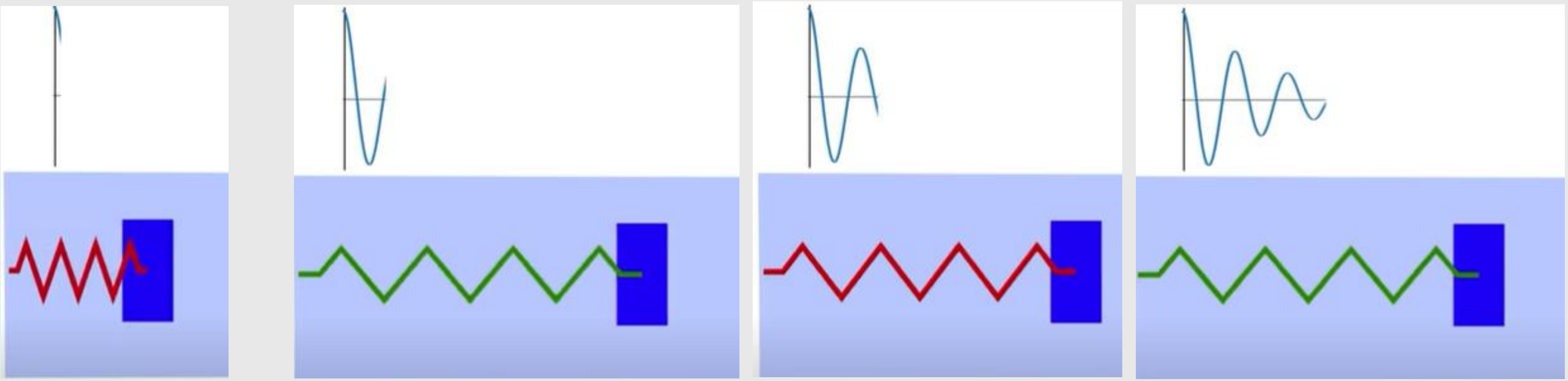
- Decaimiento exponencial





Ejemplo

- Combinación de las dos anteriores



Análisis matemático

- Por ejemplo si se tiene :

$$a_1 \frac{d^2F}{dt} + a_2 \frac{dF}{dt} + a_3 F = u(t)$$

- El análisis es muy difícil ya que para entender el comportamiento es necesario solucionar la ecuación
- Aún con la solución de la ecuación se deben analizar variables como frecuencia de oscilación, decaimiento, tiempos, valores pico, etc.

Ecuaciones Diferenciales

- Una ecuación diferencial ordinaria (EDO) es aquella que contiene una sola variable independiente.

$$A\frac{dh}{dt} = -C_q a\sqrt{2gh}$$

- Una ecuación diferencial parcial (EDP) tendrá dos o más variables independientes.

$$a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

Ecuaciones Diferenciales

- El **orden** de una ecuación diferencial es el orden de la mayor derivada contenida en la ecuación.
- El **grado** de una ecuación diferencial es el exponente de la mayor derivada contenida en la ecuación.
- Una ecuación diferencial **lineal** está formada por la suma de términos lineales.
- Una ecuación diferencial es **homogénea** si la variable dependiente y sus derivadas están en todos y cada uno de los términos de la ecuación; en caso contrario, se dice que la ecuación diferencial es no homogénea.

Ecuaciones Diferenciales

$$\left(A\frac{dh}{dt}\right)^2 = {C_q}^2 a^2\, 2gh$$

- Orden 1, grado 2, No lineal, homogénea.

$$L\frac{d^2t}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}q = v(t)$$

- Orden 2, grado 1, lineal, no homogénea

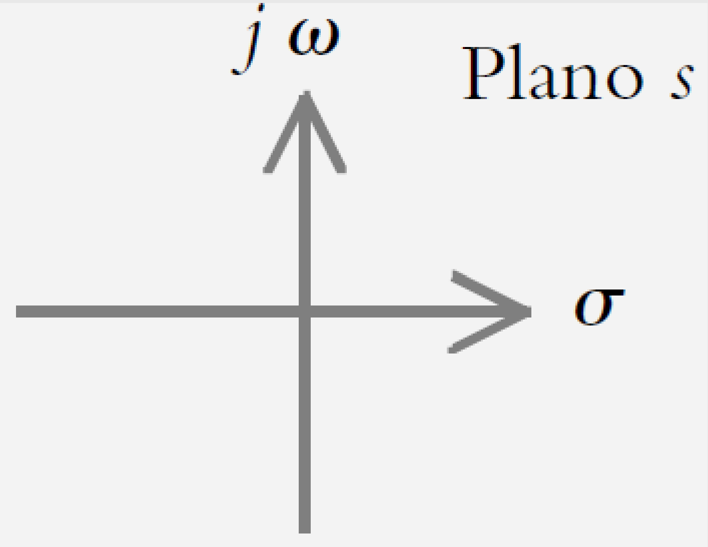
Transformada de LaPlace

Transformada de LaPlace

$$\boldsymbol{x(t) \rightarrow X(s)}$$

$$X(s) = \int_{0}^{\infty} x(t) * e^{-s*t}\, dt$$

$$s = \alpha + j\omega$$



Transformada de LaPlace

- Es un cambio de espacio geométrico del dominio del tiempo hacia el dominio de la frecuencia compleja
- Ecuaciones con derivadas son transformadas en ecuaciones algebráicas
- La transformada de LaPlace muestra las exponenciales y sinusoidales presentes en una señal

Tabla de transformadas

$g(t)$	$G(s)$
$A\,U(t)$	$A\dfrac{1}{s}$
At	$A\dfrac{1}{s^2}$
At^n	$A\dfrac{n!}{s^{n+1}}$
Ae^{-at}	$A\dfrac{1}{s+a}$
Ae^{at}	$A\dfrac{1}{s-a}$
$A\ \text{sen}\ \omega t$	$A\dfrac{\omega}{s^2+\omega^2}$
$A\cos\omega t$	$A\dfrac{s}{s^2+\omega^2}$

Tabla de transformadas

$g(t-T)U(t-T)$	$G(s)e^{-sT}$
$g'(t)$ $g''(t)$	$sG(s)-g(0)$ $s^2G(s)-sg(0)-g'(0)$
$\int_o^t g(u)\,du$	$G(s)\frac{1}{s}$

Transformada de LaPlace

- Transformada de una función:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$$

- Transformada de la derivada:

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = sF(s) - f(0)$$

$$\mathcal{L}\{f''(t)\} = s^2F(s) - sf(0) - f'(0)$$

$$\mathcal{L}\{f^n(t)\} = s^nF(s) - s^{n-1}f(0) - \cdots - sf^{n-1}(0) - f^n(0)$$

- Transformada de la integral

$$\mathcal{L}\left\{\int f(t)\,dt\right\} = \frac{1}{s}\mathrm{F(s)}$$

Ejemplo

- Hallar y(t) para la siguiente ecuación diferencial:

$$\ddot{y}(t) + 3\dot{y}(t) + 2y(t) = 3\dot{u}(t) + 3u(t)$$

- Aplicando transformada de LaPlace:

$$s^2Y(s) - y(0) - y'(0) + 3(sY(s) - y(0)) + 2Y(s) = 3(sU(s) - u(0)) + 3U(s)$$

- Se despeja la variable que se quiere hallar:

$$\mathrm{Y}(s) = \frac{U(s)(3s+3) - 3u(0) + y(0) + y'(0) + 3y(0)}{s^2+3s+2}$$

- Al final se aplica transformada inversa de LaPlace para volver al dominio del tiempo

Transformada Inversa de LaPlace

$$\mathbf{X}(\boldsymbol{s}) \rightarrow \boldsymbol{x}(\boldsymbol{t})$$

$$L^{-1}\{G(s)\} = g(t)$$

$$g(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma - j\pi}^{\sigma + j\pi} G(s) * e^{s*t}\, ds$$

Descomposicion en fracciones parciales

- En ocasiones ocurre que G(s) es de tal forma que la transformada inversa no puede determinarse directamente; sin embargo, puede descomponerse en expresiones más sencillas si aplicamos el método denominado descomposición en fracciones parciales.
- Sea G(s) una función racional y estrictamente propia, lo cual corresponde a que el grado del polinomio del numerador P(s) sea menor al grado del polinomio del denominador Q(s).

Descomposicion en fracciones parciales

- Caso 1. G(s) tiene polos reales distintos:

$$G(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{P(S)}{(s+p_1)(s+p_2)\ldots..(s+p_n)}$$

- La descomposición en fracciones parciales es de la forma:

$$G(s) = \frac{A}{(s+p_1)} + \frac{B}{(s+p_2)} + \cdots.. + \frac{N}{(s+p_n)}$$

- donde A, B, …, N coeficientes por determinar.

Descomposicion en fracciones parciales

- Ejercicio: Obtenga la transformada inversa de

$$G(s) = \frac{2s^2 - 4}{(s+1)(s-2)(s-3)}$$

Descomposicion en fracciones parciales

- Caso 2. G(s) tiene n polos reales repetidos:

$$G(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{P(S)}{(s+p)^n}$$

- La descomposición en fracciones parciales es de la forma:

$$G(s) = \frac{A}{(s+p)} + \frac{B}{(s+p)^2} + \cdots .. + \frac{N}{(s+p)^n}$$

- donde A, B, …, N coeficientes por determinar.

Descomposicion en fracciones parciales

- Ejercicio: Obtenga la transformada inversa de

$$G(s) = \frac{2s^2 + 6s + 5}{(s+2)(s+1)^2}$$

Descomposicion en fracciones parciales

- Caso 3. G(s) tiene polos complejos distintos:

$$G(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{P(S)}{(s^2 + b_1 s + c_1)(s^2 + b_2 s + c_2) \ldots\ldots (s^2 + b_n s + c_n)}$$

- La descomposición en fracciones parciales es de la forma:

$$G(s) = \frac{As + B}{(s^2 + b_1 s + c_1)} + \frac{Cs + D}{(s^2 + b_2 s + c_2)} + \cdots .. + \frac{Ms + N}{(s^2 + b_n s + c_n)}$$

- donde A, B, …, N coeficientes por determinar.

Descomposicion en fracciones parciales

- Ejercicio: Obtenga la transformada inversa de

$$G(s) = \frac{s^2 + 2s + 3}{(s^2 + 2s + 2)(s^2+2s + 5)}$$

Descomposicion en fracciones parciales

- Caso 4. G(s) tiene polos complejos distintos:

$$G(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{P(S)}{(s^2 + b_1 s + c_1)^n}$$

- La descomposición en fracciones parciales es de la forma:

$$G(s) = \frac{As + B}{(s^2 + b_1 s + c_1)} + \frac{Cs + D}{(s^2 + b_2 s + c_2)^2} + \cdots .. + \frac{Ms + N}{(s^2 + b_2 s + c_2)^n}$$

- donde A, B, …, N coeficientes por determinar.

Matlab calcula esto…?

- Veámolo en Matlab!