Ecuaciones Diferenciales

Sustitución Lineal

$$x + y + a = v$$

$$dx + dy = dv$$

$$1 + \frac{dy}{dx} = \frac{dv}{dx}$$

Homogénea

*Nota: Compruebe que al reemplazar las variables con t todas las t son de mismo grado

$$x = yv$$

$$dx = vdy + ydv$$

Exacta

*Nota: $My = Mx$

- $\int f(x, y)dx$
- Diferenciar con dy
- Igualar a dy original
- Encontrar f(y)
- Integrar respecto a y
- Sumar a la anterior

Factor Integrante

Caso 1:

$P(x) = \frac{My - Nx}{N}$ $\qquad$ $P(y) = \frac{Nx - My}{M}$

Caso 2:

$$\frac{dy}{dx} + P(x) = f(x)$$

Solución general:

$$\mu = e^{\int P(x)dx}$$

$$y\mu = \int f(x)\mu \, dx$$

Bernoulli

$$u = y^{1-n}$$

$$\frac{du}{dx} = (1-n)y^{-n}\frac{dy}{dx}$$

- Multiplicar por $(1-n)y^{-n}$
- Hacer sustitución
- Resolver y sustituir de nuevo

Reducción de Orden

$$y_2 = y_1 \int \frac{e^{-\int P(x)dx}}{(y_1)^2} dx$$

*P(x) pegado a y'

Coeficientes Indeterminados

Caso 1:

$$m_1 \neq m_2\text{: } e^{m_1} + e^{m_2}$$

Caso 2:

$$m_1 = m_2\text{: } e^{m_1} + xe^{m_1}$$

Caso 3:

$$\alpha \pm \beta i\text{: } e^{\alpha x}[cos\beta x + sen\beta x]$$

A	A
Ax^2	$Ax^2 + Bx + C$
$A\,cos\beta x$	$A\,cos\beta x + Bsen\,\beta x$
$Ae^{\alpha x}$	$Ae^{\alpha x}$

*Nota:

- Combinar en caso de productos
- Hacer separado en caso de suma
- Multiplicar por x si se repite con solución complementaria

Variación de parámetros

- Solución complementaria
- $W = \begin{matrix} y1 & y2 \\ y'1 & y'2 \end{matrix}$
- $W1 = \begin{matrix} 0 & y2 \\ g(x) & y'2 \end{matrix}$
- $u1 = \int \frac{W1}{W}$
- $y_p = u_1 y_1 + u_2 y_2$

Cauchy Euler

Ecuación auxiliar: $am^2 + (b-a)m + c = 0$

Caso 1:

$$m_1 \neq m_2 \colon x^{m_1} + x^{m_2}$$

Caso 2:

$$m_1 = m_2 \colon x^{m_1} + (mx) x^{m_1}$$

Caso 3:

$$\alpha \pm \beta i \colon x^{\alpha} [\cos(\beta \ln x) + \sin(\beta \ln x)]$$

- Despejar g(x) mediante forma estándar
- Variación de parámetros

No lineales

Sin variable dependiente

$$y' = u$$

$$y'' = u'$$

Sin variable independiente

$$y' = u'$$

$$y'' = u \frac{du}{dy}$$

π INTEGRALES TRIGONOMÉTRICAS

$$\int \operatorname{Sen} u \, du = -\operatorname{Cos} u + C$$

$$\int \operatorname{Cos} u \, du = \operatorname{Sen} u + C$$

$$\int \operatorname{tg} u \, du = \ln|\operatorname{Sec} u| + C$$

$$\int \operatorname{ctg} u \, du = \ln|\operatorname{Sen} u| + C$$

$$\int \operatorname{Sec} u \, du = \ln|\operatorname{Sec} u + \operatorname{tg} u| + C$$

$$\int \operatorname{Csc} u \, du = \ln|\operatorname{Csc} u - \operatorname{ctg} u| + C$$

$$\int \operatorname{Sec}^2 u \, du = \operatorname{tg} u + C$$

$$\int \operatorname{Csc}^2 u \, du = -\operatorname{ctg} u + C$$

$$\int \operatorname{Sec} u \operatorname{tg} u \, du = \operatorname{Sec} u + C$$

$$\int \operatorname{Csc} u \cot u \, du = -\operatorname{Csc} u + C$$

Matemáticas y Ciencias

13. $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \sin^{-1} x + C$

14. $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \tan^{-1} x + C$

15. $\int \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}} dx = \sec^{-1} x + C$

Fórmulas:

1. $\int \frac{dv}{v^2+a^2} = \frac{1}{a} arc \tan \frac{v}{a} + C$
2. $\int \frac{dv}{v^2-a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{v-a}{v+a} \right| + C$
3. $\int \frac{dv}{a^2-v^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+v}{a-v} \right| + C$
4. $\int \frac{dv}{\sqrt{a^2-v^2}} = arc\ sen \frac{v}{a} + C$
5. $\int \frac{dv}{\sqrt{v^2 \pm a^2}} = \ln\left(v + \sqrt{v^2 \pm a^2}\right) + C$
6. $\int \frac{dv}{v\sqrt{v^2-a^2}} = \frac{1}{a} arc\ sec \frac{v}{a} + C$
7. $\int \sqrt{a^2 - v^2}\, dv = \frac{v}{2}\sqrt{a^2-v^2} + \frac{a^2}{2} \text{arc sen} \frac{v}{a} + C$
8. $\int \sqrt{v^2 \pm a^2}\, dv = \frac{v}{2}\sqrt{v^2 \pm a^2} \pm \frac{a^2}{2} \ln\left(v + \sqrt{v^2 \pm a^2}\right) + C$

Fórmulas:

1. $\int \frac{dv}{v^2+a^2} = \frac{1}{a} arc \tan \frac{v}{a} + C$
2. $\int \frac{dv}{v^2-a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{v-a}{v+a} \right| + C$
3. $\int \frac{dv}{a^2-v^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+v}{a-v} \right| + C$
4. $\int \frac{dv}{\sqrt{a^2-v^2}} = arc\ sen \frac{v}{a} + C$
5. $\int \frac{dv}{\sqrt{v^2 \pm a^2}} = \ln\left(v + \sqrt{v^2 \pm a^2}\right) + C$
6. $\int \frac{dv}{v\sqrt{v^2-a^2}} = \frac{1}{a} arc\ sec \frac{v}{a} + C$
7. $\int \sqrt{a^2 - v^2}\, dv = \frac{v}{2}\sqrt{a^2-v^2} + \frac{a^2}{2} \text{arc sen} \frac{v}{a} + C$
8. $\int \sqrt{v^2 \pm a^2}\, dv = \frac{v}{2}\sqrt{v^2 \pm a^2} \pm \frac{a^2}{2} \ln\left(v + \sqrt{v^2 \pm a^2}\right) + C$

$$\int a^x \, dx = \frac{a^x}{\ln|a|} + c$$

SUSTITUCION TRIGONOMETRICA

$$\sqrt{a^2 - x^2} \rightarrow x = a\,sen\,\theta$$
$$\sqrt{a^2 + x^2} \rightarrow x = a\tan\theta$$
$$\sqrt{x^2 - a^2} \rightarrow x = a\sec\theta$$

IDENTIDADES PITAGORICAS

$$sen^2 x = 1 - \cos^2 x$$
$$\sec^2 x = 1 + \tan^2 x$$
$$\csc^2 x = 1 + \cot^2 x$$

Fórmulas de suma y diferencia de ángulo

FUNCIÓN	SUMA
sen	$\operatorname{sen}(\alpha+\beta)=\operatorname{sen}\alpha\cos\beta+\operatorname{sen}\beta\cos$
cos	$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}$
tan	$\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\cdot\tan\beta}$

Fórmulas de transformación de sumas y diferencia

	SUMA	
sen	$\operatorname{sen}\alpha+\operatorname{sen}\beta=2\operatorname{sen}\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$	$\operatorname{sen}\alpha -$
cos	$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$	$\cos\alpha -$
tan	$\tan\alpha+\tan\beta=\dfrac{\operatorname{sen}(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}$	$\tan\alpha -$

Series de Taylor de un PVI

$$y(x) = y(0) + \frac{y'(0)}{1!}x + \frac{y''(0)}{2!}x^2 + \frac{y'''(0)}{3!}x^3 + \frac{y^{(4)}(0)}{4!}$$

(5) $y'' = x + y^2,\quad y(0)=1,\quad y'(0)=1,\quad y''$

$y''' = 1 + 2yy' \rightarrow y'''(0) = 1 + 2y(0)y'(0)$

$y^{(4)} = 0 + 2y'\cdot y' + 2y\cdot y'' \rightarrow y^{(4)}(0) = 2(1)^2$

$y^{(4)} = 2(y')^2 + 2yy'' \rightarrow y^{(5)} = 2(2)y'\cdot y$

$y^{(5)}(0) = 4(1)(1) + 2(1)(1) + 2(1)(3) =$

$$y(x) = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{3}{3!}x^3 + \frac{4}{4!}$$

Soluciones de equilibrio: Derivada = 0

Termino transitorio: $x \rightarrow \infty = 0$

Problemas de Modelado

Población, crecimiento y decrecimiento:
$\frac{dP}{dt} = kP$

Temperatura: $\frac{dT}{dt} = k(T - Tm)$

Circuitos: $L\,\frac{di}{dt} + Ri = E(t)$ $\qquad R\,\frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}q = E(t)$

Resistencia del aire: $m\,\frac{dv}{dt} = mg - kv$

Serie de Taylor de PVI