

# Anualidades Anticipadas y Perpetuidades

## Pagos al inicio y flujos infinitos

Matemáticas Financieras

Valor del Dinero en el Tiempo

Semana 3 | Clase 2 | Duración: 1h 50min

# Contenido de la Sesión

- 1 Introducción
- 2 Anualidades Anticipadas
- 3 Perpetuidades
- 4 Interpretación Visual
- 5 Trucos de Estimación Mental
- 6 Calculadora HP 12C
- 7 Ejercicios Prácticos
- 8 Python con numpy-financial
- 9 Resumen y Tarea

### Sesión 5: Anualidades Ordinarias

Aprendimos a calcular VP y VF de pagos realizados al **final** de cada período:

$$PV = PMT \cdot \frac{1 - (1 + r)^{-n}}{r} \quad y \quad FV = PMT \cdot \frac{(1 + r)^n - 1}{r}$$

## Sesión 5: Anualidades Ordinarias

Aprendimos a calcular VP y VF de pagos realizados al **final** de cada período:

$$PV = PMT \cdot \frac{1 - (1 + r)^{-n}}{r} \quad \text{y} \quad FV = PMT \cdot \frac{(1 + r)^n - 1}{r}$$

Hoy exploramos dos extensiones

- 1 **Anualidades anticipadas:** ¿Y si pagan al **inicio** de cada período?
- 2 **Perpetuidades:** ¿Y si los pagos **nunca terminan**?

Al finalizar esta sesión, serás capaz de:

- 1 Distinguir entre anualidades ordinarias y anticipadas
- 2 Calcular VP y VF de anualidades anticipadas
- 3 Entender y aplicar el concepto de perpetuidad
- 4 Calcular el valor de perpetuidades simples y crecientes
- 5 Aplicar estos conceptos a valuación de pensiones, rentas y dividendos
- 6 Usar la HP 12C en modo BEG para anualidades anticipadas

# Motivación: Diferentes Momentos de Pago

## Anualidad Ordinaria



Pagos al **final**

*Ej: Préstamos, salarios*

## Anualidad Anticipada



Pagos al **inicio**

*Ej: Rentas, seguros*

# Motivación: Diferentes Momentos de Pago

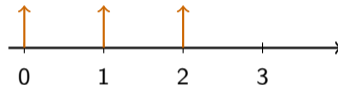
## Anualidad Ordinaria



Pagos al **final**

*Ej: Préstamos, salarios*

## Anualidad Anticipada



Pagos al **inicio**

*Ej: Rentas, seguros*

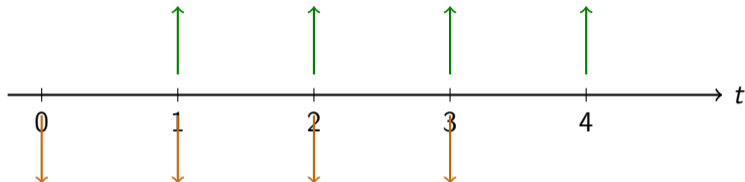
## Pregunta Clave

Si ambas tienen los mismos pagos, ¿cuál vale más?

**Respuesta:** La anticipada, porque cada pago llega un período antes.

# Comparación Visual: Ordinaria vs. Anticipada

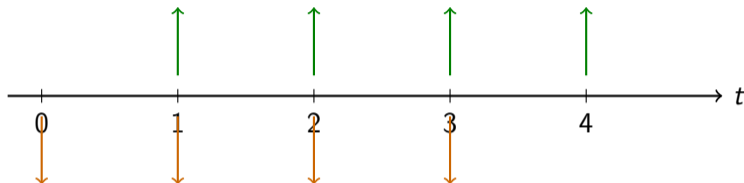
**Ordinaria:**



**Anticipada:**

# Comparación Visual: Ordinaria vs. Anticipada

Ordinaria:



Anticipada:

Observación clave:

- Ambas tienen 4 pagos de  $\$PMT$
- La anticipada “adelanta” todos los pagos un período
- Cada pago de la anticipada tiene un período más para generar intereses (VF) o un período menos de descuento (VP)

## Relación entre Ordinaria y Anticipada

**La anualidad anticipada es la ordinaria multiplicada por  $(1 + r)$ :**

# Relación entre Ordinaria y Anticipada

La anualidad anticipada es la ordinaria multiplicada por  $(1 + r)$ :

## Valor Presente - Anualidad Anticipada

$$PV_{\text{anticipada}} = PV_{\text{ordinaria}} \times (1 + r) = PMT \cdot \frac{1 - (1 + r)^{-n}}{r} \cdot (1 + r)$$

# Relación entre Ordinaria y Anticipada

La anualidad anticipada es la ordinaria multiplicada por  $(1 + r)$ :

## Valor Presente - Anualidad Anticipada

$$PV_{\text{anticipada}} = PV_{\text{ordinaria}} \times (1 + r) = PMT \cdot \frac{1 - (1 + r)^{-n}}{r} \cdot (1 + r)$$

## Valor Futuro - Anualidad Anticipada

$$FV_{\text{anticipada}} = FV_{\text{ordinaria}} \times (1 + r) = PMT \cdot \frac{(1 + r)^n - 1}{r} \cdot (1 + r)$$

# Relación entre Ordinaria y Anticipada

La anualidad anticipada es la ordinaria multiplicada por  $(1 + r)$ :

## Valor Presente - Anualidad Anticipada

$$PV_{\text{anticipada}} = PV_{\text{ordinaria}} \times (1 + r) = PMT \cdot \frac{1 - (1 + r)^{-n}}{r} \cdot (1 + r)$$

## Valor Futuro - Anualidad Anticipada

$$FV_{\text{anticipada}} = FV_{\text{ordinaria}} \times (1 + r) = PMT \cdot \frac{(1 + r)^n - 1}{r} \cdot (1 + r)$$

## Intuición

Cada pago de la anticipada está “un período adelante”, por lo que su valor es  $(1 + r)$  veces mayor

# Derivación Alternativa del VP Anticipado

## Método directo:

El VP de una anualidad anticipada es:

$$PV = PMT + \frac{PMT}{(1+r)^1} + \frac{PMT}{(1+r)^2} + \cdots + \frac{PMT}{(1+r)^{n-1}}$$

# Derivación Alternativa del VP Anticipado

## Método directo:

El VP de una anualidad anticipada es:

$$PV = PMT + \frac{PMT}{(1+r)^1} + \frac{PMT}{(1+r)^2} + \cdots + \frac{PMT}{(1+r)^{n-1}}$$

Comparando con la ordinaria que tiene pagos en períodos 1 a  $n$ :

$$PV_{\text{ord}} = \frac{PMT}{(1+r)^1} + \frac{PMT}{(1+r)^2} + \cdots + \frac{PMT}{(1+r)^n}$$

# Derivación Alternativa del VP Anticipado

## Método directo:

El VP de una anualidad anticipada es:

$$PV = PMT + \frac{PMT}{(1+r)^1} + \frac{PMT}{(1+r)^2} + \cdots + \frac{PMT}{(1+r)^{n-1}}$$

Comparando con la ordinaria que tiene pagos en períodos 1 a  $n$ :

$$PV_{\text{ord}} = \frac{PMT}{(1+r)^1} + \frac{PMT}{(1+r)^2} + \cdots + \frac{PMT}{(1+r)^n}$$

La anticipada tiene:

- Un pago extra en  $t = 0$  (sin descuento):  $+PMT$
- Pero no tiene el pago en  $t = n$ :  $-PMT/(1+r)^n$

## Ejemplo: Renta de Departamento

### Problema

Rentas un departamento por \$15,000 mensuales, pagando al inicio de cada mes. Si el contrato es por 12 meses y la tasa es 1% mensual, ¿cuál es el valor presente del contrato?

## Ejemplo: Renta de Departamento

### Problema

Rentas un departamento por \$15,000 mensuales, pagando al inicio de cada mes. Si el contrato es por 12 meses y la tasa es 1% mensual, ¿cuál es el valor presente del contrato?

**Solución (método del factor):**

$$PV_{\text{ord}} = 15,000 \cdot \frac{1 - (1.01)^{-12}}{0.01} = 15,000 \times 11.2551 = \$168,826$$

$$PV_{\text{ant}} = PV_{\text{ord}} \times (1.01) = 168,826 \times 1.01 = \$170,514$$

## Ejemplo: Renta de Departamento

### Problema

Rentas un departamento por \$15,000 mensuales, pagando al inicio de cada mes. Si el contrato es por 12 meses y la tasa es 1% mensual, ¿cuál es el valor presente del contrato?

**Solución (método del factor):**

$$PV_{\text{ord}} = 15,000 \cdot \frac{1 - (1.01)^{-12}}{0.01} = 15,000 \times 11.2551 = \$168,826$$

$$PV_{\text{ant}} = PV_{\text{ord}} \times (1.01) = 168,826 \times 1.01 = \$170,514$$

**Diferencia:**  $\$170,514 - \$168,826 = \$1,688$

Esto equivale a 1% de \$168,826.

# ¿Qué es una Perpetuidad?

## Definición

Una **perpetuidad** es una anualidad que continúa **indefinidamente**; es decir, los pagos nunca terminan ( $n \rightarrow \infty$ ).

# ¿Qué es una Perpetuidad?

## Definición

Una **perpetuidad** es una anualidad que continúa **indefinidamente**; es decir, los pagos nunca terminan ( $n \rightarrow \infty$ ).

## ¿Existe en la práctica?

- **Consols británicos:** Bonos emitidos por el gobierno británico que pagan cupones perpetuos (algunos desde el siglo XVIII)
- **Acciones preferentes:** Dividendos fijos sin fecha de vencimiento
- **Dotaciones universitarias:** Fondos que generan ingresos perpetuos
- **Aproximación:** Cualquier flujo de muy largo plazo (50+ años) puede modelarse como perpetuidad

# Derivación del VP de una Perpetuidad

Partimos de la fórmula de anualidad ordinaria:

$$PV = PMT \cdot \frac{1 - (1 + r)^{-n}}{r}$$

# Derivación del VP de una Perpetuidad

Partimos de la fórmula de anualidad ordinaria:

$$PV = PMT \cdot \frac{1 - (1 + r)^{-n}}{r}$$

Cuando  $n \rightarrow \infty$ :

- $(1 + r)^{-n} \rightarrow 0$  (para  $r > 0$ )

# Derivación del VP de una Perpetuidad

Partimos de la fórmula de anualidad ordinaria:

$$PV = PMT \cdot \frac{1 - (1 + r)^{-n}}{r}$$

Cuando  $n \rightarrow \infty$ :

- $(1 + r)^{-n} \rightarrow 0$  (para  $r > 0$ )

Por lo tanto:

$$PV = PMT \cdot \frac{1 - 0}{r} = \frac{PMT}{r}$$

# Derivación del VP de una Perpetuidad

Partimos de la fórmula de anualidad ordinaria:

$$PV = PMT \cdot \frac{1 - (1 + r)^{-n}}{r}$$

Cuando  $n \rightarrow \infty$ :

- $(1 + r)^{-n} \rightarrow 0$  (para  $r > 0$ )

Por lo tanto:

$$PV = PMT \cdot \frac{1 - 0}{r} = \frac{PMT}{r}$$

## Valor Presente de una Perpetuidad Simple

$$PV = \frac{PMT}{r}$$

## Interpretación Financiera

Si inviertes un capital  $PV$  a tasa  $r$ , los intereses anuales son:

$$\text{Intereses} = PV \times r$$

Si solo retiras los intereses cada año, el capital permanece intacto. Por lo tanto, puedes retirar  $PMT = PV \times r$  **para siempre**.

# Intuición de la Perpetuidad

## Interpretación Financiera

Si inviertes un capital  $PV$  a tasa  $r$ , los intereses anuales son:

$$\text{Intereses} = PV \times r$$

Si solo retiras los intereses cada año, el capital permanece intacto. Por lo tanto, puedes retirar  $PMT = PV \times r$  **para siempre**.

Despejando:

$$PV = \frac{PMT}{r}$$

# Intuición de la Perpetuidad

## Interpretación Financiera

Si inviertes un capital  $PV$  a tasa  $r$ , los intereses anuales son:

$$\text{Intereses} = PV \times r$$

Si solo retiras los intereses cada año, el capital permanece intacto. Por lo tanto, puedes retirar  $PMT = PV \times r$  **para siempre**.

Despejando:

$$PV = \frac{PMT}{r}$$

## Ejemplo

¿Cuánto necesitas invertir al 5% para recibir \$50,000 anuales perpetuos?

$$PV = 50,000 / 0.05 = \$1,000,000$$

# Perpetuidad Creciente

## Definición

Una **perpetuidad creciente** es aquella donde los pagos crecen a una tasa constante  $g$  cada período.

## Definición

Una **perpetuidad creciente** es aquella donde los pagos crecen a una tasa constante  $g$  cada período.

## Flujos:

- Período 1:  $PMT$
- Período 2:  $PMT(1 + g)$
- Período 3:  $PMT(1 + g)^2$
- Y así sucesivamente...

# Perpetuidad Creciente

## Definición

Una **perpetuidad creciente** es aquella donde los pagos crecen a una tasa constante  $g$  cada período.

## Flujos:

- Período 1:  $PMT$
- Período 2:  $PMT(1 + g)$
- Período 3:  $PMT(1 + g)^2$
- Y así sucesivamente...

## Valor Presente de Perpetuidad Creciente (Modelo de Gordon)

$$PV = \frac{PMT}{r - g} \quad \text{donde } r > g$$

# Perpetuidad Creciente

## Definición

Una **perpetuidad creciente** es aquella donde los pagos crecen a una tasa constante  $g$  cada período.

## Flujos:

- Período 1:  $PMT$
- Período 2:  $PMT(1 + g)$
- Período 3:  $PMT(1 + g)^2$
- Y así sucesivamente...

## Valor Presente de Perpetuidad Creciente (Modelo de Gordon)

$$PV = \frac{PMT}{r - g} \quad \text{donde } r > g$$

# Derivación de la Perpetuidad Creciente

**Serie de flujos:**

$$PV = \frac{PMT}{1+r} + \frac{PMT(1+g)}{(1+r)^2} + \frac{PMT(1+g)^2}{(1+r)^3} + \dots$$

# Derivación de la Perpetuidad Creciente

**Serie de flujos:**

$$PV = \frac{PMT}{1+r} + \frac{PMT(1+g)}{(1+r)^2} + \frac{PMT(1+g)^2}{(1+r)^3} + \dots$$

**Factorizando:**

$$PV = \frac{PMT}{1+r} \left[ 1 + \frac{1+g}{1+r} + \left( \frac{1+g}{1+r} \right)^2 + \dots \right]$$

# Derivación de la Perpetuidad Creciente

Serie de flujos:

$$PV = \frac{PMT}{1+r} + \frac{PMT(1+g)}{(1+r)^2} + \frac{PMT(1+g)^2}{(1+r)^3} + \dots$$

Factorizando:

$$PV = \frac{PMT}{1+r} \left[ 1 + \frac{1+g}{1+r} + \left( \frac{1+g}{1+r} \right)^2 + \dots \right]$$

Si  $r > g$ , entonces  $\frac{1+g}{1+r} < 1$  y la serie geométrica converge:

$$PV = \frac{PMT}{1+r} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1+g}{1+r}} = \frac{PMT}{1+r} \cdot \frac{1+r}{r-g} = \frac{PMT}{r-g}$$

## Ejemplo: Valuación de Acciones (Modelo de Gordon)

### Problema

Una acción paga un dividendo de \$5 por acción. Se espera que los dividendos crezcan 3% anual perpetuamente. Si la tasa requerida es 10%, ¿cuál es el precio justo de la acción?

## Ejemplo: Valuación de Acciones (Modelo de Gordon)

### Problema

Una acción paga un dividendo de \$5 por acción. Se espera que los dividendos crezcan 3% anual perpetuamente. Si la tasa requerida es 10%, ¿cuál es el precio justo de la acción?

**Nota:** El primer dividendo  $D_1$  será dentro de un año:  $D_1 = 5$

## Ejemplo: Valuación de Acciones (Modelo de Gordon)

### Problema

Una acción paga un dividendo de \$5 por acción. Se espera que los dividendos crezcan 3% anual perpetuamente. Si la tasa requerida es 10%, ¿cuál es el precio justo de la acción?

**Nota:** El primer dividendo  $D_1$  será dentro de un año:  $D_1 = 5$

**Solución:**

$$P_0 = \frac{D_1}{r - g} = \frac{5}{0.10 - 0.03} = \frac{5}{0.07} = \$71.43$$

## Ejemplo: Valuación de Acciones (Modelo de Gordon)

### Problema

Una acción paga un dividendo de \$5 por acción. Se espera que los dividendos crezcan 3% anual perpetuamente. Si la tasa requerida es 10%, ¿cuál es el precio justo de la acción?

**Nota:** El primer dividendo  $D_1$  será dentro de un año:  $D_1 = 5$

**Solución:**

$$P_0 = \frac{D_1}{r - g} = \frac{5}{0.10 - 0.03} = \frac{5}{0.07} = \$71.43$$

### Interpretación

Si compras la acción a \$71.43, obtendrás un rendimiento del 10% anual (considerando dividendos + apreciación).

¿Qué pasa si cambia la tasa de crecimiento?

$g$	$r - g$	$P_0 = D_1 / (r - g)$
1%	9%	\$55.56
2%	8%	\$62.50
3%	7%	\$71.43
4%	6%	\$83.33
5%	5%	\$100.00

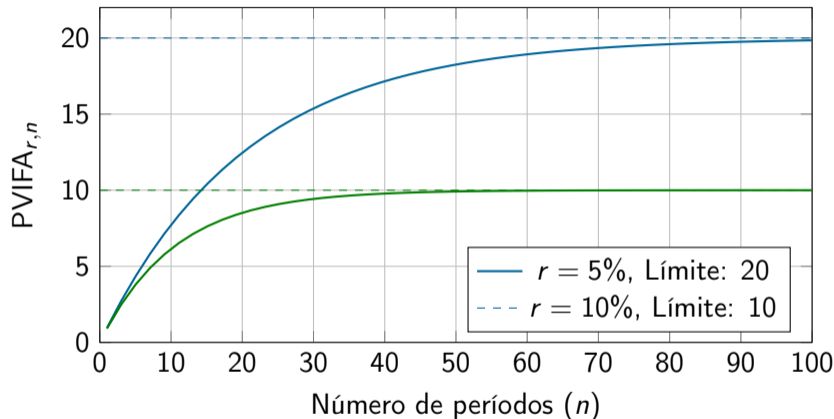
¿Qué pasa si cambia la tasa de crecimiento?

$g$	$r - g$	$P_0 = D_1 / (r - g)$
1%	9%	\$55.56
2%	8%	\$62.50
3%	7%	\$71.43
4%	6%	\$83.33
5%	5%	\$100.00

## Observación importante

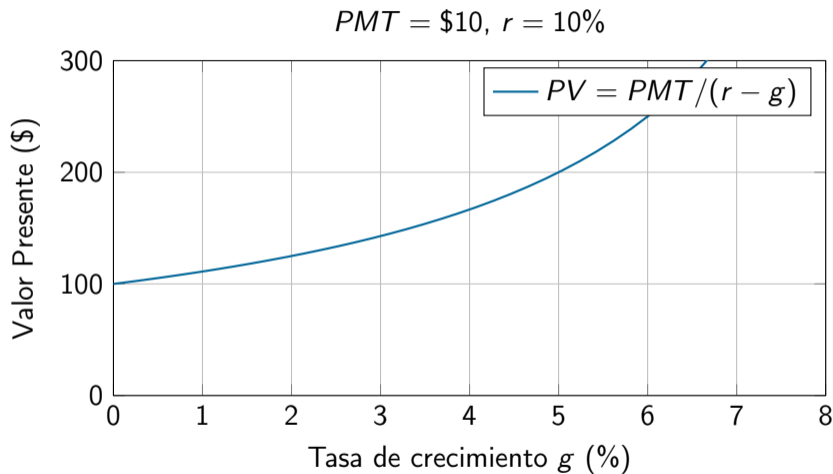
El precio es muy sensible a pequeños cambios en  $g$ . Esta es una debilidad del modelo: pequeños errores en la estimación de  $g$  generan grandes errores en la valuación.

# Convergencia de Anualidad a Perpetuidad



El PVIFA converge al límite  $1/r$  (perpetuidad).

# Perpetuidad Simple vs. Creciente



El valor explota cuando  $g \rightarrow r$ .

# Perpetuidad: Múltiplos Rápidos

## Regla del Múltiplo

El VP de una perpetuidad es el pago multiplicado por  $1/r$ :

$$PV = PMT \times \text{Múltiplo}$$

# Perpetuidad: Múltiplos Rápidos

## Regla del Múltiplo

El VP de una perpetuidad es el pago multiplicado por  $1/r$ :

$$PV = PMT \times \text{Múltiplo}$$

Tasa	Múltiplo
5%	20x
8%	12.5x
10%	10x
12.5%	8x
20%	5x

# Perpetuidad: Múltiplos Rápidos

## Regla del Múltiplo

El VP de una perpetuidad es el pago multiplicado por  $1/r$ :

$$PV = PMT \times \text{Múltiplo}$$

Tasa	Múltiplo
5%	20x
8%	12.5x
10%	10x
12.5%	8x
20%	5x

## Ejemplo

# Anticipada: Factor de Ajuste

## Regla del $(1 + r)$

Para convertir cualquier cálculo de ordinaria a anticipada:

$$\text{Valor anticipada} = \text{Valor ordinaria} \times (1 + r)$$

# Anticipada: Factor de Ajuste

## Regla del $(1 + r)$

Para convertir cualquier cálculo de ordinaria a anticipada:

$$\text{Valor anticipada} = \text{Valor ordinaria} \times (1 + r)$$

### Ejemplo mental:

Si una anualidad ordinaria vale \$100,000 al 8%:

La misma anualidad anticipada vale:  $100,000 \times 1.08 = \$108,000$

# Anticipada: Factor de Ajuste

## Regla del $(1 + r)$

Para convertir cualquier cálculo de ordinaria a anticipada:

$$\text{Valor anticipada} = \text{Valor ordinaria} \times (1 + r)$$

### Ejemplo mental:

Si una anualidad ordinaria vale \$100,000 al 8%:

La misma anualidad anticipada vale:  $100,000 \times 1.08 = \$108,000$

## Aproximación adicional

Para tasas pequeñas ( $r < 10\%$ ), el ajuste es aproximadamente  $+r\%$  del valor ordinario.

Ej: Al 5%, la anticipada vale  $\approx 5\%$  más que la ordinaria.

## Impacto del Crecimiento

Cada punto porcentual de crecimiento aumenta el múltiplo significativamente:

$g$	$r - g$ (si $r = 10\%$ )	Múltiplo
0%	10%	10x
2%	8%	12.5x
4%	6%	16.7x
5%	5%	20x

## Impacto del Crecimiento

Cada punto porcentual de crecimiento aumenta el múltiplo significativamente:

$g$	$r - g$ (si $r = 10\%$ )	Múltiplo
0%	10%	10x
2%	8%	12.5x
4%	6%	16.7x
5%	5%	20x

### Regla práctica:

Si  $g$  es la mitad de  $r$ , el múltiplo se duplica.

(De 10x a 20x cuando  $g$  pasa de 0% a 5%, con  $r = 10\%$ )

## HP 12C: Modo BEGIN para Anticipadas

Teclas	Función
g END	Modo anualidad ordinaria (pagos al final)
g BEG	Modo anualidad anticipada (pagos al inicio)

## HP 12C: Modo BEGIN para Anticipadas

Teclas	Función
g END	Modo anualidad ordinaria (pagos al final)
g BEG	Modo anualidad anticipada (pagos al inicio)

### Indicador visual

Cuando está en modo BEG, aparece “BEGIN” en la parte inferior del display. Si no aparece, está en modo END (ordinaria).

## HP 12C: Modo BEGIN para Anticipadas

Teclas	Función
<code>g</code> <code>END</code>	Modo anualidad ordinaria (pagos al final)
<code>g</code> <code>BEG</code>	Modo anualidad anticipada (pagos al inicio)

### Indicador visual

Cuando está en modo BEG, aparece “BEGIN” en la parte inferior del display. Si no aparece, está en modo END (ordinaria).

### Consejo

Siempre verifica en qué modo estás antes de calcular. El modo persiste hasta que lo cambies.

## HP 12C: Ejemplo - Renta Anticipada

### Problema

Renta mensual de \$12,000, contrato de 24 meses, 0.8% mensual. ¿Cuál es el VP si se paga al inicio de cada mes?

## HP 12C: Ejemplo - Renta Anticipada

### Problema

Renta mensual de \$12,000, contrato de 24 meses, 0.8% mensual. ¿Cuál es el VP si se paga al inicio de cada mes?

Teclas	Display	Descripción
f CLX	0.00	Limpiar
g BEG	BEGIN	Modo anticipada
12000 PMT	12,000.00	Pago mensual
24 n	24.00	24 meses
0.8 i	0.80	0.8% mensual
0 FV	0.00	Sin valor final
PV	<b>-264,982.78</b>	VP anticipada

## HP 12C: Ejemplo - Renta Anticipada

### Problema

Renta mensual de \$12,000, contrato de 24 meses, 0.8% mensual. ¿Cuál es el VP si se paga al inicio de cada mes?

Teclas	Display	Descripción
f CLX	0.00	Limpiar
g BEG	BEGIN	Modo anticipada
12000 PMT	12,000.00	Pago mensual
24 n	24.00	24 meses
0.8 i	0.80	0.8% mensual
0 FV	0.00	Sin valor final
PV	<b>-264,982.78</b>	VP anticipada

**Comparación:** En modo END sería \$262,887.72 (1.8% menos).

## HP 12C: Ejemplo - Fondo de Retiro Anticipado

### Problema

Depositas \$5,000 mensuales al inicio de cada mes por 20 años al 0.6% mensual. ¿Cuánto acumulas?

## HP 12C: Ejemplo - Fondo de Retiro Anticipado

### Problema

Depositas \$5,000 mensuales al inicio de cada mes por 20 años al 0.6% mensual. ¿Cuánto acumulas?

Teclas	Display	Descripción
f CLX	0.00	Limpiar
g BEG	BEGIN	Modo anticipada
5000 CHS PMT	-5,000.00	Depósito mensual
240 n	240.00	240 meses
0.6 i	0.60	0.6% mensual
0 PV	0.00	Sin inversión inicial
FV	<b>2,357,892.50</b>	Valor futuro

## HP 12C: Ejemplo - Fondo de Retiro Anticipado

### Problema

Depositas \$5,000 mensuales al inicio de cada mes por 20 años al 0.6% mensual. ¿Cuánto acumulas?

Teclas	Display	Descripción
f CLX	0.00	Limpiar
g BEG	BEGIN	Modo anticipada
5000 CHS PMT	-5,000.00	Depósito mensual
240 n	240.00	240 meses
0.6 i	0.60	0.6% mensual
0 PV	0.00	Sin inversión inicial
FV	<b>2,357,892.50</b>	Valor futuro

Depositaste:  $5,000 \times 240 = \$1,200,000$ . Ganaste \$1,157,892 en intereses.

## HP 12C: Perpetuidades (Cálculo Manual)

La HP 12C no tiene función de perpetuidad, pero es fácil calcular:

## HP 12C: Perpetuidades (Cálculo Manual)

La HP 12C no tiene función de perpetuidad, pero es fácil calcular:

Perpetuidad Simple:  $PV = PMT/r$

Teclas	Display	Descripción
50000 ENTER	50,000	PMT
0.08 ÷	<b>625,000</b>	$PV = PMT/r$

## HP 12C: Perpetuidades (Cálculo Manual)

La HP 12C no tiene función de perpetuidad, pero es fácil calcular:

Perpetuidad Simple:  $PV = PMT/r$

Teclas	Display	Descripción
50000 ENTER	50,000	PMT
0.08 ÷	<b>625,000</b>	$PV = PMT/r$

Perpetuidad Creciente:  $PV = PMT/(r - g)$

Teclas	Display	Descripción
50000 ENTER	50,000	PMT
0.08 ENTER 0.03 -	0.05	$r - g$
÷	<b>1,000,000</b>	PV

# Ejercicio 1: Arrendamiento

## Problema

Un arrendamiento requiere pagos de \$8,000 al inicio de cada mes por 36 meses. Si la tasa es 1.2% mensual, ¿cuál es el valor presente del arrendamiento?

# Ejercicio 1: Arrendamiento

## Problema

Un arrendamiento requiere pagos de \$8,000 al inicio de cada mes por 36 meses. Si la tasa es 1.2% mensual, ¿cuál es el valor presente del arrendamiento?

## Solución:

Primero, VP ordinario:

$$PV_{\text{ord}} = 8,000 \cdot \frac{1 - (1.012)^{-36}}{0.012} = 8,000 \times 28.8473 = \$230,778$$

## Ejercicio 1: Arrendamiento

### Problema

Un arrendamiento requiere pagos de \$8,000 al inicio de cada mes por 36 meses. Si la tasa es 1.2% mensual, ¿cuál es el valor presente del arrendamiento?

### Solución:

Primero, VP ordinario:

$$PV_{\text{ord}} = 8,000 \cdot \frac{1 - (1.012)^{-36}}{0.012} = 8,000 \times 28.8473 = \$230,778$$

Luego, ajustar a anticipada:

$$PV_{\text{ant}} = 230,778 \times 1.012 = \$233,547$$

## Ejercicio 1: Arrendamiento

### Problema

Un arrendamiento requiere pagos de \$8,000 al inicio de cada mes por 36 meses. Si la tasa es 1.2% mensual, ¿cuál es el valor presente del arrendamiento?

### Solución:

Primero, VP ordinario:

$$PV_{\text{ord}} = 8,000 \cdot \frac{1 - (1.012)^{-36}}{0.012} = 8,000 \times 28.8473 = \$230,778$$

Luego, ajustar a anticipada:

$$PV_{\text{ant}} = 230,778 \times 1.012 = \$233,547$$

**Diferencia:** La anticipada vale \$2,769 más (1.2% más).

## Ejercicio 2: Perpetuidad Simple

### Problema

Una fundación quiere establecer una beca perpetua de \$100,000 anuales. Si la tasa de rendimiento esperada es 6%, ¿cuánto debe donar hoy?

## Ejercicio 2: Perpetuidad Simple

### Problema

Una fundación quiere establecer una beca perpetua de \$100,000 anuales. Si la tasa de rendimiento esperada es 6%, ¿cuánto debe donar hoy?

### Solución:

$$PV = \frac{PMT}{r} = \frac{100,000}{0.06} = \$1,666,667$$

## Ejercicio 2: Perpetuidad Simple

### Problema

Una fundación quiere establecer una beca perpetua de \$100,000 anuales. Si la tasa de rendimiento esperada es 6%, ¿cuánto debe donar hoy?

### Solución:

$$PV = \frac{PMT}{r} = \frac{100,000}{0.06} = \$1,666,667$$

### Verificación

Con \$1,666,667 al 6%:

Intereses anuales =  $1,666,667 \times 0.06 = \$100,000$  ✓

El capital permanece intacto.

## Ejercicio 3: Perpetuidad Creciente

### Problema

Un bono perpetuo paga un cupón de \$80 el próximo año, y los cupones crecerán 2% anual indefinidamente. Si la tasa requerida es 9%, ¿cuál es el precio del bono?

## Ejercicio 3: Perpetuidad Creciente

### Problema

Un bono perpetuo paga un cupón de \$80 el próximo año, y los cupones crecerán 2% anual indefinidamente. Si la tasa requerida es 9%, ¿cuál es el precio del bono?

### Solución:

$$PV = \frac{C_1}{r - g} = \frac{80}{0.09 - 0.02} = \frac{80}{0.07} = \$1,142.86$$

## Ejercicio 3: Perpetuidad Creciente

### Problema

Un bono perpetuo paga un cupón de \$80 el próximo año, y los cupones crecerán 2% anual indefinidamente. Si la tasa requerida es 9%, ¿cuál es el precio del bono?

### Solución:

$$PV = \frac{C_1}{r - g} = \frac{80}{0.09 - 0.02} = \frac{80}{0.07} = \$1,142.86$$

### Comparación con perpetuidad simple:

Sin crecimiento:  $PV = 80/0.09 = \$888.89$

El crecimiento del 2% agrega \$253.97 de valor (29% más).

## Ejercicio 4: Valuación de Empresa

### Problema

Una empresa genera flujos de caja de \$500,000 anuales, creciendo 4% perpetuamente. Si el costo de capital es 12%, ¿cuál es el valor de la empresa?

## Ejercicio 4: Valuación de Empresa

### Problema

Una empresa genera flujos de caja de \$500,000 anuales, creciendo 4% perpetuamente. Si el costo de capital es 12%, ¿cuál es el valor de la empresa?

**Solución (Modelo de Gordon para empresas):**

$$V_0 = \frac{CF_1}{r - g} = \frac{500,000}{0.12 - 0.04} = \frac{500,000}{0.08} = \$6,250,000$$

## Ejercicio 4: Valuación de Empresa

### Problema

Una empresa genera flujos de caja de \$500,000 anuales, creciendo 4% perpetuamente. Si el costo de capital es 12%, ¿cuál es el valor de la empresa?

**Solución (Modelo de Gordon para empresas):**

$$V_0 = \frac{CF_1}{r - g} = \frac{500,000}{0.12 - 0.04} = \frac{500,000}{0.08} = \$6,250,000$$

### Sensibilidad

Si  $g$  fuera 5%:  $V = 500,000/0.07 = \$7,142,857$  (+14%)

Si  $g$  fuera 3%:  $V = 500,000/0.09 = \$5,555,556$  (-11%)

## Ejercicio 5: Pensión Anticipada

### Problema

Un plan de pensión pagará \$20,000 mensuales al inicio de cada mes por 25 años. Si la tasa es 0.5% mensual, ¿cuál es el valor actual de la pensión?

## Ejercicio 5: Pensión Anticipada

### Problema

Un plan de pensión pagará \$20,000 mensuales al inicio de cada mes por 25 años. Si la tasa es 0.5% mensual, ¿cuál es el valor actual de la pensión?

**Datos:**  $n = 300$  meses,  $r = 0.5\%$

**Solución:**

$$PV_{\text{ord}} = 20,000 \cdot \frac{1 - (1.005)^{-300}}{0.005} = 20,000 \times 155.207 = \$3,104,140$$

$$PV_{\text{ant}} = 3,104,140 \times 1.005 = \$3,119,661$$

## Ejercicio 5: Pensión Anticipada

### Problema

Un plan de pensión pagará \$20,000 mensuales al inicio de cada mes por 25 años. Si la tasa es 0.5% mensual, ¿cuál es el valor actual de la pensión?

**Datos:**  $n = 300$  meses,  $r = 0.5\%$

**Solución:**

$$PV_{\text{ord}} = 20,000 \cdot \frac{1 - (1.005)^{-300}}{0.005} = 20,000 \times 155.207 = \$3,104,140$$

$$PV_{\text{ant}} = 3,104,140 \times 1.005 = \$3,119,661$$

La pensión anticipada vale \$3,119,661.

# Python: Anualidades Anticipadas

```
import numpy_financial as npf

# Anualidad anticipada con numpy-financial
# Usar parametro 'when' = 'begin' (o 1)

pmt = 12000
n = 24
r = 0.008

# Anualidad ordinaria
pv_ord = npf.pv(rate=r, nper=n, pmt=pmt, fv=0, when='end')
print(f"VP Ordinaria: ${-pv_ord:,.2f}")

# Anualidad anticipada
pv_ant = npf.pv(rate=r, nper=n, pmt=pmt, fv=0, when='begin')
print(f"VP Anticipada: ${-pv_ant:,.2f}")

# Verificacion: diferencia es factor (1+r)
print(f"Ratio: {-pv_ant/-pv_ord:.4f}")
```

# Python: Perpetuidades

```
def perpetuidad_simple(pmt, r):  
    """Valor presente de perpetuidad simple."""  
    return pmt / r  
  
def perpetuidad_creciente(pmt, r, g):  
    """Valor presente de perpetuidad creciente (Gordon)."""  
    if r <= g:  
        raise ValueError("r debe ser mayor que g")  
    return pmt / (r - g)  
  
# Ejemplos  
print("Perpetuidad Simple:")  
print(f"    $50,000/año al 8%: ${perpetuidad_simple(50000, 0.08):,.2f}")  
  
print("\nPerpetuidad Creciente:")  
print(f"    $50,000 inicial, g=3%, r=8%: ${perpetuidad_creciente(50000, 0.08,  
    0.03):,.2f}")  
  
# Sensibilidad
```

# Python: Gráfica Comparativa

```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np

pmt = 10000
r = 0.10
periodos = np.arange(1, 101)

# PVIFA ordinaria
pvifa_ord = [(1-(1+r)**(-n))/r for n in periodos]

# PVIFA anticipada
pvifa_ant = [pv * (1+r) for pv in pvifa_ord]

# Perpetuidad
perp = 1/r

plt.figure(figsize=(10, 6))
plt.plot(periodos, pvifa_ord, 'b-', label='Ordinaria')
plt.plot(periodos, pvifa_ant, 'g-', label='Anticipada')
```

## Anualidad Anticipada

$$PV_{\text{ant}} = PV_{\text{ord}} \times (1 + r)$$

$$FV_{\text{ant}} = FV_{\text{ord}} \times (1 + r)$$

## Perpetuidad Simple

$$PV = \frac{PMT}{r}$$

## Perpetuidad Creciente

$$PV = \frac{PMT}{r - g} \quad (r > g)$$

## Múltiplos rápidos

$$5\% \rightarrow 20\times$$

$$10\% \rightarrow 10\times$$

- ➊ **Anualidad anticipada:** pagos al inicio, vale  $(1 + r)$  más
- ➋ **Perpetuidad:** anualidad infinita,  $PV = PMT/r$
- ➌ **Perpetuidad creciente:** considera crecimiento,  $PV = PMT/(r - g)$
- ➍ El **Modelo de Gordon** es una perpetuidad creciente
- ➎ La perpetuidad es el límite de la anualidad cuando  $n \rightarrow \infty$
- ➏ HP 12C: usar  $g$  BEG para anticipadas
- ➐ El valor es muy sensible a  $g$  cuando  $g$  se acerca a  $r$

## 1 Ejercicios HP 12C:

- VP de renta de \$18,000 mensual anticipada, 36 meses, 1%
- VF de depósitos de \$2,000 al inicio del mes, 60 meses, 0.7%

## 2 Perpetuidad: ¿Cuánto debes invertir al 7% para recibir \$80,000 anuales perpetuos?

## 3 Modelo de Gordon: Una acción pagará \$3 de dividendo el próximo año. Si los dividendos crecen 4% y la tasa requerida es 11%, ¿cuál es el precio?

## 4 Python: Grafica el valor de una perpetuidad creciente para $g$ variando de 0% a 9%, con $r = 10\%$ y $PMT = \$1,000$ .

# ¿Preguntas?

Próxima Sesión:  
**Amortización de Préstamos**

Semana 4, Clase 1