

Anualidades Anticipadas y Perpetuidades

Pagos al inicio y flujos infinitos

Matemáticas Financieras

Valor del Dinero en el Tiempo

Semana 3 | Clase 2 | Duración: 1h 50min

Contenido de la Sesión

- 1 Introducción
- 2 Anualidades Anticipadas
- 3 Perpetuidades
- 4 Interpretación Visual
- 5 Trucos de Estimación Mental
- 6 Calculadora HP 12C
- 7 Ejercicios Prácticos
- 8 Python con numpy-financial
- 9 Resumen y Tarea

Sesión 5: Anualidades Ordinarias

Aprendimos a calcular VP y VF de pagos realizados al **final** de cada período:

$$PV = PMT \cdot \frac{1 - (1 + r)^{-n}}{r} \quad \text{y} \quad FV = PMT \cdot \frac{(1 + r)^n - 1}{r}$$

Conexión con la Sesión Anterior

Sesión 5: Anualidades Ordinarias

Aprendimos a calcular VP y VF de pagos realizados al **final** de cada período:

$$PV = PMT \cdot \frac{1 - (1 + r)^{-n}}{r} \quad \text{y} \quad FV = PMT \cdot \frac{(1 + r)^n - 1}{r}$$

Hoy exploramos dos extensiones

- ① **Anualidades anticipadas:** ¿Y si pagan al **inicio** de cada período?
- ② **Perpetuidades:** ¿Y si los pagos **nunca terminan**?

Objetivos de Aprendizaje

Al finalizar esta sesión, serás capaz de:

- ① Distinguir entre anualidades ordinarias y anticipadas
- ② Calcular VP y VF de anualidades anticipadas
- ③ Entender y aplicar el concepto de perpetuidad
- ④ Calcular el valor de perpetuidades simples y crecientes
- ⑤ Aplicar estos conceptos a valuación de pensiones, rentas y dividendos
- ⑥ Usar la HP 12C en modo BEG para anualidades anticipadas

Motivación: Diferentes Momentos de Pago

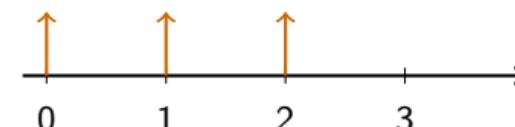
Anualidad Ordinaria



Pagos al **final**

Ej: *Préstamos, salarios*

Anualidad Anticipada



Pagos al **inicio**

Ej: *Rentas, seguros*

Motivación: Diferentes Momentos de Pago

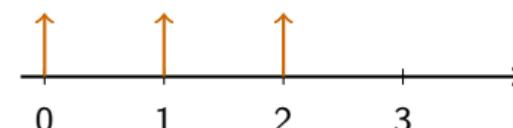
Anualidad Ordinaria



Pagos al **final**

Ej: *Préstamos, salarios*

Anualidad Anticipada



Pagos al **inicio**

Ej: *Rentas, seguros*

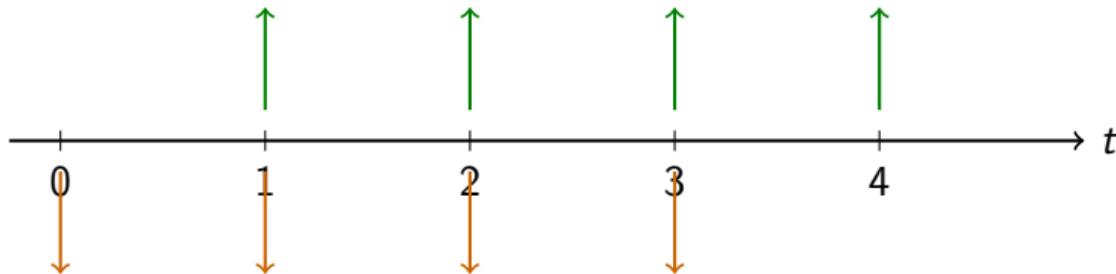
Pregunta Clave

Si ambas tienen los mismos pagos, ¿cuál vale más?

Respuesta: La anticipada, porque cada pago llega un período antes.

Comparación Visual: Ordinaria vs. Anticipada

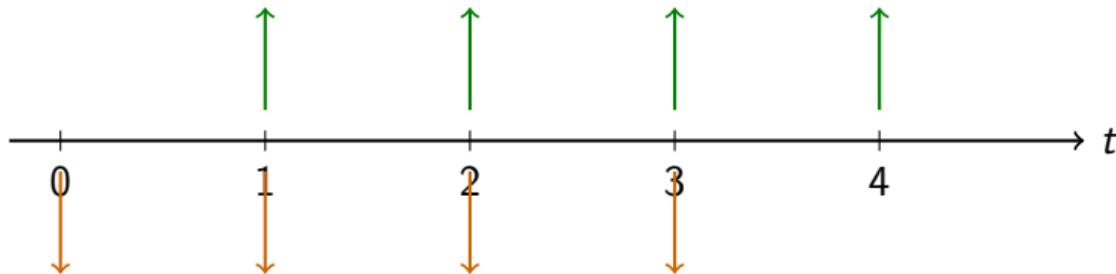
Ordinaria:



Anticipada:

Comparación Visual: Ordinaria vs. Anticipada

Ordinaria:



Anticipada:

Observación clave:

- Ambas tienen 4 pagos de $\$PMT$
- La anticipada “adelanta” todos los pagos un período
- Cada pago de la anticipada tiene un período más para generar intereses (VF) o un período menos de descuento (VP)

Relación entre Ordinaria y Anticipada

La anualidad anticipada es la ordinaria multiplicada por $(1 + r)$:

Relación entre Ordinaria y Anticipada

La anualidad anticipada es la ordinaria multiplicada por $(1 + r)$:

Valor Presente - Anualidad Anticipada

$$PV_{\text{anticipada}} = PV_{\text{ordinaria}} \times (1 + r) = PMT \cdot \frac{1 - (1 + r)^{-n}}{r} \cdot (1 + r)$$

Relación entre Ordinaria y Anticipada

La anualidad anticipada es la ordinaria multiplicada por $(1 + r)$:

Valor Presente - Anualidad Anticipada

$$PV_{\text{anticipada}} = PV_{\text{ordinaria}} \times (1 + r) = PMT \cdot \frac{1 - (1 + r)^{-n}}{r} \cdot (1 + r)$$

Valor Futuro - Anualidad Anticipada

$$FV_{\text{anticipada}} = FV_{\text{ordinaria}} \times (1 + r) = PMT \cdot \frac{(1 + r)^n - 1}{r} \cdot (1 + r)$$

Relación entre Ordinaria y Anticipada

La anualidad anticipada es la ordinaria multiplicada por $(1 + r)$:

Valor Presente - Anualidad Anticipada

$$PV_{\text{anticipada}} = PV_{\text{ordinaria}} \times (1 + r) = PMT \cdot \frac{1 - (1 + r)^{-n}}{r} \cdot (1 + r)$$

Valor Futuro - Anualidad Anticipada

$$FV_{\text{anticipada}} = FV_{\text{ordinaria}} \times (1 + r) = PMT \cdot \frac{(1 + r)^n - 1}{r} \cdot (1 + r)$$

Intuición

Cada pago de la anticipada está “un período adelante”, por lo que su valor es $(1 + r)$ veces mayor.

Derivación Alternativa del VP Anticipado

Método directo:

El VP de una anualidad anticipada es:

$$PV = PMT + \frac{PMT}{(1+r)^1} + \frac{PMT}{(1+r)^2} + \cdots + \frac{PMT}{(1+r)^{n-1}}$$

Derivación Alternativa del VP Anticipado

Método directo:

El VP de una anualidad anticipada es:

$$PV = PMT + \frac{PMT}{(1+r)^1} + \frac{PMT}{(1+r)^2} + \cdots + \frac{PMT}{(1+r)^{n-1}}$$

Comparando con la ordinaria que tiene pagos en períodos 1 a n :

$$PV_{\text{ord}} = \frac{PMT}{(1+r)^1} + \frac{PMT}{(1+r)^2} + \cdots + \frac{PMT}{(1+r)^n}$$

Derivación Alternativa del VP Anticipado

Método directo:

El VP de una anualidad anticipada es:

$$PV = PMT + \frac{PMT}{(1+r)^1} + \frac{PMT}{(1+r)^2} + \cdots + \frac{PMT}{(1+r)^{n-1}}$$

Comparando con la ordinaria que tiene pagos en períodos 1 a n :

$$PV_{\text{ord}} = \frac{PMT}{(1+r)^1} + \frac{PMT}{(1+r)^2} + \cdots + \frac{PMT}{(1+r)^n}$$

La anticipada tiene:

- Un pago extra en $t = 0$ (sin descuento): $+PMT$
- Pero no tiene el pago en $t = n$: $-PMT/(1+r)^n$

Ejemplo: Renta de Departamento

Problema

Rentas un departamento por \$15,000 mensuales, pagando al inicio de cada mes. Si el contrato es por 12 meses y la tasa es 1% mensual, ¿cuál es el valor presente del contrato?

Ejemplo: Renta de Departamento

Problema

Rentas un departamento por \$15,000 mensuales, pagando al inicio de cada mes. Si el contrato es por 12 meses y la tasa es 1% mensual, ¿cuál es el valor presente del contrato?

Solución (método del factor):

$$PV_{\text{ord}} = 15,000 \cdot \frac{1 - (1.01)^{-12}}{0.01} = 15,000 \times 11.2551 = \$168,826$$

$$PV_{\text{ant}} = PV_{\text{ord}} \times (1.01) = 168,826 \times 1.01 = \$170,514$$

Ejemplo: Renta de Departamento

Problema

Rentas un departamento por \$15,000 mensuales, pagando al inicio de cada mes. Si el contrato es por 12 meses y la tasa es 1% mensual, ¿cuál es el valor presente del contrato?

Solución (método del factor):

$$PV_{\text{ord}} = 15,000 \cdot \frac{1 - (1.01)^{-12}}{0.01} = 15,000 \times 11.2551 = \$168,826$$

$$PV_{\text{ant}} = PV_{\text{ord}} \times (1.01) = 168,826 \times 1.01 = \$170,514$$

Diferencia: \$170,514 - \$168,826 = \$1,688

Esto equivale a 1% de \$168,826.

¿Qué es una Perpetuidad?

Definición

Una **perpetuidad** es una anualidad que continúa **indefinidamente**; es decir, los pagos nunca terminan ($n \rightarrow \infty$).

¿Qué es una Perpetuidad?

Definición

Una **perpetuidad** es una anualidad que continúa **indefinidamente**; es decir, los pagos nunca terminan ($n \rightarrow \infty$).

¿Existe en la práctica?

- **Consols británicos:** Bonos emitidos por el gobierno británico que pagan cupones perpetuos (algunos desde el siglo XVIII)
- **Acciones preferentes:** Dividendos fijos sin fecha de vencimiento
- **Dotaciones universitarias:** Fondos que generan ingresos perpetuos
- **Aproximación:** Cualquier flujo de muy largo plazo (50+ años) puede modelarse como perpetuidad

Derivación del VP de una Perpetuidad

Partimos de la fórmula de anualidad ordinaria:

$$PV = PMT \cdot \frac{1 - (1 + r)^{-n}}{r}$$

Derivación del VP de una Perpetuidad

Partimos de la fórmula de anualidad ordinaria:

$$PV = PMT \cdot \frac{1 - (1 + r)^{-n}}{r}$$

Cuando $n \rightarrow \infty$:

- $(1 + r)^{-n} \rightarrow 0$ (para $r > 0$)

Derivación del VP de una Perpetuidad

Partimos de la fórmula de anualidad ordinaria:

$$PV = PMT \cdot \frac{1 - (1 + r)^{-n}}{r}$$

Cuando $n \rightarrow \infty$:

- $(1 + r)^{-n} \rightarrow 0$ (para $r > 0$)

Por lo tanto:

$$PV = PMT \cdot \frac{1 - 0}{r} = \frac{PMT}{r}$$

Derivación del VP de una Perpetuidad

Partimos de la fórmula de anualidad ordinaria:

$$PV = PMT \cdot \frac{1 - (1 + r)^{-n}}{r}$$

Cuando $n \rightarrow \infty$:

- $(1 + r)^{-n} \rightarrow 0$ (para $r > 0$)

Por lo tanto:

$$PV = PMT \cdot \frac{1 - 0}{r} = \frac{PMT}{r}$$

Valor Presente de una Perpetuidad Simple

$$PV = \frac{PMT}{r}$$

Interpretación Financiera

Si inviertes un capital PV a tasa r , los intereses anuales son:

$$\text{Intereses} = PV \times r$$

Si solo retiras los intereses cada año, el capital permanece intacto. Por lo tanto, puedes retirar $PMT = PV \times r$ para siempre.

Intuición de la Perpetuidad

Interpretación Financiera

Si inviertes un capital PV a tasa r , los intereses anuales son:

$$\text{Intereses} = PV \times r$$

Si solo retiras los intereses cada año, el capital permanece intacto. Por lo tanto, puedes retirar $PMT = PV \times r$ para siempre.

Despejando:

$$PV = \frac{PMT}{r}$$

Intuición de la Perpetuidad

Interpretación Financiera

Si inviertes un capital PV a tasa r , los intereses anuales son:

$$\text{Intereses} = PV \times r$$

Si solo retiras los intereses cada año, el capital permanece intacto. Por lo tanto, puedes retirar $PMT = PV \times r$ para siempre.

Despejando:

$$PV = \frac{PMT}{r}$$

Ejemplo

¿Cuánto necesitas invertir al 5% para recibir \$50,000 anuales perpetuos?

$$PV = 50,000 / 0.05 = \$1,000,000$$

Definición

Una **perpetuidad creciente** es aquella donde los pagos crecen a una tasa constante g cada período.

Perpetuidad Creciente

Definición

Una **perpetuidad creciente** es aquella donde los pagos crecen a una tasa constante g cada período.

Flujos:

- Período 1: PMT
- Período 2: $PMT(1 + g)$
- Período 3: $PMT(1 + g)^2$
- Y así sucesivamente...

Perpetuidad Creciente

Definición

Una **perpetuidad creciente** es aquella donde los pagos crecen a una tasa constante g cada período.

Flujos:

- Período 1: PMT
- Período 2: $PMT(1 + g)$
- Período 3: $PMT(1 + g)^2$
- Y así sucesivamente...

Valor Presente de Perpetuidad Creciente (Modelo de Gordon)

$$PV = \frac{PMT}{r - g} \quad \text{donde } r > g$$

Perpetuidad Creciente

Definición

Una **perpetuidad creciente** es aquella donde los pagos crecen a una tasa constante g cada período.

Flujos:

- Período 1: PMT
- Período 2: $PMT(1 + g)$
- Período 3: $PMT(1 + g)^2$
- Y así sucesivamente...

Valor Presente de Perpetuidad Creciente (Modelo de Gordon)

$$PV = \frac{PMT}{r - g} \quad \text{donde } r > g$$

Derivación de la Perpetuidad Creciente

Serie de flujos:

$$PV = \frac{PMT}{1+r} + \frac{PMT(1+g)}{(1+r)^2} + \frac{PMT(1+g)^2}{(1+r)^3} + \dots$$

Derivación de la Perpetuidad Creciente

Serie de flujos:

$$PV = \frac{PMT}{1+r} + \frac{PMT(1+g)}{(1+r)^2} + \frac{PMT(1+g)^2}{(1+r)^3} + \dots$$

Factorizando:

$$PV = \frac{PMT}{1+r} \left[1 + \frac{1+g}{1+r} + \left(\frac{1+g}{1+r} \right)^2 + \dots \right]$$

Derivación de la Perpetuidad Creciente

Serie de flujos:

$$PV = \frac{PMT}{1+r} + \frac{PMT(1+g)}{(1+r)^2} + \frac{PMT(1+g)^2}{(1+r)^3} + \dots$$

Factorizando:

$$PV = \frac{PMT}{1+r} \left[1 + \frac{1+g}{1+r} + \left(\frac{1+g}{1+r} \right)^2 + \dots \right]$$

Si $r > g$, entonces $\frac{1+g}{1+r} < 1$ y la serie geométrica converge:

$$PV = \frac{PMT}{1+r} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1+g}{1+r}} = \frac{PMT}{1+r} \cdot \frac{1+r}{r-g} = \frac{PMT}{r-g}$$

Ejemplo: Valuación de Acciones (Modelo de Gordon)

Problema

Una acción paga un dividendo de \$5 por acción. Se espera que los dividendos crezcan 3% anual perpetuamente. Si la tasa requerida es 10%, ¿cuál es el precio justo de la acción?

Ejemplo: Valuación de Acciones (Modelo de Gordon)

Problema

Una acción paga un dividendo de \$5 por acción. Se espera que los dividendos crezcan 3% anual perpetuamente. Si la tasa requerida es 10%, ¿cuál es el precio justo de la acción?

Nota: El primer dividendo D_1 será dentro de un año: $D_1 = 5$

Ejemplo: Valuación de Acciones (Modelo de Gordon)

Problema

Una acción paga un dividendo de \$5 por acción. Se espera que los dividendos crezcan 3% anual perpetuamente. Si la tasa requerida es 10%, ¿cuál es el precio justo de la acción?

Nota: El primer dividendo D_1 será dentro de un año: $D_1 = 5$

Solución:

$$P_0 = \frac{D_1}{r - g} = \frac{5}{0.10 - 0.03} = \frac{5}{0.07} = \$71.43$$

Ejemplo: Valuación de Acciones (Modelo de Gordon)

Problema

Una acción paga un dividendo de \$5 por acción. Se espera que los dividendos crezcan 3% anual perpetuamente. Si la tasa requerida es 10%, ¿cuál es el precio justo de la acción?

Nota: El primer dividendo D_1 será dentro de un año: $D_1 = 5$

Solución:

$$P_0 = \frac{D_1}{r - g} = \frac{5}{0.10 - 0.03} = \frac{5}{0.07} = \$71.43$$

Interpretación

Si compras la acción a \$71.43, obtendrás un rendimiento del 10% anual (considerando dividendos + apreciación).

Sensibilidad del Modelo de Gordon

¿Qué pasa si cambia la tasa de crecimiento?

g	$r - g$	$P_0 = D_1/(r - g)$
1%	9%	\$55.56
2%	8%	\$62.50
3%	7%	\$71.43
4%	6%	\$83.33
5%	5%	\$100.00

Sensibilidad del Modelo de Gordon

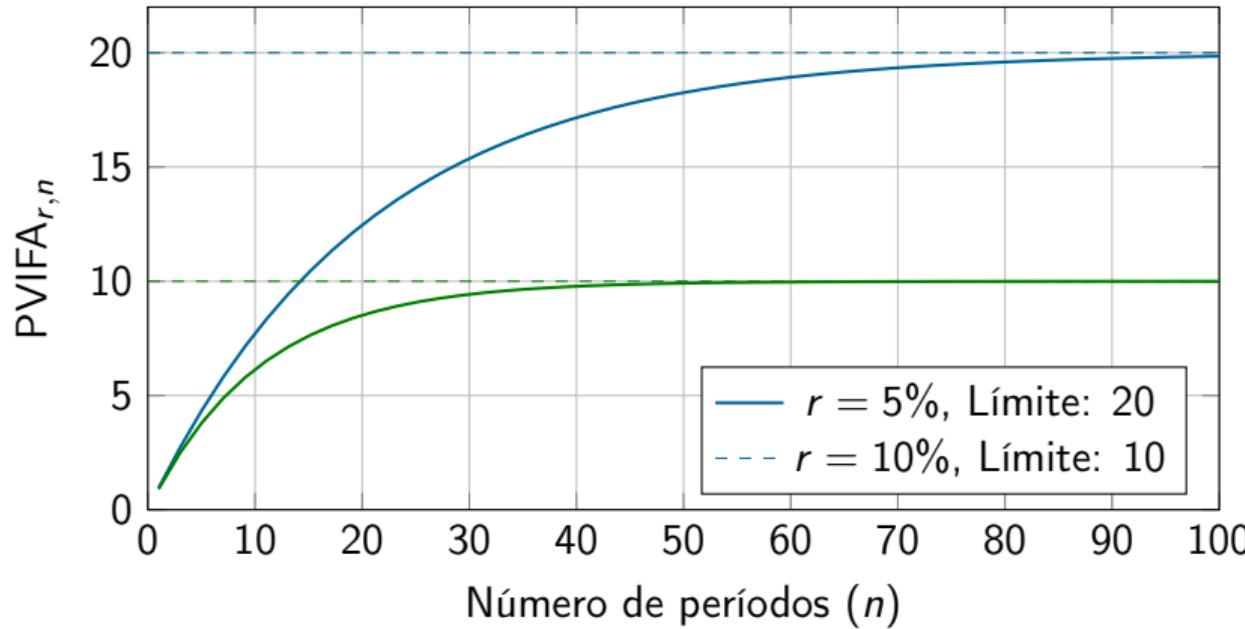
¿Qué pasa si cambia la tasa de crecimiento?

g	$r - g$	$P_0 = D_1/(r - g)$
1%	9%	\$55.56
2%	8%	\$62.50
3%	7%	\$71.43
4%	6%	\$83.33
5%	5%	\$100.00

Observación importante

El precio es muy sensible a pequeños cambios en g . Esta es una debilidad del modelo: pequeños errores en la estimación de g generan grandes errores en la valuación.

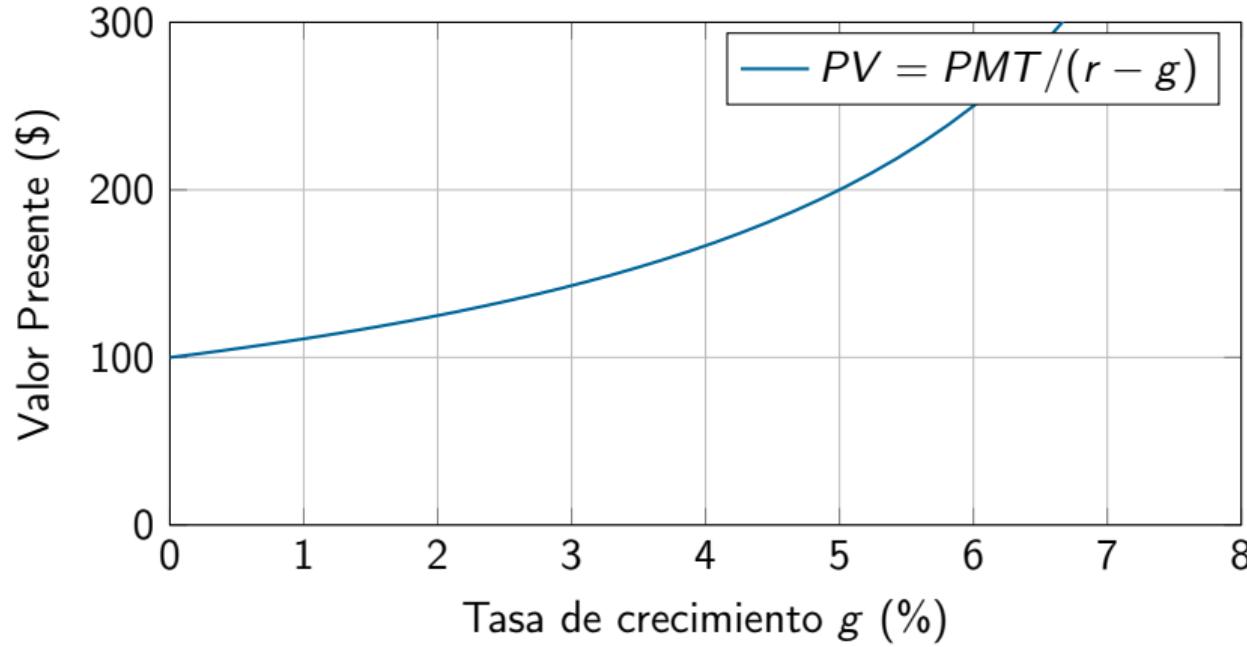
Convergencia de Anualidad a Perpetuidad



El PVIFA converge al límite $1/r$ (perpetuidad).

Perpetuidad Simple vs. Creciente

$$PMT = \$10, r = 10\%$$



El valor explota cuando $g \rightarrow r$.

Regla del Múltiplo

El VP de una perpetuidad es el pago multiplicado por $1/r$:

$$PV = PMT \times \text{Múltiplo}$$

Perpetuidad: Múltiplos Rápidos

Regla del Múltiplo

El VP de una perpetuidad es el pago multiplicado por $1/r$:

$$PV = PMT \times \text{Múltiplo}$$

Tasa	Múltiplo
5%	20x
8%	12.5x
10%	10x
12.5%	8x
20%	5x

Perpetuidad: Múltiplos Rápidos

Regla del Múltiplo

El VP de una perpetuidad es el pago multiplicado por $1/r$:

$$PV = PMT \times \text{Múltiplo}$$

Tasa	Múltiplo
5%	20x
8%	12.5x
10%	10x
12.5%	8x
20%	5x

Ejemplo

Regla del $(1 + r)$

Para convertir cualquier cálculo de ordinaria a anticipada:

$$\text{Valor anticipada} = \text{Valor ordinaria} \times (1 + r)$$

Anticipada: Factor de Ajuste

Regla del $(1 + r)$

Para convertir cualquier cálculo de ordinaria a anticipada:

$$\text{Valor anticipada} = \text{Valor ordinaria} \times (1 + r)$$

Ejemplo mental:

Si una anualidad ordinaria vale \$100,000 al 8%:

La misma anualidad anticipada vale: $100,000 \times 1.08 = \$108,000$

Anticipada: Factor de Ajuste

Regla del $(1 + r)$

Para convertir cualquier cálculo de ordinaria a anticipada:

$$\text{Valor anticipada} = \text{Valor ordinaria} \times (1 + r)$$

Ejemplo mental:

Si una anualidad ordinaria vale \$100,000 al 8%:

La misma anualidad anticipada vale: $100,000 \times 1.08 = \$108,000$

Aproximación adicional

Para tasas pequeñas ($r < 10\%$), el ajuste es aproximadamente $+r\%$ del valor ordinario.

Ej: Al 5%, la anticipada vale $\approx 5\%$ más que la ordinaria.

Perpetuidad Creciente: Estimación

Impacto del Crecimiento

Cada punto porcentual de crecimiento aumenta el múltiplo significativamente:

g	$r - g$ (si $r = 10\%$)	Múltiplo
0%	10%	10x
2%	8%	12.5x
4%	6%	16.7x
5%	5%	20x

Perpetuidad Creciente: Estimación

Impacto del Crecimiento

Cada punto porcentual de crecimiento aumenta el múltiplo significativamente:

g	$r - g$ (si $r = 10\%$)	Múltiplo
0%	10%	10x
2%	8%	12.5x
4%	6%	16.7x
5%	5%	20x

Regla práctica:

Si g es la mitad de r , el múltiplo se duplica.

(De 10x a 20x cuando g pasa de 0% a 5%, con $r = 10\%$)

HP 12C: Modo BEGIN para Anticipadas

Teclas	Función
g END	Modo anualidad ordinaria (pagos al final)
g BEG	Modo anualidad anticipada (pagos al inicio)

HP 12C: Modo BEGIN para Anticipadas

Teclas	Función
g END	Modo anualidad ordinaria (pagos al final)
g BEG	Modo anualidad anticipada (pagos al inicio)

Indicador visual

Cuando está en modo BEG, aparece “BEGIN” en la parte inferior del display.
Si no aparece, está en modo END (ordinaria).

HP 12C: Modo BEGIN para Anticipadas

Teclas	Función
g END	Modo anualidad ordinaria (pagos al final)
g BEG	Modo anualidad anticipada (pagos al inicio)

Indicador visual

Cuando está en modo BEG, aparece “BEGIN” en la parte inferior del display.
Si no aparece, está en modo END (ordinaria).

Consejo

Siempre verifica en qué modo estás antes de calcular. El modo persiste hasta que lo cambies.

HP 12C: Ejemplo - Renta Anticipada

Problema

Renta mensual de \$12,000, contrato de 24 meses, 0.8% mensual. ¿Cuál es el VP si se paga al inicio de cada mes?

HP 12C: Ejemplo - Renta Anticipada

Problema

Renta mensual de \$12,000, contrato de 24 meses, 0.8% mensual. ¿Cuál es el VP si se paga al inicio de cada mes?

Teclas	Display	Descripción
f CLX	0.00	Limpiar
g BEG	BEGIN	Modo anticipada
12000 PMT	12,000.00	Pago mensual
24 n	24.00	24 meses
0.8 i	0.80	0.8% mensual
0 FV	0.00	Sin valor final
PV	-264,982.78	VP anticipada

HP 12C: Ejemplo - Renta Anticipada

Problema

Renta mensual de \$12,000, contrato de 24 meses, 0.8% mensual. ¿Cuál es el VP si se paga al inicio de cada mes?

Teclas	Display	Descripción
f CLX	0.00	Limpiar
g BEG	BEGIN	Modo anticipada
12000 PMT	12,000.00	Pago mensual
24 n	24.00	24 meses
0.8 i	0.80	0.8% mensual
0 FV	0.00	Sin valor final
PV	-264,982.78	VP anticipada

Comparación: En modo END sería \$262,887.72 (1.8% menos).

HP 12C: Ejemplo - Fondo de Retiro Anticipado

Problema

Depositas \$5,000 mensuales al inicio de cada mes por 20 años al 0.6% mensual. ¿Cuánto acumulas?

HP 12C: Ejemplo - Fondo de Retiro Anticipado

Problema

Depositas \$5,000 mensuales al inicio de cada mes por 20 años al 0.6% mensual. ¿Cuánto acumulas?

Teclas	Display	Descripción
f CLX	0.00	Limpiar
g BEG	BEGIN	Modo anticipada
5000 CHS PMT	-5,000.00	Depósito mensual
240 n	240.00	240 meses
0.6 i	0.60	0.6% mensual
0 PV	0.00	Sin inversión inicial
FV	2,357,892.50	Valor futuro

HP 12C: Ejemplo - Fondo de Retiro Anticipado

Problema

Depositas \$5,000 mensuales al inicio de cada mes por 20 años al 0.6% mensual. ¿Cuánto acumulas?

Teclas	Display	Descripción
f CLX	0.00	Limpiar
g BEG	BEGIN	Modo anticipada
5000 CHS PMT	-5,000.00	Depósito mensual
240 n	240.00	240 meses
0.6 i	0.60	0.6% mensual
0 PV	0.00	Sin inversión inicial
FV	2,357,892.50	Valor futuro

Depositaste: $5,000 \times 240 = \$1,200,000$. Ganaste \$1,157,892 en intereses.

HP 12C: Perpetuidades (Cálculo Manual)

La HP 12C no tiene función de perpetuidad, pero es fácil calcular:

HP 12C: Perpetuidades (Cálculo Manual)

La HP 12C no tiene función de perpetuidad, pero es fácil calcular:

Perpetuidad Simple: $PV = PMT/r$

Teclas	Display	Descripción
50000 ENTER	50,000	PMT
0.08 ÷	625,000	$PV = PMT/r$

HP 12C: Perpetuidades (Cálculo Manual)

La HP 12C no tiene función de perpetuidad, pero es fácil calcular:

Perpetuidad Simple: $PV = PMT/r$

Teclas	Display	Descripción
50000 ENTER	50,000	PMT
0.08 ÷	625,000	$PV = PMT/r$

Perpetuidad Creciente: $PV = PMT/(r - g)$

Teclas	Display	Descripción
50000 ENTER	50,000	PMT
0.08 ENTER 0.03 -	0.05	$r - g$
÷	1,000,000	PV

Ejercicio 1: Arrendamiento

Problema

Un arrendamiento requiere pagos de \$8,000 al inicio de cada mes por 36 meses. Si la tasa es 1.2% mensual, ¿cuál es el valor presente del arrendamiento?

Ejercicio 1: Arrendamiento

Problema

Un arrendamiento requiere pagos de \$8,000 al inicio de cada mes por 36 meses. Si la tasa es 1.2% mensual, ¿cuál es el valor presente del arrendamiento?

Solución:

Primero, VP ordinario:

$$PV_{\text{ord}} = 8,000 \cdot \frac{1 - (1.012)^{-36}}{0.012} = 8,000 \times 28.8473 = \$230,778$$

Ejercicio 1: Arrendamiento

Problema

Un arrendamiento requiere pagos de \$8,000 al inicio de cada mes por 36 meses. Si la tasa es 1.2% mensual, ¿cuál es el valor presente del arrendamiento?

Solución:

Primero, VP ordinario:

$$PV_{\text{ord}} = 8,000 \cdot \frac{1 - (1.012)^{-36}}{0.012} = 8,000 \times 28.8473 = \$230,778$$

Luego, ajustar a anticipada:

$$PV_{\text{ant}} = 230,778 \times 1.012 = \$233,547$$

Ejercicio 1: Arrendamiento

Problema

Un arrendamiento requiere pagos de \$8,000 al inicio de cada mes por 36 meses. Si la tasa es 1.2% mensual, ¿cuál es el valor presente del arrendamiento?

Solución:

Primero, VP ordinario:

$$PV_{\text{ord}} = 8,000 \cdot \frac{1 - (1.012)^{-36}}{0.012} = 8,000 \times 28.8473 = \$230,778$$

Luego, ajustar a anticipada:

$$PV_{\text{ant}} = 230,778 \times 1.012 = \$233,547$$

Diferencia: La anticipada vale \$2,769 más (1.2% más).

Ejercicio 2: Perpetuidad Simple

Problema

Una fundación quiere establecer una beca perpetua de \$100,000 anuales. Si la tasa de rendimiento esperada es 6%, ¿cuánto debe donar hoy?

Ejercicio 2: Perpetuidad Simple

Problema

Una fundación quiere establecer una beca perpetua de \$100,000 anuales. Si la tasa de rendimiento esperada es 6%, ¿cuánto debe donar hoy?

Solución:

$$PV = \frac{PMT}{r} = \frac{100,000}{0.06} = \$1,666,667$$

Ejercicio 2: Perpetuidad Simple

Problema

Una fundación quiere establecer una beca perpetua de \$100,000 anuales. Si la tasa de rendimiento esperada es 6%, ¿cuánto debe donar hoy?

Solución:

$$PV = \frac{PMT}{r} = \frac{100,000}{0.06} = \$1,666,667$$

Verificación

Con \$1,666,667 al 6%:

$$\text{Intereses anuales} = 1,666,667 \times 0.06 = \$100,000 \checkmark$$

El capital permanece intacto.

Ejercicio 3: Perpetuidad Creciente

Problema

Un bono perpetuo paga un cupón de \$80 el próximo año, y los cupones crecerán 2% anual indefinidamente. Si la tasa requerida es 9%, ¿cuál es el precio del bono?

Ejercicio 3: Perpetuidad Creciente

Problema

Un bono perpetuo paga un cupón de \$80 el próximo año, y los cupones crecerán 2% anual indefinidamente. Si la tasa requerida es 9%, ¿cuál es el precio del bono?

Solución:

$$PV = \frac{C_1}{r - g} = \frac{80}{0.09 - 0.02} = \frac{80}{0.07} = \$1,142.86$$

Ejercicio 3: Perpetuidad Creciente

Problema

Un bono perpetuo paga un cupón de \$80 el próximo año, y los cupones crecerán 2% anual indefinidamente. Si la tasa requerida es 9%, ¿cuál es el precio del bono?

Solución:

$$PV = \frac{C_1}{r - g} = \frac{80}{0.09 - 0.02} = \frac{80}{0.07} = \$1,142.86$$

Comparación con perpetuidad simple:

Sin crecimiento: $PV = 80/0.09 = \$888.89$

El crecimiento del 2% agrega \$253.97 de valor (29% más).

Ejercicio 4: Valuación de Empresa

Problema

Una empresa genera flujos de caja de \$500,000 anuales, creciendo 4% perpetuamente. Si el costo de capital es 12%, ¿cuál es el valor de la empresa?

Ejercicio 4: Valuación de Empresa

Problema

Una empresa genera flujos de caja de \$500,000 anuales, creciendo 4% perpetuamente. Si el costo de capital es 12%, ¿cuál es el valor de la empresa?

Solución (Modelo de Gordon para empresas):

$$V_0 = \frac{CF_1}{r - g} = \frac{500,000}{0.12 - 0.04} = \frac{500,000}{0.08} = \$6,250,000$$

Ejercicio 4: Valuación de Empresa

Problema

Una empresa genera flujos de caja de \$500,000 anuales, creciendo 4% perpetuamente. Si el costo de capital es 12%, ¿cuál es el valor de la empresa?

Solución (Modelo de Gordon para empresas):

$$V_0 = \frac{CF_1}{r - g} = \frac{500,000}{0.12 - 0.04} = \frac{500,000}{0.08} = \$6,250,000$$

Sensibilidad

Si g fuera 5%: $V = 500,000/0.07 = \$7,142,857 (+14\%)$

Si g fuera 3%: $V = 500,000/0.09 = \$5,555,556 (-11\%)$

Ejercicio 5: Pensión Anticipada

Problema

Un plan de pensión pagará \$20,000 mensuales al inicio de cada mes por 25 años. Si la tasa es 0.5% mensual, ¿cuál es el valor actual de la pensión?

Ejercicio 5: Pensión Anticipada

Problema

Un plan de pensión pagará \$20,000 mensuales al inicio de cada mes por 25 años. Si la tasa es 0.5% mensual, ¿cuál es el valor actual de la pensión?

Datos: $n = 300$ meses, $r = 0.5\%$

Solución:

$$PV_{\text{ord}} = 20,000 \cdot \frac{1 - (1.005)^{-300}}{0.005} = 20,000 \times 155.207 = \$3,104,140$$

$$PV_{\text{ant}} = 3,104,140 \times 1.005 = \$3,119,661$$

Ejercicio 5: Pensión Anticipada

Problema

Un plan de pensión pagará \$20,000 mensuales al inicio de cada mes por 25 años. Si la tasa es 0.5% mensual, ¿cuál es el valor actual de la pensión?

Datos: $n = 300$ meses, $r = 0.5\%$

Solución:

$$PV_{\text{ord}} = 20,000 \cdot \frac{1 - (1.005)^{-300}}{0.005} = 20,000 \times 155.207 = \$3,104,140$$

$$PV_{\text{ant}} = 3,104,140 \times 1.005 = \$3,119,661$$

La pensión anticipada vale \$3,119,661.

Python: Anualidades Anticipadas

```
import numpy_financial as npf

# Anualidad anticipada con numpy-financial
# Usar parametro 'when' = 'begin' (o 1)

pmt = 12000
n = 24
r = 0.008

# Anualidad ordinaria
pv_ord = npf.pv(rate=r, nper=n, pmt=pmt, fv=0, when='end')
print(f"VP Ordinaria: ${-pv_ord:.2f}")

# Anualidad anticipada
pv_ant = npf.pv(rate=r, nper=n, pmt=pmt, fv=0, when='begin')
print(f"VP Anticipada: ${-pv_ant:.2f}")

# Verificacion: diferencia es factor (1+r)
print(f"Ratio: {-pv_ant/-pv_ord:.4f}")
```

Python: Perpetuidades

```
def perpetuidad_simple(pmt, r):
    """Valor presente de perpetuidad simple."""
    return pmt / r

def perpetuidad_creciente(pmt, r, g):
    """Valor presente de perpetuidad creciente (Gordon)."""
    if r <= g:
        raise ValueError("r debe ser mayor que g")
    return pmt / (r - g)

# Ejemplos
print("Perpetuidad Simple:")
print(f" $50,000/año al 8%: ${perpetuidad_simple(50000, 0.08):,.2f}")

print("\nPerpetuidad Creciente:")
print(f" $50,000 inicial, g=3%, r=8%: ${perpetuidad_creciente(50000, 0.08,
0.03):,.2f}")

# Sensibilidad
```

Python: Gráfica Comparativa

```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np

pmt = 10000
r = 0.10
periodos = np.arange(1, 101)

# PVIFA ordinaria
pvifa_ord = [(1-(1+r)**(-n))/r for n in periodos]

# PVIFA anticipada
pvifa_ant = [pv * (1+r) for pv in pvifa_ord]

# Perpetuidad
perp = 1/r

plt.figure(figsize=(10, 6))
plt.plot(periodos, pvifa_ord, 'b-', label='Ordinaria')
plt.plot(periodos, pvifa_ant, 'g-', label='Anticipada')
```

Resumen de Fórmulas

Anualidad Anticipada

$$PV_{\text{ant}} = PV_{\text{ord}} \times (1 + r)$$

$$FV_{\text{ant}} = FV_{\text{ord}} \times (1 + r)$$

Perpetuidad Creciente

$$PV = \frac{PMT}{r - g} \quad (r > g)$$

Perpetuidad Simple

$$PV = \frac{PMT}{r}$$

Múltiplos rápidos

5% → 20×

10% → 10×

- ① **Anualidad anticipada:** pagos al inicio, vale $(1 + r)$ más
- ② **Perpetuidad:** anualidad infinita, $PV = PMT/r$
- ③ **Perpetuidad creciente:** considera crecimiento, $PV = PMT/(r - g)$
- ④ **El Modelo de Gordon** es una perpetuidad creciente
- ⑤ La perpetuidad es el límite de la anualidad cuando $n \rightarrow \infty$
- ⑥ HP 12C: usar g BEG para anticipadas
- ⑦ El valor es muy sensible a g cuando g se acerca a r

① **Ejercicios HP 12C:**

- VP de renta de \$18,000 mensual anticipada, 36 meses, 1%
- VF de depósitos de \$2,000 al inicio del mes, 60 meses, 0.7%

② **Perpetuidad:** ¿Cuánto debes invertir al 7% para recibir \$80,000 anuales perpetuos?

③ **Modelo de Gordon:** Una acción pagará \$3 de dividendo el próximo año. Si los dividendos crecen 4% y la tasa requerida es 11%, ¿cuál es el precio?

④ **Python:** Grafica el valor de una perpetuidad creciente para g variando de 0% a 9%, con $r = 10\%$ y $PMT = \$1,000$.

¿Preguntas?

Próxima Sesión:
Amortización de Préstamos

Semana 4, Clase 1