Tasas Nominales, Efectivas y Equivalentes

Entendiendo la verdadera tasa de interés

Matemáticas Financieras

Valor del Dinero en el Tiempo

Semana 2 | Clase 1 | Duración: 1h 50min

Contenido de la Sesión

Conexión con la Sesión Anterior

Sesiones 1 y 2: Capitalización y Descuento

Aprendimos a calcular VP y VF usando una tasa r por período:

$$F = P(1+r)^n \quad \text{y} \quad P = \frac{F}{(1+r)^n}$$

Conexión con la Sesión Anterior

Sesiones 1 y 2: Capitalización y Descuento

Aprendimos a calcular VP y VF usando una tasa r por período:

$$F = P(1+r)^n \quad \text{y} \quad P = \frac{F}{(1+r)^n}$$

Pero surge una pregunta...

¿Qué pasa cuando la capitalización **no es anual**?

"El banco ofrece 12% anual con capitalización mensual..."

¿Es lo mismo que 12% anual con capitalización anual?

Objetivos de Aprendizaje

Al finalizar esta sesión, serás capaz de:

1. Distinguir entre tasa nominal y tasa efectiva
2. Calcular la tasa efectiva dada cualquier frecuencia de capitalización
3. Convertir entre tasas con diferentes períodos de capitalización
4. Comprender y aplicar la tasa de interés continua
5. Diferenciar entre APR y APY (y su uso en la práctica)
6. Entender puntos base y puntos porcentuales

Motivación: Comparando Ofertas Bancarias

Escenario

Tres bancos ofrecen cuentas de ahorro:

- **Banco A:** 12% anual, capitalización anual
- **Banco B:** 12% anual, capitalización mensual
- **Banco C:** 11.9% anual, capitalización diaria

¿Cuál es la mejor opción?

Motivación: Comparando Ofertas Bancarias

Escenario

Tres bancos ofrecen cuentas de ahorro:

- **Banco A:** 12% anual, capitalización anual
- **Banco B:** 12% anual, capitalización mensual
- **Banco C:** 11.9% anual, capitalización diaria

¿Cuál es la mejor opción?

Spoiler

Todas reportan tasas similares, pero el **rendimiento real** es diferente. Necesitamos herramientas para compararlas correctamente.

Definiciones Fundamentales

Tasa Nominal (r_{nom})

Tasa de interés **anunciada** o cotizada, que no refleja el efecto de la capitalización. También llamada APR (Annual Percentage Rate).

Definiciones Fundamentales

Tasa Nominal (r_{nom})

Tasa de interés **anunciada** o cotizada, que no refleja el efecto de la capitalización. También llamada APR (Annual Percentage Rate).

Tasa Efectiva (r_{ef})

Tasa de interés que **realmente** se gana o paga en un año, considerando el efecto de la capitalización. También llamada APY (Annual Percentage Yield) o EAR (Effective Annual Rate).

Definiciones Fundamentales

Tasa Nominal (r_{nom})

Tasa de interés **anunciada** o cotizada, que no refleja el efecto de la capitalización. También llamada APR (Annual Percentage Rate).

Tasa Efectiva (r_{ef})

Tasa de interés que **realmente** se gana o paga en un año, considerando el efecto de la capitalización. También llamada APY (Annual Percentage Yield) o EAR (Effective Annual Rate).

Frecuencia de Capitalización (m)

Número de veces por año que se calculan y acumulan los intereses.

Capitalización m veces al año

Si la tasa nominal es r_{nom} y se capitaliza m veces al año:

Capitalización m veces al año

Si la tasa nominal es r_{nom} y se capitaliza m veces al año:

Tasa por período de capitalización:

$$r_{\text{período}} = \frac{r_{nom}}{m}$$

Capitalización m veces al año

Si la tasa nominal es r_{nom} y se capitaliza m veces al año:

Tasa por período de capitalización:

$$r_{\text{período}} = \frac{r_{nom}}{m}$$

Número de períodos en un año:

$$\text{Períodos por año} = m$$

Capitalización m veces al año

Si la tasa nominal es r_{nom} y se capitaliza m veces al año:

Tasa por período de capitalización:

$$r_{\text{período}} = \frac{r_{nom}}{m}$$

Número de períodos en un año:

$$\text{Períodos por año} = m$$

Valor futuro después de 1 año:

$$F = P\left(1 + \frac{r_{nom}}{m}\right)^m$$

Derivación de la Tasa Efectiva

La tasa efectiva es aquella que, aplicada una sola vez al año, produce el mismo valor futuro.

Derivación de la Tasa Efectiva

La tasa efectiva es aquella que, aplicada una sola vez al año, produce el mismo valor futuro.

Con capitalización m veces:

$$F = P\left(1 + \frac{r_{nom}}{m}\right)^m$$

Derivación de la Tasa Efectiva

La tasa efectiva es aquella que, aplicada una sola vez al año, produce el mismo valor futuro.

Con capitalización m veces:

$$F = P\left(1 + \frac{r_{nom}}{m}\right)^m$$

Con tasa efectiva (capitalización anual):

$$F = P(1 + r_{ef})$$

Derivación de la Tasa Efectiva

La tasa efectiva es aquella que, aplicada una sola vez al año, produce el mismo valor futuro.

Con capitalización m veces:

$$F = P\left(1 + \frac{r_{nom}}{m}\right)^m$$

Con tasa efectiva (capitalización anual):

$$F = P(1 + r_{ef})$$

Igualando:

$$P(1 + r_{ef}) = P\left(1 + \frac{r_{nom}}{m}\right)^m$$

$$1 + r_{ef} = \left(1 + \frac{r_{nom}}{m}\right)^m$$

Fórmula de la Tasa Efectiva

Tasa Efectiva Anual

$$\boxed{r_{ef} = \left(1 + \frac{r_{nom}}{m}\right)^{m} - 1}$$

Fórmula de la Tasa Efectiva

Tasa Efectiva Anual

$$\boxed{r_{ef} = \left(1 + \frac{r_{nom}}{m}\right)^m - 1}$$

Frecuencias comunes de capitalización:

Frecuencia	m
Anual	1
Semestral	2
Trimestral	4
Mensual	12
Semanal	52
Diaria	365

Ejemplo: Calculando la Tasa Efectiva

Problema

Un banco ofrece 12% nominal anual con capitalización mensual. ¿Cuál es la tasa efectiva anual?

Ejemplo: Calculando la Tasa Efectiva

Problema

Un banco ofrece 12% nominal anual con capitalización mensual. ¿Cuál es la tasa efectiva anual?

Datos:

- $r_{nom} = 0.12$ (12%)
- $m = 12$ (mensual)

Ejemplo: Calculando la Tasa Efectiva

Problema

Un banco ofrece 12% nominal anual con capitalización mensual. ¿Cuál es la tasa efectiva anual?

Datos:

- $r_{nom} = 0.12$ (12%)
- $m = 12$ (mensual)

Cálculo:

$$r_{ef} = \left(1 + \frac{0.12}{12}\right)^{12} - 1$$

$$r_{ef} = (1 + 0.01)^{12} - 1$$

$$r_{ef} = (1.01)^{12} - 1$$

$$r_{ef} = 1.1268 - 1 = 0.1268 = 12.68\%$$

Efecto de la Frecuencia de Capitalización

12% nominal anual con diferentes capitalizaciones:

Capitalización	m	$(1+0.12/m)^m$	r_{ef}
Anual	1	1.1200	12.00%
Semestral	2	1.1236	12.36%
Trimestral	4	1.1255	12.55%
Mensual	12	1.1268	12.68%
Semanal	52	1.1273	12.73%
Diaria	365	1.1275	12.75%
Continua	∞	$e^{0.12}$	12.75%

Efecto de la Frecuencia de Capitalización

12% nominal anual con diferentes capitalizaciones:

Capitalización	m	$(1+0.12/m)^m$	r_{ef}
Anual	1	1.1200	12.00%
Semestral	2	1.1236	12.36%
Trimestral	4	1.1255	12.55%
Mensual	12	1.1268	12.68%
Semanal	52	1.1273	12.73%
Diaria	365	1.1275	12.75%
Continua	∞	$e^{0.12}$	12.75%

Observación

A mayor frecuencia de capitalización, mayor tasa efectiva. Pero converge a un límite.

Capitalización Continua: Derivación

¿Qué pasa cuando $m \to \infty$?

Capitalización Continua: Derivación

¿Qué pasa cuando $m \to \infty$?

Recordemos el límite fundamental:

$$\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \approx 2.71828$$

Capitalización Continua: Derivación

¿Qué pasa cuando $m \to \infty$?

Recordemos el límite fundamental:

$$\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \approx 2.71828$$

Aplicando a nuestra fórmula:

$$\lim_{m \to \infty} \left(1 + \frac{r_{nom}}{m}\right)^m = e^{r_{nom}}$$

Capitalización Continua: Derivación

¿Qué pasa cuando $m \to \infty$?

Recordemos el límite fundamental:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e \approx 2.71828$$

Aplicando a nuestra fórmula:

$$\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{r_{nom}}{m}\right)^m = e^{r_{nom}}$$

Valor Futuro con Capitalización Continua

$$\boxed{F = P \cdot e^{r\cdot t}}$$

donde r es la tasa continua y t es el tiempo en años.

Conversión entre Tasa Continua y Efectiva

De continua a efectiva:

$$\boxed{r_{ef} = e^{r_c} - 1}$$

Conversión entre Tasa Continua y Efectiva

De continua a efectiva:

$$\boxed{r_{ef} = e^{r_c} - 1}$$

De efectiva a continua:

$$\boxed{r_c = \ln(1 + r_{ef})}$$

Conversión entre Tasa Continua y Efectiva

De continua a efectiva:

$$\boxed{r_{ef} = e^{r_c} - 1}$$

De efectiva a continua:

$$\boxed{r_c = \ln(1 + r_{ef})}$$

Ejemplo

Si $r_c = 10\%$ continuo:

$$r_{ef} = e^{0.10} - 1 = 1.1052 - 1 = 10.52\%$$

¿Por qué usar Tasas Continuas?

Ventajas Matemáticas

- Simplifica derivadas e integrales
- Las tasas continuas son **aditivas** en el tiempo
- Fundamental en modelos de opciones (Black-Scholes)
- Facilita el cálculo de rendimientos logarítmicos

¿Por qué usar Tasas Continuas?

Ventajas Matemáticas

- Simplifica derivadas e integrales
- Las tasas continuas son **aditivas** en el tiempo
- Fundamental en modelos de opciones (Black-Scholes)
- Facilita el cálculo de rendimientos logarítmicos

Aditividad de Tasas Continuas

Si inviertes al 5% continuo por 2 años y luego al 8% continuo por 3 años:

$$F = P \cdot e^{0.05\times 2} \cdot e^{0.08\times 3} = P \cdot e^{0.10+0.24} = P \cdot e^{0.34}$$

Tasas Equivalentes

Definición

Dos tasas son **equivalentes** si producen el mismo valor futuro en el mismo período de tiempo, independientemente de la frecuencia de capitalización.

Tasas Equivalentes

Definición

Dos tasas son **equivalentes** si producen el mismo valor futuro en el mismo período de tiempo, independientemente de la frecuencia de capitalización.

Fórmula de equivalencia:

$$\boxed{\left(1+\frac{r_1}{m_1}\right)^{m_1} = \left(1+\frac{r_2}{m_2}\right)^{m_2}}$$

Tasas Equivalentes

Definición

Dos tasas son **equivalentes** si producen el mismo valor futuro en el mismo período de tiempo, independientemente de la frecuencia de capitalización.

Fórmula de equivalencia:

$$\boxed{\left(1+\frac{r_1}{m_1}\right)^{m_1} = \left(1+\frac{r_2}{m_2}\right)^{m_2}}$$

Para encontrar r_2 dado r_1:

$$r_2 = m_2\left[\left(1+\frac{r_1}{m_1}\right)^{m_1/m_2} - 1\right]$$

Ejemplo: Convertir Tasas

Problema

Un préstamo cobra 18% nominal anual con capitalización mensual. ¿Cuál es la tasa trimestral equivalente?

Ejemplo: Convertir Tasas

Problema

Un préstamo cobra 18% nominal anual con capitalización mensual. ¿Cuál es la tasa trimestral equivalente?

Paso 1: Calcular tasa efectiva anual

$$r_{ef} = \left(1 + \frac{0.18}{12}\right)^{12} - 1 = (1.015)^{12} - 1 = 19.56\%$$

Ejemplo: Convertir Tasas

Problema

Un préstamo cobra 18% nominal anual con capitalización mensual. ¿Cuál es la tasa trimestral equivalente?

Paso 1: Calcular tasa efectiva anual

$$r_{ef} = \left(1 + \frac{0.18}{12}\right)^{12} - 1 = (1.015)^{12} - 1 = 19.56\%$$

Paso 2: Convertir a tasa trimestral

$$\begin{aligned} 1 + r_{ef} &= (1 + r_T)^4 \\ 1.1956 &= (1 + r_T)^4 \\ r_T &= (1.1956)^{1/4} - 1 = 0.0456 = 4.56\% \end{aligned}$$

Ejemplo: Convertir Tasas

Problema

Un préstamo cobra 18% nominal anual con capitalización mensual. ¿Cuál es la tasa trimestral equivalente?

Paso 1: Calcular tasa efectiva anual

$$r_{ef} = \left(1 + \frac{0.18}{12}\right)^{12} - 1 = (1.015)^{12} - 1 = 19.56\%$$

Paso 2: Convertir a tasa trimestral

$$\begin{aligned} 1 + r_{ef} &= (1 + r_T)^4 \\ 1.1956 &= (1 + r_T)^4 \\ r_T &= (1.1956)^{1/4} - 1 = 0.0456 = 4.56\% \end{aligned}$$

Tasa nominal trimestral: $4.56\% \times 4 = 18.24\%$ anual capitalizable trimestralmente.

APR vs. APY

APR (Annual Percentage Rate)

- Tasa nominal anual
- **No** incluye efecto de capitalización
- Usada para **préstamos**
- Subestima el costo real

APY (Annual Percentage Yield)

- Tasa efectiva anual
- **Sí** incluye capitalización
- Usada para **ahorros**
- Refleja el rendimiento real

APR vs. APY

APR (Annual Percentage Rate)

- Tasa nominal anual
- **No** incluye efecto de capitalización
- Usada para **préstamos**
- Subestima el costo real

APY (Annual Percentage Yield)

- Tasa efectiva anual
- **Sí** incluye capitalización
- Usada para **ahorros**
- Refleja el rendimiento real

Regla práctica en EE.UU.

- Bancos **anuncian APY** en cuentas de ahorro (parece mejor)
- Bancos **anuncian APR** en préstamos (parece menor)
- ¡Siempre compara usando la misma métrica!

Puntos Porcentuales vs. Puntos Base

Punto Porcentual (pp)

Diferencia aritmética entre dos porcentajes.
Ejemplo: Si la tasa sube de 5% a 7%, subió **2 puntos porcentuales**.

Puntos Porcentuales vs. Puntos Base

Punto Porcentual (pp)

Diferencia aritmética entre dos porcentajes.
Ejemplo: Si la tasa sube de 5% a 7%, subió **2 puntos porcentuales**.

Punto Base (pb o bp)

Una centésima de punto porcentual.

$$\boxed{1 \text{ punto base} = 0.01\% = 0.0001}$$

$$\boxed{100 \text{ puntos base} = 1\%}$$

Puntos Porcentuales vs. Puntos Base

Punto Porcentual (pp)

Diferencia aritmética entre dos porcentajes.
Ejemplo: Si la tasa sube de 5% a 7%, subió **2 puntos porcentuales**.

Punto Base (pb o bp)

Una centésima de punto porcentual.

$$\boxed{1 \text{ punto base} = 0.01\% = 0.0001}$$

$$\boxed{100 \text{ puntos base} = 1\%}$$

Ejemplo

Si la tasa sube de 5.25% a 5.50%, subió **25 puntos base** (o 0.25 pp).

¿Por qué usar Puntos Base?

Evita ambigüedad

"La tasa subió 10%" puede significar:

- De 5% a 15% (subió 10 puntos porcentuales)
- De 5% a 5.5% (subió 10% relativo, o 50 pb)

"La tasa subió 50 puntos base" es inequívoco: de 5% a 5.50%.

¿Por qué usar Puntos Base?

Evita ambigüedad

"La tasa subió 10%" puede significar:

- De 5% a 15% (subió 10 puntos porcentuales)
- De 5% a 5.5% (subió 10% relativo, o 50 pb)

"La tasa subió 50 puntos base" es inequívoco: de 5% a 5.50%.

Uso común en finanzas:

- Bancos centrales: "El Fed subió la tasa 25 pb"
- Spreads de crédito: "El spread es de 150 pb sobre LIBOR"
- Comisiones: "El fondo cobra 75 pb anuales"

Conversiones Rápidas

Puntos Base	Puntos Porcentuales	Decimal
1 bp	0.01%	0.0001
10 bp	0.10%	0.0010
25 bp	0.25%	0.0025
50 bp	0.50%	0.0050
100 bp	1.00%	0.0100
150 bp	1.50%	0.0150

Conversiones Rápidas

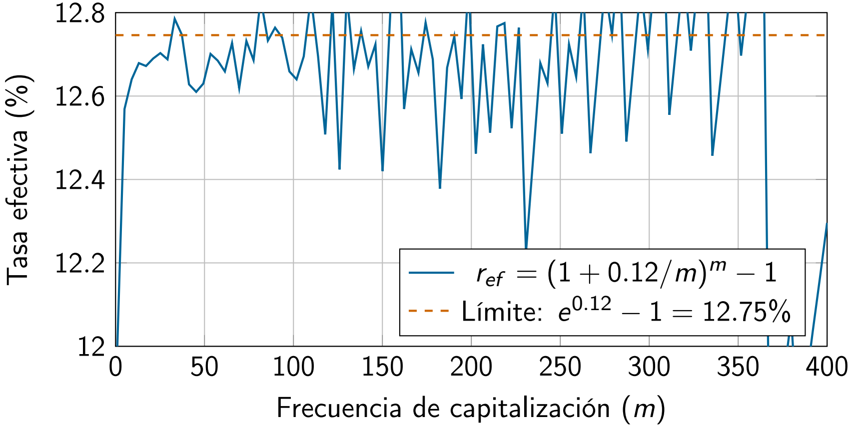
Puntos Base	Puntos Porcentuales	Decimal
1 bp	0.01%	0.0001
10 bp	0.10%	0.0010
25 bp	0.25%	0.0025
50 bp	0.50%	0.0050
100 bp	1.00%	0.0100
150 bp	1.50%	0.0150

Ejemplo de impacto

En un préstamo de \$1,000,000, un aumento de 25 pb significa:

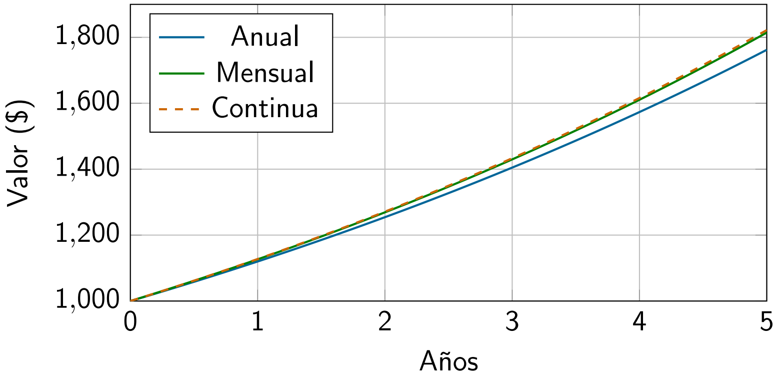
$$\$1,000,000 \times 0.0025 = \$2,500 \text{ adicionales por año}$$

Gráfica: Tasa Efectiva vs. Frecuencia



Observación: La tasa efectiva converge rápidamente al límite continuo.

Crecimiento de $1,000 al 12% nominal por 5 años:



Aproximación para Tasas Pequeñas

Aproximación de Taylor

Para r pequeño y m grande:

$$\left(1+\frac{r}{m}\right)^m \approx 1+r+\frac{r^2}{2}$$

Aproximación para Tasas Pequeñas

Aproximación de Taylor

Para r pequeño y m grande:

$$\left(1+\frac{r}{m}\right)^m \approx 1+r+\frac{r^2}{2}$$

Implicación:

$$r_{ef} \approx r_{nom} + \frac{r_{nom}^2}{2}$$

Aproximación para Tasas Pequeñas

Aproximación de Taylor

Para r pequeño y m grande:

$$\left(1+\frac{r}{m}\right)^m \approx 1+r+\frac{r^2}{2}$$

Implicación:

$$r_{ef} \approx r_{nom} + \frac{r_{nom}^2}{2}$$

Ejemplo

Con $r_{nom} = 10\%$:

$$r_{ef} \approx 0.10 + \frac{(0.10)^2}{2} = 0.10 + 0.005 = 10.5\%$$

Exacto con capitalización continua: $e^{0.10} - 1 = 10.52\%$ ✓

Regla del "Medio por Ciento"

Regla Práctica

Para tasas nominales alrededor del 10%, la tasa efectiva es aproximadamente **medio punto porcentual mayor** cuando se capitaliza continuamente.

Regla del "Medio por Ciento"

Regla Práctica

Para tasas nominales alrededor del 10%, la tasa efectiva es aproximadamente **medio punto porcentual mayor** cuando se capitaliza continuamente.

r_{nom}	r_{ef} (continua)	Diferencia
6%	6.18%	+0.18 pp
8%	8.33%	+0.33 pp
10%	10.52%	+0.52 pp
12%	12.75%	+0.75 pp
15%	16.18%	+1.18 pp

De Mensual a Anual Rápido

Aproximación Útil

Si conoces la tasa mensual r_m, la tasa efectiva anual es aproximadamente:

$$r_{ef} \approx 12 \cdot r_m + 66 \cdot r_m^2$$

De Mensual a Anual Rápido

Aproximación Útil

Si conoces la tasa mensual r_m, la tasa efectiva anual es aproximadamente:

$$r_{ef} \approx 12 \cdot r_m + 66 \cdot r_m^2$$

Ejemplo

Tasa mensual de 1% ($r_m = 0.01$):

$$\begin{aligned} r_{ef} &\approx 12(0.01) + 66(0.01)^2 \\ &= 0.12 + 0.0066 \\ &= 12.66\% \end{aligned}$$

Exacto: $(1.01)^{12} - 1 = 12.68\%$ ✓

HP 12C: Conversión de Tasas

La HP 12C puede convertir entre tasas nominal y efectiva.

Teclas	**Función**
`n`	Períodos de capitalización por año (m)
`i`	Tasa nominal anual / períodos
`PV`	-1 (valor inicial)
`PMT`	0 (sin pagos)
`FV`	Calcula el factor $(1 + r/m)^m$

HP 12C: Conversión de Tasas

La HP 12C puede convertir entre tasas nominal y efectiva.

Teclas	**Función**
`n`	Períodos de capitalización por año (m)
`i`	Tasa nominal anual / períodos
`PV`	-1 (valor inicial)
`PMT`	0 (sin pagos)
`FV`	Calcula el factor $(1 + r/m)^m$

Tasa efectiva = FV - 1 (expresada como decimal).

HP 12C: Ejemplo - Nominal a Efectiva

Problema

Convertir 12% nominal mensual a tasa efectiva anual.

HP 12C: Ejemplo - Nominal a Efectiva

Problema

Convertir 12% nominal mensual a tasa efectiva anual.

Teclas	Display	Descripción
`f CLX`	0.00	Limpiar
`12 n`	12.00	12 períodos (mensual)
`12 ENTER 12 ÷ i`	1.00	Tasa por período (1%)
`1 CHS PV`	-1.00	Valor inicial
`0 PMT`	0.00	Sin pagos
`FV`	**1.1268**	Factor de capitalización

HP 12C: Ejemplo - Nominal a Efectiva

Problema

Convertir 12% nominal mensual a tasa efectiva anual.

Teclas	**Display**	**Descripción**
`f CLX`	0.00	Limpiar
`12 n`	12.00	12 períodos (mensual)
`12 ENTER 12 ÷ i`	1.00	Tasa por período (1%)
`1 CHS PV`	-1.00	Valor inicial
`0 PMT`	0.00	Sin pagos
`FV`	**1.1268**	Factor de capitalización

Tasa efectiva: $1.1268 - 1 = 0.1268 = 12.68\%$

HP 12C: Ejemplo - Comparar Ofertas

Problema

Banco A: 11.5% nominal trimestral. Banco B: 11.3% nominal mensual. ¿Cuál es mejor?

HP 12C: Ejemplo - Comparar Ofertas

Problema

Banco A: 11.5% nominal trimestral. Banco B: 11.3% nominal mensual. ¿Cuál es mejor?

Banco A (trimestral, $m = 4$):

$$\texttt{4 n, 11.5 ENTER 4} \div \texttt{i, 1 CHS PV, 0 PMT, FV} \quad \to 1.1199$$

$r_{ef,A} = 11.99\%$

HP 12C: Ejemplo - Comparar Ofertas

Problema

Banco A: 11.5% nominal trimestral. Banco B: 11.3% nominal mensual. ¿Cuál es mejor?

Banco A (trimestral, $m = 4$):

$$\texttt{4 n, 11.5 ENTER 4} \div \texttt{i, 1 CHS PV, 0 PMT, FV} \quad \rightarrow 1.1199$$

$r_{ef,A} = 11.99\%$

Banco B (mensual, $m = 12$):

$$\texttt{12 n, 11.3 ENTER 12} \div \texttt{i, 1 CHS PV, 0 PMT, FV} \quad \rightarrow 1.1191$$

$r_{ef,B} = 11.91\%$

HP 12C: Ejemplo - Comparar Ofertas

Problema

Banco A: 11.5% nominal trimestral. Banco B: 11.3% nominal mensual. ¿Cuál es mejor?

Banco A (trimestral, $m = 4$):

$$\texttt{4 n, 11.5 ENTER 4} \div \texttt{i, 1 CHS PV, 0 PMT, FV} \quad \rightarrow 1.1199$$

$r_{ef,A} = 11.99\%$

Banco B (mensual, $m = 12$):

$$\texttt{12 n, 11.3 ENTER 12} \div \texttt{i, 1 CHS PV, 0 PMT, FV} \quad \rightarrow 1.1191$$

$r_{ef,B} = 11.91\%$

Conclusión: Banco A es mejor ($11.99\% > 11.91\%$) a pesar de menor frecuencia.

Ejercicio 1: Tasa Efectiva Básica

Problema

Una tarjeta de crédito cobra 24% nominal anual con capitalización mensual. ¿Cuál es la tasa efectiva anual que realmente pagas?

Ejercicio 1: Tasa Efectiva Básica

Problema

Una tarjeta de crédito cobra 24% nominal anual con capitalización mensual. ¿Cuál es la tasa efectiva anual que realmente pagas?

Solución:

$$\begin{aligned} r_{ef} &= \left(1 + \frac{0.24}{12}\right)^{12} - 1 \\ &= (1 + 0.02)^{12} - 1 \\ &= (1.02)^{12} - 1 \\ &= 1.2682 - 1 = 26.82\% \end{aligned}$$

Ejercicio 1: Tasa Efectiva Básica

Problema

Una tarjeta de crédito cobra 24% nominal anual con capitalización mensual. ¿Cuál es la tasa efectiva anual que realmente pagas?

Solución:

$$
\begin{aligned}
r_{ef} &= \left(1 + \frac{0.24}{12}\right)^{12} - 1 \\
&= (1 + 0.02)^{12} - 1 \\
&= (1.02)^{12} - 1 \\
&= 1.2682 - 1 = 26.82\%
\end{aligned}
$$

Respuesta: La tasa efectiva es 26.82%, casi 3 pp más que la nominal.

Ejercicio 2: Comparación de Inversiones

Problema

Opción A: 9% nominal semestral. Opción B: 8.8% nominal mensual. ¿Cuál ofrece mejor rendimiento?

Ejercicio 2: Comparación de Inversiones

Problema

Opción A: 9% nominal semestral. Opción B: 8.8% nominal mensual. ¿Cuál ofrece mejor rendimiento?

Opción A:

$$r_{ef,A} = \left(1 + \frac{0.09}{2}\right)^2 - 1 = (1.045)^2 - 1 = 9.20\%$$

Ejercicio 2: Comparación de Inversiones

Problema

Opción A: 9% nominal semestral. Opción B: 8.8% nominal mensual. ¿Cuál ofrece mejor rendimiento?

Opción A:

$$r_{ef,A} = \left(1 + \frac{0.09}{2}\right)^2 - 1 = (1.045)^2 - 1 = 9.20\%$$

Opción B:

$$r_{ef,B} = \left(1 + \frac{0.088}{12}\right)^{12} - 1 = (1.00733)^{12} - 1 = 9.16\%$$

Ejercicio 2: Comparación de Inversiones

Problema

Opción A: 9% nominal semestral. Opción B: 8.8% nominal mensual. ¿Cuál ofrece mejor rendimiento?

Opción A:

$$r_{ef,A} = \left(1 + \frac{0.09}{2}\right)^2 - 1 = (1.045)^2 - 1 = 9.20\%$$

Opción B:

$$r_{ef,B} = \left(1 + \frac{0.088}{12}\right)^{12} - 1 = (1.00733)^{12} - 1 = 9.16\%$$

Respuesta: Opción A es ligeramente mejor (9.20% vs 9.16%).

Ejercicio 3: Tasa Continua

Problema

Un banco ofrece 6% con capitalización continua. ¿Cuánto tendrás después de 5 años si inviertes \$10,000?

Ejercicio 3: Tasa Continua

Problema

Un banco ofrece 6% con capitalización continua. ¿Cuánto tendrás después de 5 años si inviertes $10,000?

Solución:

$$F = P \cdot e^{r \cdot t}$$

$$F = 10,000 \cdot e^{0.06 \times 5}$$

$$F = 10,000 \cdot e^{0.30}$$

$$F = 10,000 \times 1.3499$$

$$F = \$13,498.59$$

Ejercicio 3: Tasa Continua

Problema

Un banco ofrece 6% con capitalización continua. ¿Cuánto tendrás después de 5 años si inviertes $10,000?

Solución:

$$F = P \cdot e^{r \cdot t}$$

$$F = 10,000 \cdot e^{0.06 \times 5}$$

$$F = 10,000 \cdot e^{0.30}$$

$$F = 10,000 \times 1.3499$$

$$F = \$13,498.59$$

Tasa efectiva equivalente: $r_{ef} = e^{0.06} - 1 = 6.18\%$

Ejercicio 4: Encontrar Tasa Nominal

Problema

Si quieres obtener una tasa efectiva del 15% anual, ¿qué tasa nominal necesitas si la capitalización es trimestral?

Ejercicio 4: Encontrar Tasa Nominal

Problema

Si quieres obtener una tasa efectiva del 15% anual, ¿qué tasa nominal necesitas si la capitalización es trimestral?

Solución:

$$
\begin{aligned}
1 + r_{ef} &= \left(1 + \frac{r_{nom}}{4}\right)^4 \\
1.15 &= \left(1 + \frac{r_{nom}}{4}\right)^4 \\
(1.15)^{1/4} &= 1 + \frac{r_{nom}}{4} \\
1.0356 &= 1 + \frac{r_{nom}}{4} \\
r_{nom} &= 4 \times 0.0356 = 14.23\%
\end{aligned}
$$

Ejercicio 4: Encontrar Tasa Nominal

Problema

Si quieres obtener una tasa efectiva del 15% anual, ¿qué tasa nominal necesitas si la capitalización es trimestral?

Solución:

$$
\begin{aligned}
1 + r_{ef} &= \left(1 + \frac{r_{nom}}{4}\right)^4 \\
1.15 &= \left(1 + \frac{r_{nom}}{4}\right)^4 \\
(1.15)^{1/4} &= 1 + \frac{r_{nom}}{4} \\
1.0356 &= 1 + \frac{r_{nom}}{4} \\
r_{nom} &= 4 \times 0.0356 = 14.23\%
\end{aligned}
$$

Respuesta: Necesitas 14.23% nominal trimestral.

Ejercicio 5: Puntos Base

Problema

Un bono corporativo rinde 150 puntos base sobre la tasa libre de riesgo de 4.5%. ¿Cuál es el rendimiento del bono? Si la tasa libre de riesgo sube 75 pb, ¿cuál es el nuevo rendimiento?

Ejercicio 5: Puntos Base

Problema

Un bono corporativo rinde 150 puntos base sobre la tasa libre de riesgo de 4.5%. ¿Cuál es el rendimiento del bono? Si la tasa libre de riesgo sube 75 pb, ¿cuál es el nuevo rendimiento?

Solución:

Rendimiento inicial:

$$r_{bono} = 4.5\% + 150 \text{ pb} = 4.5\% + 1.5\% = 6.0\%$$

Ejercicio 5: Puntos Base

Problema

Un bono corporativo rinde 150 puntos base sobre la tasa libre de riesgo de 4.5%. ¿Cuál es el rendimiento del bono? Si la tasa libre de riesgo sube 75 pb, ¿cuál es el nuevo rendimiento?

Solución:

Rendimiento inicial:

$$r_{bono} = 4.5\% + 150 \text{ pb} = 4.5\% + 1.5\% = 6.0\%$$

Nueva tasa libre de riesgo:

$$r_{lr,nuevo} = 4.5\% + 75 \text{ pb} = 4.5\% + 0.75\% = 5.25\%$$

Ejercicio 5: Puntos Base

Problema

Un bono corporativo rinde 150 puntos base sobre la tasa libre de riesgo de 4.5%. ¿Cuál es el rendimiento del bono? Si la tasa libre de riesgo sube 75 pb, ¿cuál es el nuevo rendimiento?

Solución:

Rendimiento inicial:

$$r_{bono} = 4.5\% + 150 \text{ pb} = 4.5\% + 1.5\% = 6.0\%$$

Nueva tasa libre de riesgo:

$$r_{lr,nuevo} = 4.5\% + 75 \text{ pb} = 4.5\% + 0.75\% = 5.25\%$$

Nuevo rendimiento del bono (asumiendo spread constante):

$$r_{bono,nuevo} = 5.25\% + 1.5\% = 6.75\%$$

Python: Convertir Tasas

```python
import numpy as np

def nominal_a_efectiva(r_nom, m):
    """Convierte tasa nominal a efectiva."""
    return (1 + r_nom/m)**m - 1

def efectiva_a_nominal(r_ef, m):
    """Convierte tasa efectiva a nominal."""
    return m * ((1 + r_ef)**(1/m) - 1)

def continua_a_efectiva(r_c):
    """Convierte tasa continua a efectiva."""
    return np.exp(r_c) - 1

def efectiva_a_continua(r_ef):
    """Convierte tasa efectiva a continua."""
    return np.log(1 + r_ef)

# Ejemplos
```

Python: Comparación de Ofertas

```python
# Comparar ofertas de bancos
ofertas = [
    ("Banco A", 0.12, 1),     # 12% anual
    ("Banco B", 0.12, 2),     # 12% semestral
    ("Banco C", 0.12, 4),     # 12% trimestral
    ("Banco D", 0.12, 12),    # 12% mensual
    ("Banco E", 0.12, 365),   # 12% diaria
]

print("Banco      | Nominal | Freq  | Efectiva")
print("-" * 45)

for nombre, r_nom, m in ofertas:
    r_ef = (1 + r_nom/m)**m - 1
    freq = ["Anual", "Semest", "Trim", "Mensual", "Diaria"]
    print(f"{nombre:10} | {r_nom*100:5.1f}%  | {m:5d} | {r_ef*100:.2f}%")

# Tasa continua como limite
r_continua = np.exp(0.12) - 1
```

Python: Gráfica de Convergencia

```
import matplotlib.pyplot as plt

r_nom = 0.12
frecuencias = range(1, 366)
tasas_efectivas = [(1 + r_nom/m)**m - 1 for m in frecuencias]
limite_continuo = np.exp(r_nom) - 1

plt.figure(figsize=(10, 6))
plt.plot(frecuencias, [r*100 for r in tasas_efectivas],
         'b-', label='Tasa efectiva')
plt.axhline(y=limite_continuo*100, color='r', linestyle='--',
            label=f'Limite continuo: {limite_continuo*100:.2f}%')
plt.xlabel('Frecuencia de capitalizacion (m)')
plt.ylabel('Tasa efectiva (%)')
plt.title('Convergencia de Tasa Efectiva')
plt.legend()
plt.grid(True)
plt.savefig('convergencia_tasa.png')
```

Resumen de Fórmulas

Tasa Efectiva

$$r_{ef} = \left(1 + \frac{r_{nom}}{m}\right)^m - 1$$

Tasa Nominal desde Efectiva

$$r_{nom} = m\left[(1 + r_{ef})^{1/m} - 1\right]$$

Capitalización Continua

$$F = P \cdot e^{r \cdot t}$$
$$r_{ef} = e^{r_c} - 1$$

Puntos Base

$$1 \text{ pb} = 0.01\%$$
$$100 \text{ pb} = 1\%$$

Conceptos Clave

1. La **tasa nominal** no refleja el efecto de capitalización
2. La **tasa efectiva** es el rendimiento real anual
3. Mayor frecuencia de capitalización = mayor tasa efectiva
4. El límite es la **capitalización continua**: e^r
5. **APR** (nominal) vs. **APY** (efectiva)
6. **Puntos base** eliminan ambigüedad: 100 pb = 1%
7. Siempre compara inversiones usando la misma métrica

Tarea para la Próxima Sesión

1. **Ejercicios HP 12C:**
   - Convertir 18% nominal mensual a tasa efectiva
   - Encontrar tasa nominal trimestral equivalente a 10% efectiva
2. **Problema:** Un préstamo cobra 1.5% mensual. Calcula (a) APR, (b) APY, (c) cuánto pagarás de interés en un año sobre $100,000.
3. **Python:** Crea una función que reciba una tasa en cualquier formato (nominal, efectiva, continua) y la convierta a los otros dos.
4. **Reflexión:** ¿Por qué crees que las regulaciones en algunos países exigen que los bancos publiquen la tasa efectiva (APY)?

¿Preguntas?

Próxima Sesión:

Inflación y Tasas Reales

Semana 2, Clase 2