Anualidades Ordinarias (Vencidas)

Series de pagos iguales y periódicos

Matemáticas Financieras

Valor del Dinero en el Tiempo

Semana 3 | Clase 1 | Duración: 1h 50min

Contenido de la Sesión

Conexión con las Sesiones Anteriores

Hasta ahora: Flujos Únicos

Aprendimos a calcular VP y VF de flujos **individuales**:

$$F = P(1+r)^n \quad \text{y} \quad P = \frac{F}{(1+r)^n}$$

Conexión con las Sesiones Anteriores

Hasta ahora: Flujos Únicos

Aprendimos a calcular VP y VF de flujos **individuales**:

$$F = P(1+r)^n \quad \text{y} \quad P = \frac{F}{(1+r)^n}$$

Ahora: Flujos Múltiples

¿Qué pasa cuando hay **múltiples flujos iguales y periódicos**?

Ejemplos: pagos mensuales de un préstamo, depósitos a un fondo de ahorro, rentas, pensiones...

Conexión con las Sesiones Anteriores

Hasta ahora: Flujos Únicos

Aprendimos a calcular VP y VF de flujos **individuales**:

$$F = P(1+r)^n \quad \text{y} \quad P = \frac{F}{(1+r)^n}$$

Ahora: Flujos Múltiples

¿Qué pasa cuando hay **múltiples flujos iguales y periódicos**?

Ejemplos: pagos mensuales de un préstamo, depósitos a un fondo de ahorro, rentas, pensiones...

Ventaja

Existe una fórmula cerrada para calcular VP y VF de estos flujos.

Objetivos de Aprendizaje

Al finalizar esta sesión, serás capaz de:

1. Identificar y caracterizar una anualidad ordinaria
2. Derivar la fórmula del valor presente de una anualidad
3. Derivar la fórmula del valor futuro de una anualidad
4. Calcular el pago periódico dado VP, VF, tasa y períodos
5. Aplicar anualidades a fondos de ahorro y préstamos
6. Usar la HP 12C y Python para cálculos de anualidades

Motivación: El Problema del Préstamo

Escenario Común

Pides un préstamo de \$500,000 para comprar un auto.

- Tasa: 12% anual (1% mensual)
- Plazo: 48 meses
- Pagos mensuales iguales

¿Cuánto será tu pago mensual?

Motivación: El Problema del Préstamo

Escenario Común

Pides un préstamo de \$500,000 para comprar un auto.

- Tasa: 12% anual (1% mensual)
- Plazo: 48 meses
- Pagos mensuales iguales

¿Cuánto será tu pago mensual?

Sin fórmula de anualidades:

- Tendríamos que plantear 48 ecuaciones
- O usar métodos de prueba y error

Motivación: El Problema del Préstamo

Escenario Común

Pides un préstamo de \$500,000 para comprar un auto.

- Tasa: 12% anual (1% mensual)
- Plazo: 48 meses
- Pagos mensuales iguales

¿Cuánto será tu pago mensual?

Sin fórmula de anualidades:

- Tendríamos que plantear 48 ecuaciones
- O usar métodos de prueba y error

Con fórmula de anualidades:

- Un solo cálculo directo
- Respuesta: \$13,166.75 mensuales

¿Qué es una Anualidad?

Definición

Una **anualidad** es una serie de pagos iguales (PMT) realizados a intervalos regulares de tiempo durante un período determinado.

¿Qué es una Anualidad?

Definición

Una **anualidad** es una serie de pagos iguales (PMT) realizados a intervalos regulares de tiempo durante un período determinado.

Características:

1. Pagos de **monto igual**
2. Pagos a **intervalos regulares** (mes, trimestre, año)
3. **Tasa de interés constante** durante todo el período
4. Número **finito** de pagos

¿Qué es una Anualidad?

Definición

Una **anualidad** es una serie de pagos iguales (PMT) realizados a intervalos regulares de tiempo durante un período determinado.

Características:

1. Pagos de **monto igual**
2. Pagos a **intervalos regulares** (mes, trimestre, año)
3. **Tasa de interés constante** durante todo el período
4. Número **finito** de pagos

Nota sobre el nombre

A pesar de llamarse "anualidad", los pagos no tienen que ser anuales. El nombre viene de la palabra latina "annus" (año), pero aplica a cualquier período.

Tipos de Anualidades

Anualidad Ordinaria (Vencida)

Pagos al **final** de cada período.

Ejemplos:

- Pagos de préstamos
- Cupones de bonos
- Salarios

Anualidad Anticipada

Pagos al **inicio** de cada período.

Ejemplos:

- Rentas (alquileres)
- Primas de seguros
- Cuotas de membresía

Tipos de Anualidades

Anualidad Ordinaria (Vencida)

Pagos al **final** de cada período.

Ejemplos:

- Pagos de préstamos
- Cupones de bonos
- Salarios

Anualidad Anticipada

Pagos al **inicio** de cada período.

Ejemplos:

- Rentas (alquileres)
- Primas de seguros
- Cuotas de membresía

Hoy nos enfocamos en anualidades ordinarias (vencidas).

Las anticipadas se verán en la Sesión 6.

Diagrama de una Anualidad Ordinaria

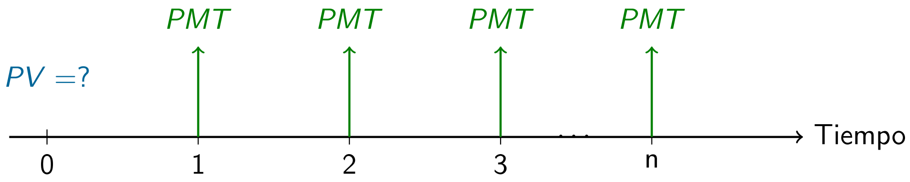
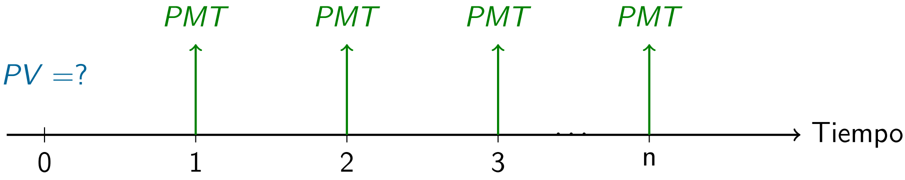


Diagrama de una Anualidad Ordinaria



Observaciones clave:

- El primer pago ocurre al final del período 1 (no en $t = 0$)
- Hay n pagos en total
- Queremos encontrar el VP en $t = 0$

Derivación del VP: Método de Suma

El VP es la suma de los VP de cada pago individual:

Derivación del VP: Método de Suma

El VP es la suma de los VP de cada pago individual:

$$PV = \frac{PMT}{(1+r)^1} + \frac{PMT}{(1+r)^2} + \frac{PMT}{(1+r)^3} + \cdots + \frac{PMT}{(1+r)^n}$$

Derivación del VP: Método de Suma

El VP es la suma de los VP de cada pago individual:

$$PV = \frac{PMT}{(1+r)^1} + \frac{PMT}{(1+r)^2} + \frac{PMT}{(1+r)^3} + \cdots + \frac{PMT}{(1+r)^n}$$

Factorizando PMT:

$$PV = PMT\left[\frac{1}{(1+r)^1} + \frac{1}{(1+r)^2} + \cdots + \frac{1}{(1+r)^n}\right]$$

Derivación del VP: Método de Suma

El VP es la suma de los VP de cada pago individual:

$$PV = \frac{PMT}{(1+r)^1} + \frac{PMT}{(1+r)^2} + \frac{PMT}{(1+r)^3} + \cdots + \frac{PMT}{(1+r)^n}$$

Factorizando PMT:

$$PV = PMT \left[\frac{1}{(1+r)^1} + \frac{1}{(1+r)^2} + \cdots + \frac{1}{(1+r)^n} \right]$$

El corchete es una **serie geométrica** con:

- Primer término: $a = \frac{1}{1+r}$
- Razón común: $q = \frac{1}{1+r}$
- n términos

Derivación del VP: Fórmula de Serie Geométrica

La suma de una serie geométrica es:

$$S_n = a \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

Derivación del VP: Fórmula de Serie Geométrica

La suma de una serie geométrica es:

$$S_n = a \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

Sustituyendo $a = \frac{1}{1+r}$ y $q = \frac{1}{1+r}$:

$$S_n = \frac{1}{1 + r} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{1+r}\right)^n}{1 - \frac{1}{1+r}}$$

Derivación del VP: Fórmula de Serie Geométrica

La suma de una serie geométrica es:

$$S_n = a \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

Sustituyendo $a = \frac{1}{1+r}$ y $q = \frac{1}{1+r}$:

$$S_n = \frac{1}{1+r} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{1+r}\right)^n}{1 - \frac{1}{1+r}}$$

Simplificando el denominador: $1 - \frac{1}{1+r} = \frac{r}{1+r}$

$$S_n = \frac{1}{1+r} \cdot \frac{1 - (1+r)^{-n}}{\frac{r}{1+r}} = \frac{1 - (1+r)^{-n}}{r}$$

Fórmula del Valor Presente de una Anualidad

Valor Presente de una Anualidad Ordinaria

$$\boxed{PV = PMT \cdot \frac{1-(1+r)^{-n}}{r}}$$

Fórmula del Valor Presente de una Anualidad

Valor Presente de una Anualidad Ordinaria

$$\boxed{PV = PMT \cdot \frac{1 - (1 + r)^{-n}}{r}}$$

Factor de Valor Presente de Anualidad (PVIFA)

$$\boxed{PVIFA_{r,n} = \frac{1 - (1 + r)^{-n}}{r}}$$

Por lo tanto: $PV = PMT \cdot PVIFA_{r,n}$

Fórmula del Valor Presente de una Anualidad

Valor Presente de una Anualidad Ordinaria

$$\boxed{PV = PMT \cdot \frac{1-(1+r)^{-n}}{r}}$$

Factor de Valor Presente de Anualidad (PVIFA)

$$\boxed{PVIFA_{r,n} = \frac{1-(1+r)^{-n}}{r}}$$

Por lo tanto: $PV = PMT \cdot PVIFA_{r,n}$

Interpretación

El PVIFA indica cuántos pesos de hoy equivale recibir \$1 al final de cada uno de los próximos n períodos, dado una tasa r.

Diagrama del Valor Futuro

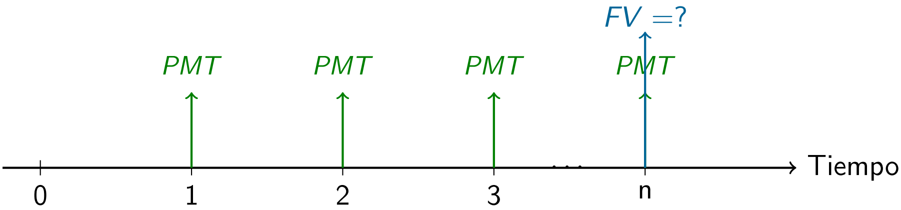
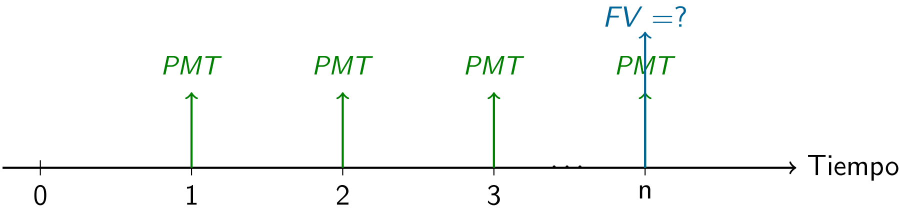


Diagrama del Valor Futuro



Pregunta: ¿Cuánto tendremos acumulado en $t = n$ si depositamos PMT al final de cada período?

Derivación del VF: Método de Suma

Cada pago crece a diferente tasa:

Derivación del VF: Método de Suma

Cada pago crece a diferente tasa:

$$FV = PMT(1+r)^{n-1} + PMT(1+r)^{n-2} + \cdots + PMT(1+r)^{1} + PMT$$

Derivación del VF: Método de Suma

Cada pago crece a diferente tasa:

$$FV = PMT(1+r)^{n-1} + PMT(1+r)^{n-2} + \cdots + PMT(1+r)^{1} + PMT$$

El primer pago (en $t = 1$) crece por $n - 1$ períodos.
El último pago (en $t = n$) no gana interés (acaba de llegar).

Derivación del VF: Método de Suma

Cada pago crece a diferente tasa:

$$FV = PMT(1+r)^{n-1} + PMT(1+r)^{n-2} + \cdots + PMT(1+r)^{1} + PMT$$

El primer pago (en $t=1$) crece por $n-1$ períodos.
El último pago (en $t=n$) no gana interés (acaba de llegar).

Factorizando:

$$FV = PMT\left[(1+r)^{n-1} + (1+r)^{n-2} + \cdots + (1+r) + 1\right]$$

Derivación del VF: Método de Suma

Cada pago crece a diferente tasa:

$$FV = PMT(1+r)^{n-1} + PMT(1+r)^{n-2} + \cdots + PMT(1+r)^{1} + PMT$$

El primer pago (en $t = 1$) crece por $n - 1$ períodos.
El último pago (en $t = n$) no gana interés (acaba de llegar).

Factorizando:

$$FV = PMT\left[(1+r)^{n-1} + (1+r)^{n-2} + \cdots + (1+r) + 1\right]$$

Otra serie geométrica con:

- $a = 1$, $q = (1+r)$, n términos

Fórmula del Valor Futuro de una Anualidad

Usando la fórmula de serie geométrica con $a = 1$ y $q = (1 + r)$:

$$S_n = \frac{(1+r)^n - 1}{(1+r) - 1} = \frac{(1+r)^n - 1}{r}$$

Fórmula del Valor Futuro de una Anualidad

Usando la fórmula de serie geométrica con $a = 1$ y $q = (1 + r)$:

$$S_n = \frac{(1+r)^n - 1}{(1+r) - 1} = \frac{(1+r)^n - 1}{r}$$

Valor Futuro de una Anualidad Ordinaria

$$\boxed{FV = PMT \cdot \frac{(1+r)^n - 1}{r}}$$

Fórmula del Valor Futuro de una Anualidad

Usando la fórmula de serie geométrica con $a = 1$ y $q = (1 + r)$:

$$S_n = \frac{(1 + r)^n - 1}{(1 + r) - 1} = \frac{(1 + r)^n - 1}{r}$$

Valor Futuro de una Anualidad Ordinaria

$$\boxed{FV = PMT \cdot \frac{(1 + r)^n - 1}{r}}$$

Factor de Valor Futuro de Anualidad (FVIFA)

$$\boxed{FVIFA_{r,n} = \frac{(1 + r)^n - 1}{r}}$$

Por lo tanto: $FV = PMT \cdot FVIFA_{r,n}$

Relación entre PVIFA y FVIFA

Relación Importante

$$\boxed{FV = PV \cdot (1 + r)^n}$$

Por lo tanto:

$$FVIFA_{r,n} = PVIFA_{r,n} \cdot (1 + r)^n$$

Relación entre PVIFA y FVIFA

Relación Importante

$$\boxed{FV = PV \cdot (1+r)^n}$$

Por lo tanto:

$$FVIFA_{r,n} = PVIFA_{r,n} \cdot (1+r)^n$$

Verificación:

$$\begin{aligned} PVIFA \cdot (1+r)^n &= \frac{1-(1+r)^{-n}}{r} \cdot (1+r)^n \\ &= \frac{(1+r)^n - 1}{r} = FVIFA \quad \checkmark \end{aligned}$$

Cálculo del Pago Periódico

A menudo necesitamos encontrar PMT dado PV o FV.

Cálculo del Pago Periódico

A menudo necesitamos encontrar *PMT* dado *PV* o *FV*.

Dado el Valor Presente:

$$PV = PMT \cdot \frac{1-(1+r)^{-n}}{r}$$

Pago dado VP

$$\boxed{PMT = PV \cdot \frac{r}{1-(1+r)^{-n}}}$$

Cálculo del Pago Periódico

A menudo necesitamos encontrar PMT dado PV o FV.

Dado el Valor Presente:

$$PV = PMT \cdot \frac{1-(1+r)^{-n}}{r}$$

Pago dado VP

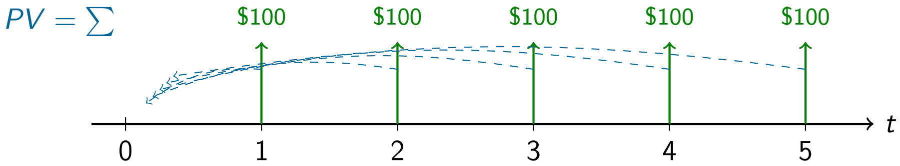
$$\boxed{PMT = PV \cdot \frac{r}{1-(1+r)^{-n}}}$$

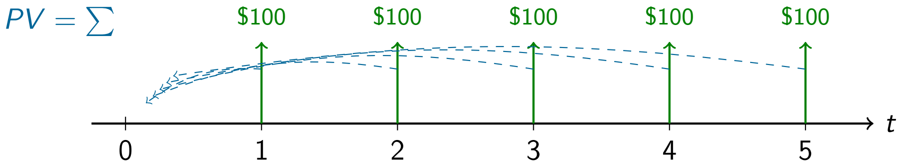
Dado el Valor Futuro:

Pago dado VF

$$\boxed{PMT = FV \cdot \frac{r}{(1+r)^{n}-1}}$$

Visualización del VP de una Anualidad

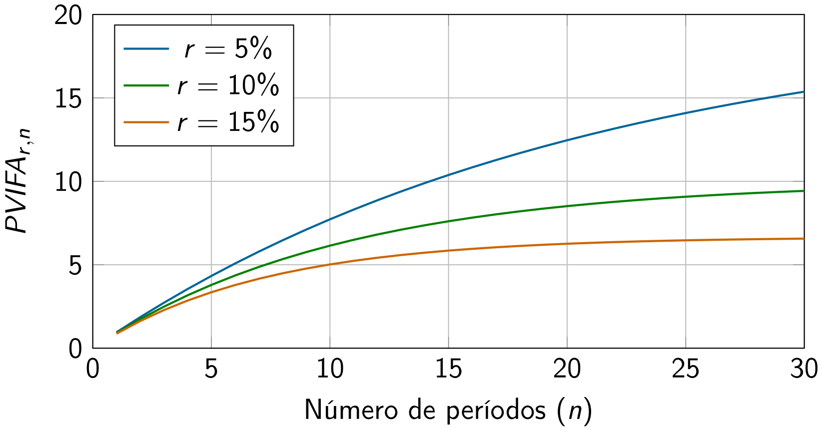




Ejemplo: 5 pagos de $100 al 10%

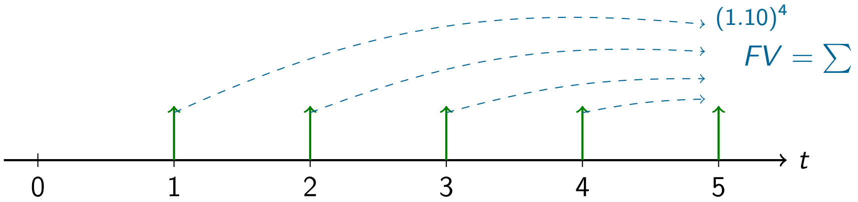
$PV = 100 \cdot \frac{1-(1.10)^{-5}}{0.10} = 100 \times 3.7908 = \$379.08$

PVIFA para Diferentes Tasas y Plazos



A menor tasa, mayor PVIFA (los flujos futuros valen más hoy).

Visualización del VF de una Anualidad



Ejemplo: 5 depósitos de \$100 al 10%

$FV = 100 \cdot \frac{(1.10)^5 - 1}{0.10} = 100 \times 6.1051 = \$610.51$

Aproximación para el PVIFA

Para tasas bajas y plazos largos

Cuando n es grande, $(1 + r)^{-n} \to 0$, entonces:

$$PVIFA_{r,n} \approx \frac{1}{r}$$

Este es el valor de una **perpetuidad** (la veremos en la sesión 6).

Aproximación para el PVIFA

Para tasas bajas y plazos largos

Cuando n es grande, $(1+r)^{-n} \to 0$, entonces:

$$PVIFA_{r,n} \approx \frac{1}{r}$$

Este es el valor de una **perpetuidad** (la veremos en la sesión 6).

Ejemplo: PVIFA al 5% por 50 años
Aproximación: $1/0.05 = 20$
Exacto: $\frac{1-(1.05)^{-50}}{0.05} = 18.26$

Aproximación para el PVIFA

Para tasas bajas y plazos largos

Cuando n es grande, $(1+r)^{-n} \to 0$, entonces:

$$PVIFA_{r,n} \approx \frac{1}{r}$$

Este es el valor de una **perpetuidad** (la veremos en la sesión 6).

Ejemplo: PVIFA al 5% por 50 años
Aproximación: $1/0.05 = 20$
Exacto: $\frac{1-(1.05)^{-50}}{0.05} = 18.26$

Uso práctico

Si alguien dice "Esta inversión paga \$1,000 anuales por 30 años al 5%", puedes estimar rápidamente: VP $\approx$ \$20,000 (en realidad \$15,372).

Tabla de PVIFA

Factor de Valor Presente de Anualidad:

$r \setminus n$	5	10	15	20	30
5%	4.33	7.72	10.38	12.46	15.37
8%	3.99	6.71	8.56	9.82	11.26
10%	3.79	6.14	7.61	8.51	9.43
12%	3.60	5.65	6.81	7.47	8.06
15%	3.35	5.02	5.85	6.26	6.57

Tabla de PVIFA

Factor de Valor Presente de Anualidad:

$r \setminus n$	5	10	15	20	30
5%	4.33	7.72	10.38	12.46	15.37
8%	3.99	6.71	8.56	9.82	11.26
10%	3.79	6.14	7.61	8.51	9.43
12%	3.60	5.65	6.81	7.47	8.06
15%	3.35	5.02	5.85	6.26	6.57

Uso

VP de 20 pagos de \$5,000 al 10%:
$PV = 5,000 \times 8.51 = \$42,550$

El “Factor de Recuperación de Capital”

Definición

El inverso del PVIFA indica cuánto pago anual se necesita para “recuperar” (o amortizar) \$1 de deuda:

$$\mathrm{FRC} = \frac{r}{1-(1+r)^{-n}} = \frac{1}{PVIFA}$$

El “Factor de Recuperación de Capital”

Definición

El inverso del PVIFA indica cuánto pago anual se necesita para “recuperar” (o amortizar) \$1 de deuda:

$$\text{FRC} = \frac{r}{1-(1+r)^{-n}} = \frac{1}{PVIFA}$$

Ejemplo: ¿Pago mensual de un préstamo de \$100,000 a 5 años al 12% anual (1% mensual)?
$n = 60$ meses, $r = 1\%$

El "Factor de Recuperación de Capital"

Definición

El inverso del PVIFA indica cuánto pago anual se necesita para "recuperar" (o amortizar) $1 de deuda:

$$\text{FRC} = \frac{r}{1-(1+r)^{-n}} = \frac{1}{PVIFA}$$

Ejemplo: ¿Pago mensual de un préstamo de $100,000 a 5 años al 12% anual (1% mensual)?
$n = 60$ meses, $r = 1\%$
$PVIFA = \frac{1-(1.01)^{-60}}{0.01} = 44.955$
$PMT = 100,000/44.955 = \$2,224.44$ mensuales

HP 12C: Teclas para Anualidades

Tecla	Función
`n`	Número de períodos (pagos)
`i`	Tasa de interés por período (%)
`PV`	Valor presente
`PMT`	Pago periódico
`FV`	Valor futuro
g `END`	Modo anualidad ordinaria (default)
g `BEG`	Modo anualidad anticipada

HP 12C: Teclas para Anualidades

Tecla	Función
n	Número de períodos (pagos)
i	Tasa de interés por período (%)
PV	Valor presente
PMT	Pago periódico
FV	Valor futuro
g END	Modo anualidad ordinaria (default)
g BEG	Modo anualidad anticipada

Convención de Signos

- Flujos que **salen** de ti: negativos
- Flujos que **entran** a ti: positivos
- PV y FV deben tener signos opuestos a PMT (o uno de ellos ser 0)

HP 12C: Ejemplo 1 - Calcular Pago de Préstamo

Problema

Préstamo de $500,000, 48 meses, 1% mensual. ¿Cuál es el pago mensual?

HP 12C: Ejemplo 1 - Calcular Pago de Préstamo

Problema

Préstamo de $500,000, 48 meses, 1% mensual. ¿Cuál es el pago mensual?

Teclas	Display	Descripción
`f CLX`	0.00	Limpiar
`g END`		Modo ordinario
`500000 PV`	500,000.00	Préstamo recibido (+)
`48 n`	48.00	48 meses
`1 i`	1.00	1% mensual
`0 FV`	0.00	Sin valor residual
`PMT`	**-13,166.75**	Pago mensual

HP 12C: Ejemplo 1 - Calcular Pago de Préstamo

Problema

Préstamo de $500,000, 48 meses, 1% mensual. ¿Cuál es el pago mensual?

Teclas	Display	Descripción
`f CLX`	0.00	Limpiar
`g END`		Modo ordinario
`500000 PV`	500,000.00	Préstamo recibido (+)
`48 n`	48.00	48 meses
`1 i`	1.00	1% mensual
`0 FV`	0.00	Sin valor residual
`PMT`	**-13,166.75**	Pago mensual

Respuesta: $13,166.75 mensuales (negativo porque sale de ti).

HP 12C: Ejemplo 2 - Calcular VP de Anualidad

Problema

Una inversión paga $10,000 anuales por 15 años. Si la tasa es 8%, ¿cuánto vale hoy?

HP 12C: Ejemplo 2 - Calcular VP de Anualidad

Problema

Una inversión paga $10,000 anuales por 15 años. Si la tasa es 8%, ¿cuánto vale hoy?

Teclas	**Display**	**Descripción**
`f CLX`	0.00	Limpiar
`g END`		Modo ordinario
`10000 PMT`	10,000.00	Pago que recibes (+)
`15 n`	15.00	15 años
`8 i`	8.00	8% anual
`0 FV`	0.00	Sin valor final
`PV`	**-85,594.79**	Valor presente

HP 12C: Ejemplo 2 - Calcular VP de Anualidad

Problema

Una inversión paga $10,000 anuales por 15 años. Si la tasa es 8%, ¿cuánto vale hoy?

Teclas	Display	Descripción
`f CLX`	0.00	Limpiar
`g END`		Modo ordinario
`10000 PMT`	10,000.00	Pago que recibes (+)
`15 n`	15.00	15 años
`8 i`	8.00	8% anual
`0 FV`	0.00	Sin valor final
`PV`	**-85,594.79**	Valor presente

Respuesta: $85,594.79 (negativo indica cuánto pagarías hoy).

HP 12C: Ejemplo 3 - Fondo de Ahorro

Problema

Quieres ahorrar \$1,000,000 en 20 años. Si el fondo paga 6% anual, ¿cuánto debes depositar cada año?

HP 12C: Ejemplo 3 - Fondo de Ahorro

Problema

Quieres ahorrar \$1,000,000 en 20 años. Si el fondo paga 6% anual, ¿cuánto debes depositar cada año?

Teclas	**Display**	**Descripción**
`f CLX`	0.00	Limpiar
`g END`		Modo ordinario
`1000000 FV`	1,000,000.00	Meta de ahorro (+)
`20 n`	20.00	20 años
`6 i`	6.00	6% anual
`0 PV`	0.00	Sin inversión inicial
`PMT`	**-27,184.56**	Depósito anual

HP 12C: Ejemplo 3 - Fondo de Ahorro

Problema

Quieres ahorrar \$1,000,000 en 20 años. Si el fondo paga 6% anual, ¿cuánto debes depositar cada año?

Teclas	Display	Descripción
`f CLX`	0.00	Limpiar
`g END`		Modo ordinario
`1000000 FV`	1,000,000.00	Meta de ahorro (+)
`20 n`	20.00	20 años
`6 i`	6.00	6% anual
`0 PV`	0.00	Sin inversión inicial
`PMT`	**-27,184.56**	Depósito anual

Respuesta: Debes depositar \$27,184.56 anuales.

Ejercicio 1: Préstamo de Auto

Problema

Financias un auto de \$350,000 a 36 meses con tasa del 18% anual (1.5% mensual). ¿Cuál es el pago mensual?

Ejercicio 1: Préstamo de Auto

Problema

Financias un auto de $350,000 a 36 meses con tasa del 18% anual (1.5% mensual). ¿Cuál es el pago mensual?

Solución:

$$PMT = PV \cdot \frac{r}{1-(1+r)^{-n}}$$

$$PMT = 350,000 \cdot \frac{0.015}{1-(1.015)^{-36}}$$

$$PMT = 350,000 \cdot \frac{0.015}{1-0.5851}$$

$$PMT = 350,000 \cdot \frac{0.015}{0.4149}$$

Ejercicio 2: Valor de una Anualidad

Problema

Una renta vitalicia paga \$25,000 anuales por 30 años, comenzando en un año. Si la tasa de descuento es 7%, ¿cuánto vale hoy?

Ejercicio 2: Valor de una Anualidad

Problema

Una renta vitalicia paga \$25,000 anuales por 30 años, comenzando en un año. Si la tasa de descuento es 7%, ¿cuánto vale hoy?

Solución:

$$PV = PMT \cdot \frac{1-(1+r)^{-n}}{r}$$

$$PV = 25,000 \cdot \frac{1-(1.07)^{-30}}{0.07}$$

$$PV = 25,000 \cdot \frac{1-0.1314}{0.07}$$

$$PV = 25,000 \cdot 12.409 = \$310,225$$

Ejercicio 3: Fondo de Retiro

Problema

Quieres tener \$5,000,000 al retirarte en 30 años. Si tu fondo rinde 8% anual, ¿cuánto debes aportar mensualmente? (Usa tasa mensual equivalente)

Ejercicio 3: Fondo de Retiro

Problema

Quieres tener \$5,000,000 al retirarte en 30 años. Si tu fondo rinde 8% anual, ¿cuánto debes aportar mensualmente? (Usa tasa mensual equivalente)

Tasa mensual: $r_m = (1.08)^{1/12} - 1 = 0.6434\%$
Períodos: $n = 30 \times 12 = 360$

Ejercicio 3: Fondo de Retiro

Problema

Quieres tener \$5,000,000 al retirarte en 30 años. Si tu fondo rinde 8% anual, ¿cuánto debes aportar mensualmente? (Usa tasa mensual equivalente)

Tasa mensual: $r_m = (1.08)^{1/12} - 1 = 0.6434\%$
Períodos: $n = 30 \times 12 = 360$
Solución:

$$PMT = FV \cdot \frac{r}{(1+r)^n - 1}$$

$$PMT = 5,000,000 \cdot \frac{0.006434}{(1.006434)^{360} - 1}$$

$$PMT = 5,000,000 \cdot \frac{0.006434}{9.0627}$$

$$PMT = \$3,549.04 \text{ mensuales}$$

Ejercicio 4: ¿Cuántos Pagos?

Problema

Tienes una deuda de \$80,000 que pagas con mensualidades de \$2,500 al 1.5% mensual. ¿En cuántos meses la pagas?

Ejercicio 4: ¿Cuántos Pagos?

Problema

Tienes una deuda de \$80,000 que pagas con mensualidades de \$2,500 al 1.5% mensual. ¿En cuántos meses la pagas?

Solución:

$$PV = PMT \cdot \frac{1-(1+r)^{-n}}{r}$$

$$80,000 = 2,500 \cdot \frac{1-(1.015)^{-n}}{0.015}$$

$$\frac{80,000 \times 0.015}{2,500} = 1-(1.015)^{-n}$$

$$0.48 = 1-(1.015)^{-n}$$

$$(1.015)^{-n} = 0.52$$

$$-n \cdot \ln(1.015) = \ln(0.52)$$

Ejercicio 5: Comparación de Préstamos

Problema

Banco A: \$200,000 a 24 meses, 1.2% mensual.

Banco B: \$200,000 a 36 meses, 1.0% mensual.

¿Cuál tiene menor pago? ¿Cuál paga menos intereses totales?

Ejercicio 5: Comparación de Préstamos

Problema

Banco A: \$200,000 a 24 meses, 1.2% mensual.
Banco B: \$200,000 a 36 meses, 1.0% mensual.
¿Cuál tiene menor pago? ¿Cuál paga menos intereses totales?

Banco A: $PMT_A = 200,000 \cdot \frac{0.012}{1-(1.012)^{-24}} = \$9,526.67$
Total pagado: $9,526.67 \times 24 = \$228,640$
Intereses: $228,640 - 200,000 = \$28,640$

Ejercicio 5: Comparación de Préstamos

Problema

Banco A: \$200,000 a 24 meses, 1.2% mensual.
Banco B: \$200,000 a 36 meses, 1.0% mensual.
¿Cuál tiene menor pago? ¿Cuál paga menos intereses totales?

Banco A: $PMT_A = 200,000 \cdot \frac{0.012}{1-(1.012)^{-24}} = \$9,526.67$
Total pagado: $9,526.67 \times 24 = \$228,640$
Intereses: $228,640 - 200,000 = \$28,640$
Banco B: $PMT_B = 200,000 \cdot \frac{0.01}{1-(1.01)^{-36}} = \$6,643.38$
Total pagado: $6,643.38 \times 36 = \$239,162$
Intereses: $239,162 - 200,000 = \$39,162$

Ejercicio 5: Comparación de Préstamos

Problema

Banco A: $200,000 a 24 meses, 1.2% mensual.
Banco B: $200,000 a 36 meses, 1.0% mensual.
¿Cuál tiene menor pago? ¿Cuál paga menos intereses totales?

Banco A: $PMT_A = 200,000 \cdot \frac{0.012}{1-(1.012)^{-24}} = \$9,526.67$
Total pagado: $9,526.67 \times 24 = \$228,640$
Intereses: $228,640 - 200,000 = \$28,640$
Banco B: $PMT_B = 200,000 \cdot \frac{0.01}{1-(1.01)^{-36}} = \$6,643.38$
Total pagado: $6,643.38 \times 36 = \$239,162$
Intereses: $239,162 - 200,000 = \$39,162$
Banco B tiene menor pago, pero **Banco A** paga menos intereses totales.

Python: Funciones de Anualidades

```python
import numpy_financial as npf

# Calcular pago de prestamo
pv = 500000         # Monto del prestamo
n = 48              # Meses
r = 0.01            # 1% mensual

pmt = npf.pmt(rate=r, nper=n, pv=pv, fv=0)
print(f"Pago mensual: ${-pmt:,.2f}")

# Calcular valor presente de anualidad
pmt_anual = 10000
n_años = 15
r_anual = 0.08

pv = npf.pv(rate=r_anual, nper=n_años, pmt=pmt_anual, fv=0)
print(f"Valor presente: ${-pv:,.2f}")

# Calcular valor futuro (fondo de ahorro)
```

Python: Tabla de Amortización (Preview)

```python
import numpy_financial as npf

def tabla_amortizacion(pv, r, n):
    pmt = -npf.pmt(r, n, pv)
    saldo = pv

    print("Mes | Pago      | Interes   | Capital   | Saldo")
    print("-" * 55)

    for mes in range(1, min(n+1, 6)):  # Primeros 5 meses
        interes = saldo * r
        capital = pmt - interes
        saldo -= capital
        print(f"{mes:3d} | ${pmt:8,.2f} | ${interes:8,.2f} | ${capital:8,.2f} | ${saldo:10,.2f}")

    print("...")

# Ejemplo
```

Python: Comparación de Escenarios

```
import numpy_financial as npf
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np

# Comparar crecimiento de fondo de ahorro
aporte_mensual = 1000
años = 30
meses = np.arange(1, años*12 + 1)

tasas = [0.005, 0.007, 0.01]  # 6%, 8.4%, 12% anual aprox
labels = ['6%', '8.4%', '12%']

plt.figure(figsize=(10, 6))
for r, label in zip(tasas, labels):
    fv = [-npf.fv(r, m, -aporte_mensual, 0) for m in meses]
    plt.plot(meses/12, np.array(fv)/1000, label=f'Tasa {label} anual')

plt.xlabel('Años')
plt.ylabel('Valor acumulado (miles $)')
```

Resumen de Fórmulas

Valor Presente

$$PV = PMT \cdot \frac{1-(1+r)^{-n}}{r}$$

Valor Futuro

$$FV = PMT \cdot \frac{(1+r)^{n}-1}{r}$$

Pago dado VP

$$PMT = PV \cdot \frac{r}{1-(1+r)^{-n}}$$

Pago dado VF

$$PMT = FV \cdot \frac{r}{(1+r)^{n}-1}$$

Relación: $FV = PV \cdot (1+r)^n$

Conceptos Clave

1. Una **anualidad** es una serie de pagos iguales y periódicos
2. **Anualidad ordinaria**: pagos al final de cada período
3. El **PVIFA** convierte una serie de pagos a valor presente
4. El **FVIFA** calcula el valor acumulado de depósitos periódicos
5. Las fórmulas vienen de sumar **series geométricas**
6. Aplicaciones: préstamos, fondos de ahorro, pensiones
7. La HP 12C tiene funciones integradas para estos cálculos

Tarea para la Próxima Sesión

1. **Ejercicios HP 12C:**
   - Pago mensual de \$300,000 a 60 meses, 1.2% mensual
   - VP de 25 pagos anuales de \$15,000 al 9%
2. **Problema:** ¿Qué es mejor: recibir \$500,000 hoy o \$45,000 anuales por 20 años? Asume tasa del 7%.
3. **Fondo de ahorro:** Si depositas \$3,000 mensuales al 0.7% mensual por 15 años, ¿cuánto acumularás?
4. **Python:** Crea una función que reciba PV, r, n y retorne el pago, y otra que calcule el total de intereses pagados en un préstamo.

¿Preguntas?

Próxima Sesión:

Anualidades Anticipadas y Perpetuidades

Semana 3, Clase 2