

Anualidades Ordinarias (Vencidas)

Series de pagos iguales y periódicos

Matemáticas Financieras

Valor del Dinero en el Tiempo

Semana 3 | Clase 1 | Duración: 1h 50min

Contenido de la Sesión

- 1 Introducción
- 2 Valor Presente de una Anualidad
- 3 Valor Futuro de una Anualidad
- 4 Despejando el Pago (PMT)
- 5 Interpretación Visual
- 6 Trucos de Estimación Mental
- 7 Calculadora HP 12C
- 8 Ejercicios Prácticos
- 9 Python con numpy-financial
- 10 Resumen y Tarea

Hasta ahora: Flujos Únicos

Aprendimos a calcular VP y VF de flujos **individuales**:

$$F = P(1 + r)^n \quad \text{y} \quad P = \frac{F}{(1 + r)^n}$$

Conexión con las Sesiones Anteriores

Hasta ahora: Flujos Únicos

Aprendimos a calcular VP y VF de flujos **individuales**:

$$F = P(1 + r)^n \quad \text{y} \quad P = \frac{F}{(1 + r)^n}$$

Ahora: Flujos Múltiples

¿Qué pasa cuando hay **múltiples flujos iguales y periódicos**?

Ejemplos: pagos mensuales de un préstamo, depósitos a un fondo de ahorro, rentas, pensiones...

Conexión con las Sesiones Anteriores

Hasta ahora: Flujos Únicos

Aprendimos a calcular VP y VF de flujos **individuales**:

$$F = P(1 + r)^n \quad \text{y} \quad P = \frac{F}{(1 + r)^n}$$

Ahora: Flujos Múltiples

¿Qué pasa cuando hay **múltiples flujos iguales y periódicos**?

Ejemplos: pagos mensuales de un préstamo, depósitos a un fondo de ahorro, rentas, pensiones...

Ventaja

Existe una fórmula cerrada para calcular VP y VF de estos flujos.

Al finalizar esta sesión, serás capaz de:

- 1 Identificar y caracterizar una anualidad ordinaria
- 2 Derivar la fórmula del valor presente de una anualidad
- 3 Derivar la fórmula del valor futuro de una anualidad
- 4 Calcular el pago periódico dado VP, VF, tasa y períodos
- 5 Aplicar anualidades a fondos de ahorro y préstamos
- 6 Usar la HP 12C y Python para cálculos de anualidades

Motivación: El Problema del Préstamo

Escenario Común

Pides un préstamo de \$500,000 para comprar un auto.

- Tasa: 12% anual (1% mensual)
- Plazo: 48 meses
- Pagos mensuales iguales

¿Cuánto será tu pago mensual?

Motivación: El Problema del Préstamo

Escenario Común

Pides un préstamo de \$500,000 para comprar un auto.

- Tasa: 12% anual (1% mensual)
- Plazo: 48 meses
- Pagos mensuales iguales

¿Cuánto será tu pago mensual?

Sin fórmula de anualidades:

- Tendríamos que plantear 48 ecuaciones
- O usar métodos de prueba y error

Motivación: El Problema del Préstamo

Escenario Común

Pides un préstamo de \$500,000 para comprar un auto.

- Tasa: 12% anual (1% mensual)
- Plazo: 48 meses
- Pagos mensuales iguales

¿Cuánto será tu pago mensual?

Sin fórmula de anualidades:

- Tendríamos que plantear 48 ecuaciones
- O usar métodos de prueba y error

Con fórmula de anualidades:

- Un solo cálculo directo
- Respuesta: \$13,166.75 mensuales

¿Qué es una Anualidad?

Definición

Una **anualidad** es una serie de pagos iguales (PMT) realizados a intervalos regulares de tiempo durante un período determinado.

¿Qué es una Anualidad?

Definición

Una **anualidad** es una serie de pagos iguales (PMT) realizados a intervalos regulares de tiempo durante un período determinado.

Características:

- 1 Pagos de **monto igual**
- 2 Pagos a **intervalos regulares** (mes, trimestre, año)
- 3 **Tasa de interés constante** durante todo el período
- 4 Número **finito** de pagos

¿Qué es una Anualidad?

Definición

Una **anualidad** es una serie de pagos iguales (PMT) realizados a intervalos regulares de tiempo durante un período determinado.

Características:

- 1 Pagos de **monto igual**
- 2 Pagos a **intervalos regulares** (mes, trimestre, año)
- 3 **Tasa de interés constante** durante todo el período
- 4 Número **finito** de pagos

Nota sobre el nombre

A pesar de llamarse “anualidad”, los pagos no tienen que ser anuales. El nombre viene de la palabra latina “annus” (año), pero aplica a cualquier período.

Anualidad Ordinaria (Vencida)

Pagos al **final** de cada período.

Ejemplos:

- Pagos de préstamos
- Cupones de bonos
- Salarios

Anualidad Anticipada

Pagos al **inicio** de cada período.

Ejemplos:

- Rentas (alquileres)
- Primas de seguros
- Cuotas de membresía

Tipos de Anualidades

Anualidad Ordinaria (Vencida)

Pagos al **final** de cada período.

Ejemplos:

- Pagos de préstamos
- Cupones de bonos
- Salarios

Anualidad Anticipada

Pagos al **inicio** de cada período.

Ejemplos:

- Rentas (alquileres)
- Primas de seguros
- Cuotas de membresía

Hoy nos enfocamos en anualidades ordinarias (vencidas).
Las anticipadas se verán en la Sesión 6.

Diagrama de una Anualidad Ordinaria

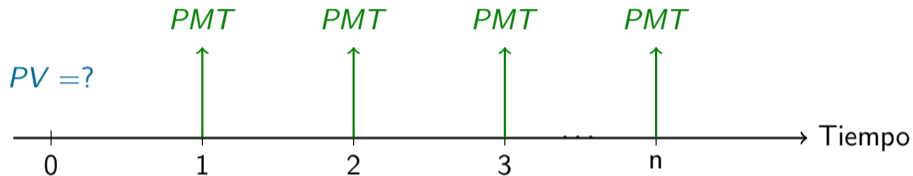
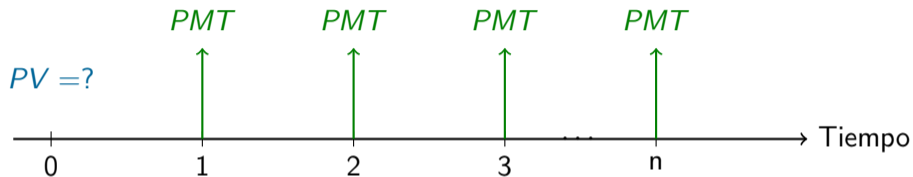


Diagrama de una Anualidad Ordinaria



Observaciones clave:

- El primer pago ocurre al final del período 1 (no en $t = 0$)
- Hay n pagos en total
- Queremos encontrar el VP en $t = 0$

Derivación del VP: Método de Suma

El VP es la suma de los VP de cada pago individual:

Derivación del VP: Método de Suma

El VP es la suma de los VP de cada pago individual:

$$PV = \frac{PMT}{(1+r)^1} + \frac{PMT}{(1+r)^2} + \frac{PMT}{(1+r)^3} + \cdots + \frac{PMT}{(1+r)^n}$$

Derivación del VP: Método de Suma

El VP es la suma de los VP de cada pago individual:

$$PV = \frac{PMT}{(1+r)^1} + \frac{PMT}{(1+r)^2} + \frac{PMT}{(1+r)^3} + \cdots + \frac{PMT}{(1+r)^n}$$

Factorizando PMT :

$$PV = PMT \left[\frac{1}{(1+r)^1} + \frac{1}{(1+r)^2} + \cdots + \frac{1}{(1+r)^n} \right]$$

Derivación del VP: Método de Suma

El VP es la suma de los VP de cada pago individual:

$$PV = \frac{PMT}{(1+r)^1} + \frac{PMT}{(1+r)^2} + \frac{PMT}{(1+r)^3} + \cdots + \frac{PMT}{(1+r)^n}$$

Factorizando PMT :

$$PV = PMT \left[\frac{1}{(1+r)^1} + \frac{1}{(1+r)^2} + \cdots + \frac{1}{(1+r)^n} \right]$$

El corchete es una **serie geométrica** con:

- Primer término: $a = \frac{1}{1+r}$
- Razón común: $q = \frac{1}{1+r}$
- n términos

Derivación del VP: Fórmula de Serie Geométrica

La suma de una serie geométrica es:

$$S_n = a \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

Derivación del VP: Fórmula de Serie Geométrica

La suma de una serie geométrica es:

$$S_n = a \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

Sustituyendo $a = \frac{1}{1+r}$ y $q = \frac{1}{1+r}$:

$$S_n = \frac{1}{1+r} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{1+r}\right)^n}{1 - \frac{1}{1+r}}$$

Derivación del VP: Fórmula de Serie Geométrica

La suma de una serie geométrica es:

$$S_n = a \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

Sustituyendo $a = \frac{1}{1+r}$ y $q = \frac{1}{1+r}$:

$$S_n = \frac{1}{1+r} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{1+r}\right)^n}{1 - \frac{1}{1+r}}$$

Simplificando el denominador: $1 - \frac{1}{1+r} = \frac{r}{1+r}$

$$S_n = \frac{1}{1+r} \cdot \frac{1 - (1+r)^{-n}}{\frac{r}{1+r}} = \frac{1 - (1+r)^{-n}}{r}$$

Fórmula del Valor Presente de una Anualidad

Valor Presente de una Anualidad Ordinaria

$$PV = PMT \cdot \frac{1 - (1 + r)^{-n}}{r}$$

Fórmula del Valor Presente de una Anualidad

Valor Presente de una Anualidad Ordinaria

$$PV = PMT \cdot \frac{1 - (1 + r)^{-n}}{r}$$

Factor de Valor Presente de Anualidad (PVIFA)

$$PVIFA_{r,n} = \frac{1 - (1 + r)^{-n}}{r}$$

Por lo tanto: $PV = PMT \cdot PVIFA_{r,n}$

Fórmula del Valor Presente de una Anualidad

Valor Presente de una Anualidad Ordinaria

$$PV = PMT \cdot \frac{1 - (1 + r)^{-n}}{r}$$

Factor de Valor Presente de Anualidad (PVIFA)

$$PVIFA_{r,n} = \frac{1 - (1 + r)^{-n}}{r}$$

Por lo tanto: $PV = PMT \cdot PVIFA_{r,n}$

Interpretación

El PVIFA indica cuántos pesos de hoy equivale recibir \$1 al final de cada uno de los próximos n períodos, dado una tasa r .

Diagrama del Valor Futuro

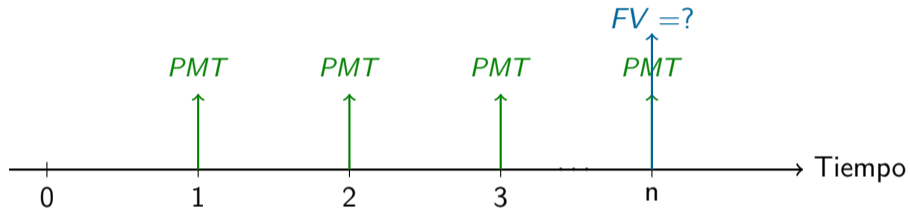
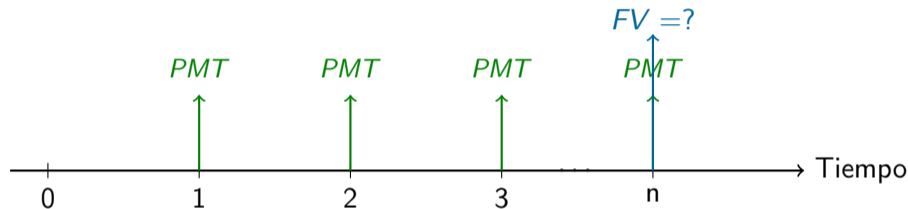


Diagrama del Valor Futuro



Pregunta: ¿Cuánto tendremos acumulado en $t = n$ si depositamos PMT al final de cada período?

Derivación del VF: Método de Suma

Cada pago crece a diferente tasa:

Derivación del VF: Método de Suma

Cada pago crece a diferente tasa:

$$FV = PMT(1 + r)^{n-1} + PMT(1 + r)^{n-2} + \dots + PMT(1 + r)^1 + PMT$$

Derivación del VF: Método de Suma

Cada pago crece a diferente tasa:

$$FV = PMT(1 + r)^{n-1} + PMT(1 + r)^{n-2} + \dots + PMT(1 + r)^1 + PMT$$

El primer pago (en $t = 1$) crece por $n - 1$ períodos.

El último pago (en $t = n$) no gana interés (acaba de llegar).

Derivación del VF: Método de Suma

Cada pago crece a diferente tasa:

$$FV = PMT(1 + r)^{n-1} + PMT(1 + r)^{n-2} + \dots + PMT(1 + r)^1 + PMT$$

El primer pago (en $t = 1$) crece por $n - 1$ períodos.

El último pago (en $t = n$) no gana interés (acaba de llegar).

Factorizando:

$$FV = PMT \left[(1 + r)^{n-1} + (1 + r)^{n-2} + \dots + (1 + r) + 1 \right]$$

Derivación del VF: Método de Suma

Cada pago crece a diferente tasa:

$$FV = PMT(1 + r)^{n-1} + PMT(1 + r)^{n-2} + \dots + PMT(1 + r)^1 + PMT$$

El primer pago (en $t = 1$) crece por $n - 1$ períodos.

El último pago (en $t = n$) no gana interés (acaba de llegar).

Factorizando:

$$FV = PMT \left[(1 + r)^{n-1} + (1 + r)^{n-2} + \dots + (1 + r) + 1 \right]$$

Otra serie geométrica con:

- $a = 1$, $q = (1 + r)$, n términos

Fórmula del Valor Futuro de una Anualidad

Usando la fórmula de serie geométrica con $a = 1$ y $q = (1 + r)$:

$$S_n = \frac{(1 + r)^n - 1}{(1 + r) - 1} = \frac{(1 + r)^n - 1}{r}$$

Fórmula del Valor Futuro de una Anualidad

Usando la fórmula de serie geométrica con $a = 1$ y $q = (1 + r)$:

$$S_n = \frac{(1 + r)^n - 1}{(1 + r) - 1} = \frac{(1 + r)^n - 1}{r}$$

Valor Futuro de una Anualidad Ordinaria

$$FV = PMT \cdot \frac{(1 + r)^n - 1}{r}$$

Fórmula del Valor Futuro de una Anualidad

Usando la fórmula de serie geométrica con $a = 1$ y $q = (1 + r)$:

$$S_n = \frac{(1 + r)^n - 1}{(1 + r) - 1} = \frac{(1 + r)^n - 1}{r}$$

Valor Futuro de una Anualidad Ordinaria

$$FV = PMT \cdot \frac{(1 + r)^n - 1}{r}$$

Factor de Valor Futuro de Anualidad (FVIFA)

$$FVIFA_{r,n} = \frac{(1 + r)^n - 1}{r}$$

Por lo tanto: $FV = PMT \cdot FVIFA_{r,n}$

Relación Importante

$$FV = PV \cdot (1 + r)^n$$

Por lo tanto:

$$FVIFA_{r,n} = PVIFA_{r,n} \cdot (1 + r)^n$$

Relación Importante

$$FV = PV \cdot (1 + r)^n$$

Por lo tanto:

$$FVIFA_{r,n} = PVIFA_{r,n} \cdot (1 + r)^n$$

Verificación:

$$\begin{aligned} PVIFA \cdot (1 + r)^n &= \frac{1 - (1 + r)^{-n}}{r} \cdot (1 + r)^n \\ &= \frac{(1 + r)^n - 1}{r} = FVIFA \quad \checkmark \end{aligned}$$

Cálculo del Pago Periódico

A menudo necesitamos encontrar PMT dado PV o FV .

Cálculo del Pago Periódico

A menudo necesitamos encontrar PMT dado PV o FV .

Dado el Valor Presente:

$$PV = PMT \cdot \frac{1 - (1 + r)^{-n}}{r}$$

Pago dado VP

$$PMT = PV \cdot \frac{r}{1 - (1 + r)^{-n}}$$

Cálculo del Pago Periódico

A menudo necesitamos encontrar PMT dado PV o FV .

Dado el Valor Presente:

$$PV = PMT \cdot \frac{1 - (1 + r)^{-n}}{r}$$

Pago dado VP

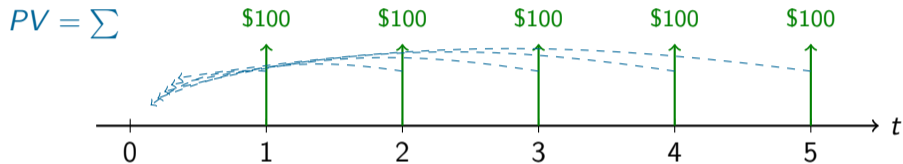
$$PMT = PV \cdot \frac{r}{1 - (1 + r)^{-n}}$$

Dado el Valor Futuro:

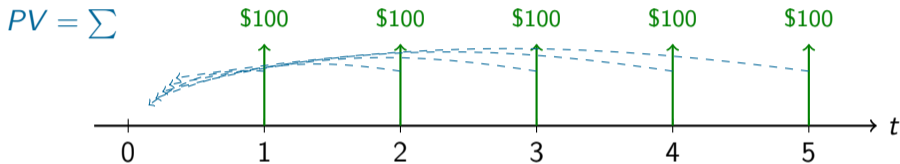
Pago dado VF

$$PMT = FV \cdot \frac{r}{(1 + r)^n - 1}$$

Visualización del VP de una Anualidad



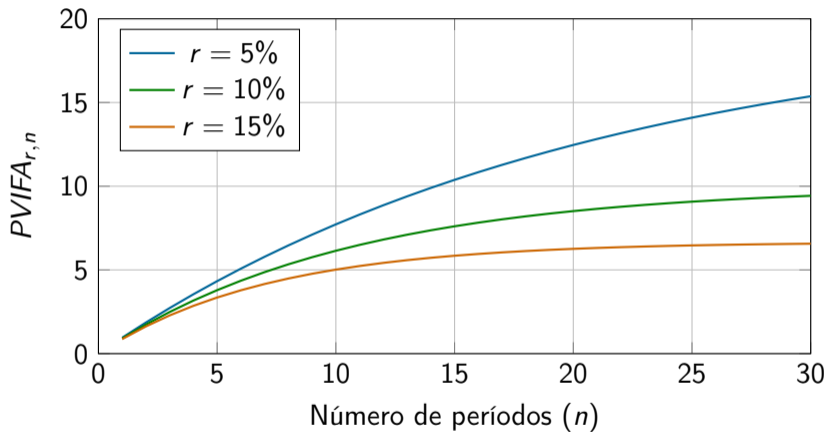
Visualización del VP de una Anualidad



Ejemplo: 5 pagos de \$100 al 10%

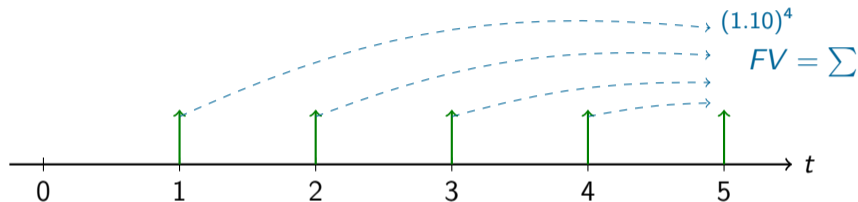
$$PV = 100 \cdot \frac{1 - (1.10)^{-5}}{0.10} = 100 \times 3.7908 = \$379.08$$

PVIFA para Diferentes Tasas y Plazos



A menor tasa, mayor PVIFA (los flujos futuros valen más hoy).

Visualización del VF de una Anualidad



Ejemplo: 5 depósitos de \$100 al 10%

$$FV = 100 \cdot \frac{(1.10)^5 - 1}{0.10} = 100 \times 6.1051 = \$610.51$$

Aproximación para el PVIFA

Para tasas bajas y plazos largos

Cuando n es grande, $(1 + r)^{-n} \rightarrow 0$, entonces:

$$PVIFA_{r,n} \approx \frac{1}{r}$$

Este es el valor de una **perpetuidad** (la veremos en la sesión 6).

Aproximación para el PVIFA

Para tasas bajas y plazos largos

Cuando n es grande, $(1 + r)^{-n} \rightarrow 0$, entonces:

$$PVIFA_{r,n} \approx \frac{1}{r}$$

Este es el valor de una **perpetuidad** (la veremos en la sesión 6).

Ejemplo: PVIFA al 5% por 50 años

Aproximación: $1/0.05 = 20$

Exacto: $\frac{1 - (1.05)^{-50}}{0.05} = 18.26$

Aproximación para el PVIFA

Para tasas bajas y plazos largos

Cuando n es grande, $(1 + r)^{-n} \rightarrow 0$, entonces:

$$PVIFA_{r,n} \approx \frac{1}{r}$$

Este es el valor de una **perpetuidad** (la veremos en la sesión 6).

Ejemplo: PVIFA al 5% por 50 años

Aproximación: $1/0.05 = 20$

Exacto: $\frac{1 - (1.05)^{-50}}{0.05} = 18.26$

Uso práctico

Si alguien dice “Esta inversión paga \$1,000 anuales por 30 años al 5%”, puedes estimar rápidamente: $VP \approx \$20,000$ (en realidad \$15,372).

Factor de Valor Presente de Anualidad:

$r \setminus n$	5	10	15	20	30
5%	4.33	7.72	10.38	12.46	15.37
8%	3.99	6.71	8.56	9.82	11.26
10%	3.79	6.14	7.61	8.51	9.43
12%	3.60	5.65	6.81	7.47	8.06
15%	3.35	5.02	5.85	6.26	6.57

Tabla de PVIFA

Factor de Valor Presente de Anualidad:

$r \setminus n$	5	10	15	20	30
5%	4.33	7.72	10.38	12.46	15.37
8%	3.99	6.71	8.56	9.82	11.26
10%	3.79	6.14	7.61	8.51	9.43
12%	3.60	5.65	6.81	7.47	8.06
15%	3.35	5.02	5.85	6.26	6.57

Uso

VP de 20 pagos de \$5,000 al 10%:

$$PV = 5,000 \times 8.51 = \$42,550$$

El “Factor de Recuperación de Capital”

Definición

El inverso del PVIFA indica cuánto pago anual se necesita para “recuperar” (o amortizar) \$1 de deuda:

$$\text{FRC} = \frac{r}{1 - (1 + r)^{-n}} = \frac{1}{\text{PVIFA}}$$

El “Factor de Recuperación de Capital”

Definición

El inverso del PVIFA indica cuánto pago anual se necesita para “recuperar” (o amortizar) \$1 de deuda:

$$\text{FRC} = \frac{r}{1 - (1 + r)^{-n}} = \frac{1}{\text{PVIFA}}$$

Ejemplo: ¿Pago mensual de un préstamo de \$100,000 a 5 años al 12% anual (1% mensual)?
 $n = 60$ meses, $r = 1\%$

El “Factor de Recuperación de Capital”

Definición

El inverso del PVIFA indica cuánto pago anual se necesita para “recuperar” (o amortizar) \$1 de deuda:

$$\text{FRC} = \frac{r}{1 - (1 + r)^{-n}} = \frac{1}{\text{PVIFA}}$$

Ejemplo: ¿Pago mensual de un préstamo de \$100,000 a 5 años al 12% anual (1% mensual)?

$n = 60$ meses, $r = 1\%$

$$\text{PVIFA} = \frac{1 - (1.01)^{-60}}{0.01} = 44.955$$

$$\text{PMT} = 100,000 / 44.955 = \$2,224.44 \text{ mensuales}$$

HP 12C: Teclas para Anualidades

Tecla	Función
n	Número de períodos (pagos)
i	Tasa de interés por período (%)
PV	Valor presente
PMT	Pago periódico
FV	Valor futuro
g END	Modo anualidad ordinaria (default)
g BEG	Modo anualidad anticipada

HP 12C: Teclas para Anualidades

Tecla	Función
n	Número de períodos (pagos)
i	Tasa de interés por período (%)
PV	Valor presente
PMT	Pago periódico
FV	Valor futuro
g END	Modo anualidad ordinaria (default)
g BEG	Modo anualidad anticipada

Convención de Signos

- Flujos que **salen** de ti: negativos
- Flujos que **entran** a ti: positivos
- PV y FV deben tener signos opuestos a PMT (o uno de ellos ser 0)

HP 12C: Ejemplo 1 - Calcular Pago de Préstamo

Problema

Préstamo de \$500,000, 48 meses, 1% mensual. ¿Cuál es el pago mensual?

HP 12C: Ejemplo 1 - Calcular Pago de Préstamo

Problema

Préstamo de \$500,000, 48 meses, 1% mensual. ¿Cuál es el pago mensual?

Teclas	Display	Descripción
f CLX	0.00	Limpiar
g END		Modo ordinario
500000 PV	500,000.00	Préstamo recibido (+)
48 n	48.00	48 meses
1 i	1.00	1% mensual
0 FV	0.00	Sin valor residual
PMT	-13,166.75	Pago mensual

HP 12C: Ejemplo 1 - Calcular Pago de Préstamo

Problema

Préstamo de \$500,000, 48 meses, 1% mensual. ¿Cuál es el pago mensual?

Teclas	Display	Descripción
f CLX	0.00	Limpiar
g END		Modo ordinario
500000 PV	500,000.00	Préstamo recibido (+)
48 n	48.00	48 meses
1 i	1.00	1% mensual
0 FV	0.00	Sin valor residual
PMT	-13,166.75	Pago mensual

Respuesta: \$13,166.75 mensuales (negativo porque sale de ti).

HP 12C: Ejemplo 2 - Calcular VP de Anualidad

Problema

Una inversión paga \$10,000 anuales por 15 años. Si la tasa es 8%, ¿cuánto vale hoy?

HP 12C: Ejemplo 2 - Calcular VP de Anualidad

Problema

Una inversión paga \$10,000 anuales por 15 años. Si la tasa es 8%, ¿cuánto vale hoy?

Teclas	Display	Descripción
f CLX	0.00	Limpiar
g END		Modo ordinario
10000 PMT	10,000.00	Pago que recibes (+)
15 n	15.00	15 años
8 i	8.00	8% anual
0 FV	0.00	Sin valor final
PV	-85,594.79	Valor presente

HP 12C: Ejemplo 2 - Calcular VP de Anualidad

Problema

Una inversión paga \$10,000 anuales por 15 años. Si la tasa es 8%, ¿cuánto vale hoy?

Teclas	Display	Descripción
f CLX	0.00	Limpiar
g END		Modo ordinario
10000 PMT	10,000.00	Pago que recibes (+)
15 n	15.00	15 años
8 i	8.00	8% anual
0 FV	0.00	Sin valor final
PV	-85,594.79	Valor presente

Respuesta: \$85,594.79 (negativo indica cuánto pagarías hoy).

HP 12C: Ejemplo 3 - Fondo de Ahorro

Problema

Quieres ahorrar \$1,000,000 en 20 años. Si el fondo paga 6% anual, ¿cuánto debes depositar cada año?

HP 12C: Ejemplo 3 - Fondo de Ahorro

Problema

Quieres ahorrar \$1,000,000 en 20 años. Si el fondo paga 6% anual, ¿cuánto debes depositar cada año?

Teclas	Display	Descripción
f CLX	0.00	Limpiar
g END		Modo ordinario
1000000 FV	1,000,000.00	Meta de ahorro (+)
20 n	20.00	20 años
6 i	6.00	6% anual
0 PV	0.00	Sin inversión inicial
PMT	-27,184.56	Depósito anual

HP 12C: Ejemplo 3 - Fondo de Ahorro

Problema

Quieres ahorrar \$1,000,000 en 20 años. Si el fondo paga 6% anual, ¿cuánto debes depositar cada año?

Teclas	Display	Descripción
f CLX	0.00	Limpiar
g END		Modo ordinario
1000000 FV	1,000,000.00	Meta de ahorro (+)
20 n	20.00	20 años
6 i	6.00	6% anual
0 PV	0.00	Sin inversión inicial
PMT	-27,184.56	Depósito anual

Respuesta: Debes depositar \$27,184.56 anuales.

Ejercicio 1: Préstamo de Auto

Problema

Financias un auto de \$350,000 a 36 meses con tasa del 18% anual (1.5% mensual). ¿Cuál es el pago mensual?

Ejercicio 1: Préstamo de Auto

Problema

Financias un auto de \$350,000 a 36 meses con tasa del 18% anual (1.5% mensual). ¿Cuál es el pago mensual?

Solución:

$$PMT = PV \cdot \frac{r}{1 - (1 + r)^{-n}}$$

$$PMT = 350,000 \cdot \frac{0.015}{1 - (1.015)^{-36}}$$

$$PMT = 350,000 \cdot \frac{0.015}{1 - 0.5851}$$

$$PMT = 350,000 \cdot \frac{0.015}{0.4149}$$

Ejercicio 2: Valor de una Anualidad

Problema

Una renta vitalicia paga \$25,000 anuales por 30 años, comenzando en un año. Si la tasa de descuento es 7%, ¿cuánto vale hoy?

Ejercicio 2: Valor de una Anualidad

Problema

Una renta vitalicia paga \$25,000 anuales por 30 años, comenzando en un año. Si la tasa de descuento es 7%, ¿cuánto vale hoy?

Solución:

$$PV = PMT \cdot \frac{1 - (1 + r)^{-n}}{r}$$

$$PV = 25,000 \cdot \frac{1 - (1.07)^{-30}}{0.07}$$

$$PV = 25,000 \cdot \frac{1 - 0.1314}{0.07}$$

$$PV = 25,000 \cdot 12.409 = \$310,225$$

Ejercicio 3: Fondo de Retiro

Problema

Quieres tener \$5,000,000 al retirarte en 30 años. Si tu fondo rinde 8% anual, ¿cuánto debes aportar mensualmente? (Usa tasa mensual equivalente)

Ejercicio 3: Fondo de Retiro

Problema

Quieres tener \$5,000,000 al retirarte en 30 años. Si tu fondo rinde 8% anual, ¿cuánto debes aportar mensualmente? (Usa tasa mensual equivalente)

Tasa mensual: $r_m = (1.08)^{1/12} - 1 = 0.6434\%$

Períodos: $n = 30 \times 12 = 360$

Ejercicio 3: Fondo de Retiro

Problema

Quieres tener \$5,000,000 al retirarte en 30 años. Si tu fondo rinde 8% anual, ¿cuánto debes aportar mensualmente? (Usa tasa mensual equivalente)

Tasa mensual: $r_m = (1.08)^{1/12} - 1 = 0.6434\%$

Períodos: $n = 30 \times 12 = 360$

Solución:

$$PMT = FV \cdot \frac{r}{(1 + r)^n - 1}$$

$$PMT = 5,000,000 \cdot \frac{0.006434}{(1.006434)^{360} - 1}$$

$$PMT = 5,000,000 \cdot \frac{0.006434}{9.0627}$$

$$PMT = \$3,549.04 \text{ mensuales}$$

Ejercicio 4: ¿Cuántos Pagos?

Problema

Tienes una deuda de \$80,000 que pagas con mensualidades de \$2,500 al 1.5% mensual. ¿En cuántos meses la pagas?

Ejercicio 4: ¿Cuántos Pagos?

Problema

Tienes una deuda de \$80,000 que pagas con mensualidades de \$2,500 al 1.5% mensual. ¿En cuántos meses la pagas?

Solución:

$$PV = PMT \cdot \frac{1 - (1 + r)^{-n}}{r}$$

$$80,000 = 2,500 \cdot \frac{1 - (1.015)^{-n}}{0.015}$$

$$\frac{80,000 \times 0.015}{2,500} = 1 - (1.015)^{-n}$$

$$0.48 = 1 - (1.015)^{-n}$$

$$(1.015)^{-n} = 0.52$$

$$-n \cdot \ln(1.015) = \ln(0.52)$$

Ejercicio 5: Comparación de Préstamos

Problema

Banco A: \$200,000 a 24 meses, 1.2% mensual.

Banco B: \$200,000 a 36 meses, 1.0% mensual.

¿Cuál tiene menor pago? ¿Cuál paga menos intereses totales?

Ejercicio 5: Comparación de Préstamos

Problema

Banco A: \$200,000 a 24 meses, 1.2% mensual.

Banco B: \$200,000 a 36 meses, 1.0% mensual.

¿Cuál tiene menor pago? ¿Cuál paga menos intereses totales?

$$\text{Banco A: } PMT_A = 200,000 \cdot \frac{0.012}{1 - (1.012)^{-24}} = \$9,526.67$$

$$\text{Total pagado: } 9,526.67 \times 24 = \$228,640$$

$$\text{Intereses: } 228,640 - 200,000 = \$28,640$$

Ejercicio 5: Comparación de Préstamos

Problema

Banco A: \$200,000 a 24 meses, 1.2% mensual.

Banco B: \$200,000 a 36 meses, 1.0% mensual.

¿Cuál tiene menor pago? ¿Cuál paga menos intereses totales?

$$\text{Banco A: } PMT_A = 200,000 \cdot \frac{0.012}{1 - (1.012)^{-24}} = \$9,526.67$$

$$\text{Total pagado: } 9,526.67 \times 24 = \$228,640$$

$$\text{Intereses: } 228,640 - 200,000 = \$28,640$$

$$\text{Banco B: } PMT_B = 200,000 \cdot \frac{0.01}{1 - (1.01)^{-36}} = \$6,643.38$$

$$\text{Total pagado: } 6,643.38 \times 36 = \$239,162$$

$$\text{Intereses: } 239,162 - 200,000 = \$39,162$$

Ejercicio 5: Comparación de Préstamos

Problema

Banco A: \$200,000 a 24 meses, 1.2% mensual.

Banco B: \$200,000 a 36 meses, 1.0% mensual.

¿Cuál tiene menor pago? ¿Cuál paga menos intereses totales?

$$\text{Banco A: } PMT_A = 200,000 \cdot \frac{0.012}{1 - (1.012)^{-24}} = \$9,526.67$$

$$\text{Total pagado: } 9,526.67 \times 24 = \$228,640$$

$$\text{Intereses: } 228,640 - 200,000 = \$28,640$$

$$\text{Banco B: } PMT_B = 200,000 \cdot \frac{0.01}{1 - (1.01)^{-36}} = \$6,643.38$$

$$\text{Total pagado: } 6,643.38 \times 36 = \$239,162$$

$$\text{Intereses: } 239,162 - 200,000 = \$39,162$$

Banco B tiene menor pago, pero **Banco A** paga menos intereses totales.

Python: Funciones de Anualidades

```
import numpy_financial as npf

# Calcular pago de prestamo
pv = 500000      # Monto del prestamo
n = 48           # Meses
r = 0.01         # 1% mensual

pmt = npf.pmt(rate=r, nper=n, pv=pv, fv=0)
print(f"Pago mensual: ${-pmt:,.2f}")

# Calcular valor presente de anualidad
pmt_anual = 10000
n_años = 15
r_anual = 0.08

pv = npf.pv(rate=r_anual, nper=n_años, pmt=pmt_anual, fv=0)
print(f"Valor presente: ${-pv:,.2f}")

# Calcular valor futuro (fondo de ahorro)
```

Python: Tabla de Amortización (Preview)

```
import numpy_financial as npf

def tabla_amortizacion(pv, r, n):
    pmt = -npf.pmt(r, n, pv)
    saldo = pv

    print("Mes | Pago      | Interes  | Capital  | Saldo")
    print("-" * 55)

    for mes in range(1, min(n+1, 6)): # Primeros 5 meses
        interes = saldo * r
        capital = pmt - interes
        saldo -= capital
        print(f"{mes:3d} | ${pmt:8,.2f} | ${interes:8,.2f} | ${capital:8,.2f} | ${saldo:10,.2f}")

    print("...")

# Ejemplo
```

Python: Comparación de Escenarios

```
import numpy_financial as npf
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np

# Comparar crecimiento de fondo de ahorro
aporte_mensual = 1000
años = 30
meses = np.arange(1, años*12 + 1)

tasas = [0.005, 0.007, 0.01] # 6%, 8.4%, 12% anual aprox
labels = ['6%', '8.4%', '12%']

plt.figure(figsize=(10, 6))
for r, label in zip(tasas, labels):
    fv = [-npf.fv(r, m, -aporte_mensual, 0) for m in meses]
    plt.plot(meses/12, np.array(fv)/1000, label=f'Tasa {label} anual')

plt.xlabel('Años')
plt.ylabel('Valor acumulado (miles $)')
```

Valor Presente

$$PV = PMT \cdot \frac{1 - (1 + r)^{-n}}{r}$$

Pago dado VP

$$PMT = PV \cdot \frac{r}{1 - (1 + r)^{-n}}$$

Relación: $FV = PV \cdot (1 + r)^n$

Valor Futuro

$$FV = PMT \cdot \frac{(1 + r)^n - 1}{r}$$

Pago dado VF

$$PMT = FV \cdot \frac{r}{(1 + r)^n - 1}$$

- ① Una **anualidad** es una serie de pagos iguales y periódicos
- ② **Anualidad ordinaria**: pagos al final de cada período
- ③ El **PVIFA** convierte una serie de pagos a valor presente
- ④ El **FVIFA** calcula el valor acumulado de depósitos periódicos
- ⑤ Las fórmulas vienen de sumar **series geométricas**
- ⑥ Aplicaciones: préstamos, fondos de ahorro, pensiones
- ⑦ La HP 12C tiene funciones integradas para estos cálculos

① Ejercicios HP 12C:

- Pago mensual de \$300,000 a 60 meses, 1.2% mensual
- VP de 25 pagos anuales de \$15,000 al 9%

② **Problema:** ¿Qué es mejor: recibir \$500,000 hoy o \$45,000 anuales por 20 años? Asume tasa del 7%.

③ **Fondo de ahorro:** Si depositas \$3,000 mensuales al 0.7% mensual por 15 años, ¿cuánto acumularás?

④ **Python:** Crea una función que reciba PV, r, n y retorne el pago, y otra que calcule el total de intereses pagados en un préstamo.

¿Preguntas?

Próxima Sesión:
Anualidades Anticipadas y Perpetuidades

Semana 3, Clase 2