



Tarea numérica

Modelo simple de formación de estrellas

Integrante: Diego Sánchez M.
Profesor: Donato Vásquez V.
Auxiliar: Valentín Retamal B.
Ayudantes: Bruno Hernández P.

Fecha de entrega: 7 de junio de 2021
Santiago, Chile

Introducción

Una ecuación diferencial se caracteriza por permitir modelar matemáticamente una gran cantidad de fenómenos presentes en la naturaleza, tales como: la evolución de una población, el cambio del clima, el movimiento de un cuerpo, entre otros. Generalmente, esta herramienta se puede utilizar siempre que se estudie un sistema en el cual haya involucrada una magnitud y su variación.

Para resolver problemas asociados a una ecuación diferencial, se debe hallar la solución de esta. Si bien una gran parte de este tipo de ecuaciones pueden resolverse mediante métodos analíticos, muchas de estas resultan ser bastante difíciles de resolver. Por ello, se han desarrollado una gran variedad de métodos que permiten aproximar numéricamente las soluciones de estas ecuaciones.

Este informe tiene como objetivo evidenciar el proceso de resolución de un sistema de ecuaciones diferenciales asociado a un modelo simple de formación de estrellas mediante la utilización de distintos métodos numéricos. Como se sabe, esto permitirá aproximarse bastante a la solución asociada al modelo en cuestión, lo cual permitirá analizar este y concluir al respecto.

Para lograr lo mencionado anteriormente, se utilizará la herramienta computacional **Python** para implementar dos métodos numéricos conocidos: **Euler progresivo** y **Runge-Kutta de orden 4**. También, se utilizará una rutina de resolución provista por una conocida librería de **Python**, **SciPy**. Adicionalmente, se utilizará una serie de funciones encontradas en la librería **matplotlib** para graficar las soluciones obtenidas. Esto último permitirá analizar los resultados obtenidos y hacer comparaciones entre los distintos métodos implementados.

Nota: para acceder al código utilizado para la realización de este informe, acceder al repositorio en el siguiente enlace: <https://github.com/diegoalonsosm/tareanumerica2021/tree/main>.

Contexto del problema

“En un modelo simple de formación y evolución de estrellas, el gas atómico se convierte en gas molecular que a su vez se convierte en estrellas. Luego, las estrellas al desintegrarse vuelven a formar gas atómico.” [1]

A continuación, se procede a plantear las ecuaciones asociadas a dicho modelo y las constantes involucradas. Se debe tener en cuenta que a es la fracción de masa de gas atómico, m la fracción de masa de gas molecular y s la fracción de masa de estrellas activas. La relación entre estas es:

$$a + m + s = 1 \quad (1)$$

Además, es claro ver que 1 es la masa total considerada y que s en función de las demás variables es:

$$s = 1 - a - m \quad (2)$$

También, se tiene el sistema de ecuaciones diferenciales asociado a este modelo para a y m :

$$\frac{da}{dt} = s - k_1 m^2 a \quad (3)$$

$$\frac{dm}{dt} = k_1 m^2 a - k_2 m^\alpha s \quad (4)$$

Las constantes de este sistema se entregan en la siguiente tabla, en la cual cada fila corresponde a una posible configuración de estas. Además, se debe considerar que $k_1, k_2 > 0$ y $\alpha \geq 1$.

Caso	k_1	k_2	α	$a(0)$	$m(0)$
1	10	10	1.0	0.15	0.15
2	8	15	1.2	0.40	0.30
3	8	15	1.5	0.40	0.30
4	8	15	1.9	0.40	0.30
5	8	15	2.0	0.40	0.30
6	8	15	2.1	0.40	0.30

Tabla 1: Constantes y condiciones iniciales usadas en el modelamiento, separadas por casos.

El estudio de este sistema se hizo para un intervalo cerrado $[0, T]$ con $T = 100$ (millones de años) y un paso de tiempo $\Delta T = 0.1$. Esta última información fue importante para encontrar la solución numérica para cada una de las variables asociadas al modelo, ya que estas se utilizaron para poder desarrollar los métodos numéricos que se describirán brevemente a continuación.

Investigación e implementación de los algoritmos

Aproximación del problema de Cauchy [5]

Cabe destacar que la siguiente información fue obtenida de “Ecuaciones Diferenciales Ordinarias” por Axel Osses. Esta obra puede ser descargada en el siguiente [enlace de descarga](#).

Los métodos presentados en breve se centran en aproximar la solución del problema de Cauchy,

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)), \forall x \in I \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \quad (5)$$

Para obtener la aproximación, se divide el intervalo I en N subintervalos equidistantes $I_n = [x_n, x_{n+1}]$ con $n = 0, \dots, N - 1$. Luego, integrando la ecuación diferencial en cada intervalo I_n se obtiene:

$$y(x_{n+1}) - y(x_n) = \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(s, y(s)) ds \quad (6)$$

La manera de aproximar la integral que aparece del lado derecho permite caracterizar los métodos numéricos descritos a continuación. Dichas aproximaciones se hacen a base de iteraciones.

Método Euler progresivo [5]

Consiste en aproximar la integral antes mencionada mediante el cálculo del área de los rectángulos consecutivos de base $h = x_{n+1} - x_n$ y altura $f(x_n, y(x_n))$, es decir, para cada iteración se tiene que:

$$y(x_{n+1}) = y_n + \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(s, y(s)) ds \sim y_n + (x_{n+1} - x_n)f(x_n, y(x_n)) \quad (7)$$

Método Runge-Kutta de orden 4 [5]

Se trabaja la integral ya mencionada haciendo una cuadratura del tipo Simpson para la aproximación. Para cada iteración se tiene que la integral se aproximará como:

$$y(x_{n+1}) = y_n + \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(s, y(s)) ds \sim y_n + \frac{h}{6}(g_1 + 2g_2 + 2g_3 + g_4), \quad (8)$$

donde se define g_1, g_2, g_3 y g_4 como sigue:

$$\begin{cases} g_1 = f(x_n, y(x_n)) \\ g_2 = f(x_n + \frac{1}{2}h, y(x_n) + \frac{1}{2}k_1h) \\ g_3 = f(x_n + \frac{1}{2}h, y(x_n) + \frac{1}{2}k_2h) \\ g_4 = f(x_n + h, y(x_n) + k_3h) \end{cases} \quad (9)$$

Evolución hacia un estado estacionario y evolución hacia un ciclo límite

Un plano de fases es una representación de todas las trayectorias de las soluciones de un sistema. Estos permiten describir cualitativamente el comportamiento de las soluciones de un sistema. [3]. Dichas trayectorias pueden estar relacionadas a un estado estacionario o a un ciclo límite. El estado estacionario es aquel en el cual un sistema tiende a que sus variables tiendan a permanecer invariantes

a lo largo del tiempo. [7] El ciclo límite consiste en una órbita cerrada tal que otras trayectorias no cerradas tienden es espiral hacia ella, desde el interior o desde el exterior, cuando el tiempo tiende a infinito. [5]. “Es un concepto asociado al estudio de la estabilidad de soluciones”. [2]

Implementación en Python

Ahora, luego de haber explicado los métodos utilizados, se comenta acerca del proceso de implementación de estos en *Python*. También, se habla brevemente acerca del funcionamiento de una rutina de resolución de ecuaciones diferenciales, predefinida en la librería **scipy**.

Primeramente, como el modelo estaba representado por un sistema de ecuaciones diferenciales era necesario resolver simultáneamente 3 y 4 en cada una de las iteraciones. Como la variable s no tenía una ecuación asociada, se derivó la expresión 1, reemplazando también 3 y 4, quedando esta como:

$$\frac{ds}{dt} = -s + k_2 m^\alpha s \quad (10)$$

Lo anterior, se podría haber evitado utilizando la expresión 1 para encontrar el valor de s en cada iteración. Sin embargo, debido a errores de cómputo asociados a las aproximaciones en *Python*, esto no se pudo llevar a cabo. Dichos errores comenzaban a generar números complejos a partir de cierto punto. Por tanto, se decidió abordar el problema usando la expresión 10.

Ahora bien, para implementar el código, se crearon funciones para definir los lados derechos de las expresiones 3, 4 y 10. A partir de estas, se crearon las funciones **euler_progresivo(T,dt,cte)** y **runge_kutta4(T,dt,cte)**. Estas fueron construidas a partir de iteraciones del tipo **for** para recorrer todos los valores de un intervalo **T** con pasos de tiempo **dt** equiespaciados. En cada iteración, se generaron simultáneamente los valores de a , m y s , utilizando las aproximaciones de los métodos correspondientes. Estas funciones fueron puestas en marcha considerando las constantes y condiciones iniciales provistas por casos (véase tabla 1) y la expresión 1 para calcular $s(0)$. Estas fueron ingresadas usando el parámetro **cte**. Finalmente, se hizo que dichas funciones estas retornaran los valores de t , a , m y s en forma de una 4-tupla.

Adicionalmente, se utilizó la función **solve_ivp** de la librería **scipy.integrate** [6] para implementar una función basada en el método Runge-Kutta-Fehlberg, también conocido como el método Runge-Kutta 4(5). Se escogió esta función debido a que permitió utilizar distintos métodos existentes para experimentar y encontrar el más adecuado al modelo en cuestión. En cuanto al método, este se escogió pues permitía controlar el error de las aproximaciones mediante la precisión del método Runge-Kutta 4, pero los pasos son tomados en consideración a la precisión del método en orden 5. “En cada paso, se realizan y comparan [ambas] aproximaciones para la solución. Si las dos respuestas son cercanas entre sí, se acepta la aproximación. Si ambas respuestas no concuerdan con una precisión específica, se reduce el tamaño del paso”. [4]. Esto permite una aproximación numérica bastante certera.

Algoritmo para estimar el periodo límite

Para el análisis de algunos casos, se implementó la función **periodo(t,s)**. El objetivo de esta era obtener el periodo límite aproximado del ciclo de reproducción de estrellas. Para implementarla, se calcularon los máximos locales de $s(t)$ y se obtuvieron los intervalos de tiempos con los que se encontraban estos. Tomando como hipótesis el enunciado: “Suponiendo que la evolución del sistema tiende a un cierto equilibrio periódico”, se tomó el último periodo registrado.

Resultados y análisis de datos

Nota: las figuras de esta sección fueron obtenidas usando las funciones de la librería matplotlib.

En las figuras 1-6 se muestran los gráficos obtenidos al resolver el sistema de ecuaciones diferenciales del modelo simple de formación y evolución de estrellas usando el método Euler progresivo para los distintos casos encontrados en la tabla 1. Las simulaciones se hicieron para el intervalo $[0, 100]$ millones de años. No se presentó divergencia utilizando este método, por lo cual, se utilizó el paso de tiempo $\Delta T = 0.1$.

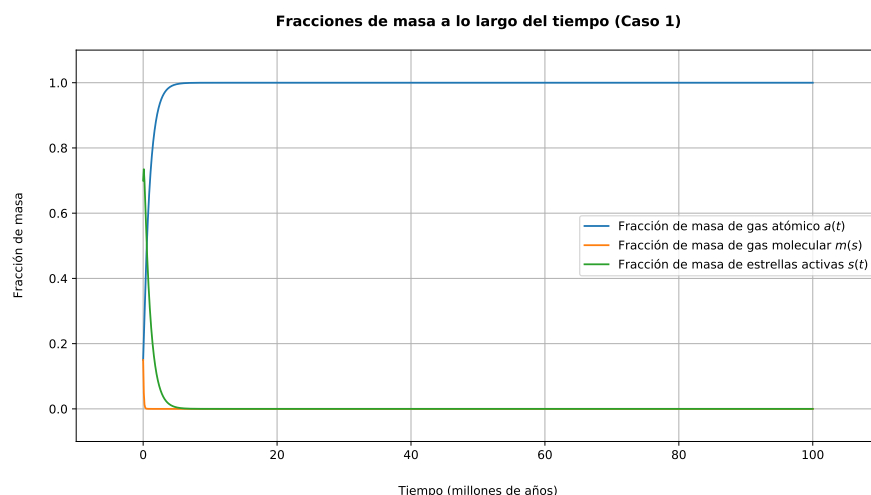


Figura 1: Gráfico de las fracciones de masa obtenidas al resolver el sistema asociado al modelo de formación de estrellas con el método Euler progresivo. Sistema resuelto con las constantes del caso 1.

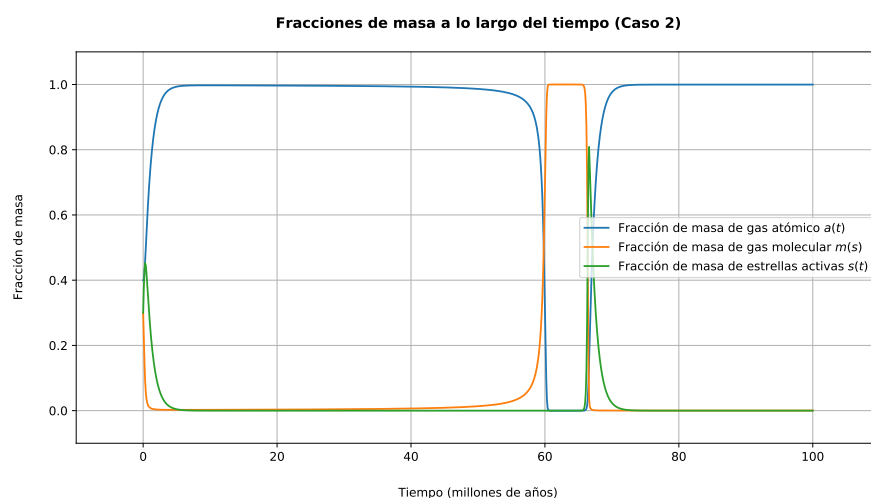


Figura 2: Gráfico de las fracciones de masa obtenidas al resolver el sistema asociado al modelo de formación de estrellas con el método Euler progresivo. Sistema resuelto con las constantes del caso 2.

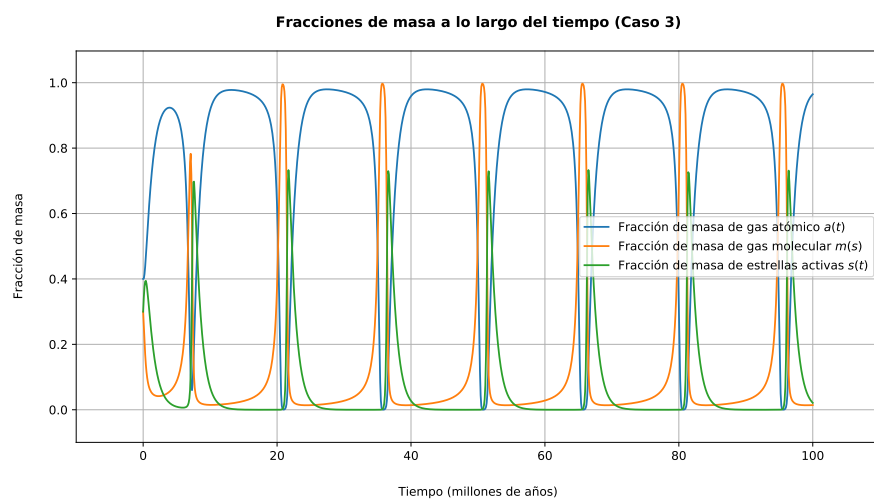


Figura 3: Gráfico de las fracciones de masa obtenidas al resolver el sistema asociado al modelo de formación de estrellas con el método Euler progresivo. Sistema resuelto con las constantes del caso 3.

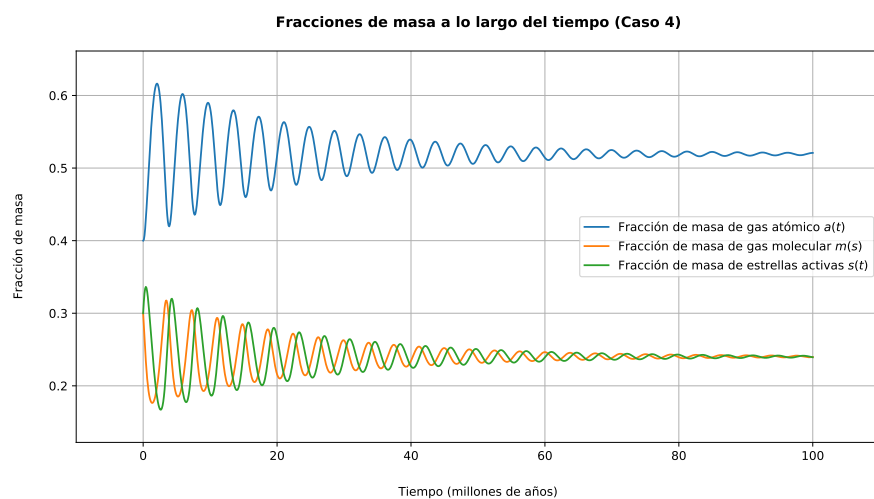


Figura 4: Gráfico de las fracciones de masa obtenidas al resolver el sistema asociado al modelo de formación de estrellas con el método Euler progresivo. Sistema resuelto con las constantes del caso 4.

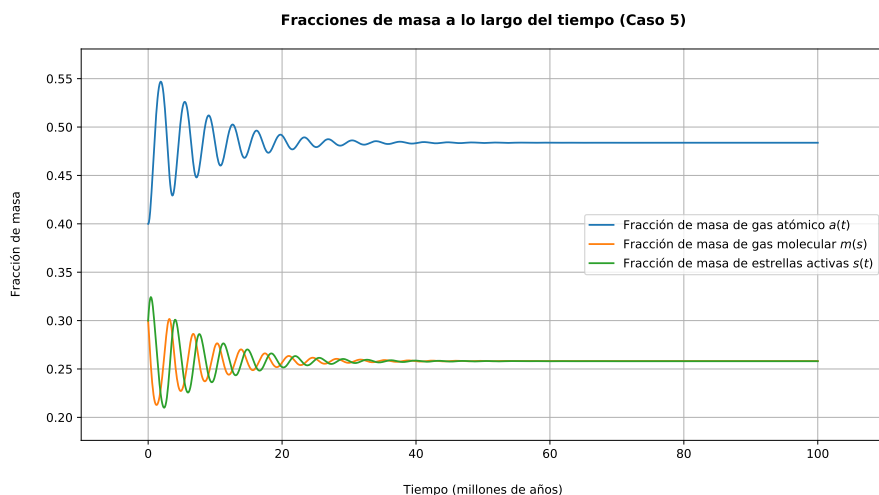


Figura 5: Gráfico de las fracciones de masa obtenidas al resolver el sistema asociado al modelo de formación de estrellas con el método Euler progresivo. Sistema resuelto con las constantes del caso 5.

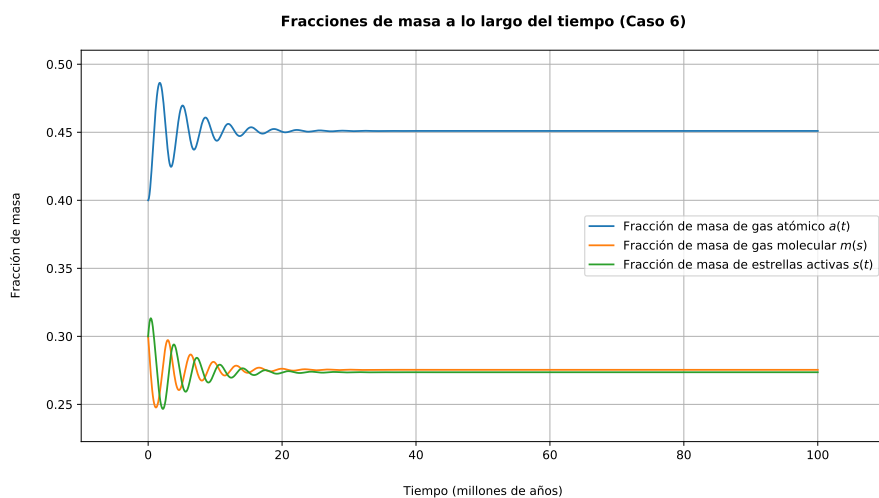


Figura 6: Gráfico de las fracciones de masa obtenidas al resolver el sistema asociado al modelo de formación de estrellas con el método Euler progresivo. Sistema resuelto con las constantes del caso 6.

Se puede observar que para el caso 1 las soluciones tienden a permanecer constantes a lo largo de la simulación. Algo similar sucede con el caso 2, sin embargo, existe una variación antes de que termine la simulación. Ahora, en el caso 3 se evidencia una clara tendencia a tener un comportamiento pseudo-periódico. Para el caso 4, 5 y 6 es claro ver que las curvas oscilan a lo largo del tiempo. Finalmente, la amplitud es amortiguada hasta alcanzar cierto equilibrio constante.

La diferencia entre estos gráficos indica que el sistema tiende a tener distintos comportamientos según las condiciones iniciales y constantes que se impongan. Además, se puede ver que a medida que aumenta el valor de α , estos comienzan a adquirir un comportamiento oscilatorio amortiguado.

En las figuras 7-12 se muestran los gráficos de las trayectorias de $a(t)$ y $m(t)$ en función del tiempo. Estas se obtuvieron a partir de las soluciones del sistema usando el método Euler progresivo para los distintos casos encontrados en la tabla 1. Las simulaciones se hicieron para el intervalo $[0, 100 \text{ millones de años}]$. No se presentó divergencia utilizando este método, pero se utilizó el paso de tiempo $\Delta T = 0.01$ para definir bien las curvas.

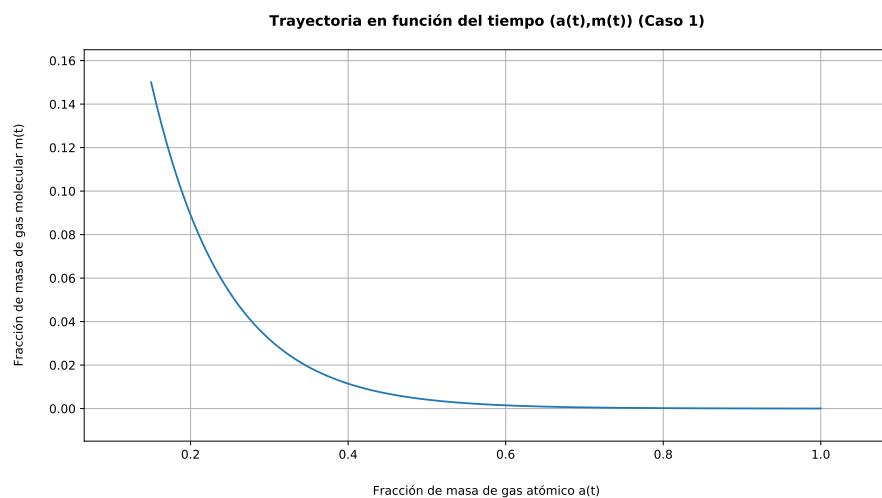


Figura 7: Gráfico de las trayectorias en función del tiempo de $a(t)$ y $m(t)$ del modelo de formación de estrellas con el método Euler progresivo. Sistema resuelto con las constantes del caso 1. (véase tabla 1).

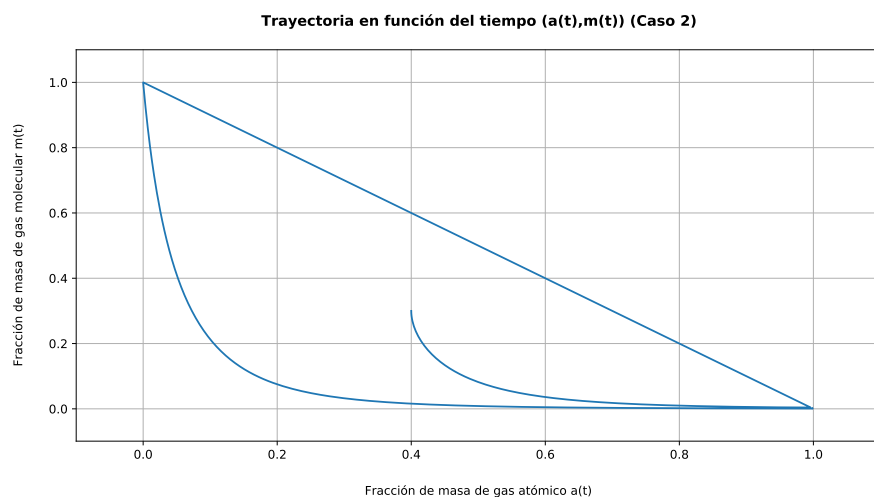


Figura 8: Gráfico de las trayectorias en función del tiempo de $a(t)$ y $m(t)$ del modelo de formación de estrellas con el método Euler progresivo. Sistema resuelto con las constantes del caso 2. (véase tabla 1).

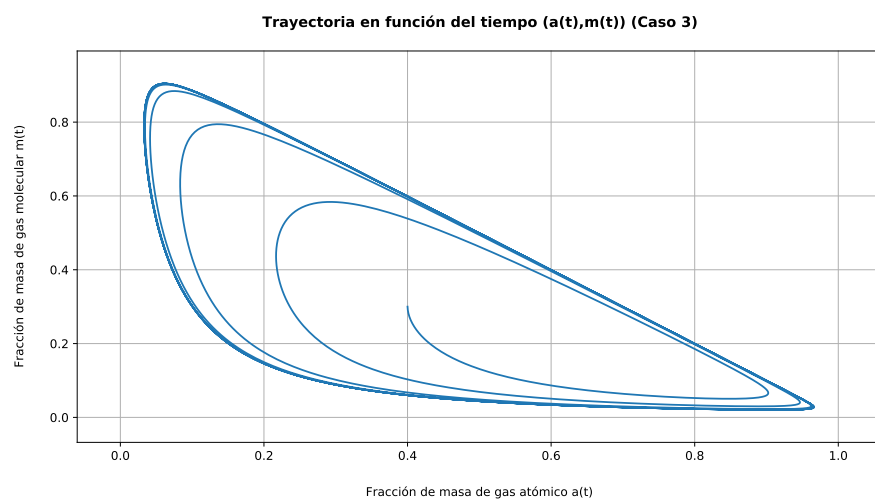


Figura 9: Gráfico de las trayectorias en función del tiempo de $a(t)$ y $m(t)$ del modelo de formación de estrellas con el método Euler progresivo. Sistema resuelto con las constantes del caso 3. (véase tabla 1).

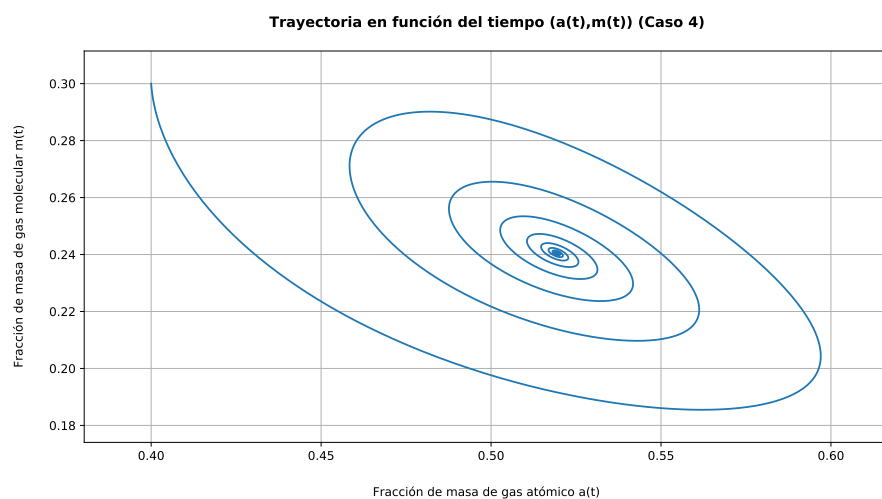


Figura 10: Gráfico de las trayectorias en función del tiempo de $a(t)$ y $m(t)$ del modelo de formación de estrellas con el método Euler progresivo. Sistema resuelto con las constantes del caso 4. (véase tabla 1).

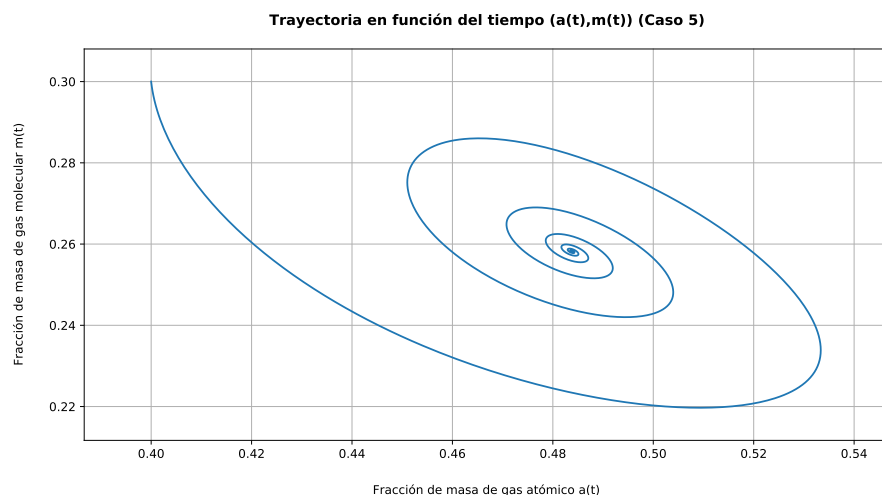


Figura 11: Gráfico de las trayectorias en función del tiempo de $a(t)$ y $m(t)$ del modelo de formación de estrellas con el método Euler progresivo. Sistema resuelto con las constantes del caso 5. (véase tabla 1).

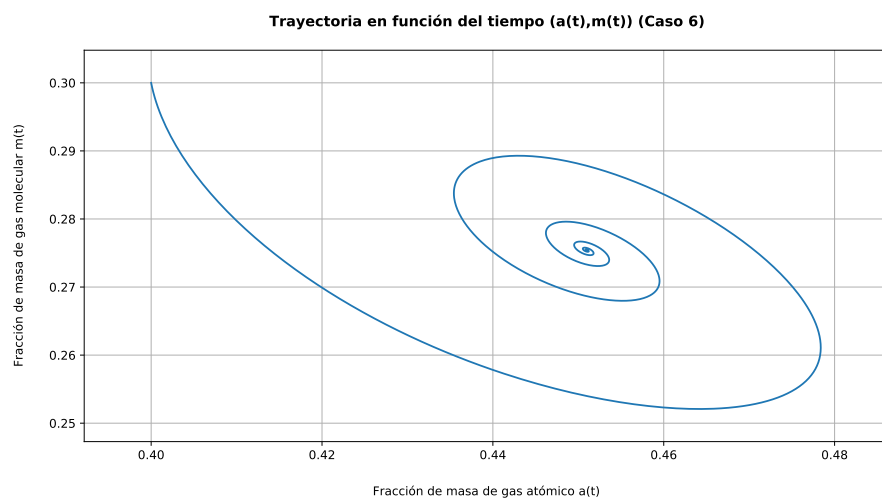


Figura 12: Gráfico de las trayectorias en función del tiempo de $a(t)$ y $m(t)$ del modelo de formación de estrellas con el método Euler progresivo. Sistema resuelto con las constantes del caso 6. (véase tabla 1).

A partir del gráfico 7, se puede evidenciar lo mencionado anteriormente con respecto al caso 1. Las soluciones comienzan a converger y el sistema evoluciona rápidamente a un estado estacionario. Esto quiere decir que las soluciones de este sistema permanecen constante cuando el $t \rightarrow \infty$.

Para los demás casos, se puede observar que los sistemas comienzan enroscarse en forma de espiral. Aquí se manifiesta el concepto mencionado anteriormente, ciclo límite. Sin embargo, este comportamiento es un tanto diferente. En los casos 2-3 la trayectoria empieza en el centro y comienza a girar cerrando una curva, lo cual evidencia que el sistema comenzará a comportarse periódicamente a lo largo del tiempo. En los casos 4-6, la trayectoria comienza en un extremo de la curva y comienza a

enroscarse hacia su centro. Esto último señala que las soluciones del sistema comenzarán describiendo oscilaciones pero finalmente comenzarán a evolucionar hacia un estado estacionario.

En las figuras 13-19 se muestran los gráficos de las fracciones de de estrellas activas $s(t)$ en función del tiempo. Estos se obtuvieron a partir de las soluciones del sistema usando el método Euler progresivo. Se utilizaron las constantes del caso 2 pero se hizo variar el valor α entre 1.3 y 1.9. Las simulaciones se hicieron para el intervalo $[0, 200]$ millones de años. No se presentó divergencia utilizando este método, pero debido a que los demás métodos sí lo hicieron, se utilizó el paso de tiempo $\Delta T = 0.001$ para luego poder comparar los resultados.

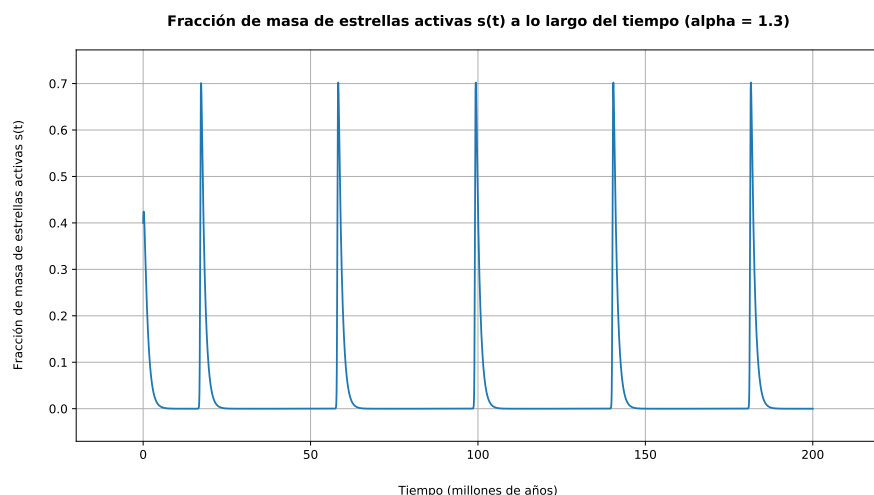


Figura 13: Gráfico de la fracción de masa de estrellas activas en función del tiempo. Obtenida al resolver el sistema asociado al modelo de formación de estrellas con el método Euler progresivo. Sistema resuelto con las constantes del caso 2 pero con $\alpha = 1.3$.

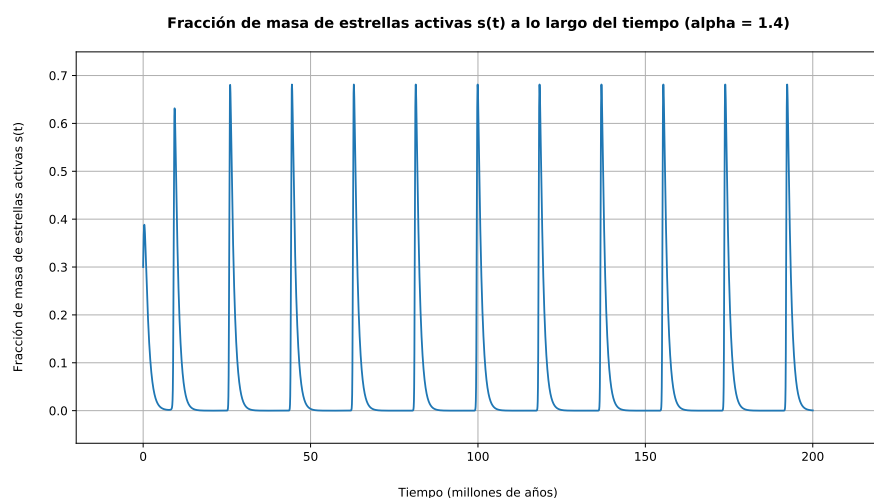


Figura 14: Gráfico de la fracción de masa de estrellas activas en función del tiempo. Obtenida al resolver el sistema asociado al modelo de formación de estrellas con el método Euler progresivo. Sistema resuelto con las constantes del caso 2 pero con $\alpha = 1.4$.

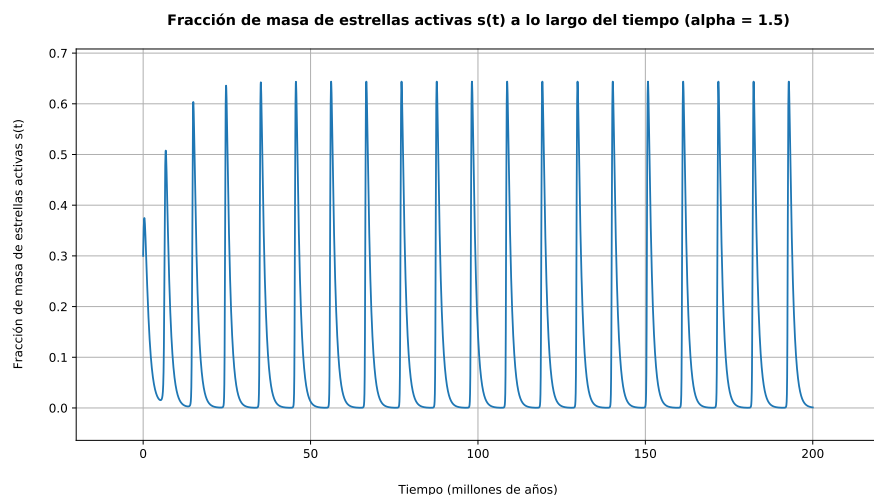


Figura 15: Gráfico de la fracción de masa de estrellas activas en función del tiempo. Obtenida al resolver el sistema asociado al modelo de formación de estrellas con el método Euler progresivo. Sistema resuelto con las constantes del caso 2 pero con $\alpha = 1.5$.

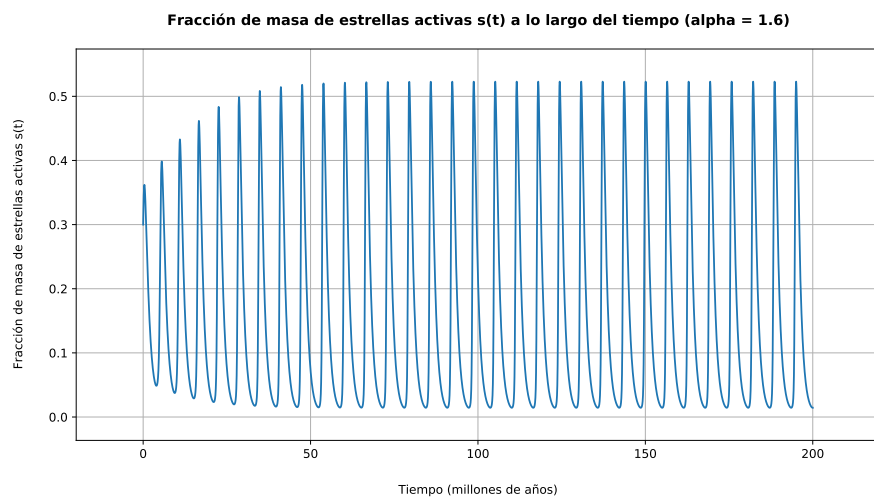


Figura 16: Gráfico de la fracción de masa de estrellas activas en función del tiempo. Obtenida al resolver el sistema asociado al modelo de formación de estrellas con el método Euler progresivo. Sistema resuelto con las constantes del caso 2 pero con $\alpha = 1.6$.

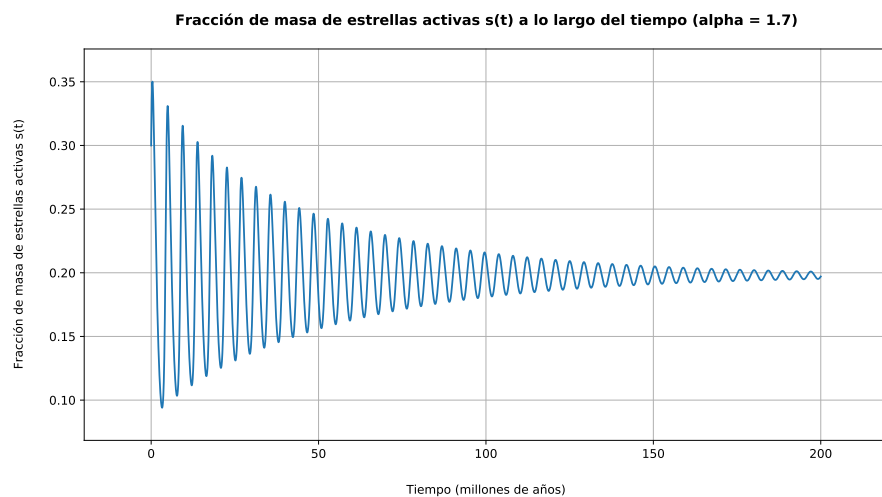


Figura 17: Gráfico de la fracción de masa de estrellas activas en función del tiempo. Obtenida al resolver el sistema asociado al modelo de formación de estrellas con el método Euler progresivo. Sistema resuelto con las constantes del caso 2 pero con $\alpha = 1.7$.

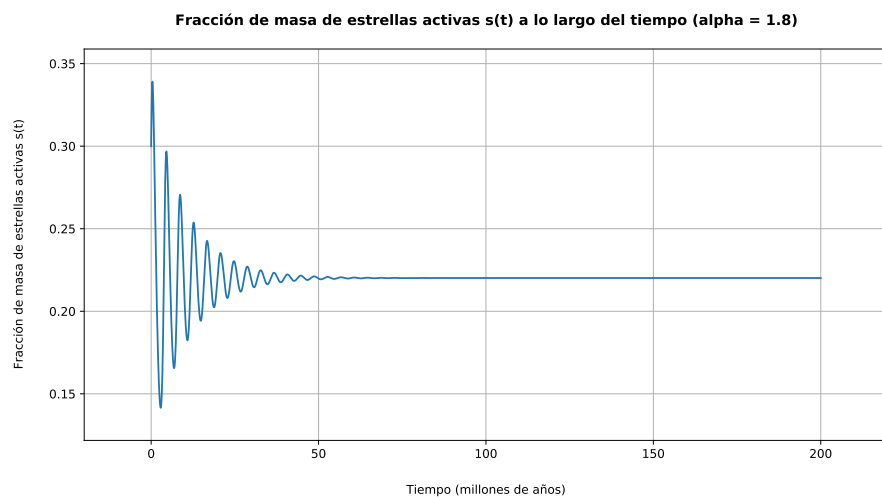


Figura 18: Gráfico de la fracción de masa de estrellas activas en función del tiempo. Obtenida al resolver el sistema asociado al modelo de formación de estrellas con el método Euler progresivo. Sistema resuelto con las constantes del caso 2 pero con $\alpha = 1.8$.

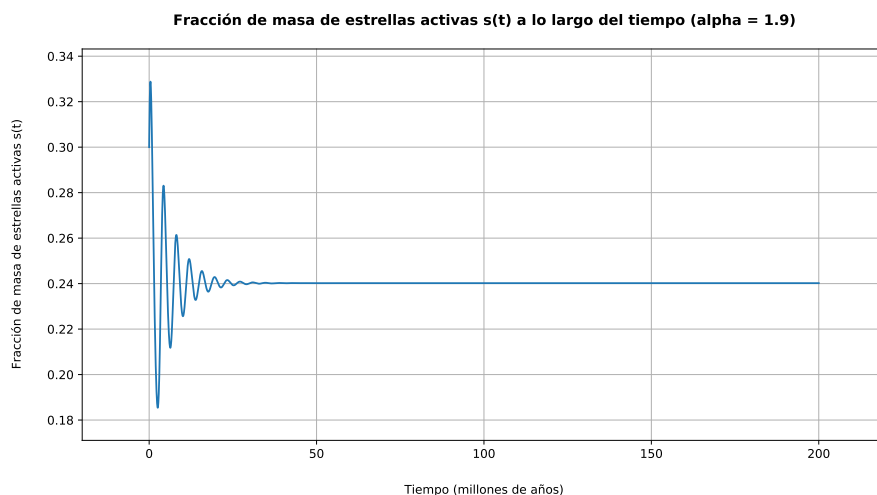


Figura 19: Gráfico de la fracción de masa de estrellas activas en función del tiempo. Obtenida al resolver el sistema asociado al modelo de formación de estrellas con el método Euler progresivo. Sistema resuelto con las constantes del caso 2 pero con $\alpha = 1.9$.

Anteriormente, se mencionó acerca de la tendencia que tenían algunos de los sistemas presentados de presentar un comportamiento cíclico. Esto se puede evidenciar aún más gracias a los gráficos recién presentados pues los sistemas asociados a estos fueron simulados por el doble del tiempo, 200 millones de años. En la mayoría de estos casos, se puede apreciar un comportamiento aproximadamente periódico. Lo anterior a excepción de los sistemas resueltos con $\alpha = 1.8$ y $\alpha = 1.9$, pues a pesar del comportamiento oscilatorio que poseen tienden a evolucionar hacia un estado estacionario.

Dicho lo anterior, los gráficos de las figuras 13-19 fueron generados principalmente con la intención de poder hacer un análisis más profundo acerca del periodo límite que caracterizaba a cada uno de los sistemas en cuestión. Este comportamiento era evidente dado que por hipótesis se tenía que “la evolución de los sistema [tendía] a un cierto equilibrio periódico”. [1] Ahora, teniendo esto en cuenta, se utilizó la función `periodo(t,s)`, cuyo funcionamiento fue comentado en la sección anterior, para poder calcular los periodos límites aproximados para cada configuración de α entre 1.3 y 1.9.

La tabla 2 evidencia un claro ejemplo de convergencia para los periodos de reproducción de estrellas para el caso $\alpha = 1.5$. Esto demuestra que la hipótesis dada en el problema: “Suponiendo que la evolución del sistema tiende a un cierto equilibrio periódico” se cumple. Esto ocurrió para todos los valores tomados por α entre 1.3 y 1.9. Se utilizó un paso de tiempo $\Delta = 0.001$ y un intervalo $[0, 100$ millones de años]. La tabla 3 muestra cada uno de los periodos límites obtenidos para las mismas configuraciones.

Intervalo	Periodo (en millones de años)
1	9.800000000010145
2	10.371000000001516
3	10.489999999975552
4	10.510999999975503
5	10.513999999994354
6	10.515000000050208
7	10.515000000050208
8	10.516000000050212
9	10.515000000050208
10	10.515000000050208
11	10.515000000050208
12	10.515000000050208
13	10.515000000050208
14	10.515000000050208
15	10.515000000050208
16	10.516000000050208
17	10.515000000050208

Tabla 2: Periodos de reproducción de estrellas para un modelo en el cual sus constantes son las del caso 2 pero en el que se considera $\alpha = 1.5$.

Valor de α	Periodo límite (millones de años)
1.3	41.089000000196194
1.4	18.490000000088287
1.5	10.515000000050208
1.6	6.419000000030650
1.7	4.43999999997539
1.8	4.17399999999854
1.9	3.90699999999766

Tabla 3: Periodos límites de reproducción de estrellas para un modelo en el cual sus constantes son las del caso 2 pero que se varían los valores de α entre 1.3 y 1.9.

En la tabla anterior, es evidente ver que la frecuencia con la que se reproducen las estrellas o, en otras palabras, el tiempo que dura el ciclo en el que se generan estas, está caracterizada por los periodos mostrados en la tabla anterior. Además, se puede apreciar que el valor de α es inversamente proporcional al periodo límite de cada caso.

La figura 20 muestra el gráfico del periodo límite de reproducción de estrellas en función de α . Los datos utilizados para graficar fueron obtenidos de la tabla 3. Se considera un paso de tiempo $\Delta t = 0.001$ millones de años en un intervalo $[0, 100$ millones de años].

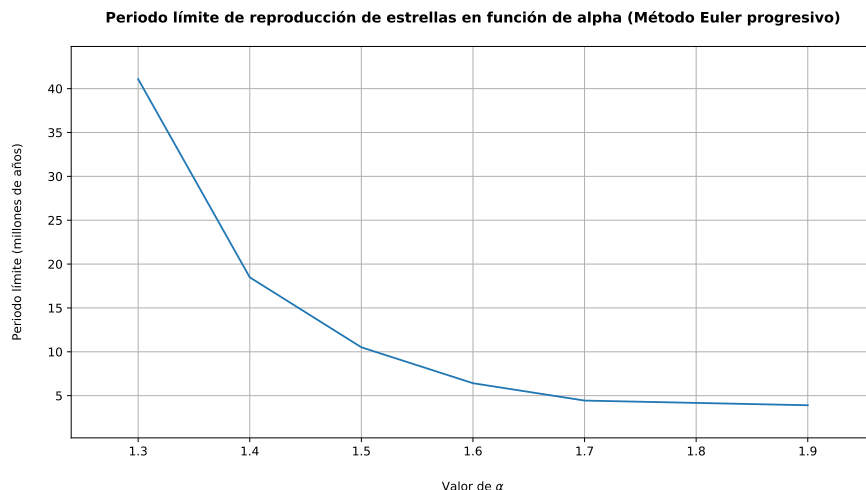


Figura 20: Gráfico del periodo límite de reproducción de estrellas en función de α . Obtenido al resolver el sistema asociado al modelo de formación de estrellas con el método Euler progresivo.

A partir de la figura anterior, se puede apreciar la relación inversa descrita anteriormente. Los ciclos de reproducción se hacen cada vez más pequeños. Esta es una función claramente decreciente y a simple vista parece converger para $\alpha > 1.9$. Esto puede ser atribuido al comportamiento observado en los gráficos de las figuras 17-19, pues los periodos comienzan a ser cada vez más pequeños. Esta situación refuerza lo comentado a partir de los gráficos de las figuras 7-12, pues se había observado que el sistema tenía la tendencia de evolucionar a un estado estacionario a medida que se aumentaba el valor de α .

Nota: el gráfico asociado al periodo límite obtenido con el método de Runge-Kutta no fue incluido en el informe debido a la redundancia de los datos, ya que se grafica en la figura 21.

La figura 21 muestra una comparación de las curvas del gráfico del periodo límite de reproducción de estrellas en función de α obtenido a través de los tres métodos tratados en este informe: Euler progresivo, Runge-Kutta de orden 4 y Runge-Kutta-Fehlberg. Se considera un paso de tiempo $\Delta t = 0.001$ millones de años en un intervalo $[0, 100]$ millones de años].

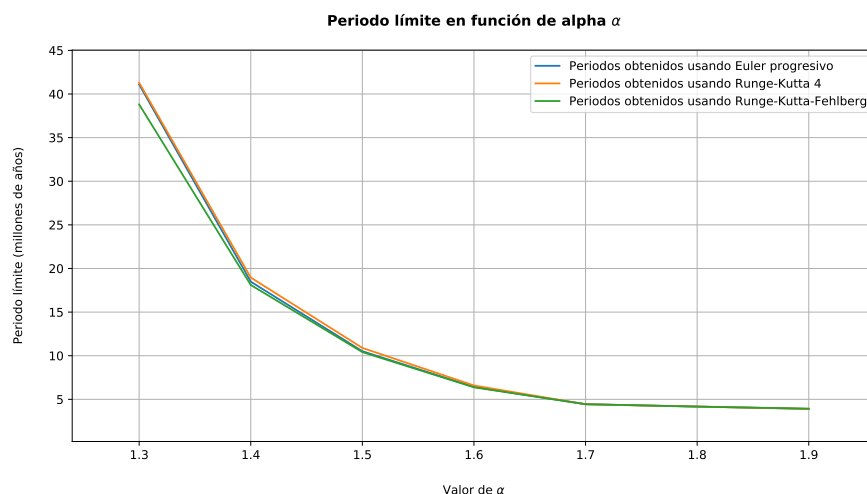


Figura 21: Gráfico comparativo del periodo límite de reproducción de estrellas en función de α para cuando se resuelve el sistema asociado al modelo de formación de estrellas con los métodos Euler progresivo, Runge-Kutta de orden 4 y Runge-Kutta-Fehlberg.

La frecuencia con la que se reproducen las estrellas es en esencia la misma, independiente del método utilizado. Aún así, se tiene que los métodos usados no coinciden exactamente. Lo anterior, se debe a la precisión de cada uno de estos métodos; todos tienen asociados distintos errores de aproximación. Además, cabe destacar que existen errores sistemáticos asociados a la resolución del sistema.

Conclusiones

Una de las principales conclusiones a la que se llegó en la realización de este trabajo fue que el comportamiento de los modelos planteados a través de ecuaciones diferenciales puede variar dependiendo de las condiciones iniciales y constantes que se le asocian a estos. Un claro ejemplo de esto es lo que sucedió al momento de cambiar los valores de α , ya que las variables del sistema podían comportarse de manera periódica o tender a un estado estacionario dependiendo de las configuraciones que se le hacían a las simulaciones.

Ahora, en relación a los resultados obtenidos, se tiene que el modelo simple de formación de estrellas tiende a evolucionar hacia un estado estacionario a medida que se aumenta el valor de α . Además, es notable que para ciertos valores de esta constante, el sistema tenderá a un equilibrio periódico, es decir, la reproducción de estrellas tenderá a adquirir un comportamiento cíclico; se formarán estrellas a partir de las masas atómicas y moleculares presentes en el sistema y, su vez, estas se volverán a transformar en aquellos componentes que las formaron. Esto último se refleja en las proporciones de fracción de masa que se le atribuía a cada variable.

Otro aspecto importante a resaltar es que los métodos numéricos utilizados necesitaban de un paso de tiempo adecuado para poder realizar bien las aproximaciones. Cuando esto no se tenía en consideración, dichos métodos podían divergir. Un claro ejemplo de esto es el método de Runge-Kutta de orden 4, que para ciertos pasos de tiempo sus soluciones se alejaban considerablemente del intervalo de soluciones posibles. Además, cabe destacar que no todos los métodos resultan ser igual de eficientes en cuanto al procesamiento de información. Por ejemplo, el método de Euler permitía llegar a soluciones muy similares con un cómputo mucho menor, pues resultaba ser aproximadamente 100 veces más rápido que los otros. Sin embargo, es destacable que, si bien existen métodos más rápidos que otros, también existen unos más exactos. Escoger cuál método utilizar dependerá de la exactitud que se precise de las soluciones.

Los análisis presentes en este trabajo no podrían haberse llevado a cabo sin las herramientas computacionales utilizadas. Es importante notar que estas facilitan el trabajo científico y el modelamiento matemático de sistemas presentes en la naturaleza. Esto tiene una gran importancia, ya que permite entender el universo y los fenómenos que en este se desarrollan.

Referencias

- [1] Universidad de Chile Escuela de Ingeniería FCFM. «Tarea Numérica (Modelo simple de formación de estrellas)». Mayo de 2021.
- [2] José Gómez. *¿Qué es un ciclo límite?* 2011. URL: <http://www.josegomez.net/2011/01/que-es-un-ciclo-limite.html> (visitado 13-05-2021).
- [3] T. Menarguez y L. Garmendia M. Molero A. Salvador. «Análisis matemático para la ingeniería». En: Prentice-Hall Inc., 2007, págs. 775-863.
- [4] John H. Mathews y Kurtis K. Fink. «Numerical Methods Using Matlab». En: 4th edition. Prentice-Hall Inc., 2004, págs. 497-499.
- [5] Axel Osses. *Ecuaciones diferenciales ordinarias*. Departamento de Ingeniería Matemática, Universidad de Chile, 2018.
- [6] SciPy.org. *scipy.integrate documentation*. 2008. URL: https://docs.scipy.org/doc/scipy/reference/generated/scipy.integrate.solve_ivp.html (visitado 13-05-2021).
- [7] Wikipedia. *Estado estacionario*. 2021. URL: https://es.wikipedia.org/wiki/Estado_estacionario (visitado 13-05-2021).